

アナグリフは、なぜ飛び出して見えるのか — 立体視をテーマにした系統的学習の試み —

広内 哲夫, 林 文子

Why the Anaglyph Appears to be Stereoscopic? — An attempt to make systematic learning taking up the stereoscopic vision as a theme —

Tetsuo Hirouchi and Fumiko Hayashi

要約

筆者らは、中学生や高校生の興味ある 3D を学習テーマに掲げ、彼らが立体視の原理を系統的に学ぶ中で、「教科を関連付けると、そこに『なぜ、どうして?』を解決できるヒントが存在する」というメッセージを生徒達に発信できるような 3D 教材の開発を試みた。その教材の中身は次の通りである。: 中学生や高校生は、立体視の実験を通してその基本原理を学び、その応用として簡単なアナグリフの制作法を学ぶ。そして、高校生は発展学習として、立体視をモデル化する際の問題点を解決するのに、数学が武器になることを学ぶ。

Abstract

Taking up the 3D as an objective of interest for the secondary and high school students as a learning theme, the authors of this paper made an attempt to develop the 3D teaching material enabling us to deliver a message to the students in purport that during the process of their learning the theory of the stereoscopic vision the subjects “why? And how?” can be solved when the learning subjects are studied in a correlated manner.

The material of the learning is as follows: Allowing the secondary school students and general high school students to learning the fundamental theory of the 3D through the experiments of stereoscopic vision and thereafter enabling them to learn two methods of drawing some simple anaglyphs as the application of the learning of the fundamental principle.

Furthermore the high school students who wish to take scientific courses throughout their life are induced to be aware of the fact that mathematics is an efficient weapon to solve the problematic points when the stereoscopic vision is reduced into a specific model as developed learning.

はじめに

子供達の多くは飛び出す 3D 絵本などに会おうと、その不思議な魅力に心を惹かれてしまう。子供向け雑誌に掲載されている、赤青メガネを掛けて見る「アナグリフ」あるいは一見ただけでは分からない模様の連鎖の中から突然立体図が浮かんでくる「ランダムドット・ステレオグラム」

は^(文献1)、時間を忘れさせる程に彼らを熱中させるようである。これは昔から小中学校でよくみられる光景であるが、現在では、電気店は3Dテレビを販売し、映画会社は3D映画を上映し、ゲーム機器会社は3Dゲームを提供し、大人も子供も3Dを楽しめる世の中となっている。

筆者の広内（文教大学情報学部）は1980年代の頃から、アナグリフや3D写真、3D映画に興味を持っていた。2000年初め頃は、当時の最先端技術であるVRML（3次元CGの一つ）を用いたコンテンツの制作をゼミナールの課題とし、その3D化の研究も進めてきた。そして最近では、3D技術を応用した3D写真ズームシステム（SPV）を制作し^(文献2,文献3)、博物館にSPVの3Dコンテンツを納めている。このような経験を通して、3Dコンテンツは、その教材の作り方にもよるが、子供達に科学的な思考能力を養わせるような内容を有しているのではないかと、筆者は常々思っている。

日本では、科学技術は難しいものという雰囲気が強い。また近年では、子供達の間で理数離れが進み、それとともに「なぜ、どうして？」を考える教育が衰退している。科学の基礎教育では、「なぜ？」と発想することが大切であるが、今の日本ではそれが忘れられている。文部省も危機感を募らせ、2000年から「総合的な学習の時間」（総合学習）を小中高校に開設し、児童・生徒達が主体的なものごとを考える力を養えるように、教科の壁を取り払った教育に舵をきっている。

このような状況を踏まえて、筆者らは、生徒達が興味を持つ3Dを学習テーマに掲げ、「立体視の原理を系統的に学ぶと、通常は個別に教えられる教科内容の中に、『なぜ、どうして？』を解決できるヒントが存在する」というメッセージを生徒達に発信できるような3D教材の開発を試みたのである。本稿では、その教材内容の紹介を行っている。（なお、中高校の基礎教育レベルを念頭に置いているので、その教材からは世の中でよく紹介される3Dの工学的な内容は除外している）。

[本稿の構成および内容]

●第1章（立体視の基本原則とアナグリフ制作）は、筆者の林（文教大学附属中学高等学校）の「中学高校の総合学習」における指導経験に基づいており、筆者2人が検討して教材化した内容を広内が実験方法にまとめたものである。子供達がここで示した実験を通して立体視の原理を理解できれば、彼らの喜ぶアナグリフを簡単に作成することができる。この章で示す実験内容は、中学校から高校生までの総合学習あるいは系統学習の教材に使用できるものであるが、工夫次第では小学校高学年にも使用可能と思われる（勿論、立体視に興味がある大人も対象ではあるが・・・）。

●第2章（両眼立体視における立体像の視認プロセス）は、赤青メガネを介してアナグリフの立体像を視認するプロセスを、筆者の広内が記述した。現在の3D機器のそのほとんどが、本稿で紹介するアナグリフと同様な立体視の原理に基づいている。本章の対象は、中学生から高校生である。

●第3章（教科横断的学習への立体視学習からの教材支援）は、筆者の広内がこれまでの3D技術の研究と個人的な興味や体験に基づいて記述した内容である。この教材の内容は、理系を目指す高校生の特別発展授業の教材に向いている。本章では、以下の2つのテーマを設定している。

1つ目は「モデル化の問題」である。両眼立体視で視認する立体像は、脳の中で認知される虚像であり、いわば「仮想」の像である。一方、外界から網膜までの起こる現象は、実体の関与する「現実」の現象である。仮想と現実とは相反する概念なので、この2つの概念を統一してモデル化するのは可能なことであるのか？ この種の問題は、通常は無意識のうちに「解決できている」と思うことが多いが、高校時代には、一度は熟考してもよいテーマであると思われる。

2つ目は「分母ゼロの問題」である。数学モデルから導出される式には、分母がゼロになる場合

が存在する。中学校の数学では、分母ゼロは除外すべきであると指導されるが、その理由は明確には教えられないのが普通である。高校の数学でも、生徒達は試験によって機械的に分母ゼロを区別して解答するように訓練されるが、分母ゼロを数学で避ける意味を正確に理解している生徒は、極まれである。しかし、本稿で取り上げるように、立体視の数学的なモデル化において、立体像の視認が困難になる状態で分母ゼロ状態が出現する。不思議と我々の身近なところで分母ゼロ問題は起きているのである。立体視のテーマを通して、生徒達に分母ゼロの、具体的な意味を掴み取ってもらいたい。

●第4章（立体視の発展的な学習に向けて）は、筆者の広内の興味で執筆したものである。人間の思考法の遠い先は現代物理学の深遠な部分にまで繋がっている。そこで、第3章の思考の延長線上で関係すると思われる現代物理学のテーマを2つ選んで取り上げる。それは、「量子論におけるベルの定理」と「一般相対論における特異点問題」である。前者は「モデル化の問題」、後者は「分母ゼロの問題」に関係している。本章の内容は、大学の物理学志望の高校生向きであるので、特別な補足教材として扱って頂ければ幸いである。

第1章 立体視の基本原則とアナグリフ制作

本章では、立体視の基本原則を実験（実作業）を通して学び、その原則を応用して、アナグリフの制作を試みる。用意する文具は、赤ペン、青（シアン）ペン、黒ペン、A4の白色用紙、A4の方眼紙、赤青メガネ（ネット通販で購入可能）である（赤青メガネは自作すると、実習のモチベーションは高まる）。学習に参加する生徒達は、以下の実験を行っていく。

1.1 節 予備実験：立体視の予備実験

黒ペンで白紙に余白を残した状態で黒枠を描き、その中に、まず、赤ペンで、それ程大きくない丸（○）や四角（□）あるいは三角（△）を適当に散らばらせながら描く。そして青ペンを用いて、前述の赤く描いた個々の図形（○、□、△）に対してそれと同じ形で同じ大きさで、左右に任意の間隔（両図形が完全に重なる状態から半分程度重なる状態までの間隔）だけ離して（ただし、上下の位置はそろえる）描く。それを図1（予備実験）に示す。

そして、赤青メガネをかけて、この補色関係の色である赤と青で描かれた図を眺めてみる。そうすると、丸や四角あるいは三角が飛び出したり、引っ込んだりしている立体像を見ることができる。生徒は過去にこのような立体的な図形を眺める体験が初めてではなくとも、自分で描いた図が立体的に見えると、つい「ウォー」という感動の声を上げてしまう。このような赤青メガネを掛けて眺める図形をアナグリフ（Anaglyph）と呼ぶ（アナグリフは19世紀半ばにヨーロッパで開発された立体視技法であるが、現在まで愛好者たちによって維持され発展して来ている）。

ここで、次の点に留意して頂きたい。紙媒体の本稿で、アナグリフを眺める場合、紙面のインクあるいは読者の方が装着している赤青メガネの波長特性によって、クロストーク（3Dメガネから左右の光が漏れて像が2重に見える現象）が発生して、十分に立体視できない場合がある。このようなときは、ウェブから本稿のPDF版論文を検索してダウンロードし、パソコン画面で論文に掲載されたアナグリフをご覧になることをお勧めする。その際、本稿末尾の「画質調整について」をお読み頂きたい。画質調整されたPDF版論文のアナグリフは、かなり質感よく立体視することが出来るはずである。

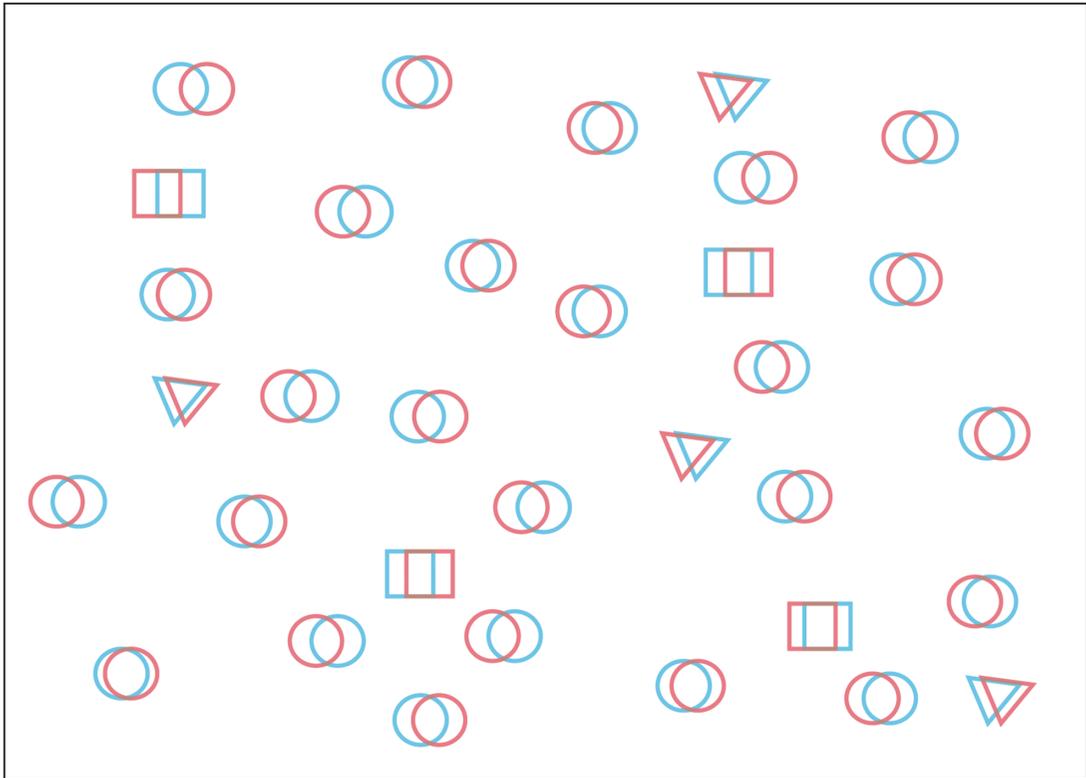


図1 予備実験のアナグリフ

☆

☆

☆

立体視の原理を探るには、まずは、色々な図形のアナグリフを描いて眺めてみるのがよい。この実作業から立体視の基本原則を発見できるのである。アナグリフでは、赤い図形と青い図形の間隔によって、飛び出したり引っ込んだりすることに気が付く。本稿では、この間隔を「ズレ」（立体視の正式用語では“視差”）といい、このズレ幅が立体視に関係していることを、1.2節の実験で明確にする。

