

球状食品の熱伝導

長 尾 慶 子

1. はじめに

我々人類の生活がまず第一に食生活に依存していることはいうまでもない。そして食品を安全且つ美味な可食状態にするために古来加熱操作がいろいろと工夫されてきた。焼く、蒸す、煮る、炒める、揚げる等の種々の加熱操作はそれぞれ特有の利点を持ち、それらに応じて場合場合により使い分けられている。

これらの加熱操作を研究していくためには、伝熱学的考慮が必要になるが、特に熱伝導に関する考察が必要である。すなわち、ある特定の形状の食品をある状態で加熱する場合の熱の伝わり方を調べる必要が生じる。

この場合、形状をいろいろに設定でき、加熱条件も種々設定できるが、その中で最も基本的な場合として、球状食品をまわりからある一定の熱伝達率で加熱する場合が考えられる。

いわゆる球状物体の熱伝導、特に冷却の場合については、いくつかの文献等がみられる。しかし、加熱される場合については文献が乏しく、そのままでは使えない場合が多い。

Heisler線図¹⁾やGurney線図²⁾においても利用したい領域は線図の端部にあり、精度よい値を求めるには甚だ不十分であることを、先報³⁾の伝熱パラメーターの算出の際に痛感した。

そこで、本稿では、ある一定温度の媒体中に置かれた球状食品がある一定の熱伝達率で加熱される場合の理論解を求め、それに数値を代入して線図に表し、実用に供したいと考えた。なお解を導くに当たっては、文献(4)

を参考にした。

2. 理論的解析

周囲温度 T_0 の媒体中に初期温度 0 の球状食品が置かれ、熱伝達率 α で加熱される場合を考える (Fig. 1)。球 (半径 R) の中心に原点 O をとり、このまわりに極座標系をとる。

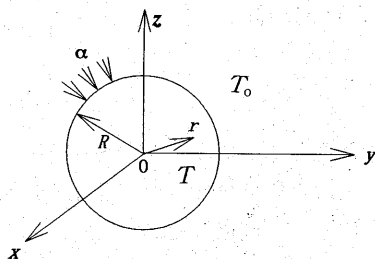


Fig. 1 Conduction of heat in a sphere at initial temperature 0 put into a medium at constant temperature T_0 with heat transfer coefficient α at the surface

球の内部の任意点 r (球対称) での任意時刻 t における温度を T とする。球の熱伝導率 λ_s 、熱拡散率 (温度伝導率) を a とする。このとき r のみに関与する 1 次元極座標系の熱伝導の方程式⁵⁾は

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (1)$$

となる。また、境界条件は $r = R$ において

$$\lambda_s \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha (T_0 - T) \quad (2)$$

初期条件は $t = 0$ において

$$T = 0 \quad (3)$$

である。ここで

$$u = T \cdot r$$

とおいて変数変換すれば,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \quad (0 \leq r < R) \quad (4)$$

$$r = 0 \text{ にて } u = 0 \quad (5)$$

$$r = R \text{ にて } \frac{\partial u}{\partial r} = hu_0 - (h - \frac{1}{R})u \quad (6)$$

$$t = 0 \text{ にて } u = 0 \quad (0 \leq r < R) \quad (7)$$

を得る。ただし,

$$h = a/\lambda_s \quad (8)$$

とおいた。これらの式を変数分離法を用いて解くことにする。

$$u = F(r)G(t) \quad (9)$$

とおけば,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u} = F(r)\dot{G}(t) \quad (10 \cdot a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = F'(r)G(t) \quad (10 \cdot b)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = F''(r)G(t) \quad (10 \cdot c)$$

である。ここで t による微分を \cdot (ドット) で表し, r による微分を $'$ (プライム) で表す。

" は r による 2 回微分である。

これらを (4) 式に代入すれば

$$F(r)\dot{G}(t) = aF''(r)G(t)$$

または

$$\frac{\dot{G}(t)}{G(t)} = a \frac{F''(r)}{F(r)} \quad (11)$$

を得る。ここで, この式の左辺は t のみの関数であり, 右辺は r のみの関数である。これらの関数が等しいためには, これらの式は定数に等しくなければならない。そして, その値がプラスならば $G(t)$ は発散するので, マイナスまたは 0 である。そこで, この値を $-b$ と置く。すなわち,

$$\frac{\dot{G}(t)}{G(t)} = a \frac{F''(r)}{F(r)} = -b \quad (12)$$

となる。この式を解くために, まず $b \neq 0$ とすれば, 左辺を積分して

$$G(t) = \text{Const} \times e^{-bt} \quad (13)$$

を得る。また中辺 = 右辺から

$$F(r) = A \cos(\sqrt{\frac{b}{a}}r) + B \sin(\sqrt{\frac{b}{a}}r) \quad (14)$$

を得る。ここで A, B は任意の定数である。

また $b = 0$ ならば $F''(r) = 0$ だから,

$$F(r) = C + Dr \quad (15)$$

を得る。ここでの b はまったく任意であるので, b の代わりに $b_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ などの無数の定数を用いてもよい。さらに, それらの解の和も解である。したがって, いま解の形を

