

## 数学科教育課程評価の観点

白石 和夫

(教育学部)

### Some Viewpoints in the Estimation of Curricula of Mathematics Education

Kazuo Shiraishi

Faculty of Education

#### 1. はじめに

##### (1) 研究の目的

数学教育は大きく流れを変える必要に迫られている。早急にその方向に対する議論を煮つめて、実際の授業がイメージできるような、内容を伴った試案をいくつか作成し、改革の理念がどの程度達成できるか比較検討して、研究を深化させることが当面の課題である。その際に必要となる評価の観点を整理しておこうとするのが本研究の目的である。

##### (2) 研究の経緯

日本数学教育学会は、教育課程特別研究委員会を組織して21世紀の数学教育の教育課程はどうあるべきか研究している。本稿は、その報告書「21世紀の算数・数学教育の教育課程の基本理念と内容に関する研究」に寄せた「高校数学における教育課程検討の観点」<sup>1)</sup>における考察を、その後の同委員会における討議なども踏まえながら、さらに進めることをめざしたものである。

同委員会が同学会会員を対象に行ったアンケート「21世紀の算数・数学科の教育課程を考えるための調査」において、「算数・数学科のカリキュラムについて21世紀までに重点的に行うべき研究」は何であるか聞いているが、その中で特に高い支持を集めた選択項目は主として指導方法に関するものであり、教

育課程の研究において重要と考えられる「学習指導要領などの教育課程の評価の実施」についてはあまり高い支持を得ていない<sup>2)</sup>。このことから、少なくとも今回のアンケートの対象となった人たちの間では、教育課程の評価に関する関心が低いことをうかがい知ることができる。しかしながら、指導上の問題として考えられていることがらのうちのある部分は教育課程の構造にともなって引き起こされるものであり、望ましい教育課程を編成するためには教育課程の評価は欠かせないものである。

#### 2. 改革の方向について

コンピュータの普及に伴い、数学教育のあり方にも改革が求められている。コンピュータを教育機器として用いることにより教育方法をより効果的なものに改めていくことができるようになったことも大きな変化であるが、今求められているのは生徒に身に付けさせるべき数学教育の中身そのものの改革である。

たとえば、平成元年12月の学習指導要領解説では、多くの生徒にとっての数学を活用する能力について、「知識の広さや計算の技巧よりは、数学を生かして活用する能力、特に、論理的な思考力や直感力、それらに基づく判断能力が重要となってくる」と述べている<sup>3)</sup>。

今回の改定において教育課程審議会委員で

あった藤田宏は、数学教育の目的を数学的思考力の育成と数学的リテラシーの育成とに分けて論じている<sup>1)</sup>。数学的思考力の育成については、「“模索し思考する”経験を通して強力な思考力を育成する」ことであるとして、“do Math”、すなわち、「“学問する”立場で数学との取り組みを体験させること」の必要性を説いている。また、高等学校レベルでの数学的リテラシーの内容を例示して、「知的活動における数学の基礎的な応用能力を備えた上に、数学の確かさを知り、数学の概念を思考、記述に取り入れ、数学的な論理の明快さを判断に生かすことなどである」としている。

学習者自身が小さな研究者であるとするdo Mathの考え方や、現実世界の問題を重視する全米数学教師協議会（NCTM）の「問題解決」など、生徒の視点に立った数学教育を目指す動きが一つの潮流となっている。生徒自身の努力によって獲得した概念でないならば、それを自在に操って応用に結び付けることはできないであろうという考え方方が底流にあるからであろう。また、生徒の主体的な取り組みを喚起するためには、生徒が自分自身の問題としてとらえられるような題材を選ばなくてはならないということである。そして、中学校指導書の数学的見方や考え方の意義<sup>2)</sup>に述べられているように、「数学を自分とは別世界のもの、無縁のもの」と受け取ることなく、意欲的に学習しようとする態度を育てることが大切である。高等学校においては、数学を自分とは別世界のものととらえるばかりでなく、数学を到底自分には理解しきれないものととらえる傾向さえ現れる。数学は人間が作ったものであるから努力すれば理解できるはずのものだと教えることは、数学教育において重要なことではなかろうか。