なお、上記では“立体像を見る”という表現を使っているが、それは正確な言い方ではない。“立体像を見る”という言い方は見える対象物が実際にそこに存在するときの言い方である。後で説明するが、立体視の場合には「脳内で作り上げられた像（知覚された立体像）を、人間は立体的に見えると感じる」のである。そこで本稿では以降、“立体像を視認する”という表現を用いることにする。“視認”の意味は「眼を通して網膜に映った像を立体像として脳が認知すること」と言う意味で使用している。立体像は実在しないので、手で触れることは出来ないが、立体視の展示会や3D映画館では、立体像に触れたくなくて、つい無意識で手を出してしまう人も多い。

1.2節 基礎実験：立体視の原理の探求

上記のズレ幅の大きさが立体に関係していることが分かったので、立体視の基本原則を探ることを試みるために、描く図を単純にしてみよう。図2（基礎実験）に示すように、間隔を空けた青と

赤の2本の縦線を描く。その場合、上段の左端の図形要素①では、青と赤を重ねて描く。そして右の図形要素に移るに従って、青を基準に赤を青の右側に配置して間隔を少しずつ広げて描いていく。右端の図形要素④における青と赤の縦線の間隔は、上段4つの図形要素の中で最大となる。

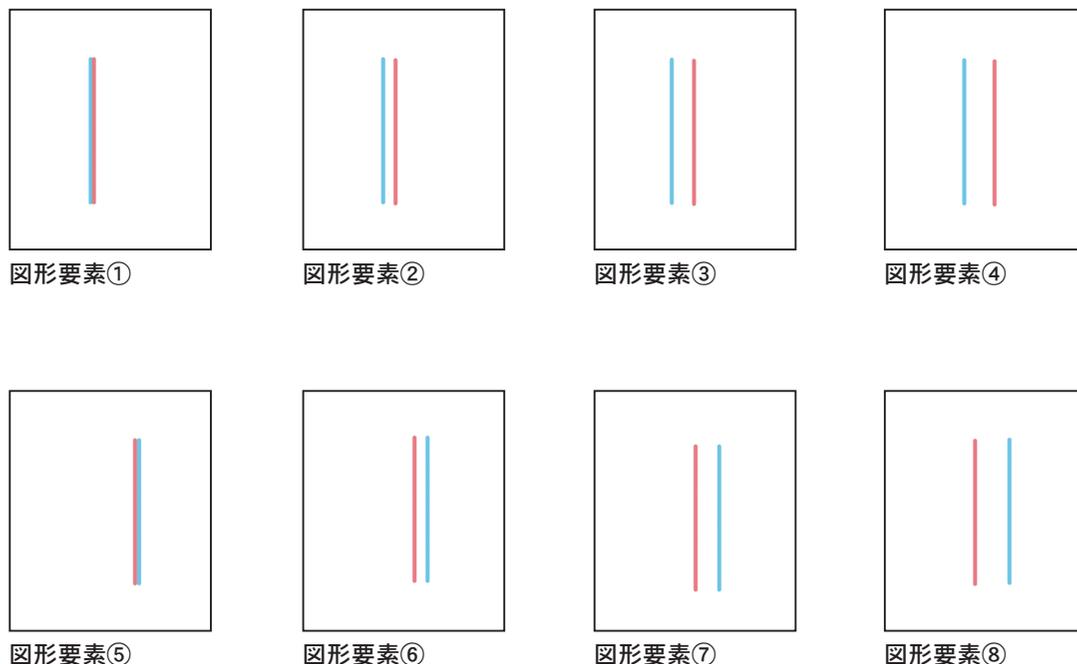


図2 基礎実験のアナグリフ

次に下段である。上段と同じことを行うが、この場合、青と赤の縦線の位置を入れ替える。左端の図形要素⑤は、青と赤の縦線が重なっているが、図形要素が右に移るに従って、青を基準として、赤は青の縦線の左側に間隔を置いて描かれる。右端の図形要素⑧では、その間隔は最大となる。

この8つの図形要素を赤青メガネで眺めると、どのように立体像を視認することが出来るであろうか。それは上段から、図形要素①から図形要素④に目を移すに従って、一本の縦線の立体像が視認され、それはより奥に引っ込んでいく。では下段ではどうか。図形要素⑤から図形要素⑧に移るに従って、一本の縦線の立体像が視認され、それはより飛び出してくる。ズレのない図形要素①と図形要素⑤は、縦線の立体像は紙面上に存在するように視認される（最良の状態の赤青メガネで眺めた場合でも、僅かなクロストークの発生が避けられないので、立体像の背後に赤の線あるいは青の線が僅かに見える場合も多い）。

ここで、以後の説明を分かりやすくするため、青と赤の縦線のズレ幅すなわち間隔を数値で表わすことにする。青の縦線を基準とし、赤が青の右に描かれている場合を正のズレとし、赤が青の右側にズレ幅を広げていくに従って、その数値は増すものとする。赤が青の左に描かれている場合を負のズレとし、赤が青の左側にズレ幅を広げていくに従って、その数値の絶対値は増えていく。ズレがないときは赤と青の縦線が重なることになり、ズレ幅はゼロとなる。

[立体視の原理]

以上の実験的事実から、以下の規則が成り立つことが分かる。

- 規則① ズレが正の場合には、そのズレ幅が大きくなるに従って、視認される立体像は、引っ込んでいく。
- 規則② ズレが負の場合には、そのズレ幅の絶対値が大きくなるに従って、視認される立体像は、飛び出してくる。
- 規則③ ズレ幅がゼロの時は、視認される立体像は、紙面上に存在する。

これが、基礎実験で得られたアナグリフの立体視の原理である（2・3節で述べるステレオグラムの原理でもある）。「なぜ、これが原理なの？」と思われるかもしれない。これは、以降の実験で明確になることではあるが、上記の規則①から規則③を用いるだけで、立体視をシミュレートできるからである。現在の3Dテレビにおける最先端の立体技術もこの原理を用いている。この原理の視覚生理学的な内容は、第2章で詳細に述べることにする。

1.3節 応用実験1：平面の立体視

上記の基礎実験は、1次元の図形（縦線）であったが、横と縦に広がった2次元の図形の場合はどうだろうか。図3（応用実験1）に示すような図形を描いてみよう。

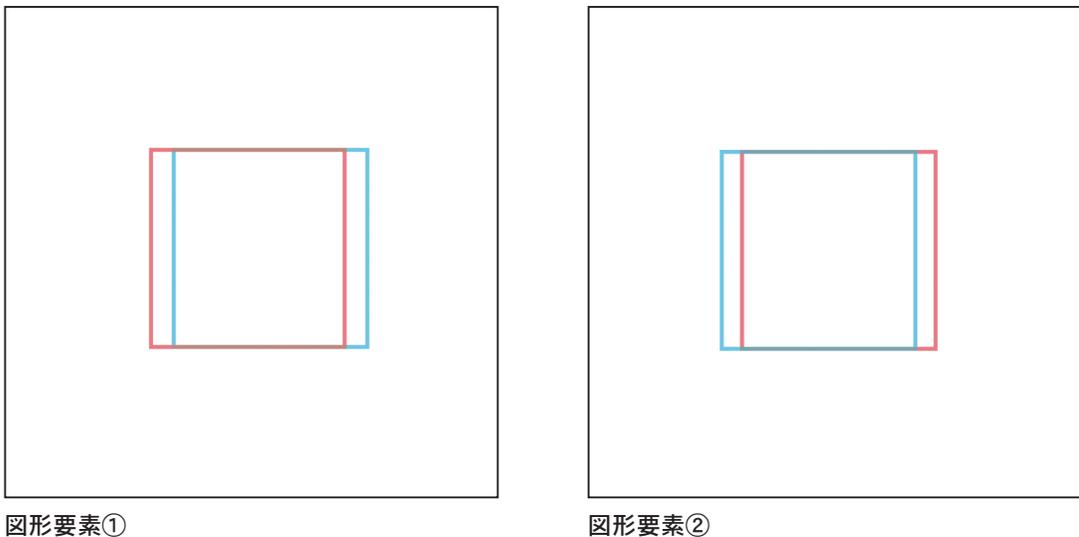


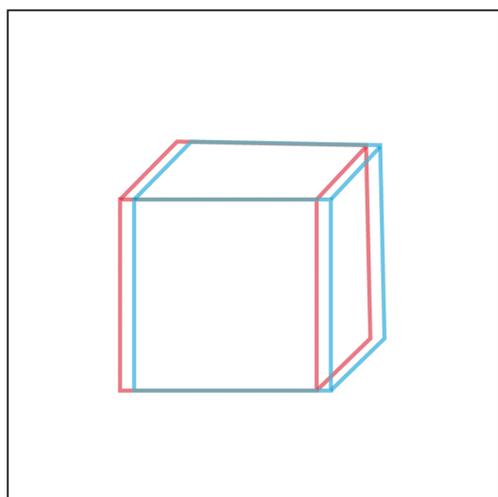
図3 応用実験1のアナグリフ

図形要素①では、赤の四角と青の四角が描かれているが、赤図は基準とする青図よりも、左側にずらして描かれている。基礎実験のズレ幅の説明で用いた正・負を用いれば、負方向にズレている。図形要素②の場合は図形要素①の場合と逆で、赤図は基準の青図の右側、すなわち正方向にズレている。これを赤青メガネで眺めてみると、図形要素①は飛び出して、図形要素②は引っ込んで、2次元の四角としての立体像が視認される。この理由は、基礎実験の規則①と②で得られた立体視

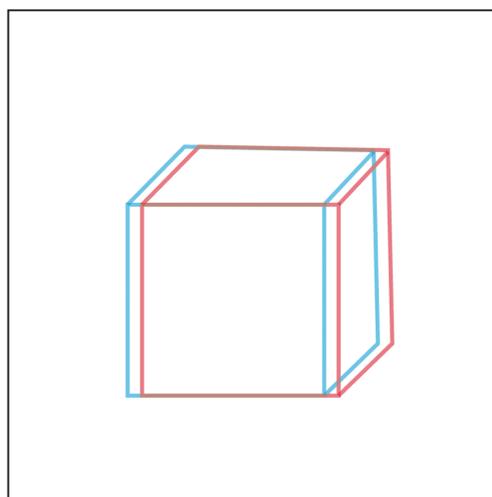
の原理に合致している。ただ、規則③については、ここでは示さなかったが、別途、赤と青の四角の図形を重ね合わせて描けば、紙面上に四角が視認されるはずである。

1.4 節 応用実験2：直方体の立体視

応用実験1では、平面(2次元)を視認したが、立体視で直方体(3次元)を視認できるであろうか。この実験を行ってみる。図4(応用実験2)のように、図形要素①では、基準とする青で紙面上に直方体(実際は2次元平面図として描かれるが、見た目は擬似的な3次元図形)を描き、赤で同じ寸法(大きさ)の直方体を左側に極僅かにずらして描く。図形要素②は、図形要素①とは逆に基準とする青で描いた直方体の右側に極僅かにずらして赤で直方体を描く。図形要素①では、青に対して赤は負にズレており、図形要素②では、青に対して赤は正にズレている。これを赤青メガネで眺めると、図形要素①では、紙面から飛び出して、また図形要素②では、紙面から引っ込んで、直方体の立体像が視認される。この場合も、立体像は、基礎実験で示した立体視の原理に従っている。