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-bt} \{ A_n \cos(\sqrt{\frac{b_n}{a}}r) + B_n \sin(\sqrt{\frac{b_n}{a}}r) \} + C + Dr \quad (16)$$

と仮定し, この解が境界条件 (5), (6) および初期条件 (7) を満たすように定数 b_n, A_n, B_n, C, D などを決めることを考える。

(5), (6), (7) 式より,

$$\sum_n e^{-bt} \cdot A_n + C = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sum_n e^{-bt} [A_n \{ -\sqrt{\frac{b_n}{a}} \sin(\sqrt{\frac{b_n}{a}}R) + (h - \frac{1}{R}) \cos(\sqrt{\frac{b_n}{a}}R) \} + B_n \{ \sqrt{\frac{b_n}{a}} \cos(\sqrt{\frac{b_n}{a}}R) + (h - \frac{1}{R}) \sin(\sqrt{\frac{b_n}{a}}R) \}] \\ = hu_0 - D - (h - \frac{1}{R})(C + Dr) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\sum_n e^{-bt} \{ A_n \cos(\sqrt{\frac{b_n}{a}}r) + B_n \sin(\sqrt{\frac{b_n}{a}}r) + C + Dr \} = 0 \quad (19)$$

を得る。これらを満足するように定数をきめると,

$$A_n = 0, \quad C = 0, \quad D = u_0/R = T_0 \quad (20)$$

$$\sqrt{\frac{b_n}{a}}R = \gamma_n \quad (21)$$

とおき,

$$\gamma_n \cot \gamma_n + (hR - 1) = 0 \quad (22)$$

を満たすような γ_n を求めると, (17), (18) 式は満たされる。さらに, (19) 式を書き直すと,

$$\sum_n B_n \sin(\gamma_n r/R) + T_0 r = 0 \quad (23)$$

を得る。これを満たすように B_n をきめればよい。

(22) 式を考慮すれば、

$$\int_0^R \sin(\gamma_n \frac{r}{R}) \sin(\gamma_m \frac{r}{R}) dr = 0 \quad (m \neq n) \quad (24)$$

$$\int_0^R \sin^2(\gamma_n \frac{r}{R}) dr = \frac{R}{2} (1 + \frac{hR-1}{\gamma_n^2} \sin^2 \gamma_n) \quad (25)$$

なので、(23) 式に $\sin(\gamma_n \frac{r}{R})$ をかけて、区間 $[0, R]$ で積分することにより、(23) 式の \sum_n の項は第 n 項のみが残る。

$$B_n \frac{R}{2} (1 + \frac{hR-1}{\gamma_n^2} \sin^2 \gamma_n) + T_0 \frac{hR^3}{\gamma_n^2} \sin \gamma_n = 0$$

$$\therefore B_n = \frac{-2T_0 hR^2 \sin \gamma_n}{\gamma_n^2 + (hR-1) \sin^2 \gamma_n} \quad (26)$$

これらを (16) 式に代入すれば、

$$u = T_0 r - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma_n^2 \tau} \frac{T_0 2hR^2 \sin \gamma_n}{\gamma_n^2 + (hR-1) \sin^2 \gamma_n} \times \sin(\gamma_n \frac{r}{R}) \quad (27)$$

を得る。ただし、

$$\tau = at/R^2 \quad (28)$$

とおいた。さらに、

$$hR = aR/\lambda_s = Bi \quad (29)$$

とおくと、

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{aR}{\lambda_s} \frac{2R}{r} \sum_n e^{-\gamma_n^2 \tau} \times \frac{\sin \gamma_n \sin(\gamma_n \frac{r}{R})}{\gamma_n^2 + (aR/\lambda_s - 1) \sin^2 \gamma_n} \quad (30)$$

と表すことができる。ここに τ はフーリエ数、 Bi はビオ数である。中心温度 T_c はここで $r \rightarrow 0$ とすれば得られる。

$$\frac{T_c}{T_0} = 1 - 2Bi \sum_n e^{-\gamma_n^2 \tau} \frac{\gamma_n \sin \gamma_n}{\gamma_n^2 + (Bi-1) \sin^2 \gamma_n} \quad (31)$$

