類似度関数の諸例と，他のカテゴリから眺め，文脈を考慮した類似度関数

鈴木　昇一

Some Examples of Similarity-Measure Functions Constructed by Using Patterns Before and After a Pattern to Be Recognized and Representative Patterns of Other Categories

Shoichi Suzuki

要　　約

入力パターンと記憶されている或るカテゴリを代表しているパターン(代表パターン)との単なるマッチングによって，入力パターンの認識を行うことがしばしば，採用される．マッチングには入力パターン，代表パターン間の類似度が用いられる．パターンのモデル(正規化パターン，標準形)を導入する．本論文では，正規直交性，規格化条件(確率条件)，モデル化不変性の3性質を満たし，入力パターンの前後のパターンからなる文脈に依存した類似度関数が構成される．また，入力パターン，代表パターン間の類似度の分子が自分以外の他のカテゴリの代表パターンモデルの集合から定まる構成手法も研究されており，他の諸研究に類をみない．この結果，他のカテゴリから眺め，文脈を考慮した類似度関数が得られることになった．この2種類の類似度関数以外に，文脈に依存しない幾つかの有用な類似度関数が構成されている．1つの類似度関数を含む形式で，今1つの類似度関数を構成する再帰的手法も研究されている．得られた類似度関数のあるものはパターン間分離の様子をうかがい知れるという意味で有用である．

キーワード

（1）代表パターン　（2）類似度関数　（3）正規直交性　（4）確率条件
（5）モデル化不変性　（6）文脈　（7）再帰的手法

Abstract

It is well known that an input pattern φ can be often recognized by quite simply matching φ to a representative pattern ω_j of the jth cate-gory $\mathfrak{C}_j$. This matching necessitates a similarity-measure $(0 \le) SM(\varphi, \omega_j)(\le 1)$ between φ and ω_j. We represents a corresponding model（a canonical form）of φ as $T\varphi$. In this paper we construct a function SM which must satisfy three properties of an orthonormality, a probability-condition and an invariance under a model-construction operator T so that it depends upon patterns（i.e., a context of φ）directly before and after φ which influence the meaning of φ. Besides we construct SM so that a numerator of $SM(\varphi, \omega_j)$ may be expressed by using only a set of $T\omega_i (i \ne j)$ except $T\omega_j$. This two kinds of SM can characterize an originality of this search. Many examples of SM which does not depend upon the context of φ are gained by its application. Moreover We research on recursive methods by which a new SM can be constructed using an old SM'. The obtained SMs are useful because some of them may make clear a separation of two patterns.

Key Words

（1）representive patterns　（2）similarlity-measure function
（3）orthonormality　（4）probability condition
（5）invariance under model-construction operators　（6）context
（7）recursive methods

1. はじめに

情報表現には，(1)変形がない記号列，(2)変形があってもよいパターンの2種類があるけれども，知能処理の最も素朴な処理は，任意に与えられた2つ以上の情報表現が等価(同等)であるかどうかを決定する操作(単一化操作;unification)である．

パターン認識の働きは，

パターン同士の等価性を規定する(SS公理系から組み立てられた)カテゴリ帰属知識理論(パターンの意味領域論;文献［5］のG2章を参照)の下で，連想型認識方程式を解く

ことだと(文献［5］の，G6，G7，G8の3章を参照)，明らかにしたのが，等式論理アプローチを採用するSS理論［3］～［6］である．

記号列を用いて推論する場面での，知能処理の最も基本的な処理は，ある等号理論の下で，記号列で表される情報同士に等価性が存在するかどうかを決定することである．同様に，パターンを用いて推論する場面での，知能処理の最も基本的な処理は，等式

$$T\varphi_1 = T\varphi_2$$

が成立する2つのパターン $\varphi_1 \in \Phi, \varphi_2 \in \Phi$ を等価だとみなす操作(文献［6］のA16.2，A16.3両節を参照)である．ここに，Φ は処理の対象とする問題のパターン φ の集合であり，$T: \Phi \to \Phi$ はモデル構成作用素と呼ばれる写像であるような対 $[\Phi, T]$ を，axiom 1を満たす順序対として導入している．

認知心理学には，

「概念のカテゴリはプロトタイプ(代表パターン)からの類似性によって構成される」

という考えがある。

Axiom 2を満たす類似度関数

$$SM: \Phi \times \Omega (= \{\omega_j \mid j \in J\}) \to \{s \mid 0 \le s \le 1\}$$

には，

$SM(\varphi,\omega_j)$ はパターン φ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン ω_j と似ている確率であると，解釈を与えることができ，この類似度関数 SM は，$T-$不変性

$$\forall\varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi,\omega_j) = SM(\varphi,\omega_j)$$

を満たしているので，$T-SM$ の保存性

$$T\varphi_1 = T\varphi_2 \Longrightarrow \forall j \in J, SM(\varphi_1,\omega_j) = SM(\varphi_2,\omega_j)$$

が成立する．よって，等式 $T\varphi_1 = T\varphi_2$ を満たし，互いに等価性を備えている2つのパターン $\varphi_1 \in \Phi, \varphi_2 \in \Phi$ は，類似性の観点からも，類似性に関する等式

$$\forall j \in J, SM(\varphi_1,\omega_j) = SM(\varphi_2,\omega_j)$$

が成立している．このように，類似性の観点からも，類似度関数 SM を用いれば，2つのパターン $\varphi_1 \in \Phi, \varphi_2 \in \Phi$ を等価だとみなすことが可能となる．

入力パターン φ が記憶しているパターン ω_j（第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の典型的な諸性質を代表しているパターン）と似ている度合いをどう計量するかはパターン認識技術［3］，［5］，［6］，パターン照合技術，画像データベースの検索技術［2］などの基本である．本論文では，φ の左にあるパターン η と φ の右にあるパターン ϕ とから成る文脈“$\eta \bullet \phi$”を考慮し，3性質

（ｉ）代表パターン間の正規直交性

（ⅱ）すべてのカテゴリにわたる総和が1になるという規格化性

（ⅲ）パターンモデル構成作用素 T の下での不変性

を満たすように，φ が ω_j と似ている度合いとしての類似度関数 $SM(\eta\varphi\phi,\eta\omega_j\phi)$ を構成する手法が，

（ｉ）の正規直交性，（ⅱ）の規格化性，（ⅲ）の T の下での不変性

を満たす“文脈を考慮しない類似度関数 $SM(\varphi,\omega_j)$”を介し，研究される．

(a) 他のカテゴリ，自らのカテゴリから各々眺めた類似度関数 $SM(\varphi,\omega_j)$，並びに

(b) 類似度関数 $SM'(\varphi,\omega_j)$ から今1つの類似度関数 $SM(\varphi,\omega_j)$

を構成する再帰的手法も研究されるが，これらも他のこれまでの研究に類を見ないけれども，文脈を考慮した類似度関数の構成論的研究は，著者の知る限り，本論文で初めてなされるものであり，他に類を見ない．尚，文脈を考慮しない類似度関数 $SM(\varphi,\omega_j)$ ）ですら，3性質「正規直交性・規格化性・T の下での不変性」を満たすものは，2文献［5］，［6］によるものを除いては，これまで，如何なる研究者により提案されていない［1］，［2］，［25］．パターンは通常，文脈の中に置かれることを考えると，この種の研究はパターン認識技術，パターン照合技術，画像データベースの検索技術の確保にとって有用である．

上述の正規直交性質（ｉ）は相異なるカテゴリに属する代表パターン同士は完全に分離できることを意味し，この正規直交性質（ｉ）を満たす類似度関数 SM の構成はこれまで，困難と考えられていることに注意しておく．また，規格化性質（ⅱ）は，SM が確率測度と解釈することを可能にし，類似度関数 $SM(\eta\varphi\phi,\eta\omega_j\phi)$ は，文脈“$\eta \bullet \phi$”の中でパターン φ がカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属する確率 $prob\{\mathfrak{C}_j / \eta\varphi\phi\}$ である，つまり，等式

$$SM(\varphi,\omega_j) = prob\{\mathfrak{C}_j / \eta\varphi\phi\} \tag{1}$$

の成立を容認できることになる．更に，T の下での不変性質（ⅲ）は

$$SM(\varphi,\omega_j) = prob\{\mathfrak{C}_j / \eta T\varphi\phi\} \tag{2}$$

であること，つまり，原パターン φ とそのモデル $T\varphi$ が各カテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属する確率を同一ならしめるものである．

文脈を考慮していない“φ が ω_j と似ている度合いとしての類似度関数” $SM(\varphi,\omega_j)$ について考えると，上述の3性質（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）を満たす類似度関数 SM が何故必要とされるか，或いはどのようなパターン情報処理の働きをもたらすかは，文脈を考慮しない場合，3付録B，C，Dで解析されている．

可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元 φ のノルム $\|\varphi\|$ を導入すると，例えば，文脈を考慮しない場合，柔らかいファジィクラスタリングから暗示される実数値関数［5］，

$$S(\varphi,\omega_j) = \frac{\dfrac{1}{\|\varphi-\omega_j\|^2}}{\displaystyle\sum_{k\in J}\frac{1}{\|\varphi-\omega_k\|^2}} \tag{3}$$

は，φ が ω_j と似ている程度を表す類似度関数であり，

（ⅰ´）（正規直交性）

$$S(\omega_i,\omega_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ 0 & \text{if } i\neq j \end{cases}$$

但し，$\forall j\in J, \forall i\in J-\{j\}, \|\omega_i-\omega_j\|>0$（代表パターン ω_j 同士間の分離条件） (4)

（ⅱ´）（規格化性）　$\forall\varphi\in\Phi, \sum_{j\in J} S(\varphi,\omega_j)=1$ (5)

を満たすが，T の下での不変性質（ⅲ）を満たさない．

知覚心理学の或る考え［24］によれば，表象間の類似性に基づいて，パターンの認識判断がなされるという．パターン φ のモデル $T\varphi$ はいわば，φ の代りとなる“φ の表象”である．認識システム［5］，［6］RECOGNITRONがモデル $T\varphi\in\Phi$ を見たり聞いたりしたならば（$T\varphi$ を感性的に受け取ったならば），原パターン $\varphi\in\Phi$ と同じに見えたり聞こえたりすること（原パターン φ と錯覚し原パターン φ と同じように感性的に受容すること）だと，解釈可能なパターンモデルが $T\varphi$ である．ならば，2つのパターンモデル $T\varphi, T\omega_j$ 間の類似度関数に，式(3)の類似度関数 $S(\varphi,\omega_j)$ を直す必要がある．

パターン $\varphi\in\Phi$ の表象化

$$\varphi\to T\varphi \tag{6}$$

が完結しているためには，パターンモデル $T\varphi$ の表象 $T(T\varphi)$ はそれ自身の $T\varphi$ でなければならないから，

$$\varphi\to T\varphi\to T(T\varphi)=T\varphi\to T^n\varphi(=TT^{n-1}\varphi)=T\varphi\to\cdots \tag{7}$$

が成立しているとしよう［3］，［7］～［9］．このようなパターンモデル $T\varphi$ を出力するモデル構成作用素 T については，多数存在し［3］～［23］，その典型的なものについては計算機シミュレーションされており［9］～［13］，［16］，［21］，［22］，付録Aでも簡単にその構成5例が説明されている．

$S(\varphi,\omega_j)$ を表象 $T\varphi$ が表象 $T\omega_j$ と似ている程度を表す類似度関数

$$SM(\varphi,\omega_j) = \frac{\dfrac{1}{\|T\varphi-T\omega_j\|^2}}{\displaystyle\sum_{k\in J}\frac{1}{\|T\varphi-T\omega_k\|^2}} \tag{8}$$

に変換すれば，この $SM(\varphi,\omega_j)$ は，分離条件式(39)の下で正規直交性（ⅰ），規格化性（ⅱ）を満たし，

しかも，付録Aの，T に関する第3番目の性質③（べき等性）を考慮すれば，

（ⅲ）（パターンモデル構成作用素 T の下での不変性）

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j) \tag{9}$$

も成り立つことがわかる．

現在まで，上述の3性質「（ⅰ）正規直交性・（ⅱ）規格化性・（ⅲ）T の下での不変性」を満たす類似度関数は，2文献［5］，［6］によるものを除いては，知られていない．

S.Suzukiが不思議に思うのは，φ, η の内積 (φ, η) を導入すると，3性質「（ⅰ）正規直交性・（ⅱ）規格化性・（ⅲ）T の下での不変性」を満たす有用な類似度関数 SM として，代表パターンモデル $T\omega_j$ 同士間の分離条件件式(39)の下で，次の4種類（イ）～（二）の SM 等があるのに，これまでS.Suzuki以外の研究者により全く提案されていないことである：

（イ）（ノルム距離 $\|T\varphi - T\omega_j\|$ による $\dfrac{1}{1-\exp[-x^2]}$ 形類似度）

$$SM(\varphi, \omega_j) = \frac{\dfrac{1}{1-\exp[-\frac{1}{a_j}\cdot\|T\varphi - T\omega_j\|^2]}}{\displaystyle\sum_{k\in J}\dfrac{1}{1-\exp[-\frac{1}{a_k}\cdot\|T\varphi - T\omega_k\|^2]}}$$

ここに，$a_k > 0 (k \in J)$ (10)

（ロ）（ノルム距離 $\|T\varphi - T\omega_j\|$ による $\exp[\frac{1}{x^2}]$ 形類似度）

$$SM(\varphi, \omega_j) = \frac{\exp[\frac{1}{a_j}\cdot\frac{1}{\|T\varphi - T\omega_j\|^2}]}{\displaystyle\sum_{k\in J}\exp[\frac{1}{a_k}\cdot\frac{1}{\|T\varphi - T\omega_k\|^2}]}$$

ここに，$a_k > 0 (k \in J)$ (11)

（ハ）（規格化内積の絶対値 $|(\frac{T\varphi}{\|T\varphi\|}, \frac{T\omega_j}{\|T\omega_j\|})|$ による $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 形類似度）

$$SM(\varphi, \omega_j) = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-|(\frac{T\varphi}{\|T\varphi\|}, \frac{T\omega_j}{\|T\omega_j\|})|^2}}}{\displaystyle\sum_{k\in J}\dfrac{1}{\sqrt{1-|(\frac{T\varphi}{\|T\varphi\|}, \frac{T\omega_k}{\|T\omega_k\|})|^2}}}$$

