

# パターン情報処理（モデル構成作用素，誤差逆伝播学習2層ニューラルネット）と論理的含意とによる非単調的知識推論

鈴木 昇一

## Nonmonotonic Reasoning by Pattern-Information Processing(Model-Construction Operator and Error-Back Propagation Learning Two-Layer Neural Net) and by Logical Implication

Shoichi Suzuki

### あらまし

パターンから抽出される特徴量の組には大抵，情報が不完全にしか含まれていない場合が多く，パターン認識の働きは，情報が欠如している状況下でとりあえず矛盾のない論理的帰結を導出するという操作としてのデフォルト推論でなされていると考えられる．公理が増加しても得られる論理的帰結(定理)の集まりは増加するとは限らないという性質を備えた非単調推論はデフォルト推論の1種である．

パターンモデル $T\varphi$ を感性的に受け取ったら，原パターン $\varphi$ と錯覚し原パターン $\varphi$ と同じように感性的に受容すような存在 $T\varphi$ が，S.Suzukiのパターン情報の理論 [B1]～[B4]によりパターンモデル $T\varphi$ として確保されることがこれまでの研究により明らかになっている．1つの事例知識は2値成分からなる属性ベクトルとして表され，この属性ベクトルを或るヒルベルト空間 $\Phi$ の元としてのパターン $\varphi \in \Phi$ とみなすと，そのパターン $\varphi \in \Phi$ の，S.Suzukiのモデル $T\varphi \in \Phi$ を考えることができ，S.Suzukiのパターン情報処理技術を非単調推論の実現に適用できる．ここに， $\Phi$ は処理の対象とする問題のパターンの集合である．モデル構成作用素と呼ばれる写像 $T: \Phi \rightarrow \Phi$ をパターン $\varphi \in \Phi$ の変動に対し頑健であるように選ぶことが基本的に重要である．特徴抽出写像 $u$ を内部構造に取り込んでいるこのニューラルネットへの入力概念の事例パターン $\varphi$ から抽出される特徴量の組 $\vec{u}(\varphi)$ で構成されるS.Suzukiのパターンモデル $T\varphi$ である．パターンそのものではなく，パターンモデルをニューラルネットへ入力することにより，事例知識の変動に頑健な非単調推論が可能となる利点が生じている．

属性ベクトル，概念番号を各々入力，出力とする事例〈属性ベクトル，概念番号〉の訓練系列に最急降下法を適用し概念を逐次学習記憶させた2つの誤差逆伝播学習ニューラルネットからの構造を使って，Godel's logicでの論理的含意 $N \rightarrow_G N'$ を作り，得られた論理的含意の集まり(知識の集合体)を基に非単調的に推論を行うシステムが研究されている． $N, N'$ は各々の概念(カテゴリ)を

学習した2つの誤差逆伝播学習ニューラルネットの構造から得られるニューラルネットの論理ベクトルであり、1より大きくない非負実数値の成分からなっている。

論理ベクトル $N, N'$ を得る方法が本論文では新しく確立されている。更に、論理的含意 $N \rightarrow N'$ の信頼度 $\text{deg}(N \rightarrow N')$ を計算する手順を、本論文では新しく確立する。その結果、記号的知識の集まりからパターン情報処理で非単調的に推論可能な手法の存在が明らかにされる。

信頼度計算手順が確立されたこの種の論理的含意の、複数個の集まりがある場合、信頼度の高い論理的含意の集まりから得られる論理的帰結を採用するといった設定で、非単調推論がなされ得ることが示されている。

パターン情報技術(ニューラルネット技術)により事例知識、概念知識を獲得し(前段)、その知識獲得結果を使って記号推論を実行する(後段)といった意味で、パターン情報技術と記号処理技術との融合で、非単調推論がなされ得ることが文献[A3]と同じく、新しい。

### キーワード

パターン認識      モデル構成作用素      ゲーデル論理      論理的含意  
非単調推論      論理ベクトル      誤差逆伝播ニューラルネット

### Abstract

An operation which may for the time being derive a consistent logical consequence under circumstances which are lacking in information is called a default reasoning. It is supposed that recognizing patterns is performed by a kind of default reasoning because a list of features from a pattern is probably incomplete in identifying the pattern. A reasoning based upon a non-monotonic logic that can not necessarily increase logical consequences(i.e.,theorems) obtained by an inference even though axioms is increasing is also a kind of default reasoning.

A theory[B1]~[B4] of pattern-recognition suggested by S.Suzuki can present a model  $T\varphi$ . A recognizer sensuously receive a model  $T\varphi$  corresponding to an original pattern  $\varphi$  in question to be processed as if  $T\varphi$  was  $\varphi$ . This paper applies the theory to a construction of a knowledge-inference mechanism which may provide a non-monotonic logic. Let us represent a case of knowledges as attribute-vectors of two-valued components. For this application we regard this vector as pattern  $\varphi \in \Phi$ , where  $\Phi$  is a set of patterns in question to be processed. It is fundamentally important that we must select a mapping  $T: \Phi \rightarrow \Phi$  called a model-construction operator is robust under varieties of a typical pattern.

We prepare an error-back propagation learning network for an acquisition of a categorical knowledge. An input to this neural net which incorporates a feature-extracting mapping  $u$  (which is used to construct  $T$ ) in its internal structure is  $T\varphi$  which has as one of its components a pack  $\vec{u}(\varphi)$  extracted from an input pattern  $\varphi$  which represents a knowledge- example of attributes of a concept. That an object to be inputted to the net is not  $\varphi$  but  $T\varphi$  has one advantage of that a nonmonotonic reasoning robust under changes of knowledge-examples is possible.

The network must learn a category (i.e.,a concept) in the successive-mode based on a method of gradient descent using a sequence of training examples <attribute-vector, category-number>. A logical

implication  $N \rightarrow_G N'$  in Godel's logic can be made from two semantic structures of two networks obtained by learning two categories  $N$  and  $N'$ . We organize a system to carry out a non-monotonic reasoning using a memorized set of logical implications.  $N$  and  $N'$  are called logical vectors whose components are a non-negative real-numbers not greater than 1.

We newly propose a method of obtaining two logical vectors  $N$ ,  $N'$  and a procedure of computing a confidence-degree  $\text{deg}(N \rightarrow_G N')$  of logical implication  $N \rightarrow N'$ . As a natural result we can make it clear that a system can infer a logical consequence from a set of symbolic knowledges in a nonmonotonic manner by making use of pattern-information processing.

Assuming that there exist several sets of the above-mentioned logical implications calculation of whose confidence-degrees are established, a non-monotonic reasoning is performed in the following manner: A logical implication having a value higher than confidence-degrees of other logical implications is adopted.

A non-monotonic reasoning can be settled based upon an integration of pattern-processing techniques(i.e.,neural net techniques) and a manipulation of symbolic statements in the same way as reference[A3]:Examples of knowledges and conceptual knowledges are acquired with the help of neural networks, i.e., by the use of pattern-processing techniques in the first phase.In the second phase a nonmonotonic reasoning is performed within the symbolic logic knowledges which has been learned by error-back propagation nets.

**Keywords :** pattern-recognition    model-construction operator    Godel logic    logical implication  
non-monotonic reasoning    logical vector    error-back propagation neural net

## 1. まえがき

### 1.1 本論文の研究目的

本論文では、3段論法 [A1]

$$3 \text{命題 } P, Q, R \text{ のついで, } \mathbf{[[P \wedge [P \rightarrow Q]] \rightarrow Q]} = \text{truth} \quad (1.1)$$

を複数回適用し、非単調推論する方法、並びに、そのとき生じる諸問題の解決方法を研究する。

事例知識、概念知識の、コンピュータによる自動的獲得問題(knowledge-acquisition problem)の解決、並びに、コンピュータによる推論方法の解決を目指すものである。

### 1.2 信頼度を定義すれば、何故、非単調推論が可能となるか？

S.Suzukiのパターンモデル [B1]～[B4] から抽出される特徴量 の組

$$\vec{u}(T\varphi) \equiv \{u(T\varphi, \ell) \mid \ell \in L\} \quad (1.2)$$

が入力され、その結果として、多数のニューラルネットからの2値(=0,1)出力ベクトル  $N_k$  の、 $m$  個の集合が、

$$N_k, k=1, 2, \dots, m \quad (1.3)$$

と、得られるとしよう。  $N_p, N_q$  が与えられたとき、

$$[N_p \rightarrow N_q] = (1, 1, \dots, 1) \quad (1.4)$$

が成立するような論理的含意

$$N_p \rightarrow N_q \text{ (if } N_p \text{ then } N_q) \quad (1.5)$$

を用いて、 $N_q$ が成立する（3段論法[A1]）といった $N_q$ の集まりで非単調推論することを考えよう。そのためには、各論理的含意にその信頼度というものを定義し、各論理的含意を使用するときの優先順位として利用すればよい。それは、次の非単調推論の簡単な例から理解できよう。

[非単調推論の例]

$\rightarrow_G$ はGodel' logic [A4] での論理的含意の意とする。

3つの含意

$$(1) \text{含意1: 鳥} \rightarrow_G \text{飛ぶ, 信頼度 } 0.2 \quad (1.6)$$

$$(2) \text{含意2: ペンギン} \rightarrow_G \text{鳥, 信頼度 } 0.3 \quad (1.7)$$

$$(3) \text{含意3: ペンギン} \rightarrow_G \text{飛ばない, 信頼度 } 0.3 \quad (1.8)$$

を想定しよう。

含意1と含意2を共に使用すると、信頼度 $0.2 = \min\{0.2, 0.3\}$ の、含意

$$(4) \text{含意4: ペンギン} \rightarrow_G \text{飛ぶ, 信頼度 } 0.2 \quad (1.9)$$

が得られる。得られた含意(4)は含意(3)に矛盾するが、信頼度は含意(3)の方が大きいので、含意(3)が採用され、

$$\text{ペンギン} \rightarrow_G \text{飛ばない} \quad (1.10)$$

と、非単調推論され、論理的帰結(logical consequence)が得られる。□

### 1.3 ニューラルネットの論理ベクトル

$\Phi$ を処理の対象とするパターン $\varphi \in \Phi$ の集合としよう。鳩、ペンギン、熊、こうもりなどの事例知識としてのパターン $\varphi \in \Phi$ が表している概念は第 $j \in J = \{1, 2, 3\}$ 番目のカテゴリ $\mathcal{C}_j$ であるとしよう。 $\varphi \in \Phi$ のモデル $T\varphi \in \Phi$ (入力)と、カテゴリ番号 $j$ (出力)との対

$$\langle T\varphi, [j] \rangle \text{ (a pair of input/output of the concept)} \quad (1.11)$$

を入力して、ニューラルネットに誤差逆伝播学習させよう。

例えば、表1で説明しよう。ハトを表すパターン $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ については、その属性ベクトルの各成分は

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0 \quad (1.12)$$

であり、

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0 \text{のとき, } \varphi(x_1, x_2, x_3) = 1 \quad (1.13)$$

$$\text{その他の } x_1, x_2, x_3 \text{のとき, } \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (1.14)$$

であるごときものである。このハトを表すパターン $\varphi$ のとき、例えば、 $\mathcal{C}_1 = \text{鳥}$ 、 $\mathcal{C}_2 = \text{飛行}$ 、 $\mathcal{C}_3 = \text{ペンギン}$ として、第 $j \in J = \{1, 2, 3\}$ 番目のカテゴリ $\mathcal{C}_j$ を事例学習すべくなされた各誤差逆伝播学習ニューラルネットの出力 $h(g_j(T\varphi), j)$ 、 $j \in J = \{1, 2, 3\}$ は、

$$h(g_1(T\varphi), 1) = 1, h(g_2(T\varphi), 2) = 1, h(g_3(T\varphi), 3) = 0 \quad (1.15)$$

であるごとく、3個の誤差逆伝播(2層)ニューラルネットの学習により、知識の獲得がなされていることが望ましい。

例えば、鳥は飛ぶことができるということを、2つの概念「鳥」、「飛行」を用いて、含意

$$\text{鳥} \rightarrow \text{飛行} \quad (1.16)$$

で表すことができるが、この含意は、2概念 $\mathcal{C}_1 = \text{鳥}$ 、 $\mathcal{C}_2 = \text{飛行}$ の論理ベクトル

$$N_1 = \{h(g_1(T\varphi_s), j); S \in 2^Q\} \text{の横ベクトル化} \quad (1.17)$$

$N_2 = \{h(g_2(T\psi_s), j); S \in 2^Q\}$  の横ベクトル化 (1.18)  
を用いて,

$$N_1 \rightarrow N_2 \quad (1.19)$$

と表すのが、本論文の設定である。  $\{\psi_s\}_{S \in 2^Q}$  はパターン集合  $\Phi$  の基底である。第1, 2番目のニューラルネットの構造

$$h(g_1(T\bullet)), h(g_2(T\bullet)) \quad (1.20)$$

を用いて定義される論理ベクトル  $N_1, N_2$  は文献 [A3] では,

$$\begin{aligned} &g_1(T\psi_s), g_2(T\psi_s) \text{ を各々, 真理関数としての基底原子を変化させて,} \\ &N_1, N_2 \text{ を求める方法} \end{aligned} \quad (1.21)$$

を採用しており、本論文の上述の設定と異なっている。 □

表1 パターン  $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ , 属性ベクトル  $(x_1, x_2, x_3)$ , 3個のカテゴリ  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$

Table 1 pattern  $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ , vector  $(x_1, x_2, x_3)$  of attributes and three categories  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$

$\varphi(x_1, x_2, x_3)$	足 ( $x_1$ )	色 ( $x_2$ )	食 ( $x_3$ )	鳥 ( $\mathcal{C}_1$ )	飛ぶ ( $\mathcal{C}_2$ )	ペンギン ( $\mathcal{C}_3$ )
ハト	2(0)	白(0)	草(0)	Y(1)	Y(1)	N(0)
ペンギン	2(0)	黒(1)	肉(1)	Y(1)	N(0)	Y(1)
熊	4(1)	黒(1)	肉(1)	N(0)	N(0)	N(0)
こうもり	2(1)	黒(1)	肉(1)	N(0)	Y(1)	N(0)

#### 1.4 本研究の新らしさ, 有効性など

文献 [A1] の第9章では、公理の集合  $A$  から証明される定理全体の集合を  $\text{Th}(A)$  と表している。

$$A \subseteq B \text{ ならば, } \text{Th}(A) \subseteq \text{Th}(B) \text{ が成立する} \quad (1.22)$$

とは限らない非単調論理(non-monotonic logic)としての2種類

- (a) サーカムスクリプション (circumscription; 考慮する対象はそこに述べられているものだけに限定するという推論規則) に基づく推論
- (b) デフォルト推論 (default reasoning; 情報が欠如している状況下でとりあえず矛盾のない論理的帰結を導出するという操作)

が解説され、非単調な推論機構を持つ知識ベース・システムとしての

- (c) TMS (truth maintenance system; 蓄えてある知識との論理的整合性を維持することを目的としたシステム)

も簡単に説明されている。

本研究でも信頼度を新たに定義するが、このような非単調推論の実行機構は文献 [A4] でも研究されている。

2つの2層の前進形ニューラルネットに2つの概念を各々、誤差逆伝播学習させ、その学習結果得られた構造を用いて決定される各成分が1より大きくない非負成分からなる連続的論理的ベクトル  $N_1, N_2$  を用いて、論理的含意

$$N_1 \rightarrow N_2 \quad (1.23)$$

を many-valued logic で考えることができる。このような各論理的含意に信頼度を付与できたとすると、文献 [A3] と同様な手法を使うと論理的含意の集まりで非単調推論がなされ得ることが示される。例えば、論理的含意の2つの集まり (論理的含意を原子とする複合命題論理式の2つの集ま

り)があり、各々から矛盾する2つの論理的帰結が得られた場合、信頼度の高い方の論理的含意の集まりから得られる論理的帰結を採用すれば、公理が増加しても得られる論理的結論の集まりは増加するとは限らないという非単調推論が得られる。

論理的含意の信頼度は、文献 [A5] の、Boolean function  $f$  の  $\text{degree}(f)$  から  $\text{hint}$  を得、新しく本論文で考案されたものである。また、特徴抽出写像を内部構造に取り込んでいるこの2層の前進形ニューラルネットは、「概念事例の属性ベクトルであるパターン」  $\varphi \in \Phi$  から抽出された3値特徴量を備えた S.Suzuki のパターンモデル  $T\varphi \in \Phi$  を入力するものであり、パターンそのものではなくモデルから抽出される特徴量の組に関し動作するものである。

$\varphi_1, \varphi_2$  の違いが小であれば、 $T\varphi_1, T\varphi_2$  そのモデルは一致することがある (1.23) ことを考慮すれば、事例知識を表しているパターン(属性ベクトル)の小さな変動に対し、前進形ニューラルネットの出力は頑健である。概念事例の属性ベクトルをパターンで表しているから、S.Suzuki のパターン情報処理技術 [B1]～[B4] を適用して、Godel連続値論理系 [A4] での記号的非単調推論を実現できる。

「概念事例の属性ベクトルであるパターン」 のパターンモデルの S.Suzuki のパターンモデル [B4]  $T\varphi \in \Phi$  を構成するのに、その基底として、特別な“変数  $x_i \in \{0, 1\}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) の関数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  の Fourier transform (フーリエ変換)” の正規直交系 [A5] が採用されたが、この採用は、パターンである概念事例の属性ベクトルがその成分が 0, 1 である2値ベクトルであることに起因している。

事例知識を獲得した前進形ニューラルネットの構造に基づいて真理関数の信頼度を新たに定義した結果、特徴抽出写像を内部構造に取り込んでいる2層前進形ニューラルネットによる知識獲得手法が確保されたことが本研究の特色である。

尚、S.Suzuki のパターン情報の理論 [B1]～[B4] の骨格をなす4公理 axiom 1～4は付録Aで解説されている。更に、7付録B～Hを設け、SS理論 [B1]～[B4] の適用可能性を広げておいた。

## 2. 真理関数のフーリエ展開

情報が欠如している状況下でとりあえず矛盾のない結論を導く操作をデフォルト (default) による推論というが [A1]、パターンから抽出される知識に vagueness, polymeanings, uncertainty, incompleteness などがあるので、この種の情報が欠如している知識を使ってなされるパターン認識の働きはデフォルト推論である。

名詞、動詞などの概念を誤差逆伝播学習ニューラルネットに学習させ、得られた2つのニューラルネットの構造を用いて得られる論理ベクトル  $N_1, N_2$  を用いて行う式 (1.23) の論理的含意  $N_1 \rightarrow N_2$  の集まりで非単調推論 [A3] ために必要とされるパターン情報処理の基礎(パターンモデルの構成)を確立するために、本章では、真理関数のフーリエ展開について論じる。

### 2.1 多重線形関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の定義域を $x_i \in \{0, 1\}$ と制限すると、真理関数が得られる事実

例えば、2つの関数(多重線形関数 *mulyi-linear function*)

$$\varphi(x_1) = ax_1 + b \tag{2.1}$$

$$\varphi(x_1, x_2) = ax_1x_2 + bx_1 + cx_2 + d \tag{2.2}$$

について考えよう． $n$ 変数多重線形関数の各変数  $x_i$  の値を  $x_i \in \{0, 1\}$  と制限して得られる関数は  $n$ 変数真理関数 (truth function) といわれる． $x_i = 0$  は偽 (falsity),  $x_i = 1$  は真 (truth) を表しているといわれる．真理関数の，1より大きくない非負値が， $0, 1/2, 1$  であれば，その真理関数の表す命題が各々，偽，不定，真であると解釈できる． $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$  の値 (単位区間値) をとる変数  $x_1, x_2$  のとる値を

$$x_1, x_2 \in \{0, 1\} \quad (2.3)$$

と2値に制限すると、真理関数として、

$$\varphi(x_1) = p \cdot x_1 + q \cdot \neg x_1 \quad (2.4)$$

$$\varphi(x_1, x_2) = p \cdot x_1 x_2 + q \cdot x_1 \cdot \neg x_2 + r \cdot \neg x_1 \cdot x_2 + s \cdot \neg x_1 \cdot \neg x_2 \quad (2.5)$$

と表現できるような係数  $p, q, r, s$  が存在する．例えば，2式(2.1), (2.4)についていえば，

$$\varphi(x_1) = ax_1 + b = p \cdot x_1 + q \cdot \neg x_1 \quad (2.6)$$

において、

$$x_1 = 0 \text{ とすれば, } b = q \quad (2.7)$$

$$x_1 = 1 \text{ とすれば, } a + b = p \quad (2.8)$$

であるから、

$$\varphi(x_1) = ax_1 + b = (a + b) \cdot x_1 + b \cdot \neg x_1 \quad (2.9)$$

が成立することからも、この存在は推察できよう。

式(2.1)の1変数多重線形関数  $\varphi(x_1)$  においては、式(1.4)では、 $x_1, \neg x_1$  の2個が真理関数の原子の基底を形成しており、式(1.2)の2変数多重線形関数  $\varphi(x_1, x_2)$  においては、式(1.5)では、 $x_1 x_2, x_1 \cdot \neg x_2, \neg x_1 \cdot x_2, \neg x_1 \cdot \neg x_2$  の4個が真理関数の原子の基底を形成している．このとき、次の多重線形空間定理 [A3] に注目しよう。

[多重線形空間定理]  $n$ 変数多重線形関数

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum p_i \cdot x_1^{e_{i1}} x_2^{e_{i2}} \dots x_n^{e_{in}} \quad (2.10)$$

