高等学校数学における漸化式とその発展

嶋野　和史*

Recurrence Relations in High School Mathematics and Their Development

Kazufumi SHIMANO

要旨　現行の学習指導要領における高等学校の数学科目「数学Ｂ」は，数列分野が大きな役割を担うことになっている．その中で、漸化式は数列を特徴づける関係式として登場するが，解法に特化してしまい，他分野との繋がりを生徒たちに理解させているとは言い難い．本論文では，漸化式がその後の大学数学の基となる線形代数学と密接な関係にあることを紹介し，高校生にも理解できるような先を見据えた漸化式の解法について議論していく．

キーワード：漸化式　差分方程式　微分方程式　特性方程式　定数変化法

１．はじめに

現行の学習指導要領では，高等学校の数学科目が，『数学I』，『数学Ⅱ』，『数学Ⅲ』，『数学A』，『数学B』，『数学C』となり，旧課程の『数学B』からベクトルの単元が『数学C』へ移行される形となっている．ベクトルの『数学B』からの除外による影響も論じたいところではあるが，本論文では，『数学B』の数列分野が担うべき役割とその後の大学数学との関わりにスポットを当てていきたい．

高等学校で学ぶ数列の内容とは，

・等差数列と等比数列

・数列の和（Σを利用した計算を含む.）

・数学的帰納法

・漸化式

が主なものとなっている．小学校の算数や中学校数学において，規則性を見つけ出す思考を養う問題などに取り組んではいるものの，明確な数の並びの規則性を一般的な説明で習うのは，この数列の単元のときであろう．

高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説【数学編　理数編】[1)] において，知識と技能を身につける項目として，「漸化式について理解し，事象の変化を漸化式で表したり，簡単な漸化式で表された数列の一般項を求めたりすること」が挙げられている．漸化式が実社会の応用面で必要であると捉えられている反面，数理モデルを漸化式で表すという力は高校生やさらに進学した大学生には身につけられているとは到底言い難い．彼らの身につけられている力というのは，漸化式ありきでそれで表された数列の一般項の解き方などの計算的な技量に向けられがちである．解法の理解だけに軸足がいけば，結局のところ時間が経過するにつれて，忘れられてしまう知識になってしまう．現在，著者は本学の教育学部数学専修にて教鞭をとっているが，学生の多くは数学が実社会にどのように活用されるかという認識には欠けており，ましてや高等学校で学んだ数学が，大学で実際に学んでいる数学とどういう結びつきをしているのかということに疎いのが現状である．

*　しまの　かずふみ　文教大学教育学部学校教育課程数学専修

著者としては，本学における高等学校の数学教員を目指す希望者が年々増えつつある状況を鑑みて，人材の質の確保の点から，高等学校数学の知識と身近な話題との繋がりを明確にする教材の提示こそが必要と考えている．そのため，自然科学における現象との繋がりが見えやすい微分方程式を授業で取り上げることを度々行っている．しかし，高等学校数学で取り上げるには，高等学校３年生が学ぶ『数学Ⅲ』の微分積分についての理解がどうしても必須となるので，平均的な学力レベルの高校では，発展的な内容過ぎて取り扱うのは困難であろう．微分積分の知識を有していなくても，現象を解析するという手法に触れやすい話題はないのだろうかと考えていたところ，漸化式こそがそれに相応しいのではないかと考えに至った．

本論文では，漸化式の高等学校数学における現状に触れつつ，捉え方をより一般的にさせて差分方程式を学ぶ利点について取り上げていく．

２．隣接２項間漸化式

高等学校の『数学B』で取り上げる漸化式では，隣接２項間漸化式

$$a_{n+1} = pa_n + q \quad (n = 1,2,3,\cdots) \tag{2.1}$$

が一般的であろう．（例えば，東京書籍の教科書[2]を参照せよ．）初項である a_1 から n が変化すると，数列 $\{a_n\}$ がどのような数の並びになるかが問題になってくる．

$p = 1$ のとき，（2.1）は

$$a_{n+1} - a_n = q \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

となり，$\{a_n\}$ は公差 q の等差数列である．一般項は，

$$a_n = a_1 + (n-1)q$$

である．

$p \neq 1$ のときは，次のような解答が教科書で多く見受けられる．（2.1）が次のような形

$$a_{n+1} - \alpha = \beta(a_n - \alpha) \tag{2.2}$$

で表せるようにする．（2.1）と（2.2）を比較することで，

$$\beta = p, \qquad \alpha(1-\beta) = q$$

となり，

$$\alpha = \frac{q}{1-p}, \quad \beta = p$$

が得られる．（2.2）の形から分かるように，数列 $\{a_n - \alpha\}$ が公比 β の等比数列になることが前提にされている．（2.2）の形に直せることは確かなのだが，漸化式をこれから理解していこうとする高等学校２年生には少々戸惑いが生じそうな部分であると思われる．