### 3. 数学教育の現状

#### (1) 指導要領に見られる技能重視の姿勢

指導要領の目標として掲げられた「数学的な見方や考え方のよさを認識」させることを重視する観点からは、技能の習得を第一とした教育課程の組み方は不適切だという結論が得られるはずである。しかし、従来から高校の教育課程においては主として技能の修得をめざす観点から内容の検討がなされ、今回の改定においてもその傾向にあまり変化は見られない。

以下、平成元年改定の指導要領を中心に検討していくことにする。なお、指導要領自体は簡素なものであり、その実態はつかみにくい。本稿においては、「指導要領解説」<sup>3)</sup>に示された内容が指導要領の示す内容であるとみなして考察を進める。

まず、整式の除法の扱いについてみてみよう。整式の除法は整式の積、商として数学Aの内容とされているが、数学Aでは因数定理は扱わないものとされ、整式の因数分解に整式の除法を応用することは範囲外となっている。ここでは、整式の除法をどのようなものとして理解させようとしているのだろうか。高校数学における整式の除法の位置づけは、1変数の多項式に関係した問題を解決するための道具の一つと考えるのが妥当であろう。ところが、多項式の因数分解は数学Bの内容であり、多項式で表される関数は数学IIの内容というようにあちこちに分散された形になっている。しかも、数学Bは数学IIより進んだ内容であるとされているから数学IIで因数定理を利用することはできない。

別の例を考察しよう。数学Aでは、学習指導要領の内容の取扱いで、「数列  $\{n^2\}$  の和を扱う程度」と限定している。通常、数列  $\{n^2\}$  の和を求めるために用いられる方法は数列  $\{n^3\}$ 、 $\{n^4\}$ 、…、の和を求めるために用いることもできるものであり、この限定は、生徒に公式を記憶させ、計算の習熟を図る立場から設けられたものと思われる。同様に、学習指導要領では、内容の取扱いで、

数学Cで取り扱う行列の範囲をかなり狭く限定している。これも技能の習熟を第一に考える立場の現われであろう。

### (2) 複素数

複素数は、計算技能の面からみればそれはどむずかしい内容ではないけれども、理解するのはむずかしい内容である。高校に入学してすぐに学ぶ内容であったために、生徒の数学観に大きな影響を与えてきた。単に数学が自分とは別世界のものであるという理解にとどまらず、数学に対して積極的に向かっていこうとする生徒にとって、数学は到底自分には理解できないものであるという理解にいたらしめるものであった。これは、公式の機械的な適用を中心とした学び方を助長する要因のひとつとなっていたと考えられる。今回の改訂で複素数が数学Iからはずされたことは、そのような意味で画期的なことである。しかし、選択にしたからそれで問題が解決したというものではない。

2乗して-1となる“数”を含むような新たな“数”体系を作ることを目的として複素数平面を学ぶのであれば数学的な見方や考え方として望ましい理解に到達することが期待できる。けれども、指導要領の立場はそれとは異なっている。指導要領では「複素数と方程式の解」が先であり、複素数平面は複素数の別の側面を学ぶという考え方である。指導要領解説を見ると「方程式の解を取り扱う際、数の範囲を複素数に拡張することが必要であることを理解させ」とあって、複素数に対する基本的な姿勢は従来のものと比べて変化していない。そして、複素数平面の位置づけは、「複素数平面を取り扱うことによりそのよさを認識させ」となっている。また、因数定理や簡単な高次方程式を内容に含むことからも、主眼は依然として計算技能の習得におかれているように思われる。