図形要素①



図形要素②

図4 応用実験2のアナグリフ

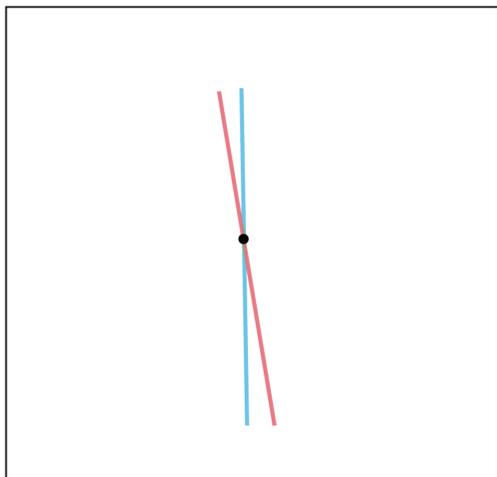
しかしながら、一応、感覚的には現実世界の直方体のように眺めることが出来るが、図形要素①と②のどちらも、紙面上の位置にはその立体像は存在しない。紙面の前方あるいは紙面の後方のどちらかにしか、立体像が視認されないのであれば、この仕方では興味ある立体図形のアナグリフを制作できない。立体像が紙面を手前から奥に貫いて存在するように視認できれば、アナグリフ全体のとしての立体像の迫力は増すはずである。

1.5 節 応用実験3：より現実感のある奥行き

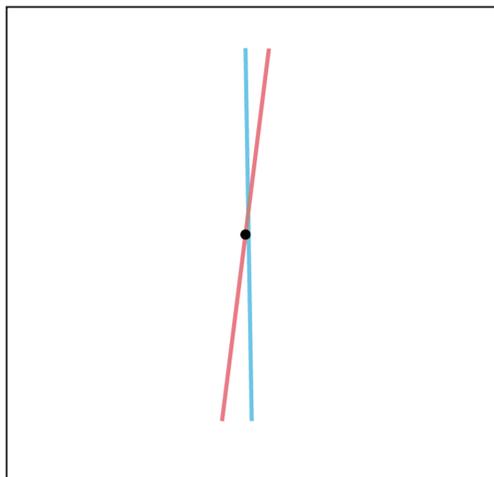
応用実験2までは、立体像はいずれも紙面から飛び出すか、引っ込むかであった。全体の立体像が紙面を手前から奥に貫いて位置するようにしたい。これが出来れば、立体像はより現実感のある奥行きを持つようになる。

図5(応用実験3)の図形要素①において、中央に基準となる青の縦線を描く。そして、赤の斜

め線を左上から右下に向かって青の縦線の中央を通るようにして描く。すなわち、線の最上端では、青と赤のズレは負であり、そのズレ幅の大きさを $-a$ ($a>0$) とすると、ズレ幅は、線の中央部に近づくに従って、徐々に a よりも小さな値となり、中央部ではゼロとなる。そして、最下端ではズレ幅は正でその大きさは a である。



図形要素①



図形要素②

図5 応用実験3のアナグリフ

図形要素②では、基準となる青の縦線に対して、赤の斜め線を図形要素①とは反対に、右上から左下に向かって青の縦線の中央を通るようにして描く。そのズレ幅は最上端では正で、その大きさを a ($a>0$) とすると、中央部に近づくに従って、徐々に a よりも小さな値となり、中央部ではゼロとなる。そして、最下端ではズレ幅は負でその大きさは $-a$ である。

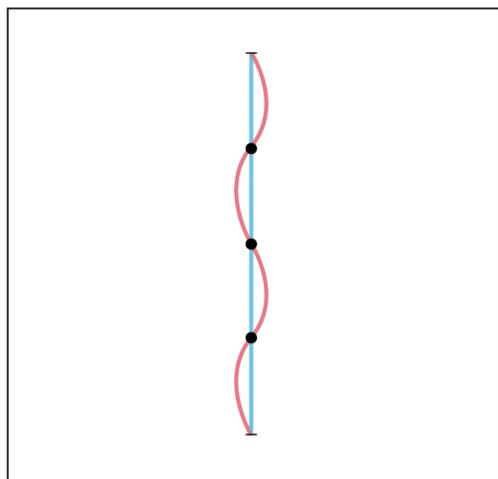
このアナグリフを赤青メガネで眺めると、図形要素①では、立体像はその縦線の中央部分が紙面上に存在した状態、上端が手前に飛び出した状態、下端が奥に引っ込んだ状態で視認される。図形要素②では、図形要素①とは反対に上端が奥に引っ込み、下端が手前に飛び出して視認される。このように視認されるのは、立体視の原理の規則①から規則③を考えれば、明らかである。すなわち、赤図形と青図形の間で、ズレ幅が正から負、あるいは負から正に段階的に変化するような配置をとれば、そのアナグリフから視認される立体像は、紙面を貫く自然で違和感のないものになると言える。

次にこのやり方で直方体のアナグリフを描いてみるが、その前に、応用実験3の応用版を応用実験4で示すことにする。

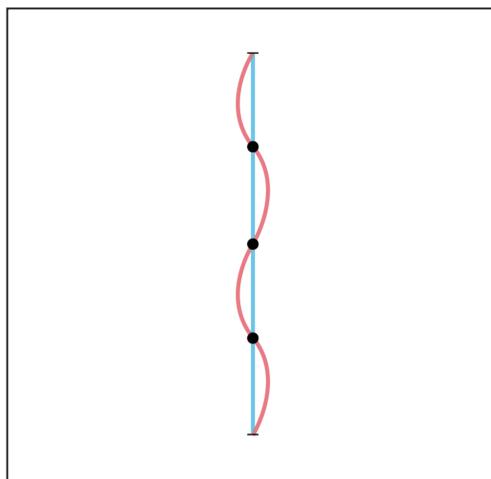
1.6 節 応用実験4：波状態の奥行き

図6（応用実験4）に示すように、図形要素①は、中央に青の縦線を描く。そして、その線を例えば4分割して、最上端から分割点を通る曲線を赤で描く。赤曲線は、最上端からの第1分割領域を青の縦線に対してズレ幅が正となるように描く。そして、第1分割点ではズレ幅がゼロなり、それ以降の赤曲線は、中央の分割点まで青の縦線に対して負のズレ幅になるように描く。以降、赤曲

線を sin 曲線（三角関数）のように描いていく。図形要素②の赤曲線は、図形要素①とはズレ幅が反対の符号になるように描く。



図形要素①



図形要素②

図6 応用実験4のアナグリフ

赤青メガネを掛けてこのアナグリフを眺めると、紙面を中心にその前後で波打っているような立体像が視認される。図形要素②の場合には、図形要素①に対してその波の打ち方が反対となる。このような立体像が視認される理由は、応用実験3の場合と全く同じ理由からである。基準の青の縦線に対して赤曲線でズレ幅を生成すると、立体像の奥行きに丸みを付けた状態で表現することが出来るのである。

1.7 節 応用実験5：より現実感のある直方体の立体像

この実験では、応用実験2の直方体の立体像よりも現実感のある直方体の立体像を視認できる直方体の図を描いてみよう。これは、紙面に描く青直方体（2次元図形）を基準として、それに対して赤直方体を、応用実験3の方法を適用して描くことである。それを図7（応用実験5）に示す。直方体を構成する6面の中で手前に見える面とそれに相対する後方の面（実際には他の面に隠れて見えない）を結ぶ稜線の描き方に、応用実験3の考え方を適用する。稜線の中央部（その点においては青に対する赤の稜線のズレ幅はゼロ）を基準点とする。赤の青に対する稜線のズレ幅を、図形を手前から奥に描く場合、最前端では定められた負の値とし、基準点に近づくに従ってその絶対値を小さくしていき、基準点ではゼロとする。そして、基準点以降、ゼロから徐々にその絶対値を大きくしていき、最奥端では定められた正の値とするように描く。

このアナグリフを赤青メガネで眺めると、真ん中部分で紙面を手前から奥に貫いて存在する直方体の立体像が視認される。立体視を行う閲覧者からすると、このような立体像は自然で現実感のある立体像と感じられるのである。

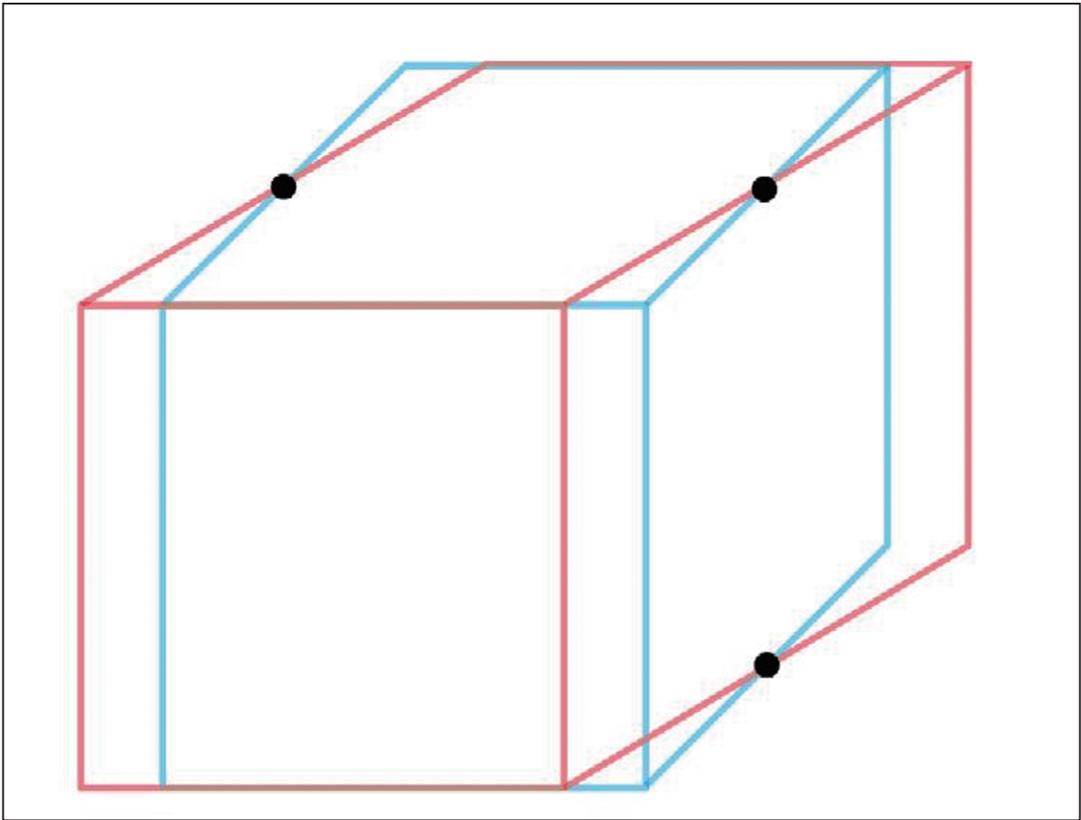


図7 応用実験5のアナグリフ

☆

☆

☆

以上の応用実験1から応用実験5までに示した制作技術を用いると、自由な形状の立体像を視認できるアナグリフを作成することが可能となる。以下に、このようにして制作された2つのアナグリフ作品を示す。

1.8節 作品制作1：文教式アナグリフ

図8（作品制作1）に示す多面体のアナグリフは、応用実験5の方法を用いて描いたものである。このような方法で描くアナグリフを、筆者の所属する文教大学の名を用いて「文教式」と呼ぶことにする。文教式アナグリフは、紙面を手前から奥に貫いた現実感のある精密な立体像を生成することができる。図8の多面体は、見える部分は8面であるが、見えない部分を含めると、最低12面体以上の多面体である。赤青メガネを用いると、多面体の中央部分で紙面を手前から奥に貫いた立体像が視認される。

文教式アナグリフを描くには、方眼紙を用いるとよい。青ペンで基準になる青図形を描いて、その後、応用実験3から応用実験5までの方法を用いて、赤ペンで青図形に対応する赤図形を描いていくのである。このような形式で自由な形状の物体を同一紙面に多数描くと、自然で迫力ある立体像を視認できるアナグリフを制作することが可能となるのである。