最終的な結果を見ていこう．数列 $\{a_n - \alpha\}$ は初項 $a_1 - \alpha$，公比 β の等比数列であるから，

$$a_n - \alpha = (a_1 - \alpha)\beta^{n-1}$$

となる．ゆえに，求める一般項 a_n は，

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha + (a_1 - \alpha)\beta^{n-1} \\ &= \tfrac{q}{1-p} + \left(a_1 - \tfrac{q}{1-p}\right)p^{n-1} \end{aligned} \tag{2.3}$$

である．（2.3）の一般項の形を見ると，第２項は公比 p の等比数列を表していることが分かる．つまり，（2.3）は等比数列の数の変化に微妙なずれが生じていると捉えることができる．

大学で学ぶ微分方程式の解法の中で定数変化法というものがある．ここでは，１階微分方程式

$$\tfrac{dy}{dx}(x) = py(x) + f(x) \tag{2.4}$$

の場合について紹介する．$p \neq 0$, $f(x) \equiv 0$ として微分方程式

$$\tfrac{dy}{dx}(x) = py(x) \tag{2.5}$$

を解いていく．（2.5）の両辺を $y(x)$ で割ると，

$$\frac{1}{y(x)} \cdot \frac{dy}{dx}(x) = p$$

両辺を x で積分すると，

$$\int \frac{1}{y(x)} \cdot \frac{dy}{dx}(x)\,dx = \int p\ dx$$

$$\log|y(x)| = px + c \ (c\text{: 積分定数})$$

対数を指数に直せば，

$$|y(x)| = e^{px+c} \ (e\text{: ネピア数})$$

絶対値を外し，指数法則を用いれば，

$$y(x) = \pm e^c \cdot e^{px}$$

$C = \pm e^c$ とおけば，

$$y(x) = Ce^{px} \ (C\text{: 任意定数}) \tag{2.6}$$

となり，これが（2.5）の一般解である．（2.4）と（2.5）の違いは関数 $f(x)$ があるかどうかであり，（2.4）の一般解は（2.6）の形から若干変化したものである可能性が高いと予想できる．つまり，予想として（2.4）の一般解は，

$$y(x) = C(x)e^{px} \tag{2.7}$$

で表せるとする．定数変化法の由来は，（2.6）の定数 C から（2.7）では関数 $C(x)$ となっていることによる．

さて，（2.7）を（2.4）に代入すると，積の微分法から，

$$C'(x)e^{px} + pC(x)e^{px} = pC(x)e^{px} + f(x)$$

となり，

$$C'(x)e^{px} = f(x)$$
$$C'(x) = e^{-px}f(x)$$

両辺を x で積分すれば，

$$C(x) = \int e^{-px}f(x)\ dx \tag{2.8}$$

となる．（2.8）が計算できれば，（2.7）に代入することで，（2.4）の一般解が求められる．ちなみに，一般解には任意定数が１個なければならないが，こちらは，（2.8）の不定積分の計算から現れるので問題はない．

微分方程式の定数変化法の考え方は，実は漸化式にも応用できることが分かる．（2.1）の $q = 0$ の場合を考えると，

$$a_{n+1} = pa_n \quad (n = 1,2,3,\cdots) \tag{2.9}$$

であるから，数列 $\{a_n\}$ は初項 a_1，公比 p の等比数列である．つまり一般項は，

$$a_n = a_1p^{n-1} \tag{2.10}$$

である．（2.1）と（2.9）は q が足されているかどうかの違いであるから，（2.1）の一般項は，

$$a_n = b(n)p^{n-1} \tag{2.11}$$

であると予想される．ただし，$b(n)$ は n に依る関数とする．（$b(n)$ は数列とも捉えることができる．）これは，（2.10）は初項 a_1 がもちろん n に依らない定数であることに影響する．（2.11）を（2.1）に代入すると，

$$b(n+1)p^n = b(n)p^n + q$$

両辺を p^n で割れば，

$$b(n+1) = b(n) + \frac{q}{p^n}$$

となる．階差数列の一般項の求め方を用いれば，

$$\begin{aligned} b(n) &= b(1) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{q}{p^k} \\ &= b(1) + q\cdot\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p^n}}{1-\frac{1}{p}} \\ &= b(1) - \frac{q}{1-p}\left(1-\frac{1}{p^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