γ_n は

$$\gamma_n \cot \gamma_n + Bi - 1 = 0 \quad (32)$$

を満たすすべての $\gamma_n (>0)$ をとる。

3. 数値計算例

数値計算を行うにあたって、 γ_n を求めるのが重要である。 γ_n は式 (32) の解で与えられる。これを書き直すと、

$$\gamma_n = (1 - Bi) \tan \gamma_n \quad (33)$$

となる。この解は Fig. 2 に示すように、無数にある。つまり、

$$y = x$$

$$y = (1 - Bi) \tan x$$

のグラフの交点で与えられる。

解としてはプラスとマイナスの値があるが、ここではプラスの値のみとればよい。

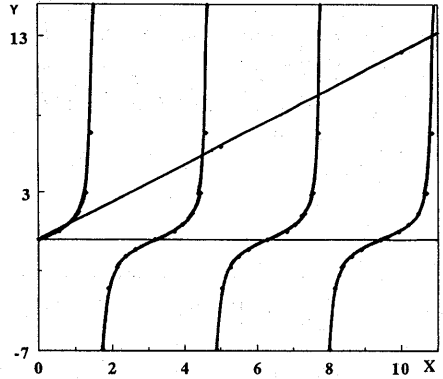


Fig.2 Graph of $Y = \tan X$ and $Y = X/(1-Bi)$ in case of $0 < Bi < 1$

(i) $1 - Bi > 0$ ($0 < Bi < 1$) の場合は、

$$\gamma_n = (n - \frac{1}{2})\pi - \delta_n \quad (34)$$

と表せば、これを式 (33) に代入すると、

$$(n - \frac{1}{2})\pi - \delta_n = (1 - Bi) \cos \delta_n \cong (1 - Bi) / \delta_n$$

$$\therefore \delta_n \cong \frac{1}{2} \{ (n - \frac{1}{2})\pi - \sqrt{(n - \frac{1}{2})^2 \pi^2 - 4(1 - Bi)} \} \quad (35)$$

($\delta_n \ll \frac{\pi}{2}$ なので、小さい解をとる。)

$n \gg 1$ の場合は

$$\delta_n \cong \frac{1 - Bi}{(n - 1/2)\pi} \quad (36)$$

(ii) $1-Bi < 0$ ($Bi > 1$)の場合はFig. 3 のようになるので,

$$\gamma_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi + \delta_n \quad (37)$$

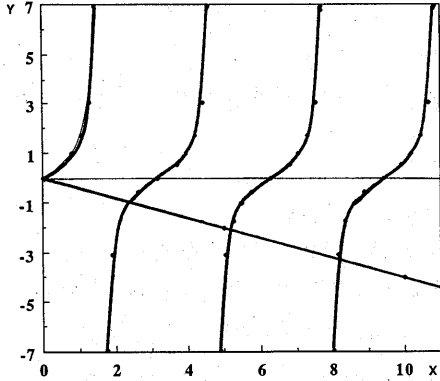


Fig. 3 Graph of $Y=\tan X$ and $Y=X/(1-Bi)$ in case of $Bi > 1$

とおくことができる。これを式(32)に代入し

て,

$$\begin{aligned} \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi + \delta_n &= (1-Bi)(-\cos \delta_n) \\ &\cong (Bi-1)/\delta_n \end{aligned} \quad (38)$$

を得る。これを解くと,

$$\begin{aligned} \delta_n &= \frac{1}{2} \left\{ -\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 + 4(Bi-1)} \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

を得る。 $n \gg 1$ のときは

$$\delta_n = \frac{Bi-1}{(n-1/2)\pi} \quad (40)$$

となる。このようにして Bi , $m(=1/Bi)$ を与えて γ_n を求め、式(30)、式(31)などを計算することができる。

Fig. 4 ~ Fig. 11 に中心温度 T_c の時間 t に対する変化を示す。 $(T_c/T_0$ のフーリエ数 $\tau(at/R^2)$ に対する変化として当てられている。)

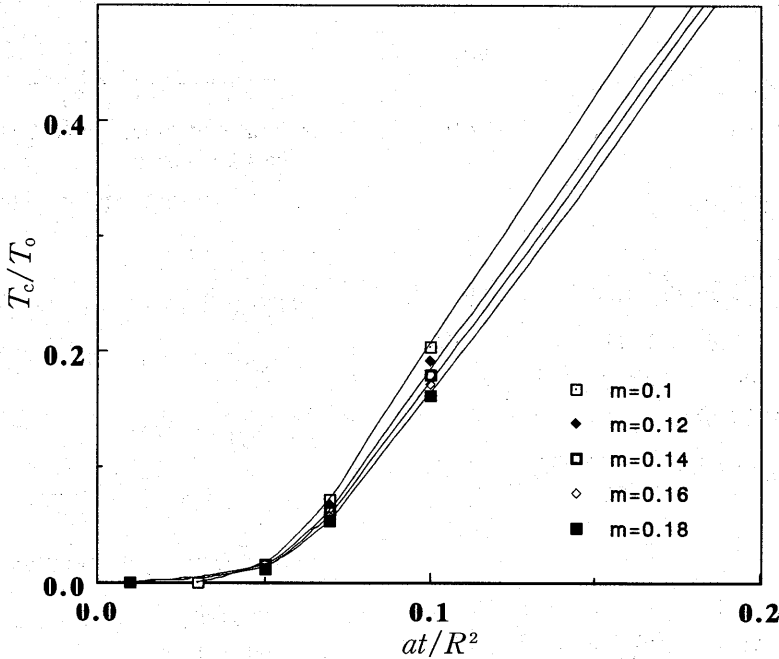


Fig. 4 An example of the theoretical curve of the temperature at the center of a sphere

