

日程計画に関する研究 (第2報 能力と負荷を用いた日程計画の立案)

竹 田 仁・北 岡 正 敏

A Study of Scheduling (Part II Planning of Scheduling with Capacity and Load)

Hitoshi Takeda, Masatoshi Kitaoka

本研究は日程計画をできるだけ精度の良い形で立案するための方法を示した。いま能力と負荷がベクトルとして与えられたとき 1) 能力が負荷を上回るときの生産と 2) 能力と負荷が均衡している場合の生産について、i) $t_g = 0$ ii) $0 < t_g < (n-1)(t_d + t_p)$ iii) $t_g = (n-1)(t_d + t_p)$ の3通りの生産形態について、生産開始時点と生産終了時点を求めるための方法を示した。次に能力と負荷が正確にわからず概数値としてわかっているとき、総生産時間を段取時間にともなう固定時間と変動時間、正味生産時間と生産台数それに能力と負荷の概数値から求めた定数より近似的に求めるための方法について検討した。

The purpose of this paper is to explore how to schedule accurately.

In scheduling, it is a very important to determine the length of time until the dead line for completion of production. We tackled the problem from an entirely new viewpoint, by expressing capacity and load as vector. In this paper, we explain how to calculate the beginning and completion points of production when capacity exceeds load or capacity and load are balanced.

1. 序 論

工程管理では日程計画を1)大日程計画, 2)中日程計画 3)小日程計画に分けている[1]。日程計画は生産に先立って立案される。遠藤[2]は日程計画がどの程度、生産に先行されて立案されるかを調べており、それによれば大日程計画で2ヶ月位、中日程計画で1ヶ月位、小日程計画で10日位としている。次にこのような生産に先立って立案される日程計画の精度について Brankamp [3]は、

図1のようなグラフを示している。すなわち大日程計画のような生産に先立って2ヶ月位の期間では計画の精度はきわめて悪くなる。中日程計画の1ヶ月位の期間では、大日程計画の精度より少し良くなり、小日程では大日程計画や中日程計画に比べて精度が良くなることを示している。従って、大日程計画を立案する時はある程度、予測的な要素を含んでいる。このためできるだけ精度の良い計画を立案することが要請される。日程計画を立案する上で精度に影響するもう一つの要因は計

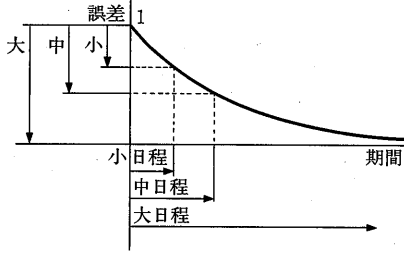


図1 日程計画の精度と期間

画期間の長さによる。倉持 [4] は大日程計画は計画期間が半年から1年にわたり、中日程計画は1ヶ月ないし3ヶ月で、小日程計画は週ないし旬で、長くて1ヶ月と定義している。これは並木・古川 [1] の考えとも大体一致し、遠藤 [2] の考えも倉持の期間に含まれる。計画期間が長いとそれだけ生産活動に関連する諸要因の変動も大きくなるため、計画の精度は悪くなっていく。ところが計画の精度に巾のある日程計画の作成手順について大日程計画や中日程計画を理論的にとらえた報告はきわめて少ない [3], [5]。

本研究の目的は日程計画をできるだけ精度の良い形で立案するための第1段階として、能力と負荷が与えられたとき、中日程計画の立場から生産開始時点と生産終了時点を求める方法と生産時間を予測するための理論的な近似法について検討する。

2. モデルの前提と定式化

2.1 前提条件

本研究では次のような前提条件を設定する。

- 1) 生産形態は複数個の同一製品を生産する受注生産で、かつ流れ作業にのらない大形の製品で、組立作業を中心にした個別生産の製品とする。
- 2) 製品を組立たり加工するときの負荷の状態を工数として表す。作業の開始時点 t_s から終了時点 t_e まで、時間間隔 t_c で m 個に区切りそれぞれの区間での負荷を b_1, b_2, \dots ,

b_m とする [3]。

3) 利用可能な能力は、作業の開始可能な時刻 t_1 から、納期を考慮に入れた作業終了限度の時刻 t_f まで、時間間隔 t_c で区切って工数として与える。これを能力ベクトル \mathbf{C} とし、各要素を能力要素 C_i として(1)式で与える。

