# 共役勾配法の一般解における直交系の３応用（画像復元，パターンモデルの構成，パターン集合の情報理論的次元）

鈴木　昇一

# Three Applications of an Orthogonal System Appeared on a General Solution of a Conjugate Gradient Method (Image Restoration, a Construction of Pattern-Models and an Information-Theoretic Dimension of a Set of Patterns)

Shoichi Suzuki

## あらまし

処理対象とするパターンから抽出された各特徴量を直交展開係数に持つ１次形式を求めれば，この得られた１次形式の規格化が，原パターンの持つ情報構造を簡単化したパターンモデルになっているという“パターンモデル構成原理”が説明されている．その後，線形方程式 $AX = \vec{b}$ の解法としての，有限次元か対称行列の場合に関し適用可能な従来の共役勾配法を，$A$ が一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ で稠密な定義域を備え，無限次元であっても良い閉作用素の場合に拡張する．このような拡張は，本研究で初めてなされたと思われる．この拡張に伴い，得られた２種類の直交系を介し，これまでの２種類のパターンモデルに加えて，新たに，２種類のパターンモデルが構成される．得られたパターンモデルのユニタリ座標変換不変性・共変性を，これまでの研究とは異なり，パターンモデルの構成に使われる直交系が完全であるとは限らない場合で証明し，更に，“the computational complexity of the pattern and the set of patterns”としての，パターン，並びに，パターン集合のエントロピー，情報理論的次元を，これまでの研究とは異なり，抽出された特徴量の組がその絶対値の自乗の総和が１とは限らない場合に拡張・定義した．不完全性を備えた特徴抽出方法を採用することが，冗長性が排除され，対雑音性があるユニタリ座標変換不変性を備えた，“パターンモデル”が得られる理由であることが明らかにされている．本パターンモデル構成法は，任意の直交系に対し適用可能であり，採用した直交系に特有なパターン認識の働きが，S. Suzukiの提案した最大類似度法，多段階想起不動点探索形構造受精認識法を適用すれば得られることが指摘される．
有効な３応用として
Ⅰ．一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ で，原画像を復元する方法（推論の働きの最適化）（4.1, 4.2両節の２定理1, 2）
Ⅱ．共役勾配法の一般解における直交系を使って，一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ で，S. Suzukiのパターンモデル［B3］，［B4］を構成する方法（知覚・記憶の働きの最適化）（4.3節，６章，付

録２）

Ⅲ．共役勾配法の一般解における直交系を使って，パターン集合の複雑さを反映するようなパターン集合の情報理論的次元［A22］の定義（付録３）

が論じられている．

**キーワード**

ヒルベルト空間　共役勾配法　直交系　パターンモデル　画像復元　エントロピー　情報理論的次元　最大類似度法　多段階想起不動点探索形構造受精認識法

## Abstract

A principle for constructing a corresponding model of a pattern to be processing in question is explained. The principle is as follows: The model is a nonlinear form having as the features extracted from the pattern their normalized quantities about linear expansion coefficients obtained by using an orthogonal system.

A so-called conventional conjugate gradient method can aid a great deal in searching for a solution $X$ of a linear equation $AX = \vec{b}$ in which $A$ is a finite dimensional operator or a symmetric matrix. The conventional conjugate gradient method is extended to the case of that $A$ is a linear closed operator having a dense domain on an abstract Hilbert space $\mathfrak{H}$. This extension presented here has never been done by the other researchers. S. Suzuki priviously proposed two kinds of pattern-model. We suggest two new kinds of pattern-model with the help of two kinds of orthogonal system obtained in the midst of solving $AX = \vec{b}$ by the conjugate gradients. A unitary invariance and a unitary covariance concerning the pattern-model are proven provided that the orthogonal system is not complete unlike thus far. We can define an entropy and an information-theoretic dimension which are both regarded as two good measures of a computational complexity of the pattern and the set of patterns. This definition is an extension of the privious S.Suzuki's paper where a total sum of squares of absolute values of feateres extracted from the pattern is 1. It is made clear that a corresponding model of an input pattern obtained here is a pattern such that redundancy is eliminated from the input pattern and the model is strong against noise and remains invariant under unitary transformations whenever an incomplete feature-extracting method is adopted. The method of constructing models is applicable to any orthogonal system. We shall point out that a pattern-recognition technique inherent in the adopted orthogonal system is ensured to a method of maximum similarity or a recognition of searching for a fixed-point of structural fertulization through a multi-stage association proposed by S.Suzuki.

We discuss the following three effective applications:

Ⅰ. A method of restoring the original image in an abstract Hilbert space $\mathfrak{H}$ (an optimazation of an act of inferring) (two theorems 1 and 2 in two paragraphs 4.1 and 4.2)

Ⅱ. A method of constructing a corresponding model [B3]. [B4] of an original pattern in an abstract Hilbert space $\mathfrak{H}$ proposed by S.Suzuki with the help of two kinds of orthogonal system obtained in the midst of solving $AX = \vec{b}$ by the conjugate gradients (an optimization of acts of perception and memorization) (paragraph 4.3, chapter 6 and appendix 2)

Ⅲ. An information-theoretic dimension which can reflect a good measures of a computational complexity of the pattern and the set of patterns with the help of two kinds of orthogonal system obtained by the conjugate gradients (appendix 3)

**Key Words:** Hilbert space conjugate gradient method orthogonal system pattern-model image-restoration entrpy information-theoretic dimension method of maximum similarity recognition method of searching for a fixed-point of structural fertilization through a multi-stage association

## 1. まえがき

知能システム（intelligent systems）とは，知覚・記憶・推論・学習の働きなどに関し，最適化アルゴリズム（optimization algorithms）が内蔵されたシステムといえるかもしれない．

最適化アルゴリズムには，変分法，最大制御原理，動的計画法，山登り探索法，線形計画法，分岐限定法，誤差逆伝播学習法，焼きなまし探索法，進化的プログラミング，遺伝的アルゴリズム，遺伝的プログラミング，人工生命の進化理論などがある［A42］．その内の山登り法（hill-climbing method）には，最急降下法，最適勾配法，共役勾配法，Newton-Raphson法などがある．

本論文では，従来の共役勾配法（method of a conjugate gradient）を一般化し，その 3 つの応用が研究される．つまり，線形方程式 （連立 1 次方程式）

$$AX = \vec{b} \tag{1.1}$$

の解法としての，有限次元の対称行列の場合に関し適用可能な従来の共役勾配法を，作用素$A$が稠密な定義域を備え，無限次元であっても良い可分な（separable）一般抽象ヒルベルト空間（Hilbert space）$\mathfrak{H}$での閉作用素の場合に拡張する．このような拡張は他の研究に類を見ない．また，有効な応用として

Ⅰ. 一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ で，原画像を復元する方法（推論の働きの最適化）（4.1, 4.2両節の 2 定理1, 2）

Ⅱ. 共役勾配法の一般解における直交系を使って，一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ で，S. Suzukiのパターンモデル［B3］,［B4］を構成する方法（知覚・記憶の働きの最適化）（4.3節， 6 章，付録 2 ）

Ⅲ. 共役勾配法の一般解における直交系を使って，パターン集合の複雑さを反映するようなパターン集合の情報理論的次元［A22］の定義（付録 3 ）

の 3 つが論じられる．

本研究内容は抽象的なので，理解を容易にするために，従来の共役勾配法を簡単に，以下に説明しておこう．

実ベクトル$X \in R^n$ （n次元ユークリッド空間）を変数とする 2 次形式

$$y = F(X) = X^t AX + \vec{b}^t X + c \tag{1.2}$$

の最小値を求めることを考えよう．$X^t$ は列ベクトル$X$の転置行列である．

直交関係

$$Z_i^t AZ_j = (AZ_j, Z_i) = (Z_j, Z_i)_A = 0 \, (i \neq j) \tag{1.3}$$

を満たすという意味で直交している直交系$\{Z_i\}_{i=1\sim n}$を求める．ここで,

$$(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \tag{1.4}$$

ここに，各$x_i$, $y_i$ ($i = 1,2,\cdots,n$) は実定数であり，

$X = col\ (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$（列ベクトル） (1.5)

$Y = col\ (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)$ (1.6)

と定義される 1 次形式$(X, Y)$は$R^n$の内積であり，

$(X, Y)_A \equiv \sum_{i=1}^{n} (AX)_i \cdot y_i$， ここに，$(AX)_i$は列ベクトル$AX$の第 i 成分 (1.7)

も，

$A$が正値行列であれば，

$AX_2 = 0$を満たす$X = X_1 + X_2$と$X' = X_1$とを同一視する (1.8)

と考えれば，内積の性質を備えている．

さて，列ベクトル$X$を式（1.3）の直交関係を備えた 1 次独立な系$\{Z_i\}_{i=1\sim n}$を使い，

$$X = \sum_{j=1}^{n} a_j Z_j \tag{1.9}$$

と表すと，式（1.2）の 2 次形式$F(X)$は

$$g_i(a_i) = a_i^2 Z_i^t A Z_i + a_i \vec{b}^{\,t} Z_i \tag{1.10}$$

を導入して，

$$y = F(X) = \sum_{i=!}^{n} g_i(a_i) + c \tag{1.11}$$

と表されることが，直交式（1.3）よりわかる．式（1.2）の 2 次形式$F(X)$の最小値$y_{\min}$は，

$$y_{\min} = \sum_{i=1}^{n} \min_{a_i} g_i(a_i) + c \tag{1.12}$$

と，明らかに n 回の探索で求まる．各最小値

$$\min_{a_i} g_i(a_i) \tag{1.13}$$

を求める各探索で問題となるのは，式（1.3）の直交関係を備えた 1 次独立な系$\{Z_i\}_{i=1\sim n}$を決定する方法である．従来の共役勾配法では，次のように決定する．

第 i 番目の関数

$$g_i(g_{1i}, g_{2i}, \cdots, g_{ni}) \tag{1.14}$$

の第$j\ (= 1, 2, \cdots, n)$成分$g_{ji}$を

$$g_{ji} = \frac{\partial F(X)}{\partial x_i} |x_1 = x_{1i}, x_2 = x_{2i}, \cdots, x_n = x_{ni} \tag{1.15}$$

と定め，第$i\ (= 1, 2, \cdots, n)$番目の探索点を位置ベクトル

$$X_i = X_i(x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{ni}) \tag{1.16}$$

で表す．初期値を

$$Z_0 = g_0 \tag{1.17}$$

と設定し，$F(X_i + q \cdot Z_i)$を最大にする$q$が$q_i$であるとして，$X_{i+1}$を

$$X_{i+1} = X_i + q_i \cdot Z_i,\ i = 0, 1, 2, \cdots \tag{1.18}$$

$$Z_{i+1} = Z_i + |g_i / g_{i+1}|^2 \cdot g_{i+1},\ i = 0, 1, 2, \cdots \tag{1.19}$$

と決定することになる．

Ⅰ．の画像復元手法（method of bringing back to a former image, image-restoration method）について簡単に説明しておこう．ノルム

$$\|X\| = \sqrt{(X, Y)} \tag{1.20}$$

を導入する．

$B, \vec{c}$ が与えられたとする．原画像 $X$ が行列 $B$ によって

$$\vec{c} = BX \text{（観測方程式）} \tag{1.21}$$

に変形され，列ベクトル $\vec{c}$ が観測されたとしよう．

$$\|BX - \vec{c}\|^2 = (BX, BX) - 2 \cdot (BX, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{c}) \to \min \tag{1.22}$$

ならしめる $X$ を原画像とみなせばよいだろう．$B^*$ を $B$ の共役作用素として，$A, \vec{b}, c$ を

$$A = B^*B,\ \vec{b} = -2 \cdot B^*\vec{c},\ c = (\vec{c}, \vec{c}) = \|\vec{c}\|^2 \tag{1.23}$$

とおけば，式（1.22）の $\|BX - \vec{c}\|^2$ は式（1.2）の 2 次形式 $F(X)$ に一致するから，上述の共役勾配法を適用して，原画像 $X$ が求まり，復元される．

Ⅱ．のパターンモデル $TX$ の構成法（method of constructing a corresponding model of an original pattern）について説明しておこう．$TX$ の形式は，パターン $X$ から抽出される第 $i = (1, 2, \cdots, n)$ 番目の特徴量 $u(X, i)$ と，式（1.3）の直交関係を備えた 1 次独立な系 $\{Z_i\}_{i=1\sim n}$

$$TX = \sum_{i=1}^{n} u(X, i) \cdot Z_i \tag{1.24}$$

であり，パターン $X$ から抽出される第 $i = (1, 2, \cdots, n)$ 番目の特徴量 $u(X, i)$ としてパターン $X$ の，式（1.9）による展開については，例えば，

$$u(X, i) = \frac{a_i}{\sup_{j=1\sim n} |a_j|},\ i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.24}$$

と定めれば，パターン $X$ に対応する式（1.24）のパターンモデル $TX$ はS. Suzukiの理論（SS理論）のaxiom 1の（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）の 3 後半，並びに（ⅳ）を満たす．

Ⅲ．式（1.3）の直交関係を備えた 1 次独立な系 $\{Z_i\}_{i=1\sim n}$ を使って，パターン集合 $\Phi_B$ のエントロピー $ETPY(\Phi_B)$ を定義し，その指数関数として，パターン集合 $\Phi_B$ の情報理論的次元

$$DIM(\Phi_B) \equiv \exp(ETPY(\Phi_B)) \tag{1.25}$$

を定義する．

## 2.　本研究内容の再論

本章では，可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ において，共役勾配法の一般解を求める方法の意義を明らかにするため，その一般解が画像復元に応用でき，一般解に登場する直交系をパターンモデルの構成に応用可能な事実が指摘される．

### 2.1　可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ における画像復元とパターンモデル $T\varphi$

内積，ノルムを各々，$(\varphi, \eta) \in Z$（複素数の全体），$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \in R$（実数の全体）とする可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ において，$\mathrm{Domain}(A)^a = \mathfrak{H}$ なる閉線形作用素 $A$ を考える．ここに，$Z, R$ は各々複素数全体の集合，実数全体の集合である．

本論文では，可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ において，共役勾配法の一般解を求める方法が研究される．その結果，その一般解を画像復元に応用し，一般解に登場する直交系をパターンモデルの構成に応用する．

パターン $\varphi$ の表現空間は $\mathfrak{H}$ であるとする．つまり，$\varphi \in \mathfrak{H}$ であるとする．

可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ が,

$$(\varphi, \eta) = (\eta, \varphi) \text{ for any } \varphi, \eta \in \mathfrak{H} \tag{2.1}$$

が成り立つという意味で，実ヒルベルト空間であるとしよう．このとき，$\mathfrak{H}$ が $n$ 次元ユークリッド空間 $R^n$ の場合には文献［A5］で示されている次の補助定理2.1が証明され，式（2.4）の 2 次汎関数 $F(X)$ の 1 次微分，2 次微分の密度が各々，

$$A^*A\varphi - \eta,\ A^*A \tag{2.2}$$

と求まることが，テーラー展開との対応から判る．式（2.5）に登場している Domain $(A)$ は，

$$\text{Domain}(A) = \{\varphi \| \|A\varphi\| < \infty\} \subseteq \mathfrak{H} \tag{2.3}$$

と定義される作用素の定義域である．

［補助定理2.1］

$\mathfrak{H}$ が可分な一般抽象実ヒルベルト空間であるとする．この時，固定した $\eta \in \mathfrak{H}$ と，固定した実定数 $c$ とを用意して定義される 2 次実汎関数

$$F(X) = 2^{-1} \cdot (A^*AX, X) - (X, \eta) + c,\ X \in \mathfrak{H} \tag{2.4}$$

について，

$$\begin{aligned} &F(\varphi + (\delta\psi)) \\ &= F(\varphi) + (A^*A\varphi - \eta, (\delta\psi)) + 2^{-1} \cdot (A^*A(\delta\psi), (\delta\psi)) \\ &\text{for any } (\delta\psi) \in \text{Domain}(A). \end{aligned} \tag{2.5}$$

（証明）先ず，不等式

$$(A^*A\varphi, \varphi) = (A\varphi, A\varphi) = \|A\varphi\|^2 \geq 0 \quad \text{for any} \quad \varphi \in \text{Domain}(A) \tag{2.6}$$

が成立するから，

$$H \equiv A^*A \tag{2.7}$$

は正値自己共役」作用素である．実ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ では，$H$ が自己共役であるから，

$$(H(\delta\psi), \varphi) = ((\delta\psi), H\varphi) = (H\varphi, (\delta\psi)) \quad \because \quad H \text{ が自己共役} \tag{2.8}$$

$$((\delta\psi), \eta) = (\eta, (\delta\psi)) \tag{2.9}$$

が成立している．よって，

$$F(\varphi + (\delta\psi))$$

$$= 2^{-1} \cdot (H[\varphi + (\delta\psi)], \varphi + (\delta\psi)) - (\varphi + (\delta\psi), \eta) + c \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} &= 2^{-1} \cdot (H\varphi, \varphi), -(\varphi, \eta) + c \\ &+ 2^{-1} \cdot (H\varphi, (\delta\psi) + 2^{-1} \cdot (H(\delta\psi), \varphi) + 2^{-1} \cdot (H(\delta\psi), (\delta\psi)) - ((\delta\psi), \eta) \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$= F(\varphi) + (H\varphi, (\delta\psi)) - ((\delta\psi), \eta) + 2^{-1} \cdot (H(\delta\psi), (\delta\psi)) \tag{2.12}$$

$$= F(\varphi) + (H\varphi, (\delta\psi)) - (\eta, (\delta\psi)) + 2^{-1} \cdot (H(\delta\psi), (\delta\psi)) \tag{2.13}$$

$$= F(\varphi) + (H\varphi - \eta, (\delta\psi)) + 2^{-1} \cdot (H(\delta\psi), (\delta\psi)) \tag{2.14}$$

を得て，証明が終わった．　□

最適化は，2 次実汎関数 $F(x)$ の極小問題に帰着される場合が多い．

パターン $Y \in \mathfrak{H}$ が観測されたとき，観測方程式

$$AX = Y \tag{2.15}$$

の解 $X = \varphi \in \mathfrak{H}$ を求めるのが画像復元である．画像復元を 2 次汎関数

$$G(X) = \|AX - Y\|^2 = (A^*AX, X) - (X, 2 \cdot A^*Y) + \|Y\|^2 \tag{2.16}$$

の最小化と考えると，共役勾配法の一般化によって解ける．これが共役勾配法の一般解における直交系の応用応用Ⅰである．

今 1 つの応用を説明しよう．処理対象パターン$\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$は特徴抽出されると，パターン情報システの内でそのパターンモデル$T\varphi$に変容すると考えよう．式（2.7）の正値自己共役」作用素$H$の固有ベクトルの系（共役勾配法の一般解に登場する直交系）$\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$を用いて，パターンモデル

$$T\varphi = \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell) \cdot \psi_\ell \tag{2.17}$$

を構成する．$u(\varphi, \ell)$はパターンから抽出される第$\ell \in L$番目の特徴量であり，特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \to R \tag{2.18}$$

が導入されている．また，

$$T : \Phi \to \Phi \tag{2.19}$$

はモデル構成作用素と呼ばれる写像である．$\Phi\,(\subset \mathfrak{H})$，$R$は各々，処理の対象とするパターンの集合，実数全体の集合である．これが，共役勾配法の一般解における直交系の応用Ⅱである．

## 2.2　パターンモデル$T\varphi$と，画像復元との再論

### 2.2.1　パターンモデル$T\varphi$に課せられる 4 個の制約（イ）～（ニ）

処理対象とするパターン$\varphi \in \Phi$に対応して，1 次独立な系$\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$を用いて，その代りとなるパターンモデル$T\varphi$を得たい．それには，情報が必要である．その情報とは，処理対象パターン$\varphi \in \Phi$から抽出される特徴量の組である［A16］～［A18］．この考えで構築されているのがパターン認識の数学的理論［A40］であり，このようなパターンモデル構成法は著者の研究［A16］～［A46］を除いて存在していない．

本研究の目的は，$A, \vec{b}$を各々，既知の行列，、列ベクトルとした有限次元線形方程式（1.1）での解$X$を求める有効な 1 解法として知られている共役勾配法［A3］～［A9］を，(1) 可分な（separable）一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$で作用素論的に定式化・拡張し，合わせて，この結果得られた 1 次独立な系$\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$を用いて，(2) 処理の対象とするパターン$\varphi \in \Phi$の代りとなるという意味で，通常のパターン認識分野での正規化パターン（normalized pattern）に相当するパターンモデル［A16］～［A46］$T\varphi \in \Phi$を構成する方法を 4 種類説明した後，例えば，(3) パターン$\varphi \in \Phi$の情報理論的次元［A22］（information-theoretic dimension）$\mathrm{DIM}(\varphi)$などの，モデル$T\varphi \in \Phi$に関連した話題を論じることである．

本研究では，これまでどおり［A16］～［A46］，パターン$\varphi$とは，範疇（category）を付与可能なデータ，いわゆる，カテゴリカルデータ（categorical data）のことである．

$\Phi$を処理の対象とするパターン$\varphi$の集合としよう．$\Phi$は$\mathfrak{H}$のある部分集合であり，$\Phi$の決定法は，文献［A40］の第24部で説明されている．処理の対象とするパターン$\varphi \in \Phi$が，複素パラメータ$v_k \in Z$（複素数の集合），$k \in K$の組の関数$f$の形で，

$$\varphi = f(v_k, k \in K) \in \Phi \tag{2.20}$$

と表現出来たとしよう．多変数$y_k, k \in K$の関数$h_m(y_k, k \in K) \in Z$を用意しよう．パターン$\varphi \in \Phi$から抽出される第$\mathrm{m} \in L$番目の特徴量$u(\varphi, m)$が

$$u(\varphi, m) = h_m(v_k, k \in K) \tag{2.21}$$

と表わされる事態を考えよう．パターン$\varphi \in \Phi$の代りとなるパターンモデル$T\varphi \in \Phi$を，

$$T\varphi = Q(u(\varphi, m), m \in L) \in \Phi \tag{2.22}$$

と定めることが考えられる．用意される$h_m, m \in L$と，多変数関数$Q$の形式は，もとの関数$f$の構造から，ある制約の下で定めなければならない．

これまで，４個の制約（SS理論のaxiom 1の（ｉ），（ⅱ），（ⅲ）の３後半，並びに（iv））

（イ）（零元のT－不動点性）$T0 = 0$

（ロ）（正実定数倍についての自動的規格化性；self-scaling property）

$\forall \varphi \in \Phi, \mathrm{T}(a \cdot \varphi) = \mathrm{T}\varphi$

for any positive real number a

（ハ）（写像Tのベキ等性）$\forall \varphi \in \Phi, T(T\varphi) = T\varphi$

（ニ）（写像Tの非零性）$\exists \varphi \in \Phi, \mathrm{T}\varphi \neq 0$

を課して，各種のパターンモデル$\mathrm{T}\varphi$を提案してきた［A16］～［A46］．かくなる事態を，今少し詳細に説明しておくと，次のようになる．

