能力の異なる複数serverの待ち行列システムの解析
（第4報、有限入力源待ち行列システムの平均系内滞留人数について）

竹　田　　　仁

The Analysis of Heterogeneous Server Queues
(Part Ⅳ The Expected Number in the Finite Input Source Queue)

Hitoshi Takeda

和文要旨

有限入力源待ち行列において、ポアソン到着、指数分布サービス、能力の異なる複数serverの待ち行列システムについて、定常状態におけるシステム内の状態確率を求めるアルゴリズムを示す。また、これをもとにして、serverを加えた場合とserverを加えない場合の平均系内滞留人数について検討し、平均系内滞留人数を減少させるために加えるserverの最小能力について検討する。

英文要旨

This paper deals with the heterogeneous server finite input source queuing system with exponential interarrival time and exponential service time, and we develop the computing algorithm to find stationary probability is shown. Using the above result, in the case of one or two servers probability is calculated. In these cases, the problem of searching for the ability ratio of servers to decrease the expected number in the system is studied.

§1　序論

ポアソン到着、指数分布サービス、能力の異なる複数serverの待ち行列システムについて、別のserverを加えて、システムの効率を良くすることがある。加えるserverの能力が0でない限り平均待ち時間は減少するが、加えたserverの能力によっては平均系内滞留時間、平均系内滞留人数は減少するとはいえない。このような、能力の異なる複数serverの待ち行列システムを扱ったものとして参考文献[1]、[2]、[3]などがある。これらは、ポアソン到着、指数分布サービス、server数が複数の待ち行列システムを扱い、無限待ち行列モデル、有限待ち行列モデル、有限入力源待ち行列モデルについて定常状態における状態確率を計算するアルゴリズムを示し、serverの能力和を一定としたとき平均系内人数を最小にするserverの能力分割の問題を考察している。本稿では能力の異なる有限入力源待ち行列モデルを扱い、単一serverにおいてserverを加えた場合と加えない場合の平均系内滞留人数について検討し、平均系内滞留人数を減少させるために加えるserverの最小能力について検討する。

§2　モデル・記号

本研究で比較する待ち行列モデルは、M／M／1／mとM／M(μ_1, μ_2)／2／mである。以上のモデルを次の仮定のもとで解析する。

(1) 定常状態。

(2) M／M (μ_1, μ_2)／2／mにおいて、複数のserverが空いている場合に到着した客は、より能力の高い第一serverのサービスを受ける。

各モデルで、系内滞留人数がｎ人である状態確率をP_nで表す。M／M (μ_1, μ_2)／2／mの場合、系内人数が1人で第ｉserverがサービス中である状態確率を$P_{1(i)}$で表す。また、各モデルでの平均系内滞留人数をＬで表す。

以下の解析で使用する主な記号を列記する。

λ：客の到着率

μ：M／M／1／mにおけるserverの平均サービス率

μ_i：M／M (μ_1, μ_2)／2／mにおける第ｉserverの平均サービス率

ρ_1：$\rho_1=\lambda/\mu_1$　(M／M (μ_1, μ_2)／2／mの場合)

　$\rho_1=\lambda/\mu$　(M／M／1／mの場合)

ρ_2：$\rho_2=\lambda/\mu_2$　(M／M (μ_1, μ_2)／2／mの場合)

θ_1：$\theta_1=1/\rho_1$

θ_2：$\theta_2=1/\rho_2$

Θ：$\Theta=\theta_1+\theta_2$　(M／M (μ_1, μ_2)／2／mの場合)

§3　解析

定常状態におけるシステム内の状態確率を求めるアルゴリズムを示す。また、これをもとにして平均系内滞留人数を減少させるために加えるserverの最小能力について検討する。

3−1　M／M／1／m

入力総数mでポアソン到着、指数分布サービス、複数の能力の等しいserver数ｃの待ち行列システムM／M／ｃ／mについて、その平均系内滞留人数Ｌは、参考文献［1］、［2］より下の(3.1.1)式で与えている。

$$p_0\left[\sum_{n=0}^{c-1} n\binom{m}{n} r^n+\sum_{n=c}^{m} n\frac{n!}{c^{n-c}c!}r^n\right] \tag{3.1.1}$$