$b(1) = a_1$ であるから，

$$b(n) = \frac{1}{p^{n-1}}\left(\frac{q}{1-p}\right) + a_1 - \frac{q}{1-p}$$

である．（2.11）に代入すれば，

$$a_n = \frac{q}{1-p} + \left(a_1 - \frac{q}{1-p}\right)p^{n-1}$$

となり，（2.3）と同じであることが分かる．

定数変化法による解法の利点は，等比数列の話の発展として捉えやすく，階差数列の一般項の求め方などの復習的な要素を活用できるところにあると考える．また，大学で学ぶ微分方程式の解法との関連も明確で，高大連携に相応しい数学的話題になり得ると思われる．

３．隣接３項間漸化式

教科書の発展的な話題や大学の入試問題で度々登場する隣接３項間漸化式

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0 \quad (n = 1,2,3,\cdots) \tag{3.1}$$

を考える．高校生向けの説明としてよく取り上げられるのは次のものである．

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \tag{3.2}$$

に変形できるとして，式を整理すれば，

$$a_{n+2} - (\alpha+\beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0 \tag{3.3}$$

となる．（3.1）と（3.3）を比較すると，

$$\alpha + \beta = -p,\ \alpha\beta = q$$

が得られる．２次方程式の解と係数の比較から，

$$t^2 + pt + q = 0 \tag{3.4}$$

を解けば，該当する α, β が得られる．ここで注意しなければならないのが，解が２個ないと計算が進まないという点である．宮原繁の書籍[3)]には

重解の場合も扱われているので参照されたい．

異なる２個の解を α,β とおくと，(3.1) から

$$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases} \quad (3.5)$$

が導き出される．(3.5) の上の式から，数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ は初項 $a_2-\alpha a_1$，公比 β の等比数列である．一般項は，

$$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1} \quad (3.6)$$

である．また，数列 $\{a_{n+1}-\beta a_n\}$ は初項 $a_2-\beta a_1$，公比 α の等比数列である．一般項は，

$$a_{n+1}-\beta a_n=(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1} \quad (3.7)$$

である．(3.6) と (3.7) を引き合うことで，

$$a_n=\frac{(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}-(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}}{\beta-\alpha} \quad (3.8)$$

が得られる．(3.8) の右辺を２つの分数に分かれば，

$$a_n=c_1\alpha^{n-1}+c_2\beta^{n-1} \quad (3.9)$$

で表せる．ただし，

$$c_1=-\frac{a_2-\beta a_1}{\beta-\alpha}, \qquad c_2=\frac{a_2-\alpha a_1}{\beta-\alpha}$$

とする．(3.9) の形には重要な意味を持っている．それは，(3.9) の第１項と第２項はそれぞれ等比数列を表しており，一般項はその和になっているということである．すなわち，等比数列の“１次結合”のようなものになっている．これは，漸化式よりも一般的な差分方程式で捉えるとごく自然な事実として捉えることができる．

問題は，２次方程式 (3.4) が重解をもつ場合である．残念ながら，高校の教科書では全く触れられていないようである．これでは，解法を教えるだけで，漸化式の本来の意味を見失う恐れがあると感じざるを得ない．(3.4) が重解をもつのは，判別式より

$$p^2-4q=0 \quad (3.10)$$

のときである．(3.4) は，

$$t^2+pt+\frac{p^2}{4}=0$$

と書けるので，重解は，

$$t=-\frac{p}{2}$$

である．異なる２個の解をもつとき，一般項は等比数列の“１次結合”のようなもので表された．そうすると，登場する等比数列の１つとして

$$c\left(-\frac{p}{2}\right)^{n-1} \quad (c\text{: 任意定数})$$

が考えられる．そして，もう１つの数列は等比数列では求められないというのが自然な発想である．ここで，２章で用いた定数変化法の考え方を導入する．つまり，

$$a_n=c(n)\left(-\frac{p}{2}\right)^{n-1} \quad (n=1,2,3,\cdots) \quad (3.11)$$

が (3.1) を満たすような関数 $c(n)$ を見つけ出すことを考える．(3.11) を (3.1) に代入すると，

$$c(n+2)\left(-\frac{p}{2}\right)^{n+1}+pc(n+1)\left(-\frac{p}{2}\right)^{n} + qc(n)c(n)\left(-\frac{p}{2}\right)^{n-1}=0$$

