中学校数学科における論理的に考察し表現する能力の育成について

永田　潤一郎[*]

Fostering the Ability to Think and Represent Logically in Junior High School Mathematics

Junichiro NAGATA

要旨　将来を担う子どもたちに求められる資質・能力という視点から，中学校数学科における論理的に考察し表現する能力の育成について，その指導上の位置付けを明らかにすると共に，指導の現状を確認し，今後の指導の在り方について考察した．その結果，第３学年の「円周角と中心角の関係」における授業を通じて，図形の性質を証明することができなくても，個別具体の場面で成り立つ図形の性質を根拠を明らかにして説明することができる子どもは少なからず存在しており，指導を通じて論理的に考察し表現する能力の育成がなされていることが明らかになった．

キーワード：論理的に考察し表現する能力　図形　資質・能力　学習指導要領　中学校数学科

１．はじめに

将来を担う子どもたちが，それぞれの持つ可能性を知識基盤社会において最大限に発揮していくためには，各教科等の指導を通じて，これからの時代を生きる個人に求められる資質・能力の育成を図ることが不可欠である．文部科学省は，今後の教育課程の在り方を，児童生徒に育成すべき資質・能力を明確化した上で，そのために各教科等でどのような教育目標・内容を扱うべきか，また資質・能力の育成の状況を適切に把握し指導の改善を図るための学習評価はどうあるべきかといった視点から見直すことが必要であると指摘している（文部科学省，2014）．

こうした資質・能力に関して，中学校数学科においては，従来から，「論理的に考察し表現する能力」の育成を重視してきた．ここでは，論理的に考察し表現する能力の捉え方とその指導の現状を確認すると共に，今後の指導の在り方について考察する．

*ながた　じゅんいちろう　文教大学教育学部学校教育課程数学専修

２．論理的に考察し表現する能力の捉え方

(1) 学習指導要領上の位置付け

論理的に考察し表現する能力とは，中学校数学科の３年間の指導を通して，その育成が求められている能力である．学習指導要領においては，各学年の目標のうち，「図形」の領域に対応する項目の中に，第１学年では「論理的に考察し表現する能力を培う」こと，第２学年では「論理的に考察し表現する能力を養う」こと，第３学年では「論理的に考察し表現する能力を伸ばす」ことがそれぞれ明記されている（文部科学省，2008a）．各学年において指導する内容は異なっても，論理的に考察し表現する能力を培い，養い，伸ばすための指導が，継続的に求められているのである．

ここで，論理的に考察し表現する対象は，予想した図形の性質や図形の中に見いだせる関係であり，その一般性を保証することが主な目的である．例えば，学習指導要領解説においては，第２学年における三角形や平行四辺形の性質の指導について，「ここでは，すでに学習した平行線の性質，三角形の合同条件などを基にして，演繹的に考えることによって三角形や平行四辺形の性質や条件を考察し，図形についての理解を深めるとともに，論理的に考察し表現する能力を養うことが大切なねらいである」と述べられている（文部科学省，2008b）．このことから，「図形」の領域における指導では，論理的に考察し表現する能力の育成が，図形の性質の一般性を証明できるようにすることの指導と同義に解釈される傾向が強い．

(2) 指導上の意義

周知の通り，図形の性質の一般性を証明できるようにすることの指導については，多くの課題が指摘されている．例えば，全国学力・学習状況調査の「主として『活用』に関する問題」においては，毎回，図形の性質について証明する記述式の問題が出題されている．その正答率を平成26年度までの調査について振り返ってみると表１の通りであり，全体に正答率が低く無解答率が高くなる傾向が見られ，調査結果の分析においては，常に課題が指摘され続けている．

表１　証明問題の解答状況

実施年度	問題	正答率（%）	無答率（%）
平成19年	B４（2）	49.0	16.7
平成20年	B４（2）	44.2	27.8
平成21年	B４（2）	41.8	20.6
平成22年	B４（2）	48.2	21.9
平成24年	B４（2）	46.8	21.1
平成25年	B４（2）	33.1	22.7
平成26年	B４（2）	40.2	21.9

