可分な一般抽象ヒルベルト空間でのＫ－Ｌ直交系の理論

鈴木　昇一

A Theory of the Karhunen-Loeve Orthogonal System in Any Separable Hilbert Space

Shoichi Suzuki

あらまし

本論文では，各サンプルパターンを直交展開するときに最大の表現能率性を与えるK-L正規直交系につき，S.Suzukiの平均類似度に関連させ，これまで知られているすべての諸性質が証明されている．K-L正規直交系を様々な分野，特にパターン情報処理分野などに注意深く応用するのに便利となっている．具体的には，次の6つの事柄(ｉ)～(vi)が可分な一般抽象ヒルベルト空間で証明あるいは解決される：

(ｉ)K-L正規直交系は平均類似度(測度的ユニタリ不変量)の総和を最大にすること．

(ii)可分なヒルベルト空間では，K-L正規直交系は正値自己共役作用素としての相関作用素Hの固有ベクトル系であること．

(iii)K-L正規直交系が満たす積分方程式を関数空間で導くこと．

(iv)各直交展開係数間は無相関であること．

(ｖ)固有値問題を解いて，K-L正規直交系を具体的に表現すること．

(vi)測度的ユニタリ不変量を各成分に持ち，直交展開における表現能率性の目安を与えるエントロピーを簡単な条件の下で，最小にする正規直交系はK-L正規直交系であること．　□

Abstract

It is well known that the K-L orthonormal system gives the optimality of the expansion of each sampled pattern. From a point of view of a degree DAS of average similarity suggested by S.Suzuki,next six matters (ｉ)～(vi) known so far of the K-L system in any separable Hilbert space can be proved or solved in this paper:

(ｉ)The K-L system maximizes a sum of DAS as a unitary invariant.

(ii)The K-L system consists of an eigenvectors of a positive correlation operator H on a general separable Hilbert space.

(iii)An integral equation can be derived which the K-L system must satisfy.

(iv) The expansion coefficients obtained by expanding a pattern by using the K-L system are uncorrelated each other.
(v) The eigenvalue problem of the K-L system can be solved.
(vi) The K-L system minimizes an entropy which can measure an efficiency of the orthogonal expansions of patterns.

1. まえがき

S.Suzukiは，平均類似度法8)，12)，21)～23)に従い，2.7節の定理7 21)～23)，8)を適用して，カルフーネン・ロエーブ系(K-L直交系) $\{\psi_r\}_{r=1,2,\cdots}$ を求めた後，この系を用いて，パターンモデル(正規化パターン13)，20))，類似度関数，大分類関数を構成し10)，11)，日本語単独母音の連想形記憶，認識に関する計算機シミュレーションを行っている15)～18)．

本論文は，文献8) の第6章の統計作用素(式(29)の相関作用素Hのこと)論，文献12) の第5章の平均類似度論，文献14) の付録の第2章でのパターンエントロピー論などで論及されていることを，少なくとも精確かつ詳細に証明し，拡張した内容になっている．K-L直交系の各成分のノルムを1に規格化して得られるK-L正規直交系による展開の新しい基本的性質を指摘していないという意味で，本投稿論文の内容には，新しさはないが，これまで，良く知られているK-L展開の基本的諸性質につき，次の3事項①～③を主張している：

①一般性，つまり，“可分な一般抽象”ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ でK-L展開を論じたこと
②ヒルベルト空間論1) ～3) を適用して得られた9定理1～9の，内容の数理的厳密性と，その証明の数理的厳密性
③S.Suzukiの平均類似度21)～23)，8)，12)の立場から、K-L展開を論じたこと、並びに，K-L直交系のエントロピーが最小になるための諸条件(3式(102)～(104)のこと)を定理9であからさまにしたことによる多少の独創性 □

式(22)の各サンプルパターン $\varphi_i^{\prime}$ を直交展開したとき得られる展開係数の絶対値の自乗を規格化した後、このサンプルパターン $\varphi_i^{\prime}$ の生起確率で平均して得られる期待値(2式(92)，(95)の v_k, w_k)に関する2式(94),(96)のエントロピー量

$$\mathrm{etpy}(\{\eta_\ell\}_{\ell\in L}\,;\,\Phi_{\mathrm{sample}}),\ \mathrm{etpy}(\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}\,;\,\Phi_{\mathrm{sample}})$$

は，直交展開係数の少数項に式(11)のサンプルパターン集合 Φ_{sample} のエネルギーが集中すればするほど，小さい値をとる(文献11) の1．15.1項の補助定理1.2を参照)．それで，パターンを直交展開し，その部分和による表現の最適能率性を与える指標はこのエントロピー $\mathrm{etpy}(\{\eta_\ell\}_{\ell\in L}\,;\,\Phi_{\mathrm{sample}})$, $\mathrm{etpy}(\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}\,;\,\Phi_{\mathrm{sample}})$ である(例えば、文献14) の付録での2. を参照)．

K-L正規直交系はサンプルパターンを直交展開したとき，表現上の最適能率性を与えるものとして意味付けられる．K-L正規直交系によるパターン展開はパターンの持つ冗長度を除去する効果があり，多変量解析では主成分分析6)ともいわれるものである．この分析を行うニューラルネット7)も研究されている．

顔画像処理ではK-L正規直交系によるパターン展開における主成分(エネルギー最大の成分)を固有顔といい，集団顔を特性付けるものとなっている5)．

本論文では，このK-L正規直交系3)，4)について，次の6つの事柄(i)～(vi)が，これまでの特

別なヒルベルト空間ではなくして，可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$において証明あるいは解決される：

（ⅰ）(2定理1，2) K-L正規直交系はS.Suzukiの平均類似度（測度的ユニタリ不変量の特別なもの）8),12),21)～23)の総和を最大にすること．

（ⅱ）(定理5)可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$では，K-L正規直交系は正値自己共役作用素としての相関作用素Hの固有ベクトル系であること12)．

（ⅲ）(2定理4，5) K-L正規直交系が満たす積分方程式を可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}=L_2(M;dm)$で導くこと3)．

（ⅳ）(定理6)各直交展開係数間は無相関であること19)．

（ⅴ）(定理7)固有値問題を解いて，K-L正規直交系を具体的に表現すること8)．

（ⅵ）(定理9)エントロピーを測度的ユニタリ不変量で定義すれば，単純な条件の下でこのエントロピーを最小にする正規直交系はK-L正規直交系であること14)．

□

（ⅵ）のエントロピー最小性でしばしば特徴付けられるK-L正規直交系は共分散行列の固有ベクトル，或いは自己共分散関数を積分核に持つ積分作用素の固有ベクトルと定義され，用いられることが多いが6), 4), その理由は（ⅱ）で説明される．また，定理7によって、K-L直交系の固有値問題が，ヤコビ法，反復法などの従来良く知られている数値計算手法24)で簡単に解けるように，式(78)のb_{mq}を第m行第q列の要素とする行列Bの固有値問題に帰着される．それで，定理7の適用により，著者以外の研究内容とは異なり，K-L直交系の固有値問題の解決が一層，簡単になっている．

本論文では，（ⅲ）を除いて可分な一般抽象ヒルベルト空間1), 2) $\mathfrak{H}$でのK-L正規直交系を取り扱うが，このような取り扱いは本論文が初めてである．部分的には証明されているけれども，可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$で表現上の最適能率性を与える正規直交系として意味付けられたK-L正規直交系について，この６つの事柄をすべて同時に完全に証明した研究はこれまで，本論文以外に存在していない．それ故，K-L正規直交系のすべての性質が本論文の採用する１つの，２式(49),(50)による表現の下で説明されることになり，応用するのに便利になったといえる．

本論文では，これ以上一般化できないところで論を組み立て，抽象的な論を展開する．それ故，理解を容易にするためには次の特別な可分な複素ヒルベルト空間$\mathfrak{H}=L_2(M;dm)$8),12),14)の元としてパターンφを考えておけばよい：

M：q次元ユークリッド空間R^qの可測部分集合 (1)

dm(x)：正値ルベーグ・スティルチェス式測度 (2)

$x=\langle x_1, x_2, \cdots x_q\rangle \in M(\subseteq R^q)$：Mのq次元直交座標系 (3)

を導入すれば，ヒルベルト空間$\mathfrak{H}=L_2(M;dm)$とは，$\overline{\eta}$をηの複素共役として，内積(φ, η)を

$$(\varphi, \eta)=\int_M dm(x)\,\varphi(x)\cdot\overline{\eta(x)} \tag{4}$$

とする線形空間（ベクトル空間）である．φのノルム$\|\varphi\|$は無論，$\|\varphi\|\equiv\sqrt{(\varphi,\varphi)}$と定義される．

□

可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の簡単な2例を挙げておこう：

［可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の例1］

大きさに依存しないで，手書き漢字パターン$\varphi=\varphi(x_1, x_2)$をtree-Perceptronで認識処理する文献13)の計算機シミュレーションでは，2式(1),(2)のM, dm(x)を各々，

$M \equiv$ 直交座標系 $\langle x_1, x_2 \rangle$ を採用した2次元全平面

$dm(x) = [x_1^2 + x_2^2]^{-1}\, dx_1 dx_2$

とした可分な複素ヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M;dm)$ が採用されている．

［可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の例2］

2つのパターン φ, η として，

$\varphi = \mathrm{col}(a_1, a_2, \cdots, a_q)$（実定数 a_k の列としての列ベクトル）

$\eta = \mathrm{col}(b_1, b_2, \cdots, b_q)$

を考え，内積 (φ, η) が，

$(\varphi, \eta) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k$

と表わされる可分な実ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ としての q 次元ユークリッド空間 R^q は，2式(1),(2)の M,dm(x)が，

$M \equiv \{x \mid 0 \leqq x \leqq q+1\}$

$dm(x) \equiv 1 \quad \text{if} \quad x \in \{1, 2, \cdots, q\},\ = 0 \ \text{otherwise}$

と選ばれた $L_2(M;dm)$ である10)． □

（ｉ）に登場している測度的ユニタリ不変量については，4文献12)，23)，8)，14) で説明されているが，この4文献では，測度的ユニタリ不変量

$(H\varphi, \varphi)/(\varphi, \varphi) = (H\varphi \cdot \|\varphi\|^{-1}, \varphi \cdot \|\varphi\|^{-1})$

だけを使って，パターン認識を論じている．ここに，Hは「可分な一般抽象」ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ での，任意の半正値自己共役作用素であり，パターン φ は「可分な一般抽象」ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の任意の元である．特に，文献13) では，Hの直交直和分解 $H = \sum_{\ell \in L} H_\ell$ を使って得られる測度的ユニタリ不変量 $(H_\ell \varphi, \varphi)/(\varphi, \varphi)$ の組のみを使って，文献12) の定理3（位相情報復元可能定理）を適用し，手書き漢字パターン φ の構造（パターンモデル $T\varphi$）を復元したシミュレーション手法が説明されている．

また，K-L正規直交系を定理7を使って決定し，測度的ユニタリ不変量の組を日本語単独母音から特徴量として抽出し，文献12) の定理3を適用し，日本語単独母音のパターンモデル $T\varphi$ を文献13) での構造復元に関するシミュレーション手法で求め，4文献15)～18)での連想形記憶器MEMOTRON，認識器RECOGNITRONの認識性能を確かめている．

簡単にいえば，測度的ユニタリ不変量 $(H\varphi, \varphi)/(\varphi, \varphi)$ とは，“パターン φ が部分的にパターン η の状態にあることの確率である”という“量子力学での，確率論的物理解釈”を可能にする“1より大きくない非負量”

$|(\varphi \|\varphi\|^{-1}, \eta \|\eta\|^{-1})|^2$

の，Hの固有値（スペクトル）を重みとする無限和に分解できるものである8),12),14)．ここに，η はHの各固有ベクトルである．この測度的ユニタリ不変量 $(H\varphi, \varphi)/(\varphi, \varphi)$ は，式(43)からわかるように，Hと可換な任意のユニタリ座標変換（ユニタリ作用素）Uの下で不変であり，それ故，ユニタリ不変量といわれるものの1種であり，ルベーグ・スティルチェス式測度でもある．

尚，付録Aとして，これまでのSS認識法8)～11)を発展させる手法などを研究しておいた．本研究でのKL-直交系を利用して，axiom 1を満たすパターンモデルを構成する手法などについては，4文献8)～11)などに記載されている．また，KL-直交系を利用したパターン認識，連想形記憶の計算機シミュレーションについては，4文献15)～18)にある．

2. パターンの主成分分析から始まるK-L正規直交系

本章では，パターンを必ずしも完全ではないK-L正規直交系によってヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元としてのパターンφを展開し，主成分分析することに関連して，1．で指摘されたK-L正規直交系の諸性質を明らかにする9定理1～9が証明される．

2.1 パターンの主成分分析

パターンφを内積(φ,η)，ノルム$\|\varphi\|\equiv\sqrt{(\varphi,\varphi)}$とする可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元とする．$\mathfrak{H}$が可分(separable)とは，稠密な(dense)可算部分集合が$\mathfrak{H}$に存在することを指す1), 2)．

完全な正規直交系が高々可算個からなっていれば、ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$は可分である．また，文献1）の5.1節(p.25)の定理5.2では，

可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$には，高々可算個からなる完全な正規直交系を作ることができる

ことが証明されている．よって，一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$で高々可算個からなる完全な正規直交系が存在することと，一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$が可分なこととは同値であることに注意しておこう．

ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$とは内積が定義された無限次元であってよいベクトル空間(内積が定義され得る線形空間)のことであり，有限次元の場合を含む．4性質

(イ)$(\varphi,\varphi)\geqq 0$，かつ，「$\varphi=0 \Leftrightarrow (\varphi,\varphi)=0$」

(ロ)(η,φ)は(φ,η)の共役複素数

(ハ)$(\varphi_1+\varphi_2,\eta)=(\varphi_1,\eta)+(\varphi_2,\eta)$

(ニ)任意の複素定数 a について，

$(a\cdot\varphi,\eta)=a\cdot(\varphi,\eta)$

を満たすだけの(文献1)のpp.1－2の4式(1.9)～(1.12))，複素数値を与える内積(φ,η)というものが定義でき，高々可算個からなる完全な正規直交系が存在するというだけのヒルベルト空間$\mathfrak{H}$が可分な一般抽象という意味である1)．

