

文字式を用いて説明することの理解に関する一考察

永田 潤一郎*

A Study on Understanding of Explanation in Algebraic Expressions Using Letters

Junichiro NAGATA

要旨 中学校数学科の「数と式」領域における第2学年の指導内容「文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明できることを理解すること」の実現状況を、子どもが数の性質などを文字式を用いて演繹的に説明することと、具体的な数で計算するなどして帰納的に説明することの違いを理解することができているかどうかという視点から考察した。その結果、文字式を用いて演繹的に説明することができても、具体的な数で計算するなどして帰納的に説明することも一般性を保証する別な説明の方法であると認識している子どもが少なからず存在していることが明らかになった。こうした現状を受けて、文字式を用いて説明することの必要性和意味の理解の指導を一層充実する必要があることを指摘した。

キーワード：証明の必要性和意味 数と式 学習指導要領 中学校数学科

1. はじめに

中学校数学科の現行学習指導要領では、第2学年の「数と式」領域において、「文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明できることを理解すること」が指導内容として位置付けられている。これは、指導の過程において言語活動を充実させ、思考力・判断力・表現力等を育成しようとする教育課程の趣旨に基づくものである。これを受けて、各学校においては、文字式を用いてある命題が成り立つことを説明する場面を設け、文字式で表現したり、計算したり、その結果の意味を読み取ったりすることの指導が行われている。こうした状況は、学習指導要領の趣旨の実現に向けて、今後も継続していく必要があるが、一方で指導内容が「説明できることを理解すること」で

ある点にも注意する必要がある。すなわち、説明している子ども自身は、具体的な数で計算するなどして数量の関係を帰納的に説明することと、文字式を用いて演繹的に説明することの違いを理解することができているかどうかという視点を大切にされた指導が求められているのである。

ここでは、文字式を用いて説明することについて、子どもの帰納的な推論に基づく説明と演繹的な推論に基づく説明の理解の実態に注目し、実践と調査を基に考察する。

2. 指導の現状

(1) 文字式を用いて説明すること

文字式を用いて説明することに関わる先行研究には、「説明することができるようにする」ことを目的としたものが多い。國宗らは中学生を対象に、「『奇数と奇数の和は偶数である。』そのわけ

*ながた じゅんいちろう 文教大学教育学部学校教育課程
数学専修

をいいなさい」という調査問題を実施して結果を分析し、無解答である場合を除くと、次の3つのタイプに分類できることを明らかにしている。

- ①文字式を使わずに具体的な数値を上げ、それから帰納する。
- ②文字式を使うが、不適切な使い方をする。
- ③文字式を使って正しく説明できる。

その上で、①や②の子どもを③の水準に引き上げるための指導の在り方について提案している(國宗他, 1997)。ここで注目したいのは、仮に③の水準に到達している子どもでも、①が一般性を保証するという観点から不適切な説明であると理解できているのかということである。

(2) 図形の性質を証明すること

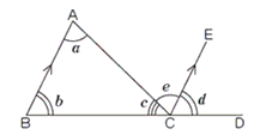
このことを疑わせるデータがある。文部科学省が平成19年度から実施している全国学力・学習状況調査からは、子どもの算数・数学の学習状況に関する膨大なデータがすでに蓄積されている。

こうしたデータの中から、継続してみられる課題を明らかにし、指導の改善に活かすための方策を検討することは喫緊の課題である(永田, 2013, 2014)。こうした視点から、国立教育政策研究所がまとめた資料は大変有益である(国立教育政策研究所, 2012)。この資料では、第1回調査から4年間の結果に基づき、今後指導による対応が必要な内容がまとめられている。この中で中学校数学科について指摘されている内容として、「証明の必要性と意味を理解すること」がある。図形の性質について証明することは、中学校数学科における重要な指導内容である。しかし、ここで指摘されている課題は、証明すること自体ではなく、その前提として、例えば帰納的な推論に基づく説明と演繹的な推論に基づく証明の違いを理解できていない子どもが相当数いるというものである。図1は、平成21年度の調査で出題された「数学A」⑧の問題である。この問題の正答はウであり、正答率は29.7%であった。これに対し、誤答のうち