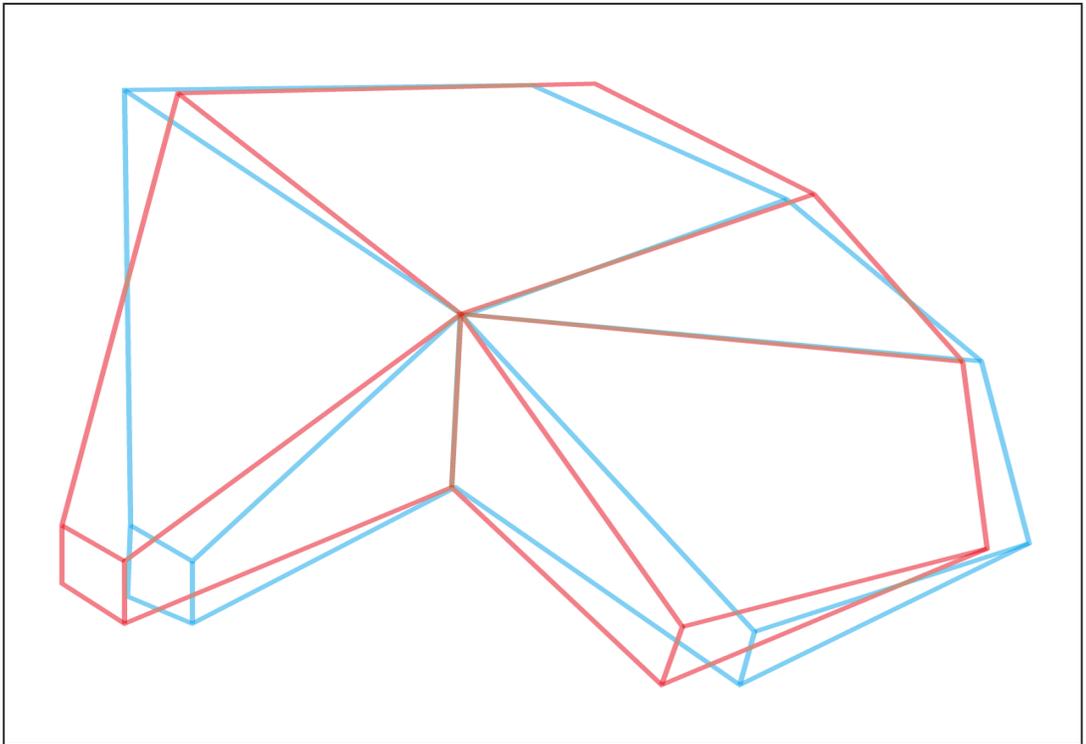


図8 作品制作1の文教式アナグリフ

1.9 節 作品制作2：遠山式アナグリフ

応用実験3と応用実験4だけを用いて制作することもできる。この方式で制作したアナグリフは「遠山式」と呼ばれている。遠山式アナグリフは、バンダイナムコゲームズ(株)の遠山茂樹氏が、氏のホームページで紹介しているものであり(文献4)、文教式アナグリフよりも簡単に描くことができる。氏の主催する立体視イベントの様子をホームページで見ることができるが(文献4)、そのイベントには小学校の低学年の児童もいて、彼らは楽しみながらこの遠山式アナグリフを作っているようである。

遠山式を用いると、斜め上空から地表面を眺めた風景などのアナグリフの制作が簡単になる。遠山式は、アナグリフの表面を地表面に見立てることから、通常の絵本を見るような90度の視線角度ではなく、45度程度の斜めの視線角度から眺めると、奥行き感是非常に効果的に現れる。実際の遠山式アナグリフの例を図9(作品制作2)に示す。

応用実験3の図形要素①の描き方を利用する。例えば木を描きたければ、その図形要素①の中央部(ズレ幅がゼロ)を木の植わっている地面とし、そこから幹が上空に向かって伸びているように描く。そのためには、基準となる幹の図形を青で描き、その幹に対する図形を赤で負方向のズレ幅となるように傾けて描くのである。すなわち、地面から上空へ伸びる棒の様子を立体像にしたければ、基準の青図形の棒を垂直に描き、それに対する赤図形の棒は、地面の根っ子部分を青図形の棒と重ね合わせ、その赤棒を青棒に対して負方向のズレ幅を保つようにして30度から45度程度で反時計回り方向に傾けて描けばよい。

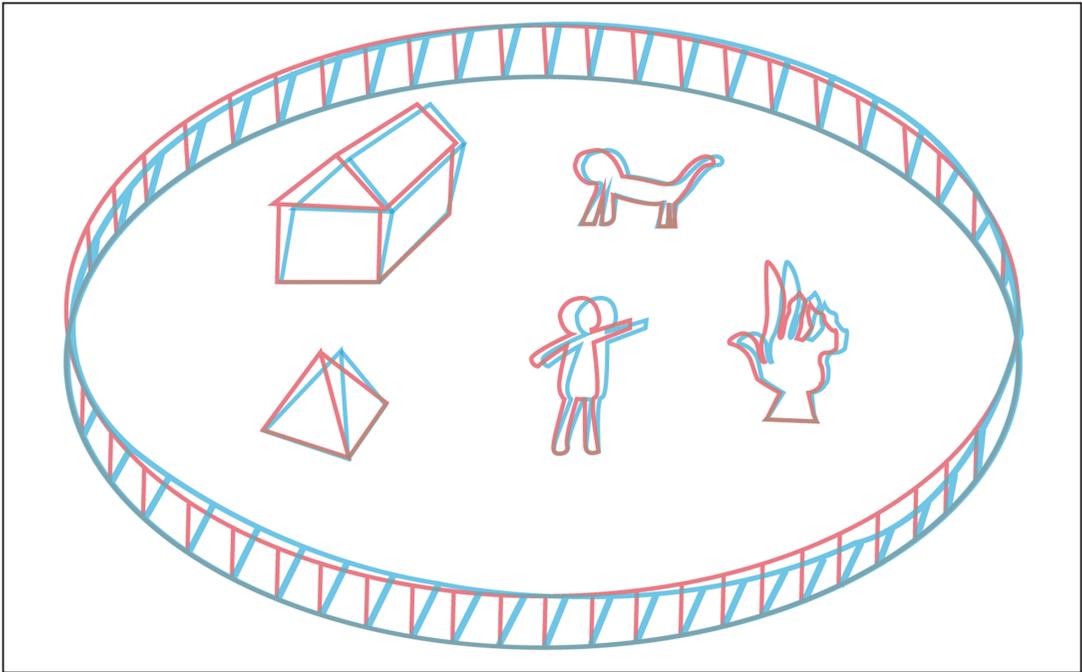


図9 作品制作2の遠山式アナグリフ

なお、赤棒を垂直に描いて、それに対して青棒を30度から45度程度で時計回りに傾けて描いても（ただし青と赤のズレ幅は負になるようにすること）構わない。立体視の結果は同じである。図9はこのようにして、赤棒を垂直にして描いたものである。

上記のような点に留意して、木、家、門、動物、人間、遊戯器などを描くと、楽しい動物園などを表現した遠山式アナグリフが簡単に出来上がる。地面から家、木、門などが飛び出す風景のアナグリフを立体視として皆で楽しむことが出来る（図9の作品はコンピュータを用いたお絵描きソフトで描いているが、赤と青のペンを用いて白紙に手書きで描くと、手の動きの自由さから、斬新な発想の面白いアナグリフを容易に制作することができる。挑戦してみたい）。

1.10 節 本章のまとめ

応用実験5まで実習を行うと、「アナグリフにおいて私達が立体像を視認できるのは、赤図形と青図形の配置においてズレが存在するからである」ということが分かる。そのもとの原理を質せば、基礎実験で行った規則①から規則③に行き着くのである。筆者らは基礎実験の箇所に示した実に単純な原理（人間の生理的現象）を応用して、作品制作1と作品制作2のアナグリフを作ったのである。現在の先端技術である3Dテレビには、3種類の方式、すなわち液晶シャッターメガネ方式、偏光メガネ方式、裸眼方式があるが、3Dテレビ用のコンテンツには、どの方式もアナグリフにおける規則①から規則③までと同様な規則が応用されているのである。

[参考情報 1]

実験に用いる赤青のペンと赤青メガネは、その相性が互いに良くないと、効果的な紙媒体のアナグリフを制作できない。筆者が用いた赤と青のペン、および赤青メガネを作るための赤と青のセロファンは、以下のものである（2013年5月時点）。なお、青ペンは、青色よりもシアン（水色）系色がよい。

○赤青ペン（マーカー状のもの）

赤ペン ZEBRA MILD LINER マイルドレッド

青ペン ZEBRA MILD LINER マイルドブルーグリーン

○赤青セロファン

赤セロファン 東京舞台照明製（赤は、適用範囲が広い）

青セロファン 東京舞台照明製 ポリカラー 普通版 No.780

[参考情報 2]

本稿のPDF版を用いてアナグリフをパソコン画面で閲覧するだけの場合には、市販の赤青メガネで十分である。赤青メガネは大手の文具店、あるいは以下のウェブサイトから得ることが出来る。なお、PDF版アナグリフをご覧になる際には、本稿末尾の「画質調整について」をお読み頂きたい。

『STEREO eYe』 <http://www.stereoeye.jp/>

[参考情報 3]

アナグリフは現在では、コンピュータ画像処理と融合して、これまでの赤青の2色だけではなく多色から成るカラーアナグリフと呼ばれるものに進化し、これによって立体写真をアナグリフ化することが出来る^(文献1)。立体感の弱いカラーアナグリフでは、左右の画像の視差が小さいため、裸眼で何気なく眺めた場合には、カラー写真のように見えることもある。カラーアナグリフは、自然光で撮影された写真画像（原画）においては、左画像は赤成分、右画像はシアン（緑+青）成分から構成されるので、その2つの画像を重ね合わせると、赤とシアンのズレの部分を除いた領域では原画の色彩（カラー）を原理的に再現できるのである。そのために用いるメガネは、赤・青系よりも赤・シアン系のメガネの方が効果的である。勿論、赤青（赤シアン）メガネで眺めた立体像においては、原画の色彩は再現されないことは言うまでもない。

筆者の広内が作成したカラーアナグリフを、以下に示す。



箱根富士屋ホテルの花御殿の風景（カラーアナグリフの一例）

第2章 両眼立体視における立体像の視認プロセス

本章では、第1章の成果を踏まえて、もう少し、立体像の視認プロセス（俗に言う立体的に見える過程）を明らかにしよう（文献¹）。第1章で述べたようなアナグリフ（さらには3Dテレビなど）を眺めて立体視を行う場合には、両眼を必要とし、片眼では立体視をすることは出来ない。このような立体視を「両眼立体視」と言う。

現在の3Dテレビなどの3D技術は、そのほとんどが両眼立体視の応用である。両眼立体視の原理は、基礎実験で示した立体視の原理そのものである。以降、この原理を人の視覚プロセスに対応して説明する。本章の解説教材は、中学高学年生から高校生向きである。

2.1 節 輻輳と開散

まず、人が絵画のような平面をどのように眺めているかを簡単に説明する（文献⁵）。この見方を立体視と区別するために、「通常の非立体視」と呼ぶことにする。図10に示すように、絵画面上の点Aを眺める場合、人は左右の眼球の視線を注視点Aに向ける。このとき眼球は内側に回転するが、この回転を輻輳、そして2つの視線の成す角を輻輳角と呼ぶ。また、眼球から注視点の絵画面までの距離を視距離と呼ぶ。左右の眼球の瞳孔間隔は、6才未満の子供で約5cm、一般の成人で約6.5cmである。また、眼球内の水晶体は、周りの毛様体筋と呼ばれる筋肉の働きによって、近くを見るときは厚くなり遠くを見るときは薄くなり、それによって焦点調節を行う。

ところで、注視点をA点から手前のB点に移したとすると、眼球はより内側に回転して、その視線の成す輻輳角は大きくなる。また注視点を絵画面よりも遠方に移すと、眼球は外側に回転するが、これを開散と呼ぶ。無限遠では、左右の視線は平行になり、そのときの輻輳角は0度である。個人差はあるが、眼球はそれ以上外側に向かっては開散しない。「読書した後、眼が疲れたときには空を眺めればよい」とよく言われるが、これは輻輳角が小さくなると、眼の筋肉の緊張が和らぐためであろう。