中学校までの、無理数にいたる数の拡張は、現実の量を表現する手段としてなされている。

それに比べて複素数は人工的な色彩の濃いものである。方程式の解を扱う際に複素数が必要であることを高校生に理解させることができることに可能なことであるか疑問であるが、

$i^2 = -1$  であるような“数” $i$ を含んで通常の算術演算が行えるような体系が価値を持つことを理解させることは可能かもしれないと思う。それは、3項間の線形の漸化式や、2階の線形微分方程式の理論などの例があるからである。また、複素数平面上での演算から入るのであれば、周期が同じ単振動の全体からその具体例が作れる。いずれにせよ、その理論構成はそれまでの数の拡張とはかなり異なったアプローチが必要である。

## 4. 内容面から見た望ましい教育課程

### (1) do Math

これからの中等教育を考えるとき、do Mathを基本に据えていくべきであろう。解決すべき課題があって、それに向かって問題解決を進めていくなかで理論が形づくられていく過程を経験することが数学の学び方として最善のものであることは間違いない。つまり、出来上がった理論を教えてその使い方を訓練するのではなく、探求活動を通して理論を作り上げていこうとする立場である。数学的リテラシーをめざす立場であっても、数学とはどのような学問であるのかということを理解させるためには必要なことであり、do Mathを数学的思考力育成を目的としたコースの生徒に限定するのは正しくない。また、do Mathを教科書の本筋から離れたところで実行することを意図するものではなく、本筋の部分をdo Mathで行おうとするものである。したがって、ここでいうdo Mathは、藤田宏が主張する“do Math”とは幾分異なる。

do Mathを基本に据えることになれば、計算技能の修得をおもな目的とした場合とでは教育課程の組み方がかなり変わってくるはずである。現在のように計算技能の習熟に重

きをおいた教育課程の編成の仕方ではそのような数学の学び方はむずかしいのである。

(2) 努力すれば理解できる数学

do Mathの考え方は理想であるけれども、非現実的でもある。教育課程のすべてを発見的な方法で学習させようとすれば、時間が不足してしまうことは目に見えている。しかし、do Mathによって理論を展開していくことが可能であるように作成された教育課程であれば、意欲のある生徒が自分の考え方で理解しようと努めれば理解できるものになるはずである。もちろん、完全に発見的な方法だけですべてを構成することは不可能であり、重要なアイデアが天下り的に提示される部分も生じてしまうであろうが、そのアイデアのすばらしさを生徒が評価することができるような構成をとることは可能であろう。

(3) 数学の成果を示す

——応用のための理論構成——

新たな数学的手法を学ぶ際には、それを身につけたことによって新たな世界が開けたことを実感させることが必要である。数学を学ぶためには、技能の習熟のためのドリルや、難解で面倒な議論を避けて通ることはできない。数学を学んでいこうとする意欲を持続させるためには、学び終えた段階でそれまでの苦労が十分に意味のあるものであったことが理解できるものでなければならない。

数学のよさを認識するために、具体的な応用を念頭においた理論構成を行うべきである。単に将来役に立つかかもしれないというだけの理由で初步の部分を、それもドリル中心に教えたのでは生徒に数学のよさを教えることはできない。

指數・対数や三角関数、微分・積分などといった内容は、自然現象を解析するための道具として考案された数学である。現実の現象を定式化し、数学の問題として考察することによって成果が得られることを示すのに適した内容である。また、代数や論理に関する内

容は、数学自身の内容について定式化し、それを考察することによって、やはり何らかの成果を得るものである。特に、数学の醍醐味は、機械的な処理が可能な別種の問題にいい換えて問題を解決するところにある。解析幾何や微積分などはそれを示すのに典型的な好例であるが、複素数の理論なども本来そのようなものである。

このような数学の特質を生徒に伝えることが求められている。しかし、現状はとても満足のできる状態ではない。

たとえば、三角関数の主要な応用は波動現象の解析であるが、三角関数を考えることによって、うなりの現象や振動変調に伴って生じる側波帯などを精密に議論することができるようになる。しかし、現行の数学の指導において波動現象に触れるることはまれである。しかも、実際には応用上重要な意味をもつ和積の公式などは縮小される傾向にある。