こうした証明することの指導の実態を改善するための様々な研究も進められている．例えば，宮崎らは課題探究として証明することの指導の実現を目指し，カリキュラム開発を進めている（宮崎・永田・茅野，2014）．

その一方で，こうした証明することの指導の実態から，論理的に考察し表現する能力の育成についても実現は困難であると考える教師が少なくない現状に危惧を感じざるを得ない．数学教育における「論理的に考察する」ことの意味を考え直してみると，本質的には「根拠を明らかにしながら筋道立てて推論する」ことであり，論理的に考察する対象を必ずしも図形の性質が一般的に成り立つかどうかだけに限定する必要はない．例えば，与えられた図形について，その辺の長さや角の大きさなどの個別具体な図形の性質を，証明した図形の性質などに基づき，根拠を明らかにしながら筋道立てて推論して求めることの指導は多くの授業で実現可能である．例えば，図１は中学校第３学年の教科書における「平行線と線分の比」に関する記述の一部である（岡本和夫他，2011）．

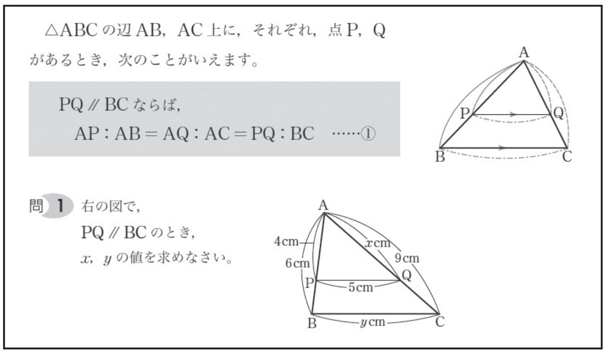


図1　教科書における記述

図１で，「ＰＱ ∥ ＢＣならば，ＡＰ：ＡＢ＝ＡＱ：ＡＣ＝ＰＱ：ＢＣ」であることは，一般性が保証された図形の性質であり，従来から論理的に考察し表現する対象として証明することの指導が行われてきている．これに対して「問１」は，x と y の値を個別具体な図形の性質として求める問題であり，その値を求める過程では，前段で証明した「ＰＱ ∥ ＢＣならば，ＡＰ：ＡＢ＝ＡＱ：

ＡＣ＝ＰＱ:ＢＣ」であることを根拠として用い，論理的に考察し表現することが必要になる．「問１」を単なる適応問題として指導してしまえばそれまでであるが，指導の過程で「x，y の値を求めなさい」の後に「その値をどのようにして求めたのか説明しなさい」という発問を付け加えることで，論理的に考察し表現する能力を育成する指導が顕在化される．

図形の性質の一般性を証明し，それを根拠として新たな図形の性質を導くという従来からの論証指導を樹木の「幹」に喩えるならば，図形の性質の一般性を証明し，それを根拠として個別具体な図形の性質について説明することの指導は樹木の「枝」に喩えられるであろう．子どもたちが今後の人生で求められる資質・能力を育成するという視点から考えた場合，中学校数学科における論理的に考察し表現する能力については，図２のように一般的に成り立つ図形の性質だけでなく，個別具体な図形の性質もその対象として捉え，幹と枝を合わせた一本の樹木として育成していくことが一層必要になってきている．

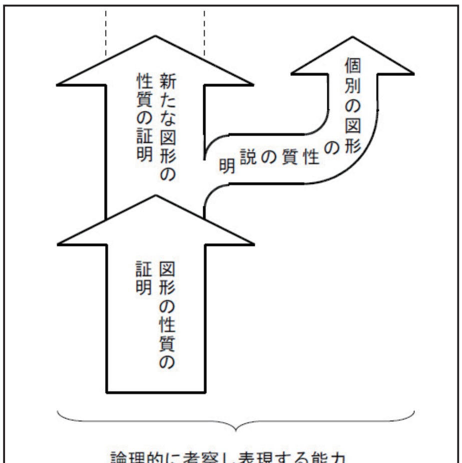


図２　論理的に考察し表現する能力のとらえ方

３．子どもの学習の実態

２に述べた視点に立って論理的に考察し表現する能力の指導の現状を捉えるために，中学校第３学年の「円周角と中心角の関係」について，以下のような授業を計画して実践しその結果を分析した．

