一般化類似度関数を用いた“導出原理による第1階述語推論”

鈴木　昇一

A First-Order Predicate-Logic Inference Using a Resolution Principle Based on Generalized Similarity-Measure Functions

Shoichi Suzuki

あらまし

本論文での研究目的は，鈴木によってこれまで提案されている3システムRECOGNITRON, MEMOTRON, FUZZITRON以外に，パターン情報処理技術を基盤として，自然言語理解システムの構築に必要なテキスト推論機構を提案することである．本論文では，パターン情報処理におけるSS一般化類似度関数

GSM: $\Phi \times \Phi \rightarrow \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\}$

の働きで，つまり，GSM($A\varphi$, η)の値が2^{-1}より大きいときパターン変換

A: $\Phi \rightarrow \Phi$

に対応する第1階論理述語が近似的に真であるという“fuzzy 推論に似た解釈”を採用し，テキスト**推論技術を確保しようとする試み**を展開する．ここに，$\Phi(\ni \varphi, \eta)$は処理の対象とするパターンφの集合である．このような試みは本研究以外に類を見ない．例えば，第1階述語論理の部分集合であるホーン節の集合(＝Prologプログラム)を内部表現に用いて，

ホーン節集合に対する推論がPrologプログラムの実行(閉世界での質問節についての，知識ベースからの証明過程)になる

という事実に基づいて，自然言語処理を実現しようとする試みに直接，役立つ．

キーワード

マルチメディア情報処理　　自然言語理解システム　　テキスト推論機構
パターン認識の数学的理論(SS理論)　　モデル構成作用素　　一般化類似度関数
一般化大分類関数　　導出原理　　命題　　述語　　第1階推論
人工知能言語　　Prolog　　パターン推論　　記号推論

Abstract

An aim of this paper is to construct a text-inference mechanism needed to design a natural-

understanding system based on pattern-information processing techniques except RECOGNITRON, MEMOTRON and FUZZITRON so far proposed by S.Suzuki. We explore to secure an inference-technique using texts, adopting an interpretation like a fuzzy inference that if a value GSM($A\varphi$, η) of an generalized similarity function

$$GSM: \Phi \times \Phi \rightarrow \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\}$$

is greater than 2^{-1}, a predicate corresponding to a pattern-transformation

$$A: \Phi \rightarrow \Phi$$

is approximately true, where $\Phi(\ni \varphi, \eta)$ is a set consisting of patterns to be processed in question. There is not this trial until now. For example, we often uses as its internal knowledge expression a set of horn clauses(=Prolog program) according to the fact of that an inference for a Prolog horn clauses is equivalent to an execution of the clauses. A technique presented here is of any service to the trial which realizes a natural language prpocessing.

Key words : multi-media information-processing natural language understanding system text-inference mechanism mathematical theory of recognizing patterns (SS theory) model-construction operator generalized similarity-measure function generalized rough classifier resolution principle proposition predicate first order inference artificial-intelligence language Prolog inference using patterns inference using symbols

1. まえがき

帰納的推論を探索問題の解決として捉え，E.Y.Shapiroの矛盾点追跡アルゴリズムを使い，思考力を増幅する機械の典型的な1つとして，S.Suzuki等はPrologプログラムの自動合成システム(Prologをベースにした知識情報システム)を開発した［B26］～［B28］．本論文はその一続編である．

これまで，S.Suzukiは，可分な一般抽象ヒルベルト空間[A1] $\mathfrak{H}$ 上で稼働する3つの**情報システム**

①万能性連想形パターン認識システム **RECOGNITRON** [B3]，[B4]，[B14]，[B21]

②パターンの系列を記憶し，それを想起的再生する連想形記憶システム **MEMOTRON** [B2]，[B11]

③マルチメディア処理用ファジィ・プロダクション・システム **FUZZITRON** [B23]

を提案し，その簡単な計算機シミュレーション［B7］～［B17]，[B20］を介し，その性能を確かめている．

自然言語理解システム［A3］とは，自然言語で表現されたテキスト文を，ある内部表現に変換しながら，知識ベース内にその世界の知識として蓄え(知識の獲得)，この知識ベースに対する疑問文に対し，知識ベース内の知識を基に推論しその返答(閉世界での返答)を出力するシステムのことである．

本論文での研究目的は，鈴木によって提案されているRECOGNITRON, MEMOTRON, FUZZITRON以外に，パターン情報処理技術を基盤として，自然言語理解システムの構築に必要なテキスト推論機構を提案することである．

1.1　自然言語理解システムの構築に向けて

S.Suzukiは，表象化･知覚･連想･記憶･検索･認識･学習･理解に関するパターン情報処理の知能的問題解決理論を

"axiom 1～axiom 4の4公理からなるSS公理系から導かれるパターン認識の
数学的理論(SS理論)［B1］～［B6］"　(1.1)

を拠り所として確立しようとしている．

人間機能を代行しながら，知的に振る舞う**知的エージェント**構成問題の解決を抱えているマルチメディア知能情報社会で取り扱われる情報は，文字列(で表される)言語と，パターン(で表される)時系列である．

成熟期を迎えようとする現在のマルチメディア時代においては，

(1)メディアで表された情報を検索し，認識･理解する技術の確保問題

は無論として，

(2)例えば、テキスト(記号列；文字列)の内容を音声･画像で表示したり，音声･
画像の内容をテキストで要約したりするメディア相互変換技術の確立問題

などを解決しながら，多種多様なメディアを益々、高効率に処理しなければならない．このために基本的に要求されるのが，自然言語(テキスト)の処理技術(言語による表象(命題表象［A2］)の処理技術)，パターン列の処理技術(視覚･聴覚などによる表象(アナロジー表象［A17］)の処理技術)である．

本論文では，パターン情報処理におけるSS一般化類似度関数(generalized similarity-measure function proposed by S.Suzuki)

$$\mathrm{GSM}: \Phi \times \Phi \to \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \tag{1.2}$$

の働きで，つまり，$\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta)$の値が$2^{-1}$より大きいとき，パターン変換$A: \Phi \to \Phi$に対応する第1階論理述語が真であるという"fuzzy 推論に似た解釈"を採用し，テキスト**推論技術を確保しようとする試み**を展開する．ここに，$\Phi(\ni \varphi,\ \eta)$は処理の対象とするパターンφの集合である．このような試みは本研究以外に類を見ない．例えば，第1階述語論理の部分集合であるホーン節の集合(＝Prologプログラム)を内部表現に用いて

ホーン節集合に対する推論がPrologプログラムの実行(閉世界での
質問節についての，知識ベースからの証明過程)になる　(1.3)

という事実に基づいて，自然言語処理を実現しようとする試み［A3］に直接，役立つだろう．

1.2　一般化類似度関数GSM

パターンとは，静止画像，動画像(映像)，平面画像，立体画像，言語音声，会話音声，楽曲等などの総称である．

パターン情報学では，分類の対象となるものをパターンというが，S.Suzuki以外のパターン想起･認識の理論は，パターンが既に圧縮されたものをパターンと称して論が展開されることが多い．既に圧縮されているものは事実上そのパターンの特徴量の組であるにもかかわらず．分類の前処理としてなされるデータ圧縮はこの意味で，ある程度似た者同士を1つにまとめるクラスタリングの働きをしている．

処理の対象とする問題のパターン$\varphi \in \Phi$を圧縮したものがS.Suzuki理論でのパターンモデル$T\varphi \in \Phi$である．モデル$T\varphi$を見たり聞いたりしたならば，原パターンφであるかのように見えたり聞

こえたりする(パターンモデルと原パターンとの間の同一知覚原理；A2章を参照)ためには，処理の対象とする問題のパターンの集合Φと，写像

$$T : \Phi \rightarrow \Phi \tag{1.4}$$

との対【Φ, T】は，少なくともaxiom 1を満たさなければならないというのがS.Suzuki理論［B1］～［B4］の主張である．このような写像Tはモデル構成作用素と呼ばれる．

S.Suzuki理論を適用し，外界を理解する能力を備えたシステムを現実場面で活用するには，axiom 1, 2, 3を各々満たすモデル構成作用素T，類似度関数

$$SM : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \tag{1.5}$$

，並びに，大分類関数

$$BSC : \Phi \times J \rightarrow \{0, 1\} \tag{1.6}$$

の3者を具体的に設計しなければならない．これまでT, SM, BSCについては，文献Bに見られるごとく，それらの具体的な設計論はある程度研究されてきた。ここに、J はカテゴリ番号の集合であり，

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} \tag{1.7}$$

は第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターンω_jの集合(代表パターン集合)である．

本論文では，2つのパターンφ, $\eta \in \Phi$間の一般化類似度関数GSMは，$\varphi \in \Phi$, $\omega_j \in \Omega$間の類似度関数SMを用いて

$$GSM(\varphi, \eta) \equiv \max_{j \in J} \min \{SM(\varphi, \omega_j), SM(\eta, \omega_j)\} \tag{1.8}$$

と定義する．

ここで，一般化類似度関数GSM内の類似度関数SMをパターンから抽出された特徴量の組から式(1.11)の如く構成する場合，本研究での推論動作は特に興味深くなることに注意しておく．

特徴量の組$\underline{u}(\varphi)$からaxiom 2を満たすように，SMを構成しておこう．

パターン$\varphi \in \Phi$から抽出された第$\ell \in L$番目の特徴量$u(\varphi, \ell) \in R$(実数全体の集合)の組

$$\underline{u}(\varphi) = \{u(\varphi, \ell) \mid \ell \in L\} \in R^q \text{(q次元実数値の集合)} \tag{1.9}$$

を使って、例えば，非一致条件

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J - \{j\},\quad \sum_{\ell \in L} | u(\omega_i, \ell) - u(\omega_j, \ell) |^2 > 0 \tag{1.10}$$

の下で，Fuzzy c-Means法(文献［B3］の2.7.4項)を適用し，

$$SM(\varphi, \omega_j) \equiv \left[\sum_{\ell \in L} | u(\varphi, \ell) - u(\omega_j, \ell) |^2\right]^{-1} \Big/ \sum_{i \in J} \left[\sum_{\ell \in L} | u(\varphi, \ell) - u(\omega_i, \ell) |^2\right]^{-1} \tag{1.11}$$

と，定義できる(文献［B4］の付録2)．ここに，特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \rightarrow R \tag{1.12}$$

が導入されていることに注意しておく．

パターンφから式(1.9)の特徴量の組$\underline{u}(\varphi)$を抽出することは，φの**データ圧縮**に相当する．一般的には，原パターンφを$\underline{u}(\varphi)$から正確に復元できないが，$\underline{u}(\varphi)$の抽出次第ではそのパターンモデル$T\varphi$として復元できる(例えば，定理A.2や文献［B5］を参照)．このように，原パターンφの復元を目的としないデータ圧縮は一種の特徴抽出である．

1.3　本論文で取り扱う3段論法

人工知能言語Prolog［A2］で表現されたプログラムの実行は，基本的にSNL(selective negative linear resolution)という戦略(特別な導出原理)でなされている．

簡単なPrologプログラムで説明しよう．

本論文では，恒真式を真と，恒偽式を偽と表現する．

真か偽かが確定する「対象とする世界の出来事に関し述べている」言明を命題(proposition)という．命題Aに変数x, y, z, …がある場合，このAをA(x, y, z, …)と表し，述語(predicate)という．変数x, y, z, …のとる値がこの世界を構成している個体(indivisual)，例えば，太郎とかジョン(犬の名前)である場合，A(x, y, z, …)を**第1階述語論理**(first order predicate logic)での**述語**という．

以後，述語A内の変数を明示しないで，ただ単に，Aと書く場合がある．

述語Aについて，A＝真はAが成り立つの意であり，A＝偽はAが成り立たないの意である．

P, Q, R, S, Uを第1階述語とすると，5行からなるプログラム

P←Q, R
　…[P∨¬(Q∧R)]＝真の省略形であり，QかつRが成立すれば
　Pが成り立つ(QかつRが成立し，かつPが成り立たないのは
　矛盾である)の意　(1.13)

Q←S
　…[Q∨¬S]＝真の省略形であり，Sが成立すればQが成り立つの意　(1.14)

Q←U　(1.15)

S←
　…[S←真]＝【[S∨¬真]（＝S)】＝真の省略形であり，
　Sが成り立つの意　(1.16)

R←　(1.17)

に，質問文

←P
　…[偽←P]＝【偽∨¬P(＝¬P)】＝真の省略形であり，
　Pが成り立たないの意　(1.18)

が入力されると，

←
　…(偽←真)＝(偽∨¬真)＝偽の省略形であり，矛盾の意　(1.19)

を特別な導出原理SNLを複数回適用して導こうとするのが，Prolog処理系の動作である．

因みに，

$$\leftarrow B, C_1, C_2, \cdots, C_m \tag{1.20}$$

に

$$B \leftarrow A_1, A_2, \cdots, A_n \tag{1.21}$$

を適用し，

$$\leftarrow A_1, A_2, \cdots, A_n, C_1, C_2, \cdots, C_m \tag{1.22}$$

を得るのが，SNLである．

$$A(a) \wedge A(b) \wedge A(c) \wedge \cdots \tag{1.23}$$

を

$\forall x, A(x)$ (1.24)

とかく．また，

$A(a) \vee A(b) \vee A(c) \vee \cdots$ (1.25)

を

$\exists x, A(x)$

とかく．

スコーレム標準形［A2］になっている節の集合として，プログラムをprologで表現する．

ホーン節について説明しておこう．

$\neg A$(Aの否定；negation)，$A \wedge B$(連言；conjunction)，

$A \vee B$(選言；disjunction)，$A \leftarrow B$(含意；implication)，

$A \longleftrightarrow B$(同値；equivalence) (1.27)

を各々，Aでない，AかつB，AあるいはB，BならばA，AのときかつそのときにBと読む．

素式(atomic formula)とは論理記号(logical symbol)¬，∧，∨，←，⟷を含まない述語をいい，素式あるいは素式の否定(negation)をリテラル(literal)といい，リテラルの選言(disjunction)を節(clause)という．そして，**ホーン節**(Horn clause)とは矢印←の左側には高々1つの，論理記号を含まない述語(素式)が否定論理記号を含まないで存在するような節のことである．

処理の対象とするパターンの集合をΦとし，一般化類似度関数GSMを用いて，SNLを実現することが研究される(定理4.3)．例えば，標準的な3段論法は次のように実現される：

パターン$\varphi \in \Phi$をパターン変換

$A : \Phi \to \Phi$ (1.28)

で変換して得られるパターン$A\varphi \in \Phi$がパターン$\eta \in \Phi$と似ている程度$GSM(A\varphi, \eta)$が2^{-1}より大きい事態

$GSM(A\varphi, \eta) > 2^{-1}$ (1.29)

を

$A \leftarrow$ with $GSM(\cdot \varphi, \eta)$. (1.30)

と表現し，

$GSM((B \leftarrow A)\varphi, \eta) > 2^{-1}$ (1.31)

を

$B \leftarrow A$ with $GSM(\cdot \varphi, \eta)$. (1.32)

と表現すると，

$A \leftarrow$ with $GSM(\cdot \varphi, \eta)$. (1.33)

$B \leftarrow A$ with $GSM(\cdot \varphi, \eta)$. (1.34)

$\therefore\ B \leftarrow$ with $GSM(\cdot \varphi, \eta)$. (1.35)

が得られる(定理4.2)． □

このような研究は本論文以外になされていない(新規性)．

パターン情報処理で記号(で表された)推論を実現することは，記号·画像·音声が混在したマルチメディア情報の処理をパターン情報処理に帰着するという意味で興味深い(有効性)．

推論動作はT-不変性，特別な場合座標変換の下での不変性をあからさまに備えていることが特徴である．

また，推論動作は公理系を満たすT，SMを用いなされており，その意味で信頼性は保証されていると言えよう．

尚，付録Aを設け，本論文で使用される“axiom 1～3を各々，満たすモデル構成作用素T，類似度関数SM，大分類関数BSC”が簡単に説明されている．

2. 一般化類似度関数GSMの構成と，その諸性質

付録Aでは，処理の対象となる問題のパターンφの集合Φ，モデル構成作用素T，類似度関数SMについて説明される．対【Φ, T】の満たさなければならないaxiom 1と、SMの満たさなければならないaxiom 2も説明され、Φ の表示式(A2.8)も，定理A.1の(ロ)において得られている．

本章では，T, SMの構成例が示された後，SMを用いその拡張として一般化類似度関数GSMを定義し，その諸性質，例えば，シュワルツの不等式の成立を明らかにする．

2.1 モデル構成作用素T，類似度関数SMの構成例

本節では，付録Aでも構成されているモデル構成作用素T，類似度関数SMと異なるT，SMの構成例が示される．

2.1.1 モデル構成作用素Tの構成例

モデル構成作用素Tを1つ，構成しておこう．

【axiom 1の(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)の3後半，並びに，(ⅳ)を満たすモデル構成作用素Tの構成例】

本例では，可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}=L_2(M; dm)$［B1］を採用し，処理の対象とする問題のパターンφの集合Φを$\Phi \subset L_2(M; dm)$としよう．

可測部分集合$(x \in)M(\subseteq R^q)$を考え，

$$\forall x \in M,\ (S\varphi)(x) \doteq \begin{cases} 0 \cdots \sup_{x \in M} |\varphi(x)| = 0 \text{のとき} \\ \varphi(x)/\sup_{x \in M} |\varphi(x)| \cdots \sup_{x \in M} |\varphi(x)| > 0 \text{のとき} \end{cases} \tag{2.1}$$