但し，$(\frac{T\varphi}{\|T\varphi\|}, \frac{T\omega_j}{\|T\omega_j\|}) = 0 \quad \text{if} \quad \|T\varphi\|\cdot\|T\omega_j\| = 0$

(12)

（ニ）（規格化内積の絶対値$|(\frac{T\varphi}{\|T\varphi\|},\frac{T\omega_j}{\|T\omega_j\|})|$による$-\frac{1}{2}\cdot\log_e[1-x^2]$形類似度）

$$SM(\varphi,\omega_j)=$$
$$\begin{cases}\dfrac{-\frac{1}{2}\cdot\log_e[1-|(\frac{T\varphi}{\|T\varphi\|},\frac{T\omega_j}{\|T\omega_j\|})|^2]}{\sum_{k\in J}-\frac{1}{2}\cdot\log_e[1-|(\frac{T\varphi}{\|T\varphi\|},\frac{T\omega_k}{\|T\omega_k\|})|^2]} & \cdots\exists i\in J,(T\varphi,T\omega_i)\neq 0 \text{ のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j) & \cdots\forall i\in J,(T\varphi,T\omega_i)=0 \text{ のとき}\end{cases}$$

但し，正数$p(\mathfrak{C}_j)$は第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の出現確率

$$(\frac{T\varphi}{\|T\varphi\|},\frac{T\omega_j}{\|T\omega_j\|})=0 \quad \text{if} \quad \|T\varphi\|\cdot\|T\omega_j\|=0$$

(13)

□

尚，処理の対象とする問題の入力パターンφに関する多段階パターン変換

$$\varphi_0\equiv T\varphi\to\varphi_1\to\varphi_2\to\cdots\to\varphi_{t-1}\to\varphi_t \tag{14}$$

による認識法［5］，［6］，［16］では，第（s－1）段階のパターンφ_{s-1}からφ_sへの変換は，2変数$T\varphi_{s-1}\in\Phi, j\in J$の2値関数$v(T\varphi_{s-1},j)\in\{0,1\}$を導入し，その都度，カテゴリ番号集合$J$の部分集合$J(T\varphi_{s-1},s-1)\subseteq J$を発見し，

$$\varphi_s$$
$$=T(\sum_{j\in J(T\varphi_{s-1},s-1)}v(T\varphi_{s-1},j)\cdot SM(T\varphi_{s-1},\omega_j)\cdot T\omega_j)$$

(15)

の形式でなされるが，正常な場合，最終認識段階tで或る代表パターンω_jのモデル$T\omega_j$に変換されるように探索する故に，つまり，

$$\exists t(=0,1,2,\cdots),\exists j\in J,\varphi_t=T\omega_j \tag{16}$$

が成立するように探索する故に，SMの（ⅰ）正規直交性・（ⅱ）規格化性がこのパターン変換に有効に働くことが認められており，Tの下での，SMの（ⅲ）不変性も，認識途中で得られた表象$\varphi_s(0\le s\le t)$の不変性

$$T\varphi_s=\varphi_s(0\le s\le t) \tag{17}$$

から必要とされることも，指摘しておかねばならない．

類似度$SM(\varphi,\omega_j)$が最大となるカテゴリ番号$j\in J$を持つカテゴリ$\mathfrak{C}_j$にパターンφは帰属すると決定する最大類似度法では，各$SM(\varphi,\omega_j)$ $(j\in J)$の大小に関する序列のみが問題となるが，パターン変換式(15)による多段階認識法ではこの序列のみならず，各$SM(\varphi,\omega_j)$ $(j\in J)$間の差が有効に効いてくる故に，各$SM(\varphi,\omega_j)$ $(j\in J)$間の差を拡大したり，縮小したりすることを可能にする類似度SMの再帰的構成は意味あるものである．

本論文では，「（ⅰ）正規直交性・（ⅱ）規格化性・（ⅲ）Tの下での不変性」を備えた類似度関数SMの構成手法として，7定理1～7が研究されるが，例えば，2定理1，2を組み合わせると，他のカテゴリから眺め，文脈を考慮した類似度関数SMが得られることを指摘しておく．

2. モデル構成作用素Tと，類似度関数SMが満たさなければならないaxiom

本章では，処理の対象とする問題のパターン$\varphi \in \Phi$について，任意の1つのカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属するパターン$\omega_j \in \Omega$との間の類似性の程度$SM(\varphi, \omega_j)$を与える“文脈を考慮しない類似度関数”SMが構成されるとき満たさなければならないaxiomが説明される．

2.1　モデル構成作用素Tと，その5例

処理の対象とする問題のパターンφの集まりをΦとしよう．Φはある可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の，零元を含むある部分集合であるが，このΦについての詳細な説明が2文献［5］，［6］にある．有限の全カテゴリ集合

$$\mathfrak{C}(J) \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid |J| \geq 2, j \in J\} \tag{18}$$

についての全代表パターン集合

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} (\subseteq \Phi) \tag{19}$$

は1次独立であることを要請する．第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の持つ諸性質を典型的に代表するパターンがω_jであり，各ω_j $(j \in J)$を適応的に決定する手法は解決済みであり［5］，計算機シミュレーションでもその有効性が実証されている［18］．

付録Aの式(A1)の写像Tは付録Aの4性質①～④を満たしているとしよう．$T\varphi$はパターンφのモデル(パターンモデル)といわれるものであり，4性質①～④を満たす写像Tはモデル構成作用素と呼ばれる．このような$T\varphi$については意味あるものが多数存在し［3］～［23］，計算機シミュレーションでも求められている［9］～［13］，［16］，［21］，［22］．モデル構成作用素Tの有用な5例は付録Aで説明されている．

2.2　文脈を考慮しない類似度関数SMの満たさなければならないaxiom

付録Aの4性質①～④を満たす式(A1)のモデル構成作用素Tを導入したとき，類似度関数

$$SM : \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \tag{20}$$

は次のaxiomを満たさなければならない．

クロネッカーのδ記号

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = j \\ 0 & \text{if} \quad i \neq j \end{cases} \tag{21}$$

を導入しておく．

Axiom(類似度関数SMの満たすべき公理)［5］，［6］

(ⅰ)(正規直交性) $\forall i, \forall j \in J, SM(\omega_i, \omega_j) = \delta_{ij}$.

(ⅱ)(規格化性) $\forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} SM(\varphi, \omega_j) = 1$.

(ⅲ)(写像Tの下での不変性)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j). \qquad \square$$

上述のaxiomについて簡単に説明しておこう．

SMの解釈

$SM(\varphi,\omega_j)=1,0$ に従って，パターン $\varphi\in\Phi$ は各々， ω_j と確定的な類似関係，相違関係にあり，また， $0<SM(\varphi,\omega_j)<1$ の場合は，曖昧な類似･相違関係にある (22)
を採用する．

上述のaxiom 1の（ｉ）は，相異なるカテゴリ $\mathfrak{C}_i$， $\mathfrak{C}_j$ $(i\neq j)$ の代表パターン $\omega_i,\omega_j(i\neq j)$ 同士は確定的な相違関係にあり，同一カテゴリの代表パターン同士は確定的な類似関係にあることを要請している．（ⅱ）は，任意のパターン $\varphi\in\Phi$ について，すべてのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ $,j\in J$ についての類似度の総和 $\sum_{j\in J}SM(\varphi,\omega_j)$ は1であることを要請している．ということは，処理の対象とする問題のパターン $\varphi\in\Phi$ はいずれかの1つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属する可能性があることを要請していることになる．（ⅲ）は，パターンモデル $T\varphi$ は原パターン φ と任意のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ について同一類似度を持つことを要請している．ということは，パターンモデル $T\varphi$ を見たり，聞いたりするならば，原パターン φ と同じように見えたり，聞こえたりすること（同一知覚原理）を要請していることになる．

3. 文脈を考慮した類似度関数 SM の構成

本章では，2.2のaxiomを満たす“文脈を考慮しない式(20)の類似度関数” $SM(\varphi,\omega_j)$ が構成されているとして，文脈“$\eta\bullet\phi$”を考慮した類似度関数 $SM(\eta\varphi\phi,\eta\omega_j\phi)$ ）が構成される．

パターン η の後にパターン φ が続き，更にこのパターン φ の後にパターン ϕ が続く文脈

$$\eta\bullet\phi\in\Phi_{left}\cdot\Phi\cdot\Phi_{right} \tag{23}$$

を考えよう．式(23)における $\eta\in\Phi_{left}(\varphi)\subset\Phi_{left}\subset\Phi$， $\phi\in\Phi_{right}(\varphi)\subset\Phi_{right}\subset\Phi$ は各々，今注目しているパターン $\varphi\in\Phi$ の左文脈(left context)，右文脈(right context)であるといわれる．

次の定理1は文脈“$\eta\bullet\phi$”を考慮し，前章のaxiomを満たす類似度関数

$$SM(=SM_{\eta\bullet\phi})\ :\eta\Phi\,\phi\times\eta\Omega\,\phi\to\{s\,|\,0\le s\le 1\} \tag{24}$$

を構成することが可能な事実を明らかにするものである．

［定理1］（文脈を考慮した式(24)の類似度関数 SM の構成定理）

関数

$$sm:\Phi_{left}\cdot\Phi\cdot\Phi_{right}\times\Phi_{left}\cdot\Omega\cdot\Phi_{right}\to\{s\,|\,0\le s\} \tag{25}$$

が，3条件

①(正値性) $sm(\eta\varphi\phi,\eta\omega_j\phi)$ はすべての $\eta\in\Phi_{left}(\varphi)$，すべての $\phi\in\Phi_{right}(\varphi)$ について，
$\varphi=\omega_j$ のとき正値をとる

②(直交性) $sm(\eta\omega_i\phi,\eta\omega_j\phi)$ はすべての $\eta\in\Phi_{left}(\varphi)$，すべての $\phi\in\Phi_{right}(\varphi)$ について，
$i\neq j$ のとき0をとる

③($T-$不変性)

$$\forall\,\eta\in\Phi_{left}(\varphi),\forall\,\phi\in\Phi_{right}(\varphi),$$
$$sm(T\eta\varphi T\,\phi,\eta\omega_j\phi)=sm(\eta\varphi\phi,\eta\omega_j\phi)$$

を満たせば，

$$SM_{\eta\bullet\phi}(\varphi,\omega_j)\equiv$$
$$SM(\eta\varphi\phi,\eta\omega_j\phi)\equiv$$

$$\begin{cases} \dfrac{sm(\eta\varphi\phi,\eta\omega_j\phi)}{\sum_{k\in J} sm(\eta\varphi\phi,\eta\omega_k\phi)} \cdots \sum_{k\in J} sm(\eta\varphi\phi,\eta\omega_k\phi) > 0 \text{ の場合} \\ p(\mathfrak{C}_j)\ (\text{カテゴリ}\mathfrak{C}_j\text{ の出現確率}) \cdots \sum_{k\in J} sm(\eta\varphi\phi,\eta\omega_k\phi) = 0 \text{ の場合} \end{cases} \tag{26}$$

と定義される式(24)の関数 SM は，2.2のaxiom，つまり，1．の3性質(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)を満たす．

（証明） 先ず，

（イ） $\varphi = \omega_j$ のとき，

$$\begin{aligned} &SM(\eta\varphi\phi,\eta\omega_j\phi) \\ &= \frac{sm(\eta\varphi\phi,\eta\omega_j\phi)}{\sum_{k\in J} sm(\eta\varphi\phi,\eta\omega_k\phi)} \\ &= \frac{sm(\eta\varphi\phi,\eta\omega_j\phi)}{sm(\eta\varphi\phi,\eta\omega_j\phi)} \quad \because \text{ ①，②} \\ &= 1 \quad \because \text{ ①} \end{aligned} \tag{27}$$

（ロ） $\varphi = \omega_i (i \in J - \{j\})$ のとき，

$$\begin{aligned} &SM(\eta\varphi\phi,\eta\omega_j\phi) \\ &= \frac{sm(\eta\varphi\phi,\eta\omega_j\phi)}{\sum_{k\in J} sm(\eta\varphi\phi,\eta\omega_k\phi)} \\ &= \frac{0}{sm(\eta\varphi\phi,\eta\omega_j\phi) + \sum_{k\in J-\{j\}} 0} \quad \because \text{ ②} \\ &= 0 \quad \because \text{ ①} \end{aligned} \tag{28}$$

を得，axiom，(ⅰ)(正規直交性)の成立がわかった．

次に，axiom 2，(ⅱ)(規格化条件)

$$\forall\varphi \in \Phi, \sum_{j\in J} SM(\eta\varphi\phi,\eta\omega_j\phi) = 1 \tag{29}$$

が成立することは， SM を定義している式(26)から明らかである．

最後に，axiom，(ⅲ)($T-$ 不変性)

$$\forall\varphi \in \Phi, \forall j \in J,$$

$$SM(T\eta\varphi T\phi,\eta\omega_j\phi) = SM(\eta\varphi\phi,\eta\omega_j\phi) \tag{30}$$

が成立することは，③から明らかである．　□

上述の定理1の3条件①，②，③を満たす式(25)の関数 sm の1例を構成しておこう．

2つの正の量

$C_{left}(T\eta,T\varphi)$:　$T\varphi$ の左に $T\eta$ が出現したとき， $T\eta,T\varphi$ 間のつながりを示す正数，例えば， $T\varphi$ の左に $T\eta$ が出現したとき， $T\eta$ が出現する確率 $prob^{-}\{T\eta/T\varphi\}(>0)$ の正定数倍　(31)

$C_{right}(T\eta,T\varphi)$:　$T\varphi$ の右に $T\eta$ が出現したとき， $T\eta,T\varphi$ 間のつながりを示す正数，例えば， $T\varphi$ の右に $T\eta$ が出現したとき， $T\eta$ が出現する確率 $prob^{+}\{T\eta/T\varphi\}(>0)$ の正定数倍　(32)