ここに、 $p_i$  は実数、 $e_{ij}$  は1か0、変数  $x_i$  は  $0 \leq x_i \leq 1$

からなる多重線形空間は、変数  $x_i$  の値を  $x_i \in \{0, 1\}$  と制限すると、 $n$ 変数真理関数の原子  $x_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) の基底

$$\{v_1 x_1 \wedge v_2 x_2 \wedge \dots \wedge v_n x_n \mid v_i \in \{\phi, \neg\}, i = 1, 2, \dots, n\} \quad (2.11)$$

で張られる線形空間である。□

上の多重線形空間定理は、多重線形関数の構造を備えているニューラルネットが真理関数を学習できることを可能にするものである。

## 2.2 パターン、内積、ノルム

パターンは、2値  $0, 1$  の値をとる  $n$ 変数の組

$$x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in \{0, 1\}^n \equiv \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\} \quad (2.1)$$

について、

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z} \text{ (複素数全体の集合)} \quad (2.2)$$

であるようなものとしよう。

2つのパターン  $\varphi, \eta \in \mathbb{Z}$  の内積  $(\varphi, \eta) \in \mathbb{Z}$  (複素数全体の集合) として、

$$(\varphi, \eta) = 2^{-n} \cdot \sum_{x \in \{0, 1\}^n} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \bar{\eta}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.3)$$

ここに、 $\bar{\eta}$  は  $\eta$  の複素共役

を採用しよう． $\varphi \in \mathbb{Z}$  のノルム  $\|\varphi\| \in \mathbb{R}^+$  (非負実数全体の集合) は、

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} = [2^{-n} \cdot \sum_{x \in \{0,1\}^n} |\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2]^{1/2} \quad (2.4)$$

と定義される。

## 2.2 完全正規直交系

集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  のすべての部分集合  $S$  からなる系

$$2^{\{1, 2, \dots, n\}} \equiv \{S \mid S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}\} \quad (2.5)$$

を考え、この部分集合  $S \in 2^{\{1, 2, \dots, n\}}$  に依存する2値関数

$$\begin{aligned} \psi_S(x) &= \psi_S(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-1)^{\sum_{i \in S} x_i} = \\ &\begin{cases} +1 & \dots \sum_{i \in S} x_i \text{ is even} \\ -1 & \dots \sum_{i \in S} x_i \text{ is odd} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.6)$$

と定義される関数  $\psi_S$  の系  $\{\psi_S\}_{S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}}$  について、次の3性質 (i), (ii), (iii) が成り立つ [A3], [A5] :

性質 (i) (正規直交性; orthonormality)

$$(\psi_A, \psi_B) = 0 \text{ if } A \neq B, = 1 \text{ if } A = B. \quad (2.7)$$

性質 (ii) (フーリエ展開; Fourier expansion)

$$\forall \varphi \in \Phi, \varphi = \sum_{S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (\varphi, \psi_S) \cdot \psi_S. \quad (2.8)$$

性質 (iii) (パッセヴァルの等式; Parseval's identity)

$$\forall \varphi \in \Phi, \|\varphi\|^2 = \sum_{S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} |(\varphi, \psi_S)|^2. \quad (2.9)$$

□

以下に、性質 (i) のみを証明しよう。

①  $A=B$  のとき

$$\begin{aligned} &(\psi_A, \psi_B) \\ &= (\varphi, \eta) = 2^{-n} \cdot \sum (-1)^{\sum_{i \in A} x_i} \cdot (-1)^{\sum_{i \in B} x_i} \\ &= 2^{-n} \cdot \sum (-1)^{2 \sum_{i \in A} x_i} \\ &= 2^{-n} \cdot \sum 1^{\sum_{i \in A} x_i} \\ &= 2^{-n} \cdot \sum 1 \\ &= 2^{-n} \cdot 2^n \\ &= 1. \end{aligned}$$

②  $A \neq B$  のとき

$$\begin{aligned} &(\psi_A, \psi_B) \\ &= 2^{-n} \cdot \sum (-1)^{\sum_{i \in A} x_i + \sum_{i \in B} x_i} \\ &= 2^{-n} \cdot \sum (-1)^{\sum_{i \in A \cap B} x_i + \sum_{i \in A \setminus B} x_i + \sum_{i \in B \setminus A} x_i + \sum_{i \in A \setminus B} x_i} \\ &= 2^{-n} \cdot \sum (-1)^{2 \sum_{i \in A \setminus B} x_i + \sum_{i \in A \cap B} x_i + \sum_{i \in B \setminus A} x_i} \\ &= 2^{-n} \cdot \sum (-1)^{\sum_{i \in A \cap B} x_i + \sum_{i \in B \setminus A} x_i} \\ &= 2^{-n} \cdot \sum (-1)^{\sum_{i \in (A \cap B) \cup (B \setminus A)} x_i} \end{aligned} \quad (2.10)$$

と変形されるが、

$$\sum_{i \in (A \cap B) \cup (B \setminus A)} x_i \quad (2.11)$$

が偶数、奇数である場合は、各々  $2^n/2$ ,  $2^n/2$  個あり、よって、



$$= 2^{-n} \cdot (2^n/2 - 2^n/2) \\ = 0$$

を得，証明が終わる。□

### 2.3 フーリエ展開

式(2.8)のフーリエ式展開に注目しよう。

$$\mathfrak{F}(\varphi)(S) \equiv (\varphi, \psi_s) \quad (2.12)$$

を真理関数(truth function)としてのパターン $\varphi$ のフーリエ変換(Fourier transform)という[A5]。名称は同じであるが，3角関数に基づく通常のフーリエ変換とは異なっていることに注意する。変数 $S$ の関数 $\eta(S)$ について，フーリエ逆変換

$$\mathfrak{F}^{-1}(\eta)(x) \equiv \sum_{s \in \{1, 2, \dots, n\}} \eta(S) \cdot \psi_s(x) \quad (2.13)$$

を定義する。フーリエ式展開式(2.8)によれば，等式

$$\forall \varphi \in \Phi, \varphi = \mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(\varphi)) \quad (2.14)$$

が成り立つ。パーセヴァルの等式(5.9)は，

$$\forall \varphi \in \Phi, \|\varphi\|^2 = \sum_{s \in \{1, 2, \dots, n\}} |\mathfrak{F}(\varphi)(S)|^2 \quad (2.15)$$

と書き換えられる。

## 3. パターンモデル $T\varphi$

パターンモデルを感性的に受け取ったら，原パターンと錯覚し原パターンと同じように感性的に受容するような存在が，S.Suzukiのパターン情報の理論[B1]～[B4]によりパターンモデルとして確保されることがこれまでの研究により明らかになっている。本章では，パターン $\varphi$ の，このような2種類のパターンモデル $T\varphi$ ， $T_{00}\varphi$ が説明される。 $\{1, 2, \dots, n\}$

### 3.1 連続値特徴量の組を備えたパターンモデル $T\varphi$

添え字の有限集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ の部分集合

$$Q \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \quad (3.1)$$

を選定して，

$$2^Q (Q \text{の部分集合の全体}) \quad (3.2)$$

を考えよう。処理の対象とする問題のパターンは $\varphi$ ，次のように直交展開される：

$$\|\varphi - \sum_{s \in 2^Q} C_s \cdot \psi_s\|^2 \rightarrow \min \quad (3.3)$$

ならしめる展開係数 $C_s$ は，

$$C_s \equiv (\varphi, \psi_s) \quad (3.4)$$

である。そして，

$$\forall \varphi \in \Phi, [\exists \varphi_{\perp}, \forall S \in \{1, 2, \dots, n\} - 2^Q, (\varphi_{\perp}, \psi_s) = 0] \quad (3.5)$$

$$\wedge [\varphi = \sum_{s \in 2^Q} (\varphi, \psi_s) \cdot \psi_s + \varphi_{\perp}] \quad (3.6)$$

□

式(3.5)に登場している $\Phi$ は処理の対象とする問題のパターン $\varphi$ の集合である。パターン $\varphi = (\varphi)(x) \in \Phi$ のモデル $(T\varphi)(x)$ を与える写像

$$T: \Phi \rightarrow \Phi \quad (3.7)$$

を,

$$(T\varphi)(x) = \sum_{S \in 2^{\mathcal{Q}}} u(\varphi, S) \cdot \psi_S(x) \quad (3.8)$$

と, 採用する. ここに, パターン  $\varphi \in \Phi$  から抽出される第  $S$  番目の特徴量と称される  $u(\varphi, S)$  は,

$$u(\varphi, S) = \begin{cases} 0 \cdots \sup_{S \in 2^{\mathcal{Q}}} |(\varphi, \psi_S)| = 0 & \text{のとき} \\ (\varphi, \psi_S) / \sup_{S \in 2^{\mathcal{Q}}} |(\varphi, \psi_S)| \cdots \sup_{S \in 2^{\mathcal{Q}}} |(\varphi, \psi_S)| > 0 & \text{のとき} \end{cases} \quad (3.9)$$

と定義される。式(3.8)の如く定義される式(3.7)の写像は, 付録AのA1章のaxiom 1の3性質(i)~(iii)の3前半, 並びに, (iv)を満たすように構成されている. 結局,  $\Phi$ と $T$ との対は $\langle \Phi, T \rangle$  axiom 1を満たすことになる(付録Aの定理A2.1を参照).

次の定理3.1は, 正規直交系  $\{\psi_K\}_{K \in 2^{\mathcal{Q}}}$  の各元  $\psi_S$  は式(3.8)で定義される写像  $T$  の不動点のパターンモデルであることを指摘している.

[定理3.1] (不動点パターンモデル定理)

$$\forall S \in 2^{\mathcal{Q}}, T\psi_S = \psi_S. \quad (3.10)$$

(証明)  $\varphi = \psi_S$  の場合,  $\{\psi_K\}_{K \in 2^{\mathcal{Q}}}$  の正規直交式(2.7)を適用すれば,

$$(\varphi, \psi_K) = \begin{cases} 1 & \text{if } K = S \\ 0 & \text{if } K \neq S \end{cases} \quad (3.11)$$

が成り立つ. よって, 特徴抽出写像  $u$  の定義式(3.9)より,

$$u(\varphi, K) = \begin{cases} 1 & \text{if } K = S \\ 0 & \text{if } K \neq S \end{cases} \quad (3.12)$$

がいえ,  $T\varphi$  の定義式(3.8)より, 所要の式(3.10)が得られることがわかる. □

### 3.2 3値特徴量の組を備えたパターンモデル

パターン  $\varphi \in \Phi$  から抽出される各特徴量  $u(\varphi, S)$  が  $\in \mathbb{R}$  (実数全体の集合) の場合, これを3値化して, 前節のパターンモデル  $T\varphi \in \Phi$  を以下のパターンモデル  $T_{00}\varphi$  へと簡単化しよう.

まず, 式(3.8)の  $u(\varphi, S)$  を

$$\hat{u}(\varphi, S) = \begin{cases} 0 \cdots \forall S \in 2^{\mathcal{Q}}, u(\varphi, S) = 0 & \text{の場合} \\ u(\varphi, S) / \sup_{S \in 2^{\mathcal{Q}}} |u(\varphi, S)| \cdots \exists S \in 2^{\mathcal{Q}}, u(\varphi, S) \neq 0 & \text{の場合} \end{cases} \quad (3.13)$$

へと変換する. そうすると, 不等式

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall S \in 2^{\mathcal{Q}}, -1 \leq \hat{u}(\varphi, S) \leq +1 \quad (3.14)$$

が成立していることに注意して, 不等式

$$-1 < -\epsilon'_S(0) < 0 < +\epsilon_S(0) < +1 \quad (3.15)$$

を満たすように, 2つの閾値  $\epsilon'_S(0)$ ,  $\epsilon_S(0)$  を導入する.

$\hat{u}(\varphi, S)$  を3値特徴量

$$u_{00}(\varphi, S) =$$

$$\begin{cases} -1 \cdots -1 \leq \hat{u}(\varphi, S) \leq -\varepsilon'_S \text{ のとき} \\ 0 \cdots -\varepsilon'_S(0) \leq \hat{u}(\varphi, S) \leq \varepsilon_S \text{ のとき} \\ +1 \cdots +\varepsilon_S(0) < \hat{u}(\varphi, S) \leq 1 \text{ のとき} \end{cases} \quad (3.16)$$

へと変換し,

$$(T_{00}\varphi)(x) = \sum_{S \in K} u_{00}(\varphi, S) \cdot \psi_S(x) \quad (3.17)$$

と定義される写像

$$T_{00} : \Phi \rightarrow \Phi \quad (3.18)$$

は, 条件

$$\exists \varphi \in \Phi, \exists S \in 2^Q, [\hat{u}(\varphi, S) < -\varepsilon'_S(0)] \vee [\varepsilon_S(0) < \hat{u}(\varphi, S)] \quad (3.19)$$

の下で, axiom 1の3性質 (i) ~ (iii)の3前半, 並びに, (iv)を満たす. 結局, 対 $\langle \Phi, T_{00} \rangle$ は axiom 1を満たすことになる(付録Aの定理A2.1を参照).

次の定理3.2は, 正規直交系 $\{\psi_K\}_{K \in 2^Q}$ の各元 $\psi_S$ は式(3.17)で定義される写像 $T_{00}$ の不動点のパターンモデルであることを指摘している.

[定理3.2] (不動点パターンモデル定理)

$$\forall S \in 2^Q, T_{00}\psi_S = \psi_S. \quad (3.20)$$

(証明)  $\varphi = \psi_S$ の場合, 式(3.12)が成立しているから, 特徴抽出写像 $\hat{u}$ の定義式(3.13)より,

$$\hat{u}(\varphi, S) = \begin{cases} 1 & \text{if } K=S \\ 0 & \text{if } K \neq S \end{cases} \quad (3.21)$$

がいえ, 2式(3.15), (3.16)より,

$$u_{00}(\varphi, S) = \begin{cases} 1 & \text{if } K=S \\ 0 & \text{if } K \neq S \end{cases} \quad (3.21)$$

を得,  $T\varphi$ の定義式(3.8)より, 所要の式(3.20)が得られることがわかる.  $\square$

上述の2定理3.1, 3.2においては, 2種類の特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \rightarrow \mathbf{R} \text{ (実数全体の集合)} \quad (3.22)$$

$$\hat{u} : \Phi \times L \rightarrow \mathbf{R} \quad (3.23)$$

$$u_{00} : \Phi \times L \rightarrow \{-1, 0, +1\} \quad (3.24)$$

が導入されていることに注意しておく. 実は,  $\hat{u} = u$ である. 例えば, 式(3.17)の特徴抽出写像 $u_{00}$ を用いると, パターン $\varphi \in \Phi$ のモデル $T\varphi \in \Phi$ (入力)から抽出された特徴量の組は,

$$\vec{u}_{00}(\varphi) \equiv \{u_{00}(T\varphi, \ell) \mid \ell \in 2^Q\} \quad (3.25)$$

と表されることに注意しておく.

以後, 式(3.7)で定義される式(3.8)の写像 $T$ , 或いは, 式(3.17)で定義される式(3.18)の写像 $T_{00}$ を $T$ と書く.

#### 4. 誤差逆伝播学習をする2層前進形ニューラルネット

本章では, 鳩などの事例の2値属性ベクトルとしてのパターン $\varphi \in \Phi$ が表している概念は第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathcal{C}_j$ であるとしよう.  $\varphi \in \Phi$ のモデル $T\varphi \in \Phi$ (入力)と, カテゴリ番号 $j$ (出力)との

対  $\langle T\varphi, [j] \rangle$  を入力して、前進形ニューラルネットに誤差逆伝播学習させる手法を研究しよう。そして、知識を獲得したニューラルネットの構造から、この知識を特徴付ける論理ベクトルを得る方法を確立する。

#### 4.1 2層前進型ニューラルネットの構成と、その学習条件、ニューラルネットの論理ベクトル

本節では、階層型2層ニューラルネット(2層前進型ニューラルネット)を構成し、その学習条件を明らかにし、ニューラルネットの論理ベクトルを定義する。

##### 4.1.1 2層前進型ニューラルネットの設定

式(3.17)の特徴抽出写像  $u_{00}$  を導入する。以後、 $u_{00}$  を  $u$  と書く。パターンモデル  $T\varphi \in \Phi$  から抽出された第  $\ell (=S) \in L (=2^Q)$  番目の特徴量  $u(T\varphi, \ell)$  は実数値である。

パターンモデル  $\in$  から抽出された第  $\ell \in L$  番目の各特徴量  $u(T\varphi, \ell)$  が入力された場合、2層前進ニューラルネット(階層型ニューラルネット)からの、出力

$$\begin{aligned} g_j(T\varphi, \ell) &= \sum_{n \in N(j)} W(j, 1; n) \cdot f_n \left( \sum_{k \in N(j, n)} W(j, 0, n; k) \cdot u(T\varphi, k) \right. \\ &\quad \left. + W(j, 0, n; 0) \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

ここに、

$$N(j) = \{1, 2, \dots, n(j)\} \quad (4.2)$$

$$L(j, n) = \{1, 2, \dots, \ell(j, n)\} \quad (4.3)$$

の系

$$g_j(T\varphi), j \in J = \{1, 2, \dots, m\} \quad (4.4)$$

を想定し、2値ベクトルとしての出力ベクトル(output vector)

$$\overrightarrow{OV}(\varphi) \equiv \{OV(\varphi, j) \mid j \in J\} \quad (4.5)$$

の第  $j$  成分  $OV(\varphi, j)$  を次のようにおく：

$$OV(\varphi, j) = h(g_j(T\varphi), j) \quad (4.6)$$

ここに、1実変数  $(-\infty <) u (< +\infty)$  の関数については、次のように導入する：

$$\begin{aligned} h(h, j) &= \begin{cases} 0 & \text{if } u \leq -a_j \\ u/(2a_j) + 2^{-1} & \text{if } -a_j < u < +a_j \\ 1 & \text{if } u \geq a_j \end{cases} \quad u \geq \\ , \text{ここに, } a_j &> 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

□

式(4.1)のニューラルネットには、2式(3.22), (3.23)の特徴抽出写像  $u$  を内部構造に取り込んでいる事実に注意しておかねばならない。

##### 4.1.2 ニューラルネットの論理ベクトル

第  $j \in J$  番目のカテゴリ  $\mathbb{C}_j$  の論理ベクトル  $N_j$  として、

$$N_j = \{h(g_j(T\psi_s), j); S \in 2^Q\} \text{ の横ベクトル化} \quad (4.8)$$

を採用する。2定理3.1, 3.2から、不動点方程式

$$\forall S \in 2^Q, T\psi_s = \psi_s \quad (4.9)$$

が成り立っていることに留意しておく。

##### 4.1.3 2層前進ニューラルネット(階層型ニューラルネット)からの、出力 $g_j(T\varphi)$ に要求される2条件

前項では、パターンモデル  $T\varphi \in \Phi$  から抽出された各特徴量を入力するような、実数重み  $W(j, 1;n)$  の組、実数重み  $W(j, 0, n;k)$  の組、実数閾値  $W(j, 0, n;0)$  の組

$$W(j, 1;n), n \in N(j) \quad (4.10)$$

$$W(j, 0, n;k), n \in N(j), k \in L(j, n) \quad (4.11)$$

$$W(j, 0, n;0), n \in N(j) \quad (4.12)$$

,  $h \in J$

を持つ2層前進形ニューラルネットの出力が各  $g_j(T\varphi)$  と導入された。本項では、この各  $g_j(T\varphi)$  に、2学習条件

$$\text{学習条件4.1 } \forall j \in J, g_j(T\omega_j) \geq 0 \quad (4.13)$$

$$\text{学習条件4.2 } \forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, g_j(T\omega_i) < 0 \quad (4.14)$$

を要求しよう。

学習条件4.2により、カテゴリ間の相互排他性が満たされる。

## 4.2 2層前進型ニューラルネットの学習

本節では、ニューラルネット内の重みを逐次的に決定する手法(学習法)を研究しよう。

### 4.2.1 誤差逆伝播学習による重み・閾値 $W(j, 1;n)$ , $W(j, 0, n;k)$ , $W(j, 0, n;0)$ の決定

以後、多層前進型ニューラルネット(multi-layer feedforward network)における誤差逆伝播学習法を最急降下法の適用下で、2層の場合に適用しよう。

パターン  $\varphi \in \Phi$  のモデル  $T\varphi \in \Phi$  (入力)と、 $\varphi$  が表している概念  $\mathcal{C}_j$  の諸性質を反映している2値属性ベクトル  $N$  (出力)との対  $\langle T\varphi, [j] \rangle$  (a pair of input/output of the concept)を入力して、誤差逆伝播学習させよう、ここに、 $N$ はその値が  $n$ 個の0,1なる組である。

前項の2条件4.1, 4.2を満たすように、訓練パターンのカテゴリ帰属知識系列

$$\langle \eta_0, [j_0] \rangle, \langle \eta_1, [j_1] \rangle, \dots, \langle \eta_t, [j_t] \rangle, \dots \quad (4.15)$$