⑧ ある学級で、「三角形の内角の和は180°である」ことの証明について、次の①、②を比べて考えています。

①

下の図の△ABCで、
辺BCを延長した直線上の点をDとし、点Cを通り辺BAに平行な直線CEをひく。



平行線の錯角は等しいから、 $\angle a = \angle e$
平行線の同位角は等しいから、 $\angle b = \angle d$
したがって、
 $\angle a + \angle b + \angle c = \angle e + \angle d + \angle c = 180^\circ$
よって、三角形の内角の和は180°である。

どんな三角形でも内角の和は180°であることの証明について、下のアからオまでの中から正しいものを1つ選びなさい。

ア ①も②も証明できている。

イ ①は証明できており、②は形の違うたくさんの三角形で同じように確かめれば証明したことになる。

ウ ①は証明できているが、②は形の違うたくさんの三角形で同じように確かめても証明したことはない。

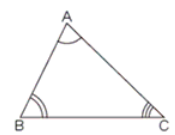
エ ①も②も形の違うたくさんの三角形で同じように確かめれば証明したことになる。

オ ①は形の違うたくさんの三角形で同じように確かめれば証明したことになるが、②はそれでも証明したことはない。

②

下の図の△ABCで、
3つの角の大きさをそれぞれ測ると、

$\angle A = 72^\circ$
 $\angle B = 64^\circ$
 $\angle C = 44^\circ$



したがって、
 $\angle A + \angle B + \angle C = 72^\circ + 64^\circ + 44^\circ = 180^\circ$
よって、三角形の内角の和は180°である。

図1 平成21年度全国学力・学習状況調査「数学A」の問題

イを選択した子どもの割合は32.6%であり正答を上回った。また、アを選択した子どもの割合は22.9%であった。演繹的な推論に基づく証明の意義を認めながらも、実測など帰納的な推論に基づく説明との違いを理解できていない子どもが相当数存在していることが分かる。平成21年度の調査では、「数学B」④(1)で、図形の性質を証明する問題も別に出題されている。この問題の正答率は41.8%であったが、この問題に正答できた子どものうち63.1%は、「数学A」⑧の問題に正しく解答することができなかった。証明を正しく書くことはできても、証明の必要性や意味を理解していない子どもがいることが分かる。

3. 指導の意義

2で明らかにしたように、図形の証明の必要性や意味の理解に関する子どもの学習の実態に鑑みると、文字式を用いて説明することについても、説明すること自体の指導以外に、その必要性や意味の理解の指導に課題があることが予想される。子どもが文字式を用いて数量の関係などを説明できたとしても、具体的な数を用いて帰納的に説明してもよいと理解していたとすれば、文字式を用いて説明することは「教師にやらされているからしていること」に過ぎない。図形の証明と同様、文字式を用いて説明することについても、その必要性や意味の理解の指導を重視する必要がある。

また、教育課程上、図形の証明と文字式を用いた説明は、いずれも中学校第2学年の指導内容であるが、図形の証明よりも前に文字式を用いて説明することを指導する場合が一般的である点にも注意する必要がある。帰納的な方法に基づいて見いだした事柄の一般性を保証するために説明することの指導が最初に行われる文字式の指導場面で、その必要性や意味の理解を深めておくことは、その後の図形の証明の指導の前提としても重要である。

4. 子どもの学習の実態とその考察

文字式を用いて説明することの理解の実態を把握するために、中学校第2学年の文字式の指導場面で、以下のような授業を計画して実践し、その結果を分析した。

(1) 授業の計画

授業1

- ①文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明することを目標にして、1時間の授業を実施する。
- ②一斉指導で、具体的な数を用いて計算し帰納的に考えることで「2けたの正の整数とその数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数の和は、11の倍数になる」ことを予想する。
- ③予想したことから、図2の問題1を提示し、これがどんな2けたの正の整数についても成り立つことを説明するために文字式を用いることを確認し、各自でノートに説明を書かせる。