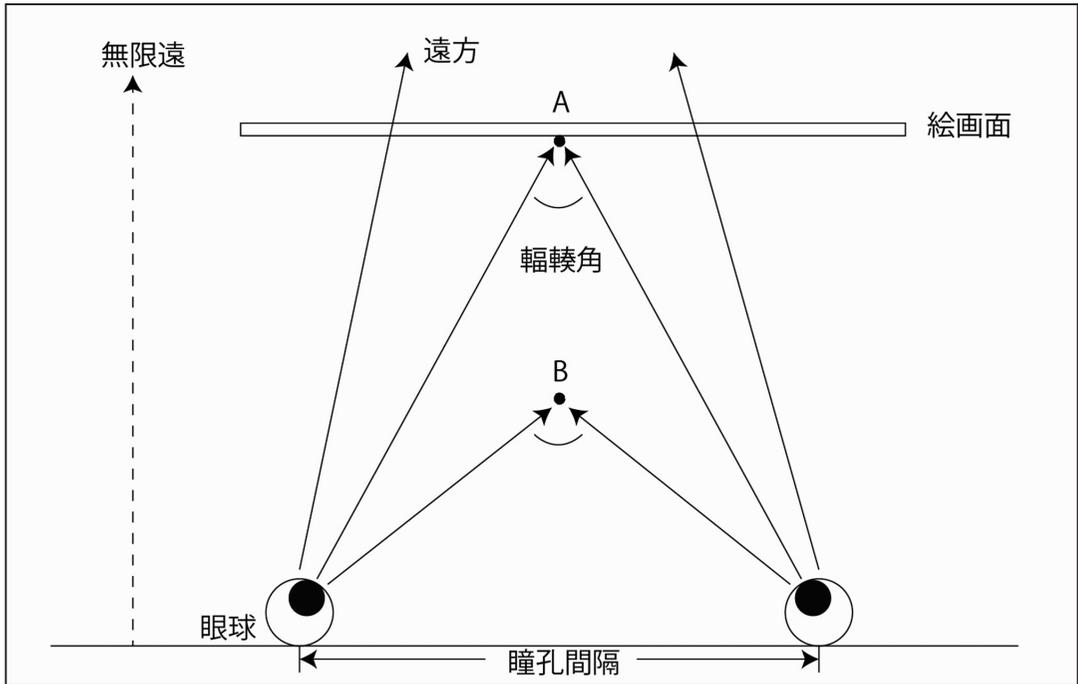


図10 眼球の動き (文献6)

2.2 節 両眼立体視の働き

人(猿や猫、鷹にも立体視能力はある(文献6))は、日常の風景を立体的に認識し、景色の遠近感を無意識に感じている。まず、人が無意識に感じる遠近感、すなわち立体感から始めよう。立体感は、両眼立体視と呼ばれる視覚の生理現象に基づくものである。(しかし、両眼立体視による立体感を知覚できない人は、日本人では統計的には1~2%程度は存在するとされている(文献5))。ただし、人は普段の生活においては、両眼視差だけに頼って奥行きを知覚しているのではなく、色々な要素を総合して立体視を行っていることに注意を要する。例えば、単眼でも立体感を得ることは可能である。これは水晶体の焦点調節を行う毛様体筋の動きなどからも、脳が立体感を知覚するからである。しかし、両眼立体視の役割は遥かに大きいと言える。

図11(a)に示すような2本の棒が置かれた3次元実世界(この世界を世界Wと言うことにする)を想定する(文献6)。そして、1本Aは中央の左側の前方に、もう1本Bは中央の右側の後方に置かれているとする。人がこの2本の棒を中央前方から眺めると、左眼と右眼の網膜にはそれぞれ、図11(b)に示すような2次元像が映し出されることになる(実際には網膜内で左右、上下はそれぞれ

れ逆転して映る)。この左右の網膜に映った2つの2次元像に基づいて、人の脳はその視覚生理機構によって、脳内に図 11 (a) の3次元の奥行きのある世界 W のイメージを再現するのである。

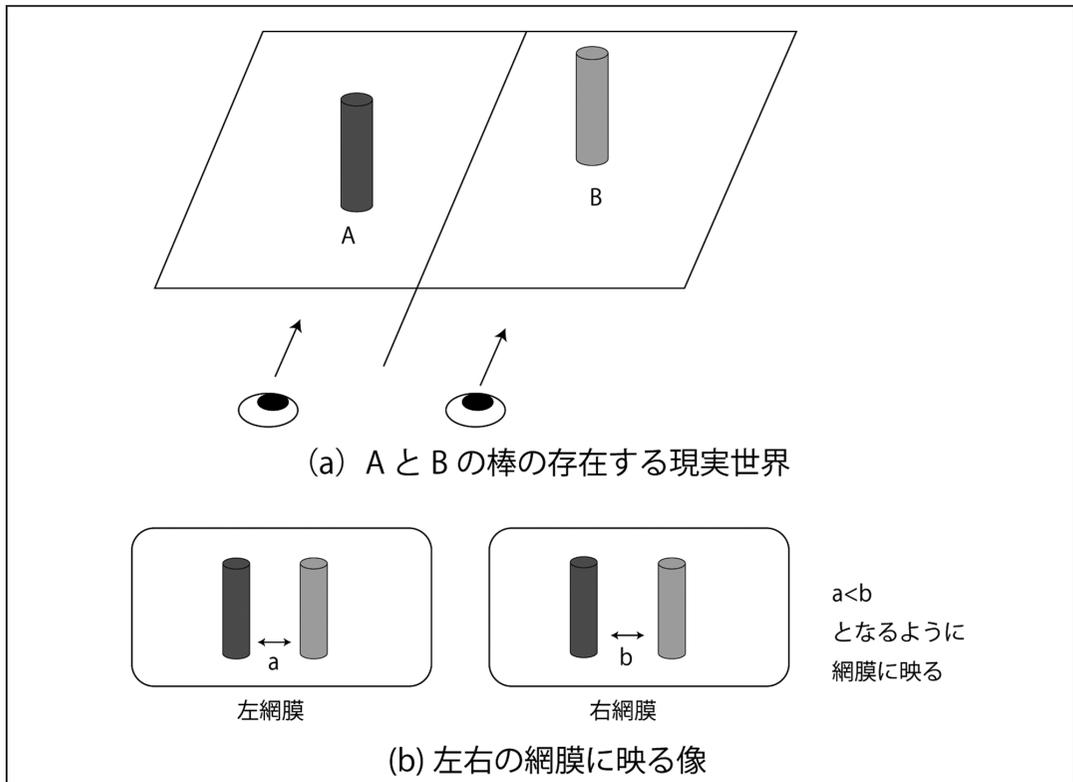


図 11 両眼立体視 (文献6:本図は文献の図を本稿の主旨に合うよう改変している)

奥行き感 (立体感) を感ずるのは、左網膜と右網膜に映る2次元像が微妙に異なっていることに起因する。図 11 (b) に示すように、左網膜上に映った棒 A の像と棒 B の像の間隔を a 、右網膜上に映った棒 A の像と棒 B の像の間隔を b とすると、左右の網膜に映った像の位置関係にはズレが生じていて、そのズレ幅は $a < b$ の関係が成立する (もしズレがなければ $a = b$)。このズレは、正式には両眼視差 (あるいは単に視差) と呼ばれる。このズレによって人の脳は、3次元実世界における物体の前後関係を知覚する。もし、網膜上で $a > b$ となれば、図 11 (a) において、棒 A、B の前後関係が逆転する。実際、網膜上で左右のズレを逆転 ($a > b$ とする) させるプリズム付きのメガネをかけた人は、前後関係の逆転した錯覚の3次元世界を体験することになる (文献6)。

2.3 節 アナグリフの仕組み

それならば、網膜に映る2次元像 (見た世界は世界 W とする) をズレのある2次元図として図形化し、その図を人の左右の網膜に提示してみよう。人間の脳は3次元世界 W を再現できるのであるか? それができるのである。これが立体視の基本原理となるものである。立体視を実現する2次元図をステレオグラム (Stereogram) といい、第1章で示したアナグリフは、ステレオグ

ラムの一種である。

現在の実用的な3D技術は基本的に、両眼視差に基づくステレオグラムの考え方を応用しており、それは脳に一種の錯覚を起こさせるものである。立体視のデモンストレーションは、チャールズ・ホイットストーンによって発明されたステレオビューアを用いて、1836年に初めて公開された。そのときのステレオグラムは手書き図形であったが、写真器が発明されてからは写真、その後は動画となっていく(文献7)。

立体視をアナグリフに戻してさらに話を進めよう。図12は、アナグリフを赤青メガネで眺めたときに、立体像を視認するプロセスを図式化したものである。赤青メガネには通常、左眼用として赤セロファン、右眼用として青セロファンが、フィルターとして取り付けられている。アナグリフの背景色を白とすると、赤図形は、左の赤セロファンを通過するが、背景の白の赤成分も通過するので、左の網膜には赤図形は映らない。しかし、赤図形は右眼の青セロファンにブロックされるが、背景の白の青成分は通過する。従って、右網膜には、赤図形が黒として映ることになる(このセロファンがフィルターとして充分機能しないと、1.1節で述べたクロストークが生じる)。

この過程を光の3原則から説明すると、背景の白色用紙から反射される光は、光の3成分、赤、緑、青から成っているが、左眼用の赤セロファンのフィルターは、赤成分の光のみを通過させ、他の緑と赤成分の光はブロックする。すると、図柄の赤図形は、背景の白色用紙の赤成分に紛れて、左眼の網膜では、赤図形は検知できない。もし、背景が黒色用紙であれば、赤図形は左眼の網膜で検知することが出来るのである。

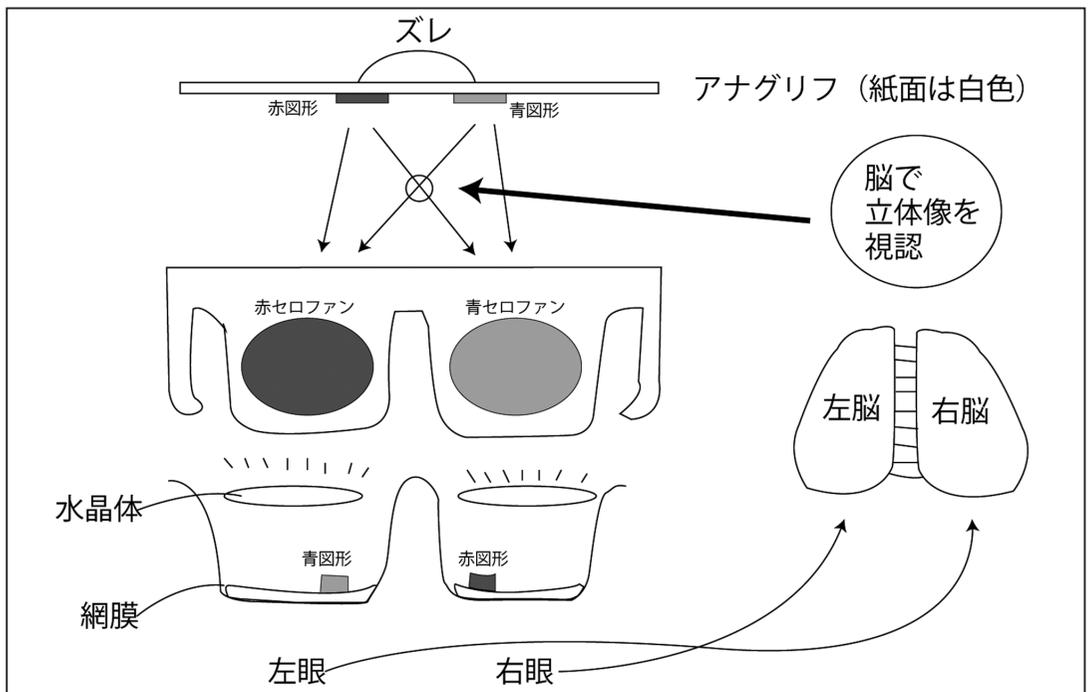


図12 立体視における立体像の視認プロセス

一方、青図形についても同じことが言える。青図形は、右の青セロファンを通過するが、背景の白の青成分も通過するので、右の網膜には青図形は映らない。しかし、青図形は左眼の赤セロファンにブロックされるが、背景の白の赤成分は通過する。従って、左網膜には、青図形が黒として映ることになる。