を用いて、各  $W(j, 1;n), W(j, 0, n;k), W(j, 0, n;0)$  を学習の働きで決定する手法を以下で説明しよう。ここに、訓練パターン  $\eta_t$  は第  $j_t$  番目のカテゴリ  $\mathcal{C}_{j_t}$  に帰属していることが判明しているとしている。各カテゴリ  $\mathcal{C}_{j_t}$  に帰属する訓練パターン  $\eta_t$  はその生起確率  $p(\mathcal{C}_{j_t})$  に比例する割合で生起しているものとし、各代表パターン  $\omega_j (j \in J)$  は、

$$\forall j \in J, \exists t, \eta_t = \omega_j \quad (4.16)$$

というように、式(4.15)の系列に含まれているとしておかねばならない。

ある正定数  $c_j > 0 (j \in J)$  をあらかじめ、選定しておいて、

$$g_j(T\eta_t) = \begin{cases} c & \text{if } j = j_t \\ -c & \text{if } j \in J - \{j_t\} \end{cases} \quad (4.17)$$

を満たすように、各  $W(j, 1;n), W(j, 0, n;k), W(j, 0, n;0)$  を逐次的に決定していけば、2条件4.1, 4.2が満たされることになる。

式(4.15)の訓練系列は連続時刻  $t (\geq 0)$  で与えられていると考えて、最急降下法を適用することを考えよう。

まず、式(4.1)の  $g_j(T\varphi)$  において、 $W(j, 1;n), W(j, 0, n;k), W(j, 0, n;0)$  の代りに、各々、学習時刻  $t$  の時の  $W(j, 1;n;t), W(j, 0, n;k;t), W(j, 0, n;0;t)$  を採用して得られる2層前進型ニューラルネットからの、学習時刻  $t$  での出力

$$\begin{aligned}
& g_j(T\varphi; t) \\
& \equiv \sum_{\eta \in N(j)} W(j, 1; n; t) \cdot f_n \left( \sum_{k \in L(j, n)} W(j, 0, n; k; t) \cdot u(T\varphi, k) \right. \\
& \quad \left. + W(j, 0, n; 0; t) \right)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

を導入しておく。そして、

$$s(j, j_t) = -1 \text{ if } j \neq j_t, = +1 \text{ if } j = j_t \tag{4.19}$$

と定義される符号関数  $s(j, j_t)$  を導入し、汎関数

$$\begin{aligned}
& F(\langle \eta_t, [j_t] \rangle; t) \\
& \equiv \sum_{i \in J} 2^{-1} \cdot [g_i(T\eta_t; t) - s(i, j_t) \cdot c_i]^2
\end{aligned} \tag{4.20}$$

を定義し、3初期条件

$$W(j, 1; n; t) |_{t=0} = [ |j| + n + 1 ]^{-1} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
& W(j, 0, n; k; t) |_{t=0} \\
& = [ |j| + n + \ell(j, n) + 1 ]^{-1}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
& W(j, 0, n; 0; t) |_{t=0} = [ |j| + n + 1 ] \\
& , n \in N(j), k \in L(j, n), j \in J
\end{aligned} \tag{4.23}$$

の下で、3学習方程式(3最急降下方程式)

$$\begin{aligned}
& \textcircled{1} dW(j, 1; n; t)/dt \\
& = -\varepsilon_2(j, 1; n; t) \cdot \partial F(\langle \eta_t, [j_t] \rangle; t) / \partial W(j, 1; n; t)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
& \textcircled{2} dW(j, 0, n; k; t)/dt = -\varepsilon_1(j, 0, n; k; t) \cdot \\
& \quad \partial F(\langle \eta_t, [j_t] \rangle; t) / \partial W(j, 0, n; k; t)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
& \textcircled{3} dW(j, 0, n; 0; t)/dt = -\varepsilon_0(j, 0, n; 0; t) \cdot \\
& \quad \partial F(\langle \eta_t, [j_t] \rangle; t) / \partial W(j, 0, n; 0; t)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

の解として、各  $W(j, 1; n)$ ,  $W(j, 0, n; k)$ ,  $W(j, 0, n; 0)$  を

$$W(j, 1; n) = \lim_{t \rightarrow \infty} W(j, 1; n; t) \tag{4.27}$$

$$W(j, 0, n; k) = \lim_{t \rightarrow \infty} W(j, 0, n; k; t) \tag{4.28}$$

$$W(j, 0, n; 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} W(j, 0, n; 0; t) \tag{4.29}$$

と求めればよい。ここに、 $\varepsilon_2(j, 1; n; t)$ ,  $\varepsilon_1(j, 0, n; k; t)$ ,  $\varepsilon_0(j, 0, n; 0; t)$  は

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_2(j, 1; n; t) \\
& = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_1(j, 0, n; k; t) \\
& = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_0(j, 0, n; 0; t) = 0
\end{aligned} \tag{4.30}$$

を満たす正值関数である。何故ならば、 $W(j, 1; n; t)$  については、汎関数  $F(\langle \eta_t, [j_t] \rangle)$  の訓練時刻変数  $t$  についての単調非増加性

$$\begin{aligned}
& dF(\langle \eta_t, [j_t] \rangle; t)/dt \\
& = \sum_{\eta \in N(j)} \partial F(\langle \eta_t, [j_t] \rangle; t) / \partial W(j, 1; n; t) \cdot dW(j, 1; n; t)/dt \\
& = - \sum_{\eta \in N(j)} \varepsilon_2(j, 1; n; t) \cdot \\
& \quad [ \partial F(\langle \eta_t, [j_t] \rangle; t) / \partial W(j, 1; n; t) ]^2 \quad \because \text{式(4.24)} \\
& \leq 0 \quad \because \varepsilon_2(j, 1; n; t) \text{ は正值関数}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

が成立しているからである。 $W(j, 0, n; k; t)$ ,  $W(j, 0, n; 0; t)$  についても同様である。

#### 4.2.2 3学習方程式の離散時刻表現

実際には、式(4.15)の訓練系列は離散時刻  $t=0, 1, 2, \dots$  で与えられているから、3式(4.24)～

(4.26)の，離散時刻表現(離散近似)を求めておかねばならない。

$$\varepsilon_2'(j, 1; n; t), \varepsilon_1'(j, 0, n; k; t), \varepsilon_0'(j, 0, n; 0; t) \quad (4.32)$$

を正值関数として，例えば，

$$\varepsilon_2'(j, 1; n; t) = [ |j| + n + 1 ]^{-1} \quad (4.33)$$

$$\varepsilon_1'(j, 0, n; k; t) = [ |j| + n + k + t ]^{-1} \quad (4.34)$$

$$\varepsilon_0'(j, 0, n; 0; t) = [ |j| + n + t ]^{-1} \quad (4.35)$$

と与えると，

$$\begin{aligned} & \textcircled{4} W(j, 1; n; t+1) \\ &= W(j, 1; n; t) + \Delta W(j, 1; n; t) \\ & , \text{ where} \\ & \Delta W(j, 1; n; t) \\ &= -\varepsilon_2'(j, 1; n; t) \cdot \\ & \partial F(\langle \eta_t, [j_t] \rangle; t) / \partial W(j, 1; n; t) \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} & \textcircled{5} W(j, 0, n; k; t+1) \\ &= W(j, 0, n; k; t) + \Delta W(j, 0, n; k; t) \end{aligned} \quad (4.38)$$

, where

$$\begin{aligned} & \Delta W(j, 0, n; k; t) \\ &= -\varepsilon_1'(j, 0, n; k; t) \cdot \partial F(\langle \eta_t, [j_t] \rangle; t) / \partial W(j, 0, n; k; t) \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} & \textcircled{6} W(j, 0, n; t+1) \\ &= W(j, 0, n; t) + \Delta W(j, 0, n; t) \end{aligned} \quad (4.40)$$

, where

$$\begin{aligned} & \Delta W(j, 0, n; t) \\ &= -\varepsilon_0'(j, 0, n; 0; t) \cdot \partial F(\langle \eta_t, [j_t] \rangle; t) / \partial W(j, 0, n; t) \end{aligned} \quad (4.41)$$

,  $t = 0, 1, 2, \dots$

が求める離散時刻表現である。3式(4.37), (4.39), (4.41)に登場している偏微分係数 $\partial F(\langle \eta_t, [j_t] \rangle; t) / \partial W(j, 1; n; t)$ ,  $\partial F(\langle \eta_t, [j_t] \rangle; t) / \partial W(j, 0, n; k; t)$ ,  $\partial F(\langle \eta_t, [j_t] \rangle; t) / \partial W(j, 0, n; t)$ は，式(4.18)の $g_j(T\varphi; t)$ ，式(4.20)の $F(\langle \eta_t, [j_t] \rangle; t)$ とから，次のように求まる：

先ず，式(4.18)の $g_j(T\varphi; t)$ において， $\varphi = \eta_t$ を代入して得られる $g_j(T\eta_t; t)$ 内の成分

$$\begin{aligned} & u(n; t) \\ &= \sum_{k \in L(j, n)} W(j, 0, n; k; t) \cdot u(T\eta_t, k) + W(j, 0, n; 0; t) \end{aligned} \quad (4.42)$$

をも導入しておく。

$$\begin{aligned} & \textcircled{7} \partial F(\langle \eta_t, [j_t] \rangle; t) / \partial W(j, 1; n; t) \\ &= \sum_{i \in J} [g_i(T\eta_t; t) - s(i, j_t) \cdot c_i] \cdot \partial g_i(T\eta_t; t) / \partial W(j, 1; n; t) \\ &= [g_j(T\eta_t; t) - s(j, j_t) \cdot c_j] \cdot \partial g_j(T\eta_t; t) / \partial W(j, 1; n; t) \\ &= [g_j(T\eta_t; t) - s(j, j_t) \cdot c_j] \cdot \left( \sum_{k \in L(j, n)} W(j, 0, n; k; t) \cdot u(T\eta_t, k) \right. \\ & \quad \left. + W(j, 0, n; 0; t) \right). \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} & \textcircled{8} \partial F(\langle \eta_t, [j_t] \rangle; t) / \partial W(j, 0, n; k; t) \\ &= \sum_{i \in J} [g_i(T\eta_t; t) - s(i, j_t) \cdot c_i] \cdot \partial g_i(T\eta_t; t) / \partial W(j, 0, n; k; t) \\ &= [g_j(T\eta_t; t) - s(i, j_t) \cdot c_j] \cdot \sum_{m \in N(j)} \partial g_j(T\eta_t; t) / \partial f_m(u) \Big|_{u=u(m; t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& df_m(u)/du \Big|_{u=u(m;t)} \cdot \partial u(m;t)/\partial W(j, 0, n; k; t) \\
&= [g_j(T\eta_t; t) - s(j, j_t) \cdot c_j] \cdot \sum_{m \in N(j)} W(j, 1; m; t) \cdot df_m(u)/du \Big|_{u=u(m;t)} \cdot \\
&\quad \partial u(m;t)/\partial W(j, 0, n; k; t) \\
&= [g_j(T\eta_t; t) - s(j, j_t) \cdot c_j] \cdot W(j, 1; n; t) \cdot df_n(u)/du \Big|_{u=u(n;t)} \cdot \\
&\quad u(T\eta_t, k). \tag{4.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \textcircled{9} \partial F(\langle \eta_t, [j_t] \rangle; t)/\partial W(j, 0, n; 0; t) \\
&= \sum_{i \in J} [g_i(T\eta_t; t) - s(i, j_t) \cdot c_i] \cdot \partial g_i(T\eta_t; t)/\partial W(j, 0, n; 0; t) \\
&= [g_j(T\eta_t; t) - s(j, j_t) \cdot c_j] \cdot \sum_{m \in N(j)} \partial g_j(T\eta_t; t)/\partial f_m(u)/du \Big|_{u=u(m;t)} \cdot \\
&\quad df_m(u)/du \Big|_{u=u(m;t)} \cdot \partial u(m;t)/\partial W(j, 0, n; 0; t) \\
&= [g_j(T\eta_t; t) - s(j, j_t) \cdot c_j] \cdot \sum_{m \in N(j)} W(j, 1, m; t) \cdot df_m(u)/du \Big|_{u=u(m;t)} \cdot \\
&\quad \partial u(m;t)/\partial W(j, 0, n; 0; t) \\
&= [g_j(T\eta_t; t) - s(j, j_t) \cdot c_j] \cdot \\
&\quad W(j, 1; n; t) \cdot df_n(u)/du \Big|_{u=u(n;t)}. \tag{4.45}
\end{aligned}$$

#### 4.2.3 式(8.8)の2層前進型ニューラルネット内の発火関数の4設定

1実数値変数 ( $-\infty < u < +\infty$ ) の関数

$$f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+ \text{ (非負実数全体の集合)} \tag{4.46}$$

は式(4.1)の2層前進型ニューラルネット  $g_j(T\varphi)$  内の発火関数と呼ばれる．  $f_n$  の4設定法(イ), (ロ), (ハ), (ニ)を以下に示す．

(イ) シグモイド関数

$$\begin{aligned}
f_n(u) &= 1/[1 + \exp[-u/a_n]] \\
&\text{, ここに, } a_n > 0 \tag{4.47}
\end{aligned}$$

と設定すれば,

$$\begin{aligned}
& (\text{イ}_1) df_n(u)/du \\
&= (1/a_n) \cdot [f_n(u)] \cdot [1 - f_n(u)] \tag{4.48}
\end{aligned}$$

$$(\text{イ}_2) \lim_{u \rightarrow -\infty} f_n(u) = 0 \tag{4.49}$$

$$(\text{イ}_3) \lim_{u \rightarrow 0} f_n(u) = 2 \tag{4.50}$$

$$(\text{イ}_4) \lim_{u \rightarrow +\infty} f_n(u) = 1 \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}
& (\text{イ}_5) f_n(-2^{-1}) = 1/[1 + \exp(1/(2a_n))] = \\
& \rightarrow 0 (a_n \rightarrow 0) \\
& \rightarrow 2^{-1} (a_n \rightarrow \infty) \tag{4.52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\text{イ}_6) f_n(-2^{-1}) = 1/[1 + \exp(-1/(2a_n))] = \\
& \begin{cases} \rightarrow 1 (a_n \rightarrow 0) \\ \rightarrow 2^{-1} (a_n \rightarrow \infty) \end{cases} \tag{4.53}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\text{ロ}) f_n(u) = 2/[1 + \exp[-u/a_n]] \\
& \text{, } a_n > 0 \tag{4.54}
\end{aligned}$$

(ハ) 区分的1次関数

$$f_n(u) = \begin{cases} 0 & \text{if } u \leq -a_n \\ u/(2a_n) + 2^{-1} & \text{if } -a_n < u < +a_n \\ 1 & \text{if } u \geq a_n \end{cases}$$



$$, \text{ここに, } a_n > 0 \quad (4.55)$$

と設定すれば,

$$\begin{aligned} (\wedge_1) df_n(u)/du = \\ \begin{cases} 0 & \text{if } u < -a_n \\ 1/(2a_n) & \text{if } -a_n < u < +a_n \\ 0 & \text{if } u > a_n \end{cases} \end{aligned} \quad (4.56)$$

が成り立つ.  $a_n$ を

$$a_n = 1/2, 1, 3/2 \quad (4.57)$$

と選ぶのがよい.

$$\begin{aligned} (二) f_n(u) = \\ \begin{cases} -1 & \text{if } u \leq -a_n \\ u/a_n & \text{if } -a_n < u < +a_n \\ +1 & \text{if } u \geq a_n \end{cases} \\ , a_n > 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

## 5. 非単調推論の方法

本章では, 3段論法

$$3 \text{ 命題 } P, Q, R \text{ のついて, } \mathbf{[[P \wedge [P \rightarrow Q]] \rightarrow Q] = \text{truth}} \quad (5.1)$$

を複数回適用し, 非単調推論する方法, 並びに, そのとき生じる諸問題の解決方法を研究する.

### 5.1 連続値命題論理系としてのGodel's logic

連続値論理系 [A3], [A4] には, (1)Lukasiewicz' logic (2)Godel's logic (3)product logicなどがある [A4].

本論文においては, Godel's logic with the conjunctionを採用する. つまり,

$$\begin{aligned} 0 \leq x, y \leq 1 \text{ として,} \\ \textcircled{1} x \wedge y = \min(x, y) = x \text{ if } x \leq y, = y \text{ if } x > y \end{aligned} \quad (5.2)$$

and the implication

$$\textcircled{2} [x \rightarrow_G y] = 1 \text{ for } x \leq y, = y \text{ for } x > y \quad (5.3)$$

を考えよう. この2定義  $\wedge, \rightarrow_G$  を使い,

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \text{the negation} \\ \neg x \equiv (x \rightarrow_G 0) \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \text{the disjunction} \\ x \vee y \equiv [(x \rightarrow_G 0) \wedge (y \rightarrow_G 0)] \rightarrow_G 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \text{the equivalence} \\ x \leftrightarrow y \equiv [(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)] \end{aligned} \quad (5.6)$$

が定義される. このとき,

$$\textcircled{6} \neg 0 = 1 \quad (5.7)$$

$$\textcircled{7} \neg x = 0 \text{ for } x > 0 \quad (5.8)$$

が成立する [3], [4].

## 5.2 2つのニューラルネットからの出力を用いた論理的含意

異なる2つの概念を各々学習した2つのニューラルネットからの出力を

$$N_1 = \langle v_1, v_2, \dots, v_{n_1} \rangle, N_2 = \langle w_1, w_2, \dots, w_{n_2} \rangle \quad (5.9)$$

とする. ここに,

$$0 \leq v_i, w_j \leq 1 \quad (i=1, 2, \dots, n_1; j=1, 2, \dots, n_2) \quad (5.10)$$

である.  $n_1 = n_2$  の場合,  $n = n_1$  として, 論理的含意

$$(N_1 \rightarrow_G N_2) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \quad (5.11)$$

を成分毎にGodel's logicで求めれば,

$$x_i = (v_i \rightarrow_G w_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } v_i \leq w_i \\ w_i & \text{if } v_i > w_i \end{cases} \quad (5.12)$$

となる.

## 5.3 非単調推論方法

真理関数  $f$  の度数 (the degree of a Boolean function)  $\deg(f)$  が

$$\deg(f) \equiv \text{the size of the largest set } S \text{ such that } (f, \psi_S) \neq 0 \quad (5.13)$$

と, 文献 [A5] で提案されているが, 本論文では, この  $\deg(f)$  から hint を得, 2式 (1.17), (1.18) の設定の下で, 論理的含意  $N_1 \rightarrow N_2$  の信頼度として,

$$\deg(N_1 \rightarrow N_2) \equiv \sum_{S \in 2^Q} |S| \text{ such that } (h(g_j(T\psi_S), j) \rightarrow_G h(g_i(T\psi_S), i)) = 1 / \sum_{S \in 2^Q} |S| \quad (5.14)$$

を採用する. ここに,  $|B|$  は集合  $B$  に含まれる要素の個数である. 式 (5.14) は,  $\deg(N_1 \rightarrow N_2)$  が  $(h(g_j(T\psi_S), j) \rightarrow_G h(g_i(T\psi_S), i)) = 1$  であるような集合  $S$  内の要素の個数  $|S|$  を  $Q$  のすべての部分集合  $2^Q$  の元  $S$  にわたって総和したものであることを表している.

定義式 (9.1) を基盤として, 3定義

$$\deg((N_1 \rightarrow_G N_2) \vee (N'_1 \rightarrow_G N'_2)) \equiv \max \{ \deg(N_1 \rightarrow_G N_2), \deg(N'_1 \rightarrow_G N'_2) \} \quad (5.15)$$

$$\deg((N_1 \rightarrow_G N_2) \wedge (N'_1 \rightarrow_G N'_2)) \equiv \min \{ \deg(N_1 \rightarrow_G N_2), \deg(N'_1 \rightarrow_G N'_2) \} \quad (5.16)$$

$$\deg(\neg(N_1 \rightarrow_G N_2)) \equiv 1 - \deg(N_1 \rightarrow_G N_2) \quad (5.17)$$

を設ける.

以上の設定により,

(a) 複数個の含意の内, いずれか1つを使用した場合の信頼度

(b) 含意を複数個, すべて同時に使用した場合の信頼度

(c) 1つの含意を使用しない場合の信頼度

などが, 各々3式 (5.15), (5.16), (5.17) で計算できる.

結局, 含意 (基本命題; primitive proposition) を原子, 素式 (atomic formula) とする任意の命題論理式 (logical formula) (複合命題; compound proposition) の信頼度が計算できる.

信頼度が大きいほど, 複数個の含意からなる複合命題は優先して, 推論に使用すれば, 文献 [A3] と同様に, 非単調推論が実現できる. その非単調推論の, 簡単な例は1. はじめにで解説されている.