2けたの正の整数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数との和は、11の倍数になります。そのわけを説明しなさい。

図2 問題1

- ④机間指導をして個別に記述の状況を把握し、子どもを指名して口頭で説明させながら、教師がそれを板書する。
- ⑤板書した説明を基に学級全体で検討し、修正すべき点等を改め、各自でノートに書いた説明の改善を図る。
- ⑥問題1で説明することができた数の性質「2けたの正の整数とその数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数の和は、11の倍数になる」を振り返り、「和」を「差」に変えたらどのような数になりそうか考え、「9の倍数に

なる」ことを予想する。

- ⑦図3の問題2が示されたワークシートを配布して各自で取り組みせ、全員が書き終えたのを確認したらそのまま回収する。

2けたの正の整数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数との差は、9の倍数になります。そのわけを説明しなさい。

図3 問題2

授業2

- ⑧文字式に関する指導が一通り終了した段階における子どもの学習の状況を調べるために、図4の問題3が示されたワークシートを配布して各自で取り組みさせてそのまま回収する。この問題では、「2けたの正の整数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数との差は、9の倍数になる」ことについて、文字式を用いた演繹的な推論に基づく説明(①)と、3つの具体的な数を用いた帰納的な推論に基づく説明(②)を提示し、説明としての適切さについて選択式の問題で問うとともに、選択した理由を自由記述の形式で問うている。なお、問題3の①は、授業1で取り上げた問題2と同一であり、既習の内容である。

授業3

- ⑨文字式に関する指導が一通り終了し、一定の期間が経過した段階における子どもの学習の状況を調べるために、図5の問題4が示されたワークシートを配布して各自で取り組みさせてそのまま回収する。出題の形式は、授業2における問題3と同じであるが、問題4の①は、授業1で取り上げた問題1と同一であり、既習の内容である。

(2) 授業の実践

(1)の授業計画に基づいて、千葉市内の公立中学校に勤務する教師(教職経験10年)に依頼し、授業を担当している第2学年の5学級(生徒数の合計180人)で2015年5月から7月に実践を行った。実践を始める前に授業を担当する教師と打合せを行い、指導する子どもの実態と、これまでの指導との継続性を踏まえて次の①から③について共通理解を図った。

- ①授業1では、授業を担当する教師から「教科書に沿った指導をしたい」との要望があったので、教科書に掲載されている問題をそのまま問題1と問題2とした。
- ②文字式を用いた説明に関する実態を調査することが目的であるが、特段その点を強調して指導する必要なく、従来通りの指導をするよう依頼した。
- ③授業2と授業3では、新しい内容の指導場面はなく、調査が主眼であるため、授業2については単元末の演習の時間の中、授業3は夏休み前の最後の授業で実施する振り返りの学習の時間の中でそれぞれ実施することとした。

(3) 実践の結果と考察

①実施時期と分析対象

指導計画等との関係で、それぞれの授業の実施時期は次のようになった。

- ・授業1…2015年5月25日と26日
- ・授業2…2015年6月2日から5日
- ・授業3…2015年7月13日から15日

複数の学級で実践の行ったため、どの授業も複数日に跨って行われた。授業1と授業2の間は1週間程度、授業2と授業3の間は5週間程度の期間があった。また、以後の考察においては、上記3時間の授業全てに出席した169名の子どもを対象とする。

②授業1について

問題2については、授業の最後の10分程度でワークシートに説明を記述させてそのまま回収し、表1の解答類型に基づいて採点を行った。「◎」は正答、「○」は準正答を意味する。