この左右網膜に映った赤図形と青図形のズレによって、脳はアナグリフに基づく立体像を創り出し、人間はそれを立体的なものとして視認するのである。立体視では、脳が立体像を創り出すことを「融像する」ともいう。融像された立体像は虚像であり、現実としての実像ではないことに注意を要する。実像であれば、投影して外界世界に映し出すことができるが、あくまで仮想としての虚像である。しかし、アナグリフは、その奥行き感の迫力は圧倒的であり、視覚におけるバーチャルリアリティの一種となっている。

2.4 節 3D 技術と視覚生理学の接点

脳の中で立体視がどのように行われるかは、視覚生理学のテーマとなって、脳科学者と言われる人々がその解明に取り組んでいる。脳には左右の網膜に映ったズレの情報を判定する特別な神経細胞が存在することが分かっている^(文献6)。脳の中の立体視認識部分に損傷があると、外界を立体視できない。しかし、現在の実用的な 3D 技術は、両眼立体視における視覚生理現象（第 1 章で示した立体視の原理）を基礎にしているので、脳神経細胞が立体視にどのように関わっているかという知見がなくとも実現可能である。人間の立体視における生理過程と実用的な 3D 技術の接点は、アナグリフの立体メガネと同様に、例えば 3D テレビでは、ズレのある左右の映像を如何にして機械的に閲覧者の左右の網膜に振り分けて提示すかということまでである。将来、立体視に関する超ハイテク技術が登場するかも知れないが、そのときは、人間の脳内で行われている立体視の視覚生理過程の解明が進み、その過程が 3D 技術に取り込まれることになるかもしれない。

第 3 章 教科横断的学習への立体視学習からの教材支援

自然科学（社会科学あるいは心理学の分野でもそうであるが）では、ある現象を説明するために、モデルを設定することが行われる。モデルとは「ある現象に対して、その本質部分を単純化して分かりやすく説明するために設定された代替表現物」と言えるものである。モデルを設定するのに仮定が導入された場合には、そのモデルは、別の観点から論理的に証明されるか、あるいは実験的に検証されるか、のどちらかが行わなければならない。そのモデルから得られる予測結果が、当該現象と常に一致するかあるいは当該現象をよく説明できるかすれば、そのモデルは、○○現象における□□法則、あるいは△△式と呼ばれるようになる。そうでなければそのモデルは廃棄されたり、修正されたりする。

本稿では、モデルを設定することを「モデル化」という。3.1 節では「立体像の奥行きを測定することは可能か？」というテーマで、この「モデル化の問題」を考察するが、これは理系志望の高校生にとって、発想的な推論能力を鍛える格好のテーマといえる。もう一つのテーマは、3.2 節において、立体像の奥行き測定のモデル化に伴って出現する数学上の「分母ゼロの問題」である。これも高校生にとっては、重要なテーマである。ここで紹介する教材は、教科横断的学習への教材支援（例えば物理学や数学への支援）として使用可能と思われる。

3.1 節 モデル化の問題

3.1.1 項 立体像の奥行き測定は可能か？

立体視で視認する立体像は実像ではなく、脳の中での仮想的な虚像であるが、この立体像の遠近距離を測定することは可能であろうか？ 高校でこのようなテーマでクラス討論を行うと、以下の3つの意見（高校生離れたハイレベルな意見かもしれないが）が出されるであろう。

①意見 A・・・「客観的な測定は不可能である」

長さを測定するという事は、理論的には定規のような実在物を用いて、実在する対象物を測定するである。高度な測定としては、レーザー光による計測器を用いることも出来るが、これは光の波長を使って計っている。光は実在する電磁波であるので、実在の対象物を計ることが出来る。しかし、立体像は脳の中で視認される虚像であるので、実際の計測は無理である。脳の中の仮想的な虚像に、どのようにして実在の定規のようなもの当てるのか。物理学的な客観性・正確性を求めるならば、これは不可能である。

②意見 B・・・「モデルを用いる」

虚像に直接、測定器を当てて客観的かつ正確に計ることが不可能であることは認める。そこで、立体像の位置を推計する幾何学的なモデルを組み立てれば、そこに数学式が適用できると思われる。この式を用いて位置を推計することが出来るはずである。ただ、このモデルは仮定なので検証されなければならない。この検証においては、モデルの正しさを論証によって証明するか、あるいはモデルから得られた式の計算結果が実際の奥行き感を十分に説明できることを実験を通して検証するか、のどちらかを行う必要がある。

③意見 C・・・「心理物理実験を行う」

確かに虚像は、手で触れられないので実体ではない。意見 B のようなモデル化が出来なければ測定は不能となる。しかし、測定を広義に解釈すればどうであろうか。意見 A は、測定を客観的で物理的測定に限定しているようであるが、その測定を人間の主観的な感覚に基づく測定実験（心理物理実験）までに拡張すれば、立体視という知覚を測定することは出来ると言えるであろう。例えば 1.9 節で紹介した遠山式アナグリフでは、鮮明な立体像が視認されるので、その立体像の奥行き（高さ）を心理物理実験で測定できるのではないか。ただし、その結果は、個々の被験者の主観的な感覚に依存するので、多数の被験者による統計的な結果となり、結果の評価は、物理学における客観的な結果とは区別されるものと思われる。意見 B では、モデルの実験的検証に言及しているが、この検証は、ここでの意見 C で言うところの測定実験に当たると思う。

☆

☆

☆

3つの意見が出たが、では、今回の奥行き測定には、どの意見を採用するのが良いと言えるのだろうか。以下に3つの意見を要約掲載する。

(A) 虚像なので原理的に客観的な測定は不可能である。

(B) 幾何モデルを構築できるとすると、数学という武器が利用でき、奥行きの推計は可能となる。

(C) 測定を人間の感覚を測定対象とする心理物理実験として捉えれば、その測定は可能となる。

このようなことを生徒達に討論をさせることは、単に式を解くテクニックを教えるよりも、遙かに意義深いことになると思われる。以下の 3.1.2 項と 3.1.3 項では、上記の3つの意見を関連付けて説明しよう。

3.1.2 項 奥行き推計のモデル化

立体像の奥行き測定に、物理学的な意味での客観性・正確性を求めるならば、高校生の意見 A のように、その測定は不可能である。また、心理物理実験の可能性を述べる高校生の意見 C では、奥行きは統計的な結果となる。一方、高校生の意見 B によると、立体像の位置の推計は、数学における初等幾何学と比例関係を用いて行うことができる。

そこで本稿では、高校生の意見 B を採用してみる。そして、幾何モデルを組み立てて位置の推計式を導くことを試みてみる(文献2,文献3)。まず、昔から光を集束させたり、発散させたりするものとしてレンズがある。光は光線という考え方で取り扱われ、レンズと光線を扱う学問として、光学が昔から存在する。従ってここでは、先人達の確立した幾何光学をこの問題に適用することにする。その理由は、アナグリフから出る光線は眼の水晶体を通過して網膜に達するが、この過程が純粋に幾何光学の過程である(文献6)ことによる。

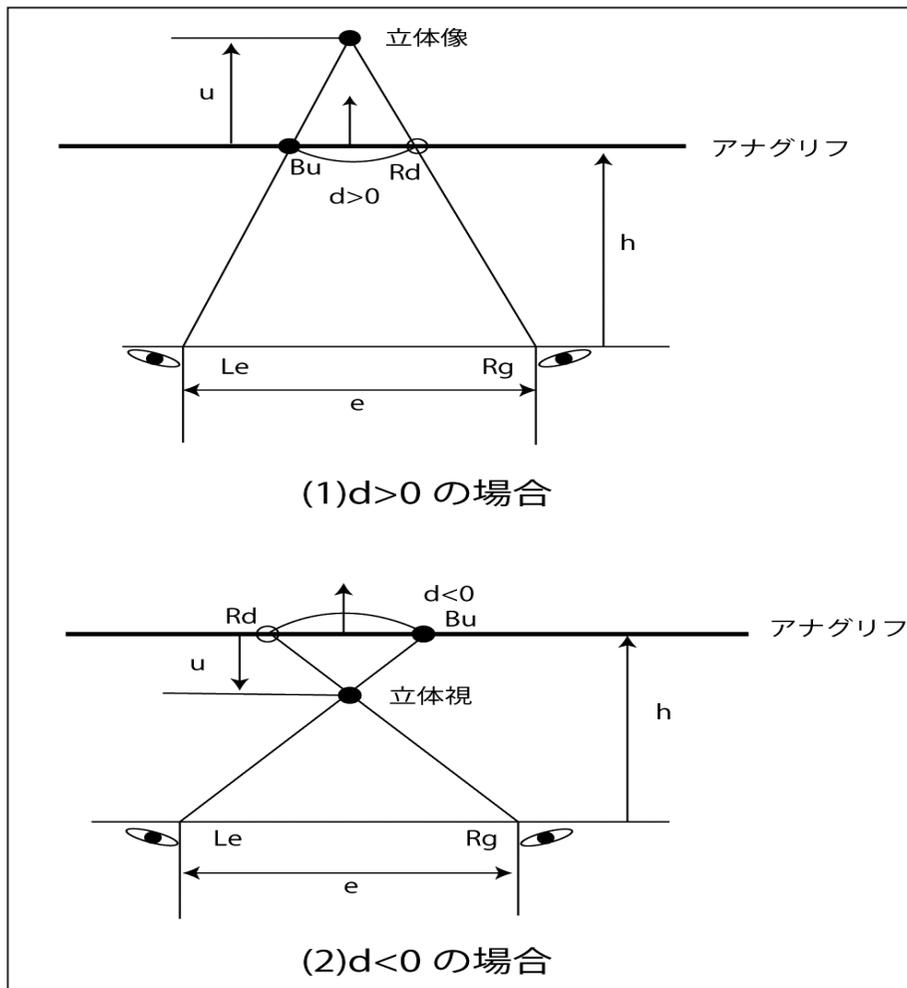


図 13 アナグリフから再生される立体像

まず、初等幾何学を用いたモデル化であるが、それを図13に示す。アナグリフの赤図形が右、青図形が左に配置されている図(1)の場合には、立体視の原理で立体像はアナグリフ表面よりも奥に視認される。そこで、この場合の幾何モデルは、左眼(Le)と青図形(Bu)を結んだ線、右眼(Rg)と赤図形(Rd)を結んだ線、との交点Aに立体像が視認されると仮定する。これは幾何光学からの類推であり、中学生の理科で学ぶ凸レンズにおける像を作図から求める考え方を用いている。図(2)は、赤図形が左側、青図形が右側にある場合で、立体視の原理で立体像はアナグリフ表面よりも手前に視認される。このときも立体像は上記と同様な交点Aに視認されると仮定する。なお、図13には示されていないが、青図形と赤図形が重なり合うときには、アナグリフ表面上の上記と同様な交点Aに立体像が視認されると仮定する。

図13の中に示されたズレ幅dは、青図形を起点とし赤が青よりも右側の存在するときには正の値、左側に存在する場合には負の値とする。また、立体像の座標位置uはアナグリフ表面を基準点(原点)として、前方(手前)に視認されれば負の値、後方(奥)に視認されれば正の値とする。

A点の位置に立体像が視認されると仮定したが、立体像は仮想的な虚像で実体はない。そこで、A点に立体像と等価な実在の物体が存在すると考えよう。このようにすると、仮想世界の虚像に対して現実世界の幾何モデルを適用できるのである。そこで、以下のような幾何モデルを構築する(このモデルは筆者が最初に提案したものではない(文献⁸⁾)。)