(3.10) を用いれば，

$$\{c(n+2)-2c(n+1)+c(n)\}\left(-\frac{p}{2}\right)^{n-1}=0$$

となり，$p\neq 0$ を前提としていると考えれば，上の式の $\left(-\frac{p}{2}\right)^{n-1}$ を払うことができ，

$$c(n+2)-2c(n+1)+c(n)=0$$

が得られる．上の式は，

$$c(n+2)-c(n+1)=c(n+1)-c(n) \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

と変形できるので，$c(n)$ は等差数列の一般項を表していることが容易に分かる．すなわち，公差を d とおけば，

$$c(n)=c(1)+(n-1)d$$

と表せる．以上から，(3.11) は，

$$a_n=(c(1)-d)\left(-\frac{p}{2}\right)^{n-1}+dn\left(-\frac{p}{2}\right)^{n-1} \quad (3.12)$$

となる．ここで，注目すべきなのは，(3.12) の右辺の第１項は等比数列を表しているが，第２項には等比数列ではない

$$n\left(-\frac{p}{2}\right)^{n-1}$$

が現れたことである．高等学校数学の範疇で証明

するには工夫が必要なのだが，実は（3.4）が重解をもつ場合，（3.1）の一般項は，

$$a_n = c_1\left(-\frac{p}{2}\right)^{n-1} + c_2 n\left(-\frac{p}{2}\right)^{n-1}$$
$$(c_1, c_2 : a_1, a_2 \text{による定数})$$

で表せることが知られている．教科書の穴になっている部分が大学数学でどのように解決されることになるのかは教員としては知っていて欲しいところではあるし，高校生への数学の興味を掻き立てる部分になり得るのではないだろうか．

（3.1）は本章の初めにも書いた通り，高校生でもそれなりに触れる機会が多い漸化式である．しかし，（3.1）に若干変化を与えた隣接３項間漸化式

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = b(n)\ \ (n = 1,2,3,\cdots) \quad (3.12)$$
$$(b(n) : n\text{の関数})$$

については，高等学校数学の中では取り上げられることはほぼないと言ってよい．２章，本章でも触れたように，『数学B』で取り上げられる漸化式は，一般項の少々テクニカルな解法を身につける程度の授業内容でしかないように思われてならない．次章で説明するが，（3.1）の一般項と（3.12）の一般項にはそれらの形を特徴づける重要な性質をもっている．これを理解すれば，高等学校数学で学ぶ漸化式だけではなく，連立方程式，微分方程式，差分方程式の解の特性にも繋がるより先進的な数学の知識に触れることができるようになるはずである．以上から，漸化式と関わりが深い差分方程式の話題を取り上げることにしたい．

４．定数係数線形差分方程式

２，３章では，数列の延長線上でみた漸化式を考えてきた．つまり，初項 a_1 を定めると，漸化式によってその後の数の並びがどのように変化するかに注目した．この考えから少々話を切り替えていく．それは，数列が自然数全体を定義域とする関数とみなしていくということである．（関数の理解を深めるための数列単元の授業プランに関する研究もされているようなので，興味のある方は，高橋哲男の論文[4)]を参照されたい．）

ここでは，次の２階定数係数線形差分方程式

$$f(x+2) + pf(x+1) + qf(x) = g(x) \quad (4.1)$$

を考える．ただし，$x = 1,2,3,\cdots$ とし，p, q は実数，$g(x)$ は与えられた関数とする．今，（4.1）が成り立つような関数 $f_0(x)$ が存在すると仮定する．

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x)$$

とおくと，（4.1）より，

$$\begin{aligned} &f_1(x+2) + pf_1(x+1) + qf_1(x) \\ &= g(x) - \{f_0(x+2) + pf_0(x+1) + qf_0(x)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

が得られる．以上から，関数 $f_1(x)$ は，（4.1）の $g(x) \equiv 0$ の場合の線形差分方程式

$$f(x+2) + pf(x+1) + qf(x) = 0 \quad (4.2)$$

の解であることが分かる．一般に，（4.2）を同次方程式，（4.1）を非同次方程式と呼んでいる．以上の議論で分かったのは，（4.2）の解は，同次方程式の解と非同次方程式の解の和で表現できるということである．また，３章で取り上げた隣接３項間漸化式（3.12）が（4.1）に，（3.1）が（4.2）にそれぞれ対応していることになる．