と，axiomを満たす文脈を考慮しない類似度関数

$$SM' : \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \le s \le 1\} \tag{33}$$

とを導入して，

$$sm(\eta\varphi\phi,\eta\omega_j\phi)$$
$$= C_{left}(T\eta,T\varphi)\cdot SM'(\varphi,\omega_j)\cdot C_{right}(T\eta,T\varphi) \tag{34}$$

が3条件①，②，③を満たすことが知れる．

式(34)による $sm(\eta\varphi\phi,\eta\omega_j\phi)$ の構成は，文脈を考慮した式(26)の類似度関数 $SM_{\eta\bullet\phi}(\varphi,\omega_j)$ が文脈を考慮しない類似度関数 $SM'(\varphi,\omega_j)$ を核として構成されることを明らかにしている．

実際には，

$$freq^{-}\{T\eta/T\varphi\}(>0)\ \text{：}T\varphi\text{ の左に }T\eta\text{ が出現したとき，}T\eta\text{ が出現する回数（＞0）} \tag{35}$$

$$freq^{+}\{T\eta/T\varphi\}(>0)\ \text{：}T\varphi\text{ の右に }T\eta\text{ が出現したとき，}T\phi\text{ が出現する回数（＞0）} \tag{36}$$

として，

$$C_{left}(T\eta,T\varphi)$$
$$= prob^{-}\{T\eta/T\varphi\}(>0)\text{ の正定数倍}$$
$$= freq^{-}\{T\eta/T\varphi\}(>0) \tag{37}$$
$$C_{right}(T\eta,T\varphi)$$
$$= prob^{+}\{T\eta/T\varphi\}(>0)\text{ の正定数倍}$$
$$= freq^{+}\{T\eta/T\varphi\}(>0) \tag{38}$$

とおけばよい．

4. 文脈を考慮しない類似度関数SMの，他のカテゴリ$\mathfrak{C}_i(i\in J-\{j\})$，自らのカテゴリ$\mathfrak{C}_j$から眺めた構成

前章の定理1によって，文脈を考慮した類似度関数
$SM_{\eta\bullet\phi}(\varphi,\omega_j)=SM(\eta\varphi\phi,\eta\omega_j\phi)$ の構成は，結局，文脈を考慮しない類似度関数式(34)内の $SM'(\varphi,\omega_j)$ に帰着されることになった．以後，式(34)内の $SM'(\varphi,\omega_j)$ を $SM(\varphi,\omega_j)$ と表そう．このような $SM(\varphi,\omega_j)$ の構成例については，式(19)の代表パターンΩのモデル集合

$$T\cdot\Omega\equiv\{T\omega_j\mid j\in J\}$$

についての非一致条件

$$\forall j\in J,\forall i\in J-\{j\},\left\|T\omega_i-T\omega_j\right\|>0 \tag{39}$$

の下で，既に5式(8)，(10)，(11)，(12)，(13)で指摘されているけれども，以下では，類似度関数 $SM(\varphi,\omega_j)$ の構成を一般的に研究しよう．

先ず，本章では，他のカテゴリ$\mathfrak{C}_i(i\in J-\{j\})$，自らのカテゴリ$\mathfrak{C}_j$から各々眺めた2種類の，2.2のaxiomを満たす類似度関数 $SM(\varphi,\omega_j)$ が構成される．

4.1　他のカテゴリ$\mathfrak{C}_i(i\in J-\{j\})$から眺め構成される類似度関数$SM$

本節では，処理の対象とする問題のパターン$\varphi\in\Phi$について，他のカテゴリ$\mathfrak{C}_i(i\in J-\{j\})$に帰属するパターンのモデルから相違していればいるほど，問題のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属するパターンのモデルとの類似性の程度が大きくなるように，2.2のaxiomを満たす式(20)の類似度関数 SM を得る構成手法が説明される．

4.1.1　相違度関数 $dsm_j(\varphi)$ の5種類構成

$|J|$ 個のパターン集合 Ψ_j の系

$$(\omega_j \in)\Psi_j(\subset \Phi), j \in J \tag{40}$$

を考え，包含条件

$$\forall j \in J, T\omega_j \in T \cdot \Psi_j \equiv \{T\phi \mid \phi \in \Psi_j\} \tag{41}$$

と，分離条件

$$\forall i \in J, \forall j \in J - \{i\}, \forall \phi \in \Psi_i, \forall \phi' \in \Psi_j, \|T\phi - T\phi'\| > 0 \tag{42}$$

とを満たしているとしよう．

2つのパターンが似ていないほど大きい値をとるような相違度関数（dissimilarity measure function）dsm_j の系

$$dsm_j : \Phi \to R^+ \text{（非負実数全体の集合），} \quad j \in J \tag{43}$$

が，次の3性質（一），（二），（三）を満たすように選ばれているとしよう：

（一）（最小0性質）

$$\forall j \in J, \forall \phi \in \Psi_j, dsm_j(\phi) = 0 .$$

（二）（正性質）

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \forall \phi \in \Psi_i, dsm_j(\phi) > 0.$$

（三）（写像Tの下での不変性）

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, dsm_j(T\varphi) = dsm_j(\varphi). \qquad \square$$

例えば，次の典型的な5種類の $dsm_j(\varphi)$ は，次の3性質（一），（二），（三）を満たすことがわかる．特に，（三）は付録Aの，T の第3番目の性質③（べき等性）から成り立つ：

$$\text{①}\ dsm_j(\varphi) = \min_{\phi \in \Psi_j} \|T\varphi - T\phi\| \tag{44}$$

$$\text{②}\ dsm_j(\varphi) = \min_{\phi \in \Psi_j} \log_e[1 + \|T\varphi - T\phi\|^2] \tag{45}$$

$$\text{③}\ dsm_j(\varphi) = \min_{\phi \in \Psi_j}[1 - \exp\{-\frac{1}{a_j} \cdot \|T\varphi - T\phi\|^2\}] \tag{46}$$

ここに，定数 $a_j (j \in J)$ は正数であればよいが，

$$a_j = \frac{1}{3} \cdot \min_{\phi \in \Psi_i} \min_{\phi' \in \Psi_j (i \neq j)} \|T\phi - T\phi'\|^2 \tag{47}$$

と選ぶのがよい．

$$\text{④}\ dsm_j(\varphi) = \min_{\phi \in \Psi_j}[1 - |\,nip(T\varphi, T\phi)\,|^2] \tag{48}$$

ここに，$nip(T\varphi, T\phi)$ は2つのパターンモデル $T\varphi, T\phi$ の規格化内積（normalized inner product）であり，

$$nip(T\varphi, T\phi) \equiv \begin{cases} \dfrac{(T\varphi, T\phi)}{\|T\varphi\| \cdot \|T\phi\|} \cdots \|T\varphi\| \cdot \|T\phi\| > 0 \text{ のとき} \\ 0 \cdots \|T\varphi\| \cdot \|T\phi\| = 0 \text{ のとき.} \end{cases} \tag{49}$$

$$\text{⑤}\ dsm_j(\varphi) =$$

$$\begin{cases} \min_{\phi\in\Psi_j} -\frac{1}{2}\cdot\log_e |nip(T\varphi,T\phi)|^2 = \min_{\phi\in\Psi_j} \log_e \frac{1}{|nip(T\varphi,T\phi)|} \\ \quad \cdots\forall\,\phi\in\Psi_j, \|T\varphi\|\cdot\|T\phi\|>0 \wedge |nip(T\varphi,T\phi)|^2>\varepsilon_j \text{ のとき} \\ -\frac{1}{2}\cdot\log_e\varepsilon_j \;\cdots\exists\,\phi\in\Psi_j, \|T\varphi\|\cdot\|T\phi\|=0 \vee |nip(T\varphi,T\phi)|^2\le\varepsilon_j \text{ のとき} \end{cases} \tag{50}$$

ここに，定数ε_jは1より小さい正定数であればよいが，

$$0<\varepsilon_j<\min_{\phi\in\Psi_i}\min_{\phi'\in\Psi_j(i\ne j)}|nip(T\phi,T\phi')|^2 \tag{51}$$

と選ぶのがよい. □

4.1.2　非規格化類似度関数 $sim_j(\varphi)$ の構成

前項の3性質(一)，(二)，(三)を満たす式(43)の相違度関数dsm_jを使って，関数sim_jの系

$$sim_j:\Phi\to R^+,\ j\in J \tag{52}$$

を，

$$sim_j(\varphi)\equiv\min_{i\in J-\{j\}} dsm_i(\varphi) \tag{53}$$

と定義すれば，各$sim_j(\varphi)(j\in J)$は，次の3性質(イ)，(ロ)，(ハ)を満たし，非規格化類似度関数と解釈されてよい：

(イ)(正性質)

$$\forall j\in J,\forall\,\phi\in\Psi_j, sim_j(\phi)>0$$

(ロ)(最小0性質)

$$\forall j\in J,\forall i\in J-\{j\},\forall\,\phi\in\Psi_i, sim_j(\phi)=0.$$

(ハ)(写像Tの下での不変性)

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J, sim_j(T\varphi)=sim_j(\varphi).$$

□

4.1.3　axiomを満たす類似度関数 SM の構成

前項の3性質(イ)，(ロ)，(ハ)を満たす式(52)の類似度関数sim_jを規格化して，式(20)の関数$SM(\varphi,\omega_j)$を

$$SM(\varphi,\omega_j)= \begin{cases} \dfrac{sim_j(\varphi)}{\sum_{k\in J} sim_k(\varphi)} \cdots \sum_{k\in J} sim_k(\varphi)>0 \text{ のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \sum_{k\in J} sim_k(\varphi)=0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{54}$$

と定義しよう.

そうすれば，次の定理2の如く，axiomを満たす式(20)の関数SMを構成できる.

［定理2］(類似度関数SMの，式(43)の相違度関数dsm_j，式(53)のsim_jによる他のカテゴリ$\mathfrak{C}_i(i\in J-\{j\})$から眺めた構成定理)

3条件式(40)，(41)，(42)の下で，式(54)のごとく定義された式(20)の関数SMは2.2のaxiom 2を満たす.

(証明) $T\omega_j$の包含式(41)を考慮すれば，以下の(a)，(b)の証明から，式(40)を勘案すれば，

axiom,（ⅰ）（正規直交性）が成立することがわかる．

（a）$\forall j \in J, \forall \phi \in \Psi_j$,

$$SM(\phi,\omega_j)$$
$$= \frac{sim_j(\phi)}{sim_j(\phi) + \sum_{k \in J-\{j\}} sim_k(\phi)} \quad \because \text{ 式(54)}$$
$$= \frac{sim_j(\phi)}{sim_j(\phi)} \quad \because \text{ 4.1.2項の性質(ロ)}$$
$$= 1. \quad \because \text{ 4.1.2項の性質(イ)}$$

（b）$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}, \forall \phi \in \Psi_i$,

$$SM(\phi,\omega_j)$$
$$= \frac{sim_j(\phi)}{sim_i(\phi) + \sum_{k \in J-\{i\}} sim_k(\phi)} \quad \because \text{ 式(54)}$$
$$= \frac{0}{sim_i(\phi)} \quad \because \text{ 4.1.2項の性質(ロ)}$$
$$= 1. \quad \because \text{ 4.1.2項の性質(イ)}$$

axiom,（ⅱ）（規格化性）の成立は，SM の定義式(54)から明らかである．

axiom,（ⅲ）（T の下での不変性）の成立は，4.1.2項の，各 sim_j の性質（ハ）から明らかである．　□

4.2　自らのカテゴリ$\mathfrak{C}_j$ から眺めた類似度関数 SM の構成

ところで，式(54)の $SM(\varphi,\omega_j)$ において，sim_j の定義式(53)を考慮すれば，

$$\forall j \in J, \min_{i \in J} dsm_i(\varphi)$$
$$= \min\{dsm_j(\varphi), sim_j(\varphi)\} \tag{55}$$

であるから，

$$\sum_{k \in J} sim_k(\varphi) > 0 \text{ のとき}$$

式(54)の $SM(\varphi,\omega_j)$

$$= \frac{sim_j(\varphi)}{\sum_{k \in J} sim_k(\varphi)}$$
$$= \frac{\dfrac{sim_j(\varphi)}{\min_{i \in J} dsm_i(\varphi)}}{\sum_{k \in J} \dfrac{sim_k(\varphi)}{\min_{i \in J} dsm_i(\varphi)}} \quad \because \text{ 分母，分子を } \min_{i \in J} dsm_i(\varphi) \text{ で割る} \tag{56}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\dfrac{sim_j(\varphi)}{dsm_j(\varphi)}}{\sum_{k \in J} \dfrac{sim_k(\varphi)}{dsm_k(\varphi)}} & \cdots \forall k \in J, 0 < dsm_k(\varphi) < sim_k(\varphi) \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{|J|} & \cdots \forall k \in J, 0 < sim_k(\varphi) \le dsm_k(\varphi) \text{ のとき} \end{cases}$$

(57)

と変形され，他のカテゴリ$\mathfrak{C}_i (i \in J - \{j\})$に帰属するパターンのモデルから相違していればいるほど，問題のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属するパターンのモデルとの類似性の程度が大きくなるような定理2のSMは，式(43)の相違度$dsm_j(\varphi)$の逆数$\dfrac{1}{dsm_j(\varphi)}$による$SM$の，次の定理3による構成とは異なることに注意しておく．

［**定理3**］（類似度関数SMの，相違度関数$dsm_j(\varphi)$による自らのカテゴリ$\mathfrak{C}_j$から眺めた構成定理）

3条件式(40)，(41)，(42)の下で，

$$SM(\varphi,\omega_j) = \frac{\dfrac{1}{dsm_j(\varphi)}}{\sum_{k \in J} \dfrac{1}{dsm_k(\varphi)}} \tag{58}$$