表1に従って子どもの解答を採点した結果を「正答（解答類型1, 6）及び準正答（解答類型2, 3, 4）」、「誤答（解答類型5, 9）及び無解答（解答類型0）」にまとめると次のようになった。

- ・正答及び準正答…49.7%（84名）
- ・誤答及び無解答…50.3%（85名）

説明ができた子どもとできなかった子どもがほぼ同数という結果になった。なお、授業1では、ワークシートに問題2の解答を記述する際、問題1の解答が黒板に書かれた状況にした。また、授業を担当した教師は「ノートに書いた問題1の説明を参考にして、問題2の説明を考えてもよい」と指示した。調査結果について、この教師は「これまでの子どもの学習の状況や、問題1と問題2の類似性を考えると、正答率は6割から7割程度になると予想していた」と述べている。文字式を用いた説明をすることは、参考になる説明が与えられていても必ずしも易しいとはいえないことが分かる。

以下、問題2に正答及び準正答であった子どもの全体を「Aグループ」、誤答及び無解答であった子どもの全体を「Bグループ」として、授業2と授業3の結果を考察する。

③授業2について

授業1から1週間程度経って行った授業2の中で実施した問題3について、選択式の問題の部分の解答の状況をまとめたのが表2である。表の中の数値は該当する人数、括弧内は各集団における割合を表している。

表1 問題2の解答類型

解答類型	正答
(正答の条件) 次の(A), (B), (C)を記述している。	
(A) もとの数の十の位の数をa, 一の位の数をbとすると、もとの数は $10a + b$ と表される。また、十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数は、 $10b + a$ となる。	
(B) このとき、この2数の差は、 $(10a + b) - (10b + a) = 10a - a + b - 10b$ $= 9a - 9b$ $= 9(a - b)$ となる。	
(C) $a - b$ は整数だから、 $9(a - b)$ は9の倍数である。	
1 (A), (B), (C)を全て記述しているもの	◎
2 (A), (B)を記述しているもの	○
3 (B), (C)を記述しているもの	○
4 (B)を記述しているもの	○
5 (A), (B), (C)の全部または一部を記述しているが、その内容に誤りがあるもの	
6 上記以外の正答	◎
9 上記以外の解答	
0 無解答	

③授業2について

授業1から1週間程度経って行った授業2の中で実施した問題3について、選択式の問題の部分の解答の状況をまとめたのが表2である。表の中の数値は該当する人数、括弧内は各集団における割合を表している。

表2 問題3の解答状況

	Aグループ	Bグループ	全体
ア	29 (34.5%)	34 (40.0%)	63 (37.3%)
イ	53 (63.1%)	42 (49.4%)	95 (56.2%)
ウ	0 (0.0%)	5 (5.9%)	5 (3.0%)
エ	2 (2.4%)	4 (4.7%)	6 (3.6%)
合計	84 (100.0%)	85 (100.0%)	169 (100.0%)

表2から分かるように、全体の37.3%の子どもがアを選択しており、文字式を用いた演繹的な推論に基づく説明と、3つの具体的な数を用いた帰納的な推論に基づく説明の両方を「説明できている」と認めている。興味深いのは、授業1の問題2において、文字式を用いて演繹的な推論に基づく説明をすることができたAグループと、説明することができなかったBグループにもアを選択した子どもがそれぞれ34.5%と40.0%おり、5.5ポイントの差しか認められないことである。子どもの学習の状況として、予想した数の性質を文字式

2年 組 番 氏名

問題 ある学級で、「2けたの正の整数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数との差は、9の倍数になる」ことの説明について、次の、①と②を比べて考えています。