内積が( , )と与えられる可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元$\psi_\ell$からなる系$\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$は，複素定数の組$\{a_\ell\}_{\ell \in L}$について，

$$\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell = 0 \Rightarrow \forall \ell \in L, a_\ell = 0 \tag{2.23}$$

を満たすという意味で，１次独立系とする．

１次独立な系$\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$を，これ以上分解出来ないという意味で、極小のa set of primitive shape-componentsとみなそう［A22］，［A42］，［A45］．そうすると，$\mathfrak{H}$の元としてのパターン$\varphi \in \Phi \subseteq \mathfrak{H}$は，

$$\forall \mathrm{k} \in \mathrm{L}, (\varphi_\perp, \psi_\mathrm{k}) = 0 \tag{2.24}$$

をみたす$\varphi_\perp \in \mathfrak{H}$が存在して，

$$\varphi = \sum_{k \in L} a_k(\varphi) \cdot \psi_k + \varphi_\perp \tag{2.25}$$

と，１次展開される事実を勘案し、“原始的なパターン形状成分”$\psi_\ell$の集合（基底）$\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$の，各特徴量

$$u(\varphi, m) = h_m(a_k(\varphi), k \in L) \tag{2.26}$$

を係数に持つ１次結合の形で，４個の制約（イ）～（ニ）を満たすように，式（2.22）のパターンモデル$T\varphi \in \Phi$の構造を具体的に，式（2.17）の形に設定し，問題としているパターン$\varphi \in \Phi$の構造を$T\varphi \in \Phi$として再生する方法を研究してきた．式（2.19）の写像$T$は，４個の制約（イ）～（ニ）を満たすとき，モデル構成作用素（model-construction operator）と呼ばれている［A22］，［A40］．

３式（2.20），（2.21），（2.22）は各々，３式（2.25），（2.26），（2.17）に対応している．

### 2.2.2　特徴抽出の不完全性

“一般に，自然概念の事物は，その概念を特徴づける特性の内の任意の幾つかを備えていれば，その概念の成員とみなされ，このような概念をポリモルファス（polymorphous）概念といい，その概念を定義する必要かつ十分な特性は存在しない”

という考えがある［A14］．この考えは，

“パターンはある概念（カテゴリ）の特徴の内，（任意の）任意の幾つかを備えていれば，そのカテゴリに帰属するものとみなされて良い”

という思想を，言い替えれば，

“カテゴリを定義する必要かつ十分な“パターンから抽出される特徴量の組”は存在しなくても良い”

という“パターン認識分野での特徴抽出の働きの設定”を容認することになる［A46］．

特徴抽出写像

$u : \Phi \times L \to Z$（複素数全体の集合） (2.27)
の決め方について，いろいろな手法［A40］がある．

上述の容認された特徴抽出の働きを実現するものとして，特徴抽出写像
$u : \Phi \times L \to R^{+}$（非負実数全体の集合） (2.28)
の構造を，

“測度的ユニタリ不変量
$|(\varphi\|\varphi\|-1, \psi_k\|\psi_k\|^{-1}|^2$ (2.29)
はパターン$\varphi \in \mathfrak{H}$が部分的に，第$k \in L$番目のパターン形状素$\psi_k$の状態にあることの確率である”という“確率論的物理解釈”の採用の下で，決める研究［A16］～［A46］がある．この測度的ユニタリ不変量特徴抽出技術では，

“直交展開係数$a_k(\varphi)$のphaseを捨て去って得られる規格化値
$|a_k(\varphi)|^2 / \sum_{k \in L} |a_k(\varphi)|^2$ (2.30)
は，パターン$\varphi \in \Phi$が部分的に$\psi_k$の状態にあることの確率である”
と解釈され，この確率に比例する量$|a_k(\varphi)|^2$を使い，式（2.21）で定義される式（2.27）の特徴抽出写像$u : \Phi \times L \to Z$を，式（2.28）のごとく，
$u(\varphi, k) = h_k(|a_\ell(\varphi)|^2, \ell \in L) \in R^{+}$ (2.31)
と考え直しており，抽出された特徴量を用いて，処理対象とするパターン$\varphi \in \Phi$の帰属するカテゴリを決定するという認識方法では，

“２つのパターンは似ていれば、同一の特徴量を備え，２つのパターンは同一のカテゴリに帰属することになるが，同一カテゴリに帰属しているあるいは同一特徴量を備えている２つのパターンは似ているとは限らない（特徴抽出写像$u$の不完全性）”
ということを前提としていることになる．

人間の内耳にある蝸牛基底膜の有毛神経細胞は複数個の固有振動数を持ち，そこでは，音波が周波数分析されているといわれている．そして，有毛神経細胞は固有の波長のみに反応し，音波の絶対的な位相（phase）の違いを分析しないといわれている．つまり，音声についての聴覚は，音波に含まれる周波数成分の強度（パワースペクトル）が同じであれば，同じように知覚する機能を持っている．式（2.31）でいう特徴抽出写像$u$は，パターン$\varphi \in \Phi$の，原始的なパターン形状成分の組である１次独立な系$\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$による展開式（2.25）の１次結合係数$a_k(\varphi)$そのものではなくphaseを捨てた$|a_k(\varphi)|^2$の関数値$h_k(|a_\ell(\varphi)|^2, \ell \in L)$を抽出しており，パターン$\varphi \in \Phi$のパワースペクトル（の１種）を抽出していることに対応している．

### 2.3　想起認識，連想形記憶，ヒルベルト空間上で稼動するニューラルネットに使われるパターンモデル$T\varphi$

本論文では、上述の直交展開式（2.25）に関連し，パターン$\varphi \in \Phi$の近似モデル$T\varphi \in \Phi$が新たに，２種類提案される．説明される４種類の内，１つの種類はもう既に．エントロピーモデル［A22］の簡易化物として，文献［A42］で提案されており，残りの１種類は不動点探索形連想認識の働きの設定に用いられている［A41］．

上記の2.2.1項の４性質（イ）～（ニ）を満たし、ある１つの自己共役作用素$H$と可換な任意のユニタリ座標変換$U$の下で不変性を備えているパターンモデル$T\varphi \in \Phi$は既に３種類（２元的特徴抽出パ

ターンモデル［A16］,［A17］,［A45］, 連続的特徴抽出パターンモデル［A18］, エントロピーモデル［A22］）提案されており, 2 文献［A16］,［A17］での 2 元的特徴抽出パターンモデル $T\varphi \in \Phi$ に関しては, パターン構造の再生［A21］,［A25］,［A29］,［A33］, パターン認識［A28］,［A34］,［A35］, パターン系列の連想［A30］,［A31］に関し計算機シミュレーション済みであり, その応用, 並びに一部の効果は確認済みである. 本研究で説明される 4 種類のパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ についても, 同様な応用が可能であり, 同様な効果を備えていると, 考えることが出来る.

更に, 上記の 4 性質（イ）～(ニ) を満たすパターンモデル構成作用と呼ばれる式（2.19）のこの種の写像 $T$ を使えば, 2 元的特徴抽出パターンモデル, 連続的特徴抽出パターンモデル, エントロピーモデルを出力する写像と同様に, n 次元ユークリッド空間 $R^n$ での従来のニューラルネットの拡張となっている可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ で動作可能なニューラルネットが得られ［A30］,［A31］,［A37］,［A40］,［A41］,［A44］, 例えば, 同一のカテゴリに帰属する物体が多数の視点から様々に見え, 1 つのカテゴリ（category；類概念）に対してさえ, 複数個の代表パターンを用意しておかねばならないアスペクト（aspects；物体の見え方）認知情報処理［A15］に適するような“content addressable memory” が可能になり, 従来のニューラルネットの近似法, そのシナプス結合の重みの学習法を論じることも出来る. 他の緒研究ではなされていないこのような新しい試みへ結び付く研究の基礎となる分野を論じた本論文によって, 文献［A22］のむすびで課題として指摘されていること, つまり, ニューラルネット研究分野での未解決な一部である“関数空間でのニューラルネットの構成（ニューラルネットの無限次元化)”を成し遂げることが出来る. 従来のニューラルネットではマルチチャネル形に構造化しないと容易に実現出来ない“パターン連想的認識技術”が簡単に確保可能であることを理論的に, 明らかにすることが出来るのである.

### 2.4　画像復元の再論

モデル化過程

$$\text{“}\varphi \to T\varphi\text{”} \tag{2.32}$$

は, 原パターン $\varphi \in \Phi$ の, システム内部での復元過程である. $\varphi \in \Phi$ の復元結果は, それに対応しているモデル $T\varphi \in \Phi$ である.

それのみならず, 強調しておきたいことは, 線形方程式（1.1）の解 $X$ を求めることの可能な共役勾配法を無限次元化して, 解 $X$ を観測画像 $\vec{b}$ に対する復元画像とみなす手法（加法的雑音を除去可能な画像復元技術）の拡張として、

パターンモデル $T\vec{b}$ は観測画像 $\vec{b}$ の復元である

と解釈可能な画像復元技術が本研究により一般的に確保されたことである.

### 2.5　パターン集合 $\Phi_B$ の情報理論的次元

処理の対象とするパターン $\varphi$ の集合 $\Phi$ は,

$$\Phi = R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B) \subset \mathfrak{H} \tag{2.33}$$

と表される［B3］,［B4］. ここに, $R^{++}, T, \Phi_B$ は各々, 正実定数の集合, axiom 1 の（ⅰ）,（ⅱ）,（ⅲ）の 3 後半,（iv）を満たすモデル構成作用素, パターンと判明しているヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の部分集合（基本領域；basic domain）である.

基本領域 $\Phi_B$ については, 式（1.3）の直交関係を備えた 1 次独立な系 $\{Z_i\}_{i=1\sim n}$ を使って, パターン集合 $\Phi_B$ のエントロピー $ETPY(\Phi_B)$ をシャノン情報理論に従って定義でき, その指数関数として,

パターン集合の，式（1.25）の形式で情報理論的次元 $DIM\,(\varPhi_B)$ が定義できる．

## 3.　共役勾配法

本章では，作用素論的線形方程式を解くときに，他の求解法では見られない“求解過程において直交系 $\{\phi_\ell\}_{\ell\in L}$ が得られる共役勾配法”が説明される．

実有限次元の場合（n 次元ユークリッド空間 $R^n$ の場合）を論じている文献［A3］では，具体的な計算手順が判りにくいなどもあって，以下に，複素無限次元（可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$）の場合に拡張・展開し直し，整理しておこう．

### 3.1　可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ での，その定義域が稠密な閉線形形作用素 $A$

例えば，無限次元数列空間としてのヒルベルト空間としての $\mathfrak{H}=(\ell_2)$ では，内積（正値エルミット形式）$(\varphi,\eta)$ は，

$$(\varphi,\eta)=\sum_{q=1}^{\infty} a_q\cdot\overline{b}_q$$

ここに，$a_q$, $b_q$ は複素定数，かつ，$\overline{b}_q$ は $b_q$ の複素共役であり，

$$\varphi=col\,(a_1\quad a_2\quad a_3\quad\cdots)\ （列ベクトル）\in(\ell_2)$$

$$\eta=col\,(b_1\quad b_2\quad b_3\quad\cdots)\ （列ベクトル）\in(\ell_2) \tag{3.1}$$

と与えられ，$\varphi$ のノルム $\|\varphi\|$ は

$$\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi,\varphi)}=\sqrt{\sum_{q=1}^{\infty}|a_q|^2}$$

と定義される．

内積（　，　）の定義された完備な（complete）有限次元とは限らない線形空間をヒルベルト空間（Hilbert　space）というが、そのノルム $\|\varphi\|$ は内積（　，　）を用いて，$\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi,\varphi)}$ と定義されることが，唯単にノルムの定義された完備な有限次元とは限らない線形空間としてのバナッハ空間（Banach space）と異なる点である［A1］．

以後、可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ を，処理の対象とするパターン $\varphi$ の表現空間として論を展開するが，$\mathfrak{H}$ として，$\mathfrak{H}=L_2(M;dm)$ を選んでいると想定しても良い．その内積 $(\varphi,\eta)$ は，

$$(\varphi,\eta)=\int_M dm\,(x)\qquad \varphi\,(x)\cdot\overline{\eta}\,(x)$$

ここに，$\eta$ は $\overline{\eta}$ の複素共役であり，

$M$：n 次元ユークリッド空間 $R^n$ の可測部分集合

$dm\,(x)$：正値Lebesgue-Stieltjes式測度 　　(3.2)

である．また，$\varphi\in\mathfrak{H}$ のノルム

$$\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi,\varphi)} \tag{3.3}$$

を導入しておく．

内積 $(\varphi,\eta)$ が式（1.4）で与えられる n 次元ユークリッド空間 $R^n$ の場合，内積 $(\varphi,\eta)$ は，

$$M=\{1,2,\cdots,n\},\ dm\,(x)=1\quad if\quad x\in M,\ =0\quad if\quad x\notin M \tag{3.4}$$

である場合の特別な $L_2(M;dm)$ である．

$$A\,(a\cdot\varphi+b\cdot\eta)=a\cdot A\varphi+b\cdot A\eta$$

ここに，$a, b \in Z$（複素数体），$\varphi, \eta \in \mathfrak{H}$ (3.5)

を満たすという意味で線形な作用素を $A$ とする．$A$ の定義域Domain $(A)$ は式（2.3）で定義されているが，値域Range $(A)$，零空間Null $(A)$ を各々，

$$\mathrm{Range}(A) \equiv \{\eta \in | \ \exists\varphi \ \in \mathrm{Domain}(A), \eta = A\varphi\} \tag{3.6}$$

$$\mathrm{Null}(A) \equiv \{\varphi \in \mathfrak{H} | \ \|A\varphi\| = 0\} \tag{3.7}$$

を定義・導入する．

一般に，$\mathfrak{H}$ の部分集合 $\mathfrak{L}$ に $\mathfrak{L}$ の点列の集積点をすべてつけ加えて得られる閉集合を $\mathfrak{L}^a$ と書いて，Lの閉苞（closure）と呼ぶ．以後，$A$ はDomain $(A)^a = \mathfrak{H}$ を満たす（つまり，その定義域Domain $(A)$ が $\mathfrak{H}$ で稠密な）閉線形作用素［A2］（closed linear operator）であるとしょう．

Domain $(B)^a = \mathfrak{H}$ なるとき，

すべての $\varphi \in$ Domain $(B)$ に対して，$(B\varphi, \eta) = (\varphi, \eta^*)$ の成り立つような点対 $\{\eta, \eta^*\}$ によって，

$\eta^* = B^*\eta$ と定義される線形作用素 $B^*$ (3.8)

は $B$ の共役作用素（conjugate or adjoint operator）と呼ばれる．

### 3.2　直交性と線形の作用素論的方程式

その定義域Domain $(A)$ が $\mathfrak{H}$ で稠密な閉線形作用素 $A$ について，次の（ i ），（ ii ）が知られている：

（ i ）$\vec{b} \in$ Range $(A)$ であれば，線形方程式

$$AY = \vec{b} \tag{3.9}$$

の解 $Y \in$ Domain $(A)$ は，一意的に存在する．

（ ii ）一般に，線形方程式式（3.9）の解 $Y \in$ Domain $(A)$ は，

$$AY_0 = \vec{0} \tag{3.10}$$

を満たす一般解 $Y_0 \in$ Domain $(A)$ と，

$$AY_1 = \vec{b} \tag{3.11}$$

を満たす特殊解 $Y_1 \in$ Domain $(A)$ との和として，

$$Y = Y_0 + Y_1 \tag{3.12}$$

と表わされる［A11］．□

観測された $\vec{b}$ が

$$\vec{b} = \mathrm{Range}(A) \tag{3.13}$$

を満たすと仮定し，線形の作用素論的方程式（3.9）を解くことを考えよう．ここに，

$$Y = \mathrm{Domain}(A) \tag{3.14}$$

である．

線形方程式（3.9）の近似解 $X$ に関する残差 $Ax - \vec{b}$ のノルム $\|Ax - \vec{b}\|$ を可能な限り小にすることを考えればよい．

$\|[A^* \cdot A + tI]\varphi\|^2 = (1 + 2t) \cdot \|A\varphi\|^2 + t^2 \cdot \|\varphi\|^2$　∵　補助定理 1 の式（3.24） (3.15)

$$\because \quad \|[A^* \cdot A + tI]\varphi\| \geq t \cdot \|\varphi\| \tag{3.16}$$

を得て，先ず

$[A^* \cdot A + tI]$ は連続な逆 $[A^* \cdot A + tI]^{-1}$ を持つ (3.17)

がわかる．

よって，$t > 0$ として，

$$X_t = [A^* \cdot A + tI]^{-1} \cdot A^* \vec{b} \tag{3.18}$$

を考えると，等式

$$[A^* \cdot A + tI] \cdot X_t = [A^* \cdot A + (t+\delta) I] \cdot X_{t+\delta} \quad for \quad \delta > 0 \tag{3.19}$$

から，

$$X_t = [1 + [A^* \cdot A + tI]^{-1} \cdot \delta I] X_{t+\delta} \tag{3.20}$$

を得る．ここで，$A^* \cdot A$ は非負の実スペクトルを持つ自己共役作用素であるから［A2］，

$$1 < 1 + [\lambda + t]^{-1} \cdot \delta \quad for \quad \lambda > 0 \tag{3.21}$$

を考慮すると，スペクトル解析より，

$$\| X_{t+\delta} \| \leq \| X_t \| \tag{3.22}$$

が成り立つことがわかる．よって，

$$\lim_{t \to +0} X_t \tag{3.23}$$

を線形方程式（3.9）の解とする手法［A11］も提案されているが，本節では，この様な単なる反復手法とは異なり，求解過程で得られる以下の命題 1 でいう直交性を利用して（第 4 章を参照），以下の無限次元超平面方程式（3.37）で解Ｙを求める共役勾配法が説明される．

先ず，次の補助定理 1 に先ず，注意しよう．

［補助定理 1 ］［A2］

$$Domain\,(A)^a = \mathfrak{H} \tag{3.24}$$

なるとき，$A$ が閉線形作用素であるための必要かつ十分条件は，

$$A = (A^*)^* \tag{3.25}$$

であることである． □

上記の補助定理 1 から，式（2.7）の線形作用素 $H$ は

$$H = A^* \cdot (A^*)^* \tag{3.26}$$

とも書け，然も，

$$\forall \eta \in Domain\,(A),\ (A\eta, A\eta) = (A^* \cdot A\eta, \eta) = (H\eta, \eta) \geq 0 \tag{3.27}$$

が成り立つから，式（2.7）の $H$ は半正値（semi-positive）であり，次の補助定理 2 が成り立つことが判る．

［補助定理 2 ］

$A$ が式（3.24）を満たす閉線形作用素であるとき，式（2.76）の $H$ は式（3.26）のようにも書け，

$$H = H^* \tag{3.28}$$

が成り立ち，半正値自己共役作用素（semi-positive operator）である． □

4.1節，（vi）で証明される次の命題 1 を仮定して，論を進めよう．

［命題 1 ］（直交性）$i, j \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ として，２式（3.46），（3.49）で定義される $\varphi_k$ の組 $\{\varphi_k\}$ について，

$$(H\varphi_i, \varphi_j) = 0\,(i \neq j). \tag{3.29}$$

□

さて，

$$X_0 \in \mathfrak{H} \tag{3.30}$$

を適当に選定する．

$$R_0 = \vec{b} - AX_0 \tag{3.31}$$

を導入する．

$$S_0 \equiv A^* \cdot R_0 = A^* \cdot (\vec{b} - AX_0) \tag{3.32}$$

を導入する．$\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ を定数として，$X_{k+1}$ を，

$$X_{k+1} \equiv X_0 + \lambda_0 \cdot \varphi_0 + \lambda_1 \cdot \varphi_1 + \cdots + \lambda_k \cdot \varphi_k \tag{3.33}$$

とおく．

$$X_{k+1} = X_k + \lambda_k \cdot \varphi_k \tag{3.34}$$

が成り立つ．$R_k$, $S_k$ を，

$$R_k \equiv \vec{b} - AX_k \tag{3.35}$$

$$S_k \equiv A^* \cdot R_k = A^* \cdot (\vec{b} - AX_k) \tag{3.36}$$

とおく．

次の仮定 1 が成り立つものとしよう．

［仮定 1 ］（線形方程式（3.9）の解の存在性）

ある非零複素定数 $\lambda_k$ の組$\{\lambda_k\}_{k=0,1,2,\cdots}$が存在して，

$$X \equiv X_0 + \lambda_0 \cdot \varphi_0 + \lambda_1 \cdot \varphi_1 + \cdots + \lambda_k \cdot \varphi_k + \cdots$$

$$= X_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \cdot \varphi_k \tag{3.37}$$

は，方程式式（3.9）を満たす．即ち，式（1.1）が成り立つ． □

ならば，仮定 1 の下で， 2 式（3.33），（3.37）から，

$$X - X_k = \sum_{m=k}^{\infty} \lambda_m \cdot \varphi_m \quad for \quad k \geq 0 \tag{3.38}$$

の成立が判る．

$$R_k \equiv \vec{b} - AX_k \quad \because \quad \text{式（3.35）}$$

$$= AX - AX_k \quad \because \quad \text{式（1.1）}$$

$$= A\,(X - X_k) \tag{3.39}$$

，つまり，式（3.38）から，

$$\text{仮定 1 の下で，} R_k = A \cdot \sum_{m=k}^{\infty} \lambda_m \cdot \varphi_m \tag{3.40}$$

が成り立ち，式（3.36）の $S_k$ は式（2.7）で定義される H を使って，

$$\text{仮定 1 の下で，} S_k = A^* \cdot b - HX_k \tag{3.41}$$

が成り立つ．よって，$S_{k+1} - S_k$ を計算して見ると，

$$S_{k+1} - S_k$$

$$= (A^* \cdot \vec{b} - HX_{k+1}) - (A^* \cdot \vec{b} - HX_k) \quad \because \quad \text{式（3.41）}$$

$$= -H\,(X_{k+1} - X_k)$$

，つまり，式（3.34）から，

$$\text{仮定 1 の下で，} S_{k+1} - S_k = -\lambda_k H \varphi_k \tag{3.42}$$

が成り立つ．

また、$(H\,(X - X_k), \varphi_k)$ を計算して見ると，

$$(H\,(X - X_k), \varphi_k)$$

$$= (H \sum_{m=k}^{\infty} \lambda_m \cdot \varphi_m, \varphi_k) \quad \because \quad \text{式（3.38）}$$

$= \sum_{m=k}^{\infty} \lambda_m \cdot (H\varphi_m, \varphi_k)$

$= \lambda_k \cdot (H\varphi_k, \varphi_k)$ $\because$ 命題 1

，つまり，

仮定 1，並びに，命題 1 の下で，

$$(H(X-X_k), \varphi_k) = -\lambda_k \cdot (H\varphi_k \cdot \varphi_k) \quad for \quad k \geq 0 \tag{3.43}$$