以下，（4.2）の解として，$h_1(x), h_2(x)$ が存在するとする．$h_1(x), h_2(x)$ は実際には数列なので，この２つの解が１次独立であるとは，行列式

$$\begin{vmatrix} h_1(x) & h_1(x+1) \\ h_2(x) & h_2(x+1) \end{vmatrix} \neq 0\ \ (x = 1,2,3,\cdots)$$

が成り立つことを意味する．なぜなら，ベクトルの１次独立の定義と同様に考えれば，

$$\lambda_1 h_1(x) + \lambda_2 h_2(x) = 0\ \ (x = 1,2,3,\cdots)$$

となるような λ_1, λ_2, は $\lambda_1, = \lambda_2 = 0$ のみであるからである．そして，x を任意の自然数とすれば，

$$\begin{pmatrix} h_1(x) & h_2(x) \\ h_1(x+1) & h_2(x+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．上の連立方程式の解が，$\lambda_1, = \lambda_2 = 0$ のみになるには，係数行列である

$$\begin{pmatrix} h_1(x) & h_2(x) \\ h_1(x+1) & h_2(x+1) \end{pmatrix}$$

が逆行列をもつ必要がある．つまり，その行列式が０になってはならないことが分かる．

（4.2）の $h_1(x), h_2(x)$ が１次独立であるとする．

すると，（4.2）の任意の解は，

$$f(x)=c_1h_1(x)+c_2h_2(x)\quad (c_1,c_2\text{: 任意定数})$$

で表せる．この事実を確かめていく．

$$f(x+2)+pf(x+1)+qf(x)=0 \tag{4.3}$$

$$h_1(x+2)+ph_1(x+1)+qh_1(x)=0 \tag{4.4}$$

$$h_2(x+2)+ph_2(x+1)+qh_2(x)=0 \tag{4.5}$$

が成り立つので，（4.3）−（4.5）を行列で表すと，

$$\begin{pmatrix} f(x+2) & f(x+1) & f(x) \\ h_1(x+2) & h_1(x+1) & h_1(x) \\ h_2(x+2) & h_2(x+1) & h_2(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{4.6}$$

となる．ゆえに，

$$\begin{vmatrix} f(x+2) & f(x+1) & f(x) \\ h_1(x+2) & h_1(x+1) & h_1(x) \\ h_2(x+2) & h_2(x+1) & h_2(x) \end{vmatrix}=0 \tag{4.7}$$

でなければならない．なぜなら，

$$\begin{vmatrix} f(x+2) & f(x+1) & f(x) \\ h_1(x+2) & h_1(x+1) & h_1(x) \\ h_2(x+2) & h_2(x+1) & h_2(x) \end{vmatrix}\neq 0$$

であるならば，係数行列

$$\begin{pmatrix} f(x+2) & f(x+1) & f(x) \\ h_1(x+2) & h_1(x+1) & h_1(x) \\ h_2(x+2) & h_2(x+1) & h_2(x) \end{pmatrix}$$

は逆行列をもつ．そして，（4.6）の両辺の左側に

$$\begin{pmatrix} f(x+2) & f(x+1) & f(x) \\ h_1(x+2) & h_1(x+1) & h_1(x) \\ h_2(x+2) & h_2(x+1) & h_2(x) \end{pmatrix}^{-1}$$

を掛けると，

$$\begin{pmatrix}1\\p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

となり矛盾するからである．

（4.7）より，ベクトル

$$\begin{pmatrix} f(x)\\ f(x+1)\\ f(x+2)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} h_1(x)\\ h_1(x+1)\\ h_1(x+2)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} h_2(x)\\ h_2(x+1)\\ h_2(x+2)\end{pmatrix}$$