と定義される写像

$$S : \Phi \to \Phi \tag{2.2}$$

を導入し，不等式

$$\forall x \in M,\ 0 \leqq h(x) < 1 \tag{2.3}$$

を満たす閾値関数h(x)を導入すると，

$$(T\varphi)(x) = \begin{cases} 0 \cdots (S\varphi)(x) \leqq h(x) \text{のとき} \\ 1 \cdots (S\varphi)(x) > h(x) \text{のとき} \end{cases} \tag{2.4}$$

と定義される式(A1.1)の写像TはA2章の4性質①～④を満たす．特に，次の命題2.1から，性質④は満たされることがわかる．

［命題2.1］**(Tの不動点定理)**

$$\forall x \in M,\ \varphi(x)(\neq 0) \in \{0, 1\} \tag{2.5}$$

$$\Rightarrow T\varphi = \varphi. \tag{2.6}$$

(証明)φの非零条件式(2.5)から，$\sup_{x \in M} |\varphi(x)| = 1$を得，明らかに，

$$\forall x \in M,\ (S\varphi)(x) = \varphi(x)(\neq 0) \in \{0, 1\}$$

$\because$　式(2.1)　(2.7)

である．よって，

$$(S\varphi)(x)=\varphi(x)=0$$
$$\Rightarrow(T\varphi)(x)=0=\varphi(x)\quad \because\ 2式(2.3),\ (2.4)$$

であるし，また，

$$(S\varphi)(x)=\varphi(x)=1$$
$$\Rightarrow(T\varphi)(x)=1=\varphi(x)\quad \because\ 2式(2.3),\ (2.4)$$

□

不等式(2.3)を満たす閾値関数h(x)は例えば，式(2.10)の如く決定される．

第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の，式(A3.9)を満たす生起確率$p(\mathfrak{C}_j)$と，$\mathfrak{C}_j$の代表パターンω_j(式(A3.2)のΩを参照)とを設けると，その平均化パターンξは，

$$\xi=\sum_{j\in J}p(\mathfrak{C}_j)\cdot\omega_j \tag{2.8}$$

と定義される［B1］，［B5］．

1より小さい十分小さい正値関数$\varepsilon(x)$を，不等式

$$\forall x\in M,\ 0<(S\xi)(x)<1\Rightarrow(S\xi)(x)<1-\varepsilon(x) \tag{2.9}$$

を満たすように導入し，閾値関数h(x)として、

$$h(x)=\begin{cases}1-\varepsilon(x)\cdots(S\xi)(x)=1の場合\\(S\xi)(x)\cdots0\leqq(S\xi)(x)<1の場合\\0\cdots(S\xi)(x)\leqq0の場合\end{cases} \tag{2.10}$$

を採用した式(2.4)のパターンモデル$T\varphi$は，文献［B17］で顔画像φの2値化画像を得るために使われている．

訓練パターン系列を設け、この系列からの学習で閾値関数h(x)を適切に決定すれば、$T\varphi$はφの骨格を表す．このようにして、原パターンφの骨格を表すパターンモデル$T\varphi$(2値化パターンモデル)が得られたことになる。

2.1.2　類似度関数 SM の構成例

axiom 2を満たす式(A3.5)の類似度関数SMを1つ，構成しておこう．

2条件

$$\forall j\in J,\ T\omega_j\in T\Psi_j\equiv\{T\psi\mid\psi\in\Psi_j\} \tag{2.11}$$

$$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},$$
$$T\Psi_i\cap T\Psi_j=\phi\ (\text{the empty set}) \tag{2.12}$$

の下で，関数$g_j(\varphi)$を，

$$g_j(\varphi)=\min_{\psi\in\Psi_j}[1-|(T\varphi\|T\varphi\|^{-1},T\psi\|T\psi\|^{-1})|^2] \tag{2.13}$$

と定義する．ここに，

$$(T\varphi\|T\varphi\|^{-1},T\psi\|T\psi\|^{-1})=0\ \text{if}\ \|T\varphi\|\cdot\|T\psi\|=0 \tag{2.14}$$

と、約束している。

$$\forall j\in J,\ \varphi\in\Psi_j\Rightarrow g_j(\varphi)=0 \tag{2.15}$$

$$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},\ \varphi\in\Psi_j\Rightarrow1\geqq g_i(\varphi)>0 \tag{2.16}$$

が成立している．その後，関数$f_j(\varphi)$を，

$$f_j(\varphi)=\min_{i\in J-\{j\}} g_i(\varphi) \tag{2.17}$$

と定義すると，

$$\forall j\in J,\ \varphi\in\Psi_j \Rightarrow f_j(\varphi)>0 \tag{2.18}$$

$$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},\ \varphi\in\Psi_j \Rightarrow f_i(\varphi)=0 \tag{2.19}$$

が成立している．よって，

$$\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j)=\begin{cases} f_j(\varphi)/\sum_{i\in J} f_i(\varphi) & \cdots \sum_{i\in J} f_i(\varphi)>0 \text{ のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j) & \cdots \sum_{i\in J} f_i(\varphi)=0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{2.20}$$

と定義される式(A3.5)のSMは，

$$\forall j\in J,\ \varphi\in\Psi_j \Rightarrow \mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j)=1 \tag{2.21}$$

$$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},\ \varphi\in\Psi_j \Rightarrow \mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_i)=0 \tag{2.22}$$

を満たし，axiom 2の(ｉ)を満たすことがわかる．axiom 2の(ii)，(iii)をも満たすことが容易に判明し，結局、axiom 2を満たす．

尚，不等式

$$\forall j\in J,\ 0\leqq s_0(j)<s_1(j)\leqq 1 \tag{2.23}$$

を満たす2つの閾値$s_0(j)$，$s_1(j)$を見つけることができる．このとき，axiom 2を満たす類似度関数$\mathrm{SM}'(\varphi,\ \omega_j)$ を

$$s(\varphi,\ \omega_j)=\begin{cases} 1 & \cdots s_1(j)\leqq \mathrm{SM}'(\varphi,\ \omega_j) \text{ の場合} \\ [\mathrm{SM}'(\varphi,\ \omega_j)-s_0(j)]/[s_1(j)-s_0(j)] & \cdots s_0(j)<\mathrm{SM}'(\varphi,\ \omega_j)<s_1(j) \text{ の場合} \\ 0 & \cdots \mathrm{SM}'(\varphi,\ \omega_j)\leqq s_0(j) \text{ の場合} \end{cases} \tag{2.24}$$

へと，区分的線形変換を使い変換すると，

$$\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j)=\begin{cases} s(\varphi,\ \omega_j)/\sum_{i\in J} s(\varphi,\ \omega_i) & \cdots \sum_{i\in J} s(\varphi,\ \omega_i)>0 \text{ の場合} \\ p(\mathfrak{C}_j) & \cdots \sum_{i\in J} s(\varphi,\ \omega_j)=0 \text{ の場合} \end{cases} \tag{2.25}$$

と定義される非負実数値関数関数SMはSM′の性質を受け継いでおり，axiom 2を満たすことがわかる．

2.2 類似度関数SMの拡張としての，任意の2パターン間の一般化類似度関数GSM

例えば，2.1.2項で構成された2式(2.20)，(2.25)の2つの類似度関数$\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j)$はaxiom 2を満たし，任意のパターン$\varphi$と代表パターン$\omega_j$との間の類似度であるが，一般にaxiom 2を満たす式(A3.5)の類似度関数$\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j)$を使い，類似度関数SMの拡張として，任意の2パターンφ，η間の一般化類似度関数$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \eta)$を定義し，その諸性質を暴こう．

2.2.1 一般化類似度関数GSMの定義

axiom 2を満たす式(A3.5)の類似度関数SMを導入する．このとき，

$$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \eta)\equiv\max_{j\in J}\ \min\ \{\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j),\ \mathrm{SM}(\eta,\ \omega_j)\} \tag{2.26}$$

と定義される関数

$$\mathrm{GSM}: \Phi \times \Phi \to \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \tag{2.27}$$

が定義され，このGSMを(SMの)一般化類似度関数という．2.2.2項の①が成立しており，類似度関数SMの拡張となっている．

2.2.2 GSMの諸性質

GSMの定義式(2.26)より，明らかに

(0)(対称性) $\forall \varphi \in \Phi,\ \forall \eta \in \Phi,$

$$\mathrm{GSM}(\varphi, \eta) = \mathrm{GSM}(\eta, \varphi) \tag{2.28}$$

が成り立つ． □

①(拡張性)

$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall j \in J,$

$$\mathrm{GSM}(\varphi, \omega_j) = \mathrm{SM}(\varphi, \omega_j). \tag{2.29}$$

$\because$ axiom 2の(i)

任意の2パターンφ，η間の一般化類似度関数$\mathrm{GSM}(\varphi, \eta)$は$\eta = \omega_j$の場合，$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_j)$に一致するという“式(A3.5)のSMの拡張性”を備えている． □

②(T-不変性)

$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall \eta \in \Phi,$

$\mathrm{GSM}(T\varphi, T\eta) = \mathrm{GSM}(\varphi, T\eta)$

$$= \mathrm{GSM}(T\varphi, \eta) = \mathrm{GSM}(\varphi, \eta). \tag{2.30}$$

$\because$ axiom 2の(iii) □

③(1より大きくない非負性)

$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall \eta \in \Phi,$

$$0 \leqq \mathrm{GSM}(\varphi, \eta) \leqq 1. \tag{2.31}$$

□

④($\mathrm{GSM}(\varphi, \varphi)$の，$j \in J$にわたる$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_j)$の最大性)

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \mathrm{GSM}(\varphi, \varphi) = \max_{j \in J} \mathrm{SM}(\varphi, \omega_j). \tag{2.32}$$

$\because$ GSMの定義式(2.26) □

⑤(一般化類似度の最大値)

$\mathrm{GSM}(\varphi, \varphi) = 1$

$$\Leftrightarrow \exists j \in J,\ \mathrm{SM}(\varphi, \omega_j) = 1. \tag{2.33}$$

$\because$ ③，④

この⑤の意味するところは重要である．代表パターン集合Ωを基盤として，GSMが定義されている故に，

任意のパターンφについては，不等式$\mathrm{GSM}(\varphi, \varphi) \leqq 1$の
成立しか言えない (2.34)

のである． □

次の定理2.1は，式(2.26)で定義される一般化類似度関数GSMが決して0をとることはないことを指摘している．axiom 2を満たす式(A3.5)の類似度関数SMと異なる性質である．

[定理2.1] **(一般化類似度の正定理)**

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \mathrm{GSM}(\varphi, \varphi) > 0. \tag{2.35}$$

（証明）　結論を否定して

$$\exists \varphi \in \Phi, \mathrm{GSM}(\varphi, \varphi) = 0 \tag{2.36}$$

としてみよう．④より，

$$\max_{j \in J} \mathrm{SM}(\varphi, \omega_j) = 0$$

$$\therefore \quad \forall j \in J, \mathrm{SM}(\varphi, \omega_j) = 0 \tag{2.37}$$

$$\therefore \quad \sum_{j \in J} \mathrm{SM}(\varphi, \omega_j) = 0$$

を得，axiom 2の(ii)に矛盾する．　□

ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の内積(,)に関しては，Schwarzの不等式

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \eta \in \Phi,$$

$$|(\varphi, \eta)| \leq [(\varphi, \varphi)]^{1/2} \cdot [(\eta, \eta)]^{1/2} \tag{2.38}$$

が成立することが知られているが，次の不等式(2.39)は不等式(2.38)に対応するものである．

［定理2.2］**（一般化類似度のSchwarzの不等式定理）**

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \eta \in \Phi,$$

$$\mathrm{GSM}(\varphi, \eta) \leq \min\{\mathrm{GSM}(\varphi, \varphi), \mathrm{GSM}(\eta, \eta)\} \tag{2.39}$$

が成立する．

更に，式(2.39)において等号＝の成立は

$$j = \mathrm{argmax}_{i \in J} \min\{\mathrm{SM}(\varphi, \omega_i), \mathrm{SM}(\eta, \omega_i)\} \in J \tag{2.40}$$

について，

$$\min\{\mathrm{SM}(\varphi, \omega_j), \mathrm{SM}(\eta, \omega_j)\}$$

$$= \min\{\max_{i \in J} \mathrm{SM}(\varphi, \omega_i), \max_{k \in J} \mathrm{SM}(\varphi, \omega_k)\} \tag{2.41}$$

の場合に限るが，例えば，

$$\max_{i \in J} \mathrm{SM}(\varphi, \omega_i) = \mathrm{SM}(\varphi, \omega_j)$$

$$\wedge \max_{k \in J} \mathrm{SM}(\varphi, \omega_k) = \mathrm{SM}(\varphi, \omega_j) \tag{2.42}$$

$$\Rightarrow \mathrm{GSM}(\varphi, \eta) = \min\{\mathrm{GSM}(\varphi, \varphi), \mathrm{GSM}(\eta, \eta)\} \tag{2.43}$$

が成り立つ．

（証明）　$\forall \varphi \in \Phi, \forall \eta \in \Phi,$

$$\mathrm{GSM}(\varphi, \eta) \leq \mathrm{GSM}(\varphi, \varphi) \tag{2.44}$$

を示せば，対称性より

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \eta \in \Phi,$$

$$\mathrm{GSM}(\varphi, \eta) = \mathrm{GSM}(\eta, \varphi) \leq \mathrm{GSM}(\eta, \eta) \tag{2.45}$$

を得る．2式(2.44)，(2.45)より，不等式(2.39)が成り立つ．

不等式(2.44)の成立を示そう．

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \eta \in \Phi,$$

$$\mathrm{GSM}(\varphi, \eta)$$

$$= \max_{j \in J} \min\{\mathrm{SM}(\varphi, \omega_j), \mathrm{SM}(\eta, \omega_j)\}$$

$\because$　GSMの定義式(2.26)

$$= \min\{\mathrm{SM}(\varphi, \omega_j), \mathrm{SM}(\eta, \omega_j)\}$$

$\because$　仮定式(2.40)

$$\leq \mathrm{SM}(\varphi, \omega_j) \tag{2.46}$$

$$\leqq \max_{i \in J} \mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_i) \tag{2.47}$$
$$= \mathrm{GSM}(\varphi,\ \varphi). \quad \because\ ④$$
を得，式(2.44)が成立した．

等式(2.43)の左辺は，式(2.26)を式(2.40)を考慮し書き換えたものであり，等式(2.43)の右辺は式(2.32)を考慮し書き換えたものである．

最後に，式(2.42)⇒式(2.43)の成立は，式(2.41)に式(2.40)を考慮すれば明らかである． □

次の定理2.3は，GSM(φ, η)が増加して，GSM(φ', η')になるための，4つのパターンφ, η, φ', η'の間の関係を明らかにしたものである．

［定理2.3］**（一般化類似度GSMの増加定理1）**

$$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \eta)$$
$$= \max_{k \in J}\ \min\{\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_k),\ \mathrm{SM}(\eta,\ \omega_k)\}$$
$$= \min\{\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j),\ \mathrm{SM}(\eta,\ \omega_j)\} \tag{2.48}$$
の如く，min{SM(φ, ω_k)，SM(η, ω_k)}の最大値を与えるカテゴリ番号$k \in J$の1つを$j \in J$とする．このj∈Jについて，2つのパターンφ, $\varphi' \in \Phi$に関し，不等式
$$\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j) \leqq \mathrm{SM}(\varphi',\ \omega_i) \tag{2.49}$$
を満たすカテゴリ番号$i \in J$が存在するとしよう．このとき，この固定した2つのカテゴリ番号j，i∈Jについて2つのパターンη, $\eta' \in \Phi$に関し，不等式
$$\mathrm{SM}(\eta,\ \omega_j) \leqq \mathrm{SM}(\eta',\ \omega_i) \tag{2.50}$$
が満足されるとすれば，GSMの増加性
$$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \eta) \leqq \mathrm{GSM}(\varphi',\ \eta') \tag{2.51}$$
が成立する．

（証明） GSM(φ, η)
$$= \max_{k \in J}\ \min\{\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_k),\ \mathrm{SM}(\eta,\ \omega_k)\}$$
$$= \min\{\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j),\ \mathrm{SM}(\eta,\ \omega_j)\} \quad \because\ \text{式(2.48)}$$
$$\leqq \min\{\mathrm{SM}(\varphi',\ \omega_i),\ \mathrm{SM}(\eta,\ \omega_j)\} \quad \because\ \text{式(2.49)}$$
$$\leqq \min\{\mathrm{SM}(\varphi',\ \omega_i),\ \mathrm{SM}(\eta',\ \omega_i)\} \quad \because\ \text{式(2.50)}$$
$$\leqq \max_{k \in J}\ \min\{\mathrm{SM}(\varphi',\ \omega_k),\ \mathrm{SM}(\eta',\ \omega_k)\}$$
$$= \mathrm{GSM}(\varphi',\ \eta') \quad \because\ \text{GSMの定義式(2.26)}$$
□

次に，下の補助定理2.1を提出する，

［補助定理2.1］（一般化類似度GSM(φ, η)の表現1）
$$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \varphi) = \mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j) \wedge \mathrm{GSM}(\eta,\ \eta) = \mathrm{SM}(\eta,\ \omega_j) \tag{2.52}$$
$$\Rightarrow$$
$$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \eta) = \min\{\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j),\ \mathrm{SM}(\eta,\ \omega_j)\}. \tag{2.53}$$
（証明） GSM(φ, η)の定義式(2.26)より明らか． □

④により，等式
$$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \varphi) = \mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j).$$
を満たす少なくとも，1つのカテゴリ番号$j \in J$が存在することがわかる．

次の定理2.4は，Schwarzの不等式(2.39)と異なり，GSM(φ, η)の下界をGSM(φ, φ)，GSM(η, η)の各々の下界から評価するものである．