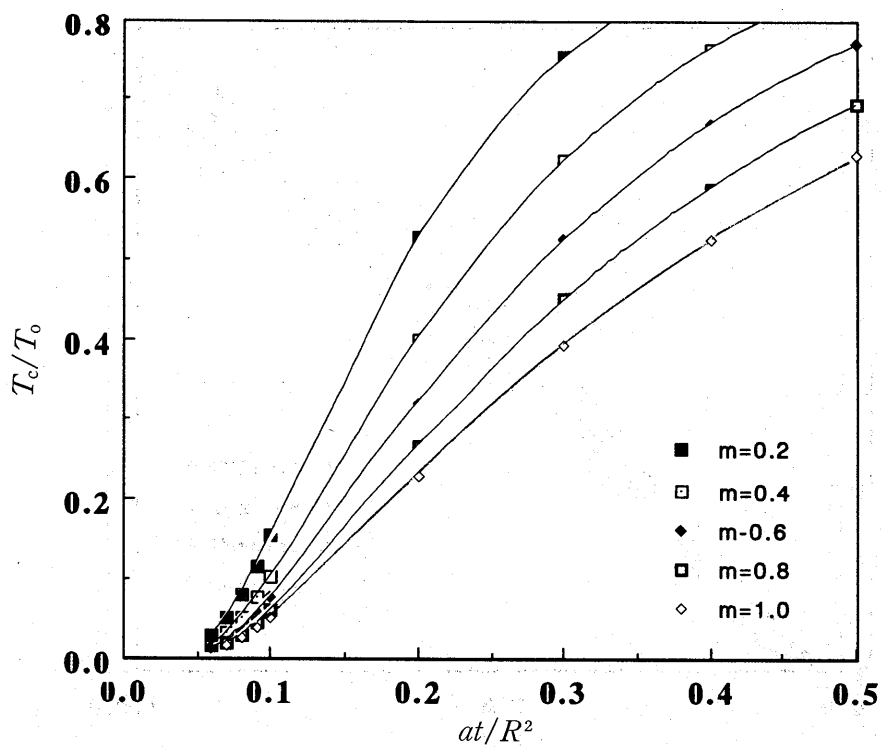


Fig. 5 An example of the theoretical curve of the temperature at the center of a sphere

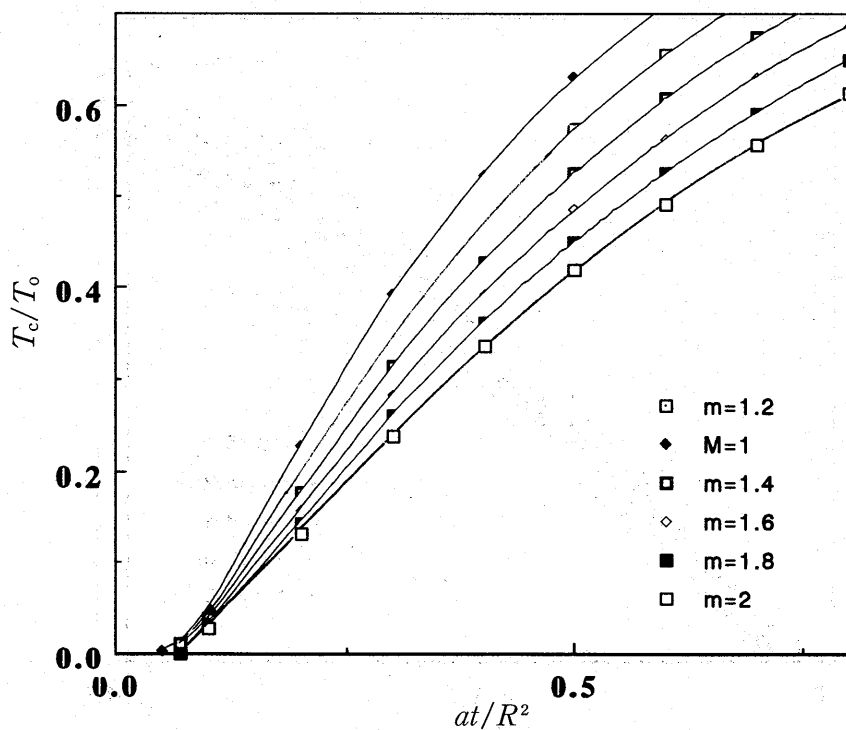


Fig. 6 An example of the theoretical curve of the temperature at the center of a sphere