が成り立つ．ところが，$H(X-X_k)$ を計算して見ると，

$H(X-X_k) = HX - HX_k$

$= A^* \cdot AX - A^* \cdot AX_k$ $\because$ 式（2.7）

$= A^* \cdot \vec{b} - A^* \cdot AX_k$ $\because$ 式（1.1）

$= A^* \cdot (\vec{b} - AX_k)$

$= A^* \cdot R_k$ $\because$ 式（3.35）

$= S_k$ $\because$ 式（3.36）

，つまり，

仮定 1 の下で，$S_k = H(X-X_k)$ （3.44）

が成り立つから，この式（3.43）を式（3.39）に代入すれば，式（3.37）の $\lambda_k$ は次のように求まる．

仮定 1，並びに，命題 1 の下で，

$$\lambda_k = (S_k, \varphi_k) / (H\varphi_k, \varphi_k) \neq 0 \tag{3.45}$$

が成り立つ．

命題 1 で登場した $\varphi_0$，各 $\varphi_k$ (k ≧ 1) の求め方については，次のように考えれば良い．

先ず，

$\varphi_0 \equiv S_0$

$= A^* \cdot R_0$ $\because$ 式（3.32）

$= A^* \cdot (\vec{b} - AX_0)$ $\because$ 式（3.31） （3.46）

とおく．

$X_0$ が与えられた

$\Rightarrow S_0 = \varphi_0$ が求まる $\because$ 式（3.46）

$\Rightarrow \lambda_0$ が求まる $\because$ 式（3.45）

$\Rightarrow S_1$ が求まる $\because$ 式（3.42） （3.47）

である．各 $\mu_k$ を，

$$\mu_k \equiv -(HS_{k+1}, \varphi_k) / (H\varphi_k, \varphi_k) \neq 0 \tag{3.48}$$

と定め，各 $\varphi_{k+1}$ を，

$$\varphi_{k+1} \equiv S_{k+1} + \mu_k \cdot \varphi_k \neq 0 \tag{3.49}$$

と，定めよう．

3 式（3.47），（3.48），（3.49）から，$X_0$ が与えられた場合，

$S_0 = \varphi_0, \lambda_0, S_1, \mu_0, \varphi_1$ が求まり，式（3.45）から $\lambda_1$ が求まる．

このようにして，

$$X_0, S_0 = \varphi_0, \lambda_0, S_1, \mu_0, \varphi_1, \lambda_1 \tag{3.50}$$

の順に求まった．つまり，

仮定 1，命題 1 の下で，

$$
\begin{aligned}
&S_k,\ \varphi_k \to \lambda_k \quad \because \quad \text{式（3.45）}\\
&\to S_{k+1} \quad \because \quad \text{式（3.42）}\\
&\to \mu_k \quad \because \quad \text{式（3.48）}\\
&\to \varphi_{k+1} \quad \because \quad \text{式（3.49）}
\end{aligned} \tag{3.51}
$$

の順に求まる．

n次元ユークリッド空間$R^n$での方程式（3.9），上述の共役勾配法で解ける諸例が文献［A5］に多数ある．

## 4.　共役勾配法に基づく画像復元と，直交系の構成

本章では、第3章の命題1を証明した後，画像復元手法が研究され，更に，処理の対象とするパターン$\varphi \in Domain\,(A)$の，式（2.25）で示される直交展開を可能にする直交系$\{\phi_k\}_{k\in L}$の選定がなされる．あわせて，可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$での本研究での共役勾配法は，式（2.4）の2次汎関数$F\,(\psi)$を，平面の方程式（4.22）上で最小値を持つように変形しながら，線形方程式（3.9）を解く手法であることが明らかにされる．

### 4.1　共役勾配法での6つの直交性と，画像復元

第3章の論法とは逆に，式（3.24）を満たす閉線形作用素$A$について，式（2.7）の$H \equiv A^*\cdot A$を定義し，第3章の4式（3.45），（3.42），（3.48），（3.49）を用意すると，

（ｉ）$(H\varphi_{k+1},\ \varphi_k) = 0$

（ii）$(S_{k+1},\ \varphi_k) = 0$

（iii）$(S_k,\ \varphi_k) = (S_k,\ S_k)$

（iv）$(S_{k+1},\ S_k) = 0$

（ｖ）$(S_i,\ S_j) = 0\,(i \neq j)$

（vi）$(H\varphi_i,\ \varphi_j) = 0\,(i \neq j)$

が示され，次の2命題2, 3，並びに，補助定理3が証明される（付録1を参照）．

例えば，式（2.36）での第(k＋1)次の残差$S_{k+1}$と直交するように，第k番目の探索方向ベクトル$\varphi_{k+1}$を定め，線形方程式（1.1），或いは，式（3.9）の解を式（3.37）のごとく，求めようとしていることが，上述の（ⅱ）より判る．

次の命題2，補助定理3，命題3を注目する．

［命題2］

$$[\varphi_0 \neq 0 \wedge \varphi_1 \neq 0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{k-1} \neq 0 \wedge \varphi_k = 0] \tag{4.1}$$

ならば，

$$\mu_{k-1} = 0. \tag{4.2}$$

□

［補助定理3］

$$1^\circ\ \ (\lambda_{k-1}\cdot H\varphi_{k-1},\ \varphi_{k-1}) = (S_{k-1},\ S_{k-1}). \tag{4.3}$$

$$2^\circ\ \ \mu_{k-1} = (S_k,\ S_k)\,/\,(S_{k-1},\ S_{k-1}). \tag{4.4}$$

□

第3章の式（3.36）の$S_k$について，次の命題3が成り立つ．

［命題 3］

式（4.2）が成り立つならば，

$$A^{*}\cdot(\vec{b}-AX_{k})=0. \tag{4.5}$$

□

ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の部分集合 $\mathfrak{M}$ に対し，

$$\mathfrak{M}^{\perp}\equiv\{\psi\in\mathfrak{H}\ |(\varphi,\psi)=0 \text{ for any } \varphi\in\mathfrak{M}\} \tag{4.6}$$

とおけば，$\mathfrak{M}^{\perp}$ は閉部分空間であることが知られている．

一般抽象ヒルベルト空間論でよく知られている次の補助定理 4 を提出する．

［補助定理 4］［A2］

式（3.24）を満たす閉線形作用素 $A$ に対し，$Null\ (A)$, $Null\ (A^{*})$ について，

$$Null\ (A)=(Range\ (A^{*})^{a})^{\perp} \tag{4.7}$$

$$\wedge\, Null\ (A^{*})=(Range\ (A)^{a})^{\perp}. \tag{4.8}$$

□

上述の補助定理 4 を適用すると，

$$Range\ (A)^{a}=\mathfrak{H} \tag{4.9}$$

ならば，

$$Null\ (A^{*})=\{0\} \tag{4.10}$$

を得て，命題 3 を適用して，次の定理 1 が得られる．

［定理 1］（画像復元定理）

式（3.24）を満たす閉線形作用素 $A$ が式（4.9）を満たすとする．

式（4.2）が成立するならば，

$$\vec{b}-AX_{k}=0 \tag{4.11}$$

が成立する，つまり，$X_k$ は方程式（3.9）の解

$$Y=X_{k} \tag{4.12}$$

である．これ，即ち，$\vec{b}$ を観測して，$Y$ を復元する方法（画像復元法）である．　□

線形方程式（3.9）の反復解法については，この式（3.9）の解を，線形方程式

$$A^{*}\cdot(AY)=A^{*}\cdot\vec{b} \tag{4.13}$$

の解

$$Y=\lim_{k\to\infty}Y_{k} \tag{4.14}$$

として求めようとする標準的な手法［A10］

$$Y_{k+1}=(I-a\cdot A^{*}\cdot A)\cdot Y_{k}+a\cdot A^{*}\cdot\vec{b},\ k=0,1,2,\cdots \tag{4.15}$$

ここに，

$$0<a<2\cdot[\sup_{\|\varphi\|=1}\|A^{*}\cdot A\varphi\|]^{-1} \tag{4.16}$$

があるが，上述の定理 1 は同様な手法を提供していることが判る．

### 4.2　実ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ での，式（2.4）の 2 次汎関数 $F(\psi)$ の最小値の，共役勾配による決定

可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ が式（2.1）が成り立つという意味で，実ヒルベルト空間であるとしよう．このとき，$\mathfrak{H}$ がn次元ユークリッド空間 $R^{n}$ の場合には文献［A5］で示されている補助定

理2.1が証明されることに注目する．

さて，次の式（4.81）の $X_{k+1}$ は式（3.33）で定義されているものである．上述の補助定理2.1を適用して証明される次の定理 2 は，4.1節の定理 1 より判るように，共役勾配法が，特に，$\eta$ として，

$$\eta = A^{*} \cdot \vec{b} \tag{4.17}$$

と置いた式（2.4）の 2 次汎関数 $F(\psi)$ を，平面の方程式（4.22）上で最小値を持つように変形しながら，線形方程式（3.9），或いは，（1.1）を解く手法であることを示している．

［定理 2 ］（ 2 次汎関数の，平面上での最小性定理）

可分な一般抽象実ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ における式（2.4）の 2 次汎関数 $F(\psi)$ において，$\eta$ は式（4.17）のように選ばれているものとする．任意の k について式（3.33）が成り立ち，特に，k = m のときの

$$X_{m+1} = X_0 + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \cdot \varphi_i \in Domain\ (A)\,\mathrm{X} \tag{4.18}$$

が，線形方程式

$$A^{*} \cdot (A \cdot X_{m+1} - \vec{b}) = 0 \tag{4.19}$$

を満たすとしよう．このとき，

$$\begin{aligned} & F(X_0) - F(X_{m+1}) = 2^{-1} \cdot \| A[X_0 - X_{m+1}] \|^2 \geq 0 \\ & \wedge [\forall k, F(X_k) - F(X_{k+1}) = 2^{-1} \cdot \| A[X_k - X_{k+1}] \|^2 \geq 0] \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} & \therefore \quad F(X_0) \geq F(X_{m+1}) \\ & \wedge \\ & [\forall k,\ F(X_k) \geq F(X_{k+1})] \end{aligned} \tag{4.21}$$

が成り立つ．つまり，$X$ を変数とする平面

$$X = X_0 + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \cdot \varphi_i \in Domain\ (A) \tag{4.22}$$

に属する点 $X$ の値が特に，

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}_{m+1} \tag{4.23}$$

のとき， 2 次実汎関数 $F(X)$ は最小値 $F(X_{m+1})$ を持つ．

（証明）先ず，式（4.20）の前半を示そう．式（4.18）から，

$$X_0 - X_{m+1} = -\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \cdot \varphi_i \tag{4.24}$$

であって，

$$\varphi \equiv X_{m+1} \tag{4.25}$$

$$(\delta\psi) \equiv X_0 - X_{m+1} \tag{4.26}$$

とおいて，式（4.17）に注意し，補助定理2.1を適用すれば，

$$\begin{aligned} & F(X_0) = F(X_{m+1} + (X_0 - X_{m+1})) \\ & = F(X_{m+1}) + (A^{*} \cdot AX_{m+1} - A^{*} \cdot \vec{b},\ X_0 - X_{m+1}) + 2^{-1} \cdot (A^{*} \cdot A\ [X_0 - X_{m+1}],\ X_0 - X_{m+1}) \\ & = F(X_{m+1}) + 2^{-1} \cdot (A^{*} \cdot A\ [X_0 - X_{m+1}],\ X_0 - X_{m+1}) \qquad \because \quad \text{式（82）} \\ & = F(X_{m+1}) + 2^{-1} \cdot \| A\ [X_0 - X_{m+1}] \|^2 \qquad \because \quad \text{補助定理 1} \end{aligned} \tag{4.27}$$

を得て，示された．

次に，式（4.20）の後半を示そう．先ず，

$$\begin{aligned} & (A^{*} \cdot AX_{k+1} - A^{*} \cdot \vec{b},\ X_k - X_{k+1}) \\ & = -(A^{*} \cdot \vec{b} - A^{*} \cdot AX_{k+1},\ X_k - X_{k+1}) \end{aligned}$$

$= -(S_{k+1}, X_k - X_{k+1}) \quad \because$ 式（3.36） (4.28)

$= -(S_{k+1}, -\lambda_k \cdot \varphi_k) \quad \because$ 式（3.34） (4.29)

$= \overline{\lambda}_k \cdot (S_{k+1}, \varphi_k)$

$= 0 \quad \because$ 4.1節の（ⅱ）

の成立に注意する．式（3.33）の $X_{k+1} \in Domain\,(A)$ を思い起こし，式（4.25）と

$$(\delta\psi) \equiv X_k - X_{k+1} \tag{4.30}$$

との２設定において，補助定理2.1を適用すれば，

$$F(X_k) = F(X_{k+1} + (X_k - X_{k+1}))$$
$$= F(X_{k+1}) + (A^*\cdot AX_{k+1} - A^*\cdot\vec{b}, X_k - X_{k+1}) + 2^{-1}\cdot(A^*\cdot A[X_k - X_{k+1}], X_k - X_{k+1}) \tag{4.31}$$
$$= F(X_{k+1}) + 2^{-1}\cdot\|A[X_k - X_{k+1}]\|^2 \quad \because \text{補助定理 1}$$

が得られ，これが式（83）の後半である． □

### 4.3　直交系$\{\psi_k\}_{k\in L}$の２構成

式（3.2）の内積(　，　)を持つ $\mathfrak{H} \equiv L_2(M;dm)$ での線形作用素 $A$ を，核関数 $a(x.y)$ を持つ積分作用素として，

$$(A\varphi)(x) = \int_M dm(y) \quad a(x, y)\cdot\varphi(y) \tag{4.32}$$

と定義すると，

$$(A^*\eta)(y) = \int_M dm(x) \quad a^*(y, x)\cdot\eta(x) \tag{4.33}$$

という表現を持つ $A$ の共役作用素 $A^*$ の核関数 $a^*(y,x)$ は，

$$a^*(y, x) = \overline{a}(x, y) \tag{4.34}$$

であることが知られている．　ここで，

$$N(A)^2 \equiv \int_M dm(x) \int_M dm(y) \quad |a(x, y)|^2 < \infty \tag{4.35}$$

と定義される非負量 $N(A)$ を仮定すると，不等式

$$|(A\varphi)(x)| \leq \int_M dm(y) \quad |a(x, y)|\cdot|\varphi(y)| \tag{4.36}$$

に，Schwarzの不等式

$$|(\psi, \eta)| \leq \|\psi\|\cdot\|\eta\| \tag{4.37}$$

を適用すれば，不等式

$$\|A\varphi\| \leq N(A)\cdot\|\varphi\| \quad for\ any\ \varphi \in \mathfrak{H} \tag{4.38}$$

を得て，条件式（4.35）の下で，$A$ は，

$$Domain\,(A) = \mathfrak{H} \tag{4.39}$$

を満たす有界作用素であり，積分作用素 $A$ は式（3.24）を満たす閉線形作用素である．

例えば，

$$M = \{x| -1 \leq x \leq +1|\},\ dm(x) = dx \tag{4.40}$$

を採用した $\mathfrak{H} = L_2(M;dm)$ において、$c > 0$ をパラメータとして，式（4.32）の核関数 $a(x, y)$ を

$$a(x, y) = \frac{\sin[c(x-y)]}{\pi(x-y)} \tag{4.41}$$

と選べば，定積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq \left\{ \frac{\sin q}{q} \right\}^2 = \pi \tag{4.42}$$

を使って，

$$N(A)^2 = 2c \tag{4.43}$$

を得，有界作用素 $A$ の固有値方程式

$$A\varphi = \lambda\varphi \tag{4.44}$$

を満たす固有関数 $\varphi$ はthe prolate spheroidal function［A6］として知られている．

その定義域Domain $(A)$ が $\mathfrak{H}$ で稠密な，つまり，式（3.24）を満たす閉線形作用素 $A$ についての，線形方程式（3.9），或いは（1.1）の解法としての共役勾配法で得られる直交系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ には，以下の２式（4.46），（4.51）での次の２種類Ⅰ，Ⅱを指摘出来る：

集合 $L$ として，

$$L = \{0, 1, 2, \cdots\} \tag{4.45}$$

を採用する．

Ⅰ．（線形方程式（3.9），或いは（1.1）の，式（3.35）の残差 $R_k$ の直交化）

先ず，4.1節のⅴから判るように，例えば，条件式（4.35）の下での２式（4.32），（4.33）で定義される $A, A^*$ について，式（3.36）の $S_k$ に注目し，各 $\psi_k$ を，

$$\psi_k \equiv S_k \tag{4.46}$$

とおくと，$\{\psi_k\}_{k\in L}$ は $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ での直交系であることが判る．この $\{\psi_k\}_{k\in L}$ は，式（3.36）での $S_k$ の定義から判るように，線形方程式（3.9），或いは（1.1）の，式（3.35）の残差 $R_k$ を直交化したものである．

Ⅱ．（線形方程式（3.9），或いは（1.1）の解 $X$ の探索方向の直交化）

次に，$\hat{\varphi}_k$ を，

$$\hat{\varphi}_k \equiv H\varphi_k \tag{4.47}$$

とおく．4.1節のⅵは，

$$(\hat{\varphi}_j, \varphi_i) = 0 \, (j \neq i) \tag{4.48}$$

と書き直され，$\{\hat{\varphi}_k\}_{k\in L}$ は $\{\varphi_k\}_{k\in L}$ と共役なベクトル系であることに注目し，式（2.7）の半正値自己共役作用素 $H = A^* \cdot A$ を用いて，

$$\langle \varphi, \eta \rangle \equiv (H\varphi, \eta) = (A\varphi, A\eta) \tag{4.49}$$

と定義される１次形式 $\langle \ , \ \rangle$ は正値エルミット形式である．よって，

$$\varphi + \varphi_0,\ ここに，\varphi_0 \in \mathrm{Null}(A) \tag{4.50}$$

と，$\varphi$ とを同一視すると，このような

$\varphi \in Domain(A)$ の集合は $\langle \ , \ \rangle$ を内積とする可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}_A$ を形成する

とみなすことが可能である．ならば，

$$\psi_k \equiv \varphi_k \tag{4.51}$$

とおけば，4.1節の・から，内積 $\langle \ , \ \rangle$ を採用した可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}_A$ での直交系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ が得られる．この $\{\psi_k\}_{k\in L}$ は，２式（3.37），（1.1）から判るように，線形方程式（3.9），或いは（1.1）の解 $X$ の探索方向を直交化したものである．□

# 5. パターンモデルの役割・意義・用途

パターンモデル$T\varphi \in \Phi$ の役割・意義・用途などに関し説明をしておくことは，本研究内容に興味を抱かせ，その理解を深めるのに役立つであろう．

処理対象パターン$\varphi \in \Phi$ の情報構造について, 情報システムは知識を得たい. この種の知識はパターンモデル$T\varphi \in \Phi$ で表わされる．パターンモデル$T\varphi \in \Phi$ が形成されるためには，パターン$\varphi \in \Phi$ について，少なくとも（限られた知識をもたらす）情報が必要である．この種の情報が処理対象パターン$\varphi \in \Phi$ から抽出された特徴量の組である．

## 5.1 パターンモデル構成作用素とパターン認識の数学的理論

原パターン$\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$から 2 式（2.26)，(2.31）でいう特徴量の組$\vec{u}(\varphi) = \{u(\varphi, k) | k \in L\}$を抽出し，（知覚的認識されるであろう）すべての処理対象パターン$\varphi$ の集合$\Phi$ に共通しており、直交関係

$$(\varphi_k, \phi_m) = 0 \, (k \neq m) \tag{5.1}$$

を満たす“原始的なパターン形状成分”$\phi_k$ の集合（直交基底）$\{\phi_k\}_{k \in L}$（1 次独立な系は直交系である）を使い，各特徴量$u(\varphi, k)$を係数に持つ一次結合の形で，式（2.17）のごとく，問題としているパターン$\varphi \in \Phi$ の構造をパターンモデル$T\varphi \in \Phi$ として再生するとき，モデル構成作用素と呼ばれる式（2.19）の写像$T: \Phi \to \Phi$ が, 2.2.1項の 4 性質（イ）〜（ニ）を満足していなければならないということは,

3 文献［A17]，［A22]，［A40］で提案され，パターン構造の再生［A21]，［A25]，［A29]，［A33]，パターンの認識［A28]，［A34]，［A35]，パターン系列の連想［A30]，［A31］に関し計算機シミュレーション済みのパターンモデルをその特殊形とする文献［A45］での 2 元的特徴抽出パターンモデル構成作用素を主要な 1 つの核とする現在構築途中のパターン認識の数学的理論［A40］
の 1 つの骨格を形成するものである．

## 5.2 パターンモデルの 1 適用としての最大類似度認識法

$\varphi \in \Phi$に対応するパターンモデル$T\varphi \in \Phi$を処理するパターン認識の働きへの適用については説明しておこう．パターン認識の数学的理論［A40］の主要な骨格は基本的には，公理論的に構成されているため，紙面の都合上，1 つの例で説明する．

各$\mathrm{j} \in \mathrm{J}$について，パターン集合

$$\Phi(\mathrm{j})(\subset \Phi \subset \mathfrak{H}) : 第\,\mathrm{j} \in \mathrm{J}\,番目のカテゴリ\,\mathfrak{C}_j\,に帰属するパターン\,\varphi \in \Phi\,の有限集合 \tag{5.2}$$

を予め，選定しておく．$\phi$ を空集合として，各$\Phi(\mathrm{j})$ は，条件

$$[\forall j \in J, \omega_j \in \Phi(j)] \wedge \cup_{j \in J} \Phi(j) \subseteq \Phi$$
$$\wedge [\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \Phi(i) \cap \Phi(j) = \phi] \tag{5.3}$$

を満たしているとしなければならない．ここに，文献（40)，第21部，付録 1 で現われているパターン集合

$$\Omega \equiv \{\omega_j | j \in J\} (\subset \Phi \subset \mathfrak{H}) \tag{5.5}$$

も用意しておかねばならないが, この$\Omega$ は, 各カテゴリ$\mathfrak{C}_j$ の持つ諸性質を典型的に表わす代表パターン$\omega_j \in \Phi$ の集合である．このとき，2 つのモデル$T\eta$，$T\varphi$ のノルム距離$\|T\eta - T\varphi\|$ は$T\eta$，$T\varphi$ の相違度を表わし，その逆数$\|T\eta - T\varphi\|^{-1}$は類似性の尺度に対応するものと解釈し，2 条件

$$[\forall \mathrm{j} \in \mathrm{J}, \forall \mathrm{i} \in J - \{\mathrm{j}\}, \|T\omega_j - T\omega_i\| > 0]$$

$$\wedge [\forall \mathrm{j} \in \mathrm{J},\quad \forall \eta \in \cup_{k \in J-\{j\}} \quad \Phi(\mathrm{k}), \| T\eta - T\omega_j \| > 0] \tag{5.5}$$