$$\mathbf{C} = [C_1^{t_1} \ C_2^{t_2} \ \dots \ C_f^{t_f}] \quad (1)$$

ベクトル \mathbf{C} において t_{m+1} から C_i の要素を0とおいたベクトルを $\mathbf{C}_{1,m}$ とし、以下、 t_1 と t_{m+1} から t_f の要素を0にした $\mathbf{C}_{2,m}$ を定義する。同様に、 t_j から t_{j+m-1} の能力要素を取りあげ、他の要素を0にした $\mathbf{C}_{j,m}$ を定義し、最終的に t_{f-m+1} から t_f までの要素を記入してその他の要素を0とした $\mathbf{C}_{f-m+1,m}$ を(2)式のように定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{1,m} &= [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_m \ 0 \ \dots \ 0] \\ \mathbf{C}_{2,m} &= [0 \ C_2 \ C_3 \ \dots \ C_{m+1} \ 0 \ \dots \ 0] \\ &\vdots \\ \mathbf{C}_{j,m} &= [0 \ 0 \ \dots \ C_j \ C_{j+1} \ \dots \ C_{j+m-1} \ 0 \ \dots \ 0] \\ &\vdots \\ \mathbf{C}_{f-m+1,m} &= [0 \ 0 \ \dots \ C_{f-m+1} \ C_{f-m+2} \ \dots \ C_f] \end{aligned} \quad (2)$$

4) 能力ベクトル \mathbf{C} を作った時間帯と同じように、作業の開始時刻 t_1 から作業終了時刻 t_f まで時間間隔 t_c で区切る。区切られた時間帯に対して t_1 から順番に負荷 b_1, b_2, \dots, b_m の順に m 個割当る。このとき t_{m+1} から t_f までの要素に0を記入したベクトル $\mathbf{B}_{1,m}$ を定義する。 $\mathbf{B}_{1,m}$ に対して b_j の各要素を全体に右に1個移動させ、第1番目の要素を0とし t_{m+2} から t_f まで0を記入した $\mathbf{B}_{2,m}$ を定義する。以下、(3)式に示すような $\mathbf{B}_{i,m}$ を負荷を示す要素 $b_j^{(i)}$ から構成し、全体で $f-m+1$ 個定義する。

$$\mathbf{B}_{1,m} = [b_1^{(1)} \ b_2^{(1)} \ \dots \ b_m^{(1)} \ 0 \ \dots \ 0]$$

$$\mathbf{B}_{2,m} = [0 \ b_1^{(2)} b_2^{(2)} \cdots b_m^{(2)} 0 \ \cdots 0] \quad (3)$$

\vdots \vdots

$$\mathbf{B}_{f-m+1,m} = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ b_1^{(f-m+1)} b_2^{(f-m+1)} \cdots b_m^{(f-m+1)}]$$

2. 2 記号とモデルの前提

モデルの設定にともなう記号を次のように定める。

t_p : 正味生産時間

t_d : 段取時間

t_g : 第 1 番目の製品の生産完了時刻より、
全製品の生産完了時刻までの時間

h_i : 第 $i-1$ 番目の製品の生産完了時刻より
第 i 番目の製品の生産完了時刻までの時間

T : 第 1 番目の製品の生産開始時刻より、
全製品の生産完了時刻までの時間

t_d と T の関係は Weinberg [4] に従って
段取時間 t_d には i) 固定時間 w と ii) 変動時間 v より構成され、変動時間 v は、生産台数 n に従って変動する。このため生産台数が n のとき段取時間は(4)式で与える。

$$t_d = w - \frac{v}{n} \quad (4)$$

h_i , t_p , t_d , t_g それに h_i の関係は、図 2 に示す。ここで G_1 , G_2 , \cdots , G_4 は同一製品の生産状態を直線で示してある。一方、 h_i に関しては(5)式が成立する。