眼の位置からアナグリフまで距離をh、アナグリフ表面から座標位置Aまでの距離をu、瞳孔間隔をe、ズレ幅をdとする。また立体像は、それと等価な実在の物体に置き換えられている。ここで、図13(1)の場合には、大三角形($\triangle ALeRg$)と小三角形($\triangle ABuRd$)の相似関係(幾何モデル)から、以下の比例式(数学式)が成り立つ。

$$e : d = u + h : u \quad (d < 0, e > d)$$

同様に図12(2)の場合には、同様に以下の比例式(数学式)が成り立つ。

$$e : -d = u + h : -u \quad (d > 0, e > d)$$

また、ズレ幅dがゼロのときは、小三角形は形成されないで、実在物体の位置uはゼロとなる。いずれにしても、これを位置uに対して解くと、いずれの場合も、以下の式が得られる。

$$u = (d / (e - d)) \times h \quad (e > d)$$

ここでA点の実在物体を立体像に戻して、式uを立体像の奥行き(座標位置)を推計する式とし、この式の挙動を調べてみよう。立体像の位置の推計式uは、アナグリフと閲覧者との距離hに比例するので、同じアナグリフを遠ざかって眺めると立体像の位置uはより遠方に遠ざかる。また、立体像の位置の推計式uはズレ幅dの単調増加関数なので、ズレ幅dが大きくなるに従って、立体像の位置uは、遠方に遠ざかる。推計式uは、立体視の原理を一応満たしているようである。

3.1.3 項 幾何モデルの妥当性の検討

このように、仮想の虚像の位置にそれと等価な現実の物体を置いた幾何モデルを用いると、立体像の位置を推計することが出来るようである。これでモデルは完成したか? しかし、「この幾何モデルに妥当性を与える根拠は何か」と問われると、ハタと困ってしまう。

そこで、前項で設定した幾何モデルを更に検討してみると、アナグリフを眺めている閲覧者の左右の網膜に映る像は、「図13(1)のA点に虚像と等価な現実の物体が実在するときには左右の網膜に映る像と同一である(文献⁶)」と言える。これに気付くこと(発見)がこのテーマ解決の重要ポイントである。というのは、そのときの閲覧者は、図10に示した「通常の非立体視」としてその物

体を見ているのと同じことになるからである。網膜には同じ像が映っているのであれば、脳はそれがアナグリフの像なのか、実在の像なのかを区別できない。アナグリフを眺めた場合であっても、脳は立体像を融像してしまう^(文献6)。従ってこのことから、「仮想である虚像としての立体像」を「それと等価な現実の物体」に置き換えた幾何モデルは妥当（証明された）と言えるのである。

なお、この幾何モデルにおける立体像の位置推計の式 u は、立体視の幾何光学的な立場のみから導かれたものであり、視覚生理学的な考察は入っておらず、また、立体視はかなり個人差があるので、その式 u は概略的な推計を行うための式であることに注意されたい。

以上の考察から、「図 10 の“通常非立体視”で示した物体（実在の物体）から出た光は、水晶体を通過して網膜に至る光学過程である」が、しかし、「図 13 で示した立体視では、脳はこれとは逆の過程を辿って、網膜に映し出された像から立体像（仮想としての虚像）を創り出す生理過程である」と言える^(文献6)。これが立体像の視認過程なのである。

☆

☆

☆

上記の例では、立体視の幾何モデルは、従来の幾何光学の範囲内で妥当性が検証された（モデルが証明された）。しかし一般には、モデルの妥当性は、実験によって検証されるのが普通である。妥当性が検証されなければ、そのモデルは葬り去られるのである。

モデルの検証方法は、学問分野によって異なる。人間の感覚を調べる生理学の分野では、心理物理実験の結果から実験式が導出され、それが種々の領域で適合すれば、その式（これは法則とも呼ばれることが多いが、これも広義のモデルと考えてもよい）の有効性は高まっていく。また物理学の分野では、これまでの理論（旧モデル）では説明できない実験事実を説明するために革新的な考え方が提案され、それがいろいろな領域で適合するかどうかが更なる実験で検証され、新しい理論（新モデル）に発展していくのである。

3.2 節 分母ゼロの問題

3.2.1 項 推計式に現れる分母ゼロの幾何学的状態

推計式 u においては、ズレ幅 d が瞳孔間隔 e に等しくなると、その式の分母はゼロとなってしまう。数学では分母をゼロとしてはいけないのである。この場合、立体視ではどのように考えたらよいであろうか？ これが本節のテーマである。

生徒は、中学で分数を学ぶ場合、「分母はゼロで割ってはならない、除外しなさい」と教わるが、多くの生徒はその意味を知らないし、学校でもその理由を明確に教えることはまずない。高校では、「分母をゼロで割ることを認めると、四則演算が成り立たなくなるので、除外する」と教わる。しかし、生徒はその意味を深く考えないで、試験問題では機械的に分母ゼロの場合を除外して方程式を解いていくのである。

数学では、分母がゼロとなる点を特異点と呼んでいる。数学モデルを扱う場合には、特異点は付いて回ることが多い。立体視のモデル化の問題でも、特異点は現れる。これをどのように解釈したらよいか？ 図 13 (1) から明らかなように、特異点 $d=e$ においては（このとき推計式 u の分母はゼロ）、比例式を求める三角形が形成されない。というのは、左眼に入る青図形の光線と右眼に入る赤図形の光線が平行に成り、交点 A が存在しなくなるからである。この問題は眼の生理学では、2.1 節で示した眼球の開散に関係してくるのである。

3.2.2 項 特異点と立体視の破綻

このとき、人間の目ではどのようなことが起きているのか？ 左右の視線は、近くから遠くの風景を見るに従って、開散によって各々外側に向いていく。開散が進み、無限遠へと注視点に移るようになると、一般に立体視は困難となる。立体像は崩れ始め、最終的には単なる2重像にしか見えなくなる。すなわち、立体視の崩壊（「脳は立体像を融像できない」）の現象が起こる。このときが融像の限界であり、この限界は理屈の上では、アナグリフにおける赤図形と青図形のズレ幅が瞳孔間隔と同じ値なるときである。推計式 u の状態はどうであろうか？ 式 u は、 $d=e$ において特異点（分母ゼロ）を持っている。開散が進むにつれて、ズレ幅 d の値は特異点に近づき、 $d=e$ の特異点において、式 u は成り立たなくなる。式 u におけるこの状態（ $d=e$ の特異点）が立体視の融像の限界を表していると解釈できるのである。

立体視は生理現象なので、かなりの個人差があると思われる。3Dディスプレイ装置と偏光メガネを用いた実験では、被験者に頼んだ筆者の広内の親族は、「特異点付近では立体像は2重に見え、融像不能である」と報告している。しかし、筆者の広内の場合には、「ズレ間隔が特異点を越えた付近から融像はピタツといかないが、目を凝らしてピントが合うようにすると、目にはきついが融像はなんとかできる」のである。そこで一般には、「融像の限界は特異点付近である」と言うよりも「特異点付近を過ぎると融像し難くなるか融像不能になる」と言う方が適切かもしれない。しかし、融像の限界を数学の特異点で説明するのは、筆者にとっては合理的と思われる。

一般には特異点問題は「数学上の問題」と思われがちではあるが、周囲をよく見渡すと、それは「立体視のような身近な領域に潜んでいる問題」でもあることに気付く。立体視のような自然科学に属する問題を通して特異点（分母ゼロ）を学ぶことは、高校生に「数学の特異点は自然科学との繋がりを持っていること」を知らしめるものと思われる。このような意味からも立体視における特異点（分母ゼロ）問題は、教育的にも意義があるといえよう。

なお余談であるが、宇宙好きの高校生の間で話題となる「ブラックホール」や「ビッグバン」では、この特異点問題が深く関係しているのである。数学の偉大さ・不思議さを感じざるを得ない。この点は後述する。

3.2.3 項 特異点と立体コンテンツ

左右の立体画像におけるズレ幅が瞳孔間隔付近あるいはそれを越えると、立体視の融像が困難になるか破綻が起きる（ただし個人差が大きい）ことが、立体コンテンツ制作者では知られている。そこで、彼ら制作者の間では、「3Dテレビなどの3Dディスプレイ装置を用いた立体コンテンツでは、ズレ幅は可能な限り瞳孔間隔（推計式 u の定数 e ）を越えない値の範囲とすべきである」というガイドラインが制定されている（文献9）。瞳孔間隔は一般成人では約6.5cm程度であるが、発達段階の6歳前後の子供では5cm程度といわれている。このため、特に子供向けの立体コンテンツは、ズレ幅 d を5cm以内とすることが求められている。立体コンテンツの制作においても、特異点への対応が形を変えて入り込んでいるのである。

第4章 立体視の発展的な学習に向けて

第3章で扱った①モデル化の問題と②特異点の問題は、将来、自然科学の研究に携わりたいと思う生徒にとっては、大切なテーマである。「数学で出会うようなこの種の問題は数学領域固有の問題

題であり、現実世界とは関係がない」と高校生は考えがちである。しかし、高校で学ぶ科学の範囲でも、深い思考を必要とする問題は数多く存在する。高校時代に数学を用いたモデル化の方法を学んだり特異点について深く考えたりすることは、将来の科学者誕生に向けて思考の鍛錬となるのである。

そこで、上記の①と②に関して、高校生時代からの思考の延長線上（それは遥かかなたの延長線上）に存在する現代物理学の深遠なテーマを、以下に教材として示す。この教材が将来の科学者の卵たち（物理学志望の高校生）の思考の源になることを期待したい。

4.1 節 量子論におけるベルの定理

原子や素粒子の世界では、私達の現実世界とは異なった法則が支配しているが、科学者は、数学の力を借りて、その未知の世界の探求を進めている。その中でモデル化の好例として、ジョン・スチュアート・ベルが発見し、彼の名を冠した「ベルの定理」を説明しよう。20世紀最大の科学者アルバート・アインシュタインの自然観である局所实在論を検証する方法を、ベルが発見したのである。1935年、アインシュタインは確率に基づく量子力学に異を唱え（「量子力学は不完全である」と攻撃）、量子力学を擁護するニールス・ボーアと対立していたが、ベルは30年後、その対立に対して実験で判定を下せる根拠となる「ベルの不等式」を発見した。その式は、それが意味するところを含めて「ベルの定理」とも呼ばれる。

局所实在論とは、量子力学に反対するアインシュタインが支持した「局所的隠れた変数理論」の基礎となる概念であり、それは私達の常識感覚の自然観に基づいている。しかし、ボーアの擁護する量子力学は、私達の日常体験とは相入れない「観測したときにだけ、実体が現れる」という世界（摩訶不思議な世界）を描き、アインシュタインはその量子力学が創る自然観に終生反対した。アインシュタインが主張する自然観・世界観は、哲学とも言えるような形而上学的内容であり、それは個人の信念の問題とも考えられ、ベルの不等式が登場するまでは、実験によって真偽を下せるものではないと思われていた。

ベルは1964年、量子世界がアインシュタインのいう「常識的な实在論の世界」であるのか、それともボーアのいう「摩訶不思議な世界」であるのか、を実験で判定するために、アインシュタインの自然観である局所实在論のモデルからベルの不等式を、簡単な四則演算を用いて導き出した。そして、1982年、アラン・アスペらの光子を用いた量子実験により、ベルの不等式の破れが確認され、アインシュタインの局所实在論は否定されたのである。これがベルの定理と呼ばれるものの内容である。

筆者は本節で、高校生には関係ないように思われる現代物理学の基礎的な内容を記述しているが（文献10～文献14）、それには意味がある。物理学は、天才レベルの物理学者が高度な数学を駆使してその基礎理論を構築するので、世間一般では「その理解は不可能である」と考えるのが常識である。しかし、ベルの不等式は高校レベルの四則演算を用いて導出された。そして現在まで研究者によっていくつかの改良式が提案されている。一部の解説論文あるいは解説書は、分かり易い例えを用いて式の導き方を解説している（文献10, 文献11）。