は 1 次従属である．すなわち，

$$f(x)=c_1(x)h_1(x)+c_2(x)h_2(x) \tag{4.8}$$

$$f(x+1)=c_1(x)h_1(x+1)+c_2(x)h_2(x+1) \tag{4.9}$$

$$f(x+2)=c_1(x)h_1(x+2)+c_2(x)h_2(x+2) \tag{4.10}$$

を満たす関数 $c_1(x),c_2(x)$ が存在する．（4.8）の x に $x+1$ を代入したものから（4.9）を引くと，

$$\{c_1(x+1)-c_1(x)\}h_1(x+1) + \{c_2(x+1)-c_2(x)\}h_2(x+1)=0 \tag{4.11}$$

となり，（4.9）の x に $x+1$ を代入したものから（4.10）を引くと，

$$\{c_1(x+1)-c_1(x)\}h_1(x+2) + \{c_2(x+1)-c_2(x)\}h_2(x+2)=0 \tag{4.12}$$

となる． $h_1(x),h_2(x)$ が 1 次独立であるから，

$$c_1(x+1)-c_1(x)=c_2(x+1)-c_2(x)=0$$

が得られ， $c_1(x),c_2(x)$ は x に依らず定数になる．以上から，（4.8）は，

$$f(x)=c_1h_1(x)+c_2h_2(x)\quad (c_1,c_2\text{: 任意定数})$$

に書き換えられる．

以上をまとめると，次の結果が得られる．

> 2 階定数係数線形差分方程式（4.1）の一般解 $f(x)$ は，（4.1）の 1 つの解 $f_0(x)$ と（4.2）の 1 次独立な 2 つの解 $h_1(x),h_2(x)$ を用いることで，
>
> $$f(x)=f_0(x)+c_1h_1(x)+c_2h_2(x)\quad (c_1,c_2\text{: 任意定数})$$
>
> で表せる．

（4.2）の 1 次独立な 2 つの解を具体的に求めることを考える．解が $f(x)=\lambda^x$ で表わされる形のもので探していく．つまり，等比数列になるものに限定して解を探すということである．（4.2）に代入すると，

$$\lambda^{x+2}+p\lambda^{x+1}+q\lambda^x=0$$

となり，両辺を λ^x で割ると， 2 次方程式

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \tag{4.13}$$

が得られる．（4.13）は（4.2）の解の形を決定づけるものになるので，一般には特性方程式と呼ばれている．

（ 1 ）（4.13）が異なる 2 つの実数解 α,β をもつ場合

α^x,β^x は（4.2）の解であり，

$$\begin{vmatrix}\alpha^x & \alpha^{x+1}\\ \beta^x & \beta^{x+1}\end{vmatrix}=\alpha^x\beta^x(\beta-\alpha)\neq 0$$

であるから，１次独立にもなっている．（4.2）の一般解は，

$$f(x)=c_1\alpha^x+c_2\beta^x\ \ (c_1,c_2\text{: 任意定数})$$

である．

（２）（4.13）が異なる２つの虚数解 α,β をもつ場合

$\alpha,\beta(=\bar{\alpha})$ を極形式で表すと，

$$\alpha=r_\alpha(\cos\theta_\alpha+i\sin\theta_\alpha)$$
$$\beta=r_\alpha(\cos\theta_\alpha-i\sin\theta_\alpha)$$

となり，ド・モアブルの公式より，

$$\alpha^x={r_\alpha}^x(\cos x\theta_\alpha+i\sin x\theta_\alpha)$$
$$\beta^x={r_\alpha}^x(\cos x\theta_\alpha-i\sin x\theta_\alpha)$$

である．また，α^x,β^x は（4.2）の解である．（4.2）の線形性から，α^x,β^x の任意の１次結合も（4.2）の解であるから，

$$\frac{\alpha^x+\beta^x}{2}={r_\alpha}^x\cos x\theta_\alpha\,,$$
$$\frac{\alpha^x-\beta^x}{2i}={r_\alpha}^x\sin x\theta_\alpha$$

も（4.2）の解である．さらに，

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}{r_\alpha}^x\cos x\theta_\alpha & {r_\alpha}^{x+1}\cos(x+1)\theta_\alpha\\ {r_\alpha}^x\sin x\theta_\alpha & {r_\alpha}^{x+1}\sin(x+1)\theta_\alpha\end{vmatrix}\\ &={r_\alpha}^{2x+1}\{\sin(x+1)\theta_\alpha\cos x\theta_\alpha\\ &\qquad-\cos(x+1)\theta_\alpha\sin x\theta_\alpha\}\\ &={r_\alpha}^{2x+1}\sin\theta_\alpha\neq 0\end{aligned}$$

であるから，${r_\alpha}^x\cos x\theta_\alpha$，${r_\alpha}^x\sin x\theta_\alpha$ は１次独立である．（4.2）の一般解は，

$$f(x)=c_1{r_\alpha}^x\cos x\theta_\alpha+c_2\,{r_\alpha}^x\sin x\theta_\alpha\quad(c_1,c_2\text{: 任意定数})$$