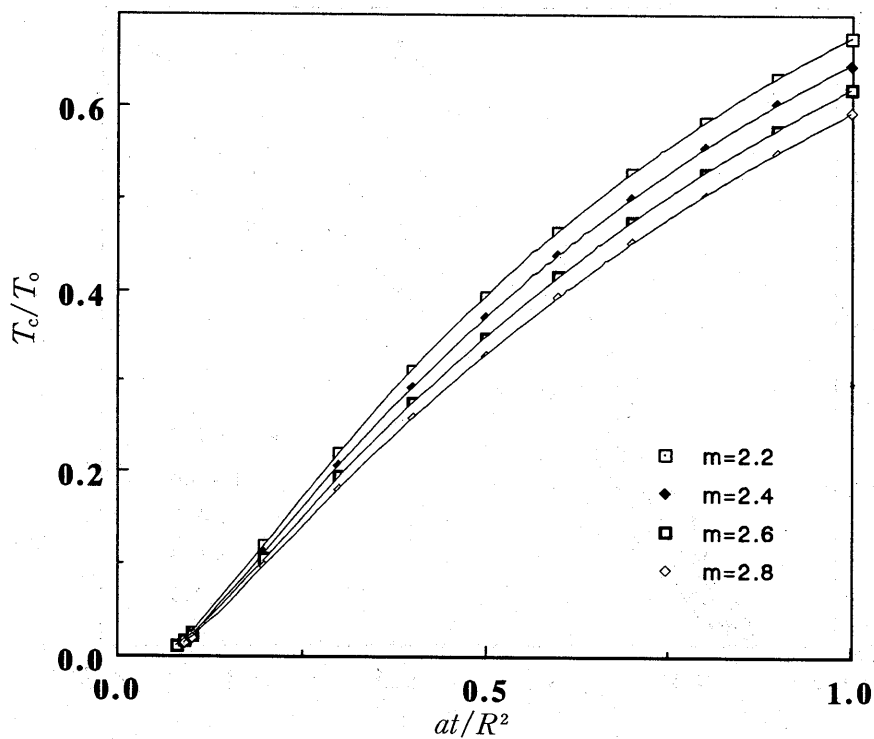


Fig. 7 An example of the theoretical curve of the temperature at the center of a sphere

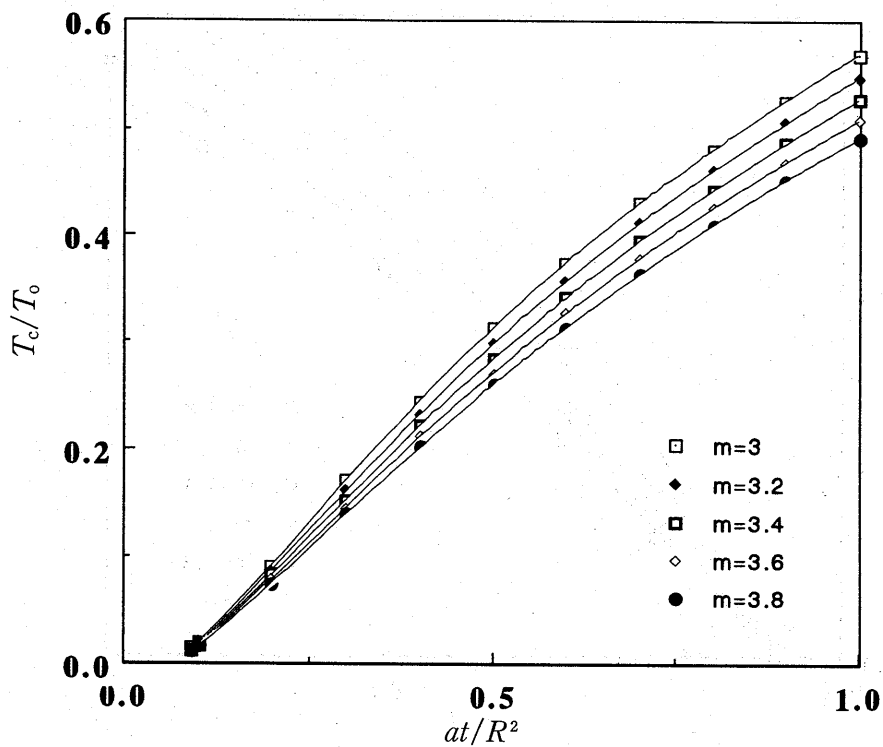


Fig. 8 An example of the theoretical curvature of the temperature at the center of a sphere