$$h_i = \frac{t_g}{n-1} \quad (5)$$

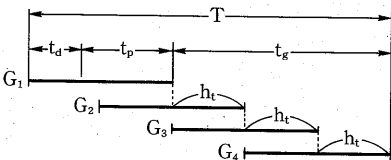


図 2 生産形態と記号の関係

図 2 の各時間を生産台数 n との関係でグラフに示すと図 3 のようになり、 T は(6)式で与えられる。

$$T = t_d + t_p + t_g \quad (6)$$

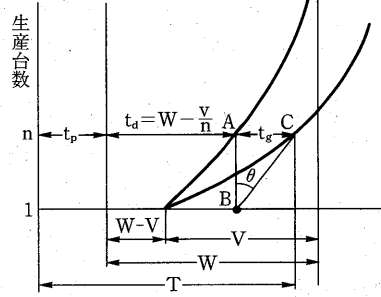


図 3 生産台数と時間の関係

3. 生産形態別に見た生産時間の算出

3. 1 能力が負荷を上回る場合の生産

3. 1. 1 $t_g = 0$ の生産形態

生産台数が n のとき能力 $\mathbf{C}_{j,m}$ と負荷 $\mathbf{B}_{j,m}$ との差をとり、これが(7)式の関係が成立するとき、能力が負荷を上回ったことになる。

$$\mathbf{E}_{j,m} = \mathbf{C}_{j,m} - n \mathbf{B}_{j,m} \geq 0 \quad (7)$$

$$j \in J; J = \{1, 2, \cdots, f-m+1\} \quad (8)$$

生産の開始時点は(7)式の成立する最小の j を(8)式の範囲内から求めればよい。(7)式の成立する最小の j を \tilde{j} とすれば、生産開始時点は $t_{\tilde{j}}$ で生産終了時点は $t_{\tilde{j}+m}$ となる。このときの生産形態は図 4 中の A に示す。

3. 1. 2 $0 < t_g < (n-1)(t_d + t_p)$ の生産形態
(9)式のようなベクトル $\mathbf{B}_{k,m}$ を加えた、合計ベクトル $\mathbf{S}_{i,m}$ を定義し、その要素を $S_i^{(k)}$ とする。但し、 i の範囲は(10)式のとおりである。

$$\mathbf{S}_{i,m} = \mathbf{B}_{1,m} + \mathbf{B}_{1+i,m} + \mathbf{B}_{1+2i,m} + \cdots + \mathbf{B}_{1+(n-1)i,m} \quad (9)$$

$$i \in I; I = \{1, 2, \cdots, m-1\} \quad (10)$$

能力ベクトル $\mathbf{C}_{j,m}$ と合計ベクトル $\mathbf{S}_{i,m}$ との差をとり、これが(11)式の関係が成立するとき、能力が負荷を上回ったことになる。

$$\mathbf{E}_{i,j} = \mathbf{C}_{j,m} - \mathbf{S}_{i,m} \geq 0 \quad (11)$$

$$j \in J; J = \{1, 2, \dots, f\} \quad (12)$$

生産の開始時点は(11)式が成立する最小の i と j を \tilde{i} 及び \tilde{j} とすれば $t_{\tilde{j}}$ であり、生産終了時点は $t_{m+(n-1)\tilde{i}+\tilde{j}-j}$ となる。このときの生産形態は図 2 に示す。

3.1.3 $t_g = (n-1)(t_b + t_p)$ の生産形態

(13)式のようなベクトル $B_{k,m}$ を加えた、合計ベクトル $S_{i,m}$ を定義し、その要素を $S_i^{(k)}$ とする。但し、 i の範囲は(14)式のとおりである。

$$S_{i,m} = B_{i,m} + B_{i+m,m} + \dots + B_{i+(n-1)m,m} \quad (13)$$

$$i \in I; I = \{1, 2, \dots, f-mn\} \quad (14)$$

能力ベクトル $C_{j,m}$ と合計ベクトル $S_{i,m}$ との差をとり、これが(15)式の関係が成立するとき、能力が負荷を上回ったことになる。

$$E_{i,j} = C_{j,m} - S_{i,m} \geq 0 \quad (15)$$

$$j \in J; J = \{1, 2, \dots, f\} \quad (16)$$

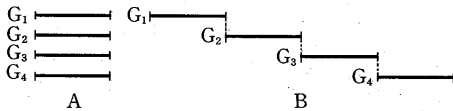


図 4 生産形態

生産の開始時点は(15)式の成立する最小の i と j を \tilde{i} と \tilde{j} とすれば $t_{\tilde{j}}$ で終了時点は $t_{\tilde{i}+(n-1)m+\tilde{j}}$ となる。このときの生産形態は図 4 中の B に示す。