である．

（３）（4.13）が重解 α をもつ場合

α^x はもちろん（4.13）の解であるが，１次独立となるようなもう１つの解が必要になる．３章でほとんど同様な議論を行っているのではあるが，おさらいとして確認しておく．定数変化法を用いて，

$$f(x)=c(x)\alpha^x \tag{4.14}$$

が（4.2）の解になるような関数 $c(x)$ を探す．（4.14）を（4.2）に代入すれば，

$$c(x+2)\alpha^{x+2}+pc(x+1)\alpha^{x+1}+qc(x)\alpha^x=0 \tag{4.15}$$

$\alpha\neq 0$（$\alpha=0$ のときは隣接３項間漸化式ではなくなる！）であるから，（4.15）の両辺を α^x で割ると，

$$c(x+2)\alpha^2+pc(x+1)\alpha+qc(x)=0 \tag{4.16}$$

となる．（4.13）は重解をもつので，

$$p^2-4q=0,\quad \alpha=-\frac{p}{2}$$

である．（4.16）は整理され，

$$c(x+2)-2c(x+1)+c(x)=0$$

が得られ，

$$c(x+2)-c(x+1)=c(x+1)-c(x)$$

が成り立つ．これは，$c(x)$ が等差数列であることを示している．つまり，$c(x)$ は x の１次式で表せる．まとめると，

$$f(x)=(c_1+c_2x)\alpha^x=c_1\alpha^x+c_2x\alpha^x \tag{4.17}$$
$$(c_1,c_2\text{: 任意定数})$$

も（4.2）の解である．後は，$\alpha^x,x\alpha^x$ が１次独立になれば，（4.17）が（4.2）の一般解であることは容易に分かる．実際に，

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\alpha^x & \alpha^{x+1}\\ x\alpha^x & (x+1)\alpha^{x+1}\end{vmatrix}&=(x+1)\alpha^{2x+1}-x\alpha^{2x+1}\\ &=\alpha^{2x+1}\neq 0\end{aligned}$$

であるから，１次独立の確認もできる．

本章では，２階線形差分方程式の基本的な解の特性を説明した．これを理解すれば，３章で取り上げた隣接３項間漸化式は，曖昧な認識だった箇所が解消されたことになる．そこで，今までの議論を踏まえた上で，次の問題を考えたい．

問題　隣接３項間漸化式

$$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=n\ \ (n=1,2,3,\cdots) \tag{4.18}$$

が成り立ち，$a_1=1,a_2=2$ である数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

２階定数係数線形差分方程式（4.1）の形から，先ず，右辺を０に直した漸化式

$$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0\ \ (n=1,2,3,\cdots) \tag{4.19}$$

の一般項を求めるのが重要である．（4.18）の特性方程式は，

$$\lambda^2-3\lambda+2=0$$
$$(\lambda-1)(\lambda-2)=0$$

となり，$\lambda=1,2$ が得られる．これは，異なる２つの実数解をもつ場合に相当するから，（4.19）の

一般項は，初項と第２項を無視したとすると，

$$a_n = c_1 1^n + c_2 2^n = c_1 + c_2 2^n \quad (c_1, c_2\text{: 任意定数}) \tag{4.20}$$

次に，(4.18) を満たす数列 $\{a_n\}$ で初項と第２項の条件は無視したものを１つ探し出すことを考える．(4.18) の右辺が n に関する１次式であるから，該当する数列の一般項は n に関する多項式と考えるのが妥当である． $a_n = \alpha n$ (α: 定数) で探そうとすると，(4.18) の左辺に代入したときに n の係数が０となってしまい，等号は成立しない．次に，

$$a_n = \alpha n^2 + \beta n \quad (\alpha, \beta\text{: 定数})$$

で探してみる．

$$\begin{aligned} &a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n \\ &= \alpha(n+2)^2 + \beta(n+2) - 3\alpha(n+1)^2 - 3\beta(n+1) \\ &\quad +2\alpha n^2 + 2\beta n \\ &= -2\alpha n + \alpha - \beta \end{aligned}$$

が n と一致するには，恒等式により，

$$-2\alpha = 1, \qquad \alpha - \beta = 0$$

である．ゆえに，

$$\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$$

である．つまり，

$$a_n = -\tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n \tag{4.21}$$

は (4.18) を満たす．

話をまとめよう．(4.20) と (4.21) より，(4.18) を満たす一般項 a_n は，

$$a_n = -\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + c_1 + c_2 2^n$$

の形で表せることになる． $a_1 = 1, a_2 = 2$ となる c_1, c_2 を求めていくと，連立方程式

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} + c_1 + 2c_2 = 1 \\ -2 - 1 + c_1 + 4c_2 = 2 \end{cases}$$