［定理2.4］**（一般化類似度の$>\varepsilon_1$, $>\varepsilon_2$定理）**

$$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \varphi)=\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j)>\varepsilon_1 \tag{2.54}$$
$$\wedge\mathrm{GSM}(\eta,\ \eta)=\mathrm{SM}(\eta,\ \omega_j)>\varepsilon_2 \tag{2.55}$$
$$\Rightarrow$$
$$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \eta)>\min\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\}. \tag{2.56}$$

（証明）　$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \eta)$

$=\min\{\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j),\ \mathrm{SM}(\eta,\ \omega_j)\}$

$\because$ 補助定理2.1

$\geqq\min\{\varepsilon_1,\ \mathrm{SM}(\eta,\ \omega_j)\}$

$>\min\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\}$.　□

定理2.4において$\varepsilon_1=\varepsilon_2=2^{-1}$にとれば，次の定理2.5が得られる．

［定理2.5］**（一般化類似度の$>2^{-1}$定理）**

$$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \varphi)=\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j)>2^{-1}$$
$$\wedge\mathrm{GSM}(\eta,\ \eta)=\mathrm{SM}(\eta,\ \omega_j)>2^{-1}$$
$$\Rightarrow$$
$$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \eta)>2^{-1}.$$
□

次の定理2.6は，4つのパターンφ，η，ω_j，ω_iに関する類似度関数SMの下界により，一般化類似度関数GSMを下から評価したものである．

［定理2.6］**（一般化類似度の j·$>\varepsilon_1$, i·$>\varepsilon_2$定理）**

十分小さい正数δと，1より大きくない2つの非負数ε_1，ε_2とに関し，

4条件

$$\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j)>\varepsilon_1+\delta \tag{2.57}$$
$$\mathrm{SM}(\eta,\ \omega_j)>\varepsilon_2+\delta \tag{2.58}$$
$$\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_i)>\varepsilon_1+\delta \tag{2.59}$$
$$\mathrm{SM}(\eta,\ \omega_i)>\varepsilon_2+\delta \tag{2.60}$$

が成立していれば，

$$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \eta)>\min\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\}. \tag{2.61}$$

（証明）

$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \eta)$

$=\max\limits_{k\in J}\ \min\{\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_k),\ \mathrm{SM}(\eta,\ \omega_k)\}$

$\because$ 式(2.26)

$\geqq\max[\min\{\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j),\ \mathrm{SM}(\eta,\ \omega_j)\},$

$\min\{\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_i),\ \mathrm{SM}(\eta,\ \omega_i)\}]$

$\geqq\max[\min\{\varepsilon_1+\delta,\ \varepsilon_2+\delta\},$

$\min\{\varepsilon_1+\delta,\ \varepsilon_2+\delta\}]$

$\because$ 4式(2.57)～(2.60)　(2.62)

$=\min\{\varepsilon_1+\delta,\ \varepsilon_2+\delta\}$

$>\min\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\}$.　$\because$　$\delta>0$　□

次の定理2.7は，$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \eta)$が増加し，$\mathrm{GSM}(\varphi',\ \eta')$になるための1つの十分条件が4式(2.63)～(2.66)であることを示している．

[定理2.7]（**一般化類似度GSMの増加定理2**）

$$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \varphi)=\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j) \tag{2.63}$$
$$\leqq \mathrm{GSM}(\varphi',\ \varphi')=\mathrm{SM}(\varphi',\ \omega_j) \tag{2.64}$$
$$\wedge$$
$$\mathrm{GSM}(\eta,\ \eta)=\mathrm{SM}(\eta,\ \omega_j) \tag{2.65}$$
$$\leqq \mathrm{GSM}(\eta',\ \eta')=\mathrm{SM}(\eta',\ \omega_j) \tag{2.66}$$
$$\Rightarrow$$
$$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \eta)\leqq \mathrm{GSM}(\varphi',\ \eta').$$

（証明）　$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \eta)$

$$=\max_{k\in J}\ \min\{\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_k),\ \mathrm{SM}(\eta,\ \omega_k)\}$$
$\because$ 式(2.26)　(2.67)

$$=\min\{\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j),\ \mathrm{SM}(\eta,\ \omega_j)\}$$
$\because$ 2式(2.63)，(2.65)，④

$$\leqq \min\{\mathrm{SM}(\varphi',\ \omega_j),\ \mathrm{SM}(\eta,\ \omega_j)\}$$　$\because$ 式(2.64)

$$\leqq \min\{\mathrm{SM}(\varphi',\ \omega_j),\ \mathrm{SM}(\eta',\ \omega_j)\}$$　$\because$ 式(2.66)

$$\leqq \max_{k\in J}\ \min\{\mathrm{SM}(\varphi',\ \omega_k),\ \mathrm{SM}(\eta',\ \omega_k)\}$$

$$=\mathrm{GSM}(\varphi',\ \eta')$$　$\because$ 式(2.26)　□

次の定理2.8は，$\mathrm{GSM}(\varphi,\varphi)=\mathrm{GSM}(\eta,\ \eta)=1$になれば，$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \eta)=1$になることを示している．恰も，$\varphi$，$\eta$間に相関がなくても，$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \varphi)$，$\mathrm{GSM}(\eta,\ \eta)$が個々に同一の代表パターン$\omega_j$に関し最大値1をとれば，$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \eta)$が最大値1になることに注意しておこう．

[定理2.8]（**GSMの最大定理**）

$$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \varphi)=\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j)=1 \tag{2.68}$$
$$\wedge \mathrm{GSM}(\eta,\ \eta)=\mathrm{SM}(\eta,\ \omega_j)=1 \tag{2.69}$$
$$\Rightarrow$$
$$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \eta)=1. \tag{2.70}$$

（証明）　$\mathrm{GSM}(\varphi,\ \eta)$

$$=\max_{k\in J}\ \min\{\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_k),\ \mathrm{SM}(\eta,\ \omega_k)\}$$
$\because$ 式(2.26)

$$=\min\{\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j),\ \mathrm{SM}(\eta,\ \omega_j)\}$$
$\because$ 2式(2.68)，(2.69)，④　(2.71)

$$=\min\{1,\ 1\}$$　$\because$ 2式(2.68)，(2.69)

$$=1.$$　□

2.2.3　一般化類似度の最大を与える等価条件

先ず，次の補助定理2.2に注意する．

[補助定理2.2]

$$\exists j\in J,\ \mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j)=\mathrm{SM}(\eta,\ \omega_j)=1 \tag{2.72}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists j\in J,\ \min\{\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j),\ \mathrm{SM}(\eta,\ \omega_j)\}=1. \tag{2.73}$$

（証明）　SMの値の，1より大きくない非負性

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall j\in J,\ 0\leqq \mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j)\leqq 1$$

を考慮し，明らかに成り立つ命題

任意の$j \in J$について，$SM(\varphi, \omega_j)$，$SM(\eta, \omega_j)$のいずれか1つが1より小さい　　(2.74)

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall j \in J, \min\{SM(\varphi, \omega_j), SM(\eta, \omega_j)\} < 1 \tag{2.75}$$

の対偶である． □

次の定理2.9は，$GSM(\varphi, \eta)=1$であるための必要且つ十分な条件が式(2.77)であることを指摘している．

［定理2.9］**（一般化類似度の最大等価定理）**

$$GSM(\varphi, \eta)=1 \tag{2.76}$$

$$\Leftrightarrow \exists j \in J, SM(\varphi, \omega_j)=SM(\eta, \omega_j)=1. \tag{2.77}$$

（証明）明らかに，

$$GSM(\varphi, \eta)=1$$

$$\Leftrightarrow \exists j \in J, \min\{SM(\varphi, \omega_j), SM(\eta, \omega_j)\} =1$$

$$\Leftrightarrow \exists j \in J, SM(\varphi, \omega_j)=SM(\eta, \omega_j)=1.$$

∵　補助定理2.2 □

2.2.4　パターン間の相当関係の拡張としての一般化類似度の最大関係

上述の定理2.9を勘案しよう．2元関係(パターン間の相当関係)

$$\varphi=\eta \tag{2.78}$$

を緩和すれば，一般化類似度の最大関係

$$GSM(\varphi, \eta)=1 \tag{2.79}$$

ということになる．

パターンモデル$T\varphi$にパターン変換

$$A: \Phi \to \Phi \tag{2.80}$$

を作用させて得られるパターン$AT\varphi$のモデル$T(AT\varphi)$がパターンηのモデル$T\eta$のモデル$T(T\eta)(=T\eta)$に等しくなり，

$$T(AT\varphi)=T\eta \tag{2.81}$$

が得られるとしよう．この等号関係を緩和すれば，

$$GSM(T(AT\varphi), T\eta)=1 \tag{2.82}$$

ということになるが，

$$GSM(T(AT\varphi), T\eta)=1 \tag{2.83}$$

$$\Rightarrow GSM(AT\varphi, \eta)=1 \quad \because \ 2.2.2の② \tag{2.84}$$

に注意する．以後，$GSM(AT\varphi, \eta)$を問題とする．

次の定理2.10は，$GSM(A\varphi, \eta)=1$であるための必要且つ十分な条件が式(2.86)であることを指摘している．

［定理2.10］**（一般化類似度の最大等価定理）**

$$GSM(A\varphi, \eta)=1 \tag{2.85}$$

$$\Leftrightarrow \exists j \in J, SM(A\varphi, \omega_j)=SM(\eta, \omega_j)=1. \tag{2.86}$$

（証明）定理2.9において，φの代りに$A\varphi$を採用したものである． □

2.3　パターンモデル$T\varphi$を不変に保つパターン変換Uからもたらされる一般化類似度関数GSMの不変性

2.3.2のGSMのT-不変性②を用いて，モデル構成作用素Tがあるパターン変換Uに対し不変なら

ば、一般化類似度関数GSMもパターン変換Uに対し不変であることを説明しよう。

パターン変換

$$U: \Phi \rightarrow \Phi \tag{2.87}$$

に関し、等式

$$T(U\varphi) = T\varphi \tag{2.88}$$

が成立するならば、パターンモデルTφを生成する式(A1.1)の写像Tは、パターンφの変形

$$\varphi \rightarrow U\varphi \tag{2.89}$$

を吸収する能力を備えている。何故ならば、φとその変形Uφは共に、共通なパターン標準形Tφを持つことになるからである。この種のパターン変換には，規則的変形としてのユニタリ座標変換、不規則的な変形をを許容する離散量子化変換があることは既に示されている［B1]，[B3］～[B5]。

類似度関数SMの2種類の不変性について説明しよう．

不変性

$$\forall \varphi \in \Phi, T(U\varphi) = T\varphi \tag{2.90}$$

を満たす任意のパターン変換Uは大抵の場合、多数存在する［B1]，[B5]，[B9]，[B10]，[B18]．例えば，axiom 1，（ii）の後半での、任意の正実数 a がそうである。このとき、

（イ）(GSMの正定数倍不変性)2つの任意の正定数a，bについて、

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \eta \in \Phi,$$

$$GSM(a \cdot \varphi, b \cdot \eta) = GSM(\varphi, \eta) \tag{2.91}$$

が成立する。何故ならば、

$$\begin{aligned} &GSM(a \cdot \varphi, b \cdot \eta) \\ &= GSM(T(a \cdot \varphi), T(b \cdot \eta)) \quad \because \ 2.2.2の② \\ &= GSM(T\varphi, T\eta) \quad \because \ \text{axiom 1, (ii)の後半} \\ &= GSM(\varphi, \eta) \quad \because \ 2.2.2の② \end{aligned} \tag{2.92}$$

が得られるからである。式(2.92)の導出と同様にして、次の(ロ)の不変性も証明できる。

（ロ）(GSMのU_1－, U_2－不変性)

TのU_1－, U_2－不変式

$$T(U_1\varphi) = T\varphi \tag{2.93}$$

$$T(U_2\eta) = T\eta \tag{2.94}$$

が成立していれば、

$$GSM(U_1\varphi, U_2\eta) = GSM(\varphi, \eta) \tag{2.95}$$

が成り立つ.

3. パターン変換Aの選定法

本章では，式(2.80)に登場しているパターン変換Aの各種設定法が研究される．Aは次章以降で記号列を用いた後ろ向き推論法を実現する典型的な導出原理をパターン情報処理で実現するために必要とされる.

3.1　一般化構造受精変換A

付録Aでは，大分類関数BSCの満たさなければならないaxiom 3も説明され，BSCの構成例が示されている．

一般化大分類関数(generalized binary-atate classifier)

$$\mathrm{GBSC}: \Phi\times\Phi\rightarrow\{0,1\} \tag{3.1}$$

は，下の①，②の2つの方法で定義される．

$$①\mathrm{GBSC}(\varphi,\psi)=\max_{j\in J}\min\{\mathrm{BSC}(\varphi,j),\ \mathrm{BSC}(\psi,j)\} \tag{3.2}$$

このGBSCについては，次の定理3.1が成立し，BSCの素直な拡張であることがわかる．

［定理3.1］**(大分類関数BSCの一般化大分類関数GBSCへの拡張定理)**

$$\begin{aligned}&\forall\varphi\in\Phi,\ \forall j\in J,\\ &\mathrm{GSBC}(\varphi,\omega_j)\\ &=\max[\mathrm{BSC}(\varphi,j),\\ &\qquad\min_{i\in J-\{j\}}\{\mathrm{BSC}(\varphi,i),\ \mathrm{BSC}(\omega_j,i)\}]\end{aligned} \tag{3.3}$$

を得，特に，カテゴリ間の相互排除式(A5.4)が成立していれば

$$\begin{aligned}&\forall\varphi\in\Phi,\ \forall j\in J,\\ &\mathrm{GSBC}(\varphi,\omega_j)=\mathrm{BSC}(\varphi,j).\end{aligned} \tag{3.4}$$

(証明)$\mathrm{GSBC}(\varphi,\omega_j)$

$$\begin{aligned}&=\max_{i\in J}\min\{\mathrm{BSC}(\varphi,i),\ \mathrm{BSC}(\omega_j,i)\}\\ &=\max[\min\{\mathrm{BSC}(\varphi,j),\ \mathrm{BSC}(\omega_j,j)\},\\ &\qquad\min_{i\in J-\{j\}}\{\mathrm{BSC}(\varphi,i),\ \mathrm{BSC}(\omega_j,i)\}]\\ &=\max[\min\{\mathrm{BSC}(\varphi,j),\ 1\},\\ &\qquad\min_{i\in J-\{j\}}\{\mathrm{BSC}(\varphi,i),\ \mathrm{BSC}(\omega_j,i)\}]\end{aligned}$$

$\because$ axiom 3の(i)

$$\begin{aligned}&=\max[\mathrm{BSC}(\varphi,j),\\ &\qquad\min_{i\in J-\{j\}}\{\mathrm{BSC}(\varphi,i),\ \mathrm{BSC}(\omega_j,i)\}]\end{aligned}$$

を得，特に，カテゴリ間の相互排除式(A5.4)が成立していれば

$$\begin{aligned}&=\max[\mathrm{BSC}(\varphi,j),\\ &\qquad\min_{i\in J-\{j\}}\{\mathrm{BSC}(\varphi,i),\ 0\}]\\ &=\max[\mathrm{BSC}(\varphi,j),\ 0\}\\ &=\mathrm{BSC}(\varphi,j).\end{aligned}$$

□

簡単には，GBSCは，

$$\begin{aligned}&②\mathrm{GBSC}(\varphi,\psi)=\\ &1\cdots\mathrm{GSM}(\varphi,\psi)>2^{-1}\text{のとき}\\ &0\cdots\mathrm{GSM}(\varphi,\psi)\leqq2^{-1}\text{のとき}\end{aligned} \tag{3.5}$$

と定義できる．

記憶内容

$$\Psi=\{\psi_1,\ \psi_2,\cdots,\ \psi_p\} \tag{3.6}$$

を以後，想定する．

一般化類似度関数GSMは式(2.26)で定義されている．このとき，一般化構造受精変換Aは次の

ように定義される：

$$A\varphi = \begin{cases} \sum_{k=1}^{p} \mathrm{GSM}(\varphi,\ \psi_k)\cdot \mathrm{GBSC}(\varphi,\ \psi_k)\cdot T\psi_k \\ \qquad \cdots T\varphi \neq 0 \text{のとき} \\ 0 \quad \cdots T\varphi = 0 \text{のとき} \end{cases} \tag{3.7}$$

□

3.2 内積形想起作用素A

$T\varphi$から$T\psi_k$を呼び出すときの強さとして，内積

$$(T\varphi,\ T\psi_k)/(T\psi_k,\ T\psi_k) \tag{3.8}$$

を採用しよう．従って，

$$[(T\varphi,\ T\psi_k)/(T\psi_k,\ T\psi_k)]\cdot T\psi_k \tag{3.9}$$

が$T\varphi$から呼び出された$T\psi_k$を表すことになるから，式(3.6)の記憶内容Ψについて総和をとることにより，次の内積形想起作用素Aをパターン変換として導入できる：

$$A\varphi = \sum_{k=1}^{p} [(T\varphi,\ T\psi_k)/(T\psi_k,\ T\psi_k)]\cdot T\psi_k. \tag{3.10}$$

□

3.3 双対直交想起作用素A

式(3.6)の記憶内容Ψの各元ψ_kは正規直交しているとは限らないので，

$$AT\psi_k = T\psi_k \text{ for any } k(=1\sim p) \tag{3.11}$$

が成立するとは限らない，つまり，$T\psi_k$から$T\psi_k$が正確に想起されるとは限らない．式(3.7)のAについては，カテゴリ間の相互排除式(A5.4)を満たしていれば，等式(3.11)は成立するが，式(3.10)のAについては等式(3.11)は一般には成立しないことがわかる．必ず成立するように，式(3.10)の内積形想起作用素Aを改良しよう．

式(3.6)の1次独立な系Ψのパターンモデル集合

$$T\Psi = \{T\psi_i \mid i=1\sim p\} \tag{3.12}$$

も1次独立とする．$T\Psi$に対し，

$$q_{i,j} \equiv (T\psi_i,\ T\psi_j) \tag{3.13}$$

を第$i\,(=1\sim p)$行第$j\,(=1\sim p)$列の要素とする行列$Q=(q_{i,j})_{1\leqq i,j\leqq p}$を考え，その逆行列$Q^{-1}$の第$i(=1\sim p)$行第$j(=1\sim p)$列の要素を$q^{-1}{}_{i,j}$と表す：

$$Q^{-1} = (q^{-1}{}_{i,j})_{1\leqq i,j\leqq p}. \tag{3.14}$$

□

ここで，$T\psi_i$に対応し，

$$\psi'_i \equiv \sum_{j=1}^{p} q^{-1}{}_{i,j}\cdot T\psi_j \tag{3.15}$$

を定義しよう．このとき，次の命題3.1が得られ，$T\psi_j$と直交するのは式(3.15)のψ'_iであることがわかる．この直交性は**双対性直交性**と呼ばれる．また，命題3.2は命題3.1から直接導かれ，式(3.6)のΨ内の各記憶内容ψ_jのモデル$T\psi_j$が正確に呼び出されることを明らかにしている..