「ベルの定理は深奥なる自然の哲理であり、その理解には深い洞察力を必要とする」と言われるが、ベルの不等式の導出に限れば、緻密な思考力と探究心のある優秀な物理学志望の高校生にとっては、その過程を追跡することは可能かもしれない。そして、彼らが真剣に努力すれば、その定理全体が意味するところを、それなりに理解できるかもしれない。「アインシュタインの自然観（私

達が素朴に感じる常識的な自然観)の真偽が、高校レベルの数学を用いて導出されたベルの不等式によって判定できる」ということを知るだけでも、彼らの知的好奇心は大いに刺激されるはずである。

以下にベルの定理の証明法の概略を示しておこう。その証明には、高校で学ぶ背理法が用いられる(文献¹²)。その論理手順は次の通りである。①「自然はアインシュタインの局所实在論に従う」という仮定のもとで、数学的にベルの不等式が導出される。②量子実験によってベルの不等式が破られることが確認される。③数学的に導出されるベルの不等式が破られるのは、真と仮定した「自然はアインシュタインの局所实在論に従う」という命題が偽であると結論される。——ゆえに、アインシュタインの局所实在論は、量子世界において適用できないと言える。なお、量子力学の計算では、実験結果と一致する範囲で、ベルの不等式が破られることが示されている。

ベルの不等式の導出(これは広義のモデル化といってもよい)の方法は、物理学のみならず科学界におけるブレイクスルーの手本となるものである。本稿の3.1節で取り上げた立体視のモデル化についての教材はささやかな一例ではある。しかし、学びの意欲の高い理系の高校生達に、将来、ベルが成し遂げたようなブレイクスルーに挑戦させるためには、その教材は、彼らの未来に向けた思考訓練に相応しい内容である、と筆者は考えている。

☆ ☆ ☆

筆者の広内は物理学を専門にしているが、以前、天才アインシュタインの自然観が高校レベルの数学(四則演算と背理法による証明法)を用いたベルの定理によって否定されたこと知って、衝撃を受けた。本稿でこのような教材を提示しているのは、優秀な高校生の知的好奇心を刺激したいためである。教師の役割は、教師自身の能力を超えるレベルに生徒を引き上げることである。現代物理学の基礎部分に高校レベルの数学で対処できる分野があるので、是非、優秀な生徒には、自らの力でその証明に挑戦してもらいたい。筆者はベルの定理が主張する内容を十分に理解しているわけではなく、自らの非力を顧みずにこのような教材を紹介するのは、おこがましいことと思っているのだが・・・本節の内容に記述の誤りがあったら、お許し願いたい。なお、文献10は、ドイツの女子高生の書いた物理学の教養書であるが、ベルの定理(ベルの不等式)が易しく解説されている。また文献11は、文献10とは異なるバージョンのベルの不等式が紹介されているが、その数学的な証明は、アインシュタインの局所实在論に言及しながら分かり易く記述されている(しかし、文献12～文献14は大学生向きである)。

4.2節 一般相対論における特異点問題

分母かゼロという状態は、数学でも物理学でも特異点とよばれ、取り扱いに苦慮するのである。物理学専攻の大学生になると、特異点問題に遭遇する。その一例は、一般相対性理論のアインシュタイン方程式におけるシュバルツシルト解の特異点である(文献¹⁵)。その特異点は2つあり、1つは、領域内部からは光さえも出られなくなるというシュバルツシルト半径に関する特異点(これは座標変換で解消可能な特異点)、もう1つは、体積がゼロで密度が無限大になり、そこでは物理法則が破綻するという特異点である。科学者達は最初、この解に含まれる特異点は、物理的な意味はなく単なる数学上の問題と考えていた。しかし、現在ではその特異点はブラックホールと解釈され、多くの天体観測の結果からブラックホールは現実に存在するものと考えられている。また、このような特異点の問題は、一般相対論(アインシュタイン方程式におけるフリードマン解)で論じられる宇宙の誕生(ビッグバン)にも関係している超難問でもある(文献¹⁶)。

本稿で紹介した特異点の問題（分母ゼロ問題）は、一般相対論において実体のない数学上の特異点と解釈されていたものが、その後ブラックホールという物理的実体に生まれ変わった歴史的事実があるように、その特異点の意味を理系の高校生に気付かせることは、一般相対論の例をみても重要なことである。従って、立体視における特異点の問題は、分母ゼロの意味を再確認させるための格好の教材であると、筆者は思っている。

おわりに

本稿は、現在流行している 3D を教育の現場で、教材として役立つことを目的として執筆したものである。その目的の 1 つは、3D の定番であるアナグリフを用いて、立体視の原理を探り、そしてその原理を用いてアナグリフを自作することである。第 1 章の教材は、中学生から高校生までが学べる内容になっている。

2 つ目は、立体視の原理をより深く学ぶときに現れる数学的な問題、すなわち①モデル化の問題と②特異点の問題の 2 つを扱っている。そのために、第 3 章の教材は、理系志望の高校生向きの内容、第 4 章は、物理学志望の高校生のために第 3 章を補足する特別な内容となっている。

第 1 章における立体視の原理の探求テーマについては、文教大学の学生 2 名、附属中学校の教員（筆者の林）と博物館学芸員の 1 名の計 4 名に実習に参加してもらって、種々のアイデアを得た。中学や高校で第 1 章の教材を使用するのであれば、予備実験 1 から応用実験 5 までで 55 分 × 2 コマの授業時間が必要と思われる。その場合、基礎実験 1 から応用実験 5 までの枠を描いた型紙と、赤ペンおよび青ペンを用意し、実習では赤と青の図形をその型紙に描くだけにするようにし、時間を節約した方がよいと思われる。

赤青メガネについてであるが、市販されているアナグリフ専門の書籍では、それに添付されている赤青メガネを用いて十分な立体感を得ることが出来る。しかし、基礎実験から応用実験 5 までの赤青ペン書きの実験用アナグリフは、その図が簡単なため、書籍添付の赤青メガネを用いた場合には、2 重像が生じて（クロストークという現象であり、特異点による 2 重像ではない）、立体感を得るのが難しいこともあった。そこで、市販の赤青セロファンと赤青ペンを購入して、自作の赤青メガネの制作を試み、そのメガネと赤青ペンの相性を調べた。その結果、特に青ペンのインクの質が青と赤のセロファンの光学特性に強く依存することが分かった。文房具屋で幾種もの赤青ペンと赤青セロファンを探し求め、その結果を、第 1 章末尾の参考情報の項に示しておいた。赤青セロファンと赤青ペンとの相性が完璧であると言う訳ではないが、参考にして頂きたい。

本稿に述べた内容が、中学や高校の教育現場で 3D に興味を持たれる先生方に、教材として使用して頂けるのであれば、筆者 2 人にとっては望外の喜びである。

画質調整について（PDF 版論文の読者の方へ）

パソコンのディスプレイ画面で PDF 版論文に掲げられたアナグリフをご覧になるとき、使用するディスプレイ装置の画面特性と装着する赤青メガネの波長特性の相性によって、クロストーク（3D メガネから左右の光が漏れて像が 2 重に見える現象）による 2 重像が発生して、十分に立体視できない場合があります。特に単純な線画の場合には、その傾向が顕著です。その際は、パソコンのグラフィックチップ（Intel 製、nVidia 製、AMD 製などのメーカーがある）のための調整パネル

を開いて、画質調整（色補正）を行ない、ディスプレイ画面の明るさを変更して下さい。それにより、はっきりと立体視できるようになります。

○調整の仕方を、ソニー製 VAIO パソコン（Windows7 の OS を搭載：モデル PCG-41413N）についてご紹介します。

- ①コントロールパネルを開く。
- ②「Intel Graphics and Media」のアイコンをクリックする。
- ③アプリケーションモードを「詳細設定モード」にして、下部の OK ボタンをクリックする。
- ④左欄の「色調整」をクリックする。
- ⑤右側の「明るさ」を標準設定（0）から 40 前後程度に、設定を変更する。
- ⑥下部の適用ボタンをクリックし、表示された OK ボタンをクリックする。

○他社パソコンの場合では、①明るさ、②ガンマ、③（場合によっては）コントラストの、それぞれの数値を上げて、画面が明るくなるように工夫してください。（明るすぎる場合には、数値を戻します）。ハードウェア（画面）は機種によって微妙な光学特性の相違があるので、その数値の設定は試行錯誤（トライアンドエラー）で試みてください。

参考文献

本稿の 1.10 節（参考情報 3）、2.1 節、2.2 節、3.1.2 項を執筆するに当たって、文献 1 と文献 3 の一部を部分的に改変して引用（転載）している箇所があることをお断りしておく。

- (1) 広内哲夫、「立体視の原理と 3D 技術への応用」、『情報システム学会誌』、pp5～pp16、第 8 巻、第 3 号、2013 年 3 月（電子ジャーナル）
http://www.issj.net/journal/jissj/Vol8_No2_Open/A3V8N2.pdf（2013 年 5 月 12 日閲覧）
- (2) 広内哲夫、「立体写真のズームングを制御する融像式の提案」、『3D 映像』、pp17～pp30、第 25 巻、第 3 号、2011 年 9 月。
- (3) 広内哲夫、「融像式を用いたズームング可能なステレオフォトビューア」、『情報研究』、pp17～pp56、第 46 号、2012 年 1 月（文献 2 の総説となっている。）
- (4) 遠山茂樹（バンダイナムコゲームズ）、『遠山式立体表示研究所』
<http://tohyama-shiki.com/labo/tohyama/index.htm>（2013 年 5 月 3 日閲覧）
（小中学生向けの赤青メガネ＋立体図形の作成のための教材が掲載されている。）
- (5) 志水英二他著、『ここまできた立体映像技術』、工業調査会、2000 年 8 月
- (6) 下條信輔、『視覚の冒険—イллюージョンから認知科学へ—』、産業図書、1995 年 4 月
- (7) 尾上守夫、羽倉弘之他編集、『3 次元立体ハンドブック』、朝倉書店、2006 年 2 月
- (8) 河合隆史他著、『次世代メディアクリエイター入門 1—立体映像表現—』、カットシステム、2003 年 12 月
- (9) 安全ガイドライン部会編、『人に優しい 3D 普及のための 3DC 安全ガイドライン -2010 年 4 月 20 日改訂 -』、3D コンソーシアム、2010 年 4 月（電子資料）
http://www.3dc.gr.jp/jp/scmt_wg_rep/3dc_guideJ_20111031.pdf（2012 年 12 月閲覧）

広内 哲夫 林 文子：アナグリフは、なぜ飛び出して見えるのかー立体視をテーマにした系統的学習の試みー

- (10) シルビニア・アローヨ・カメホ（小谷正博訳）、『シルビニアの量子力学』、岩波書店、2009年2月（ドイツの女子高生の書いた量子力学の書。ベルの定理「ベルの不等式」が詳しく書かれている。）
- (11) 谷村省吾、「揺らぐ境界ー非現実が動かす実在ー」、『日経サイエンス』、pp36～pp45、2013年7月（文献10とは別バージョンのベルの不等式に関する簡単な証明が紹介されている。文献10よりも数学的な説明がスッキリとしていて分かりやすい。）
○以下のホームページに文献11の補足が掲載されている。
http://www.nikkei-science.com/201307_036.html（2013年7月15日閲覧）
- (12) ニック・ハーバート（はやし・はじめ訳）、『量子と実在ー不確定性原理からベルの定理へー』、白揚社、1990年10月
- (13) デヴィッド・リンドリイ（松浦俊輔訳）、『量子力学の奇妙なところが思ったほど奇妙でないわけ』、青土社、1997年12月
- (14) シモン・マリン（佐々木光俊訳）、『隠れたがる自然ー量子物理学と実在ー』、白揚社、2006年10月
- (15) 杉山直、『相対性理論』、講談社、2010年4月
- (16) 佐藤勝彦、『宇宙論入門ー誕生から未来へー』、岩波書店、2008年11月

2013年7月27日 記

広内哲夫（文教大学情報学部情報システム学科）
林 文子（文教大学付属中学高等学校）