(非単調推論の例)

3つの含意

$$(1) \text{含意1: 鳥} \rightarrow_G \text{飛ぶ, 信頼度 } 0.2 \quad (5.18)$$

$$(2) \text{含意2: ペンギン} \rightarrow_G \text{鳥, 信頼度 } 0.3 \quad (5.19)$$

$$(3) \text{含意3: ペンギン} \rightarrow_G \text{飛ばない, 信頼度 } 0.3 \quad (5.20)$$

を想定しよう。

含意1と含意2を共に使用すると、信頼度  $0.2 = \min \{0.2, 0.3\}$  の、含意

$$(4) \text{含意4: ペンギン} \rightarrow_G \text{飛ぶ, 信頼度 } 0.2 \quad (5.21)$$

が得られる。得られた含意(4)は含意(3)に矛盾するが、信頼度は含意3の方が大きいので、含意(3)が採用され、

$$\text{ペンギン} \rightarrow_G \text{飛ばない} \quad (5.22)$$

と、非単調推論され、論理的帰結が得られる。□

#### 5.4 矛盾する2つの結論が得られた場合の措置

例えば、3つの論理的含意

$$N_1 \rightarrow_G N_2, N'_1 \rightarrow N_3, N_3 \rightarrow \neg N_2 \quad (5.23)$$

を考えよう。  $N_1$  を仮定すると最初の含意から  $N_2$  が論理的に帰結され(3段論法)、  $N'_1$  を仮定すると残りの2つの含意から  $\neg N_2$  が論理的に帰結される(3段論法)ことになるが、これは矛盾である。  $N_2, \neg N_2$  のどちらかを採用しなければならないが、その採用する戦略とは？

2つ以上の論理的含意から矛盾する2つの論理的に帰結が得られた場合、どちらの論理的帰結を採用するかについては次の規約を採用する。

信頼度を計算する手順は定義されているから、信頼度の高い論理的含意から得られた論理的帰結を採用する。

#### 5.5 同等に確からしい場合、どちらの含意を採用するか？

エキスパート・システムでの競合解消(conflict resolution)と同様な問題が生じる。つまり、2つの論理的含意  $N_1 \rightarrow_G N_2, N'_1 \rightarrow_G N'_2$  が同等に確からしい場合、どちらの論理的含意を採用・適用するか？ 次の(1)～(5)の内の1つを採用し適用すればよい。

(1) あらかじめ、すべての含意に適用に関する優先順位をつけておく方法

(2)  $N_1 \rightarrow_G N_2, N'_1 \rightarrow_G N'_2$  の内、例えば、前者の方が最近適用されたなら、後者の方を適用する方法

(3)  $N_1 \rightarrow_G N_2, N'_1 \rightarrow_G N'_2$  の内、例えば、前者の方が最近適用されたなら、前者の方を適用する方法

(4)  $N_1, N'_1$  の内、複雑な方が例えば後者の場合、この後者を前件に持つ含意  $N'_1 \rightarrow_G N'_2$  を適用する方法

(5)  $N_1, N'_1$  の内、適合する事例が例えば後者の方に多い場合、この後者を前件に持つ含意  $N'_1 \rightarrow_G N'_2$  を適用する方法

## 6. 終わりに

2つの2層の前進形ニューラルネットに2つの概念を各々、誤差逆伝播の方法で事例を最急降下学習させ、その結果得られた各成分が1より大きくない非負成分からなる連続的論理的ベクトル  $N_1, N_2$  を用いて、論理的含意  $N_1 \rightarrow N_2$  を考えた。  $N_1, N_2$  を得る方法は、文献 [A3] での方法は異なる。

このような各論理的含意に信頼度を付与できたとすると、文献 [A3] と同様な手法を使い、論理的含意の集まりで非単調推論がなされ得ることが示された。例えば、論理的含意の2つの集まり(論理的含意を原子とする2つの複合命題論理式)があり、各々から矛盾する2つの論理的帰結(logical consequence)が得られた場合、信頼度の高い方の論理的含意の集まりから得られる論理的帰結を採用すれば、公理が増加しても得られる論理的結論の集まりは増加するとは限らないという非単調推論が得られることが示された。

論理的含意の信頼度は、文献 [A5] の、Boolean function  $f$  の  $\text{degree}(f)$  から hint を得、新しく本論文で考案されたものである。また、特徴抽出写像を内部構造に取り込んでいるこの2層の前進形ニューラルネットは、「事例の属性ベクトルであるパターン」 $\varphi \in \Phi$  から抽出された3値特徴量を備えた S.Suzuki のパターンモデル  $T\varphi \in \Phi$  を入力するものであり、パターンそのものではなくモデルから抽出される特徴量の組に関し動作するものである。このパターンは概念の属性ベクトルであるから、S.Suzuki のパターン情報処理技術 [B1] ~ [B4] で Godel 連続値論理系 [A4] での記号的非単調推論を実現できたのである。

「事例の属性ベクトルであるパターン」 $\varphi \in \Phi$  のパターンモデルの S.Suzuki のパターンモデル [B4]  $T\varphi \in \Phi$  を構成するのに、その基底として、特別な“変数  $x_i \in \{0, 1\}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) の関数  $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  の Fourier transform” の正規直交系 [A5] が採用されたが、この採用は、パターンが事例の属性ベクトルであることに起因している。

$\max, \min, 1-x$  などの演算をできるニューラルネットを使用すれば、より能率的な処理が可能となるが、将来の研究として残された。

## 文 献 A

- [A1] 太原育夫：“人工知能の基礎知識(コンピュータサイエンス大学講座20)”，近代科学社，Sept.1988  
……第9章では、非単調論理としてのサーカムスクリプション、デフォルト推論が解説され、非単調な推論機構を持つ知識ベース・システムとしての TMS (truth maintenance system) も簡単に説明されている。
- [A2] 太原育夫：“選好的仮説集合をもつ知識からのシナリオの計算”，電子情報通信学会論文誌 D-I, vol.J85-D-I, no.8, pp.776-783, Aug.2002  
……事実の集合に適当な仮説を矛盾することなく、付け加えたものをシナリオ(scenario)と称し、質問に対する応答処理などのためのシナリオを構成するために、仮説間に半順序の性質を満たす選好関係を導入している。シナリオを具体的に計算するときの計算量を軽減する手法を提案している。
- [A3] 月本洋，森田千絵：“ニューラルネットによる非単調推論”，情報処理学会論文誌，vol.43, no.8, pp.2739-274, Aug.2002  
……名詞、動詞などの概念を誤差逆伝播学習ニューラルネットに学習させ、得られた2つのニューラルネットの出力(2値ベクトル) $N_1, N_2$ を用いて行う論理的含意 $N_1 \rightarrow N_2$ の集まりで非単調推論する方法が研究されている。
- [A4] Petr Hajek, Lluís Godó, Francesc Esteva：“A complete many-valued logic with product-

conjunction”, Archive for Mathematical Logic 35, pp.191-208, 1996

- [A5] Nathan Linial, Yishay Mansour, Noam Nisan : “Constant depth circuits, Fourier transform, and learnability”, Journal of the Association for Computing Machinery, vol.40, no.3, pp.607-620, July 1993

## 文 献 B

- [B1] 鈴木昇一：“認識工学”，柏書房, Feb.1975
- [B2] 鈴木昇一：“ニューラルネットの新数理”，近代文芸社, Sept.1996
- [B3] 鈴木昇一：“パターン認識の数理的一般解決”，近代文芸社, Jun.1997
- [B4] 鈴木昇一：“認識知能情報論の新展開”，近代文芸社, Aug.1998
- [B5] 鈴木昇一：“風景画像から知識を抽出し、解釈するシステムの、ファジィ推論ニューラによる構成”，文教大学情報学部「情報研究」, no.23, pp.183-265, 2000
- [B6] 鈴木昇一, 川俣博司, 大槻善樹：“風景画の理解に関するJAVA言語によるRECOGNITRONの計算機シミュレーション”，情報研究(文教大学・情報学部), no.27, pp.73-110, Mar.2002
- [B7] 鈴木昇一, 川俣博司, 大槻善樹：“JAVA言語で実装化された画像理解システムIUSの動作と、その稼動方法”, 情報研究(文教大学・情報学部), no.28, pp.143-165, Dec.2002
- [B8] 鈴木昇一：“遺伝的アルゴリズムにおける適合度比例選択戦略を採用した進化方程式の、ターン多段階変換に基づく認識への応用”，情報研究(文教大学・情報学部), no.28, pp.37-67, Dec.2002
- [B9] 鈴木昇一：“近傍を利用した音素認識のためのモデル構成作用素T, 類似度関数SM, 大分関数BSCの諸構成と, SS不動点探索型多段階想起認識”，情報研究(文教大学・情報学部), no.28, pp.69-141, Dec.2002
- [B10] 鈴木昇一：“プロダクション・システムとしてのファジィ・マルチメディア・コンピュータと, 空間多重パターンファジィ推論系”, 情報研究(文教大学・情報学部), no.24, pp.105-183, Dec.2000
- [B11] 鈴木昇一：“各個人の感性を反映した認識システム”, 情報研究(文教大学・情報学部), no.24, pp.185-257, Dec.2000
- [B12] 鈴木昇一：“SS大分類関数BSCの適応的構成への計算論的学習理論の適用”，文教大学情報学部「情報研究」, no.25, pp.187-238, Mar.2000
- [B13] 鈴木昇一：“量子力学の諸原理, 多段階量子認識系と, 心理状態を取り入れた想起に基づく部分空間認識法”，文教大学情報学部「情報研究」, no.25, pp.239-284, Mar.2000
- [B14] 鈴木昇一：“Support Vector Machineを利用した大分類関数の構成”，文教大学情報学部「情報研究」, no.26, pp.1-62, Dec.2001
- [B15] 鈴木昇一：“2カテゴリ分類困難度の情報理論”，文教大学情報学部「情報研究」, no.26, pp.63-180, Dec.2001
- [B16] 鈴木昇一：“一般化類似度関数を用いた“導出原理による第1階述語推論””，文教大学情報学部「情報研究」, no.27, pp.27-72, Mar.2002

**付録A. Axiom1～4を各々、満たさなければならないパターン集合  
Φ,モデル構成作用素Tの対【Φ,T】,類似度関数SM,大分類関数  
BSC,カテゴリ選択関数CSF**

本付録では、処理の対象となる問題のパターンφの集合Φ,モデル構成作用素T,類似度関数SM,カテゴリ選択関数CSFについて説明される.対【Φ,T】の満たされなければならないaxiom 1と,類似度関数SMの満たされなければならないaxiom 2も説明され,Φの表示が明らかにされ,Φが構成的集合であることが明らかにされる.更に,大分類関数BSCの満たされなければならないaxiom 3も説明される.カテゴリ選択関数CSFが満たされなければならないaxiom 4も説明され,CSFの構造がSM, BSCを用いて決定される.

**A1. axiom 1とパターン集合Φ,モデル構成作用素T**

一般に,処理の対象とする問題のパターンφの集合Φは或る可分な [A1] な(separable)一般抽象ヒルベルト空間Φの零元0を含む或る部分集合である.例えば,  $\bar{\eta}$  を η の複素共役として,

$$M; q\text{次元ユークリッド空間の可測部分集合} \quad (\text{A1.1})$$

$$dm(x) : \text{正値ルベーク・スティルチェス式測度} \quad (\text{A1.2})$$

$$x = \langle x_1, x_2, \dots, x_q \rangle \in M (\subseteq R^q) : \text{実数値 } q \text{ 変数直交座標系} \quad (\text{A1.3})$$

を導入し,その内積(φ, η), ノルム ||φ|| を,

$$(\varphi, \eta) = \int_M dm(x) \varphi(x) \cdot \bar{\eta}(x) \quad (\text{A1.4})$$

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \quad (\text{A1.5})$$

とする線形空間(ベクトル空間)としての可分なヒルベルト空間  $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$  の特別な場合として,

$$M = R^2 (\text{2次元全平面}) \quad (\text{A1.6})$$

$$dm(x) = dm(x_1, x_2) = [x_1^2 + x_2^2]^{-1} \cdot dx_1 dx_2 \quad (\text{A1.7})$$

を選ぶことができる [B7], [B9].

このようなΦ,並びに,写像

$$T : \Phi \rightarrow \Phi \quad (\text{A1.8})$$

は次のaxiom 1を満たさなければならない.このとき,写像Tはモデル構成作用素(model-construction operator)と呼ばれ,  $T\varphi \in \Phi$  は  $\varphi \in \Phi$  の代りとなり得るという意味で,パターンφ∈Φのモデル(model)と呼ばれる.

下記のaxiom 1からわかるように,パターン集合Φは,埋込性

$$T \cdot \Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \quad (\text{A1.9})$$

を満たし,原点(=0)を始点とし,Φの任意の点を通る半直線を含むような集合,つまり,錐(cone)であらねばならない.下記の式(A1.14)によるΦの表示が正にΦが錐であることを明らかにしている.

Axiom 1を満たすパターン集合Φは実は,構成的集合(constructible set)である. S.Suzukiはパターンというものが満たされなければならない帰納的定義からΦの集合論的再帰領域方程式(axiom 1を満たす最小のΦの表現式; set-theoretic reflective domain equation)を提案し,この方程式を解き,Φの構成方法を明らかにしている(文献 [B3] の2.4節).その結果は次のとおりである:

パターンと判明している元の集合(基本領域; basic domain) (axiom 1の(axiom 1の(i))の前半から,  $0 \in \Phi_B$ を導入して,集合論的再帰領域方程式

$$\Phi = \Phi_B \cup T \cdot \Phi \cup R^{++} \cdot \Phi \quad (\text{A1.10})$$

ここに,

$$T \cdot \Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \quad (\text{A1.11})$$

$$R^{++} \text{は正実数全体の集合} \quad (\text{A1.12})$$

$$R^{++} \cdot \Phi \equiv \{r^{++} \cdot \varphi \mid r^{++} \in R^{++}\} \quad (\text{A1.13})$$

の解 $\Phi$ は

$$\Phi = R^{++} \cdot [\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B] \quad (\text{A1.14})$$

と表示される(文献[B3]の式(2.56)を参照).  $\Phi$ の表示式(A1.14)から, 明らかに, 2つの等式

$$\begin{aligned} (\text{a}) \quad T \cdot \Phi &= T \cdot \Phi_B \subseteq \Phi \\ &\because \text{axiom 1の(i), (ii)の2後半} \end{aligned} \quad (\text{A1.15})$$

$$\begin{aligned} (\text{b}) \quad R^{++} \cdot \Phi &= \Phi (= R^{++} \cdot \Phi_B \cup R^{++} T \cdot \Phi_B) \\ &\because \text{axiom 1の(i)の後半} \end{aligned} \quad (\text{A1.16})$$

が成り立つ.

**Axiom 1**(パターン集合 $\Phi$ とモデル構成作用素 $T$ との対【 $\Phi, T$ 】の満たすべき公理)

(i)(零元 $0$ の-包含性と, 零元 $0$ の $T$ -不動点性; fixed-point property of zero element under mapping  $T$ )

$$0 \in \Phi \wedge T0 = 0.$$

(ii)( $\Phi$ の錐性,  $T$ の正定数倍吸収性; cone property)

$$\forall \varphi \in \Phi, a \cdot \varphi \in \Phi \wedge T(a \cdot \varphi) = T\varphi$$

for any positive real number  $a$ .

(iii)( $\Phi$ の埋込性(embeddedness)と,  $T$ のベキ等性(idempotency))

$$\forall \varphi \in \Phi, T\varphi \in \Phi \wedge T(T\varphi) = T\varphi.$$

(iv)(写像 $T$ の非零写像性; non-zero mapping property of  $T$ )

$$\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0. \quad \square$$

## A2. 処理の対象となる問題のパターン $\varphi$ の集合とモデル構成作用素 $T$ との対【 $\Phi, T$ 】の基本構成と, モデル $T\varphi$ と $\varphi$ との間の同一知覚原理

原パターン $\varphi \in \Phi$ が如何なる意味を備えているか, つまり,  $\varphi$ が如何なる類概念(category)を表しているかを決定する働きをもつのが, 認識システム RECOGNITRON である. RECOGNITRON がモデル $T\varphi$ を見たり聞いたりしたならば( $T\varphi$ を感性的に受け取ったならば), 原パターン $\varphi \in \Phi$ と同じに見えたり聞こえたりすること(原パターン $\varphi$ と錯覚し原パターン $\varphi$ と同じように感性的に受容すること)だと, 解釈可能な対【 $\Phi, T$ 】について説明しよう.

パターンモデル $T\varphi$ を出力する式(A1.8)の写像 $T$ に要求されるのは, 次の4性質①~④である[B3], [B4], [B6]:

①(零元不動点性; axiom 1の(i))

$$\varphi = 0 \in \Phi \text{については, } T\varphi = 0.$$

②(正定数倍不変性; axiom 1の(ii)の後半)

任意の正実定数 $a$ に対し,

$$\forall \varphi \in \Phi, T(a \cdot \varphi) = T\varphi.$$

③(ベキ等性; axiom 1の(iii)の後半)

$$\forall \varphi \in \Phi, T(T\varphi) = T\varphi.$$

④(非零写像性； axiom 1の(iv))

$\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0.$

□

零元  $\varphi = 0 \in \Phi$  は背景が無のパターンである．上述の①～④はA1章の axiom 1の(i), (ii), (iii)の3後半, (iv)である．

$\Phi$  は処理の対象とする問題のパターン  $\varphi$  の集合  $\Phi$  であり,  $T\varphi \in \Phi$  は  $\varphi \in \Phi$  に対応するパターンモデルであって, 原パターン  $\varphi \in \Phi$  と同じ空間  $\Phi$  に埋め込まれている．モデル  $T\varphi$  は,  $T\varphi \in \Phi$  を見たり聞いたりしたならばあたかも原パターン  $\varphi \in \Phi$  かのように見えたり聞こえたりするようなものである(同一知覚原理)．この同一知覚原理を達成するために, SS理論 [B1]～[B6] では, 式(A1.8)の写像であるモデル構成作用素  $T$  が導入され, 対  $[\Phi, T]$  はA1.の axiom 1を満たしていなければならないことになる．このとき, 写像  $T$  はモデル構成作用素と呼ばれ,  $T\varphi \in \Phi$  は  $\varphi \in \Phi$  の代りとなり得るという意味で, パターン  $\varphi \in \Phi$  のモデルと呼ばれる．

処理の対象とするパターン  $\varphi$  の集合  $\Phi$  は或る可分なヒルベルト空間  $\Phi$  の, 零元  $0$  を含む或る部分集合であり, この  $\Phi$ , 並びに, 式(A1.8)の写像  $T$  の対  $[\Phi, T]$  は上記の4性質①～④((ii), (iii)の2後半, 並びに(i), (iv))を含む形で, A1.の axiom 1をみたさなければならない．

次の定理A2.1は, axiom 1を満たす対  $[\Phi, T]$  を決定している．

[定理A2.1] (パターン集合  $\Phi$  とモデル構成作用素  $T$  との対  $[\Phi, T]$  の構成定理)

パターンと判明している  $\varphi$  の集合(基本領域)  $\Phi_B (\ni 0)$  と, すべての正実定数の集合  $\mathbb{R}^{++}$  とを用意する．

式(A1.8)の写像  $T$  が axiom 1の(i), (ii), (iii)の3後半, 並びに, (iv)を満たすとしよう．このとき, 次の(イ), (ロ)が成り立つ:

(イ)処理の対象とする問題のパターンの集合を, 式(A1.14)の如く設定すれば, 2式(A1.15), (A1.16)が成立し, axiom の(i), (ii), (iii)の3前半をは満たし, 結局, 対  $[\Phi, T]$  は axiom 1を満たす．

(ロ)逆に,  $(0 \in) \Phi_B$  を部分集合に持つ  $\Phi$  が axiom 1の(i), (ii), (iii)の3前半を満たすとすれば,

$$\Phi \supseteq \Phi_B \cup \mathbb{R}^{++} \cdot \Phi \cup T \cdot \Phi \quad (\text{A2.1})$$

が成立するが, ここで, 特に, 包含式(A2.1)において等号が成立するような最小の  $\Phi$  を採用すれば, つまり, 領域方程式(A1.10)の成立を仮定すれば, axiom 1を満たす対  $[\Phi, T]$  の  $\Phi$  は式(A2.14)のように表され, 2式(A1.15), (A1.16)も成立する．

(証明) (イ)は文献 [B4], 付録1の定理A1.1である．(ロ)は文献 [B3], pp.64-66(2.4節)で証明されている． □

### A3. axiom 2と類似度関数SM

任意のパターン  $\varphi \in \Phi$  が記憶されている代表的なパターンからなる有限個の元からなる集合  $\Omega$  内の任意の代表パターン  $\omega_j$  とどの程度似ているか, 違っているかを計量する手段を設定することが, 認識の働きを確保するために必要とされる．計量のための手段が類似度関数SMである．

“正常なパターン”(well-formed pattern)は, ある1つのカテゴリ  $\mathcal{C}_j$  (第  $j \in J$  番目の類概念) のみに帰属しているものとし, このような  $\mathcal{C}_j$  の集まり(有限集合)

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_j \mid j \in J\} \quad (\text{A3.1})$$

を想定する． $\mathcal{C}_j$  の備えている性質を典型的に持っている(第  $j \in J$  番目の)代表パターン(prototypical pattern)  $\omega_j (\neq 0)$  を1つ選定する． $\mathcal{C}_j$  は, 典型(prototype)としての代表パターン  $\omega_j$  を中心とした緩やかな(第  $j \in J$  番目の)カテゴリであることを仮定したことに注意しておく．ここに,



$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} \quad (\text{A3.2})$$

が式(A3.1)の全カテゴリ集合  $\mathcal{C}$  に1対1に対応する代表パターンの集合である. 式(A3.2)の系  $\Omega$  は、  

$$\text{複素定数 } a_j \text{ の組 } \{a_j \mid j \in J\} \text{ について } \sum_{j \in J} a_j \cdot \omega_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J, a_j = 0 \quad (\text{A3.3})$$

が成立しているという意味で、1次独立 (linearly independent) でなければならない.  $\Omega$  を視察で決定できる場合があるが、訓練パターン系列から  $\Omega$  を適応的に決定する方法については、文献 [B3] の付録 I で説明されている.