の下で，

$$SM(\varphi, \omega_j)$$

$$= \exp[a_j^{-1} \cdot \{ \min_{\eta \in \Phi(j)} \| T\eta - T\varphi \|^2 \}^{-1} / \sum_{k \in J} \exp[a_k^{-1} \cdot \{ \min_{\eta \in \Phi(k)} \| T\eta - T\varphi \|^2 \}^{-1}$$

$$\text{ここに，} \forall \mathrm{j} \in \mathrm{J},\ a_j > 0 \tag{5.6}$$

と定義される類似度関数

$$\mathrm{SM} : \Phi \times \Omega \to \{ \mathrm{s} \mid 0 \leqq \mathrm{s} \leqq 1 \} \tag{5.7}$$

を用意して見よう．式（5.6）の1より大きくない非負量$SM(\varphi, \omega_j)$は2つのパターン$\varphi, \eta \in \Phi$ の間の規格化類似性を与えている．

明らかに，少なくとも，$\Phi(j)$の近傍（内のパターン）を抽出できる性質

$$SM(\varphi, \omega_j) > SM(\varphi, \omega_j) \Leftrightarrow$$

$$\min_{\eta \in \Phi(j)} \| T\eta - T\varphi \| < \min_{\eta \in \Phi(i)} \| T\eta - T\varphi \| \tag{5.8}$$

の成立が確かめられ，望ましい性質である．この写像SMは次の3性質①～③を満たすことが容易に確かめられる．この3性質①～③もまた，パターン認識の数学的理論［A40］の1つの骨格を形成するものである：

［類似度関数SMの満たすべき3性質］［A32］，［A35］，［A36］，［A38］～［A40］，［A46］

①（正規直交性）$SM(\omega_i, \omega_j) =$

$$\begin{cases} 0 & \mathit{if} \quad \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \\ 1 & \mathit{if} \quad \mathrm{i} = \mathrm{j} \end{cases}$$

②（確率性，規格化性）　$\forall \varphi \in \Phi$，$\sum_{j \in J} SM(\varphi, \omega_j) = 1$．

③（$T$－不変性）$\forall \varphi \in \Phi$，$\mathrm{SM}(T\varphi, \omega_j) = \mathrm{SM}(\varphi, \omega_j)$．　□

そうすると，不動点探索形構造受精認識法［A32］，［A35］，［A36］，［A40］を適用しても可能であるが，簡単には、次の最大類似度認識法［A35］，［A39］を適用して，処理対象とするパターン$\varphi \in \Phi$ の帰属するカテゴリを決定出来る：

［最大類似度認識法］

パターン$\varphi \in \Phi$ に対し，そのパターンモデル$T\varphi \in \Phi$ を構成した後，カテゴリ番号

$$j = \arg\max_{k \in J} SM(T\varphi, T\omega_k) \tag{5.9}$$

を求め，パターン$\varphi \in \Phi$ は第$\mathrm{j} \in \mathrm{J}$番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属すると，決定する．　□

式（5.6）で定義されるSMを採用したこの最大類似度認識法は式（5.8）から判るように，Nearest-Neighbor Classifierに対応するものである．

### 5.3　従来のパターン認識理論との設定の違いと，4性質（イ)～(ニ）からもたらされる意味

本節では，主として、式（2.27）の特徴抽出写像$\mathrm{u} : \Phi \times \mathrm{L} \to \mathrm{Z}$の備えている性質からもたらされるパターンモデル$T\varphi$ の5特性について，3.2.1項での4個の制約（イ)～(ニ）の観点から説明する．

（ｉ）（同一の特徴量の組を持っているパターンの集合（同値類）の代表元としてのパターンモデル$T\varphi$）

文献［A16］～［A46］での理論においては，従来の如何なるパターン処理理論とは異なり，パターン情報処理システムが処理の対象としている入力パターン$\varphi \in$ Hilbert space$\mathfrak{H}$から特徴抽出したとき，（２式（2.26)，(2.31）でいう）得られた特徴量$u(\varphi, k) \in Z$（複素数全体の集合）の組

$$\vec{u}(\varphi) = \{u(\varphi, k) | k \in L\} \tag{5.10}$$

と同一の特徴量の組を持っているであろうパターンの集合（同値類）

$$[\varphi] \equiv \{\eta \in \Phi | \vec{u}(\eta) = \vec{u}(\varphi)\} \subset \Phi \tag{5.11}$$

の代表元として，パターンモデル$T\varphi \in \Phi$ が表わされていること，つまり，

$$\forall \varphi \in \Phi, T\varphi \in [\varphi] \tag{5.12}$$

という事態をあからさまに表現していることであり，然も，この表現された代表元$T\varphi$ $(\in [\varphi])$をあたかもその入力パターン$\varphi$ とみなし，以後の後続の識別・連想処理段階を構成していることである．処理対象パターン$\varphi \in \Phi$ に対応して，パターン情報システムの内部に確保されるパターンは，パターン$\varphi \in \Phi$ と同一の特徴量の組$\vec{u}(\varphi)$を備えたそのパターンモデル$T\varphi$ $(\in [\varphi])$なのである．

パターンモデル$T\varphi \in \Phi$ によって，同値類$[\varphi]$の情報構造を推定出来るといえ，

処理対象パターン$\varphi \in \Phi$ は特徴抽出されると，パターン情報システムの内部でそのパターンモデル$T\varphi \in [\varphi]$に変容する

という解釈を，本研究では採用していることになる．

式（5.1）を満たす直交基底$\{\psi_k\}_{k \in L}$は 1 次独立であるから，モデル$T\varphi \in [\varphi]$の構造形式（2.17）を勘案すると，

$$\forall \varphi \in \Phi, [T(T\varphi) = T\varphi \quad (\text{2.2.1項の性質（ハ）})$$
$$\Leftrightarrow \forall \mathrm{k} \in \mathrm{L}, u(T\varphi, k) = u(\varphi, k) \tag{5.13}$$

の成立が判り，式（5.12）の成立はこの式（5.13）そのものである．

そして，原パターン$\varphi$ に対応するパターンモデル$T\varphi$ には，原パターン$\varphi$ の，知覚心理学でいういわゆる“形の恒常性［A21]，［A22］(shape constancy)”がある程度反映されていることは，同一の特徴量を備えているパターン同志は似ていると想定する立場では，モデル$T\varphi$ と同一の特徴量を備えていることから保証されるのである．30個の漢字パターン$\varphi$ に関しては，この“形の恒常性は計算機シミュレーションで確認済みである［A21]，［A25]，［A29]．

また，2.2.1項の性質（ハ)，または，式（5.13）から，モデル形成過程

$$「\varphi \to T\varphi \to T(T\varphi) \to T(T(T\varphi)) \to \cdots \to T^t\varphi = T(T^{t-1}\varphi) \to \cdots」 \tag{5.14}$$

の有限停止性（モデル化の完結性［A18]，［A21]，［A22]）

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall t \in \{2, 3, \cdots\}, T\{T^{t-1}\varphi) = T^{t-1}\varphi \tag{5.15}$$

が知れることにも注意しておかねばならない．

（ⅱ）（パターンモデル$T\varphi \in \Phi$ は原パターン$\varphi \in \Phi$ 内の加法的雑音，あるいは，冗長性が除去された形で得られていること）

パターン$\varphi \in \Phi$ とは，ある程度変形が許される情報の，冗長性があり，耐雑音性のある“その表示座標系から独立した”表現である，と考えてみよう．このようなパターンの表現空間として、可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$を採用した場合，パターン$\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$の，パターン情報システム内部での表現としてのパターンモデル$T\varphi \in \Phi$ は，パターン$\varphi \in \Phi$ のある程度の変形に耐え，パターン$\varphi \in \Phi$ に含有する冗長性が排除された形式を備え，雑音が除去されていなければならない．$T\varphi \in \Phi$ が耐雑音性，冗長性の排除性を満たしていることは，次の式（5.16）から明らかである．

２式（2.24)，(2.25）でのパターン$\varphi \in \Phi$ とこのパターン$\varphi \in \Phi$ 内の加法的雑音，あるいは，冗長

性部分$\varphi_0 \in \mathfrak{H}$について,

$$\forall\varphi \in \Phi,\ T\varphi = T\,(\sum_{k \in L} a_k\,(\varphi)\cdot\psi_k + \varphi_0)$$

$$= T\,(\sum_{k \in L} a_k\,(\varphi)\cdot\psi_k) \tag{5.16}$$

が成り立つ．特に、パターン$\varphi \in \Phi$を$\varphi_0 \in \mathfrak{H}$と採ると，2.2.1項の性質（イ）が成り立つことが判る．

（iii）（ノルム規格化パターン$\varphi\|\varphi\|^{-1}$のパターンモデルに$T\,(\varphi\|\varphi\|^{-1})$対するthe self-scaling property）

２式（2.26)，(2.31）での２つの特徴抽出写像$u : \Phi \times L \to Z,\ u : \Phi \times L \to R^+$については,

$$\forall\varphi \in \Phi, \forall k \in L,\ u\,(c\cdot\varphi,\ k\,) = u\,(\varphi,\ k\,)\ \text{ for any positive real nunmber } c \tag{5.17}$$

が成立している．

従って，式（2.17）の写像$T$の構造形式に, 2.2.1項の性質（イ）と合わせると，ノルム規格化パターン$\varphi\|\varphi\|^{-1}$のパターンモデル$T\,(\varphi\|\varphi\|^{-1})$のthe self-scaling property

$$\forall\varphi \in \Phi,\ T\,(\varphi\|\varphi\|^{-1}) = T\varphi \in \Phi \tag{5.18}$$

が成り立つことが判る．

（iv）（各パターン形状素$\psi_k$の完全忠実再現性）

最も素な“第k∈L番目のパターン形状素$\psi_k$”から抽出される第m∈L番目の特徴量$u\,(T\psi_k,\ m\,)$については,

$$\forall m \in L,\ u\,(T\psi_k,\ m\,) =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{if} \quad \mathrm{k} \neq \mathrm{m} \\ 1 & \text{if} \quad \mathrm{k} = \mathrm{m} \end{cases} \tag{5.19}$$

が成り立つように，２式（2.27)，(2.28）の２つの特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \to Z,\ u : \Phi \times L \to R^+ \tag{5.20}$$

は，設計されねばならない．そうだとすると,

$$\forall \mathrm{k} \in \mathrm{L},\quad T\psi_k = \psi_k \tag{5.21}$$

が成り立つ．この式（5.21）から, 2.2.1項の性質（ニ）の成立が判る．このように,

$\psi_k$は誤差なく忠実にモデル$T\psi_k$として再現される

ということになる．

（v）（パターンモデル$T\varphi \in \Phi$のユニタリ座標変換不変性）

ある場合，パターン$\varphi \in \Phi$から抽出される各特徴量$u\,(\varphi,\ k\,) \in R^+$は，ある種のユニタリ座標変換$U$の下で,

$$\forall\varphi \in \Phi, \forall k \in L,\ u\,(U\varphi,\ k\,) = u\,(\varphi,\ k\,) \tag{5.22}$$

というように，不変でなければならない．そのためには,

“$\varphi \to \eta \equiv U\varphi$”というパターン$\varphi \in \Phi$のある種のユニタリ座標変換Uの下で,

$$\text{“}T\varphi = T\,(U\varphi) = T\eta\text{”} \tag{5.23}$$

というように不変であることが要求されてよい．

上述の５特性（ｉ）～（ｖ）を満たすこのようなパターンモデル$T\varphi \in \Phi$は,

自己共役作用素$H$，非負実数値Borel可測関数$f\,(\lambda)$，その値域が互いに直交している

射影作用素$\theta_k\,(H\,)$の族$\{\theta_k\,(H\,)|\,k \in L\}$ (5.24)

を使い，既に３種類提案されており［A17]，[A18]，[A22]，原パターン$\varphi \in \Phi$の位置ずれ，縮小・

拡大，回転のユニタリ座標変換に不変なごとく構成され，その効果が計算機シミュレーション［A21］，［A25］，［A29］，［A33］で実証されている．

本研究内容によって，上述の $H$ ，$f(\lambda)$，$\{\theta_k(H)|k \in L\}$ を次のように与えたパターンモデル $T\varphi$ も構成可能である：

$$\forall \mathrm{j} \in \mathrm{J},\ 0 < p(\mathfrak{C}_j) \wedge \sum_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) = 1 \tag{5.25}$$

を満たす生起確率 $p(\mathfrak{C}_j)$ を持つカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ を（第 $\mathrm{j} \in \mathrm{J}$ 番目のカテゴリ）の有限集合

$$\mathfrak{C}(\mathrm{J}) = \{\mathfrak{C}_j \,|\, \mathrm{j} \in J\} \tag{5.26}$$

を想定し，$\mathfrak{C}_j$ の，式（5.4）の代表パターン

$$\omega_j \in \Omega \equiv \{\omega_i \,|\, i \in J\} \subset \Phi \subset \mathfrak{H} \tag{5.27}$$

を用意する（この各代表パターン $\omega_j$ の決定法は，文献［A40］の第21部，付録 1 ，あるいは，文献［A45］にある）．全カテゴリ集合 $\mathfrak{C}(\mathrm{J})$ 上の平均化パターン（the average pattern）と呼ばれるパターン

$$\xi \equiv \sum_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) \cdot \omega_j \|\omega_j\|^{-1} \tag{5.28}$$

を導入する．この時，$H$，$f(\lambda)$，$\{\theta_k(H)|k \in L\}$ については，

$$(\text{一})\quad H* = \sum_{k \in L} \lambda_k \cdot \frac{(*, \phi_k)}{(\phi_k, \phi_k)} \cdot \phi_k \tag{5.29}$$

ここに，

$$\lambda_k \equiv |(\xi \|\xi\|^{-1}, \phi_k \|\phi_k\|^{-1})|^2 \tag{5.30}$$

$$(\text{二})\quad f(\lambda) = \lambda \tag{5.31}$$

$$(\text{三})\quad \theta_k(H)* = \frac{(*, \phi_k)}{(\phi_k, \phi_k)} \cdot \phi_k,\ k \in l \tag{5.32}$$

と，おくことが出来る［A16］，［A17］，［A20］，［A24］，［A26］，［A27］．□

## 6. 直交系による 4 種類のパターモデルの構成

先ず，式（2.20）でいう任意のパターン $\varphi \in \mathfrak{H}$ の表現に関連して，このパターン $\varphi \in \mathfrak{H}$ に対し，次の式（6.1）が成り立つことに注目しよう：

『 1 次結合 $\sum_{k \in L} a_k \cdot \phi_k$ で近似するときの誤差 $\varphi - \sum_{k \in L} a_k \cdot \phi_k$ のノルム

$$\|\varphi - \sum_{k \in L} a_k \cdot \phi_k\| \to \min$$

というように最小ならしめる各複素係数 $a_k(\varphi) \equiv a_k$ は，連立 1 次方程式

$$\sum_{k \in L} (\phi_k, \phi_\ell) \cdot a_k(\varphi) = (\varphi, \varphi_\ell),\ \ell \in L$$

の解である．特に，$\{\phi_k\}_{k \in L}$ が式（5.1）を満たす直交系の場合，各複素係数 $a_k(\varphi) \equiv a_k$ は

$$a_k(\varphi) \equiv a_k = (\varphi, \phi_k) / (\phi_k, \phi_k)$$

である．このとき，パターン $\varphi \in \mathfrak{H}$ は 2 式（2.24），（2.25）に示されているごとく， 1 次展開，或いは，直交展開される．』 （6.1）

□

パターンモデル$T\varphi \in \Phi$が原パターン$\varphi \in \Phi$に対応して，パターン情報システム内部に形成されるためには，原パターン$\varphi \in \Phi$について情報が抽出されることが必要とされる．抽出された情報は特徴量（feature）といわれる．この必要とされる情報が，可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元$\phi_k$からなる式（5.1）を満たす直交系$\{\phi_k\}_{k \in L}$を用い，パターン$\varphi \in \Phi$から抽出された特徴量の，式（5.10）の組$\vec{u}(\varphi)=\{u(\varphi, k)|k \in L\}$　である．第k∈L番目の特徴量$u(\varphi, k)$は，第２章の式（2.26）で表示されているように，

$$\vec{a}(\varphi)=\{a_k(\varphi)|l \in L\} \tag{6.2}$$

の関数として設定される．

本章では、上述の直交展開式（2.24），(2.25）に関連し，パターモデル$T\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$の構造式（2.17）内の，式(5.10)でいう特徴量の組$\vec{u}(\varphi)=\{u(\varphi, k)|k \in L\}$を如何に定義するかが説明され，同時に，パターン$\varphi \in \Phi$の近似モデル$T\varphi \in \Phi$がこれまでの２種類（6.2，6.5両節）に加えて，新たに，２種類（6.3，6.4両節）説明される．

尚，パターン認識情報処理の３つの主要な手法とは，

（１$）statistical approaches

（２$）syntactic approaches

（３$）knowledge-based approaches

のことであるが［A13］，式（5.1）を満たす直交系$\{\phi_k\}_{k \in L}$を用いて，４種類のパターンモデルを構成する本章でのパターンモデル構成法に基づくパターン処理［A16］～［A46］は，この何れの手法にも分類され得ないと思える．

### 6.1　同値類$[\varphi]$の抽象化とパターンモデル$T\varphi$

多少の違いがあっても“同等”と判断することは，抽象化の始まりである．パターン形状の多少の違いを無視するための手法としては，

（１#）（加法的）雑音の除去

（２#）ユニタリ座標変換の下で不変な特徴量の組の抽出

（３#）抽出された特徴量の量子化

が考えられる．

（１#）は以下の４種類のモデル構成に共通に考慮されており，（２#）は5.2, 5.3両節での２種類のモデル構成に考慮されており，（３#）は6.3，6.5節での２種類のモデル構成に考慮されている．

抽出された特徴量の組を媒介として，パターン情報システムは処理対象パターン$\varphi$を理解（comprehension）しているのであり，パターン$\varphi$の情報構造は$\varphi \in \Phi$に対応するパターンモデル$T\varphi \in \Phi$として，抽象化されているとみなすことが出来る．抽出された各特徴量を直交展開係数に持つ以下の合成されたパターン（the synthesized pattern）$T\varphi \in \Phi$は，同一の特徴量の組を持つすべてのパターンの集合［$\varphi$］に共通な構造であり，式（5.11）の同値類［$\varphi$］の抽象化物であると考えられる．

### 6.2　ユニタリ不変なパターンモデル

まず，任意の直交系$\{\eta_k\}_{k \in L}$に対し，次の２事実（a)，(b）に注意する：

$$\text{(a)}\quad \phi_k \equiv \eta_k \cdot \|\eta_k\|^{-1} \tag{6.3}$$

とおけば，$\{\phi_k\}_{k \in L}$は，

$$\forall k \in L, \|\phi_k\|^2 = 1 \tag{6.4}$$

を満たす直交系であり，次の（b）の特別な場合である．

（b）正定数C > 0 に対し，

$$c_k \equiv \sqrt{C} \cdot \|\eta_k\|^{-1} \tag{6.5}$$

と定義される複素定数$c_k$ を考え，

$$\phi_k \equiv c_k \cdot \eta_k \tag{6.6}$$

とおけば，$\{\phi_k\}_{k \in L}$ は，

$$\forall k \in L, \|\phi_k\|^2 = C \text{ （k ∈ Lに無関係な定数）} > 0 \text{（a flat-power property）} \tag{6.7}$$

を満たす直交系である． □

本節では，直交系$\{\phi_k\}_{k \in L}$ に対し，上述の条件式（6.7）を要請しておく．

$$\mathrm{p}(\phi_k, \mathrm{k}) \equiv \begin{cases} 0 \cdots \forall \mathrm{k} \in \mathrm{L}, (\varphi, \phi_k) = 0 \text{ のとき} \\ |(\varphi, \phi_k)|^2 / \sum_{k \in L} |(\varphi, \phi_k)|^2 \\ \quad \cdots \exists k \in \mathrm{L}, (\varphi, \phi_k) \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{6.8}$$

を用意し，パターン$\varphi \in \Phi$ から抽出される第k ∈ L番目の特徴量$u(\varphi, k)$を

$$u(\varphi, k) = \sqrt{p(\varphi, k)} \tag{6.9}$$

と定義すると，式（2.19）で定義される写像T : $\Phi \to \Phi$ は2.2.1項の 4 性質（イ）～（ニ）を満たし，モデル構成作用素である［A42］．

（イ′）（雑音除去性）

$$\forall k \in L, (\varphi, \phi_k) = 0 \text{ であれば，} T\varphi = 0 \in \Phi \tag{6.10}$$

よって，$\eta'$ を加法的雑音とし，

$$= \eta + \eta', \text{ ここに，} \forall \mathrm{k} \in \mathrm{L}, (\eta', \phi_k) = 0 \tag{6.11}$$

$$\text{に対し，} T\varphi = T\eta \in \Phi \tag{6.12}$$

が成り立つことから，（イ）の成立は、明らかである．

ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ が，互いに異なる閉部分空間 $\mathfrak{H}_k$ の直交直和の形に，

$$\mathfrak{H} = \oplus \sum_{k \in L} \mathfrak{H}_k \oplus \mathfrak{H}_0, \text{ ここに，}$$

$$\mathfrak{H}_k \equiv \{\eta | \eta = \mathrm{a} \cdot \phi_k \text{ for any } \mathrm{a} \in \mathrm{Z} (\text{the field of complex numbers})\}$$

$$\mathfrak{H}_0 \equiv \{\eta | \forall \mathrm{k} \in L, (\eta, \phi_k) = 0\} \tag{6.13}$$

と分解されたとき（２式（2.24)，(2.25）を参照)，式（6.8）の$\mathrm{p}(\varphi, \mathrm{k})$は，

パターン$\varphi \in \Phi$ が第k ∈ L番目の閉部分空間 $\mathfrak{H}_k$ に存在している確率である　(6.14)

と解釈されるから，式（6.9）の特徴量$u(\varphi, k)$を採用して得られる式（2.17）のパターンモデル$T\varphi \in \Phi$ は，

パターン$\varphi \in \Phi$ が各閉部分空間 $\mathfrak{H}_k$，k ∈ Lに分布し存在している有様を反映・表示したパターンである　(6.15)

と解釈されて良い．

２式（6.8)，(6.9）で定義される特徴量$u(\varphi, k)$を採用して得られる式（2.17）のパターンモデル$T\varphi \in \Phi$ は，式（5.29）の自己共役作用素Hと可換な任意のユニタリ作用素Uに対し，ユニタリ座標変換不変性

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \mathrm{T}(\mathrm{U}\varphi)=T\varphi \tag{6.16}$$

を備えている（付録２の　A2.2.2項の定理A2.1を参照）.