と定義された式(20)の関数SMは2.2のaxiomを満たす．

（証明）容易なので，省略する．□

5. 文脈を考慮しない類似度関数SMの再帰的構成

本章では，類似度関数SM'から文脈を考慮しない類似度関数SMが得られる再帰的構成法が4定理4〜7で研究される．尚，この4定理の証明は紙面の都合上，割愛される．

5.1　類似度分布の伸縮変換を可能にする類似度関数SMの再帰的構成

カテゴリ番号の全集合(有限集合)Jが

$$J = \{1,2,\cdots,m\} \tag{59}$$

である場合，パターン$\varphi \in \Phi$のその類似度分布(列ベクトル)

$$\overrightarrow{SM'}(\varphi,\omega_j) \equiv col\{SM'(\varphi,\omega_1) \quad SM'(\varphi,\omega_2) \quad \cdots \quad SM'(\varphi,\omega_m)\} \tag{60}$$

を伸縮して，今1つの類似度分布$\overrightarrow{SM}(\varphi,\omega_j)$を求めることを考えよう．明らかに，パターン$\varphi \in \Phi$の帰属する正しいカテゴリが第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$である場合，以下の2性質(＊1)，(＊2)は望まれる類似度分布の変換である：

（＊1）（類似度差の伸長）

$$\exists j, \exists i \in J - \{j\}, SM'(\varphi,\omega_j) - SM'(\varphi,\omega_i) \le SM(\varphi,\omega_j) - SM(\varphi,\omega_i) \tag{61}$$

（＊2）（類似度差の縮小）

$$\exists j \in J, \exists k \in J - \{j\}, \exists \ell \in J - \{j,k\}, SM'(\varphi,\omega_k) - SM'(\varphi,\omega_\ell) \ge SM(\varphi,\omega_k) - SM(\varphi,\omega_\ell) \tag{62}$$

□

2性質(＊1)，(＊2)を備えている類似度分布の変換が可能なように，パターンモデル$T\varphi$と各代表パターンモデル$T\omega_j, T\omega_i, T\omega_k, T\omega_\ell$間の分離があからさまに改良されるように，2.2のaxiomを満たす類似度関数SM'を今1つの2.2のaxiomを満たすSMに再帰的に構成し直す手法が説明される．本章の4

定理4〜7は少し検討すれば，2性質（＊1），（＊2）を備えている類似度分布 $\overrightarrow{SM'}(\varphi,\omega_j)$ から $\overrightarrow{SM}(\varphi,\omega_j)$ へのこの種の変換が可能な再帰的構成法を与えていることがわかるであろう．

5.2　類似度関数 SM の再帰的構成3手法

式(19)の有限な代表パターン集合 Ω 内の代表パターン ω_j のモデル $T\omega_j$ 間の分離条件式(39)の下で，包含条件式(41)と，今1つの条件

$$\forall j\in J,\forall i\in J-\{i\},T\cdot\Psi_i(=\{T\phi\,|\,\phi\in\Psi_i\})\cap T\cdot\Psi_j=\phi \tag{63}$$

を満たすように，式(40)のパターン集合 Ψ_j のモデル集合 $T\cdot\Psi_j$ の系 $T\cdot\Psi_j, j\in J$ を選定しておく．このとき，

$$\forall j\in J,\forall i\in J-\{i\},T\omega_i\notin T\cdot\Psi_j \tag{64}$$

が成立していることに注意しておく．

次の定理4が成立し，柔軟に SM を変換できることがわかる．定理4内の条件式(65)では，f_j の値が $+\infty$ になってもよいことに注意しておく．

［**定理4**］（類似度関数 SM の再帰的一般構成定理）

各 $T\omega_j$ 間の分離条件式(39)の下で，3条件式(40)，(41)，(63)を満たす式(40)のパターン集合 Ψ_j のモデル集合 $T\cdot\Psi_j$ の系 $T\cdot\Psi_j, j\in J$ を選定しておく．そうすれば，2条件

$$\forall j\in J,+\infty\geq\max_{\eta\in\Psi_j}f_j(T\omega_j,T\eta)>0 \tag{65}$$

$$\forall j\in J,\forall i\in J-\{j\},\max_{\eta\in\Psi_j}f_j(T\omega_i,T\eta)>0 \tag{66}$$

を満たす（$T\varphi\in T\Phi$ と $T\phi\in T\cdot\Psi_j$ との間の類似性の程度を与える）関数

$$f_j:T\cdot\Phi\times T\cdot\Psi_j\to R^+\ \text{（非負実数全体の集合）} \tag{67}$$

と，2.2のaxiomを満たす類似度関数

$$SM':\Phi\times\Omega\to\{s\,|\,0\leq s\leq 1\} \tag{68}$$

との両者を用いて，

$$SM(\varphi,\omega_j)=\begin{cases}\dfrac{SM'(\varphi,\omega_j)\cdot\max_{\eta\in\Psi_j}f_j(T\varphi,T\eta)}{\sum_{i\in J}SM'(\varphi,\omega_i)\cdot\max_{\eta\in\Psi_i}f_i(T\varphi,T\eta)}\\ \cdots\sum_{i\in J}SM'(\varphi,\omega_i)\cdot\max_{\eta\in\Psi_i}f_i(T\varphi,T\eta)>0\ \text{のとき}\\ p(\mathfrak{C}_j)\ \cdots\sum_{i\in J}SM'(\varphi,\omega_i)\cdot\max_{\eta\in\Psi_i}f_i(T\varphi,T\eta)=0\ \text{のとき}\end{cases} \tag{69}$$

と定義される式(20)の関数 SM は2.2のaxiomを満たす．　□

2条件式(65)，(66)を満たす式(67)の関数 f_j の系の構成例は，4.1.1の①〜⑤に対応して，次の⑥〜⑩がある：

$$⑥\ f_j(T\varphi,T\eta)=\frac{1}{\|T\varphi-T\eta\|} \tag{70}$$

$$⑦\ f_j(T\varphi,T\eta)=-\frac{1}{|J|}\cdot\log_e[1+\frac{1}{\|T\varphi-T\eta\|^{|J|}}] \tag{71}$$

⑧ $f_j(T\varphi, T\eta) = \dfrac{1}{1-\exp[-\dfrac{1}{a_j}\cdot\|T\varphi - T\eta\|^2]}, a_j > 0$ （72）

⑨ $f_j(T\varphi, T\eta) = \dfrac{1}{1-|\,nip(T\varphi, T\eta)\,|^2}$ （73）

⑩ $f_j(T\varphi, T\eta) =$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\cdot\log_e[1-|\,nip(T\varphi,T\eta)\,|^2] \\ \quad\cdots[\forall\,\phi\in\Psi_j, \|T\varphi\|\cdot\|T\phi\|>0 \wedge |\,nip(T\varphi,T\phi)\,|^2>\varepsilon_j] \text{ のとき} \\ -\dfrac{1}{2}\cdot\log_e[1-\varepsilon_j] \\ \quad\cdots[\exists\,\phi\in\Psi_j, \|T\varphi\|\cdot\|T\phi\|=0 \wedge |\,nip(T\varphi,T\phi)\,|^2\le\varepsilon_j] \text{ のとき} \end{cases}$$

（74）

□

定理4より簡単な再帰的構成手法を与えるのが次の定理5である．

［定理5］（類似度関数 SM の関数変換による再帰構成定理）

2条件

$f_j(0)=0 \wedge f_j(1)>0$ （75）

を満たす非負実数値関数

$f_j : R^+$（非負実数値の集合）$\to R^+$ （76）

の系 $(j\in J)$ を用いて，2.2のaxiomを満たす式（68）の類似度関数 SM' を変換して得られ，

$SM(\varphi,\omega_j)=$

$$\begin{cases} \dfrac{f_j(SM'(\varphi,\omega_j))}{\sum_{i\in J} f_i(SM'(\varphi,\omega_i))} & \cdots\sum_{i\in J} f_i(SM'(\varphi,\omega_i))>0 \text{ のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j) & \cdots\sum_{i\in J} f_i(SM'(\varphi,\omega_i))=0 \text{ のとき} \end{cases}$$

（77）

と定義される式（20）の関数 SM は2.2のaxiomを満たす． □

上述の定理5において，条件式（75）を満たす関数 f_j の系を不連続，或いは，連続的区分的1次関数に選定すれば，次の定理6が成り立つ．

［定理6］（類似度関数 SM の量子化に伴う再帰構成定理）

不等式

$0\le\varepsilon_0(j)<\varepsilon_1(j)\le 1$ （78）

を満たす2つの閾値 $\varepsilon_0(j),\varepsilon_1(j)$ の系 $(j\in J)$ を用意して，axiomを満たす式（68）の類似度関数 SM' を量子化して得られる1より大きくない非負量 $s(\varphi,\omega_j)(\le 1)$ を，不連続量として，

$s(\varphi,\omega_j)=$

$$\begin{cases} 1 \quad \text{if} \quad \varepsilon_1(j)\le SM'(\varphi,\omega_j)\le 1 \\ SM'(\varphi,\omega_j) \quad \text{if} \quad \varepsilon_0(j)<SM'(\varphi,\omega_j)<\varepsilon_1(j) \\ 0 \quad \text{if} \quad 0\le SM'(\varphi,\omega_j)\le\varepsilon_0(j) \end{cases}$$

（79）

と求めるか，或いは，連続量として，

$$s(\varphi,\omega_j)=$$
$$\begin{cases} 1 \ \text{ if } \ \varepsilon_1(j) \le SM'(\varphi,\omega_j) \le 1 \\ \dfrac{SM'(\varphi,\omega_j)-\varepsilon_0(j)}{\varepsilon_1(j)-\varepsilon_0(j)} \ \text{ if } \ \varepsilon_0(j) < SM'(\varphi,\omega_j) < \varepsilon_1(j) \\ 0 \ \text{ if } \ 0 \le SM'(\varphi,\omega_j) \le \varepsilon_0(j) \end{cases} \tag{80}$$

と求める．このとき，

$$SM(\varphi,\omega_j)=$$
$$\begin{cases} \dfrac{s(\varphi,\omega_j))}{\sum_{i\in J} s(\varphi,\omega_i)} & \cdots \sum_{i\in J} s(\varphi,\omega_i) > 0 \text{ のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j) & \cdots \sum_{i\in J} s(\varphi,\omega_i) = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{81}$$

と定義される式(20)の関数 SM SMは2.2のaxiomを満たす．　□

類似性（ $SM(\varphi,\omega_j) \fallingdotseq 1$ ）と相違性（ $SM(\varphi,\omega_j) \fallingdotseq 0$ ）との観点，或いは，人の知覚的類似性に一致するように，条件式(75)を満たす関数 f_j の系 $(j \in J)$ を選定する手法を開発することが望まれる．

5.3　類似度関数の適応的再帰構成

本節では，ニューラルネットの形式を利用し，式(68)の類似度関数 SM' を適応的に改良できる手法が研究される．

5.3.1　関数 g_i の系を使った類似度関数の改良

次の定理7は2.2のaxiomを満たす式(20)の類似度関数 SM の機能を，5.1の2性質（＊1），（＊2）を満たすように改良することを学習で適応的に決定することを可能にするものである．

さて，式(19)の代表パターン集合 Ω のモデル集合 $T\cdot\Omega$ に関する非正条件

$$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}, g_j(T\omega_i) \le 0 \tag{82}$$

を満たす関数 g_i の系

$$g_i : T\cdot\Phi \to R \text{（実数全体の集合）}, \ \ i \in J \tag{83}$$

を用意した後，2.2のaxiomを満たす式(68)の類似度関数 SM' を更新する形式で，次のように定義する．ここに， $\max\{a,b\}$ は2つの実数 a,b の内，小さくない方を指す：

$$SM(\varphi,\omega_j)= \frac{SM'(\varphi,\omega_j)+\max\{g_j(T\varphi),0\}}{1+\sum_{i\in J}\max\{g_i(T\varphi),0\}} \tag{84}$$

□

このとき，次の定理7が成立する．

［定理7］（類似度関数 SM の，再帰的適応構成定理）

式(84)の如く定義された式(20)の関数 SM は，条件式(82)の下で2.2のaxiom 2を満たす．　□

5.3.2　1次ニューラルネットの形式を採用した関数gjの系

非正条件式(82)を満たす式(83)の g_j は式(84)の $SM(\varphi,\omega_j)=$ 内に登場しているが，実数重み $V(j,\ell)$ の組，実数閾値 $V(j,0)$ の組

$$V(j,\ell),\ell\in(0\notin)L,V(j,0),j\in J \tag{85}$$

を用いて，1次ニューラルネット［4］の形式を採用し，

$$g_j(T\varphi)$$
$$=\sum_{\ell\in L}V(j,\ell)\cdot u(T\varphi,\ell)+V(j,0) \tag{86}$$

と，設定することが考えられる．ここに，

$$u:\Phi\times L\to R\ (\text{実数全体の集合}) \tag{87}$$

は特徴抽出写像であり，$u(\varphi,\ell)\in R$ は，

パターン $\varphi\in\Phi$ から抽出された第 $\ell\in L$ 番目の実数値特徴量　(88)

である．

$$\forall j\in J,\forall i\in J-\{j\},$$
$$g_j(T\omega_i)=$$
$$\sum_{\ell\in L}V(j,\ell)\cdot u(T\omega_i,\ell)+V(j,0)\le 0 \tag{89}$$

を満たすように，式(85)の各 $V(j,\ell)(\ell\in L),V(j,0)$ を訓練パターン系列を用いて容易に決定することができる．このように，適応的に決定されていれば，非正条件式(82)が満たされることになる．

パターン分離がよくなるためには，カテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に属するすべての訓練パターン $\varphi\in\Phi$ について，

$$g_j(T\varphi)>0 \tag{90}$$

であるように，特に，$\varphi=\omega_j$ について，式(85)の各 $V(j,\ell)(\ell\in L),V(j,0)$ が適応的に決定されていることが望ましい $(j\in J)$．

式(86)の1次ニューラルネット $g_j(T\varphi)$ の代りに，2次以上の高次ニューラルネット，相互結合ニューラルネット，誤差逆伝播ニューラルネットの形式［4］，［5］を採用できるが，この記述は割愛される．

なお，2.2のaxiomを満たす式(20)の類似度関数 SM について，2.2のaxiomの(ⅲ)より強い $T-$ 不変性

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J,SM(T\varphi,T\omega_j)=SM(T\varphi,\omega_j) \tag{91}$$