Axiom 1 を満たす式(A1.1)のモデル構成作用素 T によって、式(A3.2)の代表パターン集合  $\Omega$  が変換されて得られる系

$$T \cdot \Omega \equiv \{T\omega \mid \omega \in \Omega\} = \{T\omega_j \mid j \in J\} \quad (\text{A3.4})$$

も1次独立であると要請する. このとき、**類似度関数** (similarity-measure function)

$$\text{SM} : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \quad (\text{A3.5})$$

を導入し

$$\text{SM}(\varphi, \omega_j) = 1, 0 \text{ に従って、パターン } \varphi \in \Phi \text{ は各々、} \omega_j \text{ と確定的な類似度関係、相違関係にあり、また、} 0 < \text{SM}(\varphi, \omega_j) < 1 \text{ の場合は、あいまいな類似・相違関係にある} \quad (\text{A3.6})$$

と、SM を解釈しよう.

関数 SM は次の axiom 2 を満たすように構成されねばならない. Axiom 2 の (i) では、クロネッカーの  $\delta$  記号

$$\delta_{ij} = 1 \text{ if } i=j, = 0 \text{ if } i \neq j \quad (\text{A3.7})$$

が導入されているが、特に axiom 2 の (i) なるこの直交性は、候補カテゴリの分離・抽出が効果的に行われ、

$$\text{候補カテゴリの鋭利な削減 (a sharp reduction)} \quad (\text{A3.8})$$

をもたらすために要請されている.

**Axiom 2** (類似度関数 SM の満たすべき公理)

(i) (正規直交性; orthonormality)

$$\forall i, \forall j, \text{SM}(\omega_i, \omega_j) = \delta_{ij}.$$

(ii) (規格化条件, 確率性, 正規性; probability condition, normalization)

$$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} \text{SM}(\varphi, \omega_j) = 1.$$

(iii) (写像 T の下での不変性; invariance under mapping T)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \text{SM}(T\varphi; \omega_j) = \text{SM}(\varphi, \omega_j). \quad \square$$

上述の axiom 2 の (i) ~ (iii) について簡単に説明しておこう.

SM の解釈式(A3.6)の下で、(i) は、相異なるカテゴリの代表パターン同士は確定的な相違関係にあり、同一カテゴリの代表パターン同士は確定的な類似度関係にあることを要請している. (ii) は、任意のパターン  $\varphi$  について、すべてのカテゴリについての類似度の総和は1であることを要請している. つまり、パターン  $\varphi$  は少なくとも1つのカテゴリ  $\mathcal{C}_j$  に帰属していることを要請している. (iii) は、パターンモデル  $T\varphi$  は原パターン  $\varphi$  と任意のカテゴリについて同一類似度を持つことを要請している. ということは、パターンモデル  $T\varphi$  を見たり、聞いたりするならば、原パターン  $\varphi$  と同じように見えたり、聞こえたりすること (同一知覚原理; A2. を参照) を要請していることになる.

尚、第  $j \in J$  番目のカテゴリ  $\mathcal{C}_j$  の生起確率である非負実数  $p(\mathcal{C}_j)$  を、2条件

$$[\forall j \in J, 0 < p(\mathcal{C}_j) < 1] \wedge [\sum_{j \in J} p(\mathcal{C}_j) = 1] \quad (\text{A3.9})$$

を満たすものとして導入しておく.

#### A4. axiom 3と大分類関数

本章では、ある1つのカテゴリに帰属するかどうかを決定する2カテゴリ分類器としての大分類関数BSCは、axiom 3を満たすように構成されなければならないことが説明される。

式(A3.5)の類似度関数SMが式(A3.8)でいう“候補カテゴリの鋭利な削減”を持つためには、axiom 2, (i)の正規直交性を満たす必要があることがA3.で指摘されたが、 $SM(\varphi, \omega_j)$ の代りに $SM(\varphi, \omega_j) \cdot BSC(\varphi, j)$ を用いれば、パターンが帰属するかも知れない候補カテゴリを益々、鋭利に削減できると期待される。

**大分類関数**(rough classifier, binary-state classifier)と呼ばれる**2値関数**

$$BSC : \Phi \times J \rightarrow \{0, 1\} \quad (A4.1)$$

を、次のaxiom 3を満たすものとして導入し、解釈

パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属する候補カテゴリの1つが第 $j \in J$ 番目のであるならば、

$$BSC(\varphi, j) = 1 \text{ であることが望ましい} \quad (A4.2)$$

を採用しよう。この際、注意すべきは、

$BSC(\varphi, j) = 0$ であっても、パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属する候補カテゴリの1つは、

$$\text{第 } j \in J \text{ 番目の } \mathcal{C}_j \text{ でないとは限らない} \quad (A4.3)$$

としていることである。また、axiom 3の(i)からわかるように、**カテゴリ間の相互排除性**(the mutual exclusion of the one category from the other categories)

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, BSC(\omega_i, j) = 0 \quad (A4.4)$$

を公理として要請していない事実注意到こよう。この事実を補うのが実は、式(A3.5)の類似度関数SMが満たさなければならないとしているaxiom 2の(i)(正規直交性)である。

Axiom 3(大分類関数BSCの満たすべき公理)

(i)(**カテゴリ抽出能力**; category separability)

$$\forall j \in J, BSC(\omega_j, j) = 1.$$

(ii)(写像Tの下での不変性; invariance under mapping T)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, BSC(T\varphi, j) = BSC(\varphi, j). \quad \square$$

#### A5. axiom 4と、カテゴリ選択関数CSFの構造形式

認識システムRECOGNITRONがパターン $\varphi \in \Phi$ に対し、

「パターン $\varphi \in \Phi$ が、式(A3.1)の全カテゴリ集合 $\mathcal{C}_j$ の部分集合

$$\mathcal{C}(\varphi) \equiv \{\mathcal{C}_j \mid j \in \gamma\} \quad (A5.1)$$

内の何れか1つのカテゴリ $\mathcal{C}_j$ に帰属する可能性がある」  
(A5.2)

という“パターン $\varphi \in \Phi$ の**カテゴリ帰属知識**(categorical membership-knowledge)”を持っているとする。この知識を、

$$\langle \varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle \quad (A5.3)$$

と表す。

$$\langle \Phi, 2^J \rangle \equiv \{ \langle \varphi, \gamma \rangle \mid \varphi \in \Phi, \gamma \in 2^J \} \quad (A5.4)$$

は、**カテゴリ帰属知識空間**(categorical membership-knowledge space)と呼ばれ、すべてのパターン $\varphi \in \Phi$ と、すべてのカテゴリ番号のリスト $\gamma \in 2^J$ とのなす順序の付いた対リスト(an ordered pair list)  $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の集合である。

カテゴリ選択関数(category-selection function)と呼ばれる写像

$$\text{CSF} : \Phi \times 2^J \rightarrow 2^J \quad (\text{A5.5})$$

は、包含関係 (inclusion relation)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \gamma \in 2^J, \text{CSF}(\varphi, \gamma) \subseteq \gamma \subseteq J \in 2^J \quad (\text{A5.6})$$

を満たし、然も、次のaxiom 4を満たすものとして、設定されるとしよう。

Axiom 4 (カテゴリ選択関数CSFの満たすべき公理)

(i)  $\varphi = 0 \vee \gamma = \phi$  の場合

如何なるカテゴリ番号も  $\langle \varphi, \gamma \rangle$  の有効な候補カテゴリの番号ではない。

(ii)  $\text{SM}(\varphi, \omega_k) = 0 \wedge \text{BSC}(\varphi, k) = 0$  の場合

カテゴリ番号  $k \in \gamma$  は、 $\langle \varphi, \gamma \rangle$  の有効な候補カテゴリの番号ではない

(iii)  $\sum_{k \in \gamma} \text{BSC}(\varphi, k) = 0$  の場合

$\text{BSC}(\varphi, k) = 0$  であっても、 $\text{SM}(\varphi, \omega_k) > 0$  であるようなカテゴリ番号は  $k \in \gamma$ 、 $\langle \varphi, \gamma \rangle$  の有効な候補カテゴリの番号ではある。

(iv)  $\sum_{k \in \gamma} \text{BSC}(\varphi, k) > 0$  の場合

(iv-1)  $\text{BSC}(\varphi, k) = 0$  なるカテゴリ番号  $k \in \gamma$  は、 $\text{SM}(\varphi, \omega_k) > 0$  であっても、 $\langle \varphi, \gamma \rangle$  の有効な候補カテゴリの番号ではない。

(iv-2)  $\text{SM}(\varphi, \omega_k) = 0$  であっても  $\text{BSC}(\varphi, k) = 1$  なるカテゴリ番号  $k \in \gamma$  は、 $\langle \varphi, \gamma \rangle$  の有効な候補カテゴリの番号ではない。 □

次の定理A4.1では、式(A5.1)の写像CSFは、式(A2.5)の類似度関数SM、式(A3.1)の大分類関数BSCを使用する形式で、

その定義域が  $\Phi \times 2^J$  であり、その値域が、パターン  $\varphi \in \Phi$  のカテゴリ帰属知識  $\langle \varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$  の“有効な”候補カテゴリの番号リスト (a list of significant category-numbers) の集合である (A5.7)

の如く、構成されている。

次の定理A4.1は、axiom 4を満たすように、式(A5.5)のカテゴリ選択関数CSFの構造を決定したものである。

[定理A4.1] (カテゴリ選択関数CSFの構成定理)

次のように定義される式(A5.5)の1つの写像CSFは式(A5.6)と上述のaxiom 4を満たす：

(i)  $\varphi = 0 \vee \gamma = \phi$  の場合

$$\text{CSF}(\varphi, \gamma) = \phi \quad (\text{A5.8})$$

(ii)  $\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$  の場合

$$\text{CSF}(\varphi, \gamma) = \left\{ \begin{array}{l} \{k \in \gamma \mid \text{SM}(\varphi, \omega_k) > 0\} \text{ if } \sum_{k \in \gamma} \text{BSC}(\varphi, k) = 0 \\ \{k \in \gamma \mid \text{SM}(\varphi, \omega_k) > 0 \wedge \text{BSC}(\varphi, k) = 1\} \text{ if } \sum_{k \in \gamma} \text{BSC}(\varphi, k) > 0 \end{array} \right. \quad (\text{A5.9})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{k \in \gamma \mid \text{SM}(\varphi, \omega_k) > 0\} \text{ if } \sum_{k \in \gamma} \text{BSC}(\varphi, k) = 0 \\ \{k \in \gamma \mid \text{SM}(\varphi, \omega_k) > 0 \wedge \text{BSC}(\varphi, k) = 1\} \text{ if } \sum_{k \in \gamma} \text{BSC}(\varphi, k) > 0 \end{array} \right. \quad (\text{A5.10})$$

(証明) 文献 [B3] の定理E1である。 □

定理A4.1の写像CSFについて、次のように解釈できる：

処理の対象とするパターン  $\varphi \in \Phi$  がカテゴリ  $\mathcal{C}_j$ ,  $j \in \gamma$  の何れか1つに帰属する可能性があるとして想定した場合、更に絞り込んで、その内のカテゴリ  $\mathcal{C}_j$ ,  $j \in \text{CSF}(\varphi, \gamma) \subseteq \gamma$  の何れか1つに帰属する可能性があるとして帰納推論できる機能を備え、その出力  $\text{CSF}(\varphi, \gamma)$  はパターンの有効な候補カテゴリの番号のリストを与えている。 (A5.11)

## 付録B. 確保すべき学習の働きと帰納推論における認識システムRGの健全性と完全性

### B1. 認識システムRGの健全性

パターン $\varphi \in \Phi$ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ

$$\mathcal{C}_j \in \mathcal{C}(J) \equiv \{ \mathcal{C}_j \mid j \in J \}$$

に帰属するという事態

(B1.1)

を

$$\varphi \rightarrow \mathcal{C}_j$$

(B1.2)

と表記する. 更に,

1つのRG(recognizer)の不動点探索形多段階連想認識過程(帰納推論)によって, 処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ は第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathcal{C}_j \in \mathcal{C}(J)$ に帰属すると決定されるという事態

(B1.3)

を

$$\varphi \rightarrow \mathcal{C}_j(\text{RG})$$

(B1.4)

と表記する.

$\varphi \rightarrow \mathcal{C}_j(\text{RG})$ が存在するならば $\varphi \rightarrow \mathcal{C}_j$ は真である

(B1.5)

のとき, RGの推論はこのパターン $\varphi \in \Phi$ について健全(soundness)であるという.

式(B1.5)が成り立つようなパターン $\varphi \in \Phi$ の集まりを $\Psi(1)_{\text{sound}} \subseteq \Phi$ とする.  $\Psi(1)_{\text{sound}}$ の最大を求めれば, RGの認識性能がわかる.

### B2. 認識システムRGの完全性

$\varphi \rightarrow \mathcal{C}_j$ は真であるならば,  $\varphi \rightarrow \mathcal{C}_j(\text{RG})$ は存在する

(B2.1)

のとき, RGの推論はこのパターン $\varphi \in \Phi$ について完全(completeness)であるという.

式(B2.1)が成り立つようなパターン $\varphi \in \Phi$ の集まりを $\Psi(2)_{\text{complete}} \subseteq \Phi$ とする.  $\Psi(2)_{\text{complete}}$ の最大を求めれば, RGの認識性能がわかる.

### B3. 確保すべき学習の働きと帰納推論

RGに備えさせた帰納推論については,

RGの実行する推論が $\Psi_{\text{complete}} \subseteq \Phi$ について完全であるように, 学習させたことで,

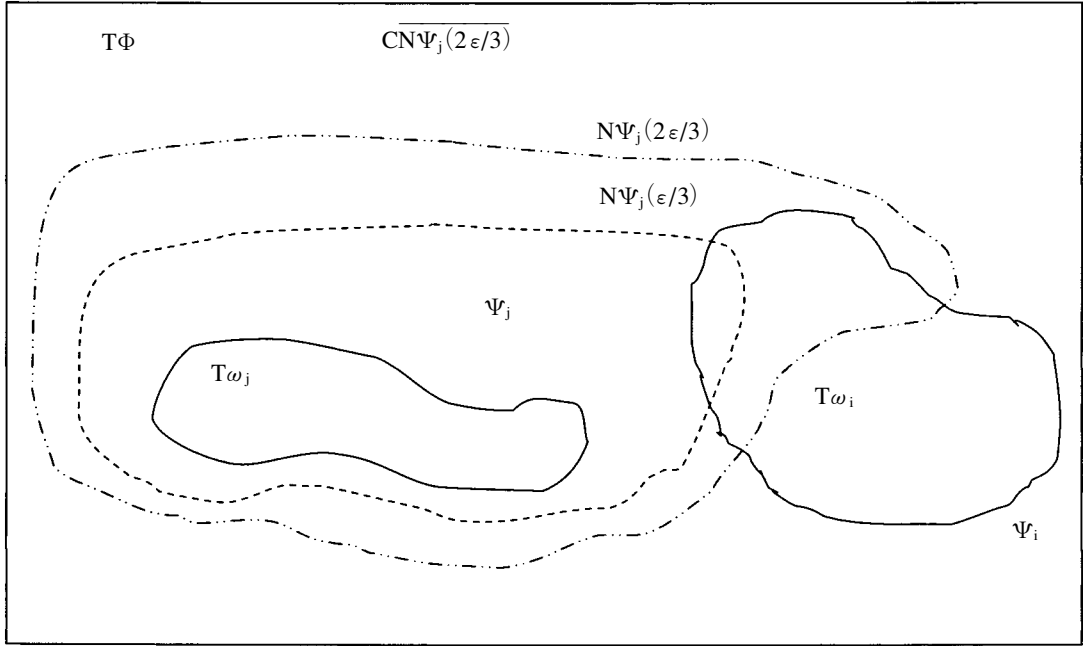
RGの推論が $\Psi_{\text{complete}}$ を含むパターン集合 $\Psi \subseteq \Phi$ について健全である

(B3.1)

ようにできた場合, このとき, 任意のパターン $\varphi \in \Psi - \Psi_{\text{complete}}$ についてパターン認識における帰納推論が適切に確保されたという.

$\Psi_{\text{complete}}$ が有限集合, 或いは高々可算集合であることが望ましい.

付録C. axiom 2, 3を満たす類似度関数SM, 大分類関数BSCの構成



図C.1 5集合 $\Psi_j(\subset T\Phi)$ ,  $N\Psi_j(\epsilon/3)$ ,  $N\Psi_j(2\epsilon/3)$ ,  $\overline{CN\Psi_j(2\epsilon/3)}$ ,  $T\Phi$ 間の包含関係図

FigC.1 a diagram of inclusive relation among five sets  $\Psi_j(\subset T\Phi)$ ,  $N\Psi_j(\epsilon/3)$ ,  $N\Psi_j(2\epsilon/3)$ ,  $\overline{CN\Psi_j(2\epsilon/3)}$ ,  $T\Phi$

C1. 前書き

正規化(事前処理; パターン  $\varphi \in \Phi$  を標準形へ変換すること), 特徴抽出, 識別という3機能が, 互いに分離できない形式で, 認識が行われるというのが, SS理論 [B1]~[B4]である. 本付録Cでは, SS理論に登場する類似度関数SM, 大分類関数BSCを構成する.

C2. axiom 2, 3を満たす類似度関数SM, 大分類関数BSCの, 他カテゴリから眺めた構成

処理の対象とする問題のパターン $\varphi$ の集合を $\Phi$ とする. パターンであると判明しているものの集まり $\Phi_B$ を導入する.  $\Phi_B$ は, 基本領域(basic domain)と呼ばれ, 訓練パターン, 並びに, 実際に処理するパターンをも次々と追加していく形で増加していくものである.  $\Phi$ は,

$$\Phi = R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B) \tag{C2.1}$$

$$\equiv \{r^{++} \cdot \varphi \mid \varphi \in \Phi_B, r^{++} \in R^{++}\} \cup \{r^{++} \cdot T\varphi \mid \varphi \in \Phi_B, r^{++} \in R^{++}\} \tag{C2.2}$$

と表されることが既に示されている [B3]. また, パターン $\varphi$ のモデル $T\varphi$ をすべて集めたもの $T \cdot \Phi$ は $T \cdot \Phi_B$ に等しくて, 表現式

$$T \cdot \Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \tag{C2.3}$$

$$= T \cdot \Phi_B \subset \Phi \tag{C2.4}$$

が成立している [B3].

以下では, 相互排他条件

$$i \neq j \Rightarrow \Psi_i \cap \Psi_j = \phi \text{ (the empty set)} \quad (\text{C2.5})$$

が満たされるように,

$$\mathbf{T} \cdot \omega_j \text{ を含む有界閉集合 } (\mathbf{T} \cdot \omega_j \in) \Psi_j(\subset \mathbf{T} \cdot \Phi) \quad (\text{C2.6})$$

を選ぶ. そして,  $\mathbf{T} \cdot \Phi$  は,

$$\mathbf{T} \cdot \Phi = \bigcup_{j \in J} \mathbf{N}\Psi_j(2\epsilon/3) \quad (\text{C2.7})$$

であるように, 正数  $\epsilon$  の適切な選定の下で,  $\Psi_j(\subset \Phi)$  の  $2\epsilon/3$ -近傍

$$\mathbf{N}\Psi_j(2\epsilon/3) \equiv \{\mathbf{T}\psi \in \Phi \mid \text{dis}(\mathbf{T}\psi, \mathbf{T}\varphi) \leq 2\epsilon/3, \mathbf{T}\varphi \in \Psi_j\} \quad (\text{C2.8})$$

が選ばれているとする. 同時に, 正数パラメータ  $\epsilon > 0$  を, 条件

$$\mathbf{T}\omega_j \notin \overline{\mathbf{N}\Psi_j(2\epsilon/3)} \quad (i \neq j) \quad (\text{C2.9})$$

が満たされるように, 選ぶ. ここに,  $\overline{\mathbf{N}\Psi_j(2\epsilon/3)}$  は  $\mathbf{N}\Psi_j(2\epsilon/3)$  の閉包である.

さて, axiom 2 を満たす類似度関数

$$\mathbf{SM} : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \quad (\text{C2.10})$$

を構成しよう.

距離関数  $\text{dis}$  で定義された近傍を用いた類似度関数  $\mathbf{SM}$  を構成する.