が導き出され，

$$c_1 = -1, \qquad c_2 = \frac{3}{2}$$

が得られる．よって，求める一般項は，

$$\begin{aligned} a_n &= -\tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n - 1 + \tfrac{3}{2}2^n \\ &= -\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1 + 3 \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

であることが分かる．

上の問題は，(3.12) の特殊な場合を扱ったに過ぎない．しかし， $b(n) = n$ だけではなく，他の n に関する関数においても同様な解き方が可能であることを示している．（線形差分方程式の他の解法については，杉山昌平の書籍[5)]を参照されたい．）本章の差分方程式の説明の中では，高校数学では扱われない線形代数学の行列や行列式の知識を用いた．しかし，現行の学習指導要領より『数学C』が復活し，ベクトルや行列の単元が登場していることを考えると，高等学校の数学教員の知識としては，理解しておかねばならない教科内容であると考える。さらに，数学をより深く理解したいと望んでいる高校生には，高等学校数学と大学数学との繋がりが見えやすい箇所であり，教材として取り上げていくのもよいのではないだろうか．

５．まとめ

新しい学習指導要領で数学を学んでいる生徒が間もなく高校３年生となり，大学入試を受験することになる．著者が一番気になっているのは，『数学B』，『数学C』が高校においてどのような単元を中心に学習することになっていくかという点である．旧課程の『数学B』はベクトルと数列の単元は比較的学習されている感があったが，確率分布や統計的推測の単元は端折ってしまっている様子が，本学の入学生の学力状況から見えている．

新課程の『数学B』の数列の単元は，科目を履修していれば，ほぼ学習することになるであろう．それは，『数学B』からベクトルを削除してしまったことも大きいだろう．数列における漸化式について，４章の関連する差分方程式の話の中で，ベクトルの１次独立性を利用している箇所がある．つまり，ベクトルと数列は決して無縁ではないのである．ベクトルとその延長線上にある行列からなる線形代数学という大学教養数学が分かると，漸化式の解法に明確な意味を持たせることができることも紹介してきた．解法ありきではな

く，生徒に解法の意味をしっかり理解するという習慣づけさせることで，数学的思考をより開花させられるのではないかと期待している．

差分方程式を取り上げたのは，漸化式の一般的な解き方を理解させるためだけではない．差分方程式は数列との相性がよく，その数列の離散的な数の動きを関数として捉えることができる．そして，関数分野の理解の一助となり得るものである．現に関数方程式の一つの例として，差分方程式が取り上げられている．詳しいことは桑垣煥の書籍[6]を参照されたい．また，経済的モデルや生物の増殖モデルなどの具体的な問題が差分方程式を用いることで解析しやすいこともあり，実社会への応用としての数学の価値を高める部分もあるのではないかと考える．差分方程式の応用が多く提示されていることもあり，Elaydiの書籍[7]も数列の特に漸化式に関する教材づくりの観点から参考にするとよいと思われる．

本学の教育学部数学専修に所属している学生は，ここ数年で高等学校の数学教員志望の増加傾向が顕著になっている．しかしながら，志望者の学力は大学教養数学の微分積分学や線形代数学でさえも怪しいのも見受けられる．教員採用試験の合格だけ考えれば，自治体によっては高等学校数学の知識だけで十分なのかもしれない．だが，それでは高等学校数学の質を高めるという点では何の効果もないであろう．何のために数学を学ぶのか，自分自身で問い続けていくことのできる数学教員を少しでも増やしていくためにも，本研究が少しでも役に立つことになればと心から願っている．

参考文献

1）文部科学省，高等学校学習指導要領（平成30年度告示）解説【数学編　理数編】，https://www.mext.go.jp/content/20230217-mxt_kyoiku02-100002620_05.pdf
2）俣野博，河野俊丈他，数学B Advanced，東京書籍，2023年．
3）宮原繁，漸化式，科学新興新社，1966年．
4）高橋哲男，関数指導の一環としての高等学校数学「数列」の授業プラン【第一部　本論編】：階差数列の研究を中軸に据えて，教授学の探究，第22号，69-86, 北海道大学大学院教育学研究院教育方法学研究室，2005年．
5）杉山昌平，差分方程式入門［POD版］，森北出版，2005年．
6）桑垣煥，函数方程式概論，朝倉書店，1967年．
7）S. Elaydi, An Introduction to Difference Equations Third Edition, Springer, New York, 2010.