が成立するように構成することは容易である．これまで構成されている SM ［5］，［6］，［13］，［16］，［17］，［20］～［23］，［37］，［40］，［41］はすべて，強い $T-$ 式(91)を満たしているし，本論文でこれまで構成された SM もすべて，強い $T-$ 不変式(91)を満たしている．

6. 代表パターン集合 Ω を基準にしての，2つのパターン φ,η 間の規格化一般化類似度 $NGSM(\varphi,\eta)$

式(19)の代表パターン集合 Ω を基準にすれば，2.2のaxiomを満たす2式(20)，(24)でいう2つの類似度関数 SM_1,SM_2 を使い，任意のターン φ が任意のパターン η とどれくらい似ているかの度合いを示す一般化類似度関数(generalized SM) $GSM(\varphi,\eta)$ の典型的な1つは，

$$GSM(\varphi,\eta)$$

$$\equiv \max_{k \in J} \min\{SM_1(\varphi,\omega_k), SM_2(\eta,\omega_k)\} \tag{92}$$

である．GSMが SM_1 の拡張であることは，2.2のaxiom，（ⅰ）を適用すれば，

(0*)　$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, GSM(\varphi,\omega_j) = SM_1(\varphi,\omega_j)$

が成立していることからわかる．よって，式(92)の一般化 $GSM(\varphi,\eta)$ は，正規直交性

(1*)　$GSM(\omega_i,\omega_j) = \delta_{ij}$ (93)

を満たす．それのみならず，式(19)の代表パターン集合 Ω を含むパターン部分集合 $\Phi'(\subseteq \Phi)$ を選んで定義される規格化類似度関数（normalized GSM）

$$NGSM(\varphi,\eta) \equiv \frac{GSM(\varphi,\eta)}{\sum_{\eta' \in \Phi'} GSM(\varphi,\eta')} \tag{94}$$

について，

(2*)（規格化性）

$$\forall \varphi \in \Phi', \sum_{\eta' \in \Phi'} NGSM(\varphi,\eta') = 1 \tag{95}$$

の成立も知れる．更に，2.2のaxiom，（ⅲ）を適用すれば，

(3*)（$T-$不変性）

$$\forall \varphi, \forall \eta \in \Phi', NGSM(T\varphi,\eta) = NGSM(\varphi,\eta) \tag{96}$$

の成立も知れる．

式(94)の規格化一般化類似度関数 $NGSM$ を使えば，2つのパターン $\varphi \in \Phi', \forall \eta \in \Phi'$ の分離度（separability）$SEP(\varphi,\eta)$ は，

$$SEP(\varphi,\eta) = 1 - NGSM(\varphi,\eta) \tag{97}$$

であると考えることが出来よう．

7. おわりに

2式(20)，(24)の，文脈を考慮しない，或いは考慮した類似度関数 SM が備えているべき3性質として，正規直交性･規格化性･モデル構成作用素 T の下での不変性の3性質（1．の3性質（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ），或いは，2.2のaxiom）を指摘し，この3性質を満たす類似度関数 SM を7定理で一般的に構成し，その適用諸例も説明された．文脈を考慮した SM が式(34)の $sm(\eta\varphi\phi,\eta\omega_j\phi)$ に見られるように，文脈を考慮しない SM を核に持つ構成に帰着される場合があることも，定理1を適用すればわかる．定理1での3条件①，②，③を満たす式(25)の $sm(\eta\varphi\phi,\eta\omega_j\phi)$ の構成は，式(34)の場合に限られないが，その一般的構成論は将来に委ねられた．

この際，これまで，S.Suzuki以外の諸研究では，1．の3性質（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）を満たす類似度関数 SM は1つとして構成されていない事実を強調しておく．3付録B，C，Dにおいて，この3性質（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）がパターン情報処理において何故必要とされるかを説明しておいた．特に，文脈を考慮した，或いは，他のカテゴリから眺めたaxiomを満たす類似度関数 SM の構成定理（2定理1，2）は，他の研究では全く見られない．

例えば，定理1において，$sm(\eta\varphi\phi,\eta\omega_j\phi)$ として，定理2を適用した式(34)の設定を使えば，文脈を考慮し，他のカテゴリから眺めた類似度関数 $SM(\eta\varphi\phi,\eta\omega_j\phi)$ が「正規直交性･規格化性･ T の下での不

変性」を満たす形で得られるのである．$\eta \bullet \psi$ という文脈を考慮したaxiomを満たす類似度関数 SM の，定理1による構成法は，より複雑な任意の文脈を考慮した SM の構成法に結びつくことは，定理1の証明から明らかであろう．

2.2のaxiomを満たす SM の構成に関する再帰諸定理（4定理4～7）は，SM の構成が限りなく多様性を秘めていることを指摘していると言えよう．従って，処理の対象とする実際のパターン集合 Φ に応じ，適切な SM の選択法が必要とされることになるが，5.4.2で簡単に研究された SM を学習によって決定することを可能にする手法などにも関連し，この選択法の研究は別の機会に譲られる．

付録Aでのヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M;dm)$ で構成された類似度 SM は具体性を帯びてくる．計算機シミュレーション［9］～［13］，［16］，［18］，［19］，［21］，［22］，［37］，［40］，［41］で採用されている内積 (φ,η) はすべて，この特別なものである．7定理1～7で構成されたaxiomを満たす類似度関数 SM の構成法は，1部計算機シミュレーション済であり，現在も続行中であるが，他に類を見ない．構成された SM は著者が直観で発見したものであるが，その諸性質，特にある評価基準からの導出とか極値性とかについては，理論的な解明が1部進んでいるが，紙面の都合上省略された．例えば，式(8)の SM については，fuzzy c-means法から意味付けられることが，文献［5］の2.7.3，2.7.4項で明らかにされている．本論文で構成された SM はパターンモデル構成作用素 T の下での不変性を備えている故に，そのパターン分類機能は採用される T に依存している．採用されてよい T は多数存在するが，その典型的な5例をこの間の事情を少しでも容易にするため，付録Aで構成しておいた．

本論文で構成された類似度関数 T は単段階認識法の最大類似度法よりは，むしろ，万能性認識システムRECOGNITRON［5］，［6］が内蔵している多段階不動点探索認識法によるパターン φ の処理にも適切である場合が多い．SM の構成した諸例，特に再帰構成定理を参考にしながら，処理の対象とする問題のパターン集合 Φ に応じ，RECOGNITRON内に適切に設計することが望まれる．

参考文献

［1］ Jesse Spencer-Smith, Robert L.Goldstone : The Dynamics of Similarity，認知科学，vol.4，no,4，pp.38-56,1997

［2］ Simone Santini, Ramesh Jain : Similarity Measures, IEEE on Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.21,no.9,pp.871-883,1999

［3］ 鈴木昇一：認識工学，柏書房，Feb.1975

［4］ 鈴木昇一：ニューラルネットの新数理，近代文芸社，Sept.1996

［5］ 鈴木昇一：パターン認識問題の数理的一般解決，近代文芸社，Aug.1997

［6］ 鈴木昇一：認識知能情報論の新展開，近代文芸社，Aug.1998

［7］ 鈴木昇一：パターンのエントロピーモデル，電子情報通信学会論文誌（D-Ⅱ），vol.J77-D-Ⅱ，no.10，pp.2220-2238，Nov.1994

［8］ 鈴木昇一：測度的不変量検出形認識系の構成理論，電子通信学会論文誌（D），vol.55-D，no.8，pp.513-538，Aug.1972

［9］ 鈴木昇一：抽出された特徴による手書き漢字構造の再生，情報処理（情報処理学会誌），vol.18，no.11，pp.1115-1122，Nov.1977

［10］ 鈴木昇一，斉藤静昭，奥野治雄，太田芳雄：画像の復元とその計算機シミュレーション，工学院大学研究報告，no.39，pp.198-206，Jan.1976

［11］ 鈴木昇一：回転群と画像の分解･強調･構造化再構成に関する計算機シミュレーション，情報研究（文教大学･情報学部），no.4，pp.36-56，Dec.1983
［12］ 鈴木昇一：連想形記憶器MEMOTRONと日本語単独母音系列の再生に関する計算機シミュレーション，情報研究（文教大学･情報学部），no.7，pp.14-29，Dec.1986
［13］ 鈴木昇一：帰属係数法に基づく類似度，帰属関係あいまい度，認識情報量の計算機シミュレーション，情報研究（文教大学･情報学部），no.11，pp.51-68，Dec.1990
［14］ 鈴木昇一，佐久間拓也，前田英明：数理形態学における諸演算とモデル構成作用素，情報研究（文教大学･情報学部），no.17，pp.133-170，Dec.1996
［15］ 鈴木昇一：Radial-Basis Function Networks, Wavelet-Based Networksを用いたモデル構成作用素の構成法，情報研究（文教大学･情報学部），no.17，pp.71-132，Dec.1996
［16］ 鈴木昇一：構造受精法と日本語単独母音の認識，情報研究（文教大学･情報学部，no.18，pp.17-51，Dec.1997
［17］ 鈴木昇一：類似度関数を用いた確率的緩和法，情報研究（文教大学･情報学部），no.20，pp.23－75，Dec.1998
［18］ 鈴木昇一，前田英明：有声破裂音の代表パターンの学習的決定と，その計算機シミュレーション，情報研究（文教大学･情報学部），no.20，pp.77－95，Dec.1998
［19］ 鈴木昇一：直交系によるパターモデルの構成，情報研究（文教大学･情報学部），no.21，pp.23-49，Mar.1999
［20］ 鈴木昇一：認識行為に向けての，効用最大化原理，情報研究（文教大学･情報学部），no.22，pp.151-210，Dec.1999
［21］ 鈴木昇一：平均顔を用いた顔画像の2値化，並びに，目･鼻･口の抽出と，その計算機シミュレーション，情報研究（文教大学･情報学部），no.22，pp.65－150，Dec.1999
［22］ 鈴木昇一：界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の，顔画像処理に関する計算機シミュレーション，情報研究（文教大学･情報学部），no.23，pp.109－182，Mar.2000
［23］ 鈴木昇一：風景画から知識を抽出し，解釈するシステムの，ファジィ推論ニューラルネットによる構成，情報研究（文教大学･情報学部），no.23，pp.183-265，Mar.2000
［24］ 須藤昇：学習･再認に関する記憶表象生成モデルの実験的検証，The Japanese Journal of Psychology, vol.65，no.3，pp.206-214，1994
［25］ 石井健一郎，上田修功，前田英作，村瀬洋：わかりやすいパターン認識，オーム社（2000）
［26］ 鈴木昇一：高次認知機能における論理表現の要素，情報研究（文教大学･情報学部），no.19，pp.29-82，Mar.1998
［27］ 吉田耕作：近代解析，共立出版，Dec.1963
［28］ 鈴木昇一：多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション，情報研究（文教大学･情報学部），no.10，pp.35-49，Dec.1989
［29］ 鈴木昇一，前田英明：変動エントロピーによる有声破裂音の順序付けと，その計算機シミュレーション，情報研究（文教大学･情報学部），no.21，pp.51－78，Mar.1999
［30］ 鈴木昇一：各個人の感性を反映した認識システムRECOGNITRON，情報研究（文教大学･情報学部），no.24，pp.185－257，Dec.2000
［31］ 鈴木昇一：プロダクション･システムとしてのファジィ･マルチメディア･コンピュータと，空間多重パターンファジィ推論系，情報研究（文教大学･情報学部），no.24，pp.105－183，

Dec.2000
［32］ 鈴木昇一：SS大分類関数BSCの適応的構成への，計算論的学習理論の適用，情報研究（文教大学・情報学部），no.25，pp.185－236，Mar.2001
［33］ 鈴木昇一：量子力学の諸原理，多段階量子認識系と，心理状態を取り入れた想起に基づく部分空間認識法，情報研究（文教大学・情報学部），no.25，pp.237－282，Mar.2001
［34］ 鈴木昇一：Support Vector Machineを利用した大分類関数の構成，情報研究（文教大学・情報学部），no.26，pp.1－62，Dec.2001
［35］ 鈴木昇一：2カテゴリ分類困難度の情報理論，情報研究（文教大学・情報学部），no.26，pp.63－160，Dec.2001
［36］ 鈴木昇一：一般化類似度関数を用いた“導出原理による第1階述語推論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.27，pp.27－71，Mar.2002
［37］ 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：風景画の理解に関するJAVA言語によるRECOGNITRONの計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.27，pp.73－109，Mar.2002
［38］ 鈴木昇一：遺伝的アルゴリズムにおける適合度比例選択戦略を利用した進化方程式の，パターン多段階変換に基づく認識への応用，情報研究（文教大学・情報学部），no.28，pp.37－67，Dec.2002
［39］ 鈴木昇一：近傍を利用した音素認識のためのモデル構成作用素T，類似度関数SM，大分類関数BSCの諸構成と，SS不動点探索型多段階想起認識，情報研究（文教大学・情報学部），no.28，pp.69－141，Dec.2002
［40］ 鈴木昇一：JAVA言語で実装化された画像理解システムIUSの動作概要と，その稼動方法，情報研究（文教大学・情報学部），no.28，pp.143－165，Dec.2002
［41］ 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：JAVA言語による計算機シミュレーションで生じた風景画像の理解場面での多段階連想形認識過程の異常現象，情報研究（文教大学・情報学部），no.29，pp.123－166，July 2003
［42］ 鈴木昇一：パターン情報処理（モデル構成作用素，誤差逆伝播学習2層ニューラルネット）と，論理的含意とによる非単調的知識推論，情報研究（文教大学・情報学部），no.29，pp.75－121，July 2003
［43］ 鈴木昇一：可分な一般抽象ヒルベルト空間でのK-L直交系の理論，情報研究（文教大学・情報学部），no.29，pp.41－73，July 2003
［44］ 鈴木昇一：パターン系列（動画像，会話音声）の，dynamical systemによる連想理論と，連想器SPATEMTRON，情報研究（文教大学・情報学部），no.30，pp.139－186，Jan.2004
［45］ 鈴木昇一：入出力例の系列を用いた“対連想問題・その擬逆問題”の一般解，情報研究（文教大学・情報学部），no.30，pp.81－137，Jan.2004
［46］ 鈴木昇一：共役勾配法の一般解における直交系の応用（画像復元，パターンモデルの構成，パターン集合の情報理論的次元），情報研究（文教大学・情報学部），no.30，pp.27－79，Jan.2004
［47］ 鈴木昇一：2つのパターンモデル構成作用素の，λ言語論理による構成法，情報研究（文教大学・情報学部），no.31，pp.43－66，July 2004
［48］ 鈴木昇一：会話音声・動画像処理への，万能性類似度関数の採用によるSS多段階認識の改良，情報研究（文教大学・情報学部），no.31，pp.67－110，July 2004