上記の3集合  $\Psi_j(\subset \mathbf{T} \cdot \Phi)$ ,  $\mathbf{N}\Psi_j(2\epsilon/3)$ ,  $\overline{\mathbf{N}\Psi_j(2\epsilon/3)}$  を含め, 次の5集合  $\mathbf{N}\Psi_j(\epsilon/3)$ ,  $\overline{\mathbf{N}\Psi_j(\epsilon/3)}$ ,  $\mathbf{N}\Psi_j(2\epsilon/3)$ ,  $\overline{\mathbf{N}\Psi_j(2\epsilon/3)}$ ,  $\overline{\mathbf{CN}\Psi_j(2\epsilon/3)}$  をも導入する:

①  $\Psi_j(\subset \mathbf{T} \cdot \Phi)$  の  $\epsilon/3$ -近傍

$$\mathbf{N}\Psi_j(2\epsilon/3) \equiv \{\mathbf{T}\psi \in \Phi \mid \text{dis}(\mathbf{T}\psi, \mathbf{T}\varphi) \leq \epsilon/3, \mathbf{T}\varphi \in \Psi_j\} \quad (\text{C2.11})$$

$$\textcircled{2} \mathbf{N}\Psi_j(\epsilon/3) \text{ の閉包 (closure) } \overline{\mathbf{N}\Psi_j(\epsilon/3)} \quad (\text{C2.12})$$

③  $\Psi_j(\subset \Phi)$  の  $2\epsilon/3$ -近傍  $\mathbf{N}\Psi_j(2\epsilon/3)$

$$\textcircled{4} \mathbf{N}\Psi_j(2\epsilon/3) \text{ の閉包 } \overline{\mathbf{N}\Psi_j(2\epsilon/3)} \quad (\text{C2.13})$$

⑤  $\overline{\mathbf{N}\Psi_j(2\epsilon/3)}$  の,  $\mathbf{T} \cdot \Phi$  に関する補集合 (complement)

$$\begin{aligned} & \overline{\mathbf{CN}\Psi_j(2\epsilon/3)} \\ & \equiv \overline{\mathbf{T} \cdot \Phi - \overline{\mathbf{N}\Psi_j(2\epsilon/3)}} \end{aligned} \quad (\text{C2.14})$$

□

パターンモデル  $\mathbf{T}\varphi$  の, カテゴリ  $\mathcal{G}_j$  以外の他のカテゴリから眺めた相違の度合いを,

$$\text{dis}(\mathbf{T}\varphi, \overline{\mathbf{CN}\Psi_j(2\epsilon/3)}) \equiv \min_{\mathbf{T}\psi \in \overline{\mathbf{CN}\Psi_j(2\epsilon/3)}} \text{dis}(\mathbf{T}\varphi, \mathbf{T}\psi) \quad (\text{C2.15})$$

と定義すると,

$$\begin{cases} \text{dis}(\mathbf{T}\varphi, \overline{\mathbf{CN}\Psi_j(2\epsilon/3)}) > 0 & \text{if } \mathbf{T}\varphi \in \overline{\mathbf{N}\Psi_j(2\epsilon/3)} \\ \text{dis}(\mathbf{T}\varphi, \overline{\mathbf{CN}\Psi_j(2\epsilon/3)}) = 0 & \text{if } \mathbf{T}\varphi \in \overline{\mathbf{CN}\Psi_j(2\epsilon/3)} \end{cases} \quad (\text{C2.16})$$

が成立する. このとき, 集合  $\overline{\mathbf{N}\Psi_j(2\epsilon/3)}$  上での,  $\text{dis}(\mathbf{T}\varphi, \overline{\mathbf{CN}\Psi_j(2\epsilon/3)})$  の最小値は正である. つまり,

$$\min_{\varphi \in \overline{\mathbf{N}\Psi_j(2\epsilon/3)}} \text{dis}(\mathbf{T}\varphi, \overline{\mathbf{CN}\Psi_j(2\epsilon/3)}) > 0 \quad (\text{C2.17})$$

が成り立つ. この正値性を考慮し,

$$s_j(\mathbf{T}\varphi) \equiv \min\{\text{dis}(\mathbf{T}\varphi, \overline{\mathbf{CN}\Psi_j(2\epsilon/3)}) / \min_{\eta \in \overline{\mathbf{N}\Psi_j(\epsilon/3)}} \text{dis}(\mathbf{T}\eta, \overline{\mathbf{CN}\Psi_j(2\epsilon/3)}), 1\} \quad (\text{C2.18})$$

を導入すると,

$$\begin{aligned} s_j(\mathbf{T}\varphi) &= \\ & \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{T}\varphi \in \overline{\mathbf{N}\Psi_j(\epsilon/3)} \\ 0 & \text{if } \mathbf{T}\varphi \in \overline{\mathbf{CN}\Psi_j(2\epsilon/3)} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{C2.19})$$

が成り立つ. しかも,

$$\forall T\varphi \in N\Psi_j(2\epsilon/3) - \overline{N\Psi_j(\epsilon/3)}, 0 < s_j(T\varphi) < 1 \quad (C2.20)$$

が成り立つ。ここで、大分類関数

$$BSC : \Phi \times J \rightarrow \{0, 1\} \quad (C2.21)$$

が次の定理C.1の如く、構成できることがわかる。ここで、

$$\text{psn}(u) = 0 \text{ if } u < 0, = 1 \text{ if } u \geq 0 \quad (C2.22)$$

を導入しておく。

[定理C.1] (axiom 3を満たす大分類関数BSCの構成定理)  
不等式

$$\forall j \in J, 0 < h_j < 1 \quad (C2.23)$$

を満たす閾値 $h_j$ の、 $j \in J$ にわたる系を導入すると、

$$BSC(\varphi, j) = \text{psn}(s_j(T\varphi) - h_j) \quad (C2.24)$$

と定義される式(C2.21)の写像BSCはaxiom 3を満たす。

更に、カテゴリ間の相互排除性

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, BSC(\omega_j, j) = 0 \quad (C2.25)$$

を満たす。

[定理C.1の系]

$$BSC(\varphi, j) = \begin{cases} 1 & \text{if } T\varphi \in \overline{N\Psi_j(\epsilon/3)} \\ 0 & \text{if } T\varphi \in CN\Psi_j(2\epsilon/3) \end{cases}$$

(証明) axiom 3の(i), (ii)の成立を示す。

(i)(カテゴリ抽出能力)の成立：

$$\begin{aligned} \exists T\varphi \in N\Psi_j(2\epsilon/3), \text{dis}(T\omega_j, T\varphi) & \quad \because \text{2式(6), (11)} \\ \therefore T\omega_j \in N\Psi_j(\epsilon/3) & \quad \therefore s_j(T\omega_j) = 1 \quad \because \text{式(C2.19)} \end{aligned} \quad (C2.26)$$

がわかる。よって、

$$\begin{aligned} \forall j \in J, BSC(\omega_j, j) &= \text{psn}(1 - h_j) = 1 \\ &\quad \because \text{2式(C2.23), (C2.22)} \end{aligned} \quad (C2.27)$$

(ii)(T-不変性)の成立：式(C2.6)の $\Psi_j \subset T \cdot \Phi$ より、

$$\Psi_j \subset T \cdot T \cdot \Phi \subset T \cdot \Phi \quad (C2.28)$$

である。

$$\forall j \in J, s_j(T \cdot T\varphi) = s_j(T \cdot \varphi) \therefore BSC(T\varphi, j) = BSC(\varphi, j) \quad (C2.29)$$

が得られる。

更に、 $\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}$ ,

$$s_j(T\omega_j) = 0 \quad \because \text{2式(C2.9), (C2.19)} \quad (C2.30)$$

から、カテゴリ間の相互排除式(C2.25)の成立が、

$$\begin{aligned} \forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, BSC(\omega_j, j) &= \text{psn}(s_j(T\omega_j) - h_j) = \text{psn}(-h_j) = 0 \\ &\quad \because \text{2式(C2.23), (C2.22)} \end{aligned} \quad (C2.31)$$

とわかる。

系の成立は、4式(C2.22), (C2.23), (C2.24), (C2.19)から明らかである。 □

ここで、3性質

$$(イ) \text{ (正性, 一意性) } \text{dis}(\varphi, \eta) \geq 0 \quad (C2.32)$$

$$\text{dis}(\varphi, \eta) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \eta \quad (\text{C2.33})$$

$$(\square) (\text{対称性}) \quad \text{dis}(\varphi, \eta) = \text{dis}(\eta, \varphi) \quad (\text{C2.34})$$

$$(\wedge) (\text{3角不等式}) \quad \text{dis}(\varphi, \psi) \leq \text{dis}(\varphi, \eta) + \text{dis}(\eta, \psi) \quad (\text{C2.35})$$

を満たす距離関数disの簡単な構成2例 [構成例1], [構成例2] を示しておこう :

$$[\text{構成例1}] \quad \text{dis}(\text{T}\psi, \text{T}\varphi) = \|\text{T}\psi - \text{T}\varphi\| \quad (\text{C2.36})$$

$$[\text{構成例2}] \quad \mathbf{u}(\varphi, \mathbf{k}) \text{ をパターン } \varphi \text{ から抽出される第 } \mathbf{k} \text{ 番目の特徴量とし, 条件} \quad (\text{C2.37})$$

$$0 < \mathbf{W}_{\mathbf{k}}, \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{L}} \mathbf{W}_{\mathbf{k}} > 0$$

を満たす重み $\mathbf{W}_1$ の組 $\{\mathbf{W}_1\}$ を導入して,

$$\text{dis}(\text{T}\psi, \text{T}\varphi) = \left[ \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{L}} \mathbf{W}_{\mathbf{k}} \cdot |\mathbf{u}(\text{T}\varphi, \mathbf{k}) - \mathbf{u}(\text{T}\psi, \mathbf{k})|^2 \right]^{1/2} \quad (\text{C2.38})$$

□

ここで,

$$s(\text{T}\varphi) \equiv \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{J}} s_{\mathbf{k}}(\text{T}\varphi), \quad \text{T}\varphi \in \text{T} \cdot \Phi \quad (\text{C2.39})$$

を定義する.  $\text{T} \cdot \Phi$ の表現式(C2.7)において,

$$\forall \text{T}\varphi \in \text{T} \cdot \Phi, \exists \mathbf{j} \in \mathbf{J}, \text{T}\varphi \notin \text{CN}\Psi_{\mathbf{j}}(2\varepsilon/3) \quad (\text{C2.40})$$

を要請すると, 式(C2.16)より,

$$\forall \text{T}\varphi \in \text{T} \cdot \Phi, s(\text{T}\varphi) > 0 \quad (\text{C2.41})$$

が成立している. ここで, 上述のごとく定義された関数 $s_{\mathbf{j}}(\text{T}\varphi)$ ,  $s(\text{T}\varphi)$ を使って, 式(C2.10)の関数SMを

$$\text{SM}(\varphi, \omega_{\mathbf{j}}) = s_{\mathbf{j}}(\text{T}\varphi)/s(\text{T}\varphi) \quad (\text{C2.42})$$

と定義すると, 次の定理C.2が指摘され, axiom 2を満たす類似度関数SMが得られる.

[定理C.2] (axiom 2を満たす類似度関数SMの構成定理)

式(C2.42)の如く定義された式(C2.10)の関数SMはaxiom 2を満たす.

[定理C.2の系]

$$\text{SM}(\varphi, \omega_{\mathbf{j}}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \text{T}\varphi \in \overline{\text{N}\Psi_{\mathbf{j}}(\varepsilon/3)} \\ 0 & \text{if } \text{T}\varphi \in \text{CN}\Psi_{\mathbf{j}}(2\varepsilon/3) \end{cases}$$

(証明) 以下に, axiom 2の(i)~(iv)の成立を示す.

(i) (正規直交性)  $\varphi = \omega_{\mathbf{j}}$ のとき, 2式(C2.26), (C2.30)より, 定義式(C2.42)に従えば,

$$\text{SM}(\varphi, \omega_{\mathbf{k}}) = 1 \quad \text{if } \mathbf{j} = \mathbf{k}, = 0 \quad \text{if } \mathbf{j} \neq \mathbf{k} \quad (\text{C2.43})$$

が従うことになる.

$$(ii) (\text{規格化性}) \quad \forall \varphi \in \Phi, \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{J}} \text{SM}(\varphi, \omega_{\mathbf{j}}) = 1 \quad (\text{C2.44})$$

が成立することは, 式(C2.41), 並びに, SMの定義式(C2.42)から明らか.

(iii) (T-不変性) 式(C2.29)の前半より axiom 1, (iii)の後半を適用して,

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \mathbf{j} \in \mathbf{J}, s(\text{T} \cdot \text{T}\varphi) = s(\text{T} \cdot \varphi) \quad (\text{C2.45})$$

が得られ, よって

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \mathbf{j} \in \mathbf{J}, \text{SM}(\text{T}\varphi, \omega_{\mathbf{j}}) = \text{SM}(\varphi, \omega_{\mathbf{j}}) \quad (\text{C2.46})$$

が成立する.

系の成立は, 3式(C2.41), (C2.42), (C2.19)から明らかである. □



**C3. axiom 2,3を満たす類似度関数SM, 大分類関数BSCの,自己カテゴリから眺めた構成**

前章C2での設定をそのまま, 採用する. 但し, 式(C2.15)の距離disについては,

$$\text{dis}(T\varphi, \Psi_j) \equiv \min_{T\psi \in \Psi_j} \text{dis}(T\varphi, T\psi) \quad (\text{C3.1})$$

と変更し, このとき, 式(C2.16)の代わりに,

$$\begin{cases} \text{dis}(T\varphi, \Psi_j) \\ \left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ if } T\varphi \in \Psi_j \\ > 0 \text{ if } T\varphi \in \Phi - \Psi_j \end{array} \right. \end{cases} \quad (\text{C3.2})$$

が成立することに注意する. また, 式(C2.17)の代りに,

$$\min_{T\psi \in \overline{N\Psi_j(2\epsilon/3)}} \text{dis}(T\psi, \Psi_j) > 0 \quad (\text{C3.3})$$

が成立する.

更に,  $s_j(T\varphi)$ の定義式(C2.18)を

$$s_j(T\varphi) \equiv 1 - \min \{ \text{dis}(T\varphi, \Psi_j) / \min_{T\psi \in \overline{N\Psi_j(2\epsilon/3)}} \text{dis}(T\psi, \Psi_j), 1 \} \quad (\text{C3.4})$$

と変更する. このとき,

$$\begin{cases} s_j(T\varphi) = \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ if } T\varphi \in \overline{CN\Psi_j(2\epsilon/3)} \\ 1 \text{ if } T\varphi \in \Psi_j \end{array} \right. \end{cases} \quad (\text{C3.5})$$

が成り立ち, しかも,

$$\forall T\varphi \in \overline{N\Psi_j(2\epsilon/3)} - \Psi_j, 0 < s_j(T\varphi) < 1 \quad (\text{C3.6})$$

が成り立つ.

そうすると, 式(C2.21)の大分類関数BSCが次の定理C.3の如く, 構成できることがわかる.

[定理C.3] (axiom 3を満たす大分類関数BSCの構成定理)

不等式(C2.23)を満たす閾値 $h_j$ の,  $j \in J$ にわたる系を導入すると, 式(C2.24)の如く, 式(C2.21)の大分類関数BSCを定義すると, この写像BSCはaxiom 3を満たす.

更に, カテゴリ間の相互排除式(C2.25)を満たす.

[定理C.3の系]

$$\begin{cases} \text{BSC}(\varphi, j) = \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ if } T\varphi \in \overline{CN\Psi_j(2\epsilon/3)} \\ 1 \text{ if } T\varphi \in \Psi_j \end{array} \right. \end{cases}$$

(証明) axiom 3の(i), (ii)の成立を示す.

(i) (カテゴリ抽出能力)の成立: 式(C2.6)の $\Psi_j \subset T \cdot \Phi$ より,

$$\forall j \in J, T\omega_j \in \Psi_j \therefore s_j(T\omega_j) = 1 \therefore \text{式(C3.5)} \quad (\text{C3.7})$$

がわかる. よって, 式(C2.27)が成立する.

(ii) (T-不変性)の成立: 式(C2.6)の $\Psi_j \subset T \cdot \Phi$ より, 式(C2.28)が成立する. よって, 式(C2.29)が得られる.

更に, 2式(C2.9), (C3.5)から, 式(C2.30)が成立するから, カテゴリ間の相互排除式(C2.25)の成立が判明する.

系の成立は, 4式(C3.5), (C2.22), (C2.23), (C2.24)から, 明らかである. □

ここで,

$$\forall T\varphi \in \Phi, \exists j \in J, T\varphi \notin \overline{CN\Psi_j(2\epsilon/3)} \quad (\text{C3.8})$$

を要請すると, 式(C2.41)の正值性がいえ, 式(C2.10)の関数SMを式(C2.42)の如く定義する. こ

のとき、次の定理C.4が指摘され、axiom 2を満たす類似度関数SMが得られる。

[定理C.4] (axiom 2を満たす類似度関数SMの構成定理)

式(C2.42)の如く定義された式(C2.10)の関数SMはaxiom 2を満たす。

[定理C.4の系]

$$\text{SM}(\varphi, \omega_j) \begin{cases} 0 & \text{if } T\varphi \in \overline{\text{CN}\Psi_j(2\epsilon/3)} \\ 1 & \text{if } T\varphi \in \Psi_j \end{cases}$$

(証明) 以下に、axiom 2の(i)～(ii)の成立を示す。

(i) (正規直交性)のとき、2式(C2.26), (C2.30)より、定義式(C2.42)に従えば、式(C2.43)が従うことになる。

(ii) (規格化性) 式(C2.44)が成立することは、式(C2.41), 並びに、SMの定義式(C2.42)から明らか。

(iii) (T-不変性) 式(C2.29)の前半よりaxiom 1, (iii)の後半を適用して、式(C2.45)が得られ、よって、式(C2.46)が成立する。

系の成立は、3式(C3.5), (C2.41), (C2.42)から明らかである。  $\square$

#### C4.axiom 3を満たす大分類関数BSCの、自己カテゴリから眺めた今1つの構成

前章と同じく、自己カテゴリ $\mathbb{C}_j$ から眺め、今1つ、axiom 2, axiom 3を各々満たす2式(C2.10), (C2.21)の類似度関数SM, 大分類関数BSCを構成しよう。

5式(C2.5)～(C2.9)を要請する。式(C3.1)の距離 $\text{dis}(T\varphi, \Psi_j)$ と、距離

$$\text{dis}(T\varphi, \bigcup_{k \in J-|j|} \Psi_k) \equiv \min_{T\psi \in \bigcup_{k \in J-|j|} \Psi_k} \text{dis}(T\varphi, T\psi) \quad (\text{C4.1})$$

を用意する。

$T\varphi$ がパターン集合 $\Psi_j$ と似ている程度を与える $s(T\varphi, j)$ を

$$s(T\varphi, j) \equiv 1 - \text{dis}(T\varphi, \Psi_j) / [\text{dis}(T\varphi, \Psi_j) + \text{dis}(T\varphi, \bigcup_{k \in J-|j|} \Psi_k)] \quad (\text{C4.2})$$

と定義する。このとき、

$$s(T\varphi, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } T\varphi \in \bigcup_{k \in J-|j|} \Psi_k \\ 1 & \text{if } T\varphi \in \Psi_j \end{cases} \quad (\text{C4.3})$$

であり、

$$\forall T\varphi \in \Phi - \bigcup_{j \in J} \Psi_j, 0 < s(T\varphi, j) < 1 \quad (\text{C4.4})$$

が成立している。

そうすると、式(C2.21)の大分類関数BSCが次の定理C.5の如く、構成できることがわかる。

[定理C.5] (axiom 3を満たす大分類関数BSCの、自己カテゴリから眺めた構成定理)

不等式(C2.23)を満たす閾値 $h_j$ の、 $j \in J$ にわたる系を導入すると、

$$\text{BSC}(\varphi, j) \equiv \text{psn}(s(T\varphi, j) - h_j) \quad (\text{C4.5})$$

の如く、式(C2.21)の大分類関数BSCを定義すると、この写像BSCはaxiom 3を満たす。

更に、カテゴリ間の相互排除式(C2.25)を満たす。

[定理C.5の系]

$$\text{BSC}(\varphi, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } T\varphi \in \bigcup_{k \in J-|j|} \Psi_k \\ 1 & \text{if } T\varphi \in \Psi_j \end{cases} \quad (\text{C4.6})$$

(証明) axiom 3の ( i ), ( ii)の成立を示す.

( i )(カテゴリ抽出能力)の成立:式(C2.6)の $\Psi_j \subset T \cdot \Phi$ より,

$$\forall j \in J, T\omega_j \in \Psi_j$$

$$\therefore \text{dis}(T\omega_j, \Psi_j) = 0 \wedge \text{dis}(T\omega_j, \bigcup_{k \in J - |j|} \Psi_k) > 0 \quad (\text{C4.7})$$

$$\therefore s(T\varphi, j) = 1 \quad (\text{C4.8})$$

がわかる. よって, 式(C2.27)が成立する.

( ii )(T-不変性)の成立:式(C2.6)の $\Psi_j \subset T \cdot \Phi$ より, 式(C2.28)が成立する. よって, 式(C2.29)において,  $s_j(T\varphi)$ の代わりに $s(T\varphi, j)$ を採用した式が得られる.

更に, 2式(C2.9), (C4.3)から, 式(C2.30)において $s_j(T\varphi)$ の代わりに $s(T\varphi, j)$ を採用した式が成立するから, カテゴリ間の相互排除式(C2.25)の成立が判明する.

系の成立は, 4式(C4.3), (C2.22), (C2.23), (C2.60)から, 明らかである. □

更に, 次の定理C.6が指摘され, axiom 2を満たす類似度関数SMが得られる.

[定理C.6] (axiom 2を満たす類似度関数SMの, 自己カテゴリから眺めた構成定理)

$$\begin{aligned} \text{SM}(T\varphi, \omega_j) = & \\ \begin{cases} s(T\varphi, j) / \sum_{k \in J} s(T\varphi, k) \cdots \sum_{k \in J} s(T\varphi, k) > 0 \text{のとき} \\ p(\mathcal{C}_j) \cdots \sum_{k \in J} s(T\varphi, k) = 0 \text{のとき} \end{cases} & \quad (\text{C4.9}) \end{aligned}$$

の如く定義された式(C2.10)の関数SMはaxiom 2を満たす.

[定理C.6の系]

$$\begin{aligned} \text{SM}(\varphi, \omega_j) = & \\ \begin{cases} 0 & \text{if } T\varphi \in \bigcup_{k \in J - |j|} \Psi_k \\ 1 & \text{if } T\varphi \in \Psi_j \end{cases} & \quad (\text{C4.10}) \end{aligned}$$

(証明) 以下に, axiom 2の ( i ) ~ ( iv)の成立を示す.