(1) 授業の計画

①円周角の定理とその証明について指導した段階で，「円周角の定理を用いて角の大きさを求め，その求め方を説明すること」を目標に１時間の授業として実施する．

②一斉指導で，教科書やノートを使って円周角の定理について復習する．

③図３の問題１が示されたワークシートを配布して，各自で取り組ませる．

問題１：円周角の定理を使って，(1) と (2) の図の∠x と∠y の大きさをそれぞれ求めなさい．
また，どのようにして求めたかを説明しなさい．

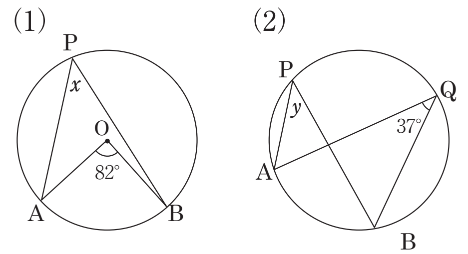


図３　問題１

④机間指導して個別に指導しながら解答状況を確認し，子どもを指名して求めた角の大きさとその求め方を説明させ，教師が板書する．

⑤板書した説明について，全体で検討し改善を図り，各自でワークシートに記入した問題１の説明を改善する．

⑥問題１のワークシートを回収し，ここまでの板書を全て消してから，図４の問題２が示されたワークシートを配布し，各自で取り組ませる．

⑦机間指導をするが，ここでは個別の指導は行わないようにする．

⑧子どもの解答の状況を確認し，問題２のワークシートを回収する．

⑨黒板に問題２の図をかいて，角の大きさとその求め方の説明について全体で確認する．

問題２：下の図で，４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄは円周上の点で，点Ｅは線分ＡＣと線分ＢＤの交点です．円周角の定理やこれまでに学習した図形の性質を使って，$\angle x$の大きさを求めなさい．また，どのようにして求めたかを，前の問題と同じように説明しなさい．

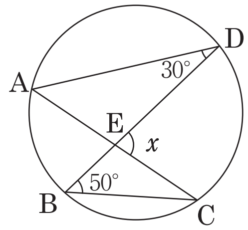


図4　問題2

⑩ここまでの板書を全て消し，図５の問題３が示されたワークシートを配布し，各自で取り組ませる．

⑪机間指導をするが，ここでは個別の指導は行わないようにする．

⑫子どもの解答の状況を確認し，問題３のワークシートを回収する．

問題３：下の図で，４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄは円周上の点で，点Ｅは線分ＡＣと線分ＢＤの交点です．円周角の定理やこれまでに学習した図形の性質を使って，$\angle a + \angle b = \angle x$が成り立つことを証明しなさい．

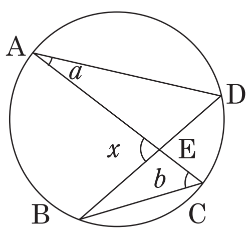


図5　問題3

②から⑤は，既習の円周角の定理を用いて，角の大きさを求め，その求め方をまとめることで，証明した図形の性質を根拠として個別具体な図形の性質について説明することの意味を教師の指導を通して学級全体で確認する場面である．

⑥から⑨も，既習の円周角の定理などを根拠として個別具体な図形の性質について説明する場面であるが，問題２で，$\angle x$の大きさの求め方をどのように説明したかについて，それぞれの子どもの解答の状況を調査するため,教師は指導を控え，学級全体での確認の前にワークシートを回収する．

⑩から⑫は，既習の円周角の定理などを根拠として新たな図形の性質の一般性を証明する場面である．問題２と同様に，問題３についてのそれぞれの子どもの解答の状況を調査するために，教師は指導を控え，学級全体での確認の前にワークシートを回収する．なお，問題３は問題２を一般化したものになっている．