式(A3.7)のクロネッカーのデルタ記号δ_{ij}を導入しておく．

[命題3.1] **(双対正規直交性)**

$$(\psi'_i,\ T\psi_j) = \delta_{ij}. \tag{3.16}$$

（証明）

$$(\psi'_i, T\psi_j)$$
$$=(\sum_{k=1}^{p} q^{-1}{}_{i,k}\cdot T\psi_k, T\psi_j) \quad \because \quad \text{式(3.15)}$$
$$=\sum_{k=1}^{p} q^{-1}{}_{i,k}\cdot (T\psi_k, T\psi_j)$$
$$=\sum_{k=1}^{p} q^{-1}{}_{i,k}\cdot q_{k,j}$$
$$=\delta_{ij}. \qquad \square$$

ここで，

$$\forall \varphi \in \Phi, A\varphi = \sum_{i=1}^{p} (\psi'_i, T\varphi)\cdot T\psi_i \tag{3.16}$$

と定義される式(2.80)のパターン変換（双対直交性想起作用素）Aを導入する．

［命題3.2］**（記憶内容Ψの不動点性）**

$$\forall j \in \{1, 2, \cdots, p\}, \ AT\psi_j = A\psi_j = T\psi_j. \tag{3.17}$$

（証明）

$$\forall j \in \{1, 2, \cdots, p\}, \ AT\psi_j$$
$$=\sum_{i=1}^{p} (\psi'_i, TT\psi_j)\cdot T\psi_i \quad \because \quad \text{式(3.16)}$$
$$=\sum_{i=1}^{p} (\psi'_i, T\psi_j)\cdot T\psi_i \quad \because \quad \text{axiom 1の(iii)}$$
$$(=A\psi_j \quad \because \quad \text{式(3.16)})$$
$$=\sum_{i=1}^{p} \delta_{ij}\cdot T\psi_i \quad \because \quad \text{命題3.1}$$
$$=T\psi_j. \qquad \square$$

$\psi \in \Psi$を任意として，$T\psi$から$T\psi$が正確に想起されることが命題3.2より保証されることになった．

3.4 構造受精変換A(J)

Aを構造受精変換A(J)と選ぶ．

文献［B4］の付録5によれば，A(J)は次のように定義される．

式(A3.2)のΩの代りに，式(3.6)のΨを採用して得られる構造受精作用素(structural-fertilization operator)と呼ばれる写像

$$A(J) : \Phi \to \Phi \tag{3.18}$$

は，付録Aで用意された3構成要素

①式(A1.1)のモデル構成作用素T

②式(A3.5)の類似度関数SM

③式(A5.1)の大分類関数BSC (3.19)

を使用する形式で，次のように定義される：

(i) $\varphi = 0$の場合

$$A(J)\varphi \equiv 0 \tag{3.20}$$

(ii) $\varphi \neq 0$の場合

$$A(J)\varphi \equiv$$
$$\sum_{k=1}^{p} SM(\varphi, \psi_k)\cdot T\psi_k \quad \text{if} \sum_{k=1}^{p} BSC(\varphi, k) = 0 \tag{3.21}$$

$$\sum_{k=1}^{p} SM(\varphi,\ \psi_k)\cdot BSC(\varphi,\ k)\cdot T\psi_k$$
$$\text{if} \sum_{k=1}^{p} BSC(\varphi,\ k) > 0 \tag{3.22}$$

□

axiom 1の(iii)の後半, axiom 2の(i), axiom 3の(i)より,

$$AT\psi_k = T\psi_k \text{ for any } k(=1\sim p) \tag{3.23}$$

が保証され, $T\psi_k$から$T\psi_k$が正確に保証される.

3.5 パターン変換Aの拡張A [t]

次章で第1階述語論理を扱うために, パターン変換Aを助変数tを持つ形A [t] に拡張しておこう.

ψ_kの代りに,

$$\psi_k[t] \equiv \eta + t\cdot(\psi_k - \eta) \tag{3.24}$$

を採用したパターン変換 A[t] を考えればよい.

①$0<t<1$と選定すれば, $\psi_k[t]$ はψ_kを$(\psi_k-\eta)$方向に収縮(contraction)したものである.

②$t=1$と選定すれば, $\psi_k[t]$ はηに等しい.

③$1<t$と選定すれば, $\psi_k[t]$ はψ_kを$(\psi_k-\eta)$方向に拡張(expansion)したものである.

④$-1<t<0$と選定すれば, $\psi_k[t]$ はψ_kを$(\psi_k-\eta)$方向の反対方向に収縮(contraction)したものである.

⑤$t<-1$と選定すれば, $\psi_k[t]$ はψ_kを$(\psi_k-\eta)$方向の反対方向に拡張(expansion)したものである.

尚, パターンηを選定する簡単な方法は, ψ_k, $k=1\sim p$の平均パターンをηとして採用する, つまり,

$$\eta = (1/p)\cdot\sum_{i=1}^{p} \psi_i \tag{3.25}$$

とすることである.

4. 導出原理に基づく推論

命題論理における導出原理(resolution principle)とは, 3命題A, B, Cについて

【A∨Bが真かつ¬A∨Cが真 (4.1)

ならば,

B∨Cが真】 (4.2)

を指す.

本章では, パターン変換Aに一意的に命題を対応させたとき, 導出原理が成立することを示す.

4.1 命題論理に関する選言, 連言, 否定, 含意

式(2.80)のパターン変換Aで変換して得られるパターン$A\varphi$と今1つのパターンηとの間の一般化類似度

$$(0\leq)\, GSM(A\varphi,\ \eta)\, (\leq 1) \tag{4.3}$$

は, 入力状態(パターン)φに対し, Aという行動(パターン変換)を採ったとき, 出力状態(パターン)としてηが実現する程度であると解釈する. 一般化類似度GSMに関する不等式

$$\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta)>2^{-1} \tag{4.4}$$

の成立は，現在の状態(パターン)φに対し，Aという行動(パターン変換)を採ったとき，結論状態(パターン)としてηが(近似的に)実現されると解釈されるとみてよい(GSM(A·,)に関する**行動解釈**).

先ず，GSM(A·,)に関する上述の行動解釈に留意しておく.

2つのパターン変換A，Bを導入する.

例えば，次郎は男であるという文はその真偽が定まるから，命題である.

対象とする世界(次郎などの個体の集まり)の事柄，例えば個体間の関係に関して文が言及している内容でその真偽が定まるものを**命題**(proposition)というが，個々のパターン変換Aにある命題を一意的に対応させ，対応させた命題を再び，Aと呼ぶことにしよう.

諸命題間の関係が真であるか否かを内容でなしにその形式で決定しようとする命題論理(propositional logic)の構成を説明しよう.

先ず，選言，連言，否定，含意，同値に関する真偽程度を測る手法が次の5項4.1.1～4.1.5で定義される.

パターン変換Aに命題を対応させた場合，

$$\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta) \tag{4.5}$$

は，命題Aが真である程度を表していると解釈する.

4.1.1 選言(disjunbtion) A∨B

C≡A∨BをAまたはBと読む.

$$\mathrm{GSM}((A\vee B)\varphi,\ \eta)$$
$$\equiv\max\{\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta),\ \mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta)\} \tag{4.6}$$

□

4.1.2 連言 (conjunction) A∨B

C≡A∧BをAかつBと読む.

$$\mathrm{GSM}((A\wedge B)\varphi,\ \eta)$$
$$\equiv\min\{\mathrm{GSM}(A\varphi\ \eta),\ \mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta)\} \tag{4.7}$$

□

4.1.3 否定(negation) ¬A

C≡¬AをAでないと読む.

$$\mathrm{GSM}(\neg A)\varphi,\ \eta)$$
$$\equiv 1-\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta) \tag{4.8}$$

□

4.1.4 含意(implication) B←A

C≡B←Aを，AならばBと読む.

$$\mathrm{GSM}((B\leftarrow A)\varphi,\ \eta)$$
$$\equiv\mathrm{GSM}((A\rightarrow B))\varphi,\ \eta)$$
$$\equiv\mathrm{GSM}((\neg A\vee B))\varphi,\ \eta) \tag{4.9}$$
$$=\max\{1-\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta),\ \mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta)\} \tag{4.10}$$
$$\begin{cases} =\mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta) & \text{if } 1\leqq\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta)+\mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta) \\ 1-\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta) & \text{if } 1>\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta)+\mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta) \end{cases} \tag{4.12}$$

□

4.1.5 同値(equivalence)B←→A

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{GSM}((\mathrm{B}\longleftrightarrow\mathrm{A})\varphi,\ \eta)\\
&\equiv\mathrm{GSM}((\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B})\wedge(\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{A}))\varphi,\ \eta) \qquad (4.13)\\
&=\mathrm{GSM}((\neg\mathrm{A}\vee\mathrm{B}))\wedge(\neg\mathrm{B}\vee\mathrm{A})\varphi,\ \eta)\\
&=\min[\mathrm{GSM}(\neg\mathrm{A}\vee\mathrm{B})\varphi,\ \eta),\ \mathrm{GSM}((\neg\mathrm{B}\vee\mathrm{A})\varphi,\ \eta)]\\
&=\min\left[\max\{\mathrm{GSM}(\neg\mathrm{A}\varphi,\ \eta),\ \mathrm{GSM}(\mathrm{B}\varphi,\ \eta)\},\right.\\
&\quad\left.\max\{\mathrm{GSM}(\neg\mathrm{B}\varphi,\ \eta),\ \mathrm{GSM}(\mathrm{A}\varphi,\ \eta)\}\right]\\
&=\min\left[\max\{1-\mathrm{GSM}(\mathrm{A}\varphi,\ \eta),\ \mathrm{GSM}(\mathrm{B}\varphi,\ \eta)\},\right.\\
&\quad\left.\max\{1-\mathrm{GSM}(\mathrm{B}\varphi,\ \eta),\ \mathrm{GSM}(\mathrm{A}\varphi,\ \eta)\}\right] \qquad (4.14)\\
&=\\
&\begin{cases}
\max\{1-\mathrm{GSM}(\mathrm{A}\varphi,\ \eta),\ \mathrm{GSM}(\mathrm{B}\varphi,\ \eta)\}\\
\qquad \text{if } \max\{1-\mathrm{GSM}(\mathrm{A}\varphi,\ \eta),\ \mathrm{GSM}(\mathrm{B}\varphi,\ \eta)\}\leqq\\
\qquad\quad \max\{1-\mathrm{GSM}(\mathrm{B}\varphi,\ \eta),\ \mathrm{GSM}(\mathrm{A}\varphi,\ \eta)\}\\
\max\{1-\mathrm{GSM}(\mathrm{B}\varphi,\ \eta),\ \mathrm{GSM}(\mathrm{A}\varphi,\ \eta)\}\\
\qquad \text{if } \max\{1-\mathrm{GSM}(\mathrm{A}\varphi,\ \eta),\ \mathrm{GSM}(\mathrm{B}\varphi,\ \eta)\}>\\
\qquad\quad \max\{1-\mathrm{GSM}(\mathrm{B}\varphi,\ \eta),\ \mathrm{GSM}(\mathrm{A}\varphi,\ \eta)\}
\end{cases} \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

□

論理記号の結合の強さは強さの順に並べて

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \leftarrow,\ \longleftrightarrow \qquad (4.16)$$

の順である．例えば，$\neg\mathrm{A}\wedge\mathrm{B}\vee\mathrm{C}\longleftrightarrow\mathrm{D}\leftarrow\mathrm{E}$は $[(\neg\mathrm{A}\wedge\mathrm{B})\vee\mathrm{C}]\longleftrightarrow(\mathrm{D}\leftarrow\mathrm{E})$の意である．

4.2 含意←に関する真偽程度の分析

次の命題4.1の(i)は，前提Aが曖昧さがなく真であれば，含意B←Aの真偽値GSM((B←A)φ, η)に結論Bの真偽値GSM(Bφ, η)は一致することを指摘している．また，命題4.1の(ii)は，前提Aが曖昧さがなく偽であれば，含意B←Aの真偽値GSM((B←A)φ, η)は曖昧さがなく真であることを指摘している．

［命題4.1］**(GSMの1, 0性)**

(i) $\mathrm{GSM}(\mathrm{A}\varphi,\ \eta)=1$

$$\Rightarrow\mathrm{GSM}((\mathrm{B}\leftarrow\mathrm{A})\varphi,\ \eta)=\mathrm{GSM}(\mathrm{B}\varphi,\ \eta). \qquad (4.17)$$

(ii) $\mathrm{GSM}(\mathrm{A}\varphi,\ \eta)=0$

$$\Rightarrow\mathrm{GSM}((\mathrm{B}\leftarrow\mathrm{A})\varphi,\ \eta)=1. \qquad (4.18)$$

(証明) GSM((B←A)φ, η)の定義式(4.10)から明らか． □

次の命題4.2は，命題4.1を精密化したものであり，例えば，式(4.27)は，前提Aの真偽の程度GSM(Aφ, η)が2^{-1}より大であれば，結論Bの真偽の程度GSM(Bφ, η)が2^{-1}より大であるとき含意B←Aの真偽の程度GSM((B←A)φ, η)はGSM(Bφ, η)に一致することを指摘している．

［命題4.2］**(GSMの2^{-1}性)**

$$\text{(i)}\ \mathrm{GSM}(\mathrm{A}\varphi,\ \eta)<2^{-1} \qquad (4.19)$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow\mathrm{GSM}((\mathrm{B}\leftarrow\mathrm{A})\varphi,\ \eta)\\
&\begin{cases}
=1-\mathrm{GSM}(\mathrm{A}\varphi,\ \eta)>2^{-1} \quad \text{if } \mathrm{GSM}(\mathrm{B}\varphi,\ \eta)\leqq2^{-1} & (4.20)\\
>2^{-1} \quad \text{if } \mathrm{GSM}(\mathrm{B}\varphi,\ \eta)>2^{-1}. & (4.21)
\end{cases}
\end{aligned}
$$

(ii) $\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta)=2^{-1}$ (4.22)

$\Rightarrow \mathrm{GSM}((B\leftarrow A)\varphi,\ \eta)=$

$$\begin{cases} 2^{-1} \text{ if } \mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta)\leqq 2^{-1} & (4.23)\\ \mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta)>2^{-1} \text{ if } \mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta)>2^{-1}. & (4.24)\end{cases}$$

(iii) $\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta)>2^{-1}$ (4.25)

$\Rightarrow \mathrm{GSM}((B\leftarrow A)\varphi,\ \eta)$

$$\begin{cases} \leqq 2^{-1} \text{ if } \mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta)\leqq 2^{-1} & (4.26)\\ =\mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta)>2^{-1} \text{ if } \mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta)>2^{-1} & (4.27)\end{cases}$$

(証明)(i)の証明：$\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta)<2^{-1}$としよう．

$1-\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta)>2^{-1}$

であり，よって，

$\mathrm{GSM}((B\leftarrow A)\varphi,\ \eta)$

$=1-\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta)>2^{-1}$ if $\mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta)\leqq 2-1$

$>2^{-1}$ if $\mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta)>2^{-1}$.

(ii)の証明：$\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta)=2^{-1}$としよう．

$1-\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta)=2^{-1}$

であり，よって，

$\mathrm{GSM}((B\leftarrow A)\varphi,\ \eta)=\max\{2^{-1},\ \mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta)\}$

$=$

$$\begin{cases} 2^{-1} \text{ if } \mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta)\leqq 2^{-1}\\ \mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta)>2^{-1} \text{ if } \mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta)>2^{-1}.\end{cases}$$

(iii)の証明：$\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta)>2^{-1}$としよう．

$1-\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta)<2^{-1}$

であり，よって，

$\mathrm{GSM}((B\leftarrow A)\varphi,\ \eta)$

$$\begin{cases} \leqq 2^{-1} \text{ if } \mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta)\leqq 2^{-1}\\ =\mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta)>2^{-1} \text{ if } \mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta)>2^{-1}.\end{cases}$$

□

次の定理4.1は，含意B←Aの真偽の程度$\mathrm{GSM}((B\leftarrow A)\varphi,\ \eta)$が$2^{-1}$より大きくなるためには，前提A，結論Bの真偽の程度$\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta)$，$\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta)$が共に$2^{-1}$より大きければよいことを指摘している．

［定理4.1］**（含意に関するGSM＞2^{-1}定理）**

$\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta)>2^{-1}$かつ$\mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta)>2^{-1}$ (4.28)

$\Rightarrow$

$\mathrm{GSM}((B\leftarrow A)\varphi,\ \eta)=\mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta)>2^{-1}$.