正規直交性(orthonormality)

$$(\psi_k,\psi_\ell)=1 \quad \text{if} \quad k=\ell,\ =0 \quad \text{if} \quad k\neq\ell \tag{5}$$

を満たすψ_ℓの系(正規直交系)$\{\psi_\ell\}_{\ell=L}$を導入する．そうすると，パターン$\varphi\in\mathfrak{H}$の直交展開

$$\exists\,\varphi_\perp\in H \text{ such that } \forall\,\ell\in L, (\varphi_\perp,\psi_\ell)=0,$$

$$\varphi=\sum_{\ell\in L}(\varphi,\psi_\ell)\cdot\psi_\ell+\varphi_\perp \tag{6}$$

が成り立つが，$\{\psi_\ell\}_{\ell=L}$としてK-L正規直交系を採用したとき主成分分析(principal component analysis)の結果を与えるといわれるこの直交展開では，この直交展開式(6)内の構成成分

$$P(\psi_\ell)\varphi\equiv(\varphi,\psi_\ell)\cdot\psi_\ell \tag{7}$$

は，パターン$\varphi\in\mathfrak{H}$の第$\ell\in L$番目の主成分と呼ばれているものである．第$\ell\in L$番目の主成分の強さをその主成分$P(\psi_\ell)\varphi$とφとの内積

$$|(\varphi,\psi_\ell)|^2(=(P(\psi_\ell)\varphi,\varphi) \tag{8}$$

で定義すると，パターンφの強さ$\|\varphi\|^2$は各主成分の強さ$|(\varphi,\psi_\ell)|^2$の総和を含む形で，

$$\|\varphi\|^2=\sum_{\ell\in L}|(\varphi,\psi_\ell)|^2+\|\varphi_\perp\|^2 \tag{9}$$

と表現されることが展開式(6)，並びに，$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$の正規直交性を考慮すると，直ちにわかる．$\|\varphi_\perp\|^2$ は残余(residue) $\varphi_\perp$の強さを表している．

尚，後述の式(76)からわかるように，任意の$\varphi\in\mathfrak{H}$について，式(6)の成分$\varphi_\perp$が零元となるときに限り，或いは同等なことであるが，式(9)の非負実数値$\|\varphi_\perp\|^2$が零となるときに限り，正規直交系 $\{\psi_\ell\}_{\ell=L}$は完全である．本論文で得られるK-L正規直交系は完全であるとは限らないことに注意しておく．定理7でK-L正規直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$が完全であるように決定されるのは，式(11)のサンプルパターン集合Φ_{sample}がヒルベルト空間$\mathfrak{H}$で稠密である時に限る．

2.2　最小自乗ノルム近似と最大平均類似度近似との同値性

p_iは第 i 番目のパターン の出現確率とする．確率条件

$$[\forall i\in\{1, 2, \cdots, n\},\ 0\leqq p_i\leqq 1]\wedge\sum_{i=1}^{n} p_i=1 \tag{10}$$

を満たす出現確率p_iを持つ$\mathfrak{H}$の元φ_iからなる系

$$\Phi_{\mathrm{sample}}\equiv\{\varphi_i \mid i=1, 2, \cdots, n\} \tag{11}$$

を想定する．以降，n→∞でも成り立つように論を構成する．

複素定数 a_ℓの系$\{a_\ell\}_{\ell=L}$を選んで，各φ_iをψ_ℓの1次結合$\sum_{\ell\in L} a_\ell\cdot\psi_\ell$で近似するときの誤差

$$\varphi_i-\sum_{\ell\in L} a_\ell\cdot\psi_\ell \tag{12}$$

の自乗ノルム

$$\|\varphi_i-\sum_{\ell\in L} a_\ell\cdot\psi_\ell\|^2 \tag{13}$$

を最小にする$a_\ell(\varphi_i)\equiv a_\ell$の組$\{a_\ell\}_{\ell=L}$を求めよう．フーリェ式展開論から，

$$\begin{aligned}&\min_{\{a_\ell\}_{\ell\in L}}\|\varphi_i-\sum_{\ell\in L} a_\ell\cdot\psi_\ell\|^2\\&=\|\varphi_i-\sum_{\ell\in L}(\varphi_i,\psi_\ell)\cdot\psi_\ell\|^2\end{aligned} \tag{14}$$

が成り立ち1), 2)，

$$\forall\ell\in L,\ a_\ell(\varphi_i)=(\varphi_i,\psi_\ell)\ \text{ for any }\ i\in\{1, 2, \cdots, n\} \tag{15}$$

が成り立つことが示される．このとき，直交展開式(6)が成立することになることに注意しておく．

以後，Φ_{sample}の各元φ_iを正規直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$で直交展開するとき，その表現上の能率を最大ならしめよう．

先ず，式(11)のΦ_{sample}の各元φ_iを直交展開するときの最適性(optimality)は，Φ_{sample}とψ_ℓとの間の平均類似度12)

$$\sum_{i=1} p_i|(\varphi_i,\psi_\ell)|^2 \tag{16}$$

の，$\ell\in L$にわたる式(19)の総和$J'(\psi_\ell,\ell\in L)$の最大性に帰着できることを明らかにする次の定理1を指摘する．

［**定理1**］(最小自乗ノルム近似と最大平均類似度近似との同値定理)

非負実数値汎関数

$$\begin{aligned}&J(\psi_\ell,\ell\in L)\\&\equiv\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot\|\varphi_i-\sum_{\ell\in L}(\varphi_i,\psi_\ell)\cdot\psi_\ell\|^2\end{aligned} \tag{17}$$

を最小ならしめる正規直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$は，式(19)で定義される$J'(\psi_\ell,\ell\in L)$を導入すると，等式

$$\begin{aligned}&J(\psi_\ell,\ell\in L)\\&\equiv\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot\|\varphi_i\|^2-J'(\psi_\ell,\ell\in L)\end{aligned} \tag{18}$$

が成立し，よって，

$$J'(\psi_\ell, \ell \in L)$$
$$\equiv \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \sum_{\ell \in L} |(\varphi_i, \psi_\ell)|^2 \qquad (19)$$
を最大ならしめる．更に，逆も成り立つ．

（証明）　計算により，

$$J(\psi_\ell, \ell \in L)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (\varphi_i - \sum_{\ell \in L} (\varphi_i, \psi_\ell) \cdot \psi_\ell,\ \varphi_i - \sum_{m \in L} (\varphi_i, \psi_m) \cdot \psi_m)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot [(\varphi_i, \varphi_i) - \sum_{\ell \in L} (\varphi_i, \psi_\ell) \cdot (\psi_\ell, \varphi_i) - \sum_{m \in L} \overline{(\varphi_i, \psi_m)} \cdot (\varphi_i, \psi_m)$$
$$+ \sum_{\ell \in L} \sum_{m \in L} (\varphi_i, \psi_\ell) \cdot (\varphi_i, \psi_m) \cdot (\psi_\ell, \psi_m)]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot [\, \|\varphi_i\|^2 - \sum_{\ell \in L} |(\varphi_i, \psi_\ell)|^2]$$
$$\because \quad \text{式}(5)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \|\varphi_i\|^2 - J'(\psi_\ell, \ell \in L)$$
を得，等式(18)の成立が判明する．ここで，

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \|\varphi_i\|^2 \text{は一定値である} \qquad (20)$$
ことを考慮すれば，本定理1の成立は明らかである．　□

2.3　最小自乗ノルム近似からのK-L正規直交系の定義

各φ_iから，各φ_iに共通な性質を取り除いて，φ_i'を作り，前節の定理1を構成し直そう。

$$\hat{\varphi} \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \varphi_i \qquad (21)$$
は確率条件式(10)を満たす式(11)のサンプルパターン集合 の平均を与えるパターンであり，

$$\varphi_i' \equiv \varphi_i - \hat{\varphi} \qquad (22)$$
を考えれば，

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \varphi_i' = 0 \qquad (23)$$
が成り立ち，その平均は0である．

2式(17)，(19)の2つの汎関数$J(\psi_\ell, \ell \in L)$，$J'(\psi_\ell, \ell \in L)$に対応して，各$\varphi_i$の代りに各$\varphi_i'$を考えて得られる2つの汎関数

$$J_0(\psi_\ell, \ell \in L)$$
$$\equiv \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \|\varphi_i' - \sum_{\ell \in L} (\varphi_i', \psi_\ell) \cdot \psi_\ell\|^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \|\varphi_i'\|^2 - J_0'(\psi_\ell, \ell \in L)$$
$$\because \quad \text{定理1} \qquad (24)$$
$$J_0'(\psi_\ell, \ell \in L)$$
$$\equiv \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \sum_{\ell \in L} |(\varphi_i', \psi_\ell)|^2 \qquad (25)$$
を考えよう．式(25)のJ_0'は，式(24)のJ_0から正規直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$の各成分$\psi_\ell$を含まない一定項$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \|\varphi_i'\|^2$を取り除いたものに，$-1$をかけたものである．

明らかに，定理1の証明と同様にして，次の定理2が成り立つ．

［**定理2**］（最小自乗ノルム近似と最大平均類似度近似との同値定理）

正規直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$は汎関数$J_0(\psi_\ell, \ell \in L)$を最小ならしめる．　(26)

$\Leftrightarrow$

正規直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$は汎関数$J_0'(\psi_\ell, \ell\in L)$を最大ならしめる． (27)

□

式(24)の汎関数$J_0(\psi_\ell, \ell\in L)$を最小ならしめる正規直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$はK-L正規直交系(Karhunen Loeve orthonormal system)と呼ばれる．定理2により、K-L直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$は式(25)の汎関数$J_0'(\psi_\ell, \ell\in L)$を最大ならしめる正規直交系として定義されてもよいことになる．

K-L正規直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$を求める前に，次節で相関作用素Hの性質を明らかにしておこう．

2.4　相関作用素Hの諸性質

線形作用素$Q(\varphi_i')$を

$$Q(\varphi_i')\cdot\equiv(\varphi,\ \varphi_i')\cdot\varphi_i' \text{ for any } \varphi\in\mathfrak{H} \tag{28}$$

と定義し，各$Q(\varphi_i')$をp_iで重み付け，その$i\in\{1, 2, \cdots, n\}$ にわたる総和としての，平均化線形作用素

$$H\varphi\equiv\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot Q(\varphi_i')\varphi$$
$$\text{for any } \varphi\in \mathrm{Domain}(H)\equiv\{\varphi\in H \mid \|H\varphi\|<\infty\}\subseteq\mathfrak{H} \tag{29}$$

を導入する．登場しているDomain(H)はHの定義域である1)．次の4命題1～4は，Hの持つ4性質を指摘している．

3事項

(一)ノルムに関する3角不等式

$$\forall\varphi, \forall\eta\in\mathfrak{H}, \|\varphi+\eta\|\leqq\|\varphi\|+\|\eta\| \tag{30}$$

(二)任意の複素定数 a に対し

$$\forall\varphi\in\mathfrak{H}, \|a\cdot\varphi\|=|a|\cdot\|\varphi\| \tag{31}$$

(三)シュワルツに関する不等式

$$\forall\varphi, \forall\eta\in\mathfrak{H}, |(\varphi,\ \eta)|\leqq\|\varphi\|\cdot\|\eta\|$$

ここに，等号の成立するのはφがηの定数(零を含む)倍の時に限る (32)

に注意すれば，次の命題1が容易に証明される．

［**命題1**］($\|H\varphi\|$の評価)

$$\forall\varphi\in\mathfrak{H}, \|H\varphi\|$$
$$\leqq\left[\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot\|\varphi_i'\|^2\right]\cdot\|\varphi\|. \tag{33}$$

□

例えば，

$$\exists M>0, \forall i\in\{1, 2, \cdots, n\},\ \|\varphi_i'\|\leqq M<\infty$$
$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot\|\varphi_i'\|^2\leqq M^2<\infty \tag{34}$$

に注意し，以後，norm(H)を，不等式

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot\|\varphi_i'\|^2\leqq \mathrm{norm}(H)<\infty \tag{35}$$

を満たす最小の正数(下限)とすれば，命題1から命題2が成り立つ．

［**命題2**］(Hの有界性)

条件式(35)の下で，不等式

$$\forall\varphi\in\mathfrak{H}, \|H\varphi\|\leqq \mathrm{norm}(H)\cdot\|\varphi\|$$

が満たされ，Hはその定義域 Domain(H)が

$$\mathrm{Domain}(H)=\mathfrak{H} \tag{36}$$

である有界作用素である． □

次に，式(29)の平均化線形作用素Hが自己共役作用素であることを命題3で示す．

［**命題3**］(Hの自己共役性)

条件式(35)の下で，

$$\forall\varphi,\ \forall\eta\in\mathfrak{H},$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot(\varphi,\cdot\varphi_i')\cdot(\varphi_i',\eta)$$

$$=(H\varphi,\eta)=(\varphi,H\eta) \tag{37}$$

が成立し，H は自己共役作用素である．

(証明) $\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot(\varphi,\cdot\varphi_i')\cdot(\varphi_i',\eta)$

$$=\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot((\varphi,\cdot\varphi_i')\cdot\varphi_i',\eta)$$

$$=(\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot(\varphi,\varphi_i')\cdot\varphi_i',\eta)$$

$$=(H\varphi,\eta) \tag{38}$$

であるし，

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot(\varphi,\cdot\varphi_i')\cdot(\varphi_i',\eta)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot((\varphi,\overline{(\varphi_i',\eta)}\cdot\varphi_i')$$

$$=((\varphi,\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot(\eta,\varphi_i')\cdot\varphi_i')$$

$$=(\varphi,H\eta) \tag{39}$$

を得，証明が終わった． □

命題3で，$\varphi=\eta$とすれば，次の命題4が得られる．

［**命題4**］(Hの正値性)

条件式(35)の下で，

$$\forall\varphi\in\mathfrak{H},\ 0\leqq\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot|(\varphi,\cdot\varphi_i')|$$

$$=(H\varphi,\varphi)=(\varphi,H\varphi). \tag{40}$$

が成立し，Hは半正値自己共役作用素である． □

有界作用素Bが非有界であって良い作用素Aと可換であるとは，

$$\forall\varphi\in \mathrm{Domain}(A)\equiv\{\varphi\in\mathfrak{H}\mid\|A\varphi\|<\infty\},$$

$$B\varphi\in \mathrm{Domain}(A)\wedge A(B\varphi)=B(A\varphi) \tag{41}$$

が成り立つことをいう1)．

半正値自己共役作用素Gと$\mathfrak{H}$の元φとを用いて定義される非負実数値

$$\mathfrak{F}(\varphi)\equiv(G\varphi|\varphi|^{-1},\varphi\|\varphi\|^{-1}) \tag{42}$$