(2) 授業の実践

(1)の授業計画に基づいて，千葉市内の公立中学校に勤務する教師（女性，教職経験10年）に依頼し,授業を担当している第３学年の４学級（生徒数の合計152人）で各１時間の実践を2014年１月に行った．

実践の前に授業を担当する教師と打合せを行い，指導する子どもの実態を踏まえて次の①から④について共通理解を図った．

①授業者のこれまでの指導との接続を図るため，説明の中で用いる円周角の定理については図６のように２つに分け，問題１の指導段階で黒板に示し，子どもの参考になるように以後そのまま提示することにした．

円周角の定理①：１つの弧に対する円周角の大きさは，その弧に対する中心角の大きさの半分である．
円周角の定理②：同じ弧に対する円周角の大きさは等しい．

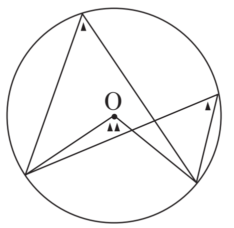


図６

また，説明や証明の中では「円周角の定理①より」や「円周角の定理②から」といった表現を認めることにした．

②問題１について，例えば（1）では解答として次のことを求めることとした．

＜角の大きさ＞　$x=41°$

＜説明＞　次のアからエの事柄がが含まれていること．

ア　∠ＡＰＢは弧ＡＢに対する円周角であること．

イ　∠AOBは弧ABに対する中心角であること．

ウ「円周角の定理①」を用いること．

エ　∠ＡＰＢ＝∠ＡＯＢ÷２＝82÷２＝41であること．

③問題１の指導の過程では，指名された子どもの説明を基に，例えば次のように子どもに問いかけることで，②のア，イ，エとウの対応関係を明らかにすることにした．

・ウの「１つの弧」とは，(1)の図のどの弧を指すのかを問い，ア，イの「弧ＡＢ」のことであることを図に色を付けて確認する．

・エにおいて「∠ＡＰＢ＝∠ＡＯＢ÷２」または「82÷２」を計算したのはなぜかを問い，ウにおける円周角の大きさは中心角の大きさの半分であることがその根拠であることを確認する．

④問題２と問題３の説明の中では，既習事項である図７のような三角形の内角と外角の関係を根拠として用いることが考えられる。調査した４つの学級ではこれまでの指導の中で，この関係を図形の形状から「スリッパ型」または「スリッパの定理」と呼んで用いてきたことから，ここでも説明に中でその名称を用いることを認めることとした．

三角形の１つの外角は，そのとなりにない２つの内角の和に等しい。

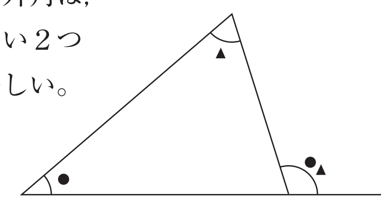


図７

指導した教師は，普段の授業においても意図的に子どもに説明を求める場面を設けており，問題１の指導場面では，どの学級においても子どもから積極的な発言がなされていた．

１時間の授業の中での時間配分については，指導する教師の判断に任せたが，結果としてどの学級においても，（1）の②から⑤に15分程度，（1）の⑥から⑨に15分程度，（1）の⑩から⑫に15分程度の配分となった．

（3）実践の結果

①解答の集計方法

授業後に，回収した問題２と問題３のワークシートを分析した．問題２については，152人の子どものうち欠席者を除く135人が「$\angle x=80°$」と正しく解答することができた．以下，この135人について,解答として書かれた説明を検討する．

子どもの説明は自由記述であるため，単純な集計は困難である．そこで次のような段階を踏んで分類整理することにした．

表２は，問題２の解答例とその判定基準及び判定結果の分類についてまとめたものである．解答については，まず，求める説明を前半と後半に分け，それぞれについて十分満足できる「詳細な説明」と，概ね満足できる「簡略化された説明」を想定した．その上で，前半の説明の判定基準①と②，後半の説明の判定基準③と④をそれぞれ定めた．これらの判定基準にしたがって①と②及び③と④をそれぞれ組み合わせて判定し，前半の説明をＡからＥ，後半の説明をＦからＪにそれぞれ分類した．