［49］ 鈴木昇一：数理形態学の新しい2つのパターン変換作用素を用いた多段階想起認識，情報研究（文教大学・情報学部），no.31，pp.111－141，July 2004
［50］ 鈴木昇一：1パラメータLie座標変換群とそのパターン正規化への応用，情報研究（文教大学・情報学部），no.32，pp.21－74，Jan.2005
［51］ 鈴木昇一：曖昧さに関する半順序$\propto$を単調に保つモデル構成作用素T，情報研究（文教大学・情報学部），no.32，pp.75－126，Jan.2005
［52］ 鈴木昇一：パターンφから抽出された特徴量$u(\varphi,\ell)$のfuzzy単調変換，情報研究（文教大学・情報学部），no.32，pp.127－168，Jan.2005
［53］ 鈴木昇一：パターンモデル（パターンの標準形）の一般形，情報研究（文教大学・情報学部），no.32，pp.169－218，Jan.2005
［54］ 鈴木昇一：類似度関数の密度を用いた，画素毎のパターン認識処理（パターン理解処理）の方法，情報研究（文教大学・情報学部），no.32，pp.219－285，Jan.2005
［55］ 鈴木昇一：パターン（画像，音声）から感性情報を計量できる一般的な方法（視野を考慮して構成された類似度関数SMの応用），情報研究（文教大学・情報学部），no.33，pp.261-316，Jul.2005
［56］ 鈴木昇一：知識工学におけるcertainty factorによる多段階認識過程の評価，情報研究（文教大学・情報学部），no.33，pp.199-260，Jul.2005
［57］ 鈴木昇一：線形方程式の制約条件下での，残差法によるパターンモデル，情報研究（文教大学・情報学部），no.33，pp.149-197，Jul.2005
［58］ 鈴木昇一：正規直交性を満たす類似度関数SMに積分核が存在するか？，情報研究（文教大学・情報学部），no.33，pp.111-147，Jul.2005
［59］ 鈴木昇一：原パターンを近似できるという拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの，会話音声・動画像処理への応用，情報研究（文教大学・情報学部），no.33，pp.43-110，Jul.2005

付録A.　パターンモデル$T\varphi$の5構成例

一般に，処理の対象とする問題のパターンφの集合Φを内積，ノルムを各々，$(\varphi,\eta),\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi,\varphi)}$とする可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の或る部分集合とすると［3］，パターンモデル$T\varphi$を出力する写像

$$T:\Phi\to\Phi \tag{A1}$$

に要求されるのは，次の4性質①～④であることが理論的に明らかにされている［4］，［5］：

①（零元不動点性）

$\varphi=0\in\Phi$については，$T\varphi=0.$

②（正定数倍不変性）

任意の正実定数aに対し，

$\forall\varphi\in\Phi,T(a\cdot\varphi)=T\varphi.$

③（ベキ等性）

$\forall\varphi\in\Phi,T(T\varphi)=T\varphi.$

④（非零写像性）$\forall\exists\in\Phi,T\varphi\neq0.$ □

例えば，典型的な可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$として，

$\overline{\eta}:\eta$ の複素共役 (A2)

$M:q$ 次元ユークリッド空間 R^q の可測部分集合 (A3)

$dm(x)$:正値ルベーグ・スティルチェス式測度 (A4)

$x=<x_1,x_2,\cdots,x_q>\in M(\subseteq R^q)$ ： M 上に導入された q 次元直交実数値座標系 (A5)

を導入し，内積 (φ,η) が，

$$(\varphi,\eta)=\int_M dm(x)\varphi(x)\cdot\overline{\eta}(x) \tag{A6}$$

と与えられる可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}=L_2(M;dm)$ を考えることができる［3］～［8］．

本付録Aでは，上述の4性質①～④を満たすモデル構成作用素 T の5例を構成する．

A1. 有限個の振幅値をとるパターンモデル（有限多値モデル；離散モデル）$T\varphi$

先ず，不等式

$$\begin{aligned}-1\equiv e_{p+1}^-(x)<e_p^-(x)<\cdots<e_2^-(x)\\ <e_1^-(x)<0<e_\ell^+(x)\\ <e_2^+(x)<\cdots<e_q^+(x)<e_{q+1}^+(x)\equiv 1,x\in M\end{aligned} \tag{A7}$$

を満たす閾値の組

$$e^-(x),k=1,2,\cdots,p+1;e^+(x),k=1,2,\cdots,q+1,x\in M \tag{A8}$$

を用意する．そして，計算規則

$$\frac{\varphi(x)}{\sup_{y\in M}|\varphi(y)|}=0 \quad \text{if} \quad \sup_{y\in M}|\varphi(y)|=0$$

を設ける．更に，各 $t_k^\pm(x)$ は，

$$\begin{aligned}&t_{p+1}^-(x)=-1,t_{q+1}^+(x)=+1,x\in M\\ &e_k^-(x)\le t_k^-(x)<e_{k-1}^-(x),2\le k\le p+1,x\in M\\ &e_{k-1}^+(\ell)<t_k^+(x)\le e_k^+(x),2\le k\le q+1,x\in M\end{aligned} \tag{A9}$$

を満たすように選ばれているものである．例えば，

$$t_k^-(x)=2^{-1}\cdot[e_k^-(x)+e_{k-1}^-(x)],2\le k\le p,x\in M$$
$$t_k^+(x)=2^{-1}\cdot[e_{k-1}^+(x)+e_k^+(x)],2\le k\le q,x\in M$$

と選べばよい．

このとき，パターン

$$\varphi=\{\varphi(x)\,|\,x\in M\}$$

を，次のパターン

$$T\varphi=\{(T\varphi)(x)\,|\,x\in M\}$$

の様に離散化する：

$$\forall x\in M,(T\varphi)(x)=$$

$$\begin{cases} t_k^-(x)\cdots e_k^-(x) \le \dfrac{\varphi(x)}{\sup\limits_{x\in M}|\varphi(x)|} < e_{k-1}^-(x) \quad (2 \le k \le p+1) \text{ のとき} \\ 0\cdots e_1^-(x) \le \dfrac{\varphi(x)}{\sup\limits_{x\in M}|\varphi(x)|} \le e_1^+(x) \text{ のとき} \\ t_k^+(x)\cdots e_{k-1}^+(x) < \dfrac{\varphi(x)}{\sup\limits_{x\in M}|\varphi(x)|} \le e_k^+(x) \quad (2 \le k \le q+1) \text{ のとき} \end{cases}$$

(A10)

□

次の2補助定理A1，A2が成り立つ.

［補助定理A1］（零パターンモデル定理）

式(A10)で定義されている式(A1)の写像T に対し,

$$\forall x \in M, e_1^-(x) \le \frac{\varphi(x)}{\sup\limits_{x\in M}|\varphi(x)|} \le e_1^+(x) \tag{A11}$$

$$\Leftrightarrow T\varphi = 0. \tag{A12}$$

□

［補助定理A2］（パターンモデルの不動点定理）

式(A10)で定義されている式(A1)の写像T に対し，振幅の絶対値の上限の“0，1”規格化条件

$$\sup_{y\in M}|\eta(y)| \in \{0,1\}$$

の下で,

$$[\forall x \in M, \eta(x) \in \{t_k^-(x) \mid 2 \le k \le p+1\} \cup \{0\} \cup \{t_k^+(x) \mid 2 \le k \le q+1\}]$$

$$\Rightarrow T\eta = \eta. \tag{A13}$$

□

このとき，次の定理A1が成り立ち，離散有限個の振幅値をとるパターンモデル$T\varphi$ が得られた.

［定理A1］（離散有限個の振幅値をとるモデル構成作用素T の構成定理）

式(A10)の如く定義された式(A1)の写像T は，3性質①～③を満たし，補助定理A2から，性質④を満たす.　□

式(A10)で定義されている式(A1)の写像T に対し，$p=1, q=1$ ととれば，パターンφ の振幅が5値化されたパターンモデル(5値モデル;2対双極型モデル)$T\varphi$ が式(A16)の如く，得られたことがわかる：

$$\forall x \in M, (T\varphi)(x) =$$

$$\begin{cases} 1 \quad \mathit{if} \quad 2/3 < \varphi(x)/\sup\limits_{y\in M}|\varphi(y)| \le 1 \\ 1/2 \quad \mathit{if} \quad 1/3 < \varphi(x)/\sup\limits_{y\in M}|\varphi(y)| \le 2/3 \\ 0 \quad \mathit{if} \quad -1/3 \le \varphi(x)/\sup\limits_{y\in M}|\varphi(y)| \le 1/3 \\ -1/2 \quad \mathit{if} \quad -2/3 \le \varphi(x)/\sup\limits_{y\in M}|\varphi(y)| < -1/3 \\ -1 \quad \mathit{if} \quad -1 \le \varphi(x)/\sup\limits_{y\in M}|\varphi(y)| < -2/3 \end{cases}$$

(A16)

□

A2.　特徴抽出後定まる相似拡大･縮小に不変なパターンモデル $T\varphi$

第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の生起確率 $p(\mathfrak{C}_j)$ と，$\mathfrak{C}_j$ の代表パターン ω_j とを設け，その平均化パターン ξ を，

$$\xi \equiv \sum_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) \cdot \omega_j \tag{A17}$$

と定義する．

$$\begin{aligned}&(S_t\varphi)(x_1, x_2)\\ &= \varphi(x_1 \cdot \exp[-t], x_2 \cdot \exp[-t])\end{aligned} \tag{A18}$$

と定義される相似拡大･縮小のユニタリ作用素群 $\{S_t\}_{-\infty<t<+\infty}$ の各元 S_t は，可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(R^2; \frac{1}{{x_1}^2 + {x_2}^2} dx_1 dx_2)$ での自己共役作用素

$$H = \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{A19}$$

を用いて，H の指数関数として

$$S_t = \exp[-\sqrt{-1} \cdot t \cdot H] \tag{A20}$$

と表現出来る．ここに，R^2 は2次元平面である．

H の関数としての第 $\ell \in L$ 番目の射影作用素 $\theta_\ell(H)$ を導入し，直交性質

$$(\phi_k, \phi_\ell) = 0 \quad \text{if} \quad k \neq \ell \tag{A21}$$

を満たす第 $\ell \in L$ 番目のパターン形状素

$$\phi_\ell(x_1, x_2) = (\theta_\ell(H)\xi)(x_1, x_2) \tag{A22}$$

を定義する．各射影作用素 $\theta_\ell(H)$ の和

$$\theta(H) \equiv \sum_{\ell \in L} \theta_\ell(H) \tag{A23}$$

と，H の関数としての半正値自己共役作用素 $f(H)$ とを導入すれば，

パターン $\varphi \in \mathfrak{H}$ から抽出された第 $\ell \in L$ 番目の特徴量（測度的ユニタリ不変量）$\mathfrak{I}_\ell(\varphi)$ は，各 S_t の下での不変性

$$\begin{aligned}&\mathfrak{I}_\ell(S_t\varphi) = \mathfrak{I}_\ell(\varphi)\\ &\equiv \frac{(f(H) \cdot \theta_\ell(H) \cdot \theta(H)\varphi, \theta(H)\varphi)}{(\theta(H)\varphi, \theta(H)\varphi)}, -\infty < t < +\infty\end{aligned} \tag{A24}$$

を満たす［8］．不等式

$$0 < e_\ell \leq \mathfrak{I}_\ell(\theta(H)\xi) \tag{A25}$$

を満たすように，各閾値 $e_\ell (\ell \in L)$ が選ばれているとしよう．

2値特徴量 $u(\varphi, \ell)$ を

$$\begin{aligned}&u(\varphi, \ell) =\\ &\begin{cases} 0 \cdots \mathfrak{I}_\ell(\varphi) < e_\ell \text{ のとき} \\ 1 \cdots \mathfrak{I}_\ell(\varphi) \geq e_\ell \text{ のとき} \end{cases}\end{aligned} \tag{A26}$$

と定義し，各 $u(\varphi, \ell)$ を1次結合係数に持つ $T\varphi$ を

$$(T\varphi)(x_1,x_2)=\sum_{\ell\in L}u(\varphi,\ell)\cdot\phi_\ell(x_1,x_2) \tag{A27}$$

と定義する．

写像Tの不動点として，式(A17)のξの，$\theta(H)$からの出力$\theta(H)\xi$があることを指摘したのが次の補助定理3である．

［補助定理A3］（パターンモデル構成写像Tの不動点定理）

$$\forall\ell\in L, u(\xi,\ell)=1 \tag{A28}$$

が成立し，よって，不動点方程式

$$T\cdot\theta(H)\xi(=T\xi)=\theta(H)\xi \tag{A29}$$

が成り立つ．□

特徴抽出後定まる相似拡大･縮小に不変なモデル$T\varphi$が次の定理A2のように構成できる．

［定理A2］（特徴抽出後定まる相似拡大･縮小に不変なモデル構成作用素Tの構成定理）［3］，［7］～［9］

式(A27)のように定義された式(A1)の写像Tは上述の3性質①～③を満たし，補助定理A3から，性質④をも満たすようにパターン集合Φをとることができる．□

ちなみに，$\{\phi_\ell\}_{\ell\in L}$の，1次形式(A27)を備えた写像$T$による$\varphi\in\Phi$の像としてのパターン$T\varphi\in\Phi$が原パターン$\varphi\in\Phi$と同じ特徴量を備えていること，言い替えれば，等式(特徴量保存式)

$$\forall\ell\in L, u(T\varphi,\ell)=u(\varphi,\ell) \quad \text{for any} \quad \varphi\in\Phi \tag{A30}$$