## 6.3　ユニタリ不変な２元パターンモデル

前節のパターンモデル $T\varphi\in\Phi$ を簡易的に表現し直そう．そのために，式（6.8）の $p(\varphi,k)$ を

$$\lim_{r\to\infty}\Big[\sum_{k\in L}|(\varphi,\psi_k)|^r\Big]^{1/r}=\sup_{k\in L}|(\varphi,\psi_\mathrm{k})| \tag{6.17}$$

を考慮し，２値量子化する．但し，直交系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ は式（6.7）を満たすとは限らないとしておく．

$$p(\varphi,k)\equiv$$

$$\begin{cases}0\ \cdots\ \forall\mathrm{k}\in\mathrm{L},\ (\varphi,\psi_k)=0\quad\text{のとき}\\ |(\varphi,\psi_k)|^2/\sup\limits_{k\in L}\ |(\varphi,\psi_k)|^2\\ \quad\cdots\ \exists k\in\mathrm{L},\ (\varphi,\psi_k)\neq 0\quad\text{のとき}\end{cases} \tag{6.18}$$

を定義し，その後，

$$q(\varphi,k)\equiv\sqrt{p(\varphi,k)} \tag{6.19}$$

を求め，不等式

$$0\le e_k\le\|\psi_k\|^2/\sup_{k\in L}\|\psi_k\|^2 \tag{6.20}$$

を満たす閾値 $e_k$ に関し，$q(\varphi,k)$ を，

$$u(\varphi,k)\equiv$$

$$\begin{cases}0\ \cdots\ 0\leqq q(\varphi,k)<e_k\quad\text{のとき}\\ 1\ \cdots\ e_k\leqq q(\varphi,k)\leqq+1\quad\text{のとき}\end{cases} \tag{6.21}$$

というように，２値量子化し、パターン $\varphi\in\Phi$ から抽出される各２値特徴量 $u(\varphi,k)$ を求め，式(2.17)で定義されるパターンモデル $T\varphi\in\Phi$ を確保するとしょう（各刺激閾値 $e_k$ を適応的に決定する手法については，文献［A40］，第18部，付録，あるいは，文献［A45］での手法とほぼ同様である）．そうすると，式（2.17）で定義される写像 $T:\Phi\to\Phi$ は，前節と同様に，2.2.1項の４性質（イ）～（ニ）を満たし，モデル構成作用素である.

2.2.1項の４性質（イ）～（ニ）を満たすことを示そう.

（イ）は，6.2節のモデル構成作用素Tと同様に，6.2節の（イ′）（雑音除去性）が成り立つことから，明らかである.

（ロ）は明らかである.

（ハ）の成立を示そう.

$$\eta=\sum_{k\in L}b_k\cdot\psi_k,\ \text{ここに，}\ b_k\in\{0,1\} \tag{6.22}$$

に対し，

$$q(\varphi,k)=$$

$$\begin{cases}0\ \cdots\ \forall\mathrm{k}\in\mathrm{L},\ b_k=0\ \text{のとき}\\ b_k\cdot\|\psi_k\|^2/\sup\limits_{k\in L}[b_k\cdot\|\psi_k\|^2]\\ \quad\ge b_k\cdot\|\psi_k\|^2/\sup\limits_{k\in L}\|\psi_k\|^2\\ \qquad\cdots\ \exists\mathrm{k}\in L,\ b_k\neq 0\ \text{のとき}\end{cases} \tag{6.23}$$

を得て，

$$u(\varphi, k) = \begin{cases} 0 \cdots b_k = 0 \text{ のとき} \\ 1 \cdots b_k = 1 \text{ のとき} \end{cases} \tag{6.24}$$

が判り，

$$T\eta = \eta \tag{6.25}$$

が成立することを適用すれば，（ハ）の成立が知れる．

（ニ）については，

（ニ′）（パターン形状素$\phi_{\mathrm{k}}$の不動点性）

$$\forall k \in L,\ T\psi_k = \phi_k \quad \because \quad \text{式（6.25）} \tag{6.26}$$

が成り立つことから明らかである．

実は，6.2節のパターンモデル$T\varphi$ についても，式（6.26）は成立している．

本節のパターンモデル$T\varphi$ についても，式（6.16）で示される“ユニタリ座標変換不変性”が成り立つ．

### 6.4　ユニタリ共変なパターンモデル

1 次独立な系$\{\psi_k\}_{k\in L}$ は，式（6.7）を満たすとは限らないが，直交式（5.1）を満たす直交系とする．パターン$\varphi \in \mathfrak{H}$の直交展開式（2.25）を勘案し，パターン$\varphi \in \Phi$ から抽出される第k ∈ L番目の特徴量$u(\varphi, k)$を，

$$u(\varphi, k) \equiv \begin{cases} 0 \cdots \forall \mathrm{k} \in L,\ (\varphi, \psi_k) = 0 \text{ のとき} \\ \dfrac{(\varphi, \psi_k)/(\psi_k, \psi_k)}{[\sum_{k\in L} |(\varphi, \psi_k)/(\psi_k, \psi_k)|^2]^{1/2}} \\ \cdots \exists \mathrm{k} \in \mathrm{L},\ (\varphi, \psi_k) \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{6.27}$$

と用意し，式(2.17)で定義されるパターンモデル$T\varphi \in \Phi$ を確保するとしよう．そうすると，式(2.17)で定義される写像$T : \Phi \to \Phi$ は，前節と同様に，2.2.1項の 4 性質（イ）〜（ニ）を満たし，モデル構成作用素である．

（イ）は，6.2節のモデル構成作用素Tと同様に，6.2節の（イ′）（雑音除去性）が成り立つことから，明らかである．

不等式（6.1）に関する論から，次の不等式が成り立つことが判る：

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \|\varphi - \sum_{k\in L} a_k \cdot \psi_k\|$$

$$\geq \|\varphi - [\sum_{k\in L} |(\varphi, \psi_k)/(\psi_k, \psi_k)|^2]^{1/2} \cdot T\varphi\| \tag{6.28}$$

□

任意のユニタリ作用素$U$ を用い，直交系$\{\psi_k\}_{k\in L}$ を，

$$\forall k \in L,\ \psi_k{}' = U^{-1} \cdot \psi_k \tag{6.29}$$

と変換して得られる$\{\psi_k{}'\}_{k\in L}$ も，$U^{-1} = U^*$ はユニタリ作用素であるから，直交系であることが判る（付録 2 のA2.1節の命題A2.1を参照）．

そこで，式（6.27）の$u(\eta, k)$において，$\psi_k$の代りに，$\psi_k{}'$を採用して得られるものを$u'(\eta, k)$と表わし，写像$T'$を

$$T'\eta = \sum_{k \in L} u'(\eta, k) \cdot \psi_k{}' \tag{6.30}$$

と定義すれば，

任意のユニタリ作用素Uに対し，ユニタリ座標変換共変性

$$\forall \varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H},\ T(U\varphi) = U(T'\varphi) \tag{6.31}$$

が成り立つ（付録２のA2.3節の定理A2.2を参照）.

### 6.5　ユニタリ共変な３元パターンモデル

前節のモデル構成作用素$T$の簡易化表現を求めよう.

１次独立な系$\{\psi_k\}_{k \in L}$は，式（6.7）を満たすとは限らないが，直交式（5.1）を満たす直交系とする.

本節では，パターン$\varphi \in \mathfrak{H}$の直交展開式（2.25）での各$(\varphi, \psi_k)$ $(k \in L)$は，実数とする.

$$u(\varphi, k) \equiv \begin{cases} 0 \cdots \forall k \in L,\ (\varphi, \psi_k) = 0 \ \text{のとき} \\ (\varphi, \psi_k) / \sup\limits_{k \in L} |(\varphi, \psi_k)| \cdots \exists k \in L,\ (\varphi, \psi_k) \neq 0 \ \text{のとき} \end{cases} \tag{6.32}$$

を定義し，各閾値$e_k{}'$，$e_k$を，不等式

$$-\|\psi_k\|^2 / \sup_{k \in L} \|\psi_k\|^2 < -e_k{}' \leq 0 \leq e_k < +\|\psi_k\|^2 / \sup_{k \in L} \|\psi_k\|^2 \tag{6.33}$$

を満たすように決定しておいて，

$$u(\varphi, k) \equiv \begin{cases} -1 \cdots -1 \leqq p(\varphi, k) < -e_k{}' \text{のとき} \\ 0 \cdots -e_k{}' \leqq p(\varphi, k) \leqq +e_k \ \text{のとき} \\ +1 \cdots +e_k < p(\varphi, k) \leqq +1 \ \text{のとき} \end{cases} \tag{6.34}$$

というように，パターン$\varphi \in \Phi$から抽出される第k∈L番レの３値特徴量$u(\varphi, k)$を求め，式（2.17）で定義されるパターンモデル$T\varphi \in \Phi$を確保するとしよう（各刺激閾値$e_k{}'$，$e_k$を適応的に決定する手法については，文献［A40］，第18部，付録，あるいは、文献［A45］での手法とほぼ同様である）.

そうすると，式（2.17）で定義される写像$T : \Phi \to \Phi$は，前節と同様に，2.2.1項の性質（イ）～（ニ）を満たし，モデル構成作用素である［A41］.

2.2.1項の性質（イ）～（ニ）を満たすことを示そう.

（イ）は，6.2節のモデル構成作用素Tと同様に，6.2節の（イ′）（雑音除去性）が成り立つことから，明らかである.

（ロ）は明らかである.

（ハ）の成立を示そう.

$$\eta = \sum_{k \in L} c_k \cdot \psi_k,\ \text{ここに，}\ c_k \in \{0, 1\} \tag{6.35}$$

に対し，

$$p(\eta, k) =$$

$$\begin{cases} 0 \cdots \forall k \in L,\ c_k = 0 \text{ のとき} \\ c_k \cdot \|\psi_k\|^2 / \sup_{k \in L} [|c_k \cdot \|\psi_k\|^2] \\ \qquad \geq +\|\psi_k\|^2 / \sup_{k \in L} \|\psi_k\|^2 > e_k\ (c_k = +1 \text{ のとき}) \\ \qquad \leq -\|\psi_k\|^2 / \sup_{k \in L} \|\psi_k\|^2 < -e_k{}'\ (c_k = -1 \text{ のとき}) \\ \quad \cdots \exists \mathrm{k} \in \mathrm{L},\ c_k \neq 0 \end{cases} \tag{6.36}$$

を得て，

$$u(\eta, k) = \begin{cases} 0 \cdots c_k = 0 \text{ のとき} \\ +1 \cdots c_k = +1 \text{ のとき} \\ -1 \cdots c_k = -1 \text{ のとき} \end{cases} \tag{6.37}$$

が判り，

$$T\eta = \eta \tag{6.38}$$

が成立することを適用すれば，（ハ）の成立が知れる．

（ニ）は，式（6.26）のパターン形状素$\psi_k$の不動点性が本節のパターンモデル$T\varphi$においても同様に成り立つこと（∵　式（6.37）の特別な場合）から，明らかである．

任意のユニタリ作用素$U$を用い，直交系$\{\psi_k\}_{k \in L}$を式（6.29）のように定義し，式（6.37）の$u(\eta, k)$において，$\psi_k$の代りに，$\psi_k{}'$を採用して得られるものを$u'(\eta, k)$と表わし，写像$T'$を式(6.30)のように定義すれば，任意のユニタリ作用素$U$に対し，式（6.31）の“ユニタリ座標変換共変性”が成り立つ（付録 2 を参照）. □

以上の6.2〜6.5の 4 節のごとく表現された，式（5.11）の同値類$[\varphi]$の代表元$T\varphi \in [\varphi]$をあたかもその入力パターン$\varphi$とみなし，以後の後続の識別・連想処理段階を構成している文献［A16］〜［A46］での研究では，処理の対象とするパターン$\varphi$の集合$\Phi$の形状を平均的に含有している意味で，式(5.28)に登場した全カテゴリ集合$\mathfrak{C}$上の平均化パターンと呼ばれる$\xi$を用意し，すべてのパターン$\varphi \in \Phi$の構造をそこまで分解出来るという意味で極小の第$\mathrm{k} \in \mathrm{L}$番目のパターン形状素と呼ばれる$\psi_k \in \Phi$を，

$$\psi_k \equiv b_k \cdot \theta_k(H)\,\xi / \|\sum_{k \in L} \theta_k(H)\,\xi\| \tag{6.39}$$

ここに，非零複素定数$b_k$の組$\{b_k\}_{k \in L}$は

$$\sup_{k \in L} |b_k|^2 < \infty \tag{6.40}$$

と設定し得られた直交系$\{\psi_k\}_{k \in L}$の下でのパターンモデルモデル$T\varphi$が使われている．

尚，写像$T : \Phi \to \Phi$を2.2.1項の 4 性質（イ）〜(ニ）を満たすだけのモデル構成作用素として，処理対象とするパターン$\varphi \in \mathfrak{H}$のある部分集合$\Phi \subset \mathfrak{H}$は,

$$T \cdot \Phi \equiv \{\eta | \eta = T\varphi,\ \varphi \in \Phi\} \subset \Phi \tag{6.41}$$

を満たし，かつ，原点(= 0)を始点とし，$\Phi$の任意の点を通る任意の半直線

$$R^{++} \cdot \Phi \equiv \{\eta | \eta = a \cdot \varphi,\ a \in R^{++},\ \varphi \in \Phi\} \subset \Phi$$

ここに，$R^{++}$は正実数全体の集合 (6.42)

を含むような集合（錐；cone）であり，基礎領域$\Phi_B \subset \mathfrak{H}$を，

各カテゴリの代表パターン$\omega_j$を含むように採った再帰領域方程式（パターンというものを帰納的に定義する方程式）

$$\varPhi = \varPhi_B \cup R^{++}\cdot\varPhi \cup T\cdot\varPhi \tag{6.43}$$

の解として具体的に決定される（文献［A40］，第24部，あるいは，文献［A45］を参照）．式（6.42）の$\varPhi$は式（2.33）の$\varPhi$と一致することに注意しておく．

## 7. むすび

本論文では，従来の共役勾配法を一般化し，その3つの応用が研究された．つまり，線形方程式（連立1次方程式）（1.1）の解法としての，有限次元の対称行列の場合に関し適用可能な従来の共役勾配法が拡張された．言い換えれば，作用素$A$が稠密な定義域を備え，無限次元であっても良い可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$での閉作用素の場合に拡張された．このような拡張は他の研究に類を見ない．また，有効な3応用として

Ⅰ．一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$で，原画像を復元する方法（推論の働きの最適化）（4.1, 4.2両節の2定理1, 2）

Ⅱ．共役勾配法の一般解における直交系を使って，一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$で，S. Suzukiのパターンモデル［B3］，［B4］を構成する方法（知覚・記憶の働きの最適化）（4.3節，6章，付録2）

Ⅲ．共役勾配法の一般解における直交系を使って，パターン集合の複雑さを反映するようなパターン集合の情報理論的次元［A22］の定義（付録3）

の3つが論じられた．

例えば，

$$M = \{x \mid 0 \le x < 2\pi\},\ dm(x) = dx \tag{7.1}$$

とした可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$においては，パターン

$$\varphi(x) \equiv \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \tag{7.2}$$

ここに，$a_0$，$a_p$，$b_p$ $(p = 1 \sim n)$を有限な複素定数として，

$$\begin{aligned}&\varphi_n(x)\\ &\equiv 2^{-1}\cdot a_0 + \sum_{p=1}^{n}\{a_p\cdot\cos(px) + b_p\cdot\sin(px)\}\end{aligned} \tag{7.3}$$

が低域通過空間回路に加えられると，ある固定した正整数nに依存する$\varphi_n(x)$が観測される．つまり，

$$\begin{aligned}&a(x, y)\\ &\equiv \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\left\{(2n+1)\cdot\dfrac{(x-y)}{2}\right\}}{2\cdot\sin\left\{\dfrac{(x-y)}{2}\right\}}\end{aligned} \tag{7.4}$$

を核関数とする積分作用素（低域通過空間回路）$A$について，フーリェ級数定理より，

$$(A\varphi)(x) \equiv \int_0^{2\pi} dy \quad a(x, y)\cdot\varphi(y)$$

$= \varphi_n(x)$ for any $x \in M$ (7.5)

が成り立つ．特に，$\varphi = \varphi_n$ とすれば，

$(A\varphi_n)(x) = \varphi_n(x)$ for any $x \in M$ (7.6)

が成り立つ．この場合でさえ，$A$ は有界ではあるが，無限次元空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ での線形作用素である．この例から判るように，観測されるパターンに応じ，観測前のパターンの表現能率が極大に高められた直交系が存在し（この例では，3 角関数系），式（2.17）の如く定義されるパターンモデル $T\varphi$ をある直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ で構成するにあたり，この高められた能率を備えた直交系を使うのが合理的である，といえよう．

従来の共役勾配法は，式（1.1）の線形方程式において，$A$ が有限次元での線形作用素か，或いは，対称行列の場合に関し適用可能である．本論文では，この従来の場合を含み構成論的にほぼ完全な形式であるように，$A$ が稠密な定義域を備え，無限次元であっても良い閉線形作用素の場合に拡張された（第 3，4 章，付録）．このような試みは，本研究で初めてなされたと思われる．

この拡張に伴い，式（4.46），或いは，式（4.47）の如く，各 $\psi_k$ が設定された 2 種類の直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ を介し，パターン $\varphi$ に対し特徴抽出された結果の，式（5.10）の情報 $\vec{u}(\varphi) = \{u(\varphi, \ell) | \ell \in L\}$ のみを用い，パターン $\varphi$ に対応し情報システムの内部に確保される 2 種類のパターンモデル $T\varphi$ を新たに提案し（第 5 章），パターンモデル $T\varphi$ のユニタリ座標変換不変性・共変性を，直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ が完全である［A17］，［A18］，［A26］とは限らない場合で証明した（第 6 章）．更に，“the computational complexity of the pattern” としての情報理論的次元 $DIM(\varphi)$ を，式（A3.2）を満足する（文献（22）の場合）とは限らない場合に拡張・定義した（付録 3）．

第 5 章においては，一般に，パターンモデル $T\varphi$ を獲得するのには，原パターン $\varphi$ の正確な表現を近似するという考えで，このパターン $\varphi$ の構造内のある要素の組を特徴量の組とみなし，各特徴量を直交展開係数に持つ 1 次形式を求めれば，この得られた 1 次形式が，原パターンの持つ情報構造を簡単化したパターンモデル $T\varphi$ になっているという “パターンモデル構成原理式［A16］～［A18］，［A22］” が説明され，この原理で得られたパターンモデル $T\varphi$ が

耐雑音性，ユニタリ座標変換不変性，量子化性（この量子化性は処理対象とするパターン集合 $\Phi$ がたとえ，無限集合であっても，パターンモデル集合 $T\Phi$ が高々可算集合になり，都合の　良い事態を多くの場合もたらすことに注意）

を備えてくる事実が指摘された（6.1節も参照）．

直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ による，処理対象とするパターン $\varphi \in \Phi$ の，式（2.25）でいう展開係数 $a_k(\varphi)$ の組 $\vec{a}(\varphi) = \{a_k(\varphi) | k \in L\}$ を，パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出された特徴量の組として採用すると，4 つのパターン

$\varphi + \varphi', \varphi, \eta + \eta', \eta$ (7.7)

について

$\varphi + \varphi' = \eta + \eta'$, where $(\varphi', \psi_k) = (\eta', \psi_k) = 0$ for any k $\in$ L (7.8)

$\Leftrightarrow \vec{a}(\varphi + \varphi') = \vec{a}(\varphi) = \vec{a}(\eta) = \vec{a}(\eta + \eta')$ (7.9)

が成立し，$\varphi'$，$\eta'$ を加法的雑音と考えると，

「似ているパターン同志については，抽出された特徴量の組同志が一致し，逆に，抽出された特徴量の組同志が一致すれば，パターン同志は似ている」 (7.10)

といえる．この特徴抽出方法では，得られたパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ には，ユニタリ座標変換不変性を備えさせることが出来ない．冗長性を排除し，対雑音性があるモデル $T\varphi \in \Phi$ が得られるけれども．

一方、展開係数$a_k(\varphi)$の絶対値の自乗$|a_k(\varphi)|^2$の組$\{|a_k(\varphi)|^2|k\in L\}$を，例えば，２式(6.8)，(6.9)の如く，パターン$\varphi\in\Phi$から抽出された特徴量の組$\vec{u}(\varphi)=\{u(\varphi,\ell)|\ell\in L\}$として採用すると，

「似ているパターン同志について，抽出された特徴量の組同志が一致するが，逆に，抽出された特徴量の組同志が一致したとしても，パターン同志は似ているとは必ずしもいえない（式（5.20）の特徴抽出写像ｕの不完全性）」 (7.11)

ことが判り，この不完全性特徴抽出方法が，

「ある程度の変形が許される情報の，冗長性があり，耐雑音性がある“その表示座標から独立した”表現としてのパターン$\varphi\in\Phi$のモデル$T\varphi\in\Phi$」 (7.12)

に，ユニタリ座標変換不変性を備えさせる源泉であり，然も，冗長性を排除し，耐雑音性があるモデル$T\varphi\in\Phi$が得られるのである．

いずれの特徴抽出方法を採用するにしても，パターン$\varphi\in\Phi$の代りとなるパターンモデル$T\varphi\in\Phi$が2.2.1項の４性質（イ）～(ニ）を満たさなければならないとすると，モデル$T\varphi\in\Phi$の形式はかなり制限されたものとなるが（6.2～6.5節），その反面，パターンというものの再帰的定義（帰納的定義）が可能になる（第６章の式（6.43））［A40］，［A45］.