これらの分類を基に，前半部分の説明と後半部分の説明を組み合わせ，問題２で求める説明全体の解答類型を正答（◎),準正答（○),誤答（×),無解答（無）に整理したのが表３である．表３から分かるように，前半の説明がＡ判定で後半の説明がＦ判定の場合のみ，問題２の説明として正答（◎）となる．また，前半の説明がＢ判定で後半の説明がＦ判定であるか，前半の説明がＡ判定で

表２　問題２の解答例とその判定基準及び判定結果の分類

<table>
<tr><th></th><th>詳細な説明</th><th>簡略化された説明</th><th>判定基準</th></tr>
<tr><td rowspan="2">前半</td><td>＜例１＞
∠ＡＤＢは弧ＡＢに対する円周角で，
∠ＡＣＢも弧ＡＢに対する円周角だから，
円周角の定理②より，
∠ＡＣＢ＝∠ＡＤＢ＝30°である．

＜例２＞
∠ＡＤＢと∠ＡＣＢは弧ＡＢに対する円周角で，
同じ弧に対する円周角は等しいから，
∠ＡＣＢ＝∠ＡＤＢ＝30°である．</td><td>＜例１＞
円周角の定理②より，
∠ＡＣＢ＝∠ＡＤＢ＝30°である．

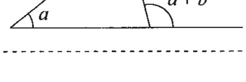
＜例２＞
弧ＡＢの円周角は等しいから，
∠ＡＣＢ＝∠ＡＤＢ＝30°である．</td><td rowspan="2">①∠ＡＣＢ＝30°が書かれていること．
②①の根拠が書かれていること．

分類
Ａ…①②とも書かれている．
Ｂ…①②のいずれかが書かれていていて，もう一方が不十分である（もう一方が書かれていない場合を含む）．
Ｃ…①②の両方の記述が不十分である（いずれかだけが書かれていて不十分を含む）．
Ｄ…①②のいずれか又は両方に誤りがある．
Ｅ…①②とも書かれていない．

<table><tr><td></td><td></td><td colspan="4">②</td></tr><tr><td></td><td></td><td>◎</td><td>○</td><td>×</td><td>無</td></tr><tr><td rowspan="4">①</td><td>◎</td><td>A</td><td>B</td><td>D</td><td>B</td></tr><tr><td>○</td><td>~~B~~</td><td>~~C~~</td><td>~~D~~</td><td>~~C~~</td></tr><tr><td>×</td><td>D</td><td>D</td><td>D</td><td>D</td></tr><tr><td>無</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td></tr></table>
◎：正答，○：準正答，×：誤答，無：無解答</td></tr>
<tr><td colspan="2">判定基準の「不十分さ」について
①…記号の軽微な書き間違い（∠と△など）は無視し，それ以外の誤り（異なる角を記述しているなど）は「×」としたので，「不十分」はない
②…＜例１＞∠ＡＣＢは弧ＡＢの円周角だから
＜例２＞円周角は等しいから</td></tr>
<tr><td rowspan="2">後半</td><td>＜例１＞
△ＢＣＥに着目すると，
三角形の内角と外角の性質より，
∠ＣＥＤ＝∠ＥＢＣ＋∠ＢＣＥ
よって，
$\angle x = 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ$

＜例２＞
△ＢＣＥに着目すると，
三角形の内角は180°だから，
∠ＢＥＣ
＝180°－(∠ＥＢＣ＋∠ＢＣＥ)
＝180°－(50°＋30°)
＝100°
よって，
$\angle x = 180^\circ - 100^\circ$
$= 80^\circ$</td><td>＜例１＞
三角形の内角と外角の性質より，
$\angle x = 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ$

＜例２＞
三角形の内角は180°だから，
180°－(50°＋30°)＝100°
180°－100°＝80°

＜例３＞
スリッパを使って，
$\angle x = 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ$
【注】調査した学級では，これまでの指導の中で，三角形の内角と外角の関係を，その形状から「スリッパ」と呼んでいたことから，ここでもその名称を認めることとした．