は，Gと可換な任意のユニタリ作用素(一般的等距離的座標変換)Uの下での不変性

$$\forall\varphi\in \mathrm{Domain}(G),\ \mathfrak{F}(U\varphi)=\mathfrak{F}(\varphi) \tag{43}$$

を備えている意味などから(文献13)の付録4，定理3の証明内部を参照)，8文献8)，12)～14)，20)～23)では，測度的ユニタリ不変量(metric unitary invariant)と呼ばれている．ちなみに，ユニタリ作用素Uとは

$$\forall\varphi\in\mathfrak{H},\ \|U\varphi\|=\|\varphi\| \tag{44}$$

を満たす線形作用素のことであり，式(43)は，

$$\forall\varphi\in \mathrm{Domain}(G),\ U\varphi\in \mathrm{Domain}(G)\wedge$$

$$\mathfrak{F}(U\varphi)$$

$= (GU\varphi \| U\varphi \cdot \|^{-1}, U\varphi \| U\varphi \|^{-1})$　∵　定義式(42)

$= (GU\varphi, U\varphi)/(U\varphi, U\varphi)$

$= (UG\varphi, U\varphi)/(U\varphi, U\varphi)$　∵　GはUと可換

$= (G\varphi, \varphi)/(\varphi, \varphi)$　∵　Uはユニタリ作用素

$= \mathfrak{F}(\varphi)$

と、証明される。

式(25)の汎関数$J_0'(\psi_\ell, \ell \in L)$が，Hと$\psi_\ell$とで規定される測度的ユニタリ不変量

$$(H\psi_\ell \| \psi_\ell \|^{-1}, \psi_\ell \| \psi_\ell \|^{-1}) \tag{45}$$

の，$\ell \in L$にわたる総和で表現され得ることを，次の定理3は指摘したものである．なお，

$$DAS(\Phi_{sample}, \psi_\ell) \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot |(\varphi_i', \psi_\ell)|^2 \tag{46}$$

は式(11)のパターン集合 と との間の平均類似度(degree of average similarity)と呼ばれているが8),12)，同時に，次の定理3は式(46)の$DAS(\Phi_{sample}, \psi_\ell)$が式(45)の$(H\psi_\ell \| \psi_\ell \|^{-1}, \psi_\ell \| \psi_\ell \|^{-1}$に等しいことを明らかにしている．

［**定理3**］（汎関数$J_0'(\psi_\ell, \ell \in L)$の，Hによる表現定理）

条件式(35)の下で，次の①，②が成り立つ：

①$\forall \ell \in L (H\psi_\ell \| \psi_\ell \|^{-1}, \psi_\ell \| \psi_\ell \|^{-1})$

$$= (H\psi_\ell \| \psi_\ell \|^{-1}) \tag{47}$$

$$= DAS(\Phi_{sample}, \psi_\ell). \tag{48}$$

②$\forall \varphi \in \mathfrak{H}$,

$J_0'(\psi_\ell, \ell \in L)$

$$= \sum_{\ell \in L} (H\psi_\ell, \psi_\ell) \tag{49}$$

$$= \sum_{\ell \in L} DAS(\Phi_{sample}, \psi_\ell). \tag{50}$$

（証明）　①$(H\psi_\ell \| \psi_\ell \|^{-1}, \psi_\ell \| \psi_\ell \|^{-1})$

$= (H\psi_\ell, \psi_\ell)$　∵　式(5)　(47)

$= \sum_{\ell \in L} \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot |(\varphi, \varphi_i')|^2$　∵　命題4

$= DAS(\Phi_{sample}, \psi_\ell).$　∵　式(46)

②　式(25)の$J_0'(\psi_\ell, \ell \in L)$は，

$J_0'(\psi_\ell, \ell \in L)$

$= \sum_{\ell \in L} \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot |(\varphi, \varphi_i')|^2$

$= \sum_{\ell \in L} DAS(\Phi_{sample}, \psi_\ell)$　∵　式(46)

$= \sum_{\ell \in L} (H\psi_\ell, \psi_\ell)$　∵　2式(48),(47)

と変形され，証明が終わった．　□

定理3の②は，式(25)の汎関数$J_0'(\psi_\ell, \ell \in L)$は式(29)の相関作用素Hと$\psi_\ell$との規定する測度的ユニタリ不変量$(H\psi_\ell, \psi_\ell)$ の，$\ell \in L$にわたる総和として，表されることを指摘している．

以後，2式(49),(50)のように、式(25)の汎関数J_0'が再表現される観点から，K-L直交系を研究しよう．

2.5　可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H} = L_2(M, dm)$での、相関作用素 H の表現

式(4)の内積(φ, η)を採用しているヒルベルト空間$\mathfrak{H} = L_2(M, dm)$では，2点 x, y∈M間の結合の

程度を表す相関関数(correlation function)$h(x, y)$とは，式(11)のサンプルパターン集合Φ_{sample}から定まり，

$$h(x, y) \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \varphi_i'(x) \cdot \overline{\varphi_i'(y)} \tag{51}$$

と定義されるものである．このとき，式(29)で定義される作用素Hは式(11)のサンプルパターン集合Φ_{sample}の相関作用素(correlation operator)と呼ばれる．式(29)のHをこのように呼ぶ理由は次の定理4に示されているように，$\mathfrak{H} = L_2(M, dm)$では，Hは$h(x, y)$を核関数とする積分作用素として表現されるからである．

［**定理4**］（相関関数$h(x, y)$による$(H\varphi)(x)$の積分作用素表現定理）

ヒルベルト空間$\mathfrak{H} = L_2(M, dm)$では，式(29)で定義される相関作用素Hは次のように表される：

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H} = L_2(M, dm),\ \forall x \in M,$$
$$(H\varphi)(x)$$
$$= \int_M dm(y)\, h(x, y) \cdot \varphi(y). \tag{52}$$

（証明） $(H\varphi)(x)$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (\varphi, \cdot\ \varphi_i') \cdot \varphi_i'(x) \qquad \because\ 2式(29),(28)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \left[\int_M dm(y)\, \overline{\varphi_i'(y)} \cdot \varphi(y)\right] \cdot \varphi_i'(x) \qquad \because\ 式(4)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \left[\int_M dm(y)\ \varphi_i'(x) \cdot \overline{\varphi_i'(y)} \cdot \varphi(y)\right]$$
$$= \int_M dm(y)\, h(x, y) \cdot \varphi(y). \qquad \because\ 式(51) \qquad \square$$

2.6　K-L正規直交系が満たす相関関数 h(x, y) を核とする積分方程式

本章では，K-L正規直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$が満たす積分方程式を可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H} = L_2(M, dm)$で導き，次に，K-L正規直交系は測度的ユニタリ不変量の総和を最大にすることを指摘し，更に，可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$では，K-L正規直交系は正値自己共役作用素としての，式(29)の相関作用素Hの固有ベクトル系であることを示し，後に，K-L正規直交系による各直交展開係数間は無相関であることを明らかにする．

自己共役作用素Gの固有値方程式

$$G\varphi = \mu\varphi \tag{53}$$

の解である固有値μ，固有ベクトル・$(\neq 0)$につき，このようなμの集まりの下限，上限を各々，

$$\inf\ \mu,\ \sup\ \mu \tag{54}$$

と表す．

先ず，実数値2次汎関数$(G\varphi, \varphi)$のとる値(測度的ユニタリ不変量)についての，下限・上限を明らかにする次の補助定理1を指摘する．

［**補助定理1**］（実数値2次汎関数$(G\varphi, \varphi)$の下限・上限）1)）

自己共役作用素Gから定まる2次汎関数$(G\varphi, \varphi)$について，

$$\forall \varphi \in \mathrm{Domain}(G),$$
$$[\inf\ \mu] \cdot (\varphi, \varphi) \leqq (G\varphi, \varphi) \leqq [\sup\ \mu] \cdot (\varphi, \varphi). \tag{55}$$

特に，Gが正値自己共役作用素であれば，不等式

$$0 \leqq \inf\ \mu \leqq \sup\ \mu \tag{56}$$

が成り立つ．　$\square$

次の補助定理2も，自己共役作用素Gのスペクトル理論1)から直ちに知られる．

［**補助定理2**］（相関作用素Hの固有値定理）

式(29)の相関作用素Hの，すべての固有値の集合は高々可算個の非負実数値からなる点スペクトル系であり，固有値方程式

$$H\psi_\ell' = \lambda_\ell' \cdot \psi_\ell' \wedge \| \psi_\ell' \| = 1,\ \ell \in L \tag{57}$$

の解である“第$\ell \in L$番目の固有値λ_ℓ'と，(λ_ℓ'に属する)ノルム規格化固有ベクトルψ_ℓ'とを考えると，その大きさの順に

$$\lambda_1' \geqq \lambda_2' \geqq \cdots \geqq 0 \tag{58}$$

と並べることができる．但し，重複を許して，重複の回数だけ固有値を並べ，1つの固有値に属する固有ベクトルは唯1個に限るものとする．このとき，各ψ_kの代りに，ψ_k'を考えて得られる式(5)の正規直交性も成り立っており，式(29)で定義される相関作用素Hがその各固有値λ_k，各固有ベクトルψ_kによってスペクトル分解されるというスペクトル表現

$$\forall \varphi \cdot \in \mathrm{Domain}(H),\ H\varphi = \sum_{\ell \in L} \lambda_\ell \cdot (\varphi, \psi_\ell) \cdot \psi_\ell \tag{59}$$

が成り立つ．□

次の定理5は，K-L正規直交系を$\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$が等式(60)を満たすという意味で，式(29)の相関作用素Hの固有ベクトル系であることを指摘しており，然も，等式(62)が成り立つという意味で，式(25)の汎関数$J_0'(\psi_\ell, \ell \in L)$がHのすべての固有値$\lambda_\ell$の総和であることを指摘している．

［**定理5**］（K-L正規直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$の導出・特徴付け定理）

式(25)の汎関数$J_0'(\psi_\ell, \ell \in L)$を最大ならしめるK-L正規直交系を$\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$とする．このとき，固有値方程式

$$H\psi_\ell = \lambda_\ell \cdot \psi_\ell \wedge \| \psi_\ell \| = 1,\ \ell \in L \tag{60}$$

$$\therefore\ (H\psi_\ell, \psi_\ell) = \lambda_\ell,\ \ell \in L \tag{61}$$

が成り立ち，$\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$をK-L正規直交系に選んだとき，式(25)の汎関数$J_0'(\psi_\ell, \ell \in L)$は

$$J_0'(\psi_\ell, \ell \in L) = \sum_{\ell \in L} \lambda_\ell \tag{62}$$

と表現される．

（証明）　補助定理2を考慮して、補助定理1を適用すると，式(47)の測度的ユニタリ不変量$(H\psi_\ell, \psi_\ell)$を最大ならしめるのは，　が式(29)の相関作用素Hの，式(57)の固有値方程式を満たすときであり，

$$\psi_\ell = \psi_\ell' \wedge \lambda_\ell = \lambda_\ell'\ (\ell \in L) \tag{63}$$

が成立するときであることがわかる．よって，2式(60)，(61)が成り立ち，式(49)から，式(62)が得られる．□

次の定理6は、K-L正規直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$による2つの異なる任意の直交展開係数

$$(\varphi_i', \psi_\ell),\ (\varphi_i', \psi_k),\ i \in \{1, 2, \cdots, n\} \tag{64}$$

間は無相関であることを明らかにしており，$(H\psi_\ell, \psi_\ell)$は2つの任意のこの直交展開係数間の共分散(covariance)であることを明らかにしている．

［**定理6**］（K-L正規直交展開係数の2つの組の無相関定理）

K-L正規直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$について，次の(ｉ)，(ii)が成り立つ：

(ｉ)(零平均値性)

$$\forall \ell \in L,\ \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (\varphi_i', \psi_\ell) = 0. \tag{65}$$

(ii)(無相関性)

$\forall \ell \in L,\ \forall k \in L,$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (\varphi_i', \psi_\ell) \cdot \overline{(\varphi_i', \psi_k)}$$
$$= (H\psi_\ell, \psi_\ell) \tag{66}$$
$$= \begin{cases} \lambda_\ell & \text{if } k = \ell \\ 0 & \text{if } k \neq \ell. \end{cases} \tag{67}$$
（証明）　$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (\varphi_i', \psi_\ell)$
$$= (\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \varphi_i', \psi_\ell)$$
$$= 0 \quad \because \text{式}(23)$$
を得，(ｉ)の成立がわかる．また，(ii)の成立は，
$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (\varphi_i', \psi_\ell) \cdot \overline{(\varphi_i', \psi_k)}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (\psi_k, \varphi_i') \cdot (\varphi_i', \psi_\ell)$$
$$= (H\psi_k, \psi_\ell) \quad \because \text{命題}3$$
$$= \lambda_k \cdot (\psi_k, \psi_\ell) \quad \because \text{式}(60)$$
と，補助定理2の$\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$の正規直交性から明らかである．□

2.7　相関作用素Hの固有値問題の解決

式(29)で定義される相関作用素Hの固有値問題を解いて，K-L正規直交系を具体的に表現するのが，次の定理7である．

以下の定理7に登場し，式(78)の b_{mq}を第m行第 q 列の要素とする行列Bは，内積〔$\vec{u}, \vec{v}$〕を
$$[\vec{u}, \vec{v}] = \sum_{m=1}^{\infty} u_m \cdot \bar{v}_m \tag{68}$$
ここに，col(…)は…の列ベクトルの意であって，
$$\vec{u} = \mathrm{col}(u_1\ u_2\ \cdots),\ \text{各 } u_m \text{ は複素定数} \tag{69}$$
$$\vec{v} = \mathrm{col}(v_1\ v_2\ \cdots),\ \text{各 } v_m \text{ は複素定数} \tag{70}$$
とする無限次元数列空間(ℓ^2)（可分なヒルベルト空間の1つ）1)での相関作用素である．行列Bの固有値方程式
$$B\vec{v}_r = \mu_r \cdot \vec{v}_r \wedge [\vec{v}_r, \vec{v}_r] = 1,\ r \in \{1, 2, \cdots\} \tag{71}$$
における各固有値μ_r，各ノルム規格化固有ベクトル$\vec{v}_r$は数値計算法における従来の，良くしられた手法(ヤコビの方法，べき乗法など24))で求めることができる．事実，4計算機シミュレーション文献15)～18)では、正規直交系$\{\eta_\ell\}_{\ell \in L}$として，ウォルシュ関数系を採用し，ヤコビの方法を用いている．