第６章，付録２，付録３の研究内容は任意の直交系$\{\phi_k\}_{k\in L}$に対し，適用能であることがすぐ判る．例えば，可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}=L_2(M;dm)$での可測集合$M$を分割して，

$$\cup_{k\in L}M_k\subset M\wedge M_k\cap M_\ell=\phi\,(k\neq\ell)\wedge M'\equiv M-\cup_{k\in L}M_k\neq\phi \tag{7.13}$$

を満たす可測集合$M_k$の系$\{M_k\}_{k\in L}$を得た場合，

$$\phi_k(x)=1\quad if\quad x\in M_k',=0\quad if\quad x\notin M_k \tag{7.14}$$

と定義される簡単な直交系$\{\phi_k\}_{k\in L}$に対しても，適用可能であり，この場合，各$M_k$を有効なpixelと想定すると，例えば，画像面での，よく行われているpixelwise processingを可能にするパターン認識の働きが得られる．それのみならず，Laguerreの多項式，Hermiteの多項式，Tchebycheffの多項式，三角関数などの良く知られた直交関数系［A1］を採用しても，また，１次独立な系をGram-Schmidt Orthogonalizationを施し得られた直交系［A2］，平均類似度法で得られる一般化K-L直交系［A16］，［A17］，［A28］，T.Kohonenなどによるthe gradient projection methodで得られる直交系［A13］，［A43］を採用しても，それらの直交系に特有なパターン認識の働きが，各々，最大類似度法（5.2節）［A35］，［A38］，［A39］，［A40］，不動点探索形構造受精認識法［A28］，［A32］，［A36］，［A40］，［B26］，［B29］，［B30］を適用すれば得られるのである．

上述のごとく，広大な応用分野を開拓した本パターンモデル理論においては，その反面、実際に処理の対象とするパターンの集合の性質に応じ，$\{\phi_k\}_{k\in L}$を適切に選定することが基本的に必要とされる．計算機シミュレーションを繰り返して，この選定を確実にすることが残された課題であろう．

## 文　献　A

［A1］Angus E. Taylor : “Introduction to Functional Analysis”, John Wiley Sons, Inc.（1980）

［A2］吉田耕作：“近代解析”，共立出版（1963）

［A3］入江昭二：“線形数学Ⅱ”，共立出版（1969）

［A4］Magnus R. Hestenes and Eduard Stiefel :“Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems”, Journal of Research of the National Bureau of Standards Sec. B, Mathematics and Mathematical Physics, vol. 49, pp.409‐436（1952‐12）

［A5］Magnus R. Hestenes:“Conjugate Direction Methods in Optimization”, Springer-Verlag New York inc.（1980）

［A6］Xiaopu Yang, Tapan K. Sarkar and Ercument Arvas : “A Survey of Conjugate Gradient Algorithms for Solution of Extreme Eigen Problems of a Symmetric Matrix”, IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Process., vol. 37, no. 10, pp. 1550-1555（1989-10）

［A7］田中伸厚，寺坂晴夫：“小規模ブロック化行列の多項式を用いた共役勾配法の前処理手法の開発”，情報処理学会論文誌，vol. 35, no. 8, pp.1519-1530（1994-08）

［A8］Robert Hummel and Robert Moniot : “Reconstructions from Zero Crossings in Scale Space”, IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Process., vol.37, no. 12, pp.2111-2130（1989－12）

［A9］James B. Roseborough and Hiroshi Murase : “Partial Eigenvalue Decomposition for Large Image Sets Using Run-Length Encoding ”, Pattern Recognition, vol.28, no. 3, pp.421－430（1995）

［A10］W. V. Petryshyn :“On a General Iterative Method for the Approximate Solution of Linear Operator Equations”, Math. Comput., vol.17, pp.1-10（1963）

［A11］A. V. Balakrishnan :“An Operator Theoretic Formulation of a Class of Control Problems and a Steepest Descent Method of Solution”, Journal of Society for Industrial and Applied Mathematics, Ser. A, on Control, vol.1, no.2, pp.109-127（1963）

［A12］Jeff B. Burl : “Estimating the Basis Functions of the Karhunen-Loeve Transform”, IEEE Trans. Acoust., Speech& Signal Process., vol.37, no.1, pp.99-105（1989-01）

［A13］Eric Chen-Kuo Tsao and Chin-Tu Chen:“Constraint Satisfaction Neural Networks for Image Recognition ”, Pattern Recognition, vol.26, no. 4, pp.553-567（1993），

［A14］坂上貴之，山本淳一，実森正子：“実験的行動分析の展開－“選択”，“認知”，“言語”をめぐって—”，心理学研究，vol.65，no.5，pp.395－411（1994）

［A15］守田　了，川嶋稔夫：“多視点レンジデータに基づく階層的アスペクトグラフの生成”，電子情報通信学会論文誌（D-Ⅱ），vol.J77-D-Ⅱ，no.11，pp.2188-2198（1994-11）

［A16］鈴木昇一：“認識工学（上）”，柏書房（1975）

［A17］鈴木昇一：“測度的不変量検出形認識系の構成理論”，電子（情報）通信学会論文誌（D），vol.55-D，no.8，pp.531-538（1972-08）

［A18］鈴木昇一：“パターン認識における構造化モデルの 4 性質とその応用”，電子情報通信学会論文誌（D），vol.J60-D，no.9，pp.710-717（1977-09）

［A19］鈴木昇一：“画像情報量とその手書き漢字への応用”，画像電子学会誌，vol.4，no.1，pp.4-12（1975）

［A20］鈴木昇一：“手書き漢字の側抑制効果的分解とその計算機シミュレーション”，情報処理（情報処理学会誌），vol.15，no.12，pp.927-934（1974-12）

［A21］鈴木昇一：“抽出された特徴による手書き漢字構造の再生”，情報処理（情報処理学会誌），vol.18，no.11，pp.1115-1122（1977-11）

［A22］鈴木昇一：“パターンのエントロピーモデル”，電子情報通信学会論文誌（D-Ⅱ），vol.J77-D-Ⅱ，no.11，pp.2220-2238（1994-11）

［A23］鈴木昇一，奥野治雄：“パターン認識系の特徴抽出構造に関する解析”，電子（情報）通信学会インホーメーション理論研究会，IT68-9（1968-05）

［A24］鈴木昇一，太田芳雄，斎藤静昭，奥野治雄：“感覚空間回路の設計と作用素に対するラプラ

ス変換法”，工学院大学研究報告，no.40，pp.122-134（1976-06）

［A25］鈴木昇一，斎藤静昭，奥野治雄，太田芳雄：“画像の復元とその計算機シミュレーション”，工学院大学研究報告，no.39，pp.198-206（1976-01）

［A26］鈴木昇一，柴山秀雄，古田晋吾：“移動的ウニタリ座標変換群の下で不変な簡易化構造モデルの標準形”，芝浦工業大学研究報告理工系編，vol.22，no.2，pp.29-38（1980-03）

［A27］鈴木昇一，柴山秀雄，福永一保，大本　修，古田晋吾：“作用素に対するフーリェ変換法による側抑制特性の設計”，芝浦工業大学研究報告理工系編，vol.24，no.1，pp.147-155（1980-03）

［A28］鈴木昇一：“平均類似度を用いた構造受精法による日本語単独母音の認識”，電子（情報）通信学会技術研究報告，vol.82，no.31，PRL82-4，pp.25-32（1982-05）

［A29］鈴木昇一：“回転群と画像の分解強調・構造化再構成に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学情報学部），no.4，pp.36-56（1983-12）

［A30］鈴木昇一：“連想形記憶器内の荷重関数の最小自乗法，自己組織化法による決定”，情報研究（文教大学情報学部），no.5，pp.16-28（1984-12）

［A31］鈴木昇一：“連想形記憶器MEMOTRONと日本語母音系列の再生に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学情報学部），no.7，pp.14-29（1986-12）

［A32］鈴木昇一：“認識プログラムFERTのリスト論的形式体系における表現”，情報研究（文教大学情報学部），no.8，pp.1-12（1987-12）

［A33］鈴木昇一：“収縮写像の構成用空間回路とその計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学情報学部），no.9，pp.17-28（1988-12）

［A34］鈴木昇一：“多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学情報学部），no.10，pp.35-49（1989-12）

［A35］鈴木昇一：“帰属係数法に基づく類似度，帰属関係あいまい度，認識情報量の計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学情報学部），no.11，pp.51-68（1990-12）

［A36］鈴木昇一：“半順序と情報処理”，情報研究（文教大学情報学部），no.12，pp.121-174（1991-12）

［A37］鈴木昇一：“誤差確率分布を考慮した誤差逆伝播学習”，情報研究（文教大学情報学部），no.13，pp.173-202（1992-12）

［A38］鈴木昇一：“新しい情報の測度とパターン情報処理”，情報研究（文教大学情報学部），no.13，pp.273-358（1992-12）

［A39］鈴木昇一：“ミクロ経済学におけるワルラスの法則とパターン類似度関数のホップフィールドニューラルネット形調整”，情報研究（文教大情報学部），no.14，pp.211-236（1993-12）

［A40］鈴木昇一：“パターン認識の数学的理論，PRL84-6（第1部），PRL84-30，PRL84-38，PRL85-27，PRU86-8，PRU86-35，PRU86-69，PRU87-1，PRU87-28，PRU88-30，PRU89-1，PRU89-27，PRU89-40，PRU89-66，PRU89-77，PRU89-136，PRU90-5，PRU90-15，PRU90-29，PRU90-125，PRU91-1，PRU91-29，PRU91-42，PRU92-1，PRU92-18，PRU92-25，PRU92-89，PRU92-102（第28部），電子（情報）通信学会技術研究報告パターン認識と学習，パターン認識と理解］（1984-05～1993-01）

［A41］鈴木昇一，佐久間拓也：“パターンモデルを用いた不動点探索形連想記憶システム方程式”，情報研究（文教大学情報学部），no.15，pp.97-128（1994-12）

［A42］長尾智晴：“最適化アルゴリズム（Optimization Algorithms）”，昭晃堂（2001-06）

2004年 1 月

# 文 献 B


［B1］鈴木昇一：“認識工学”，柏書房，Feb. 1975

［B2］鈴木昇一：“ニューラルネットの新数理”，近代文芸社，Sept. 1996

［B3］鈴木昇一：“パターン認識問題の数理的一般解決”，近代文芸社，June 1997

［B4］鈴木昇一：“認識知能情報論の新展開”，近代文芸社，Aug. 1998

［B6］鈴木昇一：“手書き漢字の側抑制効果的分解とその計算機シミュレーション”，情報処理学会誌，vol.15，no.12，pp.927-934，Dec. 1974

［B7］鈴木昇一：“画像情報量とその手書き漢字への応用”，画像電子学会誌，vol.4，no.1，pp.4-12，Apr. 1975

［B8］鈴木昇一：“抽出された特徴による手書き漢字構造の再生”，情報処理学会誌，vol.18，no.11，pp.1115-1122，Nov.1977

［B9］鈴木昇一：“回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.4，pp.36-56，Dec. 1983

［B10］鈴木昇一：“連想形記憶器MEMOTRONと日本語単独母音系列の再生に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.7，pp.14-29，Dec. 1986

［B11］鈴木昇一：“多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.10，pp.35-49，Dec.1989

［B12］鈴木昇一：“帰属係数法に基づく類似度，帰属関係あいまい度，認識情報量の計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.11，pp.51-68，Dec. 1990

［B13］鈴木昇一：“構造受精法と日本語単独母音の認識”，情報研究（文教大学・情報学部），no.18，pp.17-51，Dec. 1998

［B14］鈴木昇一，前田英明：“有声破裂音の代表パターンの学習的決定と，その計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.20，pp.77-95，Dec. 1998

［B15］鈴木昇一，前田英明：“変動エントロピーによる有声破裂音の順序付けと，その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.21，pp.51-78，Mar. 1999

［B16］鈴木昇一：“平均顔を用いた顔画像の 2 値化、並びに，目・鼻・口の抽出と，その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.22，pp.65-150，Dec. 1999

［B17］鈴木昇一：“界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の，顔画像処理に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.23，pp.109-182，Mar. 2000

［B18］鈴木昇一：“風景画から知識を抽出し，解釈するシステムの，ファジィ推論ニューラルネットによる構成”，情報研究（文教大学・情報学部），no.23，pp.183-265，Mar. 2000

［B19］鈴木昇一：“各個人の感性を反映した認識システムRECOGNITRON”，情報研究（文教大学・情報学部），no.24，pp.185-257，Dec. 2000

［B20］鈴木昇一：“プロダクション・システムとしてのファジィ・マルチメディア・コンピュータと，空間多重パターンファジィ推論系”，情報研究(文教大学・情報学部)，no.24，pp.105-183，Dec. 2000

［B21］鈴木昇一：“SS大分類関数BSCの適応的構成への、計算論的学習理論の適用”，情報研究（文教大学・情報学部），no.25，pp.185-236，Mar. 2001

［B22］鈴木昇一：“量子力学の諸原理，多段階量子認識系と，心理状態を取り入れた想起に基づく

部分空間認識法”，情報研究（文教大学・情報学部），no.25，pp.237-282，Mar. 2001
［B23］鈴木昇一：“Support Vector Machineを利用した大分類関数の構成”，情報研究（文教大学・情報学部），no.26，pp.1-62，Dec. 2001
［B24］鈴木昇一：“２カテゴリ分類困難度の情報理論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.26，pp.63-160，Dec. 2001
［B25］鈴木昇一：“一般化類似度関数を用いた“導出原理による第1階述語推論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.27，pp.27-71，Mar. 2002
［B26］鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：“風景画の理解に関するJAVA言語によるRECOGNITRONの計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.27，pp.73-109，Mar. 2002
［B27］鈴木昇一：“遺伝的アルゴリズムにおける適合度比例選択戦略を利用した進化方程式の，パターン多段階変換に基づく認識への応用”，情報研究（文教大学・情報学部），no.28，pp.37-67，Dec. 2002
［B28］鈴木昇一：“近傍を利用した音素認識のためのモデル構成作用素T，類似度関数SM，大分類関数BSCの諸構成と，SS不動点探索型多段階想起認識”，情報研究（文教大学・情報学部），no.28，pp.69-141，Dec. 2002
［B29］鈴木昇一：“JAVA言語で実装化された画像理解システムIUSの動作概要と，その稼動方法”，情報研究（文教大学・情報学部），no.28，pp.143-165，Dec. 2002
［B30］鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：“JAVA言語による計算機シミュレーションで生じた風景画像の理解場面での多段階連想形認識過程の異常現象”，情報研究（文教大学・情報学部），no.29，pp.123-166，Jul. 2003
［B31］鈴木昇一：“パターン情報処理（モデル構成作用素，誤差逆伝播学習２層ニューラルネット）と，論理的含意とによる非単調的知識推論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.29，pp.75-121，Jul. 2003
［B32］鈴木昇一：“可分な一般抽象ヒルベルト空間でのK-L直交系の理論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.29，pp.41-73，Jul. 2003
［B33］鈴木昇一：“パターン系列（動画像，会話音声）の，dynamical systemによる連想理論と，連想器SPATEMTRON”，情報研究（文教大学・情報学部），no.30，pp.139-186，Mar. 2004
［B34］鈴木昇一：“入出力例の系列を用いた“対連想問題・その疑逆問題”の一般解”，情報研究（文教大学・情報学部），no.30，pp.81-137，Jan. 2004

## 付録１（第４章の（ⅰ）～（ⅵ），２命題2,3，補助定理３の証明）

第４章の（ⅰ）～（ⅵ），２命題2,3，補助定理３を，第３章の５定義式（2.7），（3.36），（3.45），（3.48），（3.49）での，$H$，$S_k$，$\lambda_k$，$\mu_k$，$\varphi_{k+1}$の下で，第３章の式（3.42）の，$S_{k+1}-S_k=-\lambda_k H\varphi_k$，式（3.35）の$R_k\equiv\vec{b}-AX_x$のみを使って，証明する．

（ⅰ）$(H\varphi_{k+1},\varphi_k)=0$の証明：

$(H\varphi_{k+1},\varphi_k)$

$=(H[S_{k+1}+\mu_k\cdot\varphi_k],\varphi_k)$　∵　式（3.49）

$=(HS_{k+1},\varphi_k)+\mu_k\cdot(H\varphi_k,\varphi_k)$　∵　式（3.48）

$=0.$ □

（ⅱ）$(S_{k+1}, \varphi_k) = 0$ の証明：

$(S_{k+1}, \varphi_k)$

$= (S_k - \lambda_k \cdot H\varphi_k, \varphi_k)$　∵　式（3.42）

$= (S_k, \varphi_k) - \lambda_k \cdot (H\varphi_k, \varphi_k)$

$= 0.$　∵　式（3.45）　□

（ⅲ）$(S_k, \varphi_k) = (S_k, S_k)$ の証明：

$(S_k, \varphi_k)$

$= (S_k, S_k + \mu_{k-1} \cdot \varphi_{k-1})$　∵　式（3.49）

$= (S_k, S_k) + \overline{\mu}_{k-1} \cdot (S_k, \varphi_{k-1})$

ここに，$\overline{\mu}_{k-1}$ は $\mu_{k-1}$ の複素共役

$= (S_k, S_k) + \vec{\mu}_{k-1} \cdot (S_{k-1} - \lambda_{k-1} \cdot H\varphi_{k-1}, \varphi_{k-1})$　∵　式（3.42）

$= (S_k, S_k) + \overline{\mu}_{k-1} \cdot [(S_{k-1}, \varphi_{k-1}) - \lambda_{k-1} \cdot (H\varphi_{k-1}, \varphi_{k-1})]$

$= (S_k, S_k) + \overline{\mu}_{k-1} \cdot 0$　∵　式（3.45）

$= (S_k, S_k).$　□

（ⅳ）$(S_{k+1}, S_k) = 0$ の証明：

$(S_{k+1}, S_k)$

$= (S_k - \lambda_k \cdot H\varphi_k, S_k)$　∵　式（3.42）

$= (S_k, S_k) - \lambda_k \cdot (H\varphi_k, S_k)$

$= (S_k, S_k) - \lambda_k \cdot (H\varphi_k, \varphi_k - \mu_{k-1} \cdot \varphi_{k-1})$　∵　式（3.49）

$= (S_k, S_k) - \lambda_k \cdot [(H\varphi_k \cdot \varphi_k) - \overline{\mu}_{k-1} \cdot (H\varphi_k, \varphi_{k-1})]$

$= (S_k, S_k) - \lambda_k \cdot (H\varphi_k \cdot \varphi_k)$　∵　（ⅰ）より $(H\varphi_k, \varphi_{k-1}) = 0$

$= (S_k, S_k) - (S_k, \varphi_k)$　∵　式（3.45）

$= 0.$　∵　（ⅲ）より $(S_k, S_k) = (S_k, \varphi_k)$　□

（ⅴ）$(S_i, S_j) = 0\,(i \neq j)$ と，（ⅵ）$(H\varphi_i, \varphi_j) = 0\,(i \neq j)$ との証明：

i ≦ k，j ≦ k に対し，（ⅴ），（ⅵ）が成り立っていると仮定し（帰納法の仮定），

$(S_{k+1}, S_i) = 0 \wedge (H\varphi_{k+1}, \varphi_i) = 0$ for i ≦ k　（A1.1）

の成立を示せば良い．

i = k に対しては，既に，（ⅳ），（ⅰ）で示されている．i < k に対し，式（A1.1）の成立を示そう．

式（A1.1）の前半 $(S_{k+1}, S_i) = 0$ を示そう．

$(S_{k+1}, S_i)$

$= (S_k - \lambda_k \cdot H\varphi_k, S_i)$　∵　式（3.42）

$= (S_k, S_i) - \lambda_k \cdot (H\varphi_k, S_i)$

$= (S_k, S_i) - \lambda_k \cdot (H\varphi_k, \varphi_i - \mu_{i-1} \cdot \varphi_{i-1})]$　∵　式（3.49）

$= -\lambda_k \cdot (H\varphi_k, \varphi_i - \mu_{i-1} \cdot \varphi_{i-1})$　∵　帰納法の仮定より，$(S_k, S_i) = 0$

$= -\lambda_k \cdot [(H\varphi_k, \varphi_i) - \overline{\mu}_{i-1} \cdot (H\varphi_k \cdot \varphi_{i-1})]$

$= -\lambda_k \cdot [(0 - \overline{\mu}_{i-1} \cdot 0]$　∵　帰納法の仮定より，$(H\varphi_k, \varphi_i) = 0 \wedge (H\varphi_k, \varphi_{i-1}) = 0$

$= 0.$　（A1.2）

を得て，示された．

式（A1.1）の後半 $(H\varphi_{k+1}, \varphi_i) = 0$ for i ≦ k を示そう．

$(H\varphi_{k+1}, \varphi_i)$

$= (H\,[S_{k+1} + \mu_k \cdot \varphi_k\,],\, \varphi_i\,)$ ∵ 式（3.49）

$= (HS_{k+1},\, \varphi_1) + \mu_k \cdot (H\varphi_k,\, \varphi_i\,)$

$= (HS_{k+1},\, \varphi_i\,)$ ∵ 帰納法の仮定より，$(H\varphi_k,\, \varphi_i\,) = 0$

$= (S_{k+1},\, H\varphi_i)$ ∵ 補助定理 1 と式（2.7）より，$H \equiv A^* \cdot A = A^* \cdot (A^*)^*$

$= (1/\lambda_i\,) \cdot (S_{k+1},\, \lambda_i \cdot H\varphi_i)$ ∵ $\lambda_i \neq 0$

$= (1/\lambda_i\,) \cdot (S_{k+1},\, S_i - S_{i+1})$ ∵ 式（3.42）

$= (1/\lambda_i\,) \cdot [(S_{k+1},\, S_i\,) - (S_{k+1},\, S_{i+1})]$

$= (1/\lambda_i\,) \cdot [0 - 0]$

∵ 既に示されている式（A1.1），つまり，式（A1.2）の$(S_{k+1},\, S_i\,) = 0$と帰納法の仮定よりの$(S_{k+1},\, S_{i+1}) = 0$

$= 0.$ □

命題 2 の証明：式（4.1），つまり，

$[\varphi_0 \neq 0 \wedge \varphi_1 \neq 0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{k-1} \neq 0 \wedge \varphi_k = 0]$

が成立するならば，式（4.2），つまり，$\mu_{k-1} = 0$が成り立つことを証明しよう．

$\varphi_k = S_k + \mu_{k-1} \cdot \varphi_{k-1}$ ∵ 式（3.49）

$= 0$

であるから，

$0 = (\varphi_k,\, S_{k-1})$

$= (S_k + \mu_{k-1} \cdot \varphi_{k-1},\, S_{k-1})$

$= (S_k,\, S_{k-1}) + \mu_{k-1} \cdot (\varphi_{k-1},\, S_{k-1})$

$= \mu_{k-1} \cdot (\varphi_{k-1},\, S_{k-1})$ ∵ （iv）より，$(S_k,\, S_{k-1}) = 0$ （A1.3）

を得る．

よって，式（A1.3）から，

$\mu_{k-1} = 0$あるいは$(\varphi_{k-1},\, S_{k-1}) = 0$

であるが，

$(\varphi_{k-1},\, S_{k-1}) = 0$から，以下のように，$\varphi_{k-1} = 0$ （A1.4）

を得て，仮定に矛盾するから，結局，$\mu_{k-1} = 0$が成立しなければならない．

式（A1.4）を証明しておこう．

$0 = (\varphi_{k-1},\, S_{k-1})$

$= (S_{k-1},\, S_{k-1})$ ∵ （iii）

から，

$S_{k-1} = 0$ （A1.5）

を得て，

$\mu_{k-2} = 0$ （A1.6）

が従う．よって，

$\varphi_{k-1} = S_{k-1} + \mu_{k-2} \cdot \varphi_{k-2}$ ∵ 式（3.49）

$= S_{k-1}$ ∵ 式（A1.6）

$= 0$ ∵ 式（A1.5）

が判った． □

補助定理 3 の証明：

1°）$(\lambda_{k-1} \cdot H\varphi_{k-1}, \varphi_{k-1}) = (S_{k-1}, S_{k-1})$の証明：

$(\lambda_{k-1} \cdot H\varphi_{k-1}, \varphi_{k-1})$

$= (S_{k-1} - S_k, \varphi_{k-1})$ $\because$ 式（3.42）

$= (S_{k-1}, \varphi_{k-1}) - (S_k, \varphi_{k-1})$

$= (S_{k-1}, \varphi_{k-1})$ $\because$ （ⅱ）

$= (S_{k-1}, S_{k-1})$ $\because$ （ⅲ）

を得て，示された．

2°）$\mu_{k-1} = (S_k, S_k) / (S_{k-1}, S_{k-1})$ の証明：

$\mu_{k-1}$

$= (HS_k \cdot \varphi_{k-1}) / (H\varphi_{k-1}, \varphi_{k-1})$ $\because$ 式（3.48）