</td><td rowspan="2">③$\angle x = 80^\circ$を導く式が書かれていること．
④③の式が成り立つ根拠が書かれていること．

分類
Ｆ…③④とも書かれている．
Ｇ…③④のいずれかが書かれていていて，もう一方が不十分である（もう一方が書かれていない場合を含む）．
Ｈ…③④の両方の記述が不十分である（いずれかだけが書かれていて不十分を含む）．
Ｉ…③④のいずれか又は両方に誤りがある．
Ｊ…③④とも書かれていない．

<table><tr><td></td><td></td><td colspan="4">②</td></tr><tr><td></td><td></td><td>◎</td><td>○</td><td>×</td><td>無</td></tr><tr><td rowspan="4">①</td><td>◎</td><td>F</td><td>G</td><td>I</td><td>G</td></tr><tr><td>○</td><td>G</td><td>H</td><td>I</td><td>H</td></tr><tr><td>×</td><td>I</td><td>I</td><td>I</td><td>I</td></tr><tr><td>無</td><td>G</td><td>H</td><td>I</td><td>J</td></tr></table>
◎：正答，○：準正答，×：誤答，無：無解答</td></tr>
<tr><td colspan="2">判定基準の「不十分さ」について
①…＜例１＞「$\angle x = 80^\circ$」だけが書かれているもの
＜例２＞「180°－50°＋30°＝100°」など，式に軽微な誤りがあるもの
②…＜例１＞外角の性質より
＜例２＞内角は180°だから</td></tr>
</table>

【注】ここでは∠ＡＣＢに着目した説明について述べるが，∠ＣＡＤに着目しても同様とする．

後半の説明がG判定である場合に問題２の説明として準正答（○）となる．この表３の解答類型にしたがって，135 人の子どもの解答を整理した．

表３　問題２の解答類型

前後	F	G	H	I	J
A	◎	○	×	×	×
B	○	×	×	×	×
C	×	×	×	×	×
D	×	×	×	×	×
E	×	×	×	×	無

なお，問題３についても同様の方法で解答例を作成してその判定基準及び判定結果の分類についてまとめ，その組合せによって解答類型を作成して集計を行ったが，ここではその詳細については省略する．

②クロス集計の結果

問題２における説明と問題３における証明の関連を調べるために，問題２と問題３の解答を集計した結果をクロス集計したのが表４である．この表で，例えば「問題２：◎」は，問題２に正答できたことを意味する．また，括弧内の数値は，調査対象とした子ども 135 人に対する割合である．表４から，問題２と問題３の両方に正答できた子どもは 41 人いて，これは全体の約 30％であることが分かる．

４．考察

(1) 全体的な傾向

表４からまず読み取れることは，調査対象となた４学級の子どもの論理的に考察し表現する能力の高さである．問題２と問題３の両方に正答または準正答であった子どもは 70 人であり，これは全体の約 52％に達している．単純な比較はできないが，表１に示した全国学力・学習状況調査における証明の記述式問題の解答状況から見ても，優れた結果であると考えられる．指導を担当した教師は，論理的に考察し表現する能力という概念自体を意識して指導したことはないと述べているが，日々の実践の中で子どもに答えを求めるだけでなく，答えを導く過程を説明することの指導を大切していることがこうした成果に結びついているのではないかと考えられる．

(2) 問題２と問題３の比較

問題２と問題３の調査結果を比較してみると顕著な違いがあることが分かる．正答率を比較すると，問題２が約 72％であるのに対し，問題３は約 59％である．また，誤答率を比較すると問題２が約 28％であるのに対し，問題３は約 41％であり，特に無解答率は問題２が約７％であるのに対し，問題３は約 15％と２倍程度に達している．図形の性質の一般性を証明することの指導の難し