このようにして，固有値方程式(71)の解である第 $r \in \{1, 2, \cdots\}$ 番目の(固有値μ_rに属する)ノルム規格化固有ベクトル
$$\vec{v}_r = \mathrm{col}(v_{1r}\ v_{2r}\ \cdots) \tag{72}$$
と，その大きさの順に
$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq 0 \tag{73}$$
と並べられた第 $r \in \{1, 2, \cdots\}$ 番目の固有値μ_rとを考えることができる．但し，重複を許して，重複の回数だけ，Bの固有値を並べ，1つの固有値に属する固有ベクトルは唯1個に限るものとする．

そうすると，Bの相異なる2つの非負固有値μ_r，μ_qに属する2つの固有ベクトル$\vec{v}_r$, $\vec{v}_q$間に正規直交性

$$〔\vec{v}_r, \vec{v}_q〕=1 \quad \text{if} \quad r=q, =0 \quad \text{if} \quad r\neq q \tag{74}$$

が成り立っていると仮定しても一般性は失われない．何故ならば，同一固有値に属する固有ベクトル系は1次独立であるから，グラム・シュミットの直交化法によって正規直交系に変換できるからである．

同様に，式(29)で定義される相関作用素Hの，式(60)の第 $r\in\{1, 2, \cdots\}$ 番目の固有値 λ_r とノルム規格化固有ベクトル ψ_r を導入し，その大きさの順に

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0 \tag{75}$$

と並べることができる．但し，重複を許して，重複の回数だけ，Hの固有値を並べ，1つの固有値に属する固有ベクトルは唯1個に限るものとする．

次の定理7で導入されている任意の正規直交系 $\{\eta_\ell\}_{\ell\in L}$ が完全(complete)であるとは，

$$\forall \ell \in L, (\varphi, \eta_\ell)=0 \Rightarrow \|\varphi\|=0 \tag{76}$$

が満たされることをいう．このとき，$\{\eta_\ell\}_{\ell\in L}$ の正規直交性から成立している関係

$$\begin{aligned}
&〔\vec{v}_r, \vec{v}_q〕\\
&=\sum_{m=1}^{\infty} v_{mr}\cdot\overline{v_{mq}}\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} v_{mr}\cdot\overline{v_{nq}}\cdot(\eta_m, \eta_n)\\
&=(\sum_{m=1}^{\infty} v_{mr}\cdot\eta_m, \sum_{n=1}^{\infty} v_{nq}\cdot\eta_n)
\end{aligned} \tag{77}$$

に注意しておく．

［**定理7**］（K-L正規直交系の表現定理）

$\mathfrak{H}$ での正規直交系 $\{\eta_m\}_{m=1,2,\cdots}$ を任意に導入し、完全であるとする．

$$b_{mq}=\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot(\varphi_i', \eta_m)\cdot\overline{(\varphi_i', \eta_q)} \tag{78}$$

を第 m 行第 q 列の要素とする行列Bの固有値方程式(71)を解けば、式(29)で定義される相関作用素Hの第 $r\in\{1, 2, \cdots\}$ 番目の固有値 λ_r と固有ベクトル(K-L正規直交ベクトル) ψ_r は，

$$\lambda_r=\eta_r \tag{79}$$

$$\psi_r=\sum_{m=1}^{\infty} v_{mr}\cdot\eta_m \tag{80}$$

と，求まる．

（証明） 式(22)の $\varphi_i'\in H$ は，

$$\varphi_i'=\sum_{m=1}^{\infty}(\varphi_i', \eta_m)\cdot\eta_m \tag{81}$$

と直交展開されるから，式(25)の汎関数 $J_0'(\psi_\ell, \ell\in L)$ を最大ならしめるK-L正規直交系 $\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$ (定理5)を固有ベクトル系とする式(29)で定義される相関作用素Hに $\varphi\in \mathrm{Domain}(H)$ を作用させて得られる $H\varphi\in\mathfrak{H}$ は，

$$\begin{aligned}
H\varphi&=\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot(\varphi, \varphi_i')\cdot\varphi_i'\\
&=\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot(\varphi, \varphi_i')\cdot\sum_{m=1}^{\infty}(\varphi_i', \eta_m)\cdot\eta_m && \because \text{式(81)}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{\infty} p_i\cdot(\varphi, \varphi_i')\cdot(\varphi_i', \eta_m)\cdot\eta_m\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}\eta_m\cdot\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot(\varphi, \varphi_i')\cdot(\varphi_i', \eta_m) && \because \text{総和の順序の交換}\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}\eta_m\cdot\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot[\sum_{q=1}^{\infty}\overline{(\varphi_i', \eta_q)}\cdot(\varphi, \eta_q)]\cdot(\varphi_i', \eta_m) && \because \text{式(81)}\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}\eta_m\cdot\sum_{q=1}^{\infty}(\varphi, \eta_q)\cdot\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot(\varphi_i', \eta_m)\cdot\overline{(\varphi_i', \eta_q)} && \because \text{総和の順序の交換}\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}\eta_m\cdot\sum_{q=1}^{\infty} b_{mq}\cdot(\varphi, \eta_q) && \because \text{式(78)}
\end{aligned} \tag{82}$$

と，計算される．ここで，任意に $r\in\{1, 2, \cdots\}$ を選び，固定し，

$$(\varphi, \eta_m)=v_{mr} \tag{83}$$

であるような元

$$\varphi=\sum_{m=1}^{\infty}(\varphi, \eta_m)$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty} v_{mr}\cdot\eta_m\in\mathfrak{H} \tag{84}$$

を考えれば、式(84)のこの $\varphi\in\mathfrak{H}$ に対応して，

$$\underline{\varphi}=\mathrm{col}((\varphi, \eta_1)(\varphi, \eta_2)\cdots)$$
$$=\vec{v}_r\in(\ell^2) \tag{85}$$

が対応する．このとき，式(82)の $H\varphi$ につき，式(83)の (φ, η_m) を代入すれば，

$$H\varphi=\sum_{m=1}^{\infty}\eta_m\cdot\sum_{q=1}^{\infty}b_{mq}\cdot(\varphi, \eta_q)$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}\eta_m\cdot\sum_{q=1}^{\infty}b_{mq}\cdot v_{qr}$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}\eta_m\cdot\mu_r\cdot v_{mr} \qquad \because\ \text{式}(71)$$
$$=\mu_r\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\eta_m\cdot v_{mr}$$
$$=\mu_r\cdot\varphi \qquad \because\ \text{式}(84) \tag{86}$$

の成立がわかり，式(84)の φ は，固有値 μ_r に属する固有ベクトルであることがわかる．

$$\lambda_r=\mu_r \tag{87}$$

とおくと，

$$\sum_{m=1}^{\infty}v_{mr}\cdot\eta_m=\varphi=\psi_r \tag{88}$$

であることになり，証明が終わった． □

式(29)で定義される相関作用素Hについて，2変数 $\varphi, \eta\in\mathfrak{H}$ について線形な双線形関数 $(H\varphi, \eta)$ がその各固有値 λ_k，各固有ベクトル ψ_k によってスペクトル分解されるというのが，次の定理8である．

［**定理8**］（双線形関数 $(H\varphi, \eta)$ のスペクトル分解定理）

式(29)のように，定義される相関作用素Hについて，$(H\varphi, \eta)$ のスペクトル表現

$$\forall\varphi\in\mathrm{Domain}(H),\ \forall\eta\in\mathfrak{H},$$
$$(H\varphi, \eta)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot(\varphi, \varphi_i')\cdot\overline{(\eta, \varphi_i')}$$
$$=\sum_{\ell\in L}\lambda_\ell\cdot(\varphi, \psi_\ell)\cdot\overline{(\eta, \psi_\ell)} \tag{89}$$

が成り立つ．

（証明） $(H\varphi, \eta)$

$$=\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot(\varphi, \varphi_i')\cdot\overline{(\eta, \varphi_i')} \qquad \because\ \text{命題}3 \tag{90}$$

が言え，

$$(H\varphi, \eta)$$
$$=\sum_{\ell\in L}\lambda_\ell\cdot(\varphi, \psi_\ell)\cdot\overline{(\eta, \psi_\ell)} \qquad \because\ \text{式}(59) \tag{91}$$

が言え，証明が終わる． □

2.8 K-L正規直交系 $\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$ のエントロピー最小性

簡単な条件の下で，K-L正規直交系 $\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$ のエントロピー $\mathrm{etpy}(\{\psi_\ell\}_{\ell\in L};\Phi_{\mathrm{sample}})$ が最小になり，

この意味で式(11)のサンプルパターン集合Φ_{sample}の，$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$による直交展開表現が最適性を備えていることを明らかにしよう．

任意の正規直交系$\{\eta_\ell\}_{\ell\in L}$に関し，式(40)を考慮し，式(11)のサンプルパターン集合Φ_{sample}から定まる非負量

$$v_k \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot [|(\varphi_i', \eta_k)|^2 / \sum_{n\in L} |(\varphi_i', \eta_n)|^2] \tag{92}$$

を定義する．明らかに，確率条件

$$[\forall k\in L, 0 \leqq v_k \leqq 1] \wedge [\sum_{k\in L} v_k = 1] \tag{93}$$

が成り立ち，エントロピー(entropy)

$$\mathrm{etpy}(\{\eta_\ell\}_{\ell\in L}; \Phi_{sample}) \equiv -\sum_{k\in L} v_k \cdot \log_e v_k \tag{94}$$

を定義できる．

各サンプルパターンφ_i'が式(6)と同様に，直交展開される．よって，少数の直交展開係数(φ_i', η_ℓ), $\ell\in L$でパターンφ_i'を表現したいという立場から言えることは，φ_i'の持つ情報がより少数のv_k, $k\in L'\subseteq L$に集中していることが望ましい．正規直交系$\{\eta_\ell\}_{\ell\in L}$が式(11)のサンプルパターン集合$\Phi_{sample}$に関し適切に選ばれていればいるほどその値が小さくなり，その集中している程度を表している目安がエントロピー$\mathrm{etpy}(\{\eta_\ell\}_{\ell\in L}; \Phi_{sample})$である．

正規直交系$\{\eta_\ell\}_{\ell\in L}$として，K-L正規直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$を考え，

$$w_k \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot [|(\varphi_i', \psi_k)|^2 / \sum_{m\in L} |(\varphi_i', \psi_m)|^2] \tag{95}$$

を導入し，式(94)と同様に，

$$\mathrm{etpy}(\{\eta_\ell\}_{\ell\in L}; \Phi_{sample}) \equiv -\sum_{k\in L} w_k \cdot \log_e w_k \tag{96}$$

を考えておく．そうすれば，次の定理9が成立し，式(11)のサンプルパターン集合Φ_{sample}を完全正規直交系で展開表現するとき，その完全正規直交系がK-L正規直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$に選ばれていれば，最も高い表現能率が得られることがわかる．

次の定理9では，選ばれている正規直交系$\{\eta_\ell\}_{\ell\in L}$と，K-L正規直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$とが共に完全であれば，

$$c = \|\varphi_i'\|^2, \ d = \|\varphi_i'\| \tag{97}$$

が成り立ち，

$$\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, \ \|\varphi_i'\| = \text{定数} \Rightarrow c = d \tag{98}$$

が成立することになる．

定理9を証明する前に，次の補助定理3を指摘しておく．

[補助定理3]（エントロピー関数$-x\cdot\log_e x$の凸性） 非負実数値をとる1実変数xのエントロピー関数

$$f(x) \equiv -x \cdot \log_e x \tag{99}$$

は凸関数であり，確率条件

$$[\forall k\in L, 0 \leqq q_k \leqq 1] \wedge [\sum_{k\in L} q_k = 1] \tag{100}$$

を満たす実数 の組 について，不等式

$$f\left(\sum_{k\in L} q_k\cdot x_k\right)\geq \sum_{k\in L} q_k\cdot f(x_k) \tag{101}$$

が成り立つ． □

そうすれば，簡単な3条件式(102)～(104)の下では，このエントロピーetpy$(\{\eta_\ell\}_{\ell\in L};\Phi_{sample})$を最小にする正規直交系$\{\eta_\ell\}_{\ell\in L}$はK-L正規直交系$\{\eta_\ell\}_{\ell\in L}$であることを指摘しているのが，次の定理9である．

［定理9］（K-L正規直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$の，サンプルパターン集合$\Phi_{sample}$の表現上の最適能率性定理）

K-L正規直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$と任意の正規直交系$\{\eta_\ell\}_{\ell\in L}$とを導入する．2条件

①$\exists c>0, \forall i\in\{1, 2, \cdots, n\}$,

$$\sum_{m\in L}|(\varphi_i', \psi_m)|^2=c \tag{102}$$

②$\exists d>0, \forall i\in\{1, 2, \cdots, n\}$,

$$\sum_{n\in L}|(\varphi_i', \eta_n)|^2=d \tag{103}$$

が成り立ち,しかも,等条件

$$c=d \tag{104}$$

が成立しているとしよう．このとき，不等式

$$\begin{aligned}&\mathrm{etpy}(\{\eta_\ell\}_{\ell\in L};\Phi_{sample})\\&\geqq \mathrm{etpy}(\{\psi_\ell\}_{\ell\in L};\Phi_{sample})\end{aligned} \tag{105}$$

が成立し，

$$\begin{aligned}&\mathrm{etpy}(\{\eta_\ell\}_{\ell\in L};\Phi_{sample})\\&=-d^{-1}\cdot\sum_{k\in L}(H\eta_k, \eta_k)\cdot\log_e(H\eta_k, \eta_k)+\log_e d\end{aligned} \tag{106}$$