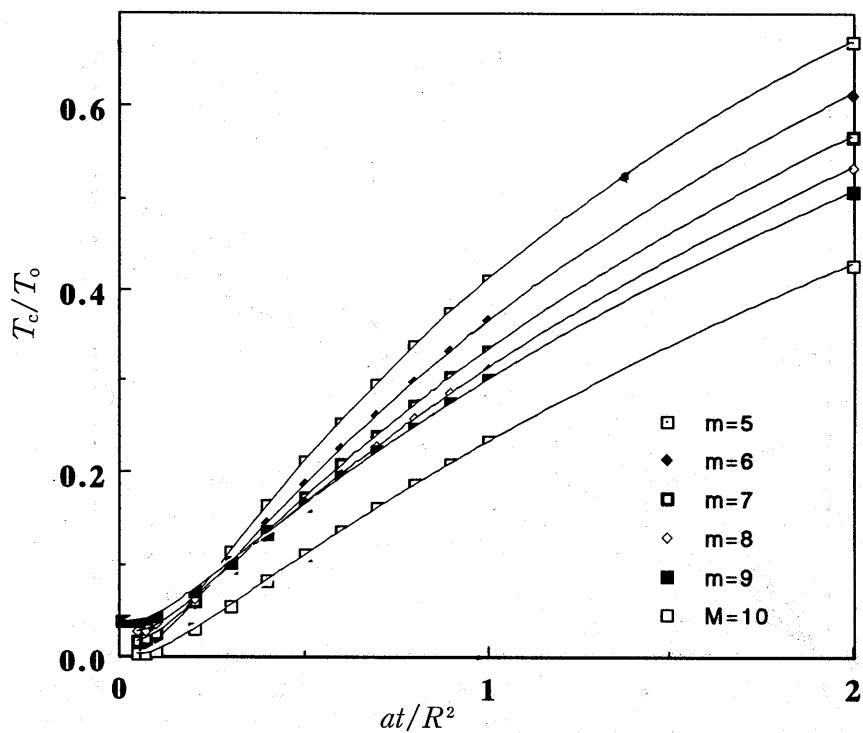


Fig. 9 An example of the theoretical curvature of the temperature at the center of a sphere

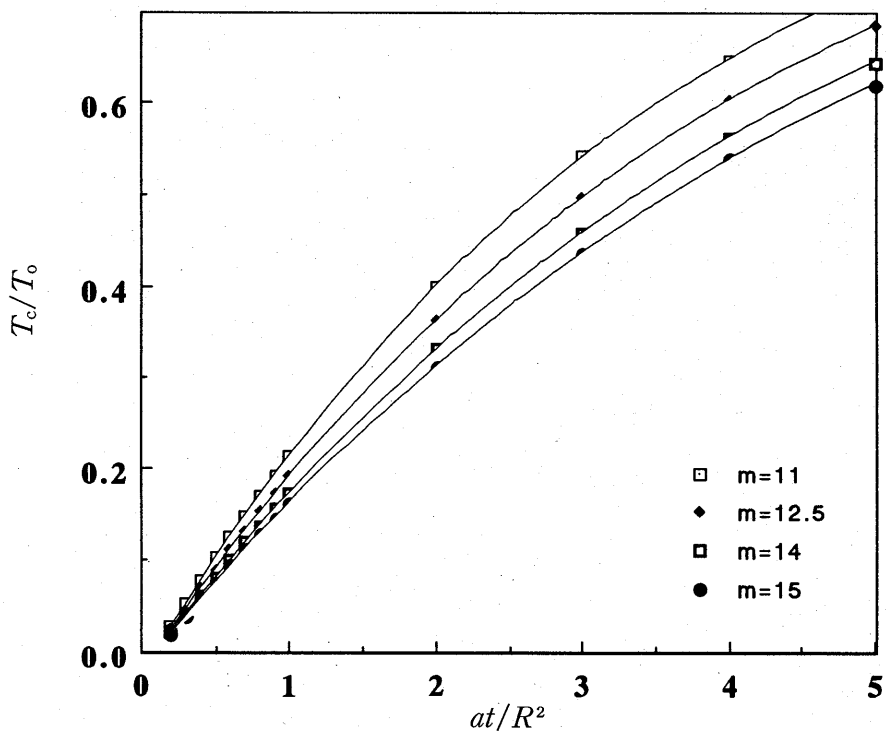


Fig. 10 An example of the theoretical curve of the temperature at the center of a sphere

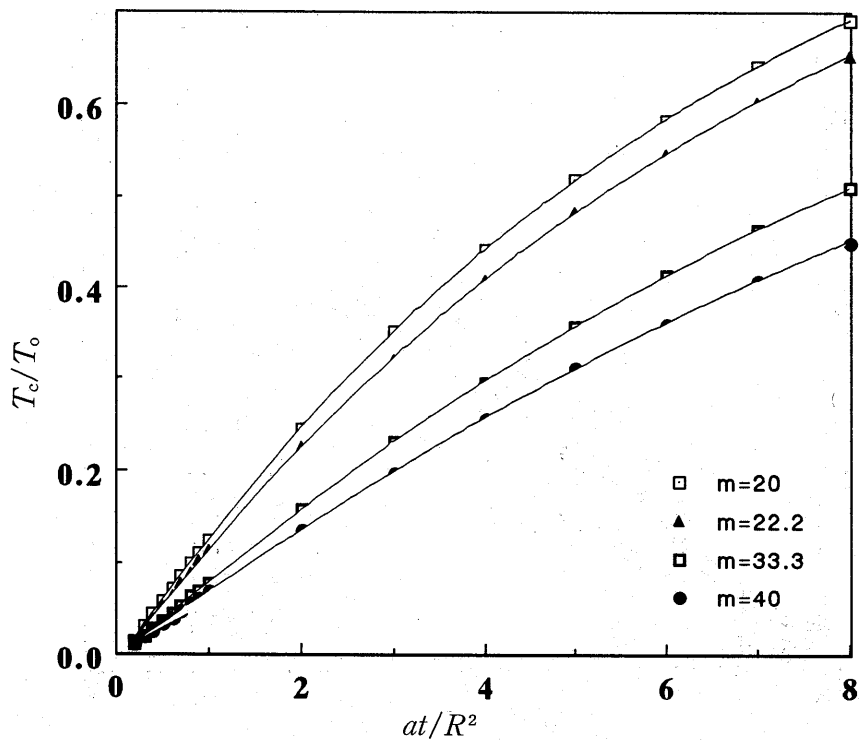


Fig. 11 An example of the theoretical curve of the temperature at the center of a sphere