ここで　$p_0=\left[\sum_{n=0}^{c-1} n\binom{m}{n} r^n+\sum_{n=c}^{m} n\frac{n!}{c^{n-c}c!}r^n\right]^{-1}$

3−2　M／M (μ_1, μ_2)／2／m　($\mu_1\geqq\mu_2$) のＬの解析

到着した客は、先着順に空いたserverのサービスを受ける。第1、第2serverが共に空いているとき到着した客は、平均サービス率がより大きい第1serverのサービスを受け、どちらか一方のみが空いているとき到着した客は、空いているserverのサービスを受けるものとする。

状態遷移を考慮して平衡方程式を導くことにより、次式を得る。

$$\theta_1 P_{1(1)} + \theta_2 P_{1(2)} = mP_0 \quad (3.2.1)$$

$$-((m-1)+\theta_1)\ P_{1(1)} + \theta_2 P_2 = -mP_0 \quad (3.2.2)$$

$$-((m-1)+\theta_2)\ P_{1(2)} + \theta_1 P_2 = 0 \quad (3.2.3)$$

$$(m-k+1)\ P_{k-1} - ((m-k)+\Theta)\ P_k + \Theta P_{k+1} = 0 \quad (2 \leqq k \leqq m-1) \quad (3.2.4)$$

確率の和が１になることより（3.2.5）が成り立つ。

$$\sum_{i=0}^{m} P_i = 0 \quad (3.2.5)$$

平均系内滞留人数Lは（3.2.5）で表せる。

$$L = \sum_{i=1}^{m} i\,P_i \quad (3.2.6)$$

（3.2.1）～(3.2.5）より次の（3.2.7）～(3.2.10）を得る。

$$p_0 = \frac{1}{1+fG} \quad (3.2.7)$$

$$p_{1(1)} = \frac{P_0 m\ (m-1)}{\theta_1\ (2\ (y-1)+\Theta)} \quad (3.2.8)$$

$$p_{1(2)} = \frac{P_0 m\ ((m-1)+\Theta)}{\theta_2\ (2\ (m-1)+\Theta)} \quad (3.2.9)$$

$$P_{k+1} = P_k (m-k) / \Theta \qquad (1 \leqq k \leqq m-1) \quad (3.2.10)$$

(3.2.6）～(3.2.10）より平均系内滞留人数Lは（3.2.11）のように表せる。

$$L = \frac{f}{(1+fG)} H \quad (3.2.11)$$

ここで　$f = \dfrac{m\ ((m-1)+\theta_1)\ \Theta}{\theta_1 \theta_2\ (2\,(m-1)+\Theta)}$

$$G = 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(m-1)\ \cdots\ (m-k)}{\Theta^k}$$

$$H = 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(k+1)\,(m-1)\ \cdots\ (m-k)}{\Theta^k}$$

(3.2.11）より固定したρ_1値に対し、平均系内滞留人数を減少させるために加えるserverの最小能力について求めた値が表１であり、この値を図に示したものが図１である。つまり、図１はm、ρ_1が与えられた時、平均系内滞留人数を減少させるために加えるserverの最小能力を示した曲線で、この曲線よりも下側にある能力のserverを加えれば平均系内滞留人数は増加しシステムの改