のように再表現されるエントロピー($\{\eta_\ell\}_{\ell\in L}$の，式(11)の$\Phi_{sample}$に関するエントロピー)etpy$(\{\eta_\ell\}_{\ell\in L};\Phi_{sample})$は，正規直交系$\{\eta_\ell\}_{\ell\in L}$がK-L正規直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$に選ばれているとき，最小値

$$\begin{aligned}&\mathrm{etpy}(\{\psi_\ell\}_{\ell\in L};\Phi_{sample})\\&=-c^{-1}\cdot\sum_{k\in L}\lambda_k\cdot\log_e\cdot\lambda_k+\log_e c\end{aligned} \tag{107}$$

をとる．ここに，

$$(H\eta_k, \eta_k)=\sum_{\ell\in L}\lambda_\ell\cdot|(\eta_\ell, \psi_\ell)|^2 \tag{108}$$

が成立している．

（証明）4式(108)，(106)，(107)，(105)の順にその成立を示す．

式(108)の成立は、定理8から明らかである．次に，

$$\begin{aligned}&\mathrm{etpy}(\{\eta_\ell\}_{\ell\in L};\Phi_{sample})\\&=-\sum_{k\in L}v_k\cdot\log_e\left[\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot\left\{|(\varphi_i', \eta_k)|^2/\sum_{n\in L}|(\varphi_i', \eta_n)|^2\right\}\right] \quad \because 2式(94),(92)\\&=-\sum_{k\in L}v_k\cdot\log_e\left[d^{-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot|(\varphi_i', \eta_k)|^2\right] \quad \because 式(103)\\&=-\sum_{k\in L}v_k\cdot\log_e d^{-1}-\sum_{k\in L}v_k\cdot\log_e\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot|(\varphi_i', \eta_k)|^2\\&=\log_e d-\sum_{k\in L}v_k\cdot\log_e(H\eta_k, \eta_k) \quad \because 式(90)\\&=-d^{-1}\cdot\sum_{k\in L}(H\eta_k, \eta_k)\cdot\log_e(H\eta_k, \eta_k)+\log_e d \quad 3式(92),(90),(103)\end{aligned} \tag{109}$$

を得，式(106)の成立がわかった．式(107)については，同様にして，

$$\begin{aligned}&\mathrm{etpy}(\{\psi_\ell\}_{\ell\in L};\Phi_{sample})\\&=-d^{-1}\cdot\sum_{k\in L}(H\psi_k, \psi_k)\cdot\log_e(H\psi_k, \psi_k)+\log_e c\end{aligned} \tag{110}$$

がわかるが，この式(110)に$(H\psi_k, \psi_k)=\lambda_k$を代入すると，式(107)の成立がわかる．

最後に，不等式(105)の成立を示す．先ず，

$$-\sum_{k\in L}(H\eta_k, \eta_k)\cdot\log_e(H\eta_k, \eta_k)$$
$$=-\sum_{k\in L}[\sum_{\ell\in L}\lambda_\ell\cdot|(\eta_k, \psi_\ell)|^2]\cdot\log_e[\sum_{\ell\in L}\lambda_\ell\cdot|(\eta_k, \psi_\ell)|^2] \tag{111}$$

であるが，

$$\forall k\in L, \sum_{\ell\in L}|(\eta_k, \psi_\ell)|^2=\|\eta_k\|^2=1 \tag{112}$$

を考慮し，補助定理3を適用すれば，

$$\geqq\sum_{k\in L}\sum_{\ell\in L}|(\eta_k, \psi_\ell)|^2\cdot[-\lambda_\ell\cdot\log_e\lambda_\ell] \tag{113}$$

を得，

$$=\sum_{\ell\in L}[-\lambda_\ell\cdot\log_e\lambda_\ell]\cdot\sum_{k\in L}|(\eta_k, \psi_\ell)|^2 \tag{114}$$

と変形され，ここで，

$$\forall \ell\in L, \sum_{k\in L}|(\eta_k, \psi_\ell)|^2=\|\psi_\ell\|^2=1 \tag{115}$$

を考慮すれば，

$$=\sum_{\ell\in L}[-\lambda_\ell\cdot\log_e\lambda_\ell]\cdot\|\psi_\ell\|^2$$
$$=-\sum_{\ell\in L}\lambda_\ell\cdot\log_e\lambda_\ell \tag{116}$$

を得，2式(106),(107)に条件式(104)を考慮すれば，不等式(105)の成立がわかる． □

3. おわりに

$\mathfrak{H}=L_2(M;dm)$では，2式(52)，(53)から，

$$h(x, y)=\sum_{\ell\in L}\lambda_\ell\cdot\psi_\ell(x)\cdot\overline{\psi_\ell(y)} \tag{117}$$

が成立することがわかる．

完全なK-L正規直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$を用いて，パターン$\varphi(x)\in\mathfrak{H}=L_2(M;dm)\ (x\in M)$は，

$$\varphi(x)=\sum_{\ell\in L}(\varphi, \psi_\ell)\cdot\psi_\ell(x) \tag{118}$$

と展開され得る．このとき，E【…】を…の期待値の意として，実は，パターンφの自己相関関数

$$E【\{\varphi(x)-E【\varphi(x)】\}\cdot\overline{\{\varphi(y)-E【\varphi(y)】\}}】 \tag{119}$$

は式(51)の核関数$h(x, y)$に等しくて，しかも，式(29)の相関作用素Hの各固有値λ_ℓは

$$\lambda_\ell=E【|(\varphi, \psi_\ell)-E【(\varphi, \psi_\ell)】|^2】 \tag{120}$$

であることが，文献19)の定理7．1より知られる．

以上，K-L正規直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$につきこれまで知られている諸性質を，S.Suzukiの平均類似度8)，12)，21)～23)を導入した形式で，一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$で省略しないですべて証明した．著者の知る限り，他に類をみない．本論文以外の他の諸研究では特別なヒルベルト空間で論じられていたり，1部の諸性質を証明したりしているだけである．これが本論文の特徴であり，功績でもある。K-L正規直交系を様々な分野，特にパターン情報処理分野などに注意深く応用するのに便利となっているはずである．

尚，S.Suzukiは,万能性認識システムRECOGNITRONの構成を介し，

①パターンとは何かを明らかにするパターンモデル　Tφを用いての“パターンφの帰納的定義”

②連想形認識方程式の求解過程がありとあらゆるパターン認識・パターン連想の両働きを実現すること

③この連想形認識方程式の力学的発展を記述するカテゴリ帰属知識の直交分解

④多段階連想形認識における力学的発展でのポテンシャルエネルギーが減少することを保証する類似度関数SMへ，任意の類似度関数を変換できること

などを明らかにしており10),11),そこでは，万能認識定理を証明することにより,単段階で遂行するパターン認識の働きを改良できる多段階パターン認識の方法が存在することが明らかにされている．また，そこでは，1次独立な系を用いてパターンモデル Tφや類似度関数SM，大分類関数BSCを構成できることも明らかにされており，本論文でのK-L正規直交系(直交系は1次独立な系である)$\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$を用いて，このようなRECOGNITRONを効果的に設計することが望まれる.

参　考　文　献

1）吉田耕作：近代解析，共立出版(1963).

2）梅垣壽春：情報数理の展開－関数解析的展開－，サイエンス社(1993)

3）Gilbert G.Walter：Wavelets and Other Orthogonal Systems with Applications, CRC Press, Inc.(1994).

4）Jeff B.Burl：Estimating the Basis GFunctions of the Karhunen Loeve Transform, IEEE Trans. Acoustis, Speech and Signal Processing, Vol.37, No.1, pp.99-105(1989)

5）Matthew Turk, Alex Pentland：Eigenfaces for Recognition, Journal of Cognitive Neuroscience Vol.3, No.1, pp.71-86(1991)

6）Bernhard Schölkopf, Alexander Smola, Klaus Robert Müller：Nonlinear Component Analysis as a Kernel Eigenvalue Problem, Neural Compution, Vo.10, pp.1299-1319(1998)

7）野田秀樹，ペパーフェルディナンド，野口英二：抑制結合を持つ1ユニット線形ニューロン群を用いた主成分分析，情報処理学会論文誌，Vol.39，No.11，pp.3146-3149(1998)

8）鈴木昇一：認識工学,柏書房(1975)

9）鈴木昇一：ニューラルネットの新数理，近代文芸社(1996)

10）鈴木昇一：パターン認識問題の数理的一般解決，近代文芸社(1997)

11）鈴木昇一：認識知能情報論の新展開，近代文芸社(1998)

12）鈴木昇一：測度的不変量検出形認識系の構成理論，電子通信学会論文誌(D)，Vol.55-D, No.8, pp.513-538(1972)

13）鈴木昇一：抽出された特徴による手書き漢字構造の再生，情報処理，Vol.18, No.11, pp.115-1122(1977)

14）鈴木昇一：パターンのエントロピーモデル，電子情報通信学会論文誌(D－Ⅱ)，Vol.J77-D－Ⅱ, No.10, pp.2220-2238(1994)

15）鈴木昇一：連想形記億器MEMOTRONと日本語母音系列の再生に関する計算機シミュレーション，情報研究（文教大学情報学部)，No.7, pp.14-29,(1986)

16）鈴木昇一：“多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション”，情報研究(文教大学・情報学部)，No.10, pp.35-49(1989)

17）鈴木昇一：帰属係数法に基づく類似度，帰属関係あいまい度，認識情報量の計算機シミュレ

ーション，情報研究(文教大学・情報学部)，No.11, pp.51-68(1990)
18) 鈴木昇一：構造受精法と日本語単独母音の認識"，情報研究(文教大学・情報学部)，No.18, pp.17-51(1998)
19) 鈴木昇一：高次認知機能における論理表現の要素，情報研究(文教大学・情報学部)，No.19, pp.29-82(1997)
20) 鈴木昇一：直交系によるパターモデルの構成，情報研究(文教大学・情報学部)，No.21, pp.21-47(1999)
21) 鈴木昇一：平均類似度の概念に基づく特徴抽出及び識別法，電子通信学会オートマトン研究会資料A71-10(1971)
22) 鈴木昇一：平均類似度の概念に基づく位相不変的特徴抽出及び識別法，芝浦工業大学研究報告, No.18,pp.95-101(1974)
23) 鈴木昇一：測度的不変量検出形認識系に関する研究，博士論文(工学院大学博乙第1号)(1975)
24) 洲之内治男：数値計算，サイエンス社(1995)

付録A. SS認識法(多段階帰納推理に基づく認識法)について

A0. まえがき

本付録Aでは，SS理論によるパターン認識方法(SS認識法; 多段階帰納推理に基づく認識法)の解説(SS認識法が仮説立証主義の観点を取り入れた認識法であることなど)と，SS理論のその後の進歩を論じる．

コンピュータ(ロボット)の目となる機能(視覚機能)を実現する技術を開発するには，どうしたらよいか？ hintになるのは，人間は，脳内で計算された結果に基づいて，知識同士のマッチングがなされ，知識によって構成されたものと，外界パターンとのマッチングによって外界を認識していると思われることである．

カテゴリが形成されるのは，世界に存在する物，事象，関係を“類似性”によって分類されるときである．

それが何と言うモノであるかを見分けること，つまり，モノの認識に最も役立つ知覚属性は形状である．認識の働きはパターンからカテゴリを想起する帰納推論である．

モノの存在する領域(通常は，x1, x2 直交座標系が張られた2次元画像面)を抽出し(領域抽出)，抽出された領域から形状情報を抽出し，経験に基づいて最もありそうなことを想起しながら，最終的に想起されたパターンが外界の事物に対応するモデルであるような認識(想起形認識)に関する計算機シミュレーション[10]もなされている．

計算機に視覚の機能を実現しようというcomputer visionの分野に**感性情報検索**の働きを取り入れなければならないことは，いうまでもない．

加藤俊一によれば，情報に関し，**量**を扱っているのはシャノンの情報理論であり，**意味**を扱っているのはこれまでの人工知能論であり，**質**を扱うのは近頃台頭してきた感性情報論であるという．人工知能論が果たして意味を扱っているかどうかについては，異論があるけれども．

また，感情・感性などの非論理情報(nonlogical information)を捨ててパターン(例えば，音声)を認識したのでは，認識性能に限界が生じるという考えが指摘されている[11]．

問題を解決するのに必要な知能とは,

元の問題より簡単な順序の付いた一連の場合分け問題に分解し,

この一連の問題の解が元の問題に対する解を生み出すような働き

であり, S.Suzukiは,

与えられた問題を解決する情報処理の働きは, この問題を順序の付いた一連の場合分け問題に分解することから始まり, この分解から必然的にもたらされる中間状態のなすある半順序集合に関し, 最小要素を決定する多段階変換過程であるという "情報処理における半順序原理 [3]"

を唱えている.

この半順序原理に従えば, パターン認識過程は,

(カテゴリ帰属知識から成る)半順序集合の最小不動点要素を解に持つであろう "連想形認識方程式(SS方程式)" の多段階求解過程

に帰着させられる.

与えられた機械表現に基づいて, 有限回の計算(SS多段階想起認識)で解が求まることになる.

領域抽出(セグメンテーション)をあからさまに行なわない認識方式が計算機シミュレーションされているが[10], 以下では, この認識方式を発展させる各手法が研究される.

A1. これまでの計算機シミュレーション

これまで, 手書き漢字パターン[5], 日本語単独母音パターン[8], 顔画像[9]を認識する計算機シミュレーション, 或いは, 日本語単独母音パターン系列を連想する計算機シミュレーション [6] を行って来た. 最近になって, 外界の事物を知覚的認識する人間の視覚認識の機能をJAVA言語プログラムで実現した[10]. つまり,

一枚の画像内に空, 木, 車, 家, 道路, 電柱があるどうかを認識し,

画像内容を理解するシステム

を構築し, JAVA言語を使い計算機シミュレーションを実行し、その性能を確かめた. 各画素をその近傍を考慮し, 各画素にカテゴリラベルを貼り付ける. その結果, 同一のカテゴリラベルを持つ画素を寄せ集めると, 1つの形状が生じる. このように画素単位の処理は, 計算論的知能の発現を意味するが, この考えが背景となって, 大きさ101×81の画像内に, 空, 木, 車, 家, 道路, 電柱があるかどうかを理解する認識システムRECOGNITRONの, 画素総数だけの集合体(画像理解システムIUS ; image-understanding system)が構成され、その計算機シミュレーション結果が報告された. RECOGNITRONは大きさ5×4内にあるパターンを画素単位に認識するシステムである. 画素単位で認識処理するので, いわゆるセグメンテーションの技術が必要とされない.