( i )(正規直交性)  $\varphi = \omega_j$ のとき, 式(C4.3)より, 定義式(C4.9)に従えば, 式(C2.43)が従うことになる.

( ii )(規格化性) 式(C2.44)が成立することは, SMの定義式(C4.9)から明らか.

( iii )(T-不変性) 式(C2.29)において,  $s_j(T\varphi)$ の代わりに $s(T\varphi, j)$ を採用した式の前半より axiom 1, ( iii)の後半を適用して, 式(C2.46)が成立する.

系の成立は, 2式(C4.3), (C4.10)から明らかである. □

## 付録D. Axiom 2を満たす類似度関数SMの, ノルム距離の変換に基づく構成

本付録Dで, axiom 2を満たす類似度関数SMを, ノルム距離の変換に基づいて, 構成しよう.

### D1. Lemma

#### 参考文献

B.Smolka, K.N.Plataniotis, A.Chydzinski, M.Szczepanski, A.N.Venetsanopoulos, K.Wojciechowski: "Self-adaptive algorithm of impulsive noise reduction in color images", Pattern Recognition, vol.35, pp.1771-1784, 2002

の2. Basic algorithmについて, 説明しよう.

Let us start from a gray scale image in order to better explain how the new algorithm is constructed.

Let the gray scale image be represented by a matrix  $F$  of size  $N_1 \times N_2$ ,  $F = \{F(i, j) \in \{0, \dots, 255\}, i=1, 2, \dots, N_1, j=1, 2, \dots, N_2\}$ . Our construction starts with the introduction of the following assumption for:

1.  $\mu$  is non-ascending in  $[0; \infty)$ , (D1.1)

2.  $\mu$  is convex in  $[0; \infty)$ , (D1.2)

3.  $\mu(0) = 1, \mu(\infty) = 0$ . (D1.3)

□

As the argument of the function  $\mu$  will be a distance between pixels in gray scale space, it is easy to understand the sense of 1. The fact that  $\mu$  must be non-ascending means that the similarity between two pixels is small if the distance between them in a given space is large. Assumption 3 is just a natural normalization of the similarity function.

In this way, the similarity between two pixels with the same gray scale value is 1, the similarity between pixels with far distant intensities is 0. The sense of 2 will be explained below.

In the construction of our filter the central pixel in the window  $W$  is replaced by that one, which maximizes the sum of similarities between all its neighbors. Our basic assumption is that a new pixel must be taken from the window  $W$  (introducing pixels which do not occur in the image is prohibited like in the VMF and VDF). For this purpose  $\mu$  must be convex, which is shown by the following Lemma.

Lemma. Let  $n$  numbers  $a_1, a_2, \dots, a_n$  be given and the function  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  be convex ( $df^2(x)/dx^2 \geq 0$ ). Denote

$$a = \min \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, b = \max \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ and} \\ r(x) = \sum_{i=1}^n f(|x - a_i|). \quad (D1.4)$$

Under the above assumptions

$$\max_{x \in [a, b]} r(x) = \max \{r(a_1), r(a_2), \dots, r(a_n)\}. \quad (D1.5)$$

This means that in order to find a maximum of the function  $r(x)$  in  $[a; b]$  it is sufficient to calculate the values of  $r$  only in points  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Proof of the Lemma. Let us take the longest possible subsequence of  $m$  different numbers  $a_{(1)} < a_{(2)} < \dots < a_{(m)}$  from the set  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  and denote by  $L_{(i)}$  the number of occurrences of  $a_{(i)}$  in  $A$ . Clearly

$$r(x) = \sum_{i=1}^m L_{(i)} f(|x - a_{(i)}|). \quad (D1.6)$$

Considering function  $r(x)$  in one particular interval  $[a_{(j)}; a_{(j+1)}]$  gives

$$r(x) = \sum_{i=1}^j L_{(i)} f(a_{(i)} - x) + \sum_{i=j+1}^m L_{(i)} f(x - a_{(i)}). \quad (D1.7)$$

Obviously functions  $f(a_{(i)} - x)$  and  $f(x - a_{(i)})$  are convex. In this way, the function  $r(x)$  is convex  $[a_{(j)}; a_{(j+1)}]$  as a sum of  $m$  convex functions. Using well-known property of convex functions yields

$$\max_{x \in [a_{(j)}, a_{(j+1)}]} r(x) = \max \{r(a_{(j)}), r(a_{(j+1)})\}. \quad (D1.8)$$

This finishes the proof. □

For the gray scale images we define the following fuzzy measure of similarity between two pixels  $F_k$  and  $F_\ell$ :

$$\rho \{F_k, F_\ell\} = \mu(|F_k - F_\ell|). \quad (D1.9)$$

□

## D2. 類似度関数SMの構成

上述のLemmaを適用して, axiom 2を満たす(A3.5)の類似度関数SMを構成しよう.

4条件

$$f_j(0) = 1 \quad (D2.1)$$

$$f_j(\infty) = 0 \quad (D2.2)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ (\text{非負実数全体の集合}), d f_j(x)/dx < 0 \quad (D2.3)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, d^2 f_j(x)/dx^2 \geq 0 \quad (D2.4)$$

を満たす関数

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (D2.5)$$

を用意する. 更に, 一致条件

$$\forall j \in J, \exists i \in J_j (\text{a finite set}), T\varphi_{j,i} = T\omega_j \quad (D2.6)$$

を満たすパターンの集合

$$\varphi_{j,i}, i \in J_j, j \in J \quad (D2.7)$$

をも用意する. 関数 $s'_j(\varphi)$ を

$$s'_j(\varphi) \equiv \sum_{i \in J_j} f_j(\|T\varphi - T\varphi_{j,i}\|) \quad (D2.8)$$

と定義する. 次に, 上述のごとく定義された関数 $s'_j(\varphi)$ を使って, 関数 $s_j(\varphi)$ を

$$s_j(\varphi) \equiv s'_j(\varphi) / \sum_{k \in J} s'_k(\varphi), \text{ 或いは } s_j(\varphi) \equiv s'_j(\varphi) / \max_{k \in J} s'_k(\varphi) \quad (D2.9)$$

と定義する. ここに,

$$\exists j \in J, \exists i \in J_j, \|T\varphi - T\varphi_{j,i}\| < \infty \quad (D2.10)$$

が成立している故, 4式(D2.1)~(D2.4), 式(D2.6)を考慮すれば, 2式(D2.9)の分母は零にならないこと, つまり

$$\sum_{k \in J} s'_k(\varphi) > 0 \wedge \max_{k \in J} s'_k(\varphi) > 0 \quad (D2.11)$$

が成立していることに注意する. 不等式

$$0 < \max_{i \in J - \{j\}} s_j(\omega_i) \leq h_0(j) < h_1(j) \leq s_j(\omega_j) \leq 1, j \in J \quad (D2.12)$$

を満たす閾値の系

$$h_0(j), h_1(j), j \in J \quad (D2.13)$$

を用意する. この閾値によってsをかさ上げ, そこ下げする変換

$$sm_j(\varphi) \equiv \begin{cases} 1 \cdots h_1(j) \leq s_j(\varphi) \text{の時} \\ [s_j(\varphi) - h_0(j)]/[h_1(j) - h_0(j)] \cdots h_0(j) < s_j(\varphi) < h_1(j) \text{の時} \\ 0 \cdots s_j(\varphi) \leq h_0(j) \text{の時} \end{cases} \quad (D2.14)$$

を行い, 式(A3.5)の関数SMを

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} sm_j(\varphi) / \sum_{k \in J} sm_k(\varphi) \cdots \sum_{k \in J} sm_k(\varphi) > 0 \text{の時} \\ p(\mathcal{G}_j) \cdots \sum_{k \in J} sm_k(\varphi) = 0 \text{の時} \end{cases} \quad (D2.15)$$

と定義すると, 次の定理D.1が指摘され, axiom 2を満たす類似度関数SMが得られる.

[定理D.1] ( axiom 2を満たす類似度関数SMの構成定理)

式(D2.15)の如く定義された式(A3.5)の関数SMはaxiom 2を満たす.

(証明) 以下に, axiom 2の(i)~(iii)の成立を示す.

(i)  $\varphi = \omega_j$ のとき, 不等式(D2.12)より

$$h_1(j) \leq s_j(\varphi) \quad (\text{D2.16})$$

を得，定義式(D2.14)に従えば，

$$sm_j(\varphi) = 1 \quad (\text{D2.17})$$

であることがわかる．また，不等式(D2.12)より

$$s_k(\varphi) \leq \max_{i \in J - \{k\}} s_k(\omega_i) \leq h_0(k) \text{ for any } k \in J - \{j\} \quad (\text{D2.18})$$

を得，定義式(D2.14)に従えば，

$$sm_k(\varphi) = 0 \quad (\text{D2.19})$$

であることがわかる．よって，SMの定義式(D2.15)から，

$$SM(\varphi, \omega_k) = 1 \text{ if } j=k, = 0 \text{ if } j \neq k$$

が従うことになる．

$$(ii) \forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} SM(\varphi, \omega_j) = 1$$

が成立することは，SMの定義式(D2.15)から明らか．

(iii) axiom 1, (iii)の後半を適用して，

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, s'_j(T\varphi) = s'_j(\varphi) \quad (\text{D2.20})$$

が得られ，よって

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, s_j(T\varphi) = s_j(\varphi), sm_j(T\varphi) = sm_j(\varphi), SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j) \quad (\text{D2.21})$$

が成立する．

□

### D3. Lemmaから得られる或る性質

次の定理D.2は，式(D2.8)の $s'_j(\varphi)$ の最大値が簡単に求められることを指摘している．それのみならず，SMを構成するのに用いられるパターンは，式(D2.7)の集合 $\varphi_{j,i}$ ,  $i \in J_j$ ,  $j \in J$ が効果的に機能することを明らかにしている．

[定理D.2] ( $s'_j$ の最大値定理)

$$\max_{\varphi \in \Phi} s'_j(\varphi) = \max_{i \in J_j} s'_j(\varphi_{j,i}). \quad (\text{D3.1})$$

(証明) 章 D1のLemmaから明らか．

□

### D4. 4条件式(D2.1)～(D2.4)を満たす関数 $f_j$ の構成諸例

章 D1の参考文献によると，4条件式(D2.1)～(D2.4)を満たす関数 $f_j$ は，次の諸例で与えられる．

$$\textcircled{1} f_j(x) = \exp[-\beta x], \beta > 0$$

$$\textcircled{2} f_j(x) = 1/[1 + \beta x], \beta > 0$$

$$\textcircled{3} f_j(x) = 1/[1 + x]^\beta, \beta > 0$$

$$\textcircled{4} f_j(x) = -[2/\pi] \cdot \arctan(\beta x) + 1, \beta > 0$$

$$\textcircled{5} f_j(x) = 2/[1 + \exp(\beta x)], \beta > 0$$

$$\textcircled{6} f_j(x) = 1/[1 + x^\beta], \beta > 0$$

$$\textcircled{7} f_j(x) =$$

$$\begin{cases} 1 - \beta x & \text{if } x < 1/\beta \\ 0 & \text{if } x \geq 1/\beta > 0 \end{cases}$$

□

## 付録E. $T\varphi$ を $T\omega_j$ で推定したときの残差 $(T\varphi)_{j,\perp}$ の利用方法と、類似度関数SMの構成

本付録Eでは、 $T\varphi$ を $T\omega_j$ で推定したとき得られる残差  $(T\varphi)_{j,\perp}$ を利用する方法が研究され、併せて、この残差  $(T\varphi)_{j,\perp}$ を用いて、axiom 2を満たす類似度関数SMが構成される。

### E1. $T\omega_j(\neq 0)$ の1次式として表された $T\varphi$

$T\varphi$ を $T\omega_j(\neq 0)$ の1次式

$$T\varphi = a \cdot T\omega_j + \psi \quad (\text{E1.1})$$

として表現することを考えよう。但し、 $a$ は定数であり、 $\psi$ は $T\omega_j$ との直交関係

$$(T\omega_j, \psi) = 0 \quad (\text{E1.2})$$

を満たすものとする。 $\psi$ は $T\varphi$ から $T\omega_j(\neq 0)$ の効果、 $T\omega_j$ からの影響を除去して得られるパターンであり、以下では、 $(T\varphi)_{j,\perp}$ と表されている。

また、直交関係式(E1.2)を満たす1次式(E1.1)を使って、axiom 2を満たす2種類の類似度関数SMを構成しよう。

### E2. $T\varphi$ から $T\omega_j(\neq 0)$ の効果、 $T\omega_j$ からの影響を除去して得られるパターン $(T\varphi)_{j,\perp}$

$T\varphi$ から $T\omega_j(\neq 0)$ の効果、 $T\omega_j$ からの影響を除去して得られるパターン  $(T\varphi)_{j,\perp}$ とは、 $T\omega_j$ を含む一次形式で、 $T\varphi$ を

$$T\varphi = c_j(T\varphi) \cdot T\omega_j + (T\varphi)_{j,\perp} \quad (\text{E2.1})$$

と表現したとき、直交関係

$$(T\omega_j, (T\varphi)_{j,\perp}) = 0 \quad (\text{E2.2})$$

を満たすものである。

1次従属係数  $c_j(T\varphi)$ は、実は $T\varphi$ を $a \cdot T\omega_j$ で推定・近似した時、近似誤差の自乗ノルムを表す汎関数

$$F_j(T\varphi; a) \equiv \|T\varphi - a \cdot T\omega_j\|^2 \quad (\text{E2.3})$$

を最小とする $a$ であるものであることは、以下のようにしてわかる。

$\bar{a}$ を $a$ の複素共役として、

$$\begin{aligned} 0 &= \partial F_j(T\varphi; a) / \partial a \\ &= (\partial / \partial a \{T\varphi - a \cdot T\omega_j\}, T\varphi - a \cdot T\omega_j) + (T\varphi - a \cdot T\omega_j, \partial / \partial \bar{a} \{T\varphi - a \cdot T\omega_j\}) \\ &= (T\omega_j, T\varphi - a \cdot T\omega_j) \end{aligned} \quad (\text{E2.4})$$

$$\therefore \partial a / \partial \bar{a} = 0 \quad (\text{E2.5})$$

が成り立つ。よって、

$$\therefore (T\varphi - a \cdot T\omega_j, T\omega_j) = 0 \quad (\text{E2.6})$$

$$a \equiv c_j(T\varphi) = (T\varphi, T\omega_j) / (T\omega_j, T\omega_j) \quad (\text{E2.7})$$

$$= (T\varphi, T\omega_j) / \|T\omega_j\|^2 \quad (\text{E2.8})$$

が得られる。

ここで、 $\eta$ を

$$\eta \equiv T\varphi - c_j(T\varphi) \cdot T\omega_j \quad (\text{E2.9})$$

とおけば、3式(E2.4)、(E2.6)、(E2.7)より、

$$(T\omega_j, \eta) = (\eta, T\omega_j) = 0 \quad (\text{E2.10})$$

が成り立つ。結局、式(E2.9)の $\eta$ を $(T\varphi)_{j,\perp}$ と表せば、次の定理E.1が成立する。

[定理E.1] ( $T\varphi$ の、 $T\omega_j$ による直交分解定理)

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, T\varphi &= c_j(T\varphi) \cdot T\omega_j + (T\varphi)_{j,\perp} \\ &= [(T\varphi, T\omega_j)/(T\omega_j, T\omega_j)] \cdot T\omega_j + (T\varphi)_{j,\perp} \end{aligned} \quad (\text{E2.11})$$

が成り立ち、直交関係

$$((T\varphi)_{j,\perp}, T\omega_j) = 0 \quad (\text{E2.12})$$

が成り立っている。

(証明)  $c_j(T\varphi)$  の定義式(E2.7)を考慮すると、

$$\eta \equiv (T\varphi)_{j,\perp} \quad (\text{E2.13})$$

であるから、式(E2.11)は、式(E2.9)から得られる。式(E2.12)は式(E2.10)そのものである。

□

直交関係式(E2.12)が成立しているから、 $T\varphi$  の、 $T\omega_j$  による最良近似式(E2.11)を勘案すると、残差 $(T\varphi)_{j,\perp}$  は  $T\varphi$  から  $T\omega_j$  からの影響を取り除いてえられたものであると考えられる。

次の定理4.2は、 $T\varphi$  と  $(T\varphi)_{j,\perp}$  との相関値 $(T\varphi, (T\varphi)_{j,\perp})$ を計算したものである。

[定理4.2] ( $T\varphi$  と  $(T\varphi)_{j,\perp}$  との相関定理)

$$(T\varphi, (T\varphi)_{j,\perp}) \quad (\text{E2.14})$$

$$= \|(T\varphi)_{j,\perp}\|^2 \quad (\text{E2.15})$$

$$= \|T\varphi\|^2 - |(T\varphi, T\omega_j)/\|T\omega_j\||^2 \quad (\text{E2.16})$$

$$= \|T\varphi\|^2 - |c_j(T\varphi) \cdot \|T\omega_j\||^2 \quad (\text{E2.17})$$

(証明) 式(E2.16)と式(E2.17)との間の等価変換は、式(4.10)から明らか。残りを証明しよう。

式(E2.14)

$$= (T\varphi, (T\varphi)_{j,\perp})$$

$$= (c_j(T\varphi) \cdot T\omega_j + (T\varphi)_{j,\perp}, (T\varphi)_{j,\perp}) \quad \because \text{2式(E2.7), (E2.11)}$$

$$= c_j(T\varphi) \cdot (T\omega_j, (T\varphi)_{j,\perp}) + ((T\varphi)_{j,\perp}, (T\varphi)_{j,\perp})$$

$$= ((T\varphi)_{j,\perp}, (T\varphi)_{j,\perp}) \quad \because \text{式(E2.12)}$$

$$= \|(T\varphi)_{j,\perp}\|^2$$

$$= \text{式(E2.15)}$$

$$= (T\varphi - c_j(T\varphi) \cdot T\omega_j, T\varphi - c_j(T\varphi) \cdot T\omega_j) \quad \because \text{2式(E2.7), (E2.11)}$$

$$= \|T\varphi\|^2 - c_j(T\varphi) \cdot (T\omega_j, T\varphi) - \overline{c_j(T\varphi)} \cdot (T\varphi, T\omega_j) + |c_j(T\varphi)|^2 \cdot (T\omega_j, T\omega_j)$$

$$= \|T\varphi\|^2 - c_j(T\varphi) \cdot c_j(T\varphi) \cdot \|T\omega_j\|^2 + |c_j(T\varphi)|^2 \cdot \|T\omega_j\|^2 \quad \because \text{式(E2.7)}$$

$$= \|T\varphi\|^2 - |c_j(T\varphi)|^2 \cdot \|T\omega_j\|^2$$

$$= \|T\varphi\|^2 - |c_j(T\varphi) \cdot \|T\omega_j\||^2$$

$$= \text{式(E2.17)}$$

を得、証明が終わる。

□

次の定理E.3は、残差 $(T\varphi)_{j,\perp}$ のエネルギー $\|(T\varphi)_{j,\perp}\|^2$ とパターンモデル $T\varphi$ のエネルギー $\|T\varphi\|^2$ との比を求めたものである。

[定理E.3] (残差エネルギー $\|(T\varphi)_{j,\perp}\|^2$ の自乗とパターンモデルエネルギー $\|T\varphi\|^2$ の自乗の比定理)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \|(T\varphi)_{j,\perp}\|^2 / \|T\varphi\|^2 = 1 - |(T\varphi, T\omega_j)/\|T\varphi\| \cdot \|T\omega_j\||^2. \quad (\text{E2.18})$$

(証明)  $\|(T\varphi)_{j,\perp}\|^2 / \|T\varphi\|^2$

$$= \{ \|T\varphi\|^2 - |(T\varphi, T\omega_j)/\|T\omega_j\||^2 \} / \|T\varphi\|^2 \quad \because \text{2式(E2.15), (E2.16)}$$

$$= 1 - |(T\varphi, T\omega_j)/\|T\omega_j\|^2 / \|T\varphi\|^2$$

$$= 1 - |(T\varphi, T\omega_j)/\|T\varphi\| \cdot \|T\omega_j\||^2$$



を得，示された。□

次の定理E. 4では，他のカテゴリ  $\mathfrak{C}_j (i \in J - \{j\})$  の代表パターン  $\omega_i$  のモデル  $T\omega_i$  から眺め， axiom 2 (付録A, A3章) を満たす類似度関数

$$SM : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \quad (E2.19)$$

が構成されている．そのために，式(E2.17)を考慮し，

$$s_{k,\perp}(\varphi) = |(T\varphi, (T\varphi)_{k,\perp})| / \{\|T\varphi\| \cdot \|(T\varphi)_{k,\perp}\|\}^2 \quad (E2.20)$$

は，処理の対象とする問題のパターン  $\varphi \in \Phi$  のモデル  $T\varphi \in \Phi$  がカテゴリ  $\mathfrak{C}_k$  の代表パターン  $\omega_k$  のモデル  $T\omega_k$  に帰属しない程度を表している．よって，

$$\text{sum}(j, \varphi) \equiv \sum_{k \in J - \{j\}} s_{k,\perp}(\varphi) \quad (E2.21)$$