① もとの数の十の位の数を a 、一の位の数を b とすると、もとの数は $10a+b$ と表される。
 また、十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数は、 $10b+a$ となる。
 このとき、この2数の差は、

$$(10a+b) - (10b+a) = 10a - a + b - 10b$$

$$= 9a - 9b$$

$$= 9(a-b)$$
 $a-b$ は整数だから、 $9(a-b)$ は9の倍数である。

② 2けたの正の整数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数との差をいくつか計算すると、

$$64 - 46 = 18, \quad 81 - 18 = 63, \quad 21 - 12 = 9$$

$$= 9 \times 2, \quad = 9 \times 7, \quad = 9 \times 1$$
 となり、すべて9の倍数である。

どんな2けたの正の整数でも、その数とその数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数との差は、9の倍数になることの説明について、下のアからオまでのの中から正しいものを1つ選びなさい。また、選んだ理由を書きなさい。

- ア ①も②も説明できている。
- イ ①は説明できているが、②は説明できていない。
- ウ ①は説明できていないが、②説明できている。
- エ ①も②も説明できていない。

<選んだ理由>

図4 問題3

2年 組 番 氏名

問題 ある学級で、「2けたの正の整数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数との和は、11の倍数になる」ことの説明について、次の、①と②を比べて考えています。

① もとの数の十の位の数を a 、一の位の数を b とすると、もとの数は $10a+b$ と表される。
 また、十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数は、 $10b+a$ となる。
 このとき、この2数の和は、

$$(10a+b) + (10b+a) = 10a + a + b + 10b$$

$$= 11a + 11b$$

$$= 11(a+b)$$
 $a+b$ は整数だから、 $11(a+b)$ は11の倍数である。

② 2けたの正の整数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数との和をいくつか計算すると、

$$13 + 31 = 44, \quad 62 + 26 = 88, \quad 97 + 79 = 176$$

$$= 11 \times 4, \quad = 11 \times 8, \quad = 11 \times 16$$
 となり、すべて11の倍数である。

どんな2けたの正の整数でも、その数とその数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数との差は、9の倍数になることの説明について、下のアからオまでのの中から正しいものを1つ選びなさい。また、選んだ理由を書きなさい。

- ア ①も②も説明できている。
- イ ①は説明できているが、②は説明できていない。
- ウ ①は説明できていないが、②説明できている。
- エ ①も②も説明できていない。

<選んだ理由>

図5 問題4

を用いて演繹的な推論に基づき説明できれば、具体的な数を用いて帰納的な推論に基づき説明することが予想した数の性質の一般性を保証しないことを理解できるとはいえない状況がある。

では、文字式を用いて演繹的な推論に基づく説明をすることができるにも関わらず、アを選択した子どもは、どのような理由でアを選んだのだろうか。問題3ではアからエの選択肢を選んだ理由を自由記述で求めた。Aグループでアを選択した29名について、その記述内容を分析したところ、無解答（1名）、「どちらも説明できているから」など同語反復になっているもの（3名）、意味が読み取れなかったもの（1名）を除く24名については、大きく次のaとbの2つのグループに分けることができた。

a. 説明の一般性を意識していないもの（3名）
 これらの子どもは、図4の問題3における②の説明が「示された3つの数18, 63, 9が9の倍数であることを説明するもの」であると解釈しており、すべての2けたの正の整数を対象とした一般性のある説明であるかどうかは検討せずに「説明できている」と判断している。図6はその解答例であり、問題3の①の説明と②の説明の違いも明確に記述されているが、「①も②もきちんと説明できている」と結論づけている。こうした子どもは、問題3の文中の「どんな2けたの正の整数でも」の意味を理解することができていなかったのではないかと考えられる。問題文の意味を的確に読み取ることができれば、正しく解答することができたかもしれない。

<選んだ理由>
 ①では、十の位をa、一の位をbとしてどの整数を代入しても対応できるような式で説明している。②では、実際の例を挙げて説明している。ここで例として出した三つはどれも「2けたの正の整数とその数の十の位と一の位を代入できる数との差は、9の倍数になる」と証明できているので①も②もきちんと説明できている。