の成立が証明されるから［8］，Tの第3番目の性質③が成立する．

このパターンモデル$T\varphi$は文献［9］で手書き漢字パターン$\varphi=\varphi(x_1,x_2)$の構造を再現するために使われている．

式(A19)の自己共役作用素Hと可換な任意のユニタリ作用素Uの下での不変性

$$\forall\varphi\in\mathfrak{H},\quad \forall\ell\in L,$$
$$\mathfrak{F}_\ell(\theta(H)U\varphi)=\mathfrak{F}_\ell(\theta(H)\varphi), -\infty<t<+\infty \tag{A31}$$

が成立しており［7］～［9］，よってパターンモデル$T\varphi$の不変性

$$T(U\varphi)=T\varphi \tag{A32}$$

が成立する．特に，式(A18)の相似･拡大のユニタリ作用素S_tは式(A19)の自己共役作用素Hと可換であることに注意しておく．

このようにして，原パターン$\varphi\in\Phi$の構造を表すパターンモデル$T\varphi\in\Phi$が，少なくとも相似拡大･縮小のユニタリ作用素群$\{S_t\}_{-\infty<t<+\infty}$の下で不変であるように，$\varphi\in\Phi$からの特徴抽出

$$\varphi\to\vec{u}(\varphi)\equiv\{u(\varphi,\ell)\mid\ell\in L\} \tag{A33}$$

の後定まる．

A3.　1次独立な系$\{\phi_\ell\}_{\ell\in L}$を利用し，特徴抽出した場合の連続パターンモデル構成作用素T

式(A27)のパターンモデル形式Tを持つパターンモデル$T\varphi$は以下に示されるように，有用である．

一般に，可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元からなる系$\{\phi_\ell\}_{\ell\in L}$は，直交系とは限らなくて，1次独立な系であるとしよう．勿論，直交系は1次独立な系であることに注意しておく．

このとき，処理の対象とするパターン$\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$が，第$k\in L$番目のパターン形状素と呼ばれる$\phi_k$からなる$\phi_k, k\in L$（$\mathfrak{H}$の基底の一部）の線形1次結合$\sum_{k\in L}a_k\cdot\phi_k$で近似される場合の近似誤差

$\varphi-\sum_{k\in L}a_k\cdot\phi_k$ のノルムの自乗

$$\left\|\varphi-\sum_{k\in L}a_k\cdot\phi_k\right\|^2 \tag{A34}$$

を最小ならしめる各複素係数 $a_k\equiv a_k(\varphi)$ については，最小自乗法を適用して得られる連立1次方程式

$$\sum_{m\in L}a_m(\varphi)\cdot(\phi_m,\phi_k)=(\varphi,\phi_k),k\in L \tag{A35}$$

を解いて求めることが出来る［5］．この時，

$$\forall k\in L,(\varphi_\perp,\phi_k)=0 \tag{A36}$$

を満たす $\varphi_\perp\in\mathfrak{H}$が存在して，原パターン $\varphi\in\mathfrak{H}$の表現（1次展開）

$$\varphi=\sum_{k\in L}a_k(\varphi)\cdot\phi_k+\varphi_\perp \tag{A37}$$

が成り立つから，パターン $\varphi\in\Phi$ から抽出される第 $k\in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi,k)$ として，

$$u(\varphi,k)=\begin{cases}0\cdots\forall k\in L,a_k(\varphi)=0\text{ のとき}\\ \dfrac{a_k(\varphi)}{\sup\limits_{k\in L}|a_k(\varphi)|}\cdots\exists k\in L,a_k(\varphi)\neq 0\text{ のとき}\end{cases} \tag{A38}$$

を採用してみよう．例えば，

$$M\equiv\{<x_1,x_2>|\,x_1{}^2+x_2{}^2\leq 1\}\subset R^2\ (\text{平面}) \tag{A39}$$

として，内積

$$(\varphi,\eta)\equiv\int dx_1\int_M dx_2\varphi(x_1,x_2)\cdot\overline{\eta}(x_1,x_2) \tag{A40}$$

を採用している可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}=L_2(M;dx_1dx_2)$ では，特徴軸の添字の集合 L を，

$$L\subseteq\{<p_1,p_2>|\,p_1,p_2=0,1,2,\cdots\} \tag{A41}$$

と選ぶと，

$k=<p_1,p_2>\in L$ として，

$$\phi_k=\phi_k(x_1,x_2)=\phi_{<p_1,p_2>}(x_1,x_2)=x_1{}^{p_1}\cdot,x_2{}^{p_2} \tag{A42}$$

と選定出来，この場合，パターン $\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$の1次展開式（A37）に登場する各1次展開係数 $a_k(\varphi)$ は，画像パターン $\varphi=\varphi(x_1,x_2)\in\Phi\subset\mathfrak{H}$の (p_1-p_2) 次モーメントに対応する量を表すことになる事実に注意しておく．

各特徴量 $u(\varphi,k)$ が式（A38）で定義される特徴抽出写像

$$u:\Phi\times L\to Z\ (\text{複素数全体の集合}) \tag{A43}$$

と，1次独立な系 $\{\phi_\ell\}_{\ell\in L}$ とによって得られる構造形式

$$T\cdot=\sum_{\ell\in L}u(\cdot,\ell)\,\phi_\ell \tag{A44}$$

を持つ式（A1）の写像 T を考えよう．

次の補助定理A4は，式（A44）の写像 T の不動点が各 $\phi_k(k\in L)$ であることを明らかにしている．

［補助定理A4］

式（A44）の写像 T に関し，不動点方程式

$$\forall k\in L,T\phi_k=\phi_k \tag{A45}$$

が成り立つ. □

このとき，構造形式(A44)を備えたパターンモデル $T\varphi$ が得られることが次の定理A3からわかる.

［定理A3］(1次独立なパターン形状素の系 $\{\phi_\ell\}_{\ell\in L}$ に基づくパターンモデル $T\varphi$ の構成定理)

式(A43)で定義される特徴抽出写像 u と，1次独立な系 $\{\phi_\ell\}_{\ell\in L}$ とによって得られる構造形式(A44)を持つ式(A1)の写像 T は3性質①～③を満たし，補助定理A4から，性質④をも満たすようにパターン集合 Φ をとることができる. □

等式(A30)が成立している，つまり，抽出された特徴量の組

$$\vec{u}(\varphi)\equiv\{u(\varphi,\ell)\mid \ell\in L\} \tag{A46}$$

を保存する形式で，原パターン φ の形状を保存する非線形変換 T が考えられていることに注意しておく.

次の補助定理A5は，原パターン φ から雑音成分 $\varphi_\perp$ を除去したものがパターンモデル $T\varphi$ の正定数倍であることを明らかにしている.

［補助定理A5］

$$\forall\varphi\in\Phi,[\sup_{k\in L}|a_k(\varphi)|]\cdot T\varphi=\varphi-\varphi_\perp. \tag{A47}$$

□

このパターンモデル $T\varphi$ と定数倍だけ異なるものは文献［A22］で顔画像パターン $\varphi=\varphi(x_1,x_2)\in\Phi\subset\mathfrak{H}$ の構造を再現するために使われている.

A4. 1次独立な系 $\{\phi_\ell\}_{\ell\in L}$ を利用し，量子化特徴抽出した場合の量子化モデル構成作用素 T

本章でも，系 $\{\phi_\ell\}_{\ell\in L}$ は可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ で1次独立な系であるとしよう.

パターン $\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$ の1次展開式(A37)内の各線形1次結合係数 $a_k(\varphi)$ を $(m+n+3)$ 個の値に量子化し，4性質①～④を満たす量子化されたモデル構成作用素 T を求めよう.

不等式

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon'_k(m+1)\equiv-1<\\
&-\varepsilon'_k(m)<-\varepsilon'_k(m-1)<\cdots<-\varepsilon'_k(1)<-\varepsilon'_k(0)\\
&<0\\
&<+\varepsilon_k(0)<+\varepsilon_k(1)<\cdots<+\varepsilon_n(n-1)<+\varepsilon_k(n)\\
&<+\varepsilon_k(n+1)\equiv+1
\end{aligned} \tag{A48}$$

を満たす $(m+n+4)$ 個の閾値の組

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon'_k(q'),q'\in\{m+1,m,m-1,\cdots,1,0\}\\
&+\varepsilon_k(q),q\in\{0,1,\cdots,n-1,n,n+1\}
\end{aligned} \tag{A49}$$

を用意する.

$\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$ の1次展開式(A37)内の各1次展開係数 $a_k(\varphi)$ が実数値である場合，式(A38)の $u(\varphi,k)$ を $u'(\varphi,k)$ と表現しよう. このとき，パターン $\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$ から抽出される第番目の量子化特徴量 $u(\varphi,k)$ を，

$u(\varphi,k)\equiv$

$$\begin{cases} -\varepsilon_k'(q')\cdots-\varepsilon_k'(q') \le u'(\varphi,k) < -\varepsilon_k'(q'-1) \\ \qquad\qquad \text{for} \quad q' \in \{m+1,m,m-1,\cdots,2,1\} \text{ のとき} \\ 0\cdots-\varepsilon_k'(0) \le u'(\varphi,k) \le -\varepsilon_k(0) \text{ のとき} \\ +\varepsilon_k(q)\cdots+\varepsilon_k(q-1) < u'(\varphi,k) \le -\varepsilon_k'(q) \\ \qquad\qquad \text{for} \quad q \in \{1,2,\cdots,n-1,n,n+1\} \text{ のとき} \end{cases} \tag{A50}$$

と定義した後，式(A44)の写像 T を定義しよう．このとき，次の補助定理A6のごとく，T の不動点 ϕ_ℓ が求まる．

［補助定理A6］

式(A50)の各量子化特徴量 $u(\varphi,k)$ を用いた式(A44)の写像 T に関し，不動点方程式(A45)が成り立つ． □

次の定理A5が成立し，定理A4のパターンモデル $T\varphi$ の量子化モデルが得られたことがわかる．

［定理A4］（量子化特徴抽出写像 u による量子化モデル構成作用素 T の構成定理）［6］

式(A50)の量子化特徴量 $u(\varphi,\ell)$ と，1次独立なパターン形状素 ϕ_ℓ の組 $\{\phi_\ell\}_{\ell\in L}$ を用い構成される構造形式(A44)を持つ式(A1)の写像 T は，3性質①～③を満たし，補助定理A6から，性質④をも満たすように，パターン集合 Φ をとることができる． □

A5. 原点に関する相似拡大･縮小と回転とを是正して得られるパターンモデル $T\varphi$

パターン $\varphi=\varphi(x_1,x_2)\in\Phi\subset\mathfrak{H}=L_2(R^2;\dfrac{dx_1dx_2}{{x_1}^2+{x_2}^2})$ が実数値である場合を考えよう．

原点に関する回転の1次モーメント

$$Mom(\varphi,1) \equiv \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}dx_1\int_{-\infty}^{+\infty}dx_2\frac{1}{{x_1}^2+{x_2}^2}\cdot\varphi(x_1,x_2)\cdot\tan^{-1}(\frac{x_2}{x_1})}{\int_{-\infty}^{+\infty}dx_1\int_{-\infty}^{+\infty}dx_2\frac{1}{{x_1}^2+{x_2}^2}\cdot\varphi(x_1,x_2)} \tag{A51}$$

と，原点に関する相似拡大･縮小の1次モーメント

$$Mom(\varphi,2) \equiv \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}dx_1\int_{-\infty}^{+\infty}dx_2\frac{1}{{x_1}^2+{x_2}^2}\cdot\varphi(x_1,x_2)\cdot\log_e\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty}dx_1\int_{-\infty}^{+\infty}dx_2\frac{1}{{x_1}^2+{x_2}^2}\cdot\varphi(x_1,x_2)} \tag{A52}$$

を導入し，2つの実数t1，t2を

$$t_1=Mom(\varphi,1)\,,\quad t_2=Mom(\varphi,2) \tag{A53}$$

と求める．

$$x_1=u\cdot\cos v, x_2=u\cdot\sin v \tag{A54}$$

と定義される直角座標系 $<x_1,x_2>$，極座標系 $<u,v>$ を考え，

$$(T\varphi)(x_1,x_2)=$$

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi(\exp(t_2)\cdot u\cdot\cos(v+t_1),\exp(t_2)\cdot u\cdot\sin(v+t_1))}{\|\varphi\|}\cdots\|\varphi\|>0 \text{ の場合} \\ 0\cdots\|\varphi\|=0 \text{ の場合} \end{cases} \tag{A55}$$

と定義される式(A1)の写像Tを導入する．

$$z_1=\log_e u, z_2=v \tag{A56}$$

と定義される座標系$<z_1, z_2>$を導入すれば，

$$dx_1dx_2=ududv=dz_1dz_2 \tag{A57}$$

が成立し，それ故，

$$Mom(T\varphi,1)=0\,,\quad Mom(T\varphi,2)=0 \tag{A58}$$

の成立が証明され，原パターンφの，原点に関する相似拡大･縮小と回転とを是正して，パターンモデル$T\varphi$が得られている．

次の定理A5を証明するために，以下の補助定理A7を用意する．

［補助定理A7］

$$t_1=t_2=0\wedge\|\varphi\|=1 \tag{A59}$$

を満たすパターンφについて，式(A55)の写像Tに関し，不動点方程式

$$T\varphi=\varphi \tag{A60}$$

が成り立つ．　□

次の定理A5が成り立ち，原点に関する相似拡大･縮小と回転とを是正して得られるパターンモデル$T\varphi$が得られたことがわかる．

［定理A5］（原点に関する相似拡大･縮小と回転とを是正して得られるモデル構成作用素Tの構成定理）

式(A55)の写像Tは，3性質①～③を満たし，補助定理A7から，性質④をも満たすように，パターン集合Φをとることができる．　□

付録B.　構成された類似度関数SMの正規直交性

2.2節のaxiomの(ⅰ)，特に，代表パターンω_i,ω_j間に完全な無相関性(直交性)

$$SM(\omega_i,\omega_j)=0(i\neq j) \tag{B1}$$

を要請することは，一見現実的でないと考えるこれまでのパターン認識研究者が存在する．しかしながら，そうではないことを以下で説明しておく．

先ず，しばしば使われる2つの類似度(パターンφが第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターンω_jと似ている度合いを表している非負実数値関数としての類似度関数) $sm0(\varphi,\omega_j)$，$sm1(\varphi,\omega_j)$は，内積を用いる形のものであり，

$$sm0(\varphi,\omega_j)=\frac{(\varphi,\omega_j)}{\|\varphi\|\cdot\|\omega_j\|} \tag{B2}$$

$$sm1(\varphi,\omega_j)=\left|\frac{(\varphi,\omega_j)}{\|\varphi\|\cdot\|\omega_j\|}\right|^2=|sm0(\varphi,\omega_j)|^2 \tag{B2}$$