この研究によって, 次の6事項①~⑥が部分的に解決された:

①画素の近傍を用い, 風景画からの知識の抽出

②各画素を幾つかのカテゴリの内の何れか1つに分類する方法, つまり, 各画素にカテゴリラベルを割り付ける方法

③画像のセグメンテーション機能を備えている "風景画の解釈システム"

④構造受精変換に基づく画像の復元

⑤連想形認識方程式(SS方程式)の求解による "画像理解"

⑥1枚の画像の, 事物カテゴリ毎の色分け問題 □

知能の程度は，問題を正しく解決する能力で測られる．認識システムRECOGNITRONに知能をもたらす源泉は，モデル構成作用素T，類似度関数SM，大分類関数BSCについての学習である．

RECOGNITRON内部での学習は，ヒューリスティック関数として，適応誤差関数(現実出力，理想出力間の差を値に持つ変数の関数)を極小とするように，最急降下法(最良優先ではなくして，その簡略された形式としての，山登り探索法の1種)を適用しての，逐次的なon-line学習法である．

論理的に解法が存在しない問題をコンピュータは解くことができない．コンピュータが解くことができない問題が存在することは，コンピュータの万能性と矛盾しない．と同様に，変形し過ぎなどで正しく人間でも認識できないパターンが存在する．人間によってこの誤認識されるパターンは，RECOGNITRONでも誤認識されることがある．RECOGNITRONが正しく認識されないパターンが存在することは，“ありとあらゆるパターン認識の働きを多段階SS想起認識の働きでシミュレートできること［3］が証明されている”RECOGNITRONの万能性と矛盾しない．

A2. 一般化逆写像の概念を使ったパターン復元を解決したSS理論

写像 $f: A \rightarrow B$ に対し，

$$\forall a \in A,\ f(s(f(x))) = f(x) \qquad \text{(A2.1)}$$

を満たす写像 $s: B \rightarrow A$ を f の一般化逆写像という(文献［12］の1.5.3項(pp.26-28)の定義1.17)．例えば，行列Aの擬似逆行列(Moor-Penroseの逆行列)Bは勿論，ABA＝Aを満たすので，Aの一般化逆写像である．

特に，

$$f(s(f(a))) = f(a) \qquad \text{(A2.2)}$$

が或る特定の $a \in A$ に対し成立するとき，写像 $s: B \rightarrow A$ は a に関し，写像 $f: A \rightarrow B$ の一般化逆写像に相当していると言えよう。

処理の対象とする問題のパターン(入力パターン) $\varphi \in \Phi$ を制約として得られたある特定のパターンモデル $T\psi$ (ψ のパターンモデル)について，不動点方程式

$$TA(\mu)T\psi = T\psi \qquad \text{(A2.3)}$$

が成立するということは，構造受精作用素［3］,［4］

$$A(\mu): \Phi \rightarrow \Phi \qquad \text{(A2.4)}$$

はこの特定の $T\psi$ について一般化逆写像(generalized inverse)であることになる．このとき，得られた $T\psi$ は，知識に基づいてRECOGNITRONが入力パターン $\varphi \in \Phi$ を再構成したものであり，$\varphi \in \Phi$ を意味付けたものであり，$T\psi$ はRECOGNITRONが $\varphi \in \Phi$ をどのように理解したかを表現しているものである．

今少し，詳しく説明しよう．

$\varphi \in \Phi$ を処理の対象とする問題の入力パターンとする．帰納推理の第s段階で得られるパターン $\varphi_s \in \Phi$ は，

$$\varphi_0 = T\varphi \in \Phi \qquad \text{(A2.5)}$$

$$\varphi_s = TA(\mu_{s-1})T\varphi_{s-1} \in \Phi,\ s = 1, 2, \cdots, t \qquad \text{(A2.6)}$$

と定義されており，最初のカテゴリ番号のリスト $\mu_0 \subset J$ (全カテゴリ番号集合)は

$$\mu_0 = J \qquad \text{(A2.7)}$$

と設定されており，$\mu_s \subseteq J\ (s = 1, 2, \cdots, t)$ は帰納推理の働きで探索し，得られたものである．

入力パターン $\varphi \in \Phi$ についての多段階帰納推理の働きは，不動点方程式

$$\varphi_{t+1} = \varphi_t \tag{A2.8}$$
を満たす第 t 段階で終了する．

不動点方程式(A2.8)は，

$$TA(\mu_t)\,T\varphi_t = T\varphi_t \qquad \because\ 式(A2.6)と\ \varphi_t = T\varphi_t \tag{A2.9}$$
と変形される．式(A2.9)は，

$$\mu = \mu_t,\ \psi = \psi_t \tag{A2.10}$$
と考えれば，式(A2.3)に一致する．

このとき，入力パターン $\varphi\in\Phi$ は，カテゴリ集合

$$\underline{\mathfrak{C}}(\mu_t) \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid j\in\mu_t\} \tag{A2.11}$$
のいずれかの1つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属すると，パターン認識される．

A3.　多段階認識による“原入力パターン φ の復元"

不動点方程式(A2.3),或いは，条件式(A2.10)の下での不動点方程式(A2.9)の解 $\varphi_t\in\Phi$ は，

処理の対象とする問題の入力パターン $\varphi\in\Phi$ が認識システムRECOGNITRONに

どのように映るか

を表したものである．入力パターン $\varphi\in\Phi$ を帰納推理の働きで復元したものである．

この間の事情を説明しよう．

処理の対象とする問題の入力パターンを $\varphi\in\Phi$ とする．第0認識段階でのパターンモデル $\varphi_0\in\Phi$ を

$$\varphi_0 = T\varphi\in\Phi \tag{A3.1}$$
とおく。$\varphi_0 = T\varphi$ は，$T\varphi$ を見たり聞いたりしたならば原パターン $\varphi\in\Phi$ と同じように見えたり聞こえたりすような($T\varphi$ と φ との間の同一知覚原理) $\varphi\in\Phi$ のモデルである．

候補カテゴリの番号リスト $\mu_s\subseteq J$ の列

$$\mu_s,\ s=0,1,2,\cdots,t,\cdots \tag{A3.2}$$
が，減少条件

$$\mu_0\supset\mu_1\supset\mu_2\supset\cdots\supset\mu_s\supset\cdots \tag{A3.3}$$
を満たすように探索され，このとき得られた構造受精変換 $TA(\mu_s)T$ の列

$$TA(\mu_s)T:\Phi\to\Phi,\ s=0,1,2,\cdots,t,\cdots \tag{A3.4}$$
を用いて，

$$\varphi_{s+1} = TA(\mu_s)\,T\varphi_s\in\Phi,\ s=0,1,2,\cdots,t,\cdots \tag{A3.5}$$
と定義されるパターンモデル列

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_t,\ \cdots \tag{A3.6}$$
を求める。ここに，T-不変性

$$T\varphi_t = \varphi_t,\ s=0,1,2,\cdots,t,\cdots \qquad \because\ \text{axiom 1の(ⅰ)の後半} \tag{A3.7}$$
が成立している．

このとき，

ある段階番号 t が存在して，不動点方程式(A2.8)が成立するような，つまり，

$$TA(\mu_t)T_\Gamma = T\varphi_t \qquad \because\ 式(A3.5) \tag{A3.8}$$
，つまり，

$$TA(\mu_t)T\cdot TA(\mu_{t-1})T\cdot\cdots\cdot TA(\mu_0)T\cdot T\varphi_0$$
$$= TA(\mu_{t-1})T\cdot\cdots\cdot TA(\mu_0)T\cdot T\varphi_0 \tag{A3.9}$$

が成立するような帰納推理段階番号tを求めることができると，考えよう．言い換えれば，式(A2.4)の構造受精作用素A(μ_t)は に関しTの一般化逆写像となっているような場合を考えている訳である．

このようにして，$\varphi_t \in \Phi$は原入力パターン$\varphi \in \Phi$を復元したものである(φからのパターン想起)．

尚，不動点方程式(A2.3)でのパターンψは，式(A3.8)から

$$\psi = \varphi_t \in \Phi \tag{A3.10}$$

であり，また，式(A3.9)から，

$$\mu = \mu_t \subseteq J \tag{A3.11}$$

として，

$$\psi = TA(\mu_{t-1})T \cdot \cdots \cdot TA(\mu_0)T \cdot T\varphi_0 \tag{A3.12}$$

である。 □

A4.　認識システムRECOGNITRONの行う構文解析，意味解析

自然語で書かれた文章を解釈し文意を理解することを目的とする自然語理解システムは，

(1)構文解析(syntax analysis)…文法構造を決定すること(表層解析)

(2)意味解析(semantic analysis)…意味構造を推論すること(深層解析)

をこの順に行う．

それでは，パターン理解システムは，構文解析，意味解析に各々対応して，各々，次の(1%)，(2%)を実行すると考えられる：

(1%)入力パターン$\varphi \in \Phi$の構造を表すモデル$T\varphi \in \Phi$を構成する構文解析($\varphi \to T\varphi$)

入力パターン$\varphi \in \Phi$を分析し，形態素(morpheme)が集まって，“モデル$T\varphi \in \Phi$を見たり聞いたりしたならば，原パターン$\varphi \in \Phi$と同じ様に見えたり，聞こえたりする．

(2%)パターンモデル$T\varphi \in \Phi$の意味を表すカテゴリ$\mathfrak{C}_j$と，$\mathfrak{C}_j$の代表パターンω_jのモデル$T\omega_j$との2つを出力する意味解析($T\varphi \to T\omega_j$)

意味を取り出すパターン処理過程であり，モデル$T\varphi \in \Phi$が刺激となって，認識システム内部に蓄積された類概念(カテゴリ)が検索されて，パターンモデル$T\varphi$に対応して，例えば，第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$と，$\mathfrak{C}_j$の代表パターンω_jのパターンモデル$T\omega_j$との2つが出力される．

□

A5.　連想形認識方程式(SS方程式)の求解過程は多段階認識過程である

各画素は，RECOGNITRONによって，6カテゴリ(空，木，車，家，道，電柱)の内の何れかに分類される[5]．その分類手法は，画像総数だけの個数の連想形認識方程式(SS方程式)を解くことで成り立っており，この求解過程が多段階認識過程である。論理式をすべて節の形に書き換えて，与えられた論理式の否定形を作り，それが恒偽式であることを証明するという“導出原理を用いた証明過程(反駁過程)”が与えられた問題の解を求める過程と同様な立場である．

各画素をHMM(Hidden Markov-Model)により3カテゴリ(背景，移動物体，移動物体の影)の内の何れか1つに分類手法[13]も提案されている．

上述の証明過程(反駁過程)に対応する求解過程としての多段階認識過程を以下に説明しよう．

認識システムRECOGNITRONがパターン$\varphi \in \Phi$に対し持つカテゴリ帰属知識$\langle \psi, J \rangle$を制限して

得られるカテゴリ帰属知識

$\langle \psi, \lambda \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$ (A5.1)

は，認識システムRECOGNITRONがパターンψに関し持っているカテゴリ帰属知識(categorical membership-knowledge)であり，

パターン$\psi \in \Phi$がカテゴリ番号 $j \in \lambda \in 2^J$ をもつ何れか1つのカテゴリに帰属する
可能性があること (A5.2)

を表している。$\langle \Phi, 2^J \rangle$ はカテゴリ帰属知識空間(categorical membership-knowleadge space)と呼ばれる。

処理の対象とする問題の入力パターン$\varphi \in \Phi$に関する連想形認識方程式(equation of associative recognition)，つまり，SS方程式

$\langle \psi, \lambda \rangle =_{\triangle} \langle T\varphi, \gamma \rangle \sqcup_{\triangle} TA(\mu)T \cdot \langle \psi, \lambda \rangle$ (A5.3)

を解いて得られた解(半順序関係$\leqq^*_{\triangle}$に関する最小不動点解)$\langle \psi, \lambda \rangle$を考えよう．登場している2元関係$=_{\triangle}$は，カテゴリ帰属知識空間$\langle \Phi, 2^J \rangle$上での恒等関係である．$2^J$は，全カテゴリ番号の集合Jのすべての部分集合からなる集合である．また，$\sqcup_{\triangle}$は，半順序関係$\leqq^*_{\triangle}$についての上限記号である．式(A5.3)で，$\gamma = J$とγを設定すれば，認識システムRECOGNITRONは，入力パターン$\varphi \in \Phi$(の帰属するカテゴリ)に関し，まったく無知の状態(a state of ignorance)から想起的認識の動作を開始することになる．また，$\mu = J$と設定すれば，想起的認識の各段階で盲目的探索(blind search)を行うことになる．

最小不動点解(solution as the least fixed point)$\langle \psi, \lambda \rangle$の求解過程が想起による入力パターン$\varphi \in \Phi$の認識過程(多段階想起認識過程)である．以下のパターンモデルψ_nはこれまでのA2, A3両章のパターンモデルφ_nに対応すると考えられる．

解 $\langle \psi, \lambda \rangle$ の第 n(=0, 1, 2, …)近似解を

$\langle \psi_n, \lambda_n \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$ (A5.4)

とすると，

$\langle \psi, \lambda \rangle =_{\triangle} \sqcup^*_{\triangle} \{\langle \psi_n, \lambda_n \rangle \mid n = 0, 1, 2, \cdots\}$ (A5.5)

が成立するように，$\langle \psi_n, \lambda_n \rangle$を求めて行くことが望ましい．単調増大関係

$\{\langle \psi_0, \lambda_0 \rangle, \langle \psi_1, \lambda_1 \rangle, \cdots, \langle \psi_n, \lambda_n \rangle\}$
$\leqq^*_{\triangle} \{\langle \psi_0, \lambda_0 \rangle, \langle \psi_1, \lambda_1 \rangle, \cdots, \langle \psi_n, \lambda_n \rangle, \langle \psi_{n+1}, \lambda_{n+1} \rangle\}, n = 0, 1, 2, \cdots$ (A5.6)