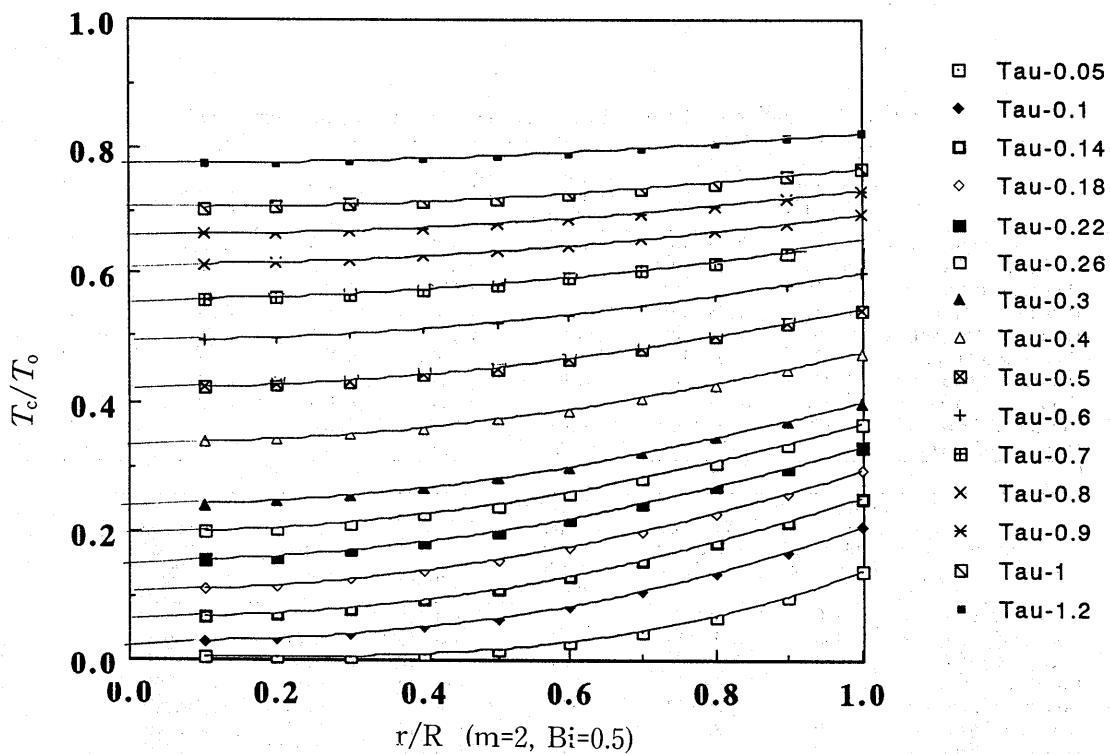


Fig. 12 An example of theoretical thermal distribution

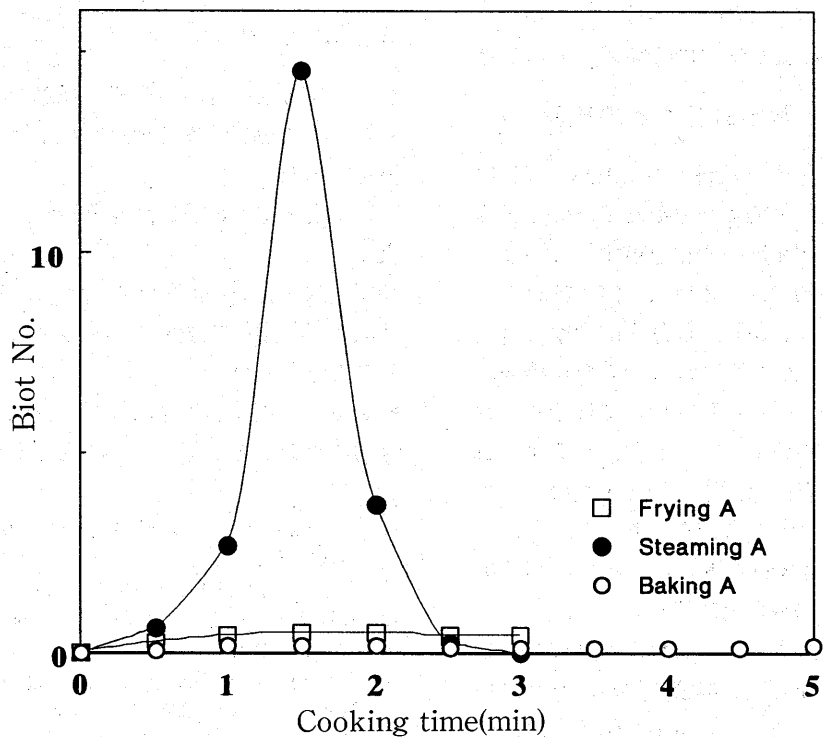


Fig. 13 Changes of Biot No. along with time

Table 1 Calculation of thermal diffusivity and shape factor for each sample

Sample	Thermal conductivity λ_s (W/mK)	Radius of sphere R_0 (m)	Heat transfer coefficient α (W/m ² K)	Biot No. $Bi = \alpha R_0 / \lambda_s$	$m = 1/Bi$	T_c/T_0	$\tau_0 = at_0/R_0^2$
Croquette	0.723	3.16×10^{-2}	55.35	2.420	0.413	0.3125	0.16
Doughnut A(fry)	0.261	1.24×10^{-2}	11.6	0.551	1.815	0.430	0.50
Doughnut B(fry)	0.276	1.47×10^{-2}	12.3	0.655	1.527	0.214	0.23
Doughnut C(fry)	0.243	1.55×10^{-2}	10.6	0.676	1.479	0.214	0.23
Doughnut A(steam)	0.261	1.00×10^{-2}	113.0	4.330	0.231	0.430	0.18
Doughnut B(steam)	0.276	1.00×10^{-2}	201.0	7.280	0.137	0.430	0.15
Doughnut C(steam)	0.243	1.00×10^{-2}	36.9	1.520	0.658	0.430	0.28
Doughnut A(oven)	0.261	1.00×10^{-2}	4.26	0.163	6.130	0.430	1.25
Doughnut B(oven)	0.276	1.00×10^{-2}	6.68	0.242	4.130	0.430	0.90
Doughnut C(oven)	0.243	1.00×10^{-2}	9.92	0.408	2.450	0.430	0.60

Sample	Cooking time to make spherical food edible t_0 (s)	Thermal diffusivity a (m ² /s)	Cooking time to make product food edible t (s)	Radius of product R (m)	$at/R^2 = K_1 \tau_0$	Shape factor K_1
Croquette	240	1.66×10^{-7}	240	3.160×10^{-2}		
Doughnut A(fry)	130	5.91×10^{-7}	90	0.986×10^{-2}	0.547	1.095