善にはならない。serverを加えて平均系内滞留人数を減少させるためにはこの曲線よりも上側にある能力のserverを加える必要がある。

表1　システムに有効な効果を与えるサービス率の比（μ_2/μ_1）の最小値

ρ_1	m＝2	m＝3	m＝4	m＝5	m＝10
0.05	0.491635	0.468265	0.444869	0.421438	0.303646
0.10	0.483255	0.439335	0.395713	0.352422	0.149245
0.15	0.474918	0.412747	0.351827	0.292468	0.059929
0.20	0.466667	0.388166	0.312583	0.240899	0.022437
0.25	0.458530	0.365348	0.277478	0.197098	0.008563
0.30	0.450530	0.344106	0.246121	0.160462	0.003429
0.35	0.442681	0.324296	0.218191	0.130296	0.001452
0.40	0.434994	0.305804	0.193404	0.105794	0.000651
0.45	0.427477	0.288529	0.171488	0.086086	0.000308
0.50	0.420133	0.272388	0.152178	0.070322	0.000153
0.55	0.412964	0.257305	0.135212	0.057736	0.000080
0.60	0.405971	0.243210	0.120337	0.047676	0.000043
0.65	0.399153	0.230039	0.107310	0.039610	0.000024
0.70	0.392508	0.217731	0.095906	0.033112	0.000014
0.75	0.386034	0.206299	0.085920	0.027851	0.000008
0.80	0.379727	0.195480	0.077168	0.023565	0.000005
0.85	0.373585	0.185432	0.069486	0.020054	0.000003
0.90	0.367604	0.176038	0.062731	0.017159	0.000002
0.95	0.361779	0.167252	0.056780	0.014759	0.000001

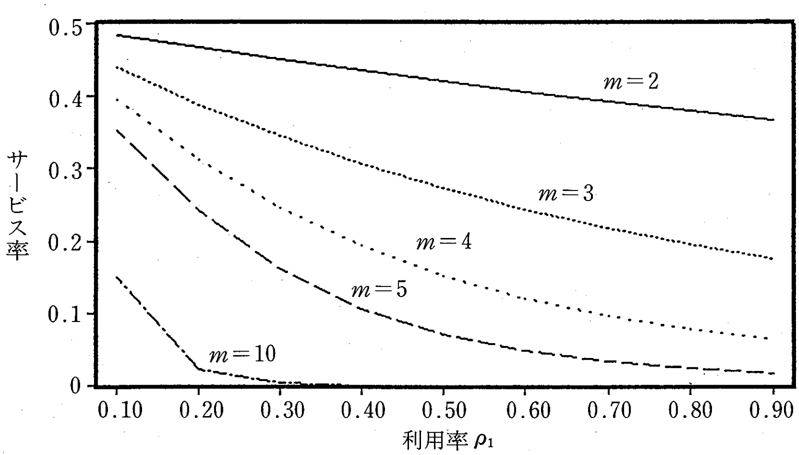

図1　利用率ρ_1とシステムに有効な効果を与えるサービス率の比（μ_2/μ_1）の最小値

§4　結語

複数の能力の異なるserverを持つ有限入力源待ち行列システムについて、定常確率を求めるアルゴリズムを示した。またこれを利用して、単一のserverの有限入力源待ち行列システムにおいて、ρ_1（利用率）の値を変化させた場合、serverを加えた場合と加えない場合の平均系内滞留人数について検討し、平均系内滞留人数を減少させるために加えるserverの最小能力について検討し

た。その結果、利用率が高くなるにつれて、また、サービスを受ける母集団（m）が多くなるにつれて加えるserverの能力が低くてよいことが解析できた。

本論文では、server数１に別のserverを加えたserver数２の場合を扱ったが、server数が３以上の場合も同様な方法で解析することが可能である。この解析により、別のserverを加えて平均系内滞留人数を減少させようというシステムにおいて、加えるserverの最小能力がexplicitに求められ、今までの経験的、試行錯誤的方法が減少するように思う。

参考文献

［１］岩瀬雅治、竹田仁：能力の異なる複数serverを持つ待ち行列システムの解析
日本機械学会中国四国支部第29期総会・講演会（1991、３月）

［２］竹田仁、岩瀬雅治：能力の異なる複数serverを持つ有限待ち行列システムの解析
日本機械学会中国四国支部第30期総会・講演会（1992、３月）

［３］竹田仁：能力の異なる複数serverを持つ待ち行列システムの解析（第３報、有限入力源待ち行列における平均系内人数の最小化について）
文教大学情報学部紀要13号（1992、12月）

［４］加藤ライジ：マネジメントのための待ち合わせ・ソフトウェア工学（1976）、工学図書

［５］森村英典、大前義次：応用待ち行列理論（1975）、日科技連