また、現行数学Ⅰ、新課程数学Ⅱの内容である「図形と方程式」は微妙な存在である。高校数学にとって基礎・基本ではあるけれども、解析幾何的な方法のよさを十分に示せるほどの内容をもってはいない。

現在の高校の積分に対する批判の中心は区分求積の考えを持たないことである。ここにも、実際に定積分が応用される場面を想定せずに計算力の育成に重点をおいた教育が行われている現状が見られる。

不定積分（原始関数）の計算についても見直しが可能であろう。これからの中等教育ではどのような量が積分によって求められるか知ることが重要となるであろう。そこに焦点を合わせれば、それほど多くの関数について原始関数を求めることができなくとも積分の意味を教えることはできるはずである。

また、三角関数の応用上、逆三角関数に触れないのは不便である。これからの時代、三角関数の値から角度を求めるのに関数電卓を用いるのが常識であろう。たとえば、数学Ⅰ

の「図形と計量」では正弦定理や余弦定理を扱うものの逆正弦や逆余弦を扱うことができないから、正弦定理や余弦定理のよさを十分生徒に伝えることができていない。

この観点から教育課程を見直すべき部分としては行列の扱いがある。新課程で学ぶコンピュータで連立方程式を解くために適した手段というのは少々専門的すぎる内容である。行列はもっと別の場所に使われて意味を持つものである。いちばん鮮やかな応用は図形の変換である。これはコンピュータによる図形の処理の際、不可欠な技能でもある。

#### (4) 視点の転換により新たな流れを

現在の微積分のコースは、微分法→微分法の応用→積分法→積分法の応用というように、計算を軸に設計されている。しかし、実際に数学が用いられる場面を考えれば、関数を軸にした構成も可能なはずである。たとえば、三角関数、指数関数の微分積分は三角関数、指数関数の一部として学ぶべきものであろう。当然、線形の微分方程式もその一部に含まれる。また、曲線の長さなどは曲線の方程式とともに学んでいくべき内容であろう。

現在の幾何のコースは、「図形と方程式」を出発点として、図形を方程式で表すことから始まって、ベクトルから媒介変数表示へという流れになっている。しかし、方程式による方法は、具体的に点を指示する機能を持たないから、方程式を条件命題として扱うことが必要である。媒介変数表示は点の動きを動的に表すことができるうえに解析的な扱いが容易であり、コンピュータによる処理にも適する。媒介変数表示の図形はコンピュータを用いて変換行列によって図形を変換してみることも簡単にできる。図形の分野においても視点を転換することによって新たな流れを作り出すことができる。この流れは、上述の微積の流れと合流するものとなるであろう。そして、コンピュータのプログラミングとかみ合わせることによって、学んだことの意義が

わかり、しかも、楽しく学ぶことができる。

従来の「場合の数」の学習は確率の一部とみなされてきた傾向がある。場合の数は新課程数学Ⅰでその方向が示されたように数列としてとらえることにより新しい流れが生まれてくるだろう。また、それによって数列教材の扱いにも変化が生じるはずである。そして、コンピュータや整数論などとともに、離散の、あるいは、有限の数学として一つの流れを作ることになるであろう。

コンピュータは離散数学とともに数学の一部として学ぶことになるであろうが、また、探求のための道具としての位置づけもなされるであろう。コンピュータについては、この2つの観点から教育内容を検討していく必要がある。

#### (5) 論理の扱いに流れを

現在、論理は「式と証明」として式の計算と関連づけて扱うことになっているが、十分な成果のあがっていない領域である。現在の高校生で式の証明に論理を用いることが理解できているのは少数である。大方の高校生にとって、等式を条件命題としてとらえ、2つの条件命題についてそれらを満たすものの全体の包含関係について議論しているということを理解するのがむずかしいのである。また、恒等式に関する理論のように、いたずらに複雑な論理構造を持った条件命題を持ち出すことによって混乱に輪をかけているのが現状である。