Doughnut B(fry)	60	7.89×10^{-7}	50	1.040×10^{-2}	0.365	1.665
Doughnut C(fry)	70	7.89×10^{-7}	45	1.015×10^{-2}	0.345	1.496
Doughnut A(steam)	120	1.50×10^{-7}	115	1.150×10^{-2}	0.130	0.722
Doughnut B(steam)	110	1.36×10^{-7}	135	1.074×10^{-2}	0.159	1.060
Doughnut C(steam)	130	2.15×10^{-7}	113	1.095×10^{-2}	0.203	0.725
Doughnut A(oven)	200	6.25×10^{-7}	195	1.169×10^{-2}	0.892	0.714
Doughnut B(oven)	200	4.50×10^{-7}	220	1.174×10^{-2}	0.718	0.798
Doughnut C(oven)	210	2.86×10^{-7}	185	1.061×10^{-2}	0.470	0.783

Fig. 12に $m = 2$ の場合における中心からの距離 r に対する温度分布の時間変化を示した。

4. 実験例と数値計算例との比較

Fig. 13にドーナツ試料の揚げ加熱，蒸し加熱および天火加熱の場合のそれぞれの熱伝達率より求めたビオ数の変化を示す。このように，実際の加熱ではビオ数は一定ではなくかなり変化する。しかし，伝熱学的考察においては，適当な一定のビオ数を用いて理論的に求めた数値解を用いることが必要になる場合がある。その場合には，平均的ビオ数によって議論を進めることが余儀なくされる。

Table 1は実験から得られた結果に理論解をあてはめて得られた数値例を示す。このように実際の加熱条件下での食品の調理を伝熱的に研究する場合に，本稿で得られた理論解を有効に使い，加熱法の特徴を伝熱学的に明らかにすることができる。

5. ま と め

(1) 一定温度の媒体中に置かれた球状食品がある一定の熱伝達率で加熱される場合の理論解を求めた。

(2) 上記理論解の数値計算を行い，グラフに表示した。

(3) 実験例と数値計算例を対比し，実際の加熱法の伝熱学的特徴を研究する上に有効であることを示した。

終わりに，理論解の導出に際し長尾高明氏の協力を得たことを報告し，謝意を表する。

文献

- (1) 日本機械学会：伝熱工学資料，p39-40(1991)，日本機械学会
- (2) 谷下市松：伝熱工学，p69-70，(1992)，裳華房，
- (3) 長尾慶子：文教大学女子短期大学部研究紀要，37，61-70(1993)
- (4) Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C. Conduction of Heat in Solids, p230, (1959) Oxford press
- (5) 日本機械学会：伝熱工学資料，p2, (1991)，日本機械学会