表４　問題２と問題３のクロス集計

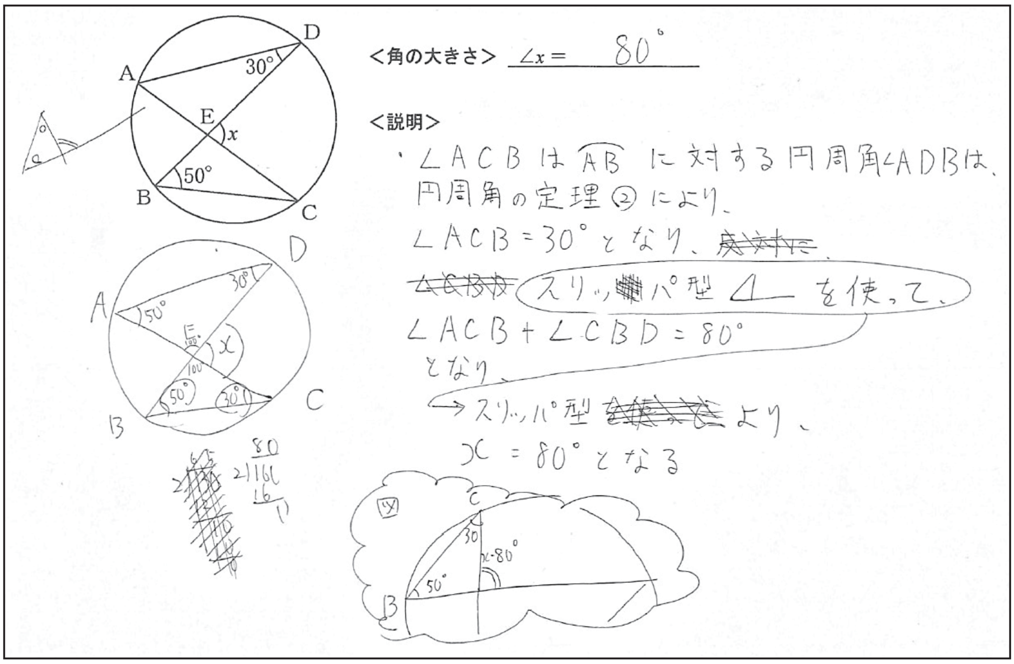
	問題３：◎	問題３：○	問題３：×	問題３：無	合計
問題２：◎	41（ 30 ％）	14（ 10 ％）	9（ 7 ％）	2（ 1 ％）	66（ 49 ％）
問題２：○	6（ 4 ％）	9（ 7 ％）	11（ 8 ％）	5（ 4 ％）	31（ 23 ％）
問題２：×	4（ 4 ％）	4（ 3 ％）	12（ 9 ％）	8（ 6 ％）	29（ 21 ％）
問題２：無	0（ 0 ％）	0（ 0 ％）	4（ 3 ％）	5（ 4 ％）	9（ 7 ％）
合計	52（ 39 ％）	27（ 20 ％）	36（ 27 ％）	20（ 15 ％）	135（ 100 ％）

さは従来から指摘されているが，論理的に考察し表現する能力の育成という視点から考えた場合，個別具体な図形の性質の説明の指導は，現状においても証明の指導以上の成果を上げているのではないかと考えられる．問題３が問題２の一般化になっているにもかかわらず，こうした差が生じてしまうのは，個別具体な図形の性質の説明が，辺の長さや角の大きさなどの具体的な数値を求めた上で，それを求める過程を説明するという子どもにとって比較的説明し易い形式になっていることにも関係していると考えられる．

(3) 問題２と問題３の関係

表４からは，問題３に正答できたのに問題２に正答できなかった子どもは約７％であるが，問題２に正答できたのに問題３に正答できなかった子どもは約 20％に達していることも分かる．これらの子どもは，図形の性質の一般性を証明することはできていないが，個別具体の図形の性質については論理的に考察し表現することができている．図８は，問題２に正答できたが，問題３に正答できなかった子ども解答例である．問題２については，言葉や式はもちろん，図まで用いて工夫