（証明）　命題4.2の(iii)の後半である． (4.29)

□

4.3　命題論理に関する3段論法と，導出原理

推論法として，次の(一)，(二)がある：

(一)前向き推論(forward reasoning)

：事実Aが与えられたとしよう．このAと規則A→Bとを用いて，新しい事実Bを導くこと．

(二)後向き推論(backward reasoning)

：事実Aと証明すべき結論Bとが与えられたとしよう．¬Bを仮定し，かつ¬Bと規則A→Bとを用いて，¬Aを導く(導出原理)こと．得られた¬Aは事実Aに矛盾するので，仮定した¬Bが棄却されねばならないことになり，結局証明すべき結論Bが成り立つと導くこと．

□

2定理4.2，4.3を証明し，前向き推論としての3段論法と，後向き推論に用いられる導出原理とが成立することが明らかにされる．

次の定理4.2は，事実Aが真であるらしい，かつ，規則B←Aであるらしいならば，結論Bが真であるらしいを指摘していると，解釈されよう．

［定理4.2］**(3段論法)**

$$\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta)>2^{-1} \tag{4.30}$$

$$\text{かつ}\ \mathrm{GSM}((B\leftarrow A)\varphi,\ \eta)>2^{-1} \tag{4.31}$$

ならば，

$$\mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta)>2^{-1}. \tag{4.32}$$

(証明)　不等式(4.30)より，

$$1-\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta)<2^{-1}$$

を得るから，

$$\begin{aligned}&\mathrm{GSM}((B\leftarrow A)\varphi,\ \eta)\\&=\max\{1-\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta),\ \mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta)\}\\&>2^{-1}\quad \because\ \text{式}(4.31)\end{aligned}$$

を考慮すれば，不等式(4.32)が成立しなければならない．□

(定理4.2の，背理法による今1つの証明)

背理法で証明する．前提の1部である式(4.30)の下で結論式(4.32)が成り立たない，つまり，$\mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta)\leqq 2^{-1}$とする．命題4.3の(iii)の前半より，

$$\mathrm{GSM}((B\leftarrow A)\varphi,\ \eta)\leqq 2^{-1}$$

を得，$\mathrm{GSM}((B\leftarrow A)\varphi,\ \eta)>2^{-1}$に矛盾する．□

上記の定理4.2は，

$$\begin{aligned}&A\leftarrow\ \ \text{with}\ \ \mathrm{GSM}(\cdot\varphi,\ \eta).\\&B\leftarrow A\ \ \text{with}\ \ \mathrm{GSM}(\cdot\varphi,\ \eta).\\&\therefore\ \ B\leftarrow\ \ \text{with}\ \ \mathrm{GSM}(\cdot\varphi,\ \eta).\end{aligned} \tag{4.33}$$

と図示されると，約束しよう．

次の定理4.3において，

$$A\vee B=\neg B\rightarrow A \tag{4.34}$$

$$\neg A\vee C=A\rightarrow C \tag{4.35}$$

$$B\vee C=\neg B\rightarrow C \tag{4.36}$$

と再表現されることを思い起こすと，一般化された3段論法が成立することを明らかにしている．

［定理4.3］**(導出原理)**

$$\mathrm{GSM}((A\vee B)\varphi,\ \eta)>2^{-1} \tag{4.37}$$

かつ$GSM((\neg A \vee C)\varphi, \eta) > 2^{-1}$ (4.38)

ならば，

$$GSM((B \vee C)\varphi, \eta) > 2^{-1}. \quad (4.39)$$

（証明） 2つの場合にわけて証明しよう

（i）$GSM(A\varphi, \eta) \leqq 2^{-1}$の場合

$$\begin{aligned}&GSM((A \vee B)\varphi, \eta)\\&= \max\{GSM(A\varphi, \eta), GSM(B\varphi, \eta)\}\\&> 2^{-1} \quad \because \text{ 式(4.37)}\end{aligned}$$

を考慮すれば，

$$GSM(B\varphi, \eta) > 2^{-1}$$

でなければならない．

よって，

$$\begin{aligned}&GSM((B \vee C)\varphi, \eta)\\&= \max\{GSM(B\varphi, \eta), GSM(C\varphi, \eta)\} > 2^{-1}\end{aligned}$$

と，不等式(4.39)が成立する．

（ii）$GSM(A\varphi, \eta) > 2^{-1}$の場合

$$1 - GSM(A\varphi, \eta) < 2^{-1}$$

であるから，

$$\begin{aligned}&GSM((\neg A \vee C)\varphi, \eta)\\&= \max\{1 - GSM(A\varphi, \eta), GSM(C\varphi, \eta)\}\\&> 2^{-1} \quad \because \text{ 式(4.38)}\end{aligned}$$

を考慮すれば，

$$GSM(C\varphi, \eta) > 2^{-1}$$

でなければならない．

よって，

$$\begin{aligned}&GSM((B \vee C)\varphi, \eta)\\&= \max\{GSM(B\varphi, \eta), GSM(C\varphi, \eta)\} > 2^{-1}\end{aligned}$$

と，不等式(4.39)が成立する． □

上記の定理4.3は，3式(4.34)～(4.36)を考慮すれば，

$$\begin{aligned}&A \leftarrow \neg B \text{ with } GSM(\cdot\varphi, \eta).\\&C \leftarrow A \text{ with } GSM(\cdot\varphi, \eta).\\&\therefore\ C \leftarrow \neg B \text{ with } GSM(\cdot\varphi, \eta).\end{aligned} \quad (4.40)$$

と，図示される．

4.4 命題論理に関する導出原理による推論形式と，それに基づく推論例

本節では，人工知能言語Prologの表現形式を採用した形式で，命題論理における導出原理と，その具体的な適用例とが説明される．

4.4.1 2つの導出原理

4.1.3での¬の定義式から，

$$GSM(\neg(\neg C)\varphi, \eta) = GSM(C\varphi, \eta) \quad (4.41)$$

が成立することが直ちにわかる．よって，定理4．3において，Bの代りに，¬Bを採用すれば，次の命題推論形式1が成立することが判明する．式(4.42)は命題論理に関する導出原理(resolution principle)を使った最も簡単推論形式である．

[導出原理に基づく命題推論形式1]

$A \leftarrow B$ with $GSM(\cdot\varphi, \eta)$.

$C \leftarrow A$ with $GSM(\cdot\varphi, \eta)$.

$\therefore$ $C \leftarrow B$ with $GSM(\cdot\varphi, \eta)$. (4.42)

□

更に，定理4．3において，Bの代りに，¬Bを考えた後，

¬Bの代りに，$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_m$を採用し，

Cの代りに，$R_1 \vee R_2 \vee \cdots \vee R_n$採用すれば， (4.43)

次の命題推論形式2が得られることがわかる．

[導出原理に基づく命題推論形式2]

$A \leftarrow Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_m$ with $GSM(\cdot\varphi, \eta)$. (4.44)

$R_1 \vee R_2 \vee \cdots \vee R_n \leftarrow A$ with $GSM(\cdot\varphi, \eta)$. (4.45)

$\therefore$ $R_1 \vee R_2 \vee \cdots \vee R_n \leftarrow Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_m$

with $GSM(\cdot\varphi, \eta)$. (4.46)

(4.47)

□

ここで，

式(4.44)は，$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_m$が空の場合

$A \leftarrow$ with $GSM(\cdot\varphi, \eta)$. (4.48)

と書かれ，事実節(fact clause)と呼ばれる．ここで，$A \leftarrow$はAの意であることに注意する．

また，式(4.46)は，$R_1 \vee R_2 \vee \cdots \vee R_n$が空の場合

$\leftarrow Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_m$ with $GSM(\cdot\varphi, \eta)$. (4.49)

と書かれ，質問節(inquiry clause)と呼ばれる．ここで，

$\leftarrow Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_m$ (4.50)

は$\neg(Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_m)$の意であることに注意する．

最後に，$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_m$が空でなくて，かつ，Aが空でない場合の式(4.44)は規則節(rule clause)と呼ばれる．

←の左の部分を頭部といい，右の部分を体部という．例えば，式(4.44)の規則節の頭部，体部は各々，A，$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_m$である．

4.4.2 論理プログラム言語としてのProlog

以後，導出原理に基づく命題推論形式2において，n＝1とした次の命題推論形式3のみを適用することを考えよう．

[導出原理に基づく命題推論形式3]

$A \leftarrow Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_m$ with $GSM(\cdot\varphi, \eta)$. (4.51)

$R \leftarrow A$ with $GSM(\cdot\varphi, \eta)$. (4.52)

$\therefore$ $R \leftarrow Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_m$ with $GSM(\cdot\varphi, \eta)$. (4.53)

(4.54)

□

質問節が唯1つあり，事実節，規則節が有限個ある集合を**論理プログラム**という．

空節(empty clause)←with GSM$(\cdot\varphi,\ \eta)$． (4.55)

が可能な限り得られるように，論理プログラムに命題推論形式3を有限回，或いは高々可算回適用することを**推論**(inference)と呼ぶことにする．この推論は，いわゆるprolog処理系の動作と1対1の対応を備えている．プログラム言語prologは人工知能言語の1種である．

[空節が導かれる推論とは？]

事実節，規則節を満たす2つのパターン対φ，ηは存在するが(一般化類似度が2^{-1}より大きいような2つのパターン対φ，ηが存在すること)，このパターン対φ，ηは

式(4.50)の質問節←$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_m$の体部$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_m$を満たさないこと (4.56)

を示すのが，空節←with GSM$(\cdot\varphi,\ \eta)$．が導かれる推論である． (4.57)

□

かくの如き推論で，空節←with GSM$(\cdot\varphi,\ \eta)$．が得られた場合，質問節は肯定的に解決されたといい，空節が得られない場合，質問節は否定的に解決されたという．

命題変数を素式(atomic formula)という．素式または，素式の否定をリテラル(literal)といい，リテラルの選言からなる論理式を節(clause)という．節の連言を節形式という．

論理プログラムは節形式である．

[推論の1例]

問題

①$_1$ 太郎は花子が好きである．

②$_1$ 花子は太郎が好きである．

③$_1$ 太郎は花子が好きであり，花子は太郎が好き であるならば，太郎と花子は結婚する可能性がある．

④$_1$ 太郎と花子は結婚する可能性があるだろうか？

は，次の論理プログラム①$_4$～④$_4$で表現できる．

3つのパターン変換作用素

①$_2$ A：太郎は花子が好きである

②$_2$ B：花子は太郎が好きである

③$_2$ C：太郎と花子は結婚する可能性がある

を考えよう．①$_1$～③$_1$に対応して，2つのパターンφ，ηを

①$_3$ $\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta) > 2^{-1}$

②$_3$ $\mathrm{GSM}(B\varphi,\ \eta) > 2^{-1}$

③$_3$ $\mathrm{GSM}((C \leftarrow (A \wedge B)\varphi,\ \eta) > 2^{-1}$

を満たすように，選ぶ．このパターン対φ，ηは④$_1$に対応して，

④$_3$ $\mathrm{GSM}(C\varphi,\ \eta) > 2^{-1}$

を満たすことが直ちにわかる．よって，次の論理プログラム①$_4$～④$_4$の実行は空節← with GSM$(\cdot\varphi,\ \eta)$．が導かれる推論となるはずである．

以下，上述の命題推論形式3を3度適用し，この事実を示そう．

論理プログラムは

①$_4$ A← with GSM$(\cdot\varphi,\ \eta)$．

②$_4$ B← with GSM$(\cdot\varphi,\ \eta)$．

③$_4$　$C \leftarrow A \wedge B$　with　GSM$(\cdot\varphi,\ \eta)$.

④$_4$　$\leftarrow C$　with　GSM$(\cdot\varphi,\ \eta)$.

であり，実行過程は次の通りである．

④$_4$と③$_4$とに上述の命題推論形式3を適用すれば，

⑤$_4$　$\leftarrow A \wedge B$　with　GSM$(\cdot\varphi,\ \eta)$.

が得られ，⑤$_4$と①$_4$とに上述の命題推論形式3を適用すれば，

⑥$_4$　$\leftarrow B$　with　GSM$(\cdot\varphi,\ \eta)$.

が得られ，⑥$_4$と②$_4$とに上述の命題推論形式3を適用すれば，空節

⑦$_4$　$\leftarrow$ with　GSM$(\cdot\varphi,\ \eta)$.

が得られた．つまり，質問節④$_4$は肯定的に解決され，太郎と花子は結婚する可能性があると，推論され得たことになる．　□

4.5　第1階述語論理における導出原理と，推論形式

本節では，導出原理を利用し，第1階述語論理関係を推論できる形式を説明し，併せて，その簡単な推論例が挙げられる．

4.5.1　スコーレム標準形，単一化置換，導出原理に基づく述語推論形式

固定した各 t に1つの個体を対応させ，パターン変換

$$A[t] : \Phi \to \Phi \tag{4.58}$$

を考える．

例えば，$A[1+1/n]$ に1つの命題に対応させ，以後，$A[t]$ に1変数 t の第1階述語を対応させる．

関数

$$f : R \to R,\ \text{ここに，Rは実数全体からなる集合} \tag{4.59}$$

を導入して，t が

$$t = f(s) \tag{4.60}$$

の場合もある．sの値は 1 つの個体に対応している．関数 f は**スコーレム関数**(Skolem function)と呼ばれるものである．スコーレム関数の導入によって存在記号∃が除去された全称記号∀のみからなる論理式に変換できる．例えば，2変数述語$A(x, y)$

$\forall x \exists y A(x, y)$

$$\cdots\text{すべてのxについてあるyの値が存在し，}A(x, y)\text{が成立する} \tag{4.61}$$

は，スコーレム関数 f を導入すると，

$$\forall x A(x, f(x)) \tag{4.62}$$

と再表現できる．何故ならば，yはxに依存して存在することになるので，その依存関係を関数fで表すと，

$$y = f(x) \tag{4.63}$$

となり，この関数関係を論理式(4.61)に代入すれば，論理式(4.62)が得られる．

∀，∃で限定された変数を束縛変数(bound variable)といい，束縛変数でない変数を自由変数(free variable)という．自由変数を含まない述語論理式を閉式(closed formula)という．

第1階述語論理で書かれた論理プログラム内の節(論理式)はスコーレム関数を導入されていれば，存在記号∃が排除され，全称記号∀のみからなる表現となる．任意の第1階述語論理式(formula of first order predicate logic)は

$$\forall x_1, \forall x_2, \cdots, \forall x_m, C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \tag{4.64}$$

という形式の閉式，つまり，**スコーレム標準形**(Skolem standard form)に常に変換できるアルゴリズム［A2］が知られている．ここに，

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \tag{4.65}$$

は節形式であり，∀，∃を含まない述語論理式であるが，スコーレム標準形の**母式**(matrix)といわれている．

第1階述語論理で書かれた論理プログラムは常にスコーレム標準形の形になっているものとしよう．

個体定数(特定の個体)，個体変数を項(term)という．$t_1, t_2, \cdots, t_n$を項とし，n変数の関数をfとすると，$f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$は項であり，以上の定義で項と判明するものだけが項である．複数の節内の幾つかの変数を項で置き換え，この複数の節内の素式(論理記号を含まない論理式としての述語)を一致させる操作を**単一化置換**(unifier)という．

θAは節Aに単一化置換θを作用させて得られる節を表わそう．例えば，

個体変数xを個体定数aで置き換え，個体変数zを項f(y)で置き換える置換

$$\theta = \{a/x, f(y)/z\} \tag{4.66}$$

を，2つの節

$$P(x, f(y)) \vee Q, \ \neg P(a, z) \vee R$$

ここに，Q, Rは変数x, zを含まない論理式　(4.67)

に作用させると，

$$\theta\,[P(x, f(y)) \vee Q] = P(a, f(y)) \vee Q \tag{4.68}$$

$$\theta\,[\neg P(a, z) \vee R] = \neg P(a, f(y)) \vee R \tag{4.69}$$

となり，2つの素式$P(x, f(y))$，$P(a, z)$は一致し，$P(a, f(y))$となる．つまり，

$$\theta P(x, f(y)) = \theta P(a, z) = P(a, f(y)) \tag{4.70}$$

が成立し，θは単一化置換である．

導出原理に基づいて，第1階述語を用いて推論する形式は次のように述べられる．

[導出原理に基づく第1階述語推論形式3]

$Q_1, Q_2, \cdots, Q_m$, 並びにRは個体変数を明示していない述語としよう．

$$\theta A[t] = \theta A[s] \tag{4.71}$$

を満たす単一化置換θが存在するならば，

$$A[t] \leftarrow Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_m \text{ with } GSM(\cdot\varphi, \eta). \tag{4.72}$$

$$R \leftarrow A[s] \text{ with } GSM(\cdot\varphi, \eta). \tag{4.73}$$

$$\therefore\ \theta R \leftarrow \theta Q_1 \wedge \theta Q_2 \wedge \cdots \wedge \theta Q_m \text{ with } GSM(\cdot\varphi, \eta). \tag{4.74}$$

□

多変数をもつ節について論じるために，例えば，2変数の節について論じるために，次の4.5.2を用意する．

4.5.2　2つのヒルベルト空間の直積(direct product)

ヒルベルト空間$\mathfrak{H}_1$の内積 $(\varphi_1, \eta_1)_1$

ヒルベルト空間$\mathfrak{H}_2$の内積 $(\varphi_2, \eta_2)_2$　(4.75)