である．$sm0$はφ,ω_jが実数値である場合，意味を持つ．$sm1$はS.Suzukiの提案した平均類似度［8］

の特別な場合である．正規直交性の内，類似性の最大性質（正規性）

$$sm0(\omega_j,\omega_j)=sm1(\omega_j,\omega_j)=1 \tag{B4}$$

を満たすが，一般に，類似性の最小性質（直交性）

$$sm0(\omega_i,\omega_j)=sm1(\omega_i,\omega_j)=0(i\neq j) \tag{B5}$$

は満たされない．類似性の最大・最小両性質が2.2節のaxiom，（ｉ）（正規直交性）であるが，正定数 a_j を導入して定義される類似度関数

$$sm2(\varphi,\omega_j)=\exp[-\frac{1}{a_j}\cdot\|\varphi-\omega_j\|^2] \tag{B6}$$

についても，同様である． $sm0,sm1,sm2$ は，「規格化性・ T の下での不変性」（2.2節のaxiomの（ⅱ），（ⅲ））を勿論，満たさない． $sm2,sm1$ は各々，1．の（イ），（ハ），（ニ）のように変換すれば，「類似性の最大・最小両性質（正規直交性）・規格化性・ T の下での不変性」（2.2節のaxiom）を満たすことになる．

それでは， $sm0$ を変換して，「正規直交性・規格化性・ T の下での不変性」を満たすようにする手法を考えよう．

通常，困難と思われる類似性の最小性を満たすように構成し直すことに焦点を当て，一般的に考えよう．

パターン φ が第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン ω_j と似ている度合いを表している非負実数値関数としての類似度関数 $sm(\varphi,\omega_j)$ を考えよう．

例えば，付録Aの4性質①～④を満たすモデル構成作用素 T を使い，式（B2）の $sm0$ を

$$sm(\varphi,\omega_j)=\frac{(T\varphi,T\omega_j)}{\|T\varphi\|\cdot\|T\omega_j\|} \tag{B7}$$

と変換しておく．この種の $sm(\varphi,\omega_j)$ が，分離（を表す不等式）条件

$$\forall j\in J,\max_{i\in J-\{j\}} sm(\varphi,\omega_j)<sm(\omega_j,\omega_j) \tag{B8}$$

を満たすと想定するのは，無理なことではない．何故ならば，もし，この分離条件を満たさないものであれば，そもそも，各 ω_j を代表パターンと称することが不可能になるからである．

分離条件式（B8）を満たす代表パターン ω_j の，式（19）の系 Ω を考えることができる．例えば，式（B7）の関数 sm について，分離条件式（B8）を満たすように各 ω_j が選ばれていると想定するのは自然である．

分離条件式（B8）から，必ず不等式

$$\forall j\in J,\max_{i\in J-\{j\}} sm(\varphi,\omega_j)\leq s_0(j)<s_1(j)\leq sm(\omega_j,\omega_j) \tag{B9}$$

を満たす2つの閾値 $s_0(j),s_1(j)$ を見つけることができる．このとき， $sm(\varphi,\omega_j)$ を

$$S(\varphi,\omega_j)=$$

$$\begin{cases} 1\cdots s_1(j)\leq sm(\varphi,\omega_j)\ \text{の場合} \\ \dfrac{sm(\varphi,\omega_j)-s_0(j)}{s_1(j)-s_0(j)}\cdots s_0(j)<sm(\varphi,\omega_j)<s_1(j)\ \text{の場合} \\ 0\cdots sm(\varphi,\omega_j)\leq s_0(j)\ \text{の場合} \end{cases} \tag{B10}$$

へと，区分的線形変換を使い変換すると，

$$SM(\varphi,\omega_j)=$$

$$\begin{cases} \dfrac{S(\varphi,\omega_j)}{\sum_{k\in J} S(\varphi,\omega_k)} \cdots \sum_{k\in J} S(\varphi,\omega_k) > 0 \text{ のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \sum_{k\in J} S(\varphi,\omega_k) = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

（B11）

と定義される非負実数値関数関数 $SM(\varphi,\omega_j)$ は $sm(\varphi,\omega_j)$ の性質を受け継いでおり，「正規直交性・規格化性・T の下での不変性」（2.2節のaxiom）を満たしていることが直ちにわかる．

付録C．パターンの一意的帰属に関する類似度関数SMの諸性質

2.2節のaxiomの（ⅱ）からもたらされる諸性質を説明しよう．

パターンと称されてよい学習すべき各代表パターン ω_j の，ごく近くにあるものの集まりが，処理すべき問題のパターン φ の集合 Φ であると考えられ，不等式

$$0 \le \delta_j < \frac{1}{2} \tag{C1}$$

を満たす或る非負実数 δ_j を考えると，このパターン集合 Φ は互いに素な集合

$$\Phi_j \equiv \{\varphi \in \Phi \mid SM(\varphi,\omega_j) \ge 1-\delta_j\} \tag{C2}$$

の和 $\cup_{j\in J}\Phi_j$ と，それ以外のパターンとの集まり Φ_0 との和として，

$$\Phi = [\cup_{j\in J}\Phi_j] \cup \Phi_0 \tag{C3}$$

と表されると考えられる．

パターン集合 Φ に対し，axiomを満たす式（20）の類似度関数 SM が適切に選ばれているならば，式（C2）で表されるパターン集合 Φ_j の各元 $\varphi \in \Phi$ に関しては，第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属するという出力をもたらす認識システムを少なくとも，構成しなければならないことは，axiomの（ⅱ）のみを使って証明される次の定理C1からわかる．

［定理C1］（$SM-\delta_j$ 定理）

（イ）（一意的帰属に関する $SM-\delta_j$ 定理）

不等式

$$SM(\varphi,\omega_j) \ge 1-\delta_j \tag{C4}$$

を満たすカテゴリ番号 $j \in J$ は存在するとすれば，唯1つしかない．

（ロ）（一意的帰属に関する $SM_{\max}$ の $\frac{1}{2}$ 分離定理）

不等式（C4）が成立していれば，

$$\max_{i\in J-\{j\}} SM(\varphi,\omega_i) \le \delta_j < \frac{1}{2} < 1-\delta_j \le SM(\varphi,\omega_j) \tag{C5}$$

（ハ）（一意的帰属に関する $SM_{\max}$ の差 $1-2\cdot\delta_j$ 定理）

不等式（C4）が成立していれば，

$$0 < 1-2\cdot\delta_j \le SM(\varphi,\omega_j) - \max_{i\in J-\{j\}} SM(\varphi,\omega_i). \tag{C6}$$

（証明）（イ）の証明：

不等式（C4）を満たすカテゴリ番号 $i \in J_1(\subseteq J)$ が $|J_1| \ge 2$ 個，存在するとしよう．

$$1 = \sum_{i\in J-J_1} SM(\varphi,\omega_j) + \sum_{i\in J_1} SM(\varphi,\omega_j)$$

$$
\begin{aligned}
&\because\quad \text{2.2節のaxiomの（ⅱ）}\\
&\geq \sum_{i\in J_1} SM(\varphi,\omega_i)\\
&\geq \sum_{i\in J_1}(1-\delta_j)\quad \because\quad \text{不等式(C4)}\\
&>|J_1|\cdot\frac{1}{2}\quad \because\quad \text{式(C1)から}\ 1-\delta_j>\frac{1}{2}
\end{aligned}
\tag{C7}
$$

を得るが，

$$|J_1|=2,3,4,\cdots$$

であるから，これは矛盾である．

（ロ）の証明：

$$
\begin{aligned}
&1=\sum_{i\in J} SM(\varphi,\omega_i)\qquad \because\quad \text{2.2節のaxiomの（ⅱ）}\\
&=SM(\varphi,\omega_j)+\sum_{i\in J-\{j\}} SM(\varphi,\omega_i)\\
&\geq SM(\varphi,\omega_j)+\max_{i\in J-\{j\}} SM(\varphi,\omega_i)\\
&\therefore
\end{aligned}
$$

$$1-SM(\varphi,\omega_j)\geq \max_{i\in J-\{j\}} SM(\varphi,\omega_i) \tag{C8}$$

であるが，不等式(C4)から

$$\delta_j\geq 1-SM(\varphi,\omega_j)$$

が成立しているから，

$$\max_{i\in J-\{j\}} SM(\varphi,\omega_i)\leq\delta_j \tag{C9}$$

が成立する．残りは2式(C1)，(C4)から明らかである．

（ハ）の証明：

不等式(C9)から得られる不等式

$$-\max_{i\in J-\{j\}} SM(\varphi,\omega_i)\geq-\delta_j$$

と，不等式(C4)とを加えれば，

$$SM(\varphi,\omega_j)-\max_{i\in J-\{j\}} SM(\varphi,\omega_i)\geq 1-2\cdot\delta_j>0 \tag{C10}$$

を得，不等式(C6)が得られた． □

式(C3)内のパターン集合 Φ_0 は，3種類のパターン

（一）変形しているけれども，唯1つのカテゴリに帰属しているパターン

（二）どのカテゴリにも帰属しないパターン

（三）2つ以上のカテゴリに帰属しているパターン

を含んでいる．

構成しなければならない認識システムが備えていなければならない認識の働きとは，処理の対象とする問題のパターン φ の集合は Φ であるけれども，2.2節のaxiomを満たす式(20)の類似度関数 SM を適切に選び，パターン集合 $\Phi_0(\subset\Phi)$ 内の，（一）でいう正常なパターン $\varphi\in\Phi$ を，不等式(C4)，つまり，

$$SM(\varphi_t, \omega_j) \geq 1 - \delta_j \tag{C11}$$

を満たすような，式(19)の代表パターン集合Ω内の，唯1つの代表パターンω_jのモデル$T\omega_j$のみに近い第$t(=0,1,2,\cdots)$段階のパターンφ_tへと多段階にわたり，変換することである．そうすれば，定理C1の(イ)からわかるように，唯1つの第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$にパターン$\varphi \in \Phi$は帰属すると，大抵の場合正しく認識されるになる．

付録D．パターンモデル$T\varphi$を不変に保つパターン変換Uからもたらされる類似度関数SMの不変性

2.2節のaxiomの(ⅲ)からもたらされるSMの不変性質を説明しよう．

式(A1)のモデル構成作用素Tがあるパターン変換Uに対し不変ならば，axiomを満たす式(20)の類似度関数SMもこのパターン変換Uに対し不変であることを説明しよう．

パターン変換

$$U : \Phi \to \Phi \tag{D1}$$

に関し，等式(A32)が成立するならば，パターンモデル$T\varphi$を生成する式(A1)の写像Tは，パターン$\varphi \in \Phi$の変形

$$\varphi \to U\varphi \tag{D2}$$

を吸収する能力を備えている．何故ならば，$\varphi \in \Phi$とその変形$U\varphi \in \Phi$は共に，共通なパターン標準形$T\varphi$を持つことになるからである．この種のパターン変換として規則的変形としてのユニタリ座標変換，不規則的な変形を許容する離散量子化変換があることは既に示されている［3］，［6］，［7］～［9］．

類似度関数SMの2種類の不変性について説明しよう．不変性

$$\forall \varphi \in \Phi, T(U\varphi) = T\varphi \tag{D3}$$

を満たす任意のパターン変換Uは大抵の場合，多数存在する．例えば，付録Aの②での，任意の正実数aがそうである．このとき，

（イ）（SMの正定数倍不変性）

任意の正定数aについて，

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(a \cdot \varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j) \tag{D4}$$

が成立する．何故ならば，

$$\begin{aligned} & SM(a \cdot \varphi, \omega_j) \\ & = SM(T(a \cdot \varphi), \omega_j) \quad \because \ \text{2.2節のaxiomの(iii)} \\ & = SM(T\varphi, \omega_j) \quad \because \ \text{付録Aの②} \\ & = SM(\varphi, \omega_j) \quad \because \ \text{2.2節のaxiomの(iii)} \end{aligned} \tag{D5}$$

が得られるからである．式(D5)の導出と同様に，

Tの$U-$不変式(D3)が成立していれば，

$$\begin{aligned} & SM(U\varphi, \omega_j) \\ & = SM(TU\varphi, \omega_j) \quad \because \ \text{2.2節のaxiomの(iii)} \\ & = SM(T\varphi, \omega_j) \quad \because \ T\text{の}U-\text{不変式(D3)} \\ & = SM(\varphi, \omega_j) \quad \because \ \text{2.2節のaxiomの(iii)} \end{aligned} \tag{D6}$$

が示され，次の(ロ)の不変性が成り立つ．

（ロ）（SMの$U-$不変性）

T の$U-$不変式(D3)が成立していれば，

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J,SM(U\varphi,\omega_j)=SM(\varphi,\omega_j). \tag{D7}$$

特に，式(D3)のパターン変換Uとして，モデル構成作用素T 自身があることを要求しているのが2.のaxiomの（ⅲ）である．

(著者　鈴木昇一，論文題目　類似度関数の諸例と，他のカテゴリから眺め，文脈を考慮した類似度関数，文教大学情報学部情報研究no. 37　　投稿論文，投稿年月日　2007年3月28日(水))