「図形と方程式」についても、その意味を十分理解している高校生は少数であろう。それは、方程式で与えられた図形との相対的な関係から軌跡を求める問題を苦手とすることから推定できることである。図形を方程式、すなわち、条件命題で表すことの意味、あるいは、条件命題それ自身がよく理解されていないのである。実情は例題をまねて定型的な問題が“解ける”だけで、発展的に応用することなど期待できない。

この状態を改善するためには、たとえば、無理方程式の解法のように不注意から誤りが混入する場面を設定してそのような誤りを防ぐ手段を生徒自身に考察させることからはじめて、条件命題としての見方に習熟させることがはじめにおこなわれるべきである。そこでは、具体的にどのような変形が同値性を保つかが考察の対象となるであろう。必要条件、十分条件に関する形式的な証明の技能は、その次の階梯である。そして、それが完全に理解できて、数学的帰納法における

$$p(n) \rightarrow p(n+1)$$

が理解できるようになるのである。

したがって、論理を具体的な内容と関連づけながら、段階を追って育成するプログラムを含んだ教育課程の作成が必要である。

また、幾何教育においては、方程式を用いる古典的な解析幾何を後回しにしてコンピュータの利用で現実的な方法でもあり、微積分での扱いにも本質的である曲線の媒介変数表示を先行させることも考えてみてよいことだろう。

## 5. 履修形態からみた望ましい教育課程

今回の改訂では対象となる生徒の層に関してかなり極端な二極分化が仮定されている。一つは、平面幾何や複素数平面のようにかなり知的に高度な水準に達した生徒のための内容を盛り込んだことであり、もう一つは数学I、数学IIの必修、準必修科目で数学の学習を終える生徒への対応である。確かにこれらはその目的を果たしているように思われるが、その中間の層への対応はうまくいっていない。数学I、IIだけ学習して終わるのでなく、もう少し範囲を広げて学習しようとする生徒にはかなり厳しい内容である。

多様化した生徒にあった授業を行うには、ともかく学年末までには教科書を終わらさなければという強迫観念を持たずに授業ができるような環境を作ることである。教育課程を

作る際、次の学年での学習に必要な内容は最小限となるように構成しておけば、教師の判断で内容を取捨選択し、詰め込みにならないような授業をすることが可能になる。とりわけ、数学Iのように全員必修の科目についてはこのことを徹底する必要がある。現行数学Iは悪いほうの見本である。

現在、いわゆる文系の学問分野においても数学の必要度はかなりの高まりをみせている。また、コンピュータサイエンスの発達は従来とは異なった数学の分野を要求するようになってきている。従来は、数学を全科目履修しない生徒は、数学とは縁の薄い存在と考えてよかつたのであるが、今後はそうはいかない。数学的考え方を教えるのに適切であるというだけの理由で數学者（あるいは数学教育者）好みの題材を広い範囲の生徒が履修することになる科目の内容とすることは許されない。文系理系が共通に履修するであろう科目の内容は大幅な入れ替えが要求されるであろうし、そのためには新たな系統を作り出す努力も必要である。

## 文献

- 1) 白石和夫：高校数学における教育課程検討の観点、21世紀の算数・数学教育の教育課程の基本理念と内容に関する研究、1993
- 2) 日本数学教育学会教育課程特別研究委員会：21世紀の算数・数学科の教育課程を考えための調査について、21世紀の算数・数学教育の教育課程の基本理念と内容に関する研究、1993
- 3) 文部省：高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編、平成元年
- 4) 藤田宏：数学科改訂の基本方針、改訂高等学校学習指導要領の展開 数学科編、第I部 第1章 §2、明治図書、1990
- 5) 文部省：中学校指導書 数学科編、平成元年 p 6