3.2 能力と負荷が均衡している場合の生産

能力と負荷が均衡しているのは $C_{j,m}$ と $S_{i,m}$ の各要素 $b_i^{(k)}$, $s_i^{(k)}$ に対して、(17)式を満足する x が存在しかつ(18)式が成立する場合をいう。

$$\exists (x) (b_x^{(k)} < S_x^{(k)}) \vee (b_x^{(k)} \geq S_x^{(k)}) \quad (17)$$

$$\sum_{p=1}^m b_p^{(k)} \leq \sum_{p=1}^m s_p^{(k)} \quad (18)$$

$$k \in K; K = \{1, 2, \dots, f-m+1\} \quad (19)$$

$$x \in X; X = \{1, 2, \dots, m\} \quad (20)$$

このような条件に対しては能力と負荷の残差 2 乗和を最小にするような計画を立案する。

3.2.1 $t_g = 0$ の生産形態

能力 $C_{j,m}$ と負荷 $B_{j,m}$ との残差 2 乗和を(21)式で定義する。ここで T は転置ベクトルを示す。

$$E_{j,m}^T E_{j,m} = (C_{j,m} - nB_{j,m})^T (C_{j,m} - nB_{j,m}) \quad (21)$$

$$j \in J; J = \{1, 2, \dots, f-m+1\} \quad (22)$$

生産の開始時点は(21)式を最小にするような j を \tilde{j} とすれば、生産開始時点は $t_{\tilde{j}}$ で生産終了時点は $t_{\tilde{j}+m}$ となる。生産形態は図 4 中の A になる。

3.2.2 $0 < t_g < (n-1)(t_b + t_p)$ の生産形態

(9)式のような合計ベクトル $S_{i,m}$ を定義する。但し、 i の範囲は(10)式のとおりである。能力ベクトル $C_{j,m}$ と合計ベクトル $S_{i,m}$ との残差 2 乗和を(23)式で定義する。ここで T は転置ベクトルを示す。

$$E_{ij}^T E_{ij} = (C_{j,m} - S_{i,m})^T (C_{j,m} - S_{i,m}) \quad (23)$$

残差 2 乗和が最小になる $i (i \in I)$ と $j (j \in J)$ を(10)式と(23)式の範囲内で求める。このとき i と j を \tilde{i} と \tilde{j} とすれば、作業開始時点は $t_{\tilde{j}}$ で作業終了時点は $t_{m+(n-1)\tilde{i}+\tilde{j}-1}$ となる。このときの生産形態は図 2 に示す。

3.2.3 $t_g = (n+1)(t_b + t_p)$

(24)式のようなベクトル $B_{k,m}$ を加えた、合計ベクトル $S_{i,m}$ を定義する。但し、 i の範囲は(14)式のとおりである。能力ベクトル $C_{j,m}$ と合計ベクトル $S_{i,m}$ との残差 2 乗和を(24)式で定義する。ここで T は転置ベクトルを示す。

$$E_{ij}^T E_{ij} = (C_{j,m} - S_{i,m})^T (C_{j,m} - S_{i,m}) \quad (24)$$

残差 2 乗和が最小になる $i (i \in I)$ と $j (j \in J)$ を(14)と(16)式の範囲内で求める。このとき i と j を \tilde{i} と \tilde{j} とすれば、作業開始時点は $t_{\tilde{j}}$ で作業終了時点は $t_{m+(n-1)\tilde{i}+\tilde{j}}$ となる。このときの生産形態は図 4 中の A に示す。

4. 日程計画作成の手順

4. 1 日程計画立案での評価基準

日程計画は能力と負荷の関係から、次のような評価基準のもとで立案する。

- I) 能力が負荷を上回る生産形態を優先し、
 1) $t_g = 0$ 2) $0 < t_g < (n-1)(t_d + t_p)$ 3) $t_g = (n-1)(t_b + t_p)$ の生産形態の中から生産終了時点の早いものから日程計画に採用する。
 II) I) の条件が成立しないときは、能力と負荷が均衡している生産形態を採用する。
 1) $t_g = 0$ 2) $0 < t_g < (n-1)(t_d + t_p)$ に対して残差 2 乗和の最も小さいものを日程計画に採用する。もし残差 2 乗和が同じ時は生産終了時点の早いものを日程計画に採用する。