図6 子どもの解答例1

<選んだ理由>
 ①は a と b を整数として $9(a-b)$ に対応する。9の倍数であるという説明がある。また②の場合には2けたの正の整数を代入しても対応できないかもしれない。もっと広く考えてみるべきだと気づく。

図7 子どもの解答例2

<選んだ理由> ...ア
 ①と②の違いは、文字があるかないかの違いであるが、2つとも $9(a-b)$ や $64 - 46 = 18 (9 \times 2)$ のように9の倍数だということが証明できているから。

図8 子どもの解答例3

b. 帰納的な推論と演繹的な推論の区別が付いていないもの (21名)

これらの子どもは、文字式を用いた演繹的な推論と具体的な数を用いた帰納的な推論の区別が付いていないため、問題3の①と②について、いずれも「説明できている」と判断している。図7はその解答例であり、②の説明について、例として示された具体的な数が「2つだったら、たまたまかもしれないが、3つだったらたまたまじゃないかもしれない」という表現で一般性を認めている。また、「もっとたくさんしらべたら逆にややこしくなる」という説明で3つの具体的な数で調べれば十分であることを正当化している。

図8の解答例では、問題3の①と②の説明の違いが「文字があるかないかの違い」であることを指摘した上で、「 $9(a-b)$ 」と「 9×2 」という式を示し、どちらでも9の倍数であることを説明できていると判断している。

図7と図8の解答例は、いずれも文字式を用いた演繹的な推論に基づく説明の正しさは認めた上で、具体的な数を用いた帰納的な推論に基づく説明を「別な説明の方法」として認めている。子どもにとっては、「文字式を用いて説明しなさい」と教師から指示されるので文字式を用いているが、必ずしもその必要性は高くないと理解しているものと考えられる。

自由記述の解答については、他の選択肢についても特徴的な傾向が現れた。Aグループで正解のイを選択した53名のうち9名(17.0%)が、②を「説明できていない」としながらも、その理由は確かめた具体例が少ないからであり、より多く

の具体的な数で確かめれば説明できたことになるという意味の記述をしていた。図9はその解答例である。図4の問題3では、2けたの正の整数は10から99までの90個しかいないため、「もっと2けたの整数の具体例をいれて」が、残りの2けたの正の整数87個すべてについて確かめることを意味するものであれば誤りとはいえない。しかし、取り上げる具体例を幾つか増やして確かめ、確信を深めることができれば説明できたことになるという意味であれば、イを選んでいても、文字式を用いて説明することの意味を正しく理解できているとはいえない。

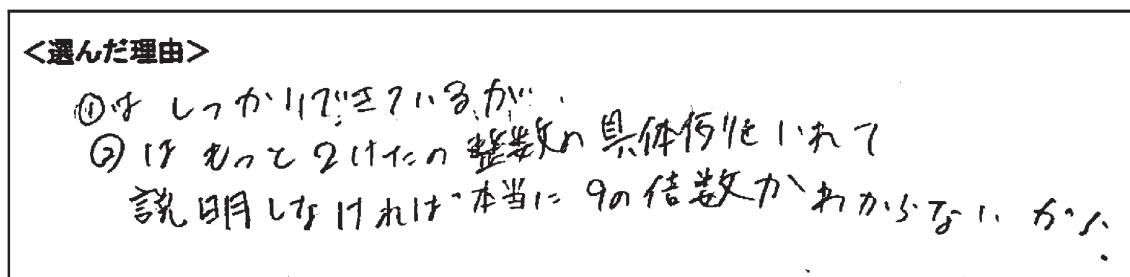
④授業3について

授業2から5週間程度経って行った授業3の中で実施した問題4について、選択式の問題の部分の解答の状況をまとめたのが表3である。

表3 問題4の解答状況

	Aグループ	Bグループ	全体
ア	20 (23.8%)	31 (36.5%)	51 (30.2%)
イ	63 (75.0%)	43 (50.6%)	106 (62.7%)
ウ	0 (0.0%)	5 (5.9%)	5 (3.0%)
エ	1 (1.2%)	6 (7.1%)	7 (4.1%)
合計	84 (100.0%)	85 (100.0%)	169 (100.0%)