が成立すれば,式(A5.5)の $\langle \psi, \lambda \rangle$ は

$\langle \psi, \lambda \rangle$
$=_{\triangle} \lim_{n \to \infty} \{\langle \psi_n, \lambda_n \rangle \mid n = 0, 1, 2, \cdots\}$ (A5.7)

であるし，今1つの単調増大関係

$\langle \psi_0, \lambda_0 \rangle \leqq^*_{\triangle} \langle \psi_1, \lambda_1 \rangle \leqq^*_{\triangle} \cdots \leqq^*_{\triangle} \langle \psi_n, \lambda_n \rangle \leqq^*_{\triangle} \cdots$ (A5.8)

が成立すれば,

$\sqcup^*_{\triangle} \{\langle \psi_t, \lambda_t \rangle \mid t = 0, 1, 2, \cdots, n\}$
$=_{\triangle} \langle \psi_n, \lambda_n \rangle$ (A5.9)

であるから，式(A5.5)の$\langle \psi, \lambda \rangle$は

$\langle \psi, \lambda \rangle$
$=_{\triangle} \lim_{n \to \infty} \langle \psi_n, \lambda_n \rangle$ (A5.10)

と表される．連想形認識方程式(A5.3)の求解過程

$\langle \psi_0, \lambda_0 \rangle, \langle \psi_1, \lambda_1 \rangle, \cdots, \langle \psi_n, \lambda_n \rangle, \cdots$ (A5.11)

が処理の対象とする問題のパターン$\varphi \in \Phi$の認識過程である．

認識システムRECOGNITRONが処理の対象とする問題のパターン$\varphi \in \Phi$について，事前知識

『φは少なくともカテゴリ集合$\mathfrak{C}_i$, $i \in \mu$の内の1つのカテゴリに帰属している可能性がある』 (A5.12)

を持っているとすると，TA(μ)Tのべき乗を，

$(TA(\mu)T)^0 \equiv I$(恒等変換) (A5.13)

$(TA(\mu)T)^{n+1} \equiv TA(\mu)T \cdot (TA(\mu)T)^n$, $n=0, 1, 2, \cdots$ (A5.14)

と定義して，

$\langle \psi_n, \lambda_n \rangle =_\triangle (TA(\mu)T)^n \cdot \langle T\varphi, \gamma \rangle$ (A5.15)

と考えることができる．

$\underline{\mathfrak{C}}_{pattern}(\psi_t)$は第t認識段階でパターン$\psi_t$が帰属するカテゴリの集合とすると，包含関係

$\underline{\mathfrak{C}}_{pattern}(\psi_{t+1}) \subset \underline{\mathfrak{C}}_{pattern}(\psi_t)$, $t=0, 1, 2, \cdots$ (A5.16)

が成立することが望ましい．実は，上述のカテゴリ帰属知識に関する多段階認識過程では，

$\underline{\mathfrak{C}}_{pattern}(\psi_t) = CSF(\psi_t, \lambda_t)$ (A5.17)

である．ここに，$CSF: \Phi \times 2^J \to 2^J$はaxiom 4を満たすカテゴリ選択関数（category-selection function）である［3］，［4］．そして，$TA(\mu)T\langle \psi, \lambda \rangle$ は

$TA(\mu)T\langle \psi, \lambda \rangle =_\triangle \langle TA(\mu \cap \lambda)T\psi, \; CSF(\psi, \mu \cap \lambda) \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$

と定義されている．

連想形認識方程式(A5.3)の不動点解である「入力パターン$\varphi \in \Phi$の認識結果」$<\psi, \lambda>$は次の3種類(i), (ii), (iii)に分類することができる：

(i)(認識可能性；入力パターン に対し，唯1つのカテゴリ$\mathfrak{C}_j$が得られる場合)

$\exists j \in J, \langle \psi, \lambda \rangle =_\triangle \langle T\omega_j, [j] \rangle$. (A5.18)

(ii)(認識不定性；入力パターン に対し，2つ以上のカテゴリ$\mathfrak{C}_{j_1}, \mathfrak{C}_{j_2}, \cdots, \mathfrak{C}_{j_k}$($k \geqq 2$)が得られる場合)

$\exists \psi' \in \Phi, \exists \lambda' \in 2J, \langle \psi, \lambda \rangle =_\triangle \langle T\psi', \lambda' \rangle$ (A5.19)

ここに，λ'は

$\lambda' = [j_1, j_2, \cdots, j_k]$($k \geqq 2$)． (A5.20)

(iii)(認識不可能性；入力パターンφに対し，1つもカテゴリが得られない場合)

$\exists \psi' \in \Phi, \exists \lambda' \in 2J, \langle \psi, \lambda \rangle =_\triangle \langle T\psi', \lambda' \rangle$ (A5.21)

ここに，ψ', λ' は

$\psi' = 0$(零元) (A5.22)

$\lambda' = \phi$(空リスト)． (A5.23)

□

認識可能性(i)が成り立つためには，式(A2.4)の構造受精作用素A(μ)内で採用されている“axiom 2を満たす類似度関数

$SM: \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\}$ (A5.24)

”が，mixture条件［4］を満たしていれば十分である．

カテゴリ帰属知識$<\psi, \lambda>$のポテンシャル$E(\psi, \lambda)$を定義することができるが［3］，［4］，このとき，第s段階の認識過程

$$\langle \psi_s, \lambda_s \rangle \rightarrow \langle \psi_{s+1}, \lambda_{s+1} \rangle \tag{A5.25}$$

において，ポテンシャルの減少性

$$E(\psi_s, \lambda_s) \geqq E(\psi_{s+1}, \lambda_{s+1}) \tag{A5.26}$$

が成立し，かつ，多段階認識過程

$$\langle \psi_0, \lambda_0 \rangle, \langle \psi_1, \lambda_1 \rangle, \cdots, \langle \psi_n, \lambda_n \rangle, \cdots \tag{A5.27}$$

において，有限停止性

$$\langle \psi_0, \lambda_0 \rangle, \langle \psi_1, \lambda_1 \rangle, \cdots, \langle \psi_n, \lambda_n \rangle \tag{A5.28}$$

が成立するためには，式(A2.4)の構造受精作用素A(μ)内で採用されている式(A5.24)の“axiom 2を満たす類似度関数SM”が直交条件[3]を満たしていれば十分である.

A6. 多段階認識過程に付随する3量

画像1枚からモノの存在する領域を大きさ5×4の画像成分領域と仮定し，領域抽出(セグメンテーション)をあからさまに行わない認識方式が計算機シミュレーションされているが，この認識方式では，(多段階帰納推理過程)の，各t(＝0, 1, 2, …)について次の3つの量(イ), (ロ), (ハ)を計算する必要があり，シミュレーションでは実際計算されて，多段階認識過程での異常を検出するのに役立つことが判明している［16].

(イ)認識情報量(recognitive amount of information) RGetpy(φ_t)は

$$\mathrm{Rgetpy}(\varphi_t) = \sum_{j \in J} \mathrm{SM}(\varphi_t, \omega_j) \cdot \log_e[\mathrm{SM}(\varphi_t, \omega_j) / P(\mathfrak{C}_j)] \tag{A6.1}$$

と定義される．但し,

$$\mathrm{SM}(\varphi_t, \omega[j]) = 0 \text{のときは,} \ \mathrm{SM}(\varphi_t, \omega_j) \cdot \log_e[\mathrm{SM}(\varphi_t, \omega_j) / P(\mathfrak{C}_j)] = 0 \tag{A6.2}$$

として計算する.

探索という帰納推理の働きが正常に進んでいるときは，RGetpyの値は増加していく．つまり，認識過程の進展に連れ(認識段階番号tが増大するに従い)，認識が正常に進んでいるときは通常，**増加性**

$$\mathrm{RGetpy}(\varphi_t) \leqq \mathrm{RGetpy}(\varphi_{t+1}), \ t = 0, 1, 2, \cdots \tag{A6.3}$$

が成立するのが望ましい.

(ロ)φ_tを基準にしてのφ^{t+1}の認識情報量RAIN(φ_{t+1}, φ_t)は

$$\mathrm{RAIN}(\varphi_{t+1}, \varphi_t) = \sum_{j \in J} \mathrm{SM}(\varphi_t, \omega_j) \cdot \log_e[\mathrm{SM}(\varphi_{t+1}, \omega_j) / \mathrm{SM}(\varphi_t, \omega_j)] \tag{A6.4}$$

と定義される．但し,

$$\mathrm{SM}(\varphi_{t+1}, \omega_j) = 0 \quad \text{または} \quad \mathrm{SM}(\varphi_t, \omega_j) = 0 \quad \text{のとき}$$

$$\mathrm{SM}(\varphi_{t+1}, \omega_j) \cdot \log_e[\mathrm{SM}(\varphi_{t+1}, \omega_j) / \mathrm{SM}(\varphi_t, \omega_j)] = 0 \tag{A6.5}$$

として計算する.

認識が正常に進んでいるときは通常，**減少性**

$$\mathrm{RAIN}(\varphi_{t+1}, \varphi_t) \geqq \mathrm{RAIN}(\varphi_{t+2}, \varphi_{t+1}), \ t = 0, 1, 2, \cdots \tag{A6.6}$$

の成立が期待される.

(ハ)カテゴリ帰属知識〈φ_t, λ_t〉のポテンシャルエネルギー(energy) E(φ^t, λ^t)は

$$E(\varphi_t, \lambda_t) = \begin{cases} 0 \cdots \quad \varphi_t = 0 \quad \text{あるいは} \quad \lambda_t = \phi\ (\text{空集合}) \quad \text{のとき} \\ |\lambda_t| - \sum_{j \in \lambda_t} \mathrm{SM}(\varphi_t, \omega_j) \cdots \quad \varphi_t \neq 0 \quad \text{かつ} \quad \lambda_t \neq \phi\ (\text{空集合}) \quad \text{のとき} \end{cases} \tag{A6.7}$$

と定義される.

認識が正常に進んでいるときは通常，**減少性**

$$E(\varphi_t, \lambda_t) \geqq E(\varphi_{t+1}, \lambda_{t+1}) \tag{A6.8}$$

の成立が期待される．

最後に，ポテンシャル不等式，つまり，2つのカテゴリ帰属知識$\langle\varphi, \gamma\rangle$, $\langle\psi, \lambda\rangle \in \langle\Phi, 2^J\rangle$のSSポテンシャル$E(\varphi, \gamma)$, $E(\psi, \lambda)$に大小関係が成り立つための，簡単な十分条件を明らかにする次の定理A1を証明しよう．

［定理A1］（SSのポテンシャル減少定理）

2つのカテゴリ帰属知識$\langle\varphi, \gamma\rangle$, $\langle\psi, \lambda\rangle \in \langle\Phi, 2^J\rangle$は，$\langle 0, \mu\rangle$, $\langle\eta, \phi\rangle$のいずれかでないとする．ならば，ポテンシャル不等式

$$|\gamma| \geq |\lambda| + 1 \tag{A6.9}$$

$$\Rightarrow E(\varphi, \gamma) \geq E(\psi, \lambda). \tag{A6.10}$$

が成り立つ．ここに，等号が成り立つのは次の3事項(イ), (ロ), (ハ)が共に成立するときに限る：

(イ) $|\gamma| = |\lambda| + 1$

(ロ) $1 = \sum_{j \in \gamma} SM(\varphi, \omega_j)$.

(ハ) $0 = \sum_{j \in \lambda} SM(\psi, \omega_j)$.

(証明)不等式(A6.10)は次のように証明される．

$E(\varphi, \gamma) = |\gamma| - \sum_{j \in \gamma} SM(\varphi, \omega_j)$

$\geq |\lambda| + 1 - \sum_{j \in \gamma} SM(\varphi, \omega_j)$　　$\because$　式(A6.9)

ここに，等号は(イ)のときに限る

$= |\lambda|$　ここに，等号は(ロ)のときに限る

$\geq |\lambda| - \sum_{j \in \lambda} SM(\psi, \omega_j)$.　$\because\ 0 \leq \sum_{j \in \lambda} SM(\psi, \omega_j)$　ここに，等号は(ハ)のときに限る

$= E(\psi, \lambda)$.　□

A7. 山登り法(hill-climbing method)と，最良優先探索法(method of best-first search)の採用

親節点$\langle\varphi, \gamma\rangle \in \langle\Phi, 2^J\rangle$から，状態空間(探索すべき空間；カテゴリ帰属知識空間)$\langle\Phi, 2^J\rangle$内を探索して，子節点$\langle\psi, \lambda\rangle \in \langle\Phi, 2^J\rangle$を得るのに，“親節点の展開によって得られた子節点の中から次に展開する親節点を選ぶという山登り法(hill-climbing method)”を採用してみよう．

カテゴリ帰属知識$\langle\varphi, \gamma\rangle \in \langle\Phi, 2^J\rangle$からカテゴリ帰属知識$\langle\psi, \lambda\rangle \in \langle\Phi, 2^J\rangle$への変換(帰納推理に基ずく変換)は，

$$\langle\varphi, \gamma\rangle \rightarrow$$

$$\langle\psi, \lambda\rangle =_{\triangle} TA(\mu)T \cdot \langle\varphi, \gamma\rangle \tag{A7.1}$$

$$=_{\triangle} \langle TA(\mu \cap \gamma)T\varphi, CSF(\varphi, \mu \cap \gamma)\rangle \tag{A7.2}$$

と定義されている．

それで，親節点$\langle\varphi, \gamma\rangle \in \langle\Phi, 2^J\rangle$から，状態空間(探索すべき空間)$\langle\Phi, 2^J\rangle$内を探索して，子節点$\langle\psi, \lambda\rangle \in \langle\Phi, 2^J\rangle$を得るのに必要とされるカテゴリ番号リスト$\mu \in 2^J$を選ぶ方法を説明すればよい．

このとき，$\langle\psi, \lambda\rangle \in \langle\Phi, 2^J\rangle$のSSポテンシャル

$$E(\psi, \lambda)$$

$$= E(TA(\mu \cap \gamma)T\varphi, CSF(\varphi, \mu \cap \gamma)) \tag{A7.3}$$

$$= |CSF(\varphi, \mu \cap \gamma)| - \sum_{j \in CSF(\varphi, \mu \cap \gamma)} SM(TA(\mu \cap \gamma)T\varphi, \omega_j) \tag{A7.4}$$