$= -(S_k, H\varphi_{k-1}) / (H\varphi_{k-1}, \varphi_{k-1})$

$\because$ 補助定理 1 と式（2.7）より，$H \equiv A^* \cdot A = A^* \cdot (A^*)^*$

$= (S_k, -H\varphi_{k-1}) / (H\varphi_{k-1}, \varphi_{k-1})$

$= (S_k, -\lambda_{k-1} \cdot H\varphi_{k-1}) / [\lambda_{k-1} \cdot (H\varphi_{k-1}, \varphi_{k-1})]$ $\because$ $\lambda_{k-1} \neq 0$

$= (S_k, S_k - S_{k-1}) / [\lambda_{k-1} \cdot (H\varphi_{k-1}, \varphi_{k-1})]$ $\because$ 式（3.42）

$= [(S_k, S_k) - (S_k, S_{k-1})] / (\lambda_{k-1} \cdot H\varphi_{k-1}, \varphi_{k-1})$

$= (S_k, S_k) / (\lambda_{k-1} \cdot H\varphi_{k-1}, \varphi_{k-1})$ $\because$ （iv）より，$(S_k, S_{k-1}) = 0$

$= (S_k, S_k) / (S_{k-1}, S_{k-1})$ $\because$ 1°）

を得て，2°）の証明が終わった． □

命題 3 の証明：

$\mu_{k-1} = 0$ ならば，$A^* \cdot (\vec{b} - AX_k) = 0$ を証明しよう．

補助定理 3 の 2°）より，$\mu_{k-1} = 0$ ならば，$S_k = 0$ を得て，

$0 = S_k$

$= A^* \cdot R_k$ $\because$ 式（3.36）

$= A^* \cdot (\vec{b} - AX_k)$ $\because$ 式（3.35）

が判る． □

## 付録 2（パターンモデル$T\varphi \in \Phi$ のユニタリ座標変換不変性・共変性）

本付録 2 では，"式（2.17）で示されるパターンモデル$T\varphi \in \Phi$ のユニタリ座標変換不変性・共変性（第 6 章）"を証明する．この不変性・共変性式は式（2.17）で示されるパターンモデル$T\varphi \in \Phi$ がパターン$\varphi \in \Phi$ から抽出された各特徴量$u(\varphi, k)$を直交展開係数に持つ 1 次形式であることから従うのである．この不変性・共変性は，意味ある性質は必ず，ある変換の下で不変量（invariants）になっていなければならない［A16］，［A17］，［A37］という立場からは，パターンモデル構造形式（2.17）がMinsky-Paperのパーセプトロン理論での群不変定理（group invariance theorem）［A37］の指摘するのと同様な不変・共変構造形式であることを暗示している．

### A2.1 直交系の，閉部分空間 $\mathfrak{H}_0^{\perp}$ でのユニタリ座標変換

本節では，式（5.1）を満たす直交系$\{\phi_k\}_{k \in L}$ が

$$\forall k \in L, (\eta, \phi_k) = 0 \Rightarrow \|\eta\| = 0 \tag{A2.1}$$

を満たすとき，完全（completeness）であるといわれる．直交系$\{\psi_k\}_{k\in L}$が完全であるとは限らないとして，完全であるとしているこれまでの研究［A18］，［A40］を一般化する．

$$\forall\eta\in\mathfrak{H},\ \|U\eta\|=\|\eta\| \tag{A2.2}$$

を満たす線形作用素Uは，ユニタリ作用素（unitary　operator）であるといわれる．$n$ 次元ユークリッド空間$R^n$を特別な場合として表現可能な可分なヒルベルト$\mathfrak{H}$では，直交系は座標軸の集合（基底）に相当し，$\mathfrak{H}$での座標変換とはユニタリ作用素のことであること，つまり，次の命題A2.1に先ず，注意しておく．

［命題A2.1］

（ i ）$U_1$，$U_2$がユニタリ作用素であるならば，$U_1\cdot U_2$はユニタリ作用素である．

（ ii ）ユニタリ作用素$U$に対し，その共役作用素$U^*$はユニタリ作用素であり，実は，$U^*=U^{-1}$である．

（iii） 2 つの完全正規直交系$\{\psi_k\}_{k\in L}$，$\{\eta_k\}_{k\in L}$に関し，

$$\forall k\in L,\ \eta_k=U\psi_k\wedge\|\psi_k\|=\|\eta_k\|=1 \tag{A2.3}$$

というように定義される線形変換$U$はユニタリ作用素である．□

直交系$\{\psi_k\}_{k\in L}$から，同様な正規直交系$\{\eta_k\}_{k\in L}$を構成しよう．

直交系$\{\psi_k\}_{k\in L}$に対し，

$$\mathfrak{H}_0\equiv\{\eta\in\mathfrak{H}\,|\,\forall k\in \mathrm{L},\ (\eta,\psi_k)=0\} \tag{A2.4}$$

を定める．$\mathfrak{H}_0$は閉部分空間である．$\mathfrak{H}_0$の直交補空間

$$\mathfrak{H}_0^{\perp}\equiv\{\varphi\in\mathfrak{H}\,|\,\forall\eta\in\mathfrak{H}_0,\ (\varphi,\eta)=0\} \tag{A2.5}$$

も閉部分空間であって，ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$は

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_0^{\perp}\oplus\mathfrak{H}_0 \tag{A2.6}$$

と，直交直和分解される．つまり，

任意の$\varphi\in\mathfrak{H}$に対し，$\varphi_0\in\mathfrak{H}$が定まり，

$$\varphi=\varphi_0^{\perp}+\varphi_0\in\mathfrak{H}\wedge(\varphi_0^{\perp},\varphi_0)=0 \tag{A2.7}$$

が成り立つ．$\delta_{km}$を，

$$\delta_{km}=1\quad \text{if}\quad \mathrm{k}=\mathrm{m},\ =0\quad \text{if}\quad \mathrm{k}\neq\mathrm{m} \tag{A2.8}$$

と定義する．直交系$\{\psi_k\}_{k\in L}$の添字集合Lは無限集合であっても良いことに注意し，2 条件

$$\sum_{q\in L}u_{kq}\cdot\overline{u}_{mq}=\delta_{km} \tag{A2.9}$$

$$\sum_{q\in L}u_{qk}\cdot\overline{u}_{qm}=\delta_{km} \tag{A2.10}$$

を満たす複素定数$u_{km}$を第k行第m列の要素とする行列$\vec{U}=(u_{km})_{k,m\in L}$を用意する．

行列$\vec{U}$の例としては，例えば，

（一）$L=\{1,2\}$の場合，$\alpha$を任意の実数とし，

$$\vec{U}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix} \tag{A2.11}$$

$$\vec{U}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{A2.12}$$

$$\overleftrightarrow{U}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix} \tag{A2.13}$$

（二）（House-holder変換）$L=\{1, 2, \cdots, n\}$（有限集合），或いは，$L=\{1, 2, \cdots\}$（無限集合）の場合，$a_k$ を条件

$$\sum_{k\in L}|a_k|^2<\infty \tag{A2.14}$$

を満たす任意の複素定数として，

$$u_{km}=\delta_{km}-2\cdot a_k\cdot\overline{a}_m/\sum_{k\in L}|a_k|^2 \tag{A2.15}$$

がある．

この時，次の命題A2.2が成り立ち，直交系$\{\phi_k\}_{k\in L}$から正規直交系$\{\eta_k\}_{k\in L}$への座標軸変換が無数に存在することが判る［A16］．

［命題A2.2］（閉部分空間 $\mathfrak{H}_0^\perp$ での直交系の変換）

①これまでの$\{\phi_k\}_{k\in L}$は閉部分空間 $\mathfrak{H}_0^\perp$ の完全な直交系であり，

$$\eta_k\equiv\sum_{m\in L}u_{km}\cdot\phi_m\cdot\|\phi_m\|^{-1} \tag{A2.16}$$

と定義される$\eta_k$ の系$\{\eta_k\}_{k\in L}$も，同一閉部分空間 $\mathfrak{H}_0^\perp$ の完全な正規直交系である．

②任意の$\varphi'\in\in\mathfrak{H}$に対し，

$$\forall \mathrm{k}\in \mathrm{L},\ (\varphi_0',\eta_k)=0 \tag{A2.17}$$

を満たす$\varphi_0'\in\mathfrak{H}_0$が存在して，

$$\varphi'=\sum_{k\in L}(\varphi',\eta_k)\cdot\eta_k+\varphi_0' \tag{A2.18}$$

という直交展開式が成り立つ．

（証明）②は①から明らかである．

①を示そう．

系$\{\eta_k\}_{k\in L}$の，閉部分空間 $\mathfrak{H}_0^\perp$ での正規直交性については，

$$\begin{aligned}&(\eta_p,\eta_q)\\&=\sum_{m\in L}\sum_{k\in L}u_{pm}\cdot\overline{u}_{qk}\cdot(\phi_m\|\phi_m\|^{-1},\phi_k\|\phi_k\|^{-1})\\&=\sum_{m\in L}u_{pm}\cdot\overline{u}_{qm}\\&=\delta_{pq}\end{aligned} \tag{A2.19}$$

を得て，示された．系$\{\eta_k\}_{k\in L}$の，閉部分空間 $\mathfrak{H}_0^\perp$ での完全性について示そう．

$$\varphi\in\mathfrak{H}_0\Leftrightarrow\forall \mathrm{k}\in \mathrm{L},\ (\varphi,\eta_k)=0 \tag{A2.20}$$

を示せば良い．

$\Rightarrow$の証明：　$\varphi\in\mathfrak{H}_0\Rightarrow\forall \mathrm{m}\in \mathrm{L},\ (\varphi,\phi_m)=0$　(A2.21)

$$\Rightarrow\forall \mathrm{k}\in \mathrm{L},\forall \mathrm{m}\in \mathrm{L},\ \overline{u}_{km}\cdot(\varphi,\phi_m)=0 \tag{A2.22}$$

$$\Rightarrow\forall \mathrm{k}\in \mathrm{L},\sum_{m\in L}\overline{u}_{km}\cdot(\varphi,\phi_m\|\phi_m\|^{-1})=0 \tag{A2.23}$$

$\Rightarrow \forall k \in L,\ (\varphi, \eta_k) = 0$ （A2.24）

$\Leftarrow$の証明：$v_{km} \equiv \overline{u}_{mk}$ （A2.25）

を第k行第m列の要素とする行列$\vec{V} = (v_{km})_{k,\,m \in L}$を定義すると，２式（A2.9），（A2.10）は，$\vec{I}$を単位行列として，

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{I} \wedge \vec{V} \cdot \vec{U} = \vec{I} \quad \text{(A2.26)}$$

を意味する．つまり，$\vec{V}$は$\vec{U}$の逆行列である．よって，

$$\forall k \in L,\ (\varphi, \eta_k) = 0 \quad \text{(A2.27)}$$

$$\Rightarrow \forall k \in L, \sum_{m \in L} \overline{u}_{km} \cdot (\varphi, \phi_m \|\phi_m\|^{-1}) = 0 \quad \text{(A2.28)}$$

$$\Rightarrow \forall k \in L, \sum_{m \in L} u_{km} \cdot \overline{(\varphi, \phi_m \|\phi_m\|^{-1})} = 0 \quad \text{(A2.29)}$$

$\Rightarrow$行列$\vec{U} = (u_{km})_{k,\,m \in L}$の逆行列が$\vec{V} = (v_{km})_{k,\,m \in L}$として存在するから，

$$\forall m \in L, \overline{(\varphi, \phi_m \|\phi_m\|^{-1})} = 0 \quad \text{(A2.30)}$$

$$\Rightarrow \forall m \in L,\ (\varphi, \phi_m) = 0 \quad \text{(A2.31)}$$

□

更に，２式（2.24），（2.25）（式（6.1）を参照），並びに，上の命題A2.2の①などを使えば，次の命題６が成り立ち，直交系$\{\phi_k\}_{k \in L}$から正規直交系$\{\eta_k\}_{k \in L}$へのユニタリ作用素としての座標変換が無数に存在することが判る．

［命題A2.3］（閉部分空間$\mathfrak{H}_0^{\perp}$でのユニタリ座標変換）

式（A2.16）の$\eta_k$を仮に，

$$\eta_k = U(\{\phi_m \|\phi_m\|^{-1}; m \in L\})_k \quad \text{(A2.32)}$$

というように表現すると，約束しよう．このとき，

$$\forall k \in L,\ U(\{\phi_m \|\phi_m\|^{-1}; m \in L\})_k = \eta_k \quad \text{(A2.33)}$$

$$\wedge [\forall \varphi \in \mathfrak{H}_0,\ U\varphi = \varphi] \quad \text{(A2.34)}$$

と定義される線形作用素$U$はヒルベルト空間$\mathfrak{H}$上でのユニタリ作用素である． □

## A2.2　パターンモデル$T\varphi$のユニタリ座標変換不変性

### A2.2.1　自己共役作用素$H$と可換な座標変換としてのユニタリ作用素$U$と，その１例

直交系$\{\phi_k\}_{k \in L}$に対し，２性質

$$(\phi_k, \eta_m) = 0 \text{ for any k and m} \quad \text{(A2.35)}$$

$$(\eta_m, \eta_n) = 0 \text{ if } m \neq n \quad \text{(A2.36)}$$

を満たす直交系$\{\eta_k\}_{k \in L}$を導入し，

$$[\forall k \in L,\ (\eta, \phi_k) = 0] \quad \text{(A2.37)}$$

$$\wedge [\forall k \notin L,\ (\eta, \eta_k) = 0] \Rightarrow \|\eta\| = 0 \quad \text{(A2.38)}$$

が成り立つとすると，

$$\{\phi_k\}_{k \in L} \cup \{\eta_k\}_{k \notin L} \quad \text{(A2.39)}$$

は完全直交系である．よって，直交展開式

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H},\ \varphi = \sum_{k \in L} \frac{(\varphi, \phi_k)}{(\phi_k, \phi_k)} \cdot \varphi_k + \sum_{k \notin L} \frac{(\varphi, \eta_k)}{(\eta_k, \eta_k)} \cdot \eta_k \quad \text{(A2.40)}$$

が成り立つ．ここで，

$$|a_k| = 1 \text{ for any } k \in L \quad \text{(A2.41)}$$

$$\wedge |b_k| = 1 \text{ for any } k \notin L \quad \text{(A2.42)}$$

を満たす任意の複素定数$a_k$，$b_k$の 2 つの組$\{a_k\}_{k\in L}$，$\{b_k\}_{k\notin L}$と，式（A2.39）の完全直交系$\{\psi_k\}_{k\in L} \cup \{\eta_k\}_{k\notin L}$とを用いて，

$$U\varphi = \sum_{k\in L} a_k \frac{(\varphi, \psi_k)}{(\psi_k, \psi_k)} \cdot \psi_k + \sum_{k\notin L} b_k \frac{(\varphi, \eta_k)}{(\eta_k, \eta_k)} \cdot \eta_k$$

$$\text{for any } \varphi \in \mathfrak{H} \quad \text{(A2.43)}$$

と定義される線形作用素$U$ について，

$$\|U\varphi\|^2 = \sum_{k\in L} |a_k|^2 \cdot |(\varphi, \psi_k \|\psi_k\|^{-1})|^2 + \sum_{k\notin L} |b_k|^2 \cdot |(\varphi, \eta_k \|\eta_k\|^{-1})|^2 \quad \text{(A2.44)}$$

$$= \sum_{k\in L} |(\varphi, \psi_k \|\psi_k\|^{-1})|^2 + \sum_{k\notin L} \|(\varphi, \eta_k \|\eta_k\|^{-1})|^2 \quad \text{(A2.45)}$$

$$= \|\varphi\|^2 \text{ for any } \varphi \in \mathfrak{H} \quad \text{(A2.46)}$$

を得，線形作用素$U$ は，

$$H\varphi = \sum_{k\in L} \lambda_k \frac{(\varphi, \psi_k)}{(\psi_k, \psi_k)} \cdot \psi_k + \sum_{k\notin L} \lambda_k \frac{(\varphi, \eta_k)}{(\eta_k, \eta_k)} \cdot \eta_k$$

$$\text{for any } \varphi \in \text{Domain}(H) \quad \text{(A2.47)}$$

ここに，

k ∈ Lのとき，$\lambda_k$ は非零実定数

k ∉ Lのとき，$\lambda_k$ は零であって良い実定数 （A2.48）

と定義される自己共役作用素$H$ と可換な座標変換としてのユニタリ作用素であり，

①$\forall\varphi \in \mathfrak{H}, \forall k \in L, (U\varphi, \psi_k) = a_k \cdot (\varphi, \psi_k)$ （A2.49）

②$\forall\varphi \in \mathfrak{H}, \forall k \notin L, (U\varphi, \eta_k) = b_k \cdot (\varphi, \eta_k)$ （A2.50）

が成り立つ．

例えば，内積$(\varphi, \eta)$として，

$$(\varphi, \eta) = \int_a^b dx\varphi(x) \cdot \overline{\eta}(x), \ -\infty < a < b < +\infty \quad \text{(A2.51)}$$

を採ろう．$k$ を任意の整数として，複素指数関数

$$\psi_k(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{b-a}} \cdot \exp(+i\lambda x) \ \text{ for } k \in L \equiv \{k | k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm q\} \quad \text{(A2.52)}$$

ここに，$i \equiv \sqrt{-1}, \lambda_k \equiv \dfrac{k\,2\pi}{b-a}$ （A2.53）

$$\eta_k(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{b-a}} \cdot \exp(+i\lambda x) \ \text{ for } k \notin L \equiv \{k | k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm q\} \quad \text{(A2.54)}$$

を考えよう．この式（A2.39）の$\{\psi_k\}_{k\in L} \cup \{\eta_k\}_{k\notin L}$ for $k \in L \equiv \{k | k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm q\}$は完全正規直交系である．式（A2.48）の自己共役作用素$H$ は，実は，

$$H \equiv \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{d}{dx} \quad \text{(A2.55)}$$

である．任意の$\varphi(x) \in \mathfrak{H}$は，

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \quad \text{(A2.56)}$$

ここに，$\varphi_1(x) \equiv \sum_{k \in L} (\varphi, \phi_k) \cdot \phi_k(x)$ （A2.57）

$$\varphi_2(x) \equiv \sum_{k \notin L} (\varphi, \eta_k) \cdot \eta_k(x) \quad \text{（A2.58）}$$

と直交展開され，この時，式（A2.43）の各$a_k$，各$b_k$を，

$a_k = \exp(-i\lambda_k t)$ （$t$ は任意の実数），$b_k = 1$ （A2.59）

を採れば，式（A2.43）の$U\varphi$について，

$(U\varphi)(x) = (\exp(-itg(H))\varphi)(x)$

ここに，$g(\lambda_k) = \lambda_k$ if $k \in L$, $= 0$ if $k \notin L$ （A2.60）

という“指数関数表現”が成り立ち，等式

$$(U\varphi)(x) = \varphi_1(x-t) + \varphi_2(x) \quad \text{（A2.61）}$$

が成立することに注意しておく．

特に，集合Lを，すべての整数の集合に採れば，

$$(U\varphi)(x) = \varphi(x-t) \quad \text{（A2.62）}$$

を得て，線形作用素$U$はパターン$\varphi$に対し$t$，だけ並行移動させる機能を持つユニタリ作用素であることが判る．次節の定理A2.1から判るように，不変性$TU = T$が成り立ち，パターンモデル$T\varphi$は知覚心理学でいう知覚の働き

“位置ずれに関する恒常性［A25］，［A33］（parallel-translation constancy）”

を備えている．

### A2.2.2　モデル$T\varphi$のユニタリ座標変換不変性

$g_k(y_m, m \in L)$ は多変数$y_m (m \in L)$ の実数値関数として，パターン$\varphi \in \Phi$から抽出される第k∈L番目の特徴量$u(\varphi, k)$が，

$$u(\varphi, k) \equiv g_k(|(\varphi, \phi_m)|^2, m \in L), k \in L \quad \text{（A2.63）}$$

と表わされるとし，式（2.17）の$T\varphi$のごとく，

$$T\varphi \equiv \sum_{k \in L} u(\varphi, k) \cdot \phi_k$$
$$= \sum_{k \in L} g_k(|(\varphi, \phi_m)|^2, m \in L) \cdot \phi_k \quad \text{（A2.64）}$$

と定義される写像$T : \Phi \to \Phi$について，式（A2.43）で定義されるユニタリ作用素$U$について，ユニタリ座標変換不変性

$$\forall \varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}, T(U\varphi) = T\varphi \quad \text{（A2.65）}$$

が成り立つことが，6.2.1項の式（6.16）で指摘されている．

この事実は更に、以下のごとく一般化される。

式（A2.65）のユニタリ座標変換不変性は更に，以下のごとく，一般化される．

$$H\eta = \sum_{k \in L} \cdot \lambda_k \frac{(\eta, \phi_k)}{(\phi_k, \phi_k)} \cdot \phi_k \text{ for any } \eta \in \mathrm{Domain}(H)$$

ここに，各$\lambda_k$は非零実定数 （A2.66）

と定義される線形作用素$H$は自己共役作用素である．直交系$\{\eta_k\}_{k \notin L}$を想定し，式（A2.39）の完全直交系$\{\phi_k\}_{k \in L} \cup \{\eta_k\}_{k \notin L}$を用意すると，

$H\varphi = 0$を満たす$\varphi \in \mathrm{Null}(H)$は，

$$\varphi = \sum_{k \notin L} \frac{(\varphi, \eta_k)}{(\eta_k, \eta_k)} \cdot \eta_k \tag{A2.67}$$

と表現される

ことになる．ここで，

各$S_k$（$\subset R$（実数全体の集合））を，$H$ の第k∈L番目の固有値$\lambda_k$ のみを含むBorel可測部分集合［A2］として，Borel可測関数$\theta_k(H)$を

$$\theta_k(\lambda) \equiv 1 \text{ if } \lambda \in S_k, \equiv 0 \text{ if } \lambda \notin S_k \tag{A2.68}$$

と定義する

ものとすれば，各$\theta_k(H)$は射影作用素であり，

$$\forall \ell \in \mathrm{L}, \theta_\ell(H)\varphi = \sum_{\lambda_k \in S_\ell} \frac{(\eta, \psi_k)}{(\psi_k, \psi_k)} \cdot \psi_k = \frac{(\eta, \psi_\ell)}{(\psi_\ell, \psi_\ell)} \cdot \psi_\ell \text{ for any } \varphi \in \mathfrak{H} \tag{A2.69}$$