表3から分かるように、全体の30.2%の子どもがアを選択しており、問題3の場合の37.3%より7.1ポイント減少しているものの、依然として課題の見られる状況である。グループごとに比較してみると、授業1の問題2において、文字式を用



いて演繹的な推論に基づく説明をすることができたAグループでは、問題4でアを選択した子どもは23.8%であり、問題3の場合の34.5%より10.7ポイント減少している。これに対してBグループでは、問題4でアを選択した子どもは36.5%であり、問題3の場合の40.0%から3.5ポイントの減少にとどまっている。授業2から授業3までの5週間程度の指導を通じて、授業1の問題2において、文字式を用いて演繹的な推論に基づく説明をすることができた子どもの方が、そうでなかった子どもと比較して、演繹的な推論に基づく説明と帰納的な推論に基づく説明の違いについての理解が深まってということになる。指導を担当した教師に確認したところ、授業2と授業3の間では、文字式を用いた説明についての指導は行っておらず、新しい内容（主に連立二元一次方程式）の指導を行っていたとのことであり、なぜこのような変化が生じたのか、直接的な理由は特定できなかった。

5. おわりに

中学校数学科における第2学年の指導内容である「文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明できることを理解すること」について、演繹的な推論に基づいて説明することの理解の状況を、帰納的な推論に基づいて説明することの理解と比較しながら検討してきた。

授業実践と調査を通じて、文字式を用いて演繹的な推論に基づき説明することができても、その必要性や意味を理解できていない子どもが、その指導の初期段階から少なからず存在することが明らかになった。こうした子どもに、文字式を用いた説明の仕方ばかりを指導しても、多くの効果は期待できないであろう。文字式を用いて説明するのは、教師が説明するように求めるからであり、具体的な数を用いて帰納的に説明する方が簡潔で分かりやすいという理解にもつながりかねない。

なぜ、文字式を用いた演繹的な推論に基づく説

明をするか、それは具体的な数を用いた帰納的な推論に基づく説明とどのように異なるのかを理解できるようにするための指導を、その後続く図形の性質の証明の指導も見通して一層重視していく必要がある。今後は、文字式を用いて説明することができることの指導にとどまらず、なぜ文字式を用いて説明するのか、その必要性と意味の理解を意図した教材の開発や指導方法の検討を深めていきたい。

引用・参考文献

- 国立教育政策研究所. 2012. 「全国学力・学習状況調査の4年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ - 児童生徒への学習指導の改善・充実に向けて -」. 教育出版
- 国立教育政策研究所. 「全国学力・学習状況調査」の実施各年度の報告書
<http://www.nier.go.jp/kaihatsu/zenkokugakuryoku.html> (参照: 2015.10.28)
- 國宗進他. 1997. 「確かな理解をめざした文字式の学習指導」. 明治図書
- 文部科学省. 2008a. 「中学校学習指導要領」. 東山書房
- 文部科学省. 2008b. 「中学校学習指導要領解説 数学編」. p.96. 教育出版
- 永田潤一郎. 2013. 「全国学力・学習状況調査の結果に見る中学校数学科の指導上の課題 - 主として『知識』に関する問題点に焦点を当てて -」. 『文教大学教育学部紀要47集』. pp.89-100
- 永田潤一郎. 2014. 「全国学力・学習状況調査の結果に基づく中学校数学科における指導の改善の方向性」. 『教育研究所紀要第23号』. pp.43-53
- 岡本和夫他. 2011. 「未来にひろがる 数学2」. 新興出版社啓林館
- 大阪数学教育研究会. 1987. 「分数・文字式を教えるということ」. 明治図書
- 杜威. 1991. 「学校数学における文字式の学習に関する研究 数の世界から文字の世界へ」. 東洋館出版社