が，条件

$$|\mu| \geq |\gamma| - 1 \qquad (A7.5)$$

の下で，最小となるように，$\mu \in 2^J$を選ぶ．例えば，$\mu \in 2^J$として，$j \in \gamma$を動かし$\mu \in \gamma - \{j\}$を選ぶ．

これまで提案されている“RECOGNITRONの多段階認識の働き”は上述の山登り法の簡単化(線形探索，修正線形探索)であるが，これを，例えば，“親節点の展開によって得られた子節点の中からのみ選ぶのではなく，それまでに得られている節点でまだ展開されていないすべての節点の中からも次に展開する親節点を選ぶという最良優先探索法(method of best-first search)”に改良することが考えられる．

A8. 仮説立証主義的認識処理

先ず，認識仮説

処理の対象とする問題のパターン$\varphi \in \Phi$が第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属する (A8.1)

を建て，この仮説に反駁する仕方で認識システムRECOGNITRONが立証する認識する方法を説明しよう．

A8.1 カテゴリの方に反映させる方法

$$\langle \psi_s, \lambda_s \rangle |_{s=0} =_{\triangle} \langle \psi_0, \lambda_0 \rangle \qquad (A8.2)$$

として，カテゴリ帰属知識の変換

$$\langle \psi_s, \lambda_s \rangle \to \langle \psi_{s+1}, \lambda_{s+1} \rangle =_{\triangle} TA(\mu_s) T \langle \psi_s, \lambda_s \rangle,\ s = 0, 1, 2, \cdots \qquad (A8.3)$$

において，

$$\psi_0 = T\varphi \qquad (A8.4)$$

$$\lambda_0 = J - \{j\},\ \mu_s = J - \{j\} \qquad (A8.5)$$

と選ぶ．この結果，

入力パターン$\varphi \in \Phi$のモデル$T\varphi \in \Phi$は第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属していない

という仮説が建てられたことになる．この仮説の下で，仮説立証主義的認識処理がなされ，RECOGNITRONの多段階認識の働きにより，以下の(C)の如く，“認識不能”と断定されれば，この認識仮説の反駁

入力パターン$\varphi \in \Phi$のモデル$T\varphi \in \Phi$は第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$のみに帰属している

が立証されたことになる．

$<\psi_s, \lambda_s>|_{s=0} =_{\triangle} <\psi_0, \lambda_0>$の，2式(A8.4)，(A8.5)によるこの設定に，多段階認識過程での途中のパターンモデルψ_sも第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属していないという仮説を反映しているカテゴリ番号リスト$\mu_s \in 2^J$の選定方法を採用して，つまり，

$$j \notin \mu_s,\ s = 0, 1, 2, \cdots \qquad (A8.6)$$

という制約を課して，RECOGNITRONを稼動させて，“認識可能”，“認識不定”，“認識不能”の3認識結果が得られる場合の解釈は，次の通りになり，仮説立証主義的認識処理がなされることになる．

(a) 認識可能が得られた場合

パターン$\varphi \in \Phi$が第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属していないという条件下で，$\varphi \in \Phi$は，

カテゴリ$\mathfrak{C}_j (i \neq j)$のいずれかの1つに帰属する (A8.7)

という結果が得られた．よって，

パターン$\varphi \in \Phi$が$\mathfrak{C}_j$以外の，$\mathfrak{C}_i (i \neq j)$のいずれか1つのカテゴリに帰属する (A8.8)

と，判断してよい．

(b) 認識不定が得られた場合

パターン$\varphi \in \Phi$が第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属していないという条件下で，$\varphi \in \Phi$は，

カテゴリ集合$\mathfrak{C}_i$, $i \in J_j = \{j_k \mid k = 1, 2, \cdots, m_j\}$ $(m_j \geq 2)$のいずれかに帰属する (A8.9)

という結果が得られた．よって，

パターン$\varphi \in \Phi$が$\mathfrak{C}_j$以外の，$\mathfrak{C}_i$, $i \in J_j$のいずれかの複数のカテゴリに帰属する (A8.10)

と，判断してよい．

(c) 認識不能が得られた場合

パターン$\varphi \in \Phi$が第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属していないという条件下で，$\varphi \in \Phi$は，

カテゴリ番号$k \in J - \{j\}$を有するどのカテゴリ$\mathfrak{C}_k$にも帰属しない (A8.11)

という結果が得られた．よって，

第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$以外にパターン$\varphi \in \Phi$の帰属するカテゴリは存在しない (A8.12)

ということであるから，

パターン$\varphi \in \Phi$が第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$のみに帰属している (A8.13)

が立証されたことになる． □

A8.2 パターンの方に反駁を反映する方法

第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターンω_jのパターンモデル$T\omega_j \in \Phi$が入力パターン$\varphi \in \Phi$のモデル$T\varphi \in \Phi$に含まれている成分

$$[(T\varphi, T\omega_j)/(T\omega_j, T\omega_j)] \cdot T\omega_j \tag{A8.14}$$

を，$T\varphi \in \Phi$から除去して得られるパターン成分

$$\varphi' \equiv T\varphi - [(T\varphi, T\omega_j)/(T\omega_j, T\omega_j)] \cdot T\omega_j \tag{A8.15}$$

を，$\varphi \in \Phi$に対応し作り，このパターン成分を入力パターン$\varphi \in \Phi$の代りにRECOGNITRONに入力する．そうすると，仮説

式(A8.15)の仮の入力パターンφ'は第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属しない (A8.16)

を建てることが出来，仮説立証主義的認識処理がなされ，RECOGNITRONの多段階認識の働きにより，“認識不能”と断定されれば，この認識仮説の反駁

入力パターン$\varphi \in \Phi$（のモデル$T\varphi \in \Phi$）は第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$のみに帰属している

が立証されたことになる．

A9. エントロピーによるカテゴリ帰属知識$\langle\psi, \lambda\rangle$の子節点の選び方

山登り法において，親節点を展開して子節点の集合を得る方法と，その子節点の集合から次に展開するその子節点を得る1つの手法を，エントロピーを用いて考察しよう．

カテゴリ帰属知識$\langle\psi, \lambda\rangle \in \langle\Phi, 2^J\rangle$の子節点は，$\mu \in 2^J$を帰納推理で選んで決まる構造受精変換

$$TA(\mu)T : \langle\Phi, 2^J\rangle \to \langle\Phi, 2^J\rangle \tag{A9.1}$$

を用いると，

$$TA(\mu)T\langle\psi, \lambda\rangle \tag{A9.2}$$

$$=_{\triangle}\langle TA(\mu \cap \lambda)T\psi, CSF(\psi, \mu \cap \lambda)\rangle \tag{A9.3}$$

と表され，カテゴリ番号リスト$\mu \in 2^J$を動かすことにより，カテゴリ帰属知識$\langle\psi, \lambda\rangle$のすべての候補が得られる（子節点の集合を得る方法）．

$\mu_1(\neq\phi),\ \mu_2(\neq\phi)\subset\mu\in 2^J,$

$$\mu_1\cap\mu_2=\phi,\quad \mu_1\cup\mu_2=\mu \tag{A9.4}$$

と，μを空でない部分集合μ_1, μ_2へと2分割して得られる2分割$\mu=\mu_1\cup\mu_2$から得られる“カテゴリ帰属知識$\langle\psi,\lambda\rangle$の2つの子節点”

$$TA(\mu_1)T\langle\psi,\lambda\rangle,\ TA(\mu_2)T\langle\psi,\lambda\rangle \tag{A9.5}$$

の内，どちらの子節点を選べばより最も望ましい探索が可能になるか(探索に関する2分探索決定木が得られるか)を考えてみよう(その子節点の集合から次に展開するその子節点を得る1つの手法；エントロピー法).

先ず，次の(イ)，(ロ)，(ハ)の計算をする：第$k\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_k$の生起確率$p(\mathfrak{C}_k)$を導入して，

(イ)$e_0(\mu,\lambda;\psi)$

$$\equiv-\sum_{j\in CSF(\psi,\mu\cap\lambda)} p_j\cdot\log_2 p_j \tag{A9.6}$$

ここに，

$$p_j=SM(\psi,\omega_j)/\sum_{k\in CSF(\psi,\mu\cap\lambda)} SM(\psi,\omega_k) \tag{A9.7}$$

(ロ)$i\in\{1,2\}$として，エントロピー

$e(\mu_i,\lambda;\psi)$

$$\equiv-\sum_{j\in CSF(\psi,\mu_i\cap\lambda)} q_j\cdot\log_2 q_j \tag{A9.8}$$

ここに，

$$q_j\equiv SM(\psi,\omega_j)/\sum_{k\in CSF(\psi,\mu_i\cap\lambda)} SM(\psi,\omega_k) \tag{A9.9}$$

(ハ) エントロピー

$e_0(\mu_1,\mu_2,\lambda;\psi)$

$$\equiv-\sum_{i=1}^{2}\Big[\sum_{k\in CSF(\psi,\mu_i\cap\lambda)} p(\mathfrak{C}_k)/\sum_{m\in CSF(\psi,\mu_1\cap\lambda)\cup CSF(\varphi,\mu_2\cap\lambda)} p(\mathfrak{C}_m)\Big]\cdot e(\mu_i,\lambda;\psi) \tag{A9.10}$$

□

その後，エントロピーの差(1種の平均相互情報量)

$$e_0(\mu,\lambda;\psi)-e_0(\mu_1,\mu_2,\lambda;\psi) \tag{A9.11}$$

が最大となる式(A9.4)の2分割$\mu=\mu_1\cup\mu_2$を選ぶ．このようにして決定された式(A9.4)の2分割$\mu=\mu_1\cup\mu_2$内の何れか1つのμ_iを次のように選定する：

各W_k, Wを適切に選んで，例えば

$$W_k=p(\mathfrak{C}_k),\ W=1/2 \tag{A9.12}$$

と選んで，

不等式

$W(i,\lambda;\psi)=\sum_{k\in CSF(\varphi,\mu_i\cap\lambda)} W_k\cdot SM(\psi,\omega_k)$

$$\geqq W \tag{A9.13}$$

を満たす条件の下で，カテゴリ帰属知識$\langle\psi,\mu_i\cap\lambda\rangle$のSSポテンシャル

$E(\psi,\mu_i\cap\lambda)$

$$=|\mu_i\cap\lambda|-\sum_{k\in\mu\cap\lambda} SM(\psi,\omega_k) \tag{A9.14}$$

を最小にする添字$i\in\{1,2\}$を決定する．□

以上で，カテゴリ帰属知識$\langle\psi,\lambda\rangle$を，その子節点としてのカテゴリ帰属知識$TA(\mu_i)T\langle\psi,\lambda\rangle$へと変換できる．

この種の2分割を有限回反復し，$\langle T\varphi,\gamma\rangle$が

$\exists j \in J,$

$\langle \varphi, \gamma \rangle \rightarrow \langle T\varphi, \gamma \rangle \rightarrow TA(\mu_i) T \langle T\varphi, \gamma \rangle$

$$\rightarrow \cdots \rightarrow \langle \omega_j, [j] \rangle \tag{A9.15}$$

と変換されれば，入力パターン$\varphi \in \Phi$は第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属すると，認識推断できる．

A10. むすび

カテゴリカルデータとはパターンのことであり,情報量規準AIC(赤池情報量規準)の視点に立って，社会調査などによって得られたカテゴリカルデータの実際的な解析法[14]が提案されている。

このように，パターン認識に関する情報学を適用しなければならない分野は広大である．

$\varphi \in \Phi$のパターンモデル$T\varphi \in \Phi$を如何に求めるかが基本であるが，領域抽出(セグメンテーション)をあからさまに行なわない認識方式(セグメンテーションを必要としない“連想形認識方程式の求解による画像理解方式”)が計算機シミュレーションされているが［10］,［15］,［16］この認識方式を発展させる各手法が研究された．

付録Aの文献

［1］鈴木昇一：“認識工学”，柏書房，Feb.1975

［2］鈴木昇一：“ニューラルネットの新数理”，近代文芸社，Sept.1996

［3］鈴木昇一：“パターン認識問題の数理的一般解決”，近代文芸社，Aug.1997

［4］鈴木昇一：“認識知能情報論の新展開”，近代文芸社，Aug.1998

［5］鈴木昇一：“抽出された特徴による手書き漢字構造の再生”，情報処理学会誌情報処理，vol.18, no.11, pp.1115-1122, Nov.1977

［6］鈴木昇一：“連想形記憶器MEMOTRONと日本語母音列の再生に関する計算機シミュレーション”，情報研究(文教大学・情報学部)，no.7, pp.14-29, Dec.1986

［7］鈴木昇一：“半順序と情報処理”，情報研究(文教大学・情報学部)，no.12, pp.121-174, Dec.1991

［8］鈴木昇一：“構造受精法と日本語単独母音の認識”，情報研究(文教大学・情報学部)，no.18, pp.17-51, Dec.1998

［9］鈴木昇一：“平均顔を用いた顔画像の2値化，並びに，目・鼻・口の抽出と，その計算機シミュレーション”，情報研究(文教大学・情報学部)，no.22, pp.65 -150, Dec.1999

［10］鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：“風景画の理解に関するJAVA言語によるRECOGNITRONの計算機シミュレーション”，情報研究(文教大学・情報学部)，no.27, pp. 73-109,Mar.2002

［11］中津良平：“人間の非論理情報をAIはどう取り扱うか”，人工知能学会誌，vol.4, no.2, pp.219-229, March 1999

［12］布川ひろし，中山弘隆，谷野哲三：線形代数と凸解析，コロナ社(1996)

［13］加藤ジェーン，渡邊豊英，米田政明：“HMMに基ずく交通監視映像の背景・物体・影の分離手法”，情報処理学会論文誌，vol.42,no.1, pp.1-14, 2001

［14］坂元慶行：“カテゴリカルデータのモデル分析”，共立出版，Oct.1999
［15］鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：“JAVA言語で実装化された画像理解システムIUSの動作概要と，その稼動方法”，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.143-165, Dec.2002
［16］鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：“JAVA言語による計算機シミュレーションで生じた風景画像の理解場面の多段階連想形認識過程の異常現象”，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.123-166, Jul.2003（本号）
（著者　鈴木昇一，論文題目　可分な一般抽象ヒルベルト空間でのK-L直交系の理論，文教大学情報学部情報研究no.29　投稿論文，投稿年月日　2003年2月17日（月））