を導入し，

直積空間(product space) $\mathfrak{H} \equiv \mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$は$\varphi_1 \in \mathfrak{H}_1$, $\varphi_2 \in \mathfrak{H}_2$からなる対$\{\varphi_1, \varphi_2\}$の全体であり，算法

①(和) $\{\varphi_1, \varphi_2\}+\{\eta_1, \eta_2\}=\{\varphi_1+\eta_1, \varphi_2+\eta_2\}$

②(定数倍) $a\cdot\{\varphi_1, \varphi_2\}=\{a\cdot\varphi_1, a\cdot\varphi_2\}$

for any complex number a

③(内積)

$(\{\varphi_1, \varphi_2\}, \{\eta_1, \eta_2\})=(\varphi_1, \eta_1)_1+(\varphi_2, \eta_2)_2$

によって，ヒルベルト空間を形成する．

④(ノルム)

$\|\{\varphi_1, \varphi_2\}\| \equiv \sqrt{(\{\varphi_1, \varphi_2\}, \{\varphi_1, \varphi_2\})}$

$=[\|\varphi_1\|^2+\|\varphi_2\|^2]^{1/2}$

であるから，$\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$が完備である，つまり

$$\lim_{n, m\to\infty} \|\varphi_{j,n}-\varphi_{j,m}\|=0 \tag{4.76}$$

を満たす点列 $\{\varphi_{j,n}\}$ $n=1, 2, \cdots$に対し，

$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_{j,n}-\varphi_j\|=0$であるような$\varphi_j$が

$\mathfrak{H}_j$内に存在する$(j=1, 2)$ (4.77)

から，

$$\lim_{n, m\to\infty} \|\{\varphi_{1,n}, \varphi_{2,n}\}-\{\varphi_{1,m}, \varphi_{2,m}\}\| =0 \tag{4.78}$$

を満たす点列 $\{\varphi_{1,n}, \varphi_{2,n}\}$ $n=1, 2, \cdots$に対し，

$\lim_{n\to\infty} \|\{\varphi_{1,n}, \varphi_{2,n}\}-\{\varphi_1, \varphi_2\}\|=0$であるような

$\{\varphi_1, \varphi_2\}$ が$\mathfrak{H}\equiv\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2$内に存在する (4.79)

がいえ，$\mathfrak{H}\equiv\mathfrak{H}$が完備となるからである．

4.5.3 述語論理プログラムの1例

導出原理に基づく述語推論形式3は多変数を持つ節からなる論理プログラムについても，容易に書き直せるので，以下では2変数の場合の例のみを説明しよう．

2つの2変数第1階述語

A[s, t]：sはtが好きである (4.80)

B[s, t]：sはtと結婚する可能性がある (4.81)

を用意し，

$s=1+1/n$のとき，太郎に対応する (4.82)

$t=1+2/n$のとき，花子に対応する (4.83)

と考えよう．ここに，

$$(A[s,t]\{\varphi_1, \varphi_2\}, \{\eta_1, \eta_2\}) \equiv (A[s]\varphi_1, \eta_1)_1+(A[t]\varphi_2, \eta_2)_2 \tag{4.84}$$

$$(B[s,t]\{\varphi_1, \varphi_2\}, \{\eta_1, \eta_2\}) \equiv (B[s]\varphi_1, \eta_1)_1+(B[t]\varphi_2, \eta_2)_2 \tag{4.85}$$

である．

第1階述語推論を論理プログラムで行う例を挙げよう．

[推論の1例]

問題

$①_1$　太郎は花子が好きである．

②$_1$　花子は太郎が好きである．

③$_1$　sはuが好きであり，uはsが好きであるならば，sとuは結婚する可能性がある．

④$_1$　太郎と花子は結婚する可能性があるだろうか？

は，次の論理プログラムで表現できる：

正整数nを$2<n$であるように，とる．

①$_4$　$A[1+1/n, 1+2/n] \leftarrow$ with　$GSM(\cdot\varphi, \eta)$.

②$_4$　$A[1+2/n, 1+1/n] \leftarrow$ with　$GSM(\cdot\varphi, \eta)$.

③$_4$　$B[s, u] \leftarrow A[s, u] \wedge A[u, s]$　with　$GSM(\cdot\varphi, \eta)$.

④$_4$　$\leftarrow B[1+1/n, 1+2/n]$　with　$GSM(\cdot\varphi, \eta)$.

5. 半順序を保存する情報処理

先ず，パターン対φ，$\eta\in\Psi(\subseteq\Phi)$は，不等式

$$GSM(\varphi, \eta)>2^{-1} \tag{5.1}$$

を満たすとき，**類似の関係にある**といってよいだろう．もし，不等式(5.1)が満たされないのなら，パターン変換

$$A: \Psi\to\Psi \tag{5.2}$$

を導入し，パターンφを$A\varphi$へと変換すればよいだろう．こうして，次の定義5.1が導かれる．

［定義5.1］**（パターン変換Aに関する2パターンφ，η間の類似関係）**

$$GSM(A\varphi, \eta)>2^{-1} \tag{5.3}$$

か成立するとき，パターン変換Aに関しパターン対φ，ηは類似関係にあるという．　□

導出原理はこの類似関係を保存する推論方法であることが定理4.3から直ちにわかる．

本章では，この種の類似関係を実現するパターン変換Aに要求される性質が説明される．

5.1　半順序関係$\leqq_{GSM}$

パターン集合$\Psi(\subseteq\Phi)$上の2元関係≦GSMは次の定義5．2のごとく定義される．

［定義5.2］**（2元関係$\leqq_{GSM}$）**

$$\varphi(\in\Psi)\leqq_{GSM}\eta(\in\Psi) \tag{5.4}$$

$$\Leftrightarrow\forall\psi\in\Psi,$$

$$2^{-1}\leqq GSM(\varphi, \psi)\leqq GSM(\eta, \psi)$$

$$\vee GSM(\eta, \psi)\leqq GSM(\varphi, \psi)\leqq 2^{-1}. \tag{5.5}$$

□

このとき，2元関係≦GSMはいわゆる半順序関係であることが次の命題5.1よりわかる．

［命題5.1］**（半順序関係）**

2元関係≦GSMは

（一）（反射律）$\varphi\leqq_{GSM}\varphi$.

（二）（対象律）$\varphi\leqq_{GSM}\eta\wedge\eta\leqq_{GSM}\varphi$

$\Rightarrow\forall\psi\in\Psi, GSM(\varphi, \psi)=GSM(\eta, \psi)$.

（三）（推移律）$\varphi\leqq_{GSM}\eta\wedge\eta\leqq_{GSM}\psi$

$\Rightarrow \varphi \leqq_{GSM} \psi$. (5.6)

を満たし，半順序関係である．

（証明）容易に確かめることができる． □

5.2　半順序関係≦GSMに関し単調増大なパターン変換Aの設計問題

半順序$\leqq_{GSM}$を保存すれば，定義5.1の類似関係が保存される場合があることを説明しよう．

先ず，単調増大なパターン変換Aの定義を次の定義5.3で与えよう．

［定義5.3］**（半順序関係$\leqq_{GSM}$に関し単調増大なパターン変換A）**

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \varphi \leqq_{GSM} A\varphi \tag{5.7}$$

を満たすパターン変換Aは半順序関係$\leqq_{GSM}$に関し単調増大であるといわれる． □

もし半順序関係$\leqq_{GSM}$に関し単調増大なパターン変換Aを設計できれば，式(5.7)を複数回適用することを考えると，不等式列

$$\mathrm{GSM}(A\varphi,\ \eta) < \mathrm{GSM}(A(A\varphi),\ \eta) < \cdots$$
$$< 2^{-1} < \mathrm{GSM}(A^{t}\varphi,\ \eta) < \mathrm{GSM}(A^{t+1}\varphi,\ \eta) < \cdots \tag{5.8}$$

を満たす正整数tを発見できる場合がある．この場合，

$$\mathrm{GSM}(A^{s}\varphi,\ \eta) > 2^{-1} \quad \text{for anys} \geqq t \tag{5.9}$$

が成立しているから，

パターン変換A^{s}に関しパターン対φ，ηは類似関係にあるということになる．

単調増大なパターン変換Aを設計する問題の解決はついていない．

定義5.3より強い単調増大なパターン変換Aは次の定義5.4のように導入できる．

［定義5.4］**（半順序関係$\leqq_{GSM}$に関し強単調増大なパターン変換A）**

$$\begin{aligned}&\varphi \leqq_{GSM} \eta\\ &\Rightarrow \varphi \leqq_{GSM} A\varphi\\ &\wedge \eta \leqq_{GSM} A\eta\\ &\wedge A\varphi \leqq_{GSM} A\eta\end{aligned} \tag{5.10}$$

を満たすパターン変換Aは半順序関係$\leqq_{GSM}$に関し強単調増大であるといわれる． □

強単調増大なパターン変換Aは無論，単調増大であるが，強単調増大なパターン変換Aを設計する問題の解決もついていない．

5.3　半順序関係$\leqq_{GSM}$に関し単調増大なパターン変換列{A[t] | t=0, ±1, ±2, …}の設計問題

助変数tを持つパターン変換列

$$\{A[t] \mid t=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots\}) \tag{5.11}$$

に関しては，半順序関係≦GSMに関し単調増大であることを次の定義5．5で定義する．

［定義5.5］**（半順序関係$\leqq_{GSM}$に関し単調増大なパターン変換列{A[t] | t=0, ±1, ±2, …}）**

$$1 < t \leqq u \Rightarrow A[t]\,\varphi \leqq_{GSM} A\ [u]\ \varphi \tag{5.12}$$

を満たすパターン変換列 {A[t] | t=0, ±1, ±2, …})は半順序関係$\leqq_{GSM}$に関し単調増大であるといわれる． □

もし半順序関係$\leqq_{GSM}$に関し単調増大な式(5.11)のパターン変換列を設計できれば，式(5.12)を複数回適用することを考えると，不等式列

$$1 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots \tag{5.13}$$

であれば，

$$\mathrm{GSM}(A[t_1]\varphi,\eta) < \mathrm{GSM}(A[t_2]\varphi),\eta) < \cdots$$
$$< 2^{-1} < \mathrm{GSM}(A[t_n]\varphi,\eta) < \cdots \tag{5.14}$$
を満たす正整数nを発見できる場合がある．この場合，
$$\mathrm{GSM}(A[t_m]\varphi,\eta) > 2^{-1} \quad \text{for any} \quad m \geqq n \tag{5.15}$$
が成立しているから，

パターン変換A $[t_m]$ に関しパターン対 φ，η は類似関係にあるということになる．

単調増大な式(5.11)のパターン変換列を設計する問題の解決はついていない．

6. むすび

知識が学習の働きで記号表現され，この記号表現をもとに推論を探索活動ととらえる古典的人工知能学は，記号表現による知識の獲得･探索･推論･知識･知力の増幅と拡大を目的とする学習という認知の機能を実現しようとする．

通常，パターン情報処理は低次認知機能，例えば知覚機能を実現しており，記号情報処理は高次認知機能，例えば推論機能を実現しているといわれている．特に，学習機能はニューラルネット理論の示すように，記号情報処理で実現するよりもパターン情報処理で実現する方がその効果が大きいことが3研究［B26］～［B28］の著者経験からもいえる．

ニューラルネットによる分散情報処理は正に情報を**波動**としてとらえている．また，事例による記号列学習法としてのバージョン空間法［B2］は情報を**粒子**としてとらえている．この2例から推察できるように，パターン情報処理は情報を拡散してゆく波動としてとらえ，記号情報処理は情報を拡散してゆかない粒子としてとらえているといえるかもしれない．

パターン情報処理により記号表現による推論を実現できれば，知能を能動的な情報処理の活動という観点からとらえる人工知能学は，記憶･知覚･判断･認識･推理･学習の諸機能をパターン情報処理の方へ大きく傾かせることが可能となる．

第1階述語論理（first-order predicate-logic）は世界（対象領域；universe of discourse）を構成する複数の個体（indivisual）関係に着目し，「個体関係について何が記述されているか」という観点から命題の内部構造を問題とする．全称記号∀を含んでいるため，命題論理（propositional logic）では扱えない3段論法の1例

①太郎は人間である（事実；小前提）

②すべての人間は理性を備えている（規則；大前提）

③∴　太郎は理性を備えている（結論）

を第1階述語論理で扱えるのは，命題の内部構造に立ち入って対象領域（閉世界）の各個体を表現する個体変数（indivisual variable）を導入できるからである．

人工知能言語としてPrologがあるが，このプログラム言語によって記述されたプログラムの実行は第1階述語論理の部分であるホーン論理における導出原理を使った後向き推論の過程である．本論文はこの後向き推論がSS一般化類似度関数GSMの値が 2^{-1} より大きい値で保存される形式で可能なことを示した．導出原理を使った後向き推論を記号列で実現するよりも**柔軟性･不変性･拡張性**に富んだ推論が得られている．

唯，Prologプログラムでは否定文の表現が陽にできないので，知識の表現に制限があることに注意しておかねばならないし，この制限を撤廃する手段を考案することが残っている．

本論文の研究成果は，記号推論がパターンの知能情報論理で扱えることを示し，ニューラルネット理論が記号情報処理の分野を覆いつつある事実と同様な意味で，文献［B23］で記号列を処理する一般問題解決器（general problem-solver）としてのプロダクション・システムをパターン論理で構築したのと同様にまた1つ，S.Suzukiのパターン認識の数学的理論［B6］の得意な側面を露呈させたといえよう．

文　献　A

［A 1］青木利夫，高橋渉："集合･位相空間要論"，培風館，Sept.1979

［A 2］太原育夫："認知情報処理"，オーム社，Mar.1991

［A 3］西原典孝，森田憲一："ホーン節を内部表現とする自然言語理解システム"，情報処理学会論文誌，vol.26, no.5, pp.954-960, Sep.1985

［A 4］長尾智晴："最適化アルゴリズム"，昭晃堂，June 2001

［A 5］高濱徹行，阪井節子："多目的非線形最適化手法 Vector Simplex法による多目的ファジィ制御ルールの対話的学習"，情報処理学会論文誌，vol.42, no.11, pp.2607-2617, Nov.2001

［A 6］樋口隆英，筒井茂義，山村雅幸："実数値GAにおけるシンプレックス交叉の提案"，人工知能学会論文誌，vol.16, no.1, pp.147－155, 2001

［A 7］天野要，他7名："パターンの類似性判断に関する変換群構造説"，情報処理学会論文誌，vol.42, no.11, pp.2733-2741, Nov.2001

文　献　B

［B 1］鈴木昇一："認識工学"，柏書房，Feb.1975

［B 2］鈴木昇一："ニューラルネットの新数理"，近代文芸社，Sept.1996

［B 3］鈴木昇一："パターン認識問題の数理的一般解決"，近代文芸社，June 1997

［B 4］鈴木昇一："認識知能情報論の新展開"，近代文芸社，Aug.1998

［B 5］鈴木昇一："パターンのエントロピーモデル"，電子情報通信学会論文誌（D-Ⅱ），vol.J77-D-Ⅱ, no.10, pp.2220－2238, Nov.1994

［B 6］鈴木昇一："パターン認識の数学的理論"，電子情報通信学会技術研究報告［パターン認識と学習，パターン認識と理解］，PRL84-6（第1部），PRL84-30, PRL84-38, PRL85-27, PRU86-8, PRU86-35, PRU86-69, PRU87-1, PRU87-28, PRU88-30, PRU89-1, PRU89-27, PRU89-40, PRU89-66, PRU89-77, PRU89-136, PRU90-5, PRU90-15, PRU90-29, PRU90-125, PRU91-1, PRU91-29, PRU91-42, PRU92-1, PRU92-18, PRU92-25, PRU92-89, PRU92-102（第28部），May 1984～Jan.1993

［B 7］鈴木昇一："手書き漢字の側抑制効果的分解とその計算機シミュレーション"，情報処理学会誌，vol.15, no.12, pp.927-934, Dec.1974