は， $T\varphi$  が  $\mathfrak{C}_j$  以外の任意のカテゴリ  $\mathfrak{C}_k (k \in J - \{j\})$  に帰属していない程度  $s_{k,\perp}(\varphi)$  の総和であり，よって， $T\varphi$  が自己カテゴリ  $\mathfrak{C}_j$  に帰属している程度を表していると思われる．ここで，

$$s(\varphi) \equiv \sum_{i \in J} \text{sum}(i, \varphi) \quad (E2.22)$$

を導入して，

$$s1(\varphi, \omega_j) \equiv \begin{cases} \text{sum}(j, \varphi) / s(\varphi) \cdots \cdots s(\varphi) > 0 \text{ の場合} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \cdots s(\varphi) = 0 \text{ の場合} \end{cases} \quad (E2.23)$$

を導入する．

$s1(\varphi, \omega_j)$  を 0 に切り捨て，1 に切り上げる変換式 (E2.25) を以下のように考えよう：不等式

$$\forall j \in J, 0 \leq \max_{i \in J - \{j\}} s1(\omega_i, \omega_j) \leq h_0(j) < h_1(j) \leq s1(\omega_j, \omega_j) < 1 \quad (E2.24)$$

を満たす閾値の系を導入可能とし，

$$s2(\varphi, \omega_j) \equiv \begin{cases} 0 \cdots \cdots s1(\varphi, \omega_i) \leq h_0(j) \text{ のとき} \\ \frac{s1(\varphi, \omega_j) \leq h_0(j)}{h_1(j) - h_0(j)} \cdots \cdots h_0(j) \leq s1(\varphi, \omega_j) \leq h_1(j) \text{ のとき} \\ 1 \cdots \cdots s1(\varphi, \omega_i) \geq h_1(j) \text{ のとき} \end{cases} \quad (E2.25)$$

□

このとき，次の定理E.4が成り立つ．

[定理E.4] (他のカテゴリから眺めた， axiom 2 を満たす類似度関数SMの構成定理)

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} s2(\varphi, \omega_j) / \sum_{k \in J} s2(\varphi, \omega_k) \cdots \cdots \sum_{i \in J} s2(\varphi, \omega_i) > 0 \text{ のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \cdots \sum_{i \in J} s2(\varphi, \omega_i) = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (E2.26)$$

のように定義された式 (E2.19) の関数SMは axiom 2 を満たす．

(証明) axiom 2 の (i), (ii), (iii) の成立を示す．

(i) (正規直交性) の成立：

$$SM(\omega_i, \omega_j) = 0 \text{ if } i \neq j, = 1 \text{ if } i = j \quad (E2.27)$$

の成立を示そう．不等式 (E2.24) より，

$$\forall j \in J, s2(\omega_j, \omega_j) = 1 \quad (E2.28)$$

$$\forall i \in J - \{j\}, s2(\omega_i, \omega_j) = 0 \quad (E2.29)$$

が成り立つことがわかる． よって，

$$\begin{aligned}
& \forall j \in J, \text{SM}(\omega_j, \omega_j) \\
&= s_2(\omega_j, \omega_j) / [s_2(\omega_j, \omega_j) + \sum_{k \in J - \{j\}} s_2(\omega_j, \omega_k)] \\
&= 1 / [1 + 0] = 1 \\
& \forall i \in J - \{j\}, \text{SM}(\omega_i, \omega_j) \\
&= s_2(\omega_i, \omega_j) / [s_2(\omega_i, \omega_i) + \sum_{k \in J - \{i\}} s_2(\omega_i, \omega_k)] \\
&= 0 / [1 + 0] = 0
\end{aligned}$$

を得，示された．

(ii) (規格化条件)の成立：

$$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} \text{SM}(\varphi, \omega_j) = 1 \quad (\text{E2.30})$$

の成立はSMの定義式(E2.26)より明らかである．

(iii) (T-不変性)の成立：

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, s_{j,\perp}(\text{T}\varphi) = s_{j,\perp}(\varphi) \quad (\text{E2.31})$$

が axiom 1 (付録A, A1章)の(iii)，後半  $\text{T} \cdot \text{T} = \text{T}$  より知れ， よって，

$$\begin{aligned}
& \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \text{sum}(j, \varphi) = \text{sum}(j, \text{T}\varphi) \\
& s(\text{T}\varphi) = s(\varphi), s_1(\text{T}\varphi, \omega_j) = s_1(\varphi, \omega_j), s_2(\text{T}\varphi, \omega_j) = s_2(\varphi, \omega_j) \\
& \text{SM}(\text{T}\varphi, \omega_j) = \text{SM}(\varphi, \omega_j)
\end{aligned} \quad (\text{E2.32})$$

を得，示された．  $\square$

今1つ， axiom 2を満たす式(E2.19)の類似度関数SMを次の定理E.5で構成しよう． 但し，自己のカテゴリ  $\mathcal{C}_j$ の代表パターン  $\omega_j$ のモデル  $\text{T}\omega_j$ から眺め，構成する． 先ず，

$$s_j(\varphi) \equiv -\frac{1}{2} \cdot \log_e \frac{\|(\text{T}\varphi)_{j,\perp}\|^2}{\|\text{T}\varphi\|^2} \quad (\text{E2.33})$$

を考えよう． 定理E.3より，この  $s_j(\varphi)$  は

$$s_j(\varphi) \equiv -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[ 1 - \left| \frac{(\text{T}\varphi, \text{T}\omega_j)}{\|\text{T}\varphi\| \cdot \|\text{T}\omega_j\|} \right|^2 \right] \quad (\text{E2.34})$$

と再表現できる． 明らかに，

$$\forall j \in J, s_j(\omega_j) = \infty \quad (\text{E2.35})$$

$$\forall i \in J - \{j\}, 0 \leq s_j(\omega_i) < \infty \quad (\text{E2.36})$$

が成り立っており，  $s_j(\varphi)$  は，パターンモデル  $\text{T}\varphi$  が自己のカテゴリ  $\mathcal{C}_j$ の代表パターン  $\omega_j$ のモデル  $\text{T}\omega_j$ と似ている程度を表していると考えることができる．  $\text{SM}(\varphi, \omega_j)$ を

$$\begin{aligned}
& \text{SM}(\varphi, \omega_j) = \\
& \begin{cases} s_j(\varphi) / \sum_{k \in J} s_k(\varphi) \cdots \cdots \sum_{k \in J} s_k(\varphi) > 0 \text{のとき} \\ p(\mathcal{C}_j) \cdots \cdots \sum_{k \in J} s_k(\varphi) = 0 \text{のとき} \end{cases}
\end{aligned} \quad (\text{E2.37})$$

と定義すると，次の定理E.5が成り立つ．

[定理E.5] (自己のカテゴリから眺めた， axiom 2を満たす類似度関数SMの構成定理)

式(E2.37)のように定義された式(E2.19)の関数SMは axiom 2を満たす．

(証明) axiom 2の(i)，(ii)，(iii)の成立を示す．

(i) (正規直交性)の成立： 式(E2.27)の成立を示そう．  $\varphi = \omega_j$ とおくと，

$$\begin{aligned}
& \forall j \in J, \text{SM}(\varphi, \omega_j) \\
&= s_j(\varphi) / [s_j(\varphi) + \sum_{k \in J - \{j\}} s_k(\varphi)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1/[1 + \sum_{k \in J - \{j\}} s_k(\varphi)/s_j(\varphi)] = 1/[1 + 0] \quad \because \text{2式 (E2.35), (E2.36)} \\
&= 1 \\
&\forall i \in J - \{j\}, \text{SM}(\varphi, \omega_i) \\
&= s_i(\varphi)/[s_j(\varphi) + \sum_{k \in J - \{j\}} s_k(\varphi)] \\
&= \text{有限}/[\infty + \text{有限}] \quad \because \text{2式 (E2.35), (E2.36)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

を得，示された。

(ii) (規格化条件)の成立：式(E2.30)の成立はSMの定義式(E2.37)より明らかである。

(iii) (T-不変性)の成立：

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, s_j(T\varphi) = s_j(\varphi) \quad \because \text{式 (E2.34)}$$

がaxiom 1の(iii)，後半  $T \cdot T = T$ より知れ，よって，

$$\begin{aligned}
&\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \\
&\text{SM}(T\varphi, \omega_j) = \text{SM}(\varphi, \omega_j) \tag{E2.38}
\end{aligned}$$

を得，示された。

### 付録F. パターン変換作用素 $A_k$ の組 $\{A_k \mid k \in L\}$ を用いた特徴抽出法

総和条件

$$I = \sum_{k \in L} A_k \tag{F.1}$$

を満たすパターン変換作用素  $A_k$ の組

$$\{A_k \mid k \in L\} \tag{F.2}$$

を用意する。この組を使い，特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \rightarrow \mathbb{R} \text{ (実数全体の集合)} \tag{F.3}$$

を構成しよう。  $u(\varphi, k)$  はパターン  $\varphi \in \Phi$  から抽出される第  $k \in L$  番目の実数値特徴量である。規格化内積(normalized inner product)  $nip(\varphi, \eta)$  を

$$\begin{aligned}
&nip(\varphi, \eta) = \\
&\begin{cases} (\varphi, \eta) / [\|\varphi\| \cdot \|\eta\|] \cdots \|\varphi\| \cdot \|\eta\| > 0 \text{ のとき} \\ 0 \cdots \cdots \cdots \|\varphi\| \cdot \|\eta\| = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{F.4}
\end{aligned}$$

と，定義する。  $u(\varphi, k)$  を，

$$\begin{aligned}
&u(\varphi, k) = \\
&\begin{cases} \log_e 1 / [1 - |nip(T\varphi, A_k T\varphi)|^2]^{1/2} \cdots \|T\varphi\| \cdot \|A_k T\varphi\| > 0 \text{ のとき} \\ 0 \cdots \cdots \cdots \|T\varphi\| \cdot \|A_k T\varphi\| = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{F.5}
\end{aligned}$$

と定義する。特徴軸の番号集合  $L$  を，

$$L = \{-n, -(n-1), \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, n, n+1\} \tag{F.6}$$

とし，  $A_{n+1}$  を

$$A_{n+1} \equiv I - \sum_{k=-n}^{-1} A_k - \sum_{k=1}^n A_k \tag{F.7}$$

と設定すれば，パターン変換作用素  $A_k$ の組(F.2)は総和条件式(F.1)を満たすことがわかる。

例えば，第  $k \in L$  番目のパターン変換作用素  $A_k$  は，

$$(A_k \varphi)(x_1, x_2) = \varphi(x_1 - k, x_2 - k) \quad (\text{F.8})$$

と導入できる.

以上は、参考文献

小野敦史：“Zernikeモーメントを用いた顔画像認識”，電子情報通信学会誌D-II, vol.J85-

D-II, no.7, pp.1149-1156, July 2002

での研究から、刺激を得ている.

## 付録G. 距離関数dの変換

$\Phi$  を処理の対象とする問題のパターン  $\varphi$  の集合とし、 $\varphi, \eta, \psi \in \Phi$  とする.

4性質

$$(i) d(\varphi, \varphi) = 0 \text{ (反射性)} \quad (\text{G.1})$$

$$(ii) \varphi \neq \eta \text{ ならば } d(\varphi, \eta) > 0 \text{ (正值性)} \quad (\text{G.2})$$

$$(iii) d(\varphi, \eta) = d(\eta, \varphi) \text{ (対称性)} \quad (\text{G.3})$$

$$(iv) d(\varphi, \psi) \leq d(\varphi, \eta) + d(\eta, \psi) \text{ (3角不等式)} \quad (\text{G.4})$$

を満たす距離関数

$$d : \Phi \times \Phi \rightarrow \mathbf{R}^+ \text{ (非負実数全体の集合)} \quad (\text{G.5})$$

が存在するとしよう. 次の定理G.1は、から今1つの距離関数  $d^*$  を得ることができ、無数に上述の4性質 (i) ~ (iv) を満たす距離関数が存在することがわかる. 尚、距離関数  $d$  を使えば、例えば、簡単には、

$$SM(\varphi, \omega_j) = d(T\varphi, T\omega_j)^{-1} / \sum_{i \in J} d(T\varphi, T\omega_i)^{-1} \quad (\text{G.6})$$

と、axiom 2(付録A, A3章)を満たす式(A3.5)の類似度関数SMを構成可能なことに注意しておく.

次の定理G.1は、距離関数  $d$  から今1つの距離関数  $d^*$  を得る手段を与えている.

[定理G.1] (距離関数の変換定理)

3性質

$$(イ) f(0) = 0 \text{ (零不動点性)} \quad (\text{G.7})$$

$$(ロ) df(u)/du > 0 \text{ (fは単調増加)} \quad (\text{G.8})$$

$$(ハ) d^2 f(u)/du < 0 \text{ (fは上に凸)} \quad (\text{G.9})$$

を満たす関数

$$f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+ \quad (\text{G.10})$$

の下で、

$$d^*(\varphi, \eta) = f(d(\varphi, \eta)) \quad (\text{G.11})$$

と定義される関数

$$d^* : \Phi \times \Phi \rightarrow \mathbf{R}^+ \quad (\text{G.12})$$

は、4性質 (i) ~ (iv) を満たし、距離関数である.

[定理G.1の系1]

$$d^*(\varphi, \eta) = \log_e(1 + d(\varphi, \eta)) \quad (\text{G.13})$$

と定義される式(G.12)の関数  $d^*$  は、4性質 (i) ~ (iv) を満たし、距離関数である.  $\square$

本定理G.1を証明する前に次の補助定理を証明しておく.

[補助定理G.1]

$$0 \leq u_1, 0 \leq u_2 \text{ のとき, } f(u_1 + u_2) - f(u_1) \leq f(u_2) - f(0) \quad (\text{G.14})$$

が性質(ハ)から成立し, よって, 性質(イ)から

$$f(u_1 + u_2) \leq f(u_1) + f(u_2). \quad (\text{G.15})$$

(証明)  $b \geq a$  とすると, 性質(ハ)より,

$$(u = b \text{ のときの } df(u)/du) \leq (u = a \text{ のときの } df(u)/du) \quad (\text{G.16})$$

が成り立つ. よって,

$$\Delta u > 0 \text{ について, } [f(b + \Delta u) - f(b)]/\Delta u \leq [f(a + \Delta u) - f(a)]/\Delta u \quad (\text{G.17})$$

$$\therefore f(b + \Delta u) - f(b) \leq f(a + \Delta u) - f(a) \quad (\text{G.18})$$

が成立する. また,  $\Delta u = 0$  の場合も式(G.18)が成立することがわかる. よって, 正整数  $n$  を十分大きくとり, 各  $\Delta u_k (\geq 0)$  を十分小さくとり,  $u_2$  を

$$u_2 = \sum_{k=1}^n \Delta u_k \quad (\text{G.19})$$

と分解すると,

$$f(u_1 + u_2) - f(u_1) = f(u_1 + \sum_{k=1}^n \Delta u_k) - f(u_1) \quad (\text{G.20})$$

$$= f(u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta u_k + \Delta u_n) - f(u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta u_k)$$

$$+ f(u_1 + \sum_{k=1}^{n-2} \Delta u_k + \Delta u_{n-1}) - f(u_1 + \sum_{k=1}^{n-2} \Delta u_k)$$

+ ...

$$+ f(u_1 + \Delta u_1 + \Delta u_2) - f(u_1 + \Delta u_1)$$

$$+ f(u_1 + \Delta u_1) - f(u_1) \quad (\text{G.21})$$

$$\leq f(\sum_{k=1}^{n-1} \Delta u_k + \Delta u_n) - f(\sum_{k=1}^{n-1} \Delta u_k)$$

$$+ f(\sum_{k=1}^{n-2} \Delta u_k + \Delta u_{n-1}) - f(\sum_{k=1}^{n-2} \Delta u_k)$$

+ ...

$$+ f(\Delta u_1 + \Delta u_2) - f(\Delta u_1)$$

$$+ f(\Delta u_1) - f(0)$$

$$= f(\sum_{k=1}^{n-1} \Delta u_k + \Delta u_n) - f(0) \quad (\text{G.23})$$

$$= f(u_2) - f(0) \quad \therefore \text{式(G.19)}$$

を得, 不等式(G.14)の証明が終わる. □

(定理G.1の証明)

$$(i) \text{ の成立: } d^*(\varphi, \varphi) = f(d(\varphi, \varphi))$$

$$= f(0) \quad \therefore \text{性質(i)}$$

$$= 0. \quad \therefore \text{性質(イ)}$$

(ii) の成立: 性質(ii)より,  $\varphi \neq \eta$  ならば  $d(\varphi, \eta) > 0$  であり,

2性質(イ), (ロ)より

$$u. > 0 \text{ ならば, } f(u) > 0 \quad (\text{G.24})$$

が成立しているから,

$$d^*(\varphi, \eta) = f(d(\varphi, \eta)) > 0$$

が成り立つことがわかる.

$$(iii) \text{ の成立: } d^*(\varphi, \eta) = f(d(\varphi, \eta))$$

$$= f(d(\eta, \varphi)) \quad \therefore \text{性質(iii)}$$

$$=d^*(\eta, \varphi).$$

(iv)の成立:  $d(\varphi, \psi) = f(d(\varphi, \psi))$

$$\leq f(d(\varphi, \eta) + d(\eta, \psi)) \quad \because \text{2性質(iv)}, (\square)$$

$$\leq f(d(\varphi, \eta)) + f(d(\eta, \psi)). \quad \because \text{式(G.15)} \quad \square$$

(定理G.1の系1の証明)

$$f(u) = \log_e(1+u)$$

の場合であり, 3性質

$$(イ) f(0) = \log_e(1+0) = 0 \text{ (零不動点性)}$$

$$(ロ) df(u)/du = [1+u]^{-1} > 0 \text{ (fは単調増加)}$$

$$(ハ) d^2 f(u)/du^2 = -[1+u]^{-2} < 0 \text{ (fは上に凸)}$$

を満たしている. ちなみに,

$$\log_e(1+u) > 0 \quad \text{if } u > 0$$

であり,

$$\log_e(1+u_1+u_2)$$

$$\leq \log_e(1+u_1+u_2+u_1 \cdot u_2)$$

$$= \log_e[(1+u_1) \cdot (1+u_2)]$$

$$= \log_e(1+u_1) + \log_e(1+u_2)$$

である. □

以上は, 参考文献

エリ・ベ・カントロヴィチ, ゲ・ベ・アキロフ: “ノルム空間の関数解析 I”, 東京図書株式会社,  
山崎三郎・柴岡泰光訳, Dec.1964

が刺激になっている.

## 付録H. Axiom 2を満たす類似度関数SMの1対1単調変換

Axiom 2(付録A, A3章)を満たす類似度関数

$$SM: \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \quad (\text{H.1})$$

を, 今1つの関数系

$$s_j: \Phi \rightarrow \{s \mid -\infty \leq s \leq \infty\} \quad (\text{H.2})$$

へと変換しよう. 但し, 次の3条件(イ), (ロ), (ハ)を満たすように変換するものとする:

(イ) 単調性

$$SM(\varphi, \omega_j) \leq SM(\eta, \omega_j) \Leftrightarrow s_j(\varphi) \leq s_j(\eta) \quad (\text{H.3})$$

(ロ) (逆変換  $F_j^{-1}$  の存在) 等式

$$SM(\varphi, \omega_j) = F_j(s_j(\varphi)), j \in J \quad (\text{H.4})$$

を満たす  $s_j(\varphi)$  は一意的に存在して,

$$s_j(\varphi) = F_j^{-1}(SM(\varphi, \omega_j)), j \in J \quad (\text{H.5})$$

と書ける.

(ハ)  $\forall j \in J$

$$SM(\varphi, \omega_j) = 0 \Leftrightarrow s_j(\varphi) = -\infty \quad (\text{H.6})$$

$$\text{SM}(\varphi, \omega_j) = 2^{-1} \Leftrightarrow s_j(\varphi) = m_j \quad (\text{H.7})$$

$$\text{SM}(\varphi, \omega_j) = 1 \Leftrightarrow s_j(\varphi) = +\infty \quad (\text{H.8})$$

□

$$\text{境界条件 } \text{SM}(\varphi, \omega_j) |_{s_j(\varphi)=-\infty} = 0 \quad (\text{H.9})$$

の下で，微分方程式系

$$d\text{SM}(\varphi, \omega_j)/ds_j(\varphi) = [1/\sqrt{2\pi\sigma_j^2}] \cdot \exp[-\{s_j(\varphi) - m_j\}^2], \quad j \in J \quad (\text{H.10})$$

を考えよう．ここに， $\sigma_j, m_j$  は Gauss 分布の標準偏差 ( $> 0$ )，平均値である．この微分方程式系 (H.10) の解  $\text{SM}(\varphi, \omega_j), j \in J$  は

$$\begin{aligned} \text{SM}(\varphi, \omega_j) &= [1/\sqrt{2\pi\sigma_j^2}] \cdot \int_{-\infty}^{s_j(\varphi)} dz \exp[-(z - m_j)^2/(2\sigma_j^2)] \\ &= F_j(s_j(\varphi)) \end{aligned} \quad (\text{H.11})$$

と求められる．これが式 (H.4) である． $F_j$  の逆写像  $F_j^{-1}$  は存在するから， $s_j(\varphi)$  は式 (H.5) のように書ける．

ここで，変数

$$q = \frac{z - m_j}{\sigma_j} \quad (\text{H.12})$$

を導入すると，式 (H.11) は

$$\text{SM}(\varphi, \omega_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{|s_j(\varphi) - m_j|/\sigma_j} dq \exp\left\{-\frac{q^2}{2}\right\} \quad (\text{H.13})$$

と書ける．

(著者 鈴木昇一，論文題目 パターン情報処理による非単調推論の取り扱い，文教大学情報学部情報学部情報研究no.29 投稿論文，投稿年月日2003年2月19日(水))