4. 2 日程計画作成の手順

日程計画の作成は次のような手順に従う。

手順 1 : $C_{j,m} - nB_{j,m} \geq 0$ の条件が成立する最小の j が存在すれば、生産開始時点 t_j と生産終了時点 t_{j+m} を求め手順 2 へ。条件が成立しないときも手順 2 へ。

手順 2 : (9) 式の $S_{i,m}$ と $C_{j,m}$ に対して、 $C_{j,m} - S_{i,m} \geq 0$ の条件が成立する最小の i と j が存在すれば、生産開始時点 t_j と生産終了時点 $t_{m+(n-1)\tilde{i}+\tilde{j}-1}$ を求め手順 3 へ。条件が成立しないときも手順 3 へ。

手順 3 : (13) 式の $S_{i,m}$ と $C_{j,m}$ に対して $C_{j,m} - S_{i,m} \geq 0$ の条件が成立する最小の i と j が存在すれば、生産開始時点 t_j と生産終了時点 $t_{j+(n-1)m+\tilde{j}}$ を求め手順 4 へ。条件が成立しないときも手順 4 へ。

手順 4 : 手順 1, 手順 2, 手順 3 の中のいずれか又はすべてが成立するときは生産終了時点の早い方を日程計画として採用し計算を終了する。もし、すべての条件が成立しないときは手順 5 へ。

手順 5 : $(C_{j,m} - nB_{j,m})^T (C_{j,m} - nB_{j,m})$ が最小になる j を求め生産開始時点 t_j と生産終了時点 t_{j+m} を計算して手順 6 へ。

手順 6 : (9) 式の $S_{i,m}$ と $C_{j,m}$ に対して

$(C_{j,m} - S_{i,m})^T (C_{j,m} - S_{i,m})$ が最小になる i と j を求め、生産開始時点 t_j と生産終了時点 $t_{m+(n-1)\tilde{i}+\tilde{j}-1}$ を計算し手順 7 へ

手順 7 : (13) 式の $S_{i,m}$ と $C_{j,m}$ に対して

$(C_{j,m} - S_{i,m})^T (C_{j,m} - S_{i,m})$ が最小になる i と j を求め、生産開始時点 t_j と生産終了時点 $t_{m+(n-1)\tilde{i}+\tilde{j}}$ を計算し手順 8 へ

手順 8 : 手順 5, 手順 6, 手順 7 の中で残差 2 乗和の最小になる生産開始時点と生産終了時点が求める日程計画となり計算を終了する。

5. 生産時間の近似式による算出

能力と負荷の状態が正確に把握できないとき、総生産時間 T を求めるのに、段取時間にとまう固定時間 w と変動時間 v , 正味生産時間 t_p と生産台数 n それに能力と負荷との概数値から近似的に算出する方法を考える。いま t_g が極めて小さいとき、すなわち図 3 の A と C の間隔が極めて小さいときを考える。 t_g が小さいため Δt_g とおく。図 3 で $\angle ABC = \theta$ とおけば(25)式が成立する。

$$\tan \theta = \frac{\Delta t_g}{n-1} \quad (25)$$

一方、 h_t も極めて小さくなる。 h_t は生産台数 n に関連する関数と考え、 $\Delta h_t(n)$ と表す。従って(26)式が成立する。

$$\Delta h_t(n) = \frac{\Delta t_g}{n-1} \quad (26)$$

(25)式と(26)式より $\tan \theta = \Delta h_t(n)$ 。従って(4)式と(26)式の Δt_g を(6)式に代入して(27)式が求まる。

$$T = t_p + (w - \frac{v}{n}) + (n-1) \Delta h_t(n) \quad (27)$$

いま Δt_g が T の微小な時間 ΔT とみなせば(28)式が成立する。

$$\tan \theta = \frac{\Delta T}{\Delta n} = \frac{\partial T}{\partial n} \quad (28)$$

一方、(27)式を偏微分すれば(29)式になる。

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{v}{n^2} + \frac{\partial h_t(n)}{\partial n} (n-1) + \Delta h_t(n) \quad (29)$$