問題２



問題３

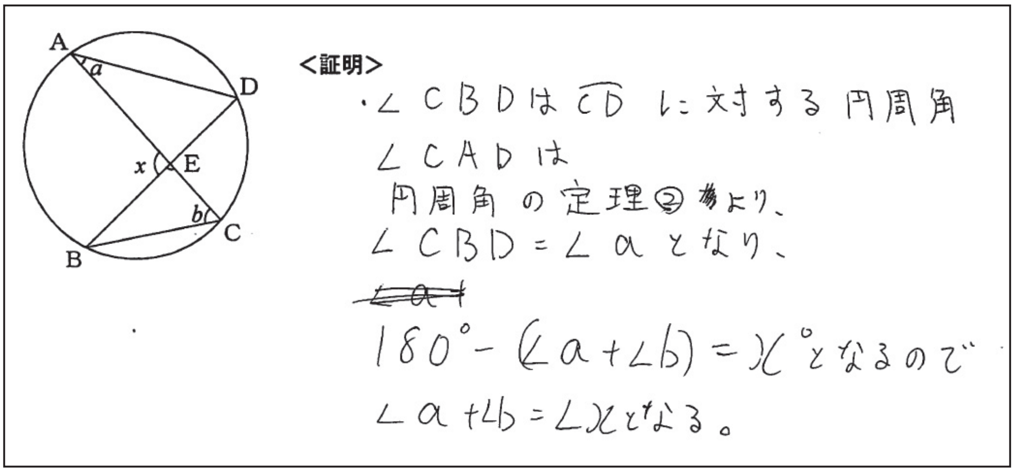


図８　子どもの解答例

して正しく説明できている．しかし，問題３については角の大きさの関係を式を用いて表そうとした際に，誤った関係を導いて誤答になっている．

もちろん，こうした子どもに証明ができるようにするための指導が必要なのは明かであるが，論理的に考察し表現する能力の育成という視点からすると，現状において実現できていることを適切に評価し指導の成果として認めると共に，証明ができるようにするための指導の改善の方向性を探るための端緒とすることも考えられる．

５．おわりに

図形の性質が成り立つことを根拠を明らかにして説明することについて，論理的に考察し表現する能力の育成という視点から考察した結果，性質がいつでも成り立つことを証明する場合と個別具体の場面で成り立つことを説明する場合とでは，子どもの学習の状況に違いがあることが分かった．図形の性質がいつでも成り立つことを証明することができなくても，個別具体の場面で成り立つ図形の性質については，その性質が成り立つことを根拠を明らかにして説明することができる子どもが少なからず存在している．しかし，「図形」の領域の指導においては，証明することができないことで，その子どもは論理的に考察し表現することができないと判断されてしまうことが多いのではないだろうか．今後は，こうした説明ができる子どもの論理的に考察し表現する能力を，教師が指導の過程で的確に把握して一層伸ばしていくことが必要である．

一方で，図形の性質の証明や説明に関する子どもの学習の状況の差異がなぜ発生するのかについては，その原因が明らかになっていない．今回は，中学校第３学年という義務教育終了段階を取り上げたが，証明することの指導が本格的に始まる中学校第２学年の段階ではどのような状況にあるのかなどについては，今後の検討が必要である．

引用・参考文献

- 国立教育政策研究所．2012.「全国学力・学習状況調査の４年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ －児童生徒への学習指導の改善・充実に向けて－」．教育出版
- 国立教育政策研究所．「全国学力・学習状況調査」の実施各年度の報告書 http://www.nier.go.jp/kaihatsu/zenkokugakuryoku.html（参照：2014.10.29）
- 宮崎樹夫・永田潤一郎・茅野公穂．2014.「中学校数学における課題探究として証明することのカリキュラム開発 －進行状況と授業化の意味・役割－」.『日本数学教育学会誌数学教育』．第 96 巻 第９号．pp.2-5
- 文部科学省．2014.「育成すべき資質・能力を踏まえた教育目標・内容と評価の在り方に関する検討会 ―論点整理―」
- 文部科学省．2008a.「中学校学習指導要領」．東山書房
- 文部科学省．2008b.「中学校学習指導要領解説 数学編」．p.96．教育出版
- 永田潤一郎．2013 年.「全国学力・学習状況調査の結果に見る中学校数学科の指導上の課題　－主として『知識』に関する問題点に焦点を当てて－」，『文教大学教育学部紀要 47 集』．pp.89-100
- 岡本和夫他．2011.「未来にひろがる 数学３」．新興出版社啓林館．p.119