[B 8] 鈴木昇一："画像情報量とその手書き漢字への応用"，画像電子学会誌，vol.4, no.1, pp.4-12, Apr.1975
[B 9] 鈴木昇一："抽出された特徴による手書き漢字構造の再生"，情報処理学会誌，vol.18, no.11, pp.1115-1122, Nov.1977
[B10] 鈴木昇一："回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シミュレーション"，情報研究(文教大学・情報学部)，no.4, pp.36-56, Dec.1983
[B11] 鈴木昇一："連想形記憶N器MEMOTRONと日本語単独母音系列の再生に関する計算機シミュレーション"，情報研究(文教大学・情報学部)，no.7, pp.14-29, Dec.1986
[B12] 鈴木昇一："多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション"，情報研究(文教大学・情報学部)，no.10, pp.35-49, Dec.1989
[B13] 鈴木昇一："帰属係数法に基づく類似度、帰属関係あいまい度、認識情報量の計算機シミュレーション"，情報研究(文教大学・情報学部)，no.11，pp.51-68，Dec.1990
[B14] 鈴木昇一："構造受精法と日本語単独母音の認識"，情報研究(文教大学・情報学部)，no.18, pp.17-51, Dec.1998
[B15] 鈴木昇一, 前田英明："有声破裂音の代表パターンの学習的決定と、その計算機シミュレーション"，情報研究（文教大学・情報学部)，no.20, pp.77-95, Dec.1998
[B16] 鈴木昇一，前田英明："変動エントロピーによる有声破裂音の順序付けと、その計算機シミュレーション"，情報研究（文教大学・情報学部)，no.21, pp.51-78, Mar.1999
[B17] 鈴木昇一："平均顔を用いた顔画像の2値化、並びに、目・鼻・口の抽出と、その計算機シミュレーション"，情報研究（文教大学・情報学部)，no.22, pp.65-150, Dec.1999
[B18] 鈴木昇一："直交系によるパターンモデルの構成"，情報研究（文教大学・情報学部)，no.21, pp.23-49, Mar.1999
[B19] 鈴木昇一："認識行為に向けての、効用最大化原理"，情報研究（文教大学・情報学部)，no.22, pp.151-210, Dec.1999
[B20] 鈴木昇一："界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の、顔画像処理に関する計算機シミュレーション"，情報研究（文教大学・情報学部)，no.23, pp.109-182, Mar.2000
[B21] 鈴木昇一："風景画から知識を抽出し、解釈するシステムの、ファジィ推論ニューラルネットによる構成"，情報研究（文教大学・情報学部)，no.23, pp.183-265, Mar.2000
[B22] 鈴木昇一："各個人の感性を反映した認識システムRECOGNITRON"，情報研究(文教大学・情報学部)，no.24, pp.185-257, Dec.2000
[B23] 鈴木昇一："プロダクション・システムとしてのファジィ・マルチメディア・コンピュータと、空間多重パターンファジィ推論系"，情報研究（文教大学・情報学部)，no.24, pp.105-183, Dec.2000
[B24] 鈴木昇一："SS大分類関数BSCの適応的構成への、計算論的学習理論の適用"，情報研究(文教大学・情報学部)，no.25, pp.187-238, Mar.2001
[B25] 鈴木昇一："量子力学の諸原理，多段階量子認識系と，心理状態を取り入れた想起に基づく部分空間認識法"，情報研究（文教大学・情報学部)，no.25, pp.239-284, Mar.2001
[B26] 鈴木昇一，中村三郎："知識情報処理における帰納的推論"，情報研究（文教大学・情報学部)，no.9, pp.173-196, Dec.1988
[B27] 鈴木昇一，中村三郎："最汎アトムを用いない精密化方法によるPrologプログラムの帰納的

自動合成システムの，C言語による実現”，情報研究（文教大学・情報学部），no.10, pp.151-167, Dec.1989
[B28] 中村三郎，田代達也，鈴木昇一：“ソフトウェアをコンピュータに作らせる夢－１つの提案「MIS」について-”，コンピュータアクセス，pp.54-62, Jan.1990

付録A.「axiom 1とパターン集合Φ，モデル構成作用素T」,「axiom 2を満たす類似度関数SM」，並びに，「axiom 3を満たす大分類関数BSC」

本付録Aでは，処理の対象となる問題のパターンφの集合Φ，モデル構成作用素T，類似度関数SMについて説明される．対【Φ, T】の満たさなければならないaxiom 1と，類似度関数SMの満たさなければならないaxiom 2も説明され，Φの表示, T, SMの構成例が示される．更に，大分類関数BSCの満たさなければならないaxiom 3も説明され，BSCMの構成例が示される．

A1. axiom 1とパターン集合Φ，モデル構成作用素T

処理の対象とするパターンφの集合Φはある可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の，零元0を含むある部分集合であり，このΦ，並びに写像

$$T : \Phi \to \Phi \tag{A1.1}$$

は次のaxiom 1を満たさなければならない．このとき，写像Tは**モデル構成作用素**(model-construction operator)と呼ばれ，$T\varphi \in \Phi$は$\varphi \in \Phi$の代りとなり得るという意味で，パターン$\varphi \in \Phi$のモデル(model)と呼ばれる．

現実のパターンφから離れ過ぎても密着し過ぎても不適切というという意味で，よいパターンモデル$T\varphi$とは現実の実用的状況の，バランスのとれた抽象化を表現していなければならない．写像Tは，パターン$\varphi \in \Phi$の**簡略化規則**(simplification rule)を与えていると考えられる．

下記のaxiom 1からわかるように，パターン集合Φは，埋込性

$$T\cdot\Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \subset \Phi \tag{A1.2}$$

を満たし，原点(＝0)を始点とし，Φの任意の点を通る半直線を含むような集合，つまり，**錐**であらねばならない．下記の式(A1.7)によるΦの表示が正にΦが錐であることを明らかにしている．

axiom 1を満たすパターン集合Φの逐次決定法は，文献［B3］の2.4節で説明されている．その結果は次のとおりである：

パターンと判明している元の集合(基本領域；basic domain) Φ_B($\ni 0$∵ axiom 1の(i)の前半)を導入して，**集合論的再帰領域方程式**(axiom 1を満たす最小のΦの表現式)

$$\Phi = \Phi_B \cup T\cdot\Phi \cup R^{++}\cdot\Phi \tag{A1.3}$$

ここに,

$$T\cdot\Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \tag{A1.4}$$

R^{++}は正実数全体の集合 (A1.5)

$$R^{++}\cdot\Phi \equiv \{r^{++}\cdot\varphi \mid r^{++} \in R^{++}\} \tag{A1.6}$$

の解として得られたΦは

$$\Phi = R^{++}\cdot[\Phi_B \cup T\cdot\Phi_B] \tag{A1.7}$$

と表示される(文献［B3］の式(2.56)を参照)．Φの表示式(A1.7)から，明らかに，2つの等式

$T\cdot\Phi = T\cdot\Phi_B \subset \Phi$

∵ axiom 1の(ii), (iii)の2後半 (A1.8)

$R^{++}\cdot\Phi = \Phi\ (= R^{++}\cdot\Phi_B \cup R^{++}\cdot T\cdot\Phi_B)$

∵ axiom 1の(ii)の後半 (A1.9)

が成り立つ. □

Axiom 1 **(パターン集合Φとモデル構成作用素Tとの対【Φ, T】の満たすべき公理)**

(i)(零元のΦ-包含性と, 零元のT-不動点性 (fixed-point property of zero element under mapping T)) $0\in\Phi \wedge T0=0$.

(ii)(Φの**錐性**, Tの正定数倍吸収性; cone property)
$\forall\varphi\in\Phi,\ a\cdot\varphi\in\Phi \wedge T(a\cdot\varphi)=T\varphi$.
for any positive real number a.

(iii)(Φの埋込性(embeddedness)と, Tの**ベキ等性**(idempotency)
$\forall\varphi\in\Phi,\ T\varphi\in\Phi \wedge T(T\varphi)=T\varphi$.

(iv)(写像Tの**非零写像性**; non-zero mapping property of T) $\exists\varphi\in\Phi,\ T\varphi\neq 0$. □

A2. 処理の対象となる問題のパターンφの集合 Φとモデル構成作用素Tとの対【Φ, T】の説明

原パターン$\varphi\in\Phi$が如何なる意味を備えているか, つまり, φが如何なる類概念(category)を表しているかを決定する働きを持つのが, 認識システムRECOGNITRONである. RECOGNITRONがモデル$T\varphi\in\Phi$を見たり聞いたりしたならば, 原パターン$\varphi\in\Phi$と同じに見えたり聞こえたりすることだと, 解釈可能な対【Φ, T】について説明しよう.

一般に, 処理の対象とする問題のパターンφの集合Φを可分な(separable)一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の或る部分集合とする. 例えば, $\overline{\eta}$をηの複素共役として,

M: q次元ユークリッド空間R^qの可測部分集合 (A2.1)

dm(x): 正値ルベーグ・スティルチェス式測度 (A2.2)

$x=\langle x_1, x_2, \cdots, x_q\rangle \in M(\subseteq R^q)$: 実数値 g 変数座標系 (A2.3)

を導入し, その内積(φ, η), ノルム$\|\varphi\|$を

$$(\varphi, \eta)=\int_M dm(x)\ \varphi(x)\cdot\overline{\eta}(x) \quad (A2.4)$$

$$\|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)} \quad (A2.5)$$

とする線形空間(ベクトル空間)としての可分なヒルベルト空間[19] $\mathfrak{H}=L_2(M; dm)$の特別な場合として、

$M=R^2$(2次元全平面) (A2.6)

$dm(x)=[x_1^2+x_2^2]^{-1}dx_1dx_2$ (A2.7)

を選ぶことができる [B7], [B9].

パターンモデル$T\varphi$を出力する式(A1.1)の写像Tに要求されるのは. 次の4性質①~④である [B3], [B4] [B6]:

①(零元不動点性)$\varphi=0\in\Phi$については, $T\varphi=0$.

②(正定数倍不変性)任意の正実定数aに対し,
$\forall\varphi\in\Phi,\ T(a\cdot\varphi)=T\varphi$.

③(ベキ等性)$\forall\varphi\in\Phi,\ T(T\varphi)=T\varphi$.

④(非零写像性)$\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0.$ □

上述の①~④はA1節のaxiom 1の(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ)の3後半,(ⅳ)であり,零元$\varphi=0\in\Phi$は背景も何も無いパターンである.

Φは処理の対象とする問題のパターンφの集合

であり,$T\varphi\in\Phi$は$\varphi\in\Phi$に対応するパターンモデルであって,原パターン$\varphi\in\Phi$と同じ空間Φに埋め込まれている.モデル$T\varphi$は,$T\varphi\in\Phi$を見たり聞いたりしたならばあたかも原パターン$\varphi\in\Phi$かのように見えたり聞こえたりするようなものである(**同一知覚原理**).この同一知覚原理を達成するために,SS理論［B1］~［B6］では,式(A1.1)の写像モデル構成作用素Tが導入され,対【Φ, T】はA1章のaxiom 1を満たしていなければならないことになる.このとき,写像Tはモデル構成作用素と呼ばれ,$T\varphi\in\Phi$は$\varphi\in\Phi$の代りとなり得るという意味で,パターン$\varphi\in\Phi$のモデルと呼ばれる.

処理の対象とするパターンφの集合Φはある可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の,零元0を含むある部分集合であり,このΦ,並びに式(A1.1)の写像Tの対【Φ, T】は上記の4性質①~④((ⅰ),(ⅱ),(ⅲ)の3後半,並びに(ⅳ))を含む形で,A1章のaxiom 1を満たさなければならない.

パターンと判明しているφの集合(基本領域)$\Phi_B(\ni 0)$と,すべての正実定数の集合R^{++}とを用意する.

次の定理A.1は,axiom 1を満たす対［Φ, T］を決定している.

［定理A.1］**(パターン集合Φとモデル構成作用素Tとの対【Φ, T】の基本構成定理)**

式(A1.1)の写像Tがaxiom 1の(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ)の3後半,並びに,(ⅳ)を満たすとしよう.このとき,次の(イ),(ロ)が成り立つ:

(イ)処理の対象とする問題のパターンの集合Φを,

$$\begin{aligned}\Phi &= R^{++}\cdot(\Phi_B \cup T\cdot\Phi_B)\\ &\equiv \{r^{++}\varphi_B \mid r^{++}\in R^{++},\ \varphi_B\in\Phi_B\}\\ &\cup\ \{r^{++}T\varphi_B \mid r^{++}\in R^{++},\ \varphi_B\in\Phi_B\}\end{aligned} \tag{A2.8}$$

の如く設定すれば,

$$\Phi\supset\{0\}\wedge R^{++}\cdot\Phi=\Phi\wedge[T\cdot\Phi=T\cdot\Phi_B\subset\Phi] \tag{A2.9}$$

が成立し,axiom 1の(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ)の3前半をΦは満たし,、結局,対【Φ, T】はaxiom 1を満たす.

(ロ)逆に、$(0\in)\Phi_B$を部分集合に持つΦがaxiom 1の(ⅰ)、(ⅱ)、(ⅲ)の3前半を満たすとすれば、

$$\Phi\supseteq\Phi_B\cup R^{++}\cdot\Phi\cup T\cdot\Phi \tag{A2.10}$$

と表されるが,ここで,特に,包含式(A2.10)において等号が成立するような最小のΦを採用すれば,axiom 1を満たす対【Φ, T】のΦは式(A2.8)のように表され,式(A2.9)も成立する.

(証明)(イ)は文献［B4］,付録1の定理A1.1である.(ロ)は文献［B3］,pp.64-66(2.4節)で証明されている. □

モデル構成作用素Tを1つ,構成してみよう.

式(A3.2)の代表パターン集合Ωについて式(A3.3)が成立する (A2.11)

としよう。このとき,

$$\left\|\varphi-\sum_{k\in J}c_k\cdot\omega_k\right\|\to\min \tag{A2.12}$$

ならしめる複素係数$c_j(\varphi)\equiv c_j$の組

$$\underline{c}(\varphi)\equiv\{c_j(\varphi)\mid j\in J\} \tag{A2.13}$$

を用意する．それには，連立1次方程式

$$\sum_{k \in J}(\omega_k,\ \omega_j)\cdot c_k(\varphi)=(\varphi,\ \omega_j),\ j \in J \tag{A2.14}$$

を解けば良い．

その後，写像Tを，

$$T\varphi \equiv$$

$$\begin{cases} 0 \cdots\cdots\cdots\cdots \forall k \in J,\ c_k(\varphi)=0 \text{ のとき} & \text{(A2.15)} \\ \sum_{j \in J}\left[c_j(\varphi)/\sum_{k \in J}|c_k(\varphi)|\right]\cdot\omega_j & \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \exists k \in J,\ c_k(\varphi) \neq 0 \text{ のとき} & \text{(A2.16)} \end{cases}$$

と定義する．

そうすれば，次の定理A．2が成り立ち，モデル構成作用素Tが構成されたことがわかる．

［定理A.2］**(代表パターン集合Ωによるパターンモデル定理)**

2式(A2.15)，(A2.16)のごとく、定義される式(A1.1)の写像Tは，axiom 1の(ｉ)，(ii)，(iii)の3後半，並びに，(iv)を満たす．

［定理A.2の系1］**(代表パターン集合 Ω によるモデル構成作用素 T：Φ→Φ の構成定理)**

2式(A2.15)，(A2.16)のごとく，定義される式(A1.1)の写像Tに対し，処理の対象とする問題のパターンの集合Φを式(A2.8)の如く設定すれば，対【Φ, T】がaxiom 1を満たす．

(証明)　定理A.2の証明は定理7.1の証明中にある．また，系1の成立は，本定理A.2に定理A.1の(ロ)を適用すればよい．　□

A3. axiom 2と類似度関数SM

任意のパターン$\varphi \in \Phi$が記憶されている代表的なパターンからなる有限個の集合内の任意の代表パターンとどの程度似ているか，違っているかを計量する手段を設定することが，認識の働きを確保するために必要とされる．計量するこの手段が類似度関数SMである．

“正常なパターン”(well-formed pattern)は，ある1つの**カテゴリ**$\mathfrak{C}_j$(第$j \in J$番目の類概念)のみに帰属しているものとし，このような$\mathfrak{C}_j$の集まり(有限集合)

$$\underline{\mathfrak{C}} \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid j \in J\} \tag{A3.1}$$

を想定する．$\mathfrak{C}_j$の備えている性質を典型的に備えている**代表パターン**(prototypical pattern) ω_j ($\neq 0$)を1つ選定する．$\mathfrak{C}_j$は、典型(prototype)としての代表パターンω_jを中心とした緩やかなカテゴリであることを仮定したことに注意しておく．ここに，

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} \subset \Phi \tag{A3.2}$$

が式(A3.1)の全カテゴリ集合$\underline{\mathfrak{C}}$に対応する代表パターンの集合である．式(A3.2)の系Ωは，

複素定数a_jの組$\{a_j \mid j \in J\}$について

$$\sum_{j \in J} a_j\cdot\omega_j=0 \Rightarrow \forall j \in J,\ a_j=0 \tag{A3.3}$$

が成立しているという意味で，**1次独立**(linearly independent)でなければならない．Ωを視察で決定できる場合もあるが，訓練パターン系列からΩを適応的に決定する方法については，文献［B3］の付録Ⅰで説明されている．

axiom 1を満たす式(A1.1)のモデル構成作用素Tによって，式(A3.2)の代表パターン集合Ωが変換されて得られる系

$$T\cdot\Omega \equiv \{T\omega \mid \omega \in \Omega\}=\{T\omega_j \mid j \in J\} \tag{A3.4}$$

も1次独立であると要請する．このとき，**類似度関数**(similarity-measure function)

$$\mathrm{SM}: \Phi\times\Omega\rightarrow \{s \mid 0\leqq s\leqq 1\} \tag{A3.5}$$

を導入し，

SM(φ, ω_j)＝1, 0に従って，パターン$\varphi\in\Phi$は各々，ω_jと**確定的な類似関係，相違関係**にあり，また，0＜SM(φ, ω_j)＜1の場合は，**曖昧な類似・相違関係**にある　(A3.6)

と，SMを解釈しよう．

関数SMは次のaxiom 2を満たすように構成されねばならない．axiom 2のaxiomの(ｉ)では、クロネッカーのδ記号

$$\delta_{ij}=1 \ \text{ if } \ i=j, \ =0 \ \text{ if } \ i\neq j \tag{A3.7}$$

が導入されているが，特に，axiom 2の(ｉ)なるこの直交性は，カテゴリ候補の分離・抽出が効果的に行われ，

カテゴリ候補の鋭利な削減(a sharp reduction)　(A3.8)

をもたらすために要請されている．

Axiom 2 **(類似度関数SMの満たすべき公理)**

(ｉ)(正規直交性；orthonormality)

$\forall i, \forall j\in J, \mathrm{SM}(\omega_i, \omega_j)=\delta_{ij}.$

(ii)(規格化条件，確率性，正規性；probability condition, normality)

$\forall \varphi\in\Phi, \sum_{j\in J}\mathrm{SM}(\varphi, \omega_j)=1.$

(iii)(写像Tの下での**不変性**；invariance under mapping T)

$\forall \varphi\in\Phi, \forall j\in J, \mathrm{SM}(T\varphi, \omega_j)=\mathrm{SM}(\varphi, \omega_j).$ □

上述のaxiom 2の(ｉ)～(iii)について簡単に説明しておこう．

SMの式(A3.6)でいう解釈の下で，(ｉ)は、相異なるカテゴリの代表パターン同士は確定的な相違関係にあり，同一カテゴリの代表パターン同士は確定的な類似関係にあることを要請している．(ii)は，任意のパターンφについて，すべてのカテゴリについての類似度の総和は1であることを要請している．(iii)は、パターンモデル$T\varphi$は原パターンφと任意のカテゴリについて同一類似度を持つことを要請している．ということは，パターンモデル$T\varphi$を見たり，聞いたりするならば，原パターンφと同じように見えたり，聞こえたりすること(**同一知覚原理**)を要請していることになる．

尚，第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の生起確率である非負実数$p(\mathfrak{C}_j)$を，2条件

$$[\forall j\in J, 0<p(\mathfrak{C}_j)<1]\wedge[\sum_{j\in J}p(\mathfrak{C}_j)=1] \tag{A3.9}$$

を満たすものとして導入しておく．

パターン変換

$$U: \Phi\rightarrow\Phi \tag{A3.10}$$

に関し、等式

$$T(U\varphi)=T\varphi \tag{A3.11}$$

が成立する場合を考えると，式(A3.5)の類似度関数SMが座標変換Uの下で不変であることを指摘する次の定理A.3が成り立つ．

[定理A.3] **(類似度関数SMのU-不変性)**

モデル構成作用素 T の U-不変式(A3.11)が成立するような，パターン$\varphi\in\Phi$と式(A3.10)のパタ

ーン変換Uに関し，式(A3.5)の類似度関数SMのU-不変性

$$\forall j \in J,\ SM(U\varphi, j) = SM(\varphi, j). \tag{A3.12}$$

が成立する．

(証明) $\forall j \in J,\ SM(U\varphi, j)$

$= SM(T(U\varphi), j)$ ∵ axiom 2の(iii)

$= SM(T\varphi, j)$ ∵ 式(A3.11)

$= SM(\varphi, j).$ ∵ axiom 2の(iii) □

A4. axiom 2を満たす類似度関数SMの構成例

これまで，上述のaxiom 2を満たす類似度関数SMは多数構成されており，その有効性についても計算機シミュレーション済である(文献Bを参照).