(29)式を0とおき $\partial h_t(n)/\partial n$ を求め。次に $\Delta h_t(n)$ は(30)式になる。

$$\Delta h_t(n) = \int \frac{-v}{n^2(n-1)} dn \quad (30)$$

よって $\Delta h_t(n)$ は積分定数 C とおけば(31)式になる。

$$\Delta h_t(n) = V \left(\log_e \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + C \quad (31)$$

(26)式より $\Delta t_g = (n-1) \Delta h_t(n)$ となり、これに(31)式を代入すれば(32)式になる。

$$\Delta t_g = v \left\{ (n-1) \log_e \frac{1}{n-1} - 1 + \frac{1}{n} \right\} + c(n-1) \quad (32)$$

$$T = t_p + w - \frac{v}{n} + v \left\{ (n-1) \log_e \frac{1}{n-1} - 1 + \frac{1}{n} \right\} + c(n-1) \quad (33)$$

従って総生産時間 T は(33)式になる。積分定数 C は能力 C と負荷 B_i の概数値より求まるもので、近似的に $C = \lambda t_p$ とする。但し、 λ は能力と負荷より決める定数とする。 t_g が小さいときは(33)式で近似できるが、 t_g が大きいときの総生産時間 T_x は(34)式の範囲に入る。

$$t_p + w - \frac{v}{n} + v \left\{ (n-1) \log_e \frac{1}{n-1} - 1 + \frac{1}{n} \right\} + c(n-1) < T_x < nw - v + nt_p \quad (34)$$

このため t_g が大きいときは(33)式で定数 C を大きめに推定することで近似値を求める。

6. 数値例

負荷が表1で能力が表2で与えられ、生産台数 $n=3$ で $t_p=800$, $v=120$, $w=150$ のときの日程計画を立案する。表1より $m=5$, $f=15$ となる。手順1, 手順2, 手順3が成立しないため。手順5, 手順6, 手順7に

従って残差2乗和を生産形態別に計算すると表3になる。表3より生産形態は能力と負荷が均衡している場合で $0 < t_g < (n-1)(t_d + t_p)$ の形になる。生産開始時点は t_1 で $h_t=3$ となり生産終了時点は t_{11} になる。以上から T を逆算すると、 $T=1638$ になる。いま C の値を変えて近似計算をすると表4が求まり、これから $C=0.44$ が T の値に近い。

表1 負荷の条件

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
2	3	1	2	1

表2 能力の条件

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
2	3	2	4	4	3	4	4
C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	
2	2	2	1	1	1	2	

表3 計算結果

m	5	7	9	11	13	15
h_t	0	1	2	3	4	5
t_1	58	33	15	7	22	26
t_2	63	29	11	26	27	
t_3	52	16	8	30	19	
t_4	34	20	15	19		
t_5	46	22	20	33		
t_6	52	27	27			
t_7	47	45	38			
t_8	74	58				
t_9	95	64				
t_{10}	98					
t_{11}	110					

表4 C と T の値

C	T	C	T
0.43	1616	0.45	1648
0.44	1632	0.46	1664

7. 結 論

本研究では日程計画の作成に関する研究を行い、次の結論を得た。

(1)能力と負荷があらかじめわかっている場合、能力が負荷を上回る生産形態と能力と負荷が均衡している生産形態の2つに分けて生産開始時点と生産終了時点を求める手順を明らかにした。

(2)能力や負荷が正確にわからないとき，総生産時間 T を段取時間にともなう固定時間 w と変動時間 v ，正味生産時間 t_p と生産台数 n それに能力と負荷との概数値から求めた定数 C より近似的に求める方法を明らかにした。

参考文献

- (1) 並木高矣，古川光：「工程管理」，森北出版，pp. 8—15，(1962)
- (2) 遠藤健児：「工程管理」，丸善，pp. 8—26 (1977)
- (3) Brankamp, K. : Einterminplanungssystem für Unternehmen der Einzel-und Serienfertigung, Physica-Verlag, Wurzburg-Wien, pp. 18-20, (1973)
- (4) 倉持茂：「工程管理の知識」，日本経済新聞社，pp. 49—93，(1982)
- (5) Weinberg, F. : Termin-Grobplanung, Verlag Lee-man Zürich, pp. 43-52 (1953)
- (6) 人見勝人：「生産管理工学」，コロナ社，(1978)