本章では，axiom 2を満たす式(A3.5)の類似度関数SMを1つ，構成しておこう．

パターンφから抽出される第$k \in L$番目の特徴量$u(\varphi, k)$を実数値とし，適応的に，パーセプトロン(Perceptron)［B2］と呼ばれる2カテゴリ分類器を用いて，類似度関数$SM(\varphi, \omega_j)$を構成してみよう．

特徴量に関する非一致条件

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J - \{j\},$$
$$\exists k \in L,\ u(T\omega_j, k) \neq u(T\omega_i, k) \tag{A4.1}$$

の下で，重み$w(j, k)$，閾値$b(j)$ $(j \in J, k \in L)$を導入し，$g_j(\varphi), g_j^+(\varphi)$を，

$$g_j(\varphi) \equiv \sum_{k \in L} w(j, k) \cdot u(T\varphi, k) - b(j) \tag{A4.2}$$

$$g_j^+(\varphi) \equiv \max\{g_j(\varphi),\ 0\},\ j \in J \tag{A4.3}$$

と導入し，正負条件

$$\forall j \in J,\ g_j(\omega_j) > 0 \wedge$$
$$[\forall i \in J - \{j\},\ g_j(\omega_i) < 0] \tag{A4.4}$$

を満たすように，error-correction learning, orthogonal learning［B2］を用い，重み$w(j, k)$の組と閾値$b(j)$の組を決めておく．

このとき、Hopfield networks, error-backpropagation networks, high-order networks［B2］を使用する形式に，直ちに書き直される次の定理A.4が成り立ち，axiom2を満たす式(A3.5)の1つの類似度関数 SM が構成された.

［定理A.4］**(パーセプトロンの系による類似度関数 SM の構成定理)**

正定数$s_j > 0$ $(j \in J)$を選んで，

$$SM(\varphi, \omega_j) \equiv$$

$$\begin{cases} g_j^+(\varphi) / \sum_{k \in L} g_k^+(\varphi) \\ \quad \cdots \sum_{k \in L} g_k^+(\varphi) > 0 \text{ のとき} & \text{(A4.5)} \\ s_j / \sum_{k \in L} s_k \\ \quad \cdots \sum_{k \in L} g_k^+(\varphi) = 0 \text{ のとき} & \text{(A4.6)} \end{cases}$$

と定義される式(A3.5)の写像SMは，axiom2を満たす. □

簡単には，次の定理A.5の如く，axiom2を満たす類似度関数SMを構成できる.

特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \to Z \text{(複素数体)} \tag{A4.7}$$
を導入する．ここに，

$$u(\varphi, k)(\in Z) : \text{パターン} \varphi \in \Phi \text{から抽出された第} \ k \in L \text{番目の特徴量} \tag{A4.8}$$

である．2つのパターンφ，η間の特徴間距離(distance between features)

$$\begin{aligned} &\mathrm{Fdis}(\varphi, \eta) \\ &\equiv [\sum_{k \in L} w_k \cdot |u(\varphi, k) - u(\varphi, k)|^2]^{1/2} \\ &\quad \text{ここに，} [\forall k \in L, w_k > 0] \wedge \sum_{k \in L} w_k < \infty \end{aligned} \tag{A4.9}$$

を導入する．

［定理A.5］**(特徴間距離による類似度関数 SM の構成定理)**

特徴非一致条件

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \ \mathrm{Fdis}(T\omega_i, T\omega_j) > 0 \tag{A4.10}$$

の下で，

$$\begin{aligned} &\mathrm{SM}(\varphi, \omega_j) \\ &\equiv \mathrm{Fdis}(T\varphi, T\omega_j)^{-2} / \sum_{i \in J} \mathrm{Fdis}(T\varphi, T\omega_i)^{-2} \end{aligned} \tag{A4.11}$$

と定義される式(A3.5)の写像SMは，axiom2を満たす． □

A5. axiom 3と大分類関数BSC

本章では，ある1つのカテゴリに帰属するどうかを決定する2カテゴリ分類器としての大分類関数BSCはaxiom 3を満たすように構成されなければならないことを説明する．

式(A3.5)の類似度関数SMが式(A3.8)でいう“カテゴリ候補の鋭利な削減”を持つためには，axiom 2，(ⅰ)の正規直交性を満たす必要があることがA3章で指摘されたが，SM(φ, ω_j)の代りにSM(φ, ω_j)·BSC(φ, j)を用いれば，パターンφが帰属するかも知れないカテゴリ候補を益々，鋭利に削減できると期待される．

大分類関数(rough classifier, binary-state classifier)と呼ばれる2値関数

$$\mathrm{BSC} : \Phi \times J \to \{0, 1\} \tag{A5.1}$$

を，次のaxiom 3を満たすものとして導入し，解釈

パターン$\varphi \in \Phi$の帰属するカテゴリ候補の1つが第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$であるならば，BSC(φ, j)＝1であることが望ましい (A5.2)

を採用しよう．この際，注意すべきは，

BSC(φ, j)＝0であっても，パターン$\varphi \in \Phi$の帰属するカテゴリ候補の1つは，第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$でないとは限らない (A5.3)

としていることである．また，axiom 3 の(ⅰ)からわかるように，**カテゴリ間の相互排除性**(the mutual exclusion of the one category from the other categories)

$$\forall j \in J, \ \forall i \in J - \{j\}, \ \mathrm{BSC}(\omega_i, j) = 0 \tag{A5.4}$$

を公理として要請していない事実に注意しておこう．

<u>Axiom 3</u> **(大分類関数BSCの満たすべき公理)**

(ⅰ)(**カテゴリ抽出能力**；category separability)

$\forall j \in J, \mathrm{BSC}(\omega_j, j)=1.$

(ii)(写像Tの下での**不変性**；invariance under mappingT)

$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \mathrm{BSC}(T\varphi, j)=\mathrm{BSC}(\varphi, j).$ □

次の定理A.6は，大分類関数BSCの出力BSC(φ,j) がターン変換Uに関し，不変に保たれるには，変換後のパターンUφが変換前のパターンφと同一のパターンモデルTφを持てばよいことを明らかにしている．

［定理A.6］**（大分類関数 BSC のU-不変性）**

モデル構成作用素TのU-不変式(A3.11)が成立するような，パターン$\varphi \in \Phi$と式(A3.10)のパターン変換Uに関し，式(A5.1)の大分類関数BSCのU-不変性

$$\forall j \in J, \mathrm{BSC}(U\varphi, j)=\mathrm{BSC}(\varphi, j). \tag{A5.5}$$

が成り立つ．

（証明） $\forall j \in J, \mathrm{BSC}(U\varphi, j)$

$=\mathrm{BSC}(T(U\varphi), j)$ $\because$ axiom 3の(ii)

$=\mathrm{BSC}(T\varphi), j)$ $\because$ 式(A3.11)

$=\mathrm{BSC}(\varphi, j).$ $\because$ axiom 3の(ii) □

A.6 大分類関数 BSC の構成例

与えられた内積相関値に比例する量に従って，分類操作をする大分類関数BSCを構成しておこう．

パターン$\varphi=\varphi(x)(x \in M)$の表現空間として，可分なHilbert空間$\mathfrak{H}=L_2(M, dm)$を想定しておく．

生起確率p_kを持つサンプルパターン $\varphi_k \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ の集合

$$\{\varphi_k \in \Phi \mid k \in K\}=\bigcup_{j \in J}\{\varphi_k \in \Phi \mid k \in K_j\} \tag{A6.1}$$

を導入する．ここに，次の①，②，③が成立しているものとする：

① $[\forall k \in K, 0<p_k \leqq 1] \wedge \sum_{k \in K} p_k=1.$

② $[K=\bigcup_{j \in J} K_j]$

$\wedge\ [\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}, K_i \cap K_j=\phi]$

$\wedge\ [\forall j \in J, K_j \neq \phi].$

③$\forall k \in K, \|T\varphi_k\|>0.$ □

2つの定数 $C_j, C_j'(j \in J)$ を

$$\forall j \in J, C_j>0 \wedge C_j'>0 \tag{A6.2}$$

を満たす形で導入し，$W_j(x)$，$W_{j0}(j \in J)$を，

$$W_j(x) \equiv C_j \cdot \sum_{k \in K_j} p_k \cdot (T\varphi_k)(x) \tag{A6.3}$$

$$W_{j0} \equiv C_j' \cdot \sum_{k \in K_j} p_k \cdot \|T\varphi_k\| \tag{A6.4}$$

と定義し，

$$\underline{W} \equiv \mathrm{col}(W_1\ W_{10}\ W_2\ W_{20}\ W_m\ W_{m0}), \quad \text{where } J \equiv \{1, 2, \cdots, m\} \tag{A6.5}$$

とおく．

以後、

$\|T\varphi\|=0$ のとき,

$$(T\varphi, T\varphi_k)/[\|T\varphi\|\cdot\|T\varphi_k\|]=0 \tag{A6.6}$$

と約束する．この約束の下で，差(difference) diff(φ ; W_j, W_{j0})を,

$$\mathrm{diff}(\varphi\ ;W_j, W_{j0})\equiv$$
$$\cdot\Big[\sum_{k\in K_j} q_k\cdot(T\varphi, T\varphi_k)/[\|T\varphi\|\cdot\|T\varphi_k\|]$$
$$-C_j'/C_j\Big] \tag{A6.7}$$

$$\text{, where }\ q_k\equiv p_k\cdot\|T\varphi_k\|/\sum_{\ell\in K_j} p_\ell\cdot\|T\varphi_\ell\|. \tag{A6.8}$$

と定義する．

このとき，次の命題A.1が成立する．

[命題A.1]

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall j\in J,$$
$$(T\varphi, W_j)-W_{j0}\cdot\|T\varphi\|$$
$$=\|T\varphi\|\cdot C_j\cdot\sum_{k\in K_j} p_k\cdot\|T\varphi_k\|$$
$$\cdot\ [(T\varphi, T\varphi_k)/[\|T\varphi\|\cdot\|T\varphi_k\|]-C_j'/C_j] \tag{A6.9}$$
$$=\ [\|T\varphi\|\cdot C_j\cdot\sum_{\ell\in K_j} p_\ell\cdot\|T\varphi_\ell\|]$$
$$\cdot\mathrm{diff}(\varphi;W_j, W_{j0}). \tag{A6.10}$$

(証明)　変形していけば,

$$(T\varphi, W_j)-W_{j0}\cdot\|T\varphi\|$$
$$=C_j\cdot\sum_{k\in K_j} p_k\cdot(T\varphi, T\varphi_k)$$
$$-C_j'\cdot\sum_{k\in K_j} p_k\cdot\|T\varphi_k\|\cdot\|T\varphi\|$$
$$=\|T\varphi\|\cdot C_j\cdot\sum_{k\in K_j} p_k\cdot\|T\varphi_k\|\cdot$$
$$[(T\varphi, T\varphi_k)/[\|T\varphi\|\cdot\|T\varphi_k\|]-C_j'/C_j] \tag{A6.11}$$

を得，式(A6.9)の成立がわかった．引き続いて，変形すれば,

$$=[\|T\varphi\|\cdot C_j\cdot\sum_{\ell\in K_j} p_\ell\cdot\|T\varphi_\ell\|]$$
$$\cdot\Big[\sum_{k\in K_j} q_k\cdot(T\varphi, T\varphi_k)/[\|T\varphi\|\cdot\|T\varphi_k\|]$$
$$-C_j'/C_j\Big] \tag{A6.12}$$

を得，式(A6.10)の成立がわかった． □

次の2条件A.1, A.2を満たすように，C_j, C_j' ($j\in J$)を決めておく：

[条件A.1] (各$T\omega_j$についての条件)

$$\forall j\in J,\ \mathrm{diff}(\omega_j\ ;W_j, W_{j0})\geqq 0.$$

[条件A.2] (各$T\omega_i$ ($i\in J-\{j\}$)についての条件)

$$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},\ \mathrm{diff}(\omega_i\ ;W_j, W_{j0})<0.$$ □

このとき，大分類関数BSCが次の定理A.7の如く，構成される．

[定理A.7] **(内積相関値比に基づく大分類関数 BSC の構成定理)**

上述の2条件A.1，A.2を満たすように，C_j, C_j' ($j\in J$)を決めておけば,

$$\mathrm{BSC}(\varphi, j)$$
$$\equiv\mathrm{psn}((T\varphi, W_j)-W_{j0}\cdot\|T\varphi\|) \tag{A6.13}$$

ここに、psn はpositive signの意であり,

$$\mathrm{psn}(u)\equiv 1\ \text{ if }\ u\geqq 0,\ \equiv 0\ \text{ if }\ u<0 \tag{A6.14}$$

と定義された式(A5.1)の関数BSCは，axiom 3を満たし，然も，式(A5.4)のカテゴリ間の相互排除性が成立している.。

(証明)　条件A.1より，命題A.1を適用すると、

$$\forall j \in J,\ (T\omega_j, W_j) - W_{j0}\cdot \| T\omega_j \| \geqq 0 \qquad \text{(A6.15)}$$

を得，axiom 3の(i)の成立がわかる.

次に，axiom 1の(iii)を適用すると，

$$\forall j \in J,\ (TT\omega_j, W_j) - W_{j0}\cdot \| TT\omega_j \|$$
$$= (T\omega_j, W_j) - W_{j0}\cdot \| T\omega_j \| \qquad \text{(A6.16)}$$

を得，axiom 3の(ii)の成立がわかる.

最後に，条件A.2より，命題A.1を適用すると，

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J-\{j\},$$
$$(T\omega_i, W_j) - W_{j0}\cdot \| T\omega_i \| < 0 \qquad \text{(A6.17)}$$

を得，式(A5.4)のカテゴリ間の相互排除性が成立することがわかる.

□

簡単には，次の定理A.8の如く，axiom 3を満たす式(A5.1)の大分類関数 BSCを構成できる.

［定理A.8］**(Gibbs distribution に基づく大分類関数の構成定理)**

非一致条件

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J-\{j\},\ \| T\omega_i - T\omega_j \| > 0 \qquad \text{(A6.18)}$$

の下で，1より大きくない非負量で，Gibbs distributionの形式

$$y_j(\varphi) \equiv \exp[-u_j(\varphi)] \,/\, \sum_{k \in J} \exp[-u_k(\varphi)],$$
$$j \in J \qquad \text{(A6.19)}$$

ここに，正定数$\sigma_j > 0 (j \in J)$を選んで，

$$u_j(\varphi) \equiv \| T\varphi - T\omega_j \|^2/(2\sigma_j^2),\ \sigma_j^2 > 0 \qquad \text{(A6.20)}$$

を定義し，閾値h(j)を，不等式

$$0 \leqq \max_{k \in J-\{j\}} y_k(\omega_j) < h(j)$$
$$\leqq y_j(\omega_j) \leqq 1 \quad \text{for any } j \in J \qquad \text{(A6.21)}$$

を満たすように導入する.

式(A6.19)のyj(φ)，式(A6.21)のh(j)を用い，

$$BSC(\varphi, j)$$
$$= 1 \ \text{ if } \ y_j(\varphi) \geqq h^-(j),\ = 0 \ \text{ otherwise} \qquad \text{(A6.22)}$$

と定義された式(A5.1)の関数BSCは，axiom 3を満たす．然も，式(A5.4)のカテゴリ間の相互排除性も成立している. □

(鈴木昇一，一般化類似度関数を用いた“導出原理による第1階述語推論”，文教大学･情報学部･情報研究･，no,27投稿論文，投稿年月日2002年01月16日)