とスペクトル表現される．このとき，式（A2.65）のユニタリ座標変換不変性を一般化している次の定理A2.1が成り立つ．

［定理A2.1］（パターンモデル$T\varphi$ のユニタリ座標変換不変性定理）

パターン$\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$から抽出される第k∈L番目の特徴量$u(\varphi, k)$が，式（A2.63）のごとく設定された式（A2.64）でのパターンモデル$T\varphi$ に対し，式（A2.66）の自己共役作用素$H$ と可換な任意のユニタリ作用素$U$ について，

$$\forall \varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}, TU\varphi = T\varphi \tag{A2.70}$$

が成り立つ．

（証明）各射影作用素$\theta_k(H)$の定義式（A2.69）に注意すると，任意の$\varphi \in \mathfrak{H}$に対し，表現

$$|(\varphi, \psi_k \|\psi_k\|^{-1})|^2$$

$$= |((\varphi, \psi_k \|\psi_k\|^{-1}) \cdot \psi_k \|\psi_k\|^{-1}, \varphi)| \tag{A2.71}$$

$$= (\theta_k(H)\varphi, \varphi) \text{ for any k} \in \mathrm{L} \tag{A2.72}$$

が成り立つ．式（A2.66）の自己共役作用素$H$と可換な任意の有界作用素$B$は$H$の関数としての各射影作用素$\theta_k(H)$と可換であるから［A2］

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H}, B\theta_k(H)\varphi = \theta_k(H)B\varphi \tag{A2.73}$$

が成り立つ．特に，$B$として，$H$と可換な任意のユニタリ作用素$U$ を考えることが出来，$\varphi$の代りに$U\varphi$ を考え，式（A2.72）を適用して，

$$|(U\varphi, \psi_k \|\psi_k\|^{-1})|^2 = (\theta_k(H)U\varphi, U\varphi) \tag{A2.74}$$

$= (U\theta_k(H)\varphi, U\varphi)$ ∵ 式（A2.73）

$= (\theta_k(H)\varphi, \varphi)$ ∵ $U$ はユニタリ作用素

$= |(\varphi, \psi_k \|\psi_k\|^{-1})|^2$ ∵ 式（A2.72）

$$\therefore \quad |(U\varphi, \psi_k)|^2 = |(\varphi, \psi_k)|^2 \text{ for any k} \in \mathrm{L} \tag{A2.75}$$

を得て，パターン$\varphi \in \Phi$ から抽出される第k∈L番目の特徴量$u(\varphi, k)$が，式（A2.63）のごとく設定されているから，

$$\forall \mathrm{k} \in \mathrm{L}, u(U\varphi, k) = u(\varphi, k) \tag{A2.76}$$

が成り立ち，式（A2.64）でのパターンモデル$T\varphi$ の定義を思い起こすと，本定理A2.1の成立が判明する．□

### A2.3　パターンモデル$T\varphi$のユニタリ座標変換共変性

$g_k\,(y_m,\, m \in L)$は多変数$y_m\,(m \in L)$の実数値関数として，パターン$\varphi \in \Phi$から抽出される第k∈L番目の特徴量$u\,(\varphi, k)$が，式（A2.63）とは異なり，２式（2.24），（2.25）での各直交展開係数$(\varphi, \phi_m)$の絶対値の自乗をとらないで（式（6.1）を参照），

$$u\,(\varphi, k) \equiv g_k\,((\varphi, \phi_m),\, m \in L),\ k \in L \tag{A2.77}$$

と表わされるとし，式（2.17）の$T\varphi$のごとく，

$$T\varphi \equiv \sum_{k \in L} u\,(\varphi, k)\cdot\phi_k$$

$$= \sum_{k \in L} g_k\,((\varphi, \phi_m),\, m \in L)\cdot\phi_k \tag{A2.78}$$

と定義される写像$T : \Phi \to \Phi$について，考えよう．

直交系$\{\phi_k\}_{k \in L}$について，ユニタリ作用素$U$を用意し，

$$\forall k \in L,\ \phi_k' \equiv U^{-1}\phi_k \tag{A2.79}$$

と定義される$\{\phi_k'\}_{k \in L}$も直交系であり，この直交系$\{\phi_k'\}_{k \in L}$を用い，パターン$\eta \in \Phi$から抽出される第k∈L番目の特徴量$u'\,(\eta, k)$を，

$$u'\,(\eta, k) \equiv g_k\,((\eta, \phi_m'),\, m \in L),\ k \in L \tag{A2.80}$$

と定義して得られるパターンモデル

$$T'\eta \equiv \sum_{k \in L} u'\,(\eta, k)\cdot\phi_k' \tag{A2.81}$$

$$= \sum_{k \in L} g_k\,((\eta, \phi_m')\, m \in L)\cdot\phi_k'$$

を導入しよう．

次の定理A2.2は，任意のユニタリ作用素$U$について，式（A2.78）で定義されるモデル構成作用素$T : \Phi \to \Phi$とユニタリ同値なモデル構成作用素

$$U^{-1}TU : \Phi \to \Phi \tag{A2.82}$$

が，式（A2.81）で定義される写像$T'$であることを指摘している．

［定理A2.2］（パターンモデル$T\varphi$のユニタリ座標変換共変性定理）

直交系$\{\phi_k\}_{k \in L}$，並びに，この直交系$\{\phi_k\}_{k \in L}$から任意のユニタリ作用素$U$を用い，式（A2.79）のように定義して得られる今１つの直交系$\{\phi_k'\}_{k \in L}$とを使って，２式（A2.78），（A2.81）で定義される２つのモデル構成作用素$T$，$T'$の間に，次の関係がある：

$$\forall \eta \in \Phi,\ TU\eta = UT'\eta. \tag{A2.83}$$

（証明）A2.1節での命題A2.1の（ⅱ）と式（A2.79）とにより，

$$\forall \eta \in \Phi,\ (U\eta, \phi_k) = (\eta, U^{-1}\phi_k) = (\eta, \phi_k')\ \text{ for any k} \in \text{L} \tag{A2.84}$$

が得られ，よって，２式（A2.77），（A2.80）を考慮すると，任意の$\eta \in \Phi$に対し，

$$U^{-1}TU\eta = U^{-1}\cdot\sum_{k \in L} u\,(U\eta, k)\cdot\phi_k \quad \because\ \text{式（A2.78）} \tag{A2.85}$$

$$= \sum_{k \in L} u\,(U\eta, k)\cdot U^{-1}\phi_k \tag{A2.86}$$

$$= \sum_{k \in L} u\,(U\eta, k)\cdot\phi_k' \quad \because\ \text{式（A2.79）}$$

$$= \sum_{k \in L} u'(\eta, k) \cdot \phi_k' \quad \because \quad 式（A2.84） \tag{A2.87}$$

$$= T'\eta \quad \because \quad 式（A2.81） \tag{A2.88}$$

を得て，証明されたことが判る． □

尚，命題A2.3から判るように，一般には直交系$\{\phi_k\}_{k \in L}$は完全ではないが，完全系である場合には，2 定理A2.1，A2.2は文献［A18］の4.3, 4.4両節で論じられている不変性，共変性の特別なものに過ぎない．

## 付録 3（エントロピーと，情報理論的次元）

確率ベクトル$\vec{p} = (p_i)_{1 \leq i \leq n}$の非負実数値関数

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log_e p_i \tag{A3.1}$$

は，分布$\vec{p}$の広がり，平坦さ（spread，diversity，uniformity）の程度を表わし，シャノンの平均情報量，エントロピー（average amount of information suggested by Shannon，entropy）といわれるものである．本章では，式（2.27）の特徴抽出写像$u$を用いて特徴抽出したとき，

$$\sum_{k \in L} |u(\varphi, k)|^2 = 1 \tag{A3.2}$$

が満たされる従来の場合［A17]，［A19]，［A22］を拡張した形で，

（1$）パターン$\varphi \in \Phi$，パターン$\varphi$の有限集合$\Phi_B \subset \Phi \subset \mathfrak{H}$の，式（A2.6）での閉部分空間$\mathfrak{H}_0^{\perp}$内の広がりの測度としてのエントロピー$ETPY(\varphi)$，$ETPY(\Phi_B)$

（2$）パターンモデル$T\varphi \in \Phi$とモデル$T\varphi$の有限集合

$$T \cdot \Phi_B \equiv \{T\varphi | \varphi \in \Phi_B\} \tag{A3.3}$$

が必要とされる特徴軸$\phi_k \in \Phi \subset \mathfrak{H}$の個数を実数の形で評価出来る情報理論的次元（information-theoretic dimension）$DIM(T\varphi)$，$DIM(T \cdot \Phi_B)$が提案され，その備えている諸性質が指摘される（2 定理A3.1，A3.2）．線形ベクトル集合の数学的次元とは，この集合に含まれている 1 次独立なベクトルの総数であるが，この数学的次元を一般化した情報理論的次元が$DIM(\Phi_B)(= DIM(T \cdot \Phi_B))$が提案されるのである．

尚，tree classifiersを採用した従来のパーセプトロン法を適用し，処理の対象とされた30個の手書き漢字パターン$\varphi_m$, $m = 1 \sim 30$が，すべて正しく認識されている計算機シミュレーション［A20]，[A21］において，手書き漢字パターン$\varphi$のエントロピー$ETPY(\varphi)$が，式(6.40)の直交系$\{\phi_k\}_{k \in L}$を採用し，回転、縮小・拡大という 2 つの座標変換の下で不変なパターンモデル$T\varphi$を求める際，$\varphi$の形状の複雑さの程度を表わす事実［A19］が明らかになっている．

### A3.1　パターンエントロピーとパターン次元

エントロピー関数$-x \cdot \log_e x \ (0 \leq x \leq 1)$に関し，次の命題A3.1が成り立つことは，良く知られており，式（A3.1）のエントロピーが広がりの測度としての性質を備えていると解釈され得る根拠を与えている．

［命題A3.1］（エントロピーの減少定理）

確率条件

$$[\forall q \in k,\ 0 \leq x_q \leq 1] \wedge \sum_{q \in k} x_q = 1 \tag{A3.4}$$

の下では，

相異なる$k$，$m \in K$に対し，ある非負実数$\delta$が存在して，

$$0 \leq x_k \leq x_m \leq 1 \tag{A3.5}$$

$$\wedge\, 0 \leq x_k{}' \equiv x_k - \delta \leq x_m{}' \equiv x_m + \delta \leq 1 \tag{A3.6}$$

$$\wedge\, [\forall q \in K - \{k,\ m\},\ x_q{}' \equiv x_q] \tag{A3.7}$$

であれば，不等式

$$-\sum_{q \in k} x_q{}' \cdot \log_e x_q{}' \leq -\sum_{q \in k} x_q \cdot \log_e x_q \tag{A3.8}$$

が成り立つ．等号が成り立つのは，$\delta = 0$のときに限る．　□

上の命題A3.1を，clustered featuresを評価するために適用し，$ETPY\,(\varphi)$，$DIM\,(\varphi)$を以下のごとく，定義しよう．

式（2.27）の特徴抽出写像$u : \Phi \times L \to Z$から得られる第$k \in L$番目の特徴量$u\,(\varphi,\ k) \in Z$に注目し，その総和が 0 あるいは 1 になる非負規格化量

$$q\,(\varphi,\ k) \equiv \begin{cases} 0 \cdots \forall k \in L,\ u\,(\varphi,\ k) = 0\ \text{のとき} \\ |u\,(\varphi,\ k)|^2 / \sum_{k \in L} |u\,(\varphi,\ k)|^2 \cdots \exists k \in L,\ u\,(\varphi, k) \neq 0\ \text{のとき} \end{cases} \tag{A3.9}$$

を用意し，$0 \cdot \log_e 0 = 0$の計算規則を採用して，パターンエントロピー（the pattern entropy）$ETPY\,(\varphi)$を，

$$ETPY\,(\varphi) \equiv -\sum_{k \in L} q\,(\varphi,\ k) \cdot \log_e q\,(\varphi,\ k) \tag{A3.10}$$

と定義しよう．この式（A3.10）のエントロピー$ETPY\,(\varphi)$は，$u\,(\varphi,\ k)$として，文献［A17］の第 4 章，定義 4 での，S. Suzukiの提案による 2 値化測度的ユニタリ不変量を採用すれば，そこでの第 4 章，定義 7 の情報量AMASに一致するものであるが，式（A3.2）が成り立つ場合の$ETPY\,(\varphi)$は，既に定義されている［A22］．パターン$\varphi \in \Phi$のエントロピーと称される式（A3.10）の$ETPY\,(\varphi)$を使い，$0^0 = 1$の計算規則を採用して，パターン$\varphi \in \Phi$の情報理論的次元（the pattern information-theoretic dimension）$DIM\,(\varphi)$を，

$$DIM\,(\varphi) \equiv \exp\,(ETPY\,(\varphi)) = \begin{cases} 1 \quad \text{if } \forall k \in L,\ u\,(\varphi,\ k) = 0 \\ \Pi_{k \in L} \dfrac{1}{q\,(\varphi,\ k)^{q\,(\varphi, k)}} \quad \text{if } \exists k \in L,\ u\,(\varphi,\ k) \neq 0 \end{cases} \tag{A3.11}$$

と定義しよう［A22］．明らかに，

（1）不等式

$$\forall \varphi \in \Phi,\ 1 \leq DIM\,(\varphi) \leq |L|\ \text{（集合}L\text{内の要素の総数）} \tag{A3.12}$$

が成り立ち，

$$\exists \mathrm{k} \in \mathrm{L},\ \mathrm{u}\,(\varphi,\ k) \neq 0 \tag{A3.13}$$

のとき

$$\text{（1.1＃）}\ DIM\,(\varphi) = 1 \tag{A3.14}$$

$\Leftrightarrow \exists k \in L,\ [\ u(\varphi, k) \neq 0]$ （A3.15）

$\wedge\ [\forall m \in L - \{k\},\ u(\varphi, m) = 0]$ （A3.16）

（1.2＃） $DIM(\varphi) = |L|$ （A3.17）

$\Leftrightarrow \forall k \in L,\ |u(\varphi, k)|^2 = C$ （$k \in L$に無関係な定数）$\neq 0$ （A3.18）

が成り立つ．

次の定理A3.1は，次の事実を指摘している：$DIM(\varphi)$は，パターン$\varphi$をモデル$T\varphi$として表現したとき，$|L|$個の直交軸$\phi_k$，$k \in L$の内，何本の直交軸が必要とされるかを，情報理論的に評価したものである．

［定理A3.1］（パターン次元定理）

（ｉ）$\forall k \in L,\ DIM(\phi_k) = 1.$ （A3.19）

（ⅱ）$\exists D \in Z,\ T\varphi = D \cdot \sum_{k \in L} \phi_k \in \mathfrak{H}$ （A3.20）

の場合，

$DIM(\varphi) = |L|.$ （A3.21）

（ⅲ）6.2，6.3節の２式（6.9），（6.21）での特徴抽出写像$u : \Phi \times L \to R^+$については，式（5.32）或いは，式（A2.66）の自己共役作用素$H$と可換な任意のユニタリ作用素$U$に対し，

$\forall \varphi \in \Phi,\ DIM(U\varphi) = DIM(\varphi).$ （A3.22）

（ⅳ）$\forall \varphi \in \Phi,\ DIM(T\varphi) = DIM(\varphi)$ （A3.23）

（ｖ）式（A2.7）の直交分解について，

$\forall \varphi \in \Phi,\ DIM(\varphi) = DIM(\varphi_0^{\perp}).$ （A3.24）

（証明）（ｉ）は，付録２の４種類のモデル$T\varphi$が

$\forall m \in L,\ u(\phi_k, m) = 1 \text{ if } m = k,\ = 0 \text{ if } m \neq k$ （A3.25）

を満たすことから，明らかである．

（ⅱ）は，直交系$\{\phi_k\}_{k \in L}$は１次独立であることを考慮すると，上述の（1.2＃）から，明らかである．

（ⅲ）は，$u : \Phi \times L \to R^+$のユニタリ不変性を表わしている式（A2.76）から，明らかである．

（ⅳ）は，直交系$\{\phi_k\}_{k \in L}$が１次独立であり，付録２の４種類のモデル構成作用素$T : \Phi \to \Phi$が，ベキ等性$T \cdot T = T$を満たし，よって，

$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall k \in L,\ u(T\varphi, k) = u(\varphi, k)$ （A3.26）

を得ることから，明らかである．

（ｖ）は，４式（6.9），（6.21），（6.27），（6.34）での u が

$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall k \in L,\ u(\varphi, k) = u(\varphi_0^{\perp}, k)$ （A3.27）

を満たすことから，明らかである． □

定理A3.1について，その意味を簡単に説明しておこう．

先ず，（ｉ）は，各$\phi_k$は座標軸であるから，要求されて当然の性質である．

（ⅱ）についても，各座標軸$\phi_k$が同等の役割を果たしている場合であるから，$DIM(\varphi)$がいわゆる数学的次元と一致して，当然である．

（ⅲ）は，$H$と可換な座標変換としての任意のユニタリ作用素$U$については，この$U$によって座標軸の系$\phi_k$，$k \in L$が変換されて得られる場合の座標軸の系$U\phi_k$，$k \in L$内の各$U\phi_k$が原座標軸の系$\phi_k$，$k \in L$内の同じ番号を持つ座標軸$\phi_k$のみと繋がりを持っているだけであるという事実の反映として，２つのモデル$TU\varphi$，$T\varphi$について，互いに，その空間的広がりが当然な

がら，一致するという事実を説明しているに過ぎない．

（iv）は，パターン $\varphi \in \Phi$ に対応するモデル $T\varphi \in \Phi$ は，閉部分空間 $\mathfrak{H}_0^{\perp}$ 内で原パターン $\varphi$ と同一の次元を持ち，原パターン $\varphi$ から必要な情報を除去し過ぎていないという“望ましい次元保存性”を指摘している．

（v）は，閉部分空間 $\mathfrak{H}_0^{\perp}$ の直交補空間である閉部分空間 $\mathfrak{H}_0$ 内の加法的雑音 $\varphi_0$ の次元を除去し，$DIM\,(\varphi)$ が得られている事実を説明している．

定理A3.1についての以上の説明は，6.1節で説明された抽象化の手法が反映された形式で、パターン $\varphi$ の次元 $DIM\,(\varphi)$ が定義されていることを暗示している．

### A3.2　パターン集合 $\Phi_B$ のエントロピーと，次元

式（6.43）でも用いられた基礎領域（the basic domain）$\Phi_B$ がN個のパターンからなり，

$$\Phi_B \equiv \{\varphi\langle i\rangle | i = 1 \sim N\} \tag{A3.28}$$

と表わされる場合を想定しよう．

$$[\forall \mathrm{i} = 1 \sim N,\ 0 \leqq \mathrm{prob}\{\varphi\langle i\rangle\}] \tag{A3.29}$$

$$\wedge \sum_{i=1}^{N} prob\,\{\varphi\langle i\rangle\} = 1 \tag{A3.30}$$

を満たす第i（= 1 ~ N）番目のパターン $\varphi\langle i\rangle$ の生起確率 $\mathrm{prob}\{\varphi\langle i\rangle\}$ を導入し定義される非負量

$$\begin{aligned}\rho_k &\equiv \rho_k\,(\Phi_B)\\ &\equiv \sum_{i=1}^{N} prob\,\{\varphi\langle i\rangle\}\cdot q\,(\varphi\langle i\rangle, k)\end{aligned} \tag{A3.31}$$

は，

$$[\forall \mathrm{k} \in \mathrm{L},\ 0 \leqq \rho_k] \tag{A3.32}$$

$$\wedge \sum_{k \in L} \rho_k \in \{0, 1\} \tag{A3.33}$$

を満たし，この $\rho_k$ の組 $\{\rho_k\}_{k \in L}$ を用い定義されるエントロピー

$$ETPY\,(\Phi_B) \equiv \begin{cases} 0 \cdots \forall \mathrm{k} \in \mathrm{L},\ \rho_k = 0 \text{ のとき} \\ -\sum_{k \in L} \rho_k \cdot \log_e \rho_k \ \cdots\ \exists \mathrm{k} \in \mathrm{L},\ \rho_k \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{A3.34}$$

を考えよう．パターンの有限集合 $\Phi_B$ のエントロピーと称される $ETPT\,(\Phi_B)$ を用い，$\Phi_B$ の情報理論的次元 $DIM\,(\Phi_B)$ を

$$DIM\,(\Phi_B) \equiv \exp\,(ETPY\,(\Phi_B)) = \begin{cases} 1 \cdots \forall \mathrm{k} \in \mathrm{L},\ \rho_k = 0 \text{ のとき} \\ \Pi_{k \in \mathrm{L}} \dfrac{1}{\rho_k^{\rho_k}} \cdots \exists \mathrm{k} \in \mathrm{L},\ \rho_k \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{A3.35}$$

と定義する．$\Phi_B$ 内のパターン総数Nが1の場合，2式（A3.34），（A3.35）での $ETPY\,(\Phi_B)$，$DIM\,(\Phi_B)$ は各々，2式（A3.10），（A3.11）での $ETPY\,(\varphi)$，$DIM\,(\varphi)$ に一致することに，注意しておこう．

写像

$$F : \Phi \to \Phi \tag{A3.36}$$

による，パターン集合$\Phi_B$の像$F \cdot \Phi_B$を，

$$F \cdot \Phi_B \equiv \{F\varphi \mid \varphi \in \Phi_B\} \qquad \text{(A3.37)}$$

と定義しよう．次の定理A3.2の成立は，定理A3.1から明らかである．

［定理A3.2］（パターンの有限集合$\Phi_B$の次元定理）

①式（5.29）の自己共役作用素$H$と可換な任意のユニタリ作用素$U$に対し，

$$DIM\,(U \cdot \Phi_B) = DIM\,(\Phi_B). \qquad \text{(A3.38)}$$

②$DIM\,(T \cdot \Phi_B) = DIM\,(\Phi_B).$ （A3.39）

③パターンの有限集合$\Phi_B$に対し，

$$\Phi^{\perp}_{B,0} \equiv \{\varphi_0\langle \mathrm{i}\rangle^{\perp} \mid \varphi\langle \mathrm{i}\rangle = \varphi_0\langle \mathrm{i}\rangle^{\perp} + \varphi_0\langle i\rangle \in \Phi_B \wedge [\forall k \in L,\ (\varphi_0\langle i\rangle, \psi_k) = 0,\ i = 1 \sim N\} \qquad \text{(A3.40)}$$

と定義された$\Phi^{\perp}_{B,0}$を求めると，

$$DIM\,(\Phi^{\perp}_{B,0}) = DIM\,(\Phi_B). \qquad \text{(A3.41)}$$

□

定理A3.2の意味は，定理A3.1から推測が付くだろうから，割愛する．唯だ，次の事実には，触れておくことは，$ETPY\,(\Phi_B)$，$DIM\,(\Phi_B)$と，従来のK−L直交系との関係を明らかにする．

直交系$\{\psi_k\}_{k \in L}$が正規としてみよう．6.2節でのユニタリ不変なパターンモデル$T\varphi$で考えてみよう．a flat-power propertyの式（6.7）が当然ながら満たされている．2式（6.9），（6.8）での$u\,(\varphi, k)$について，

$$\exists \mathrm{k} \in \mathrm{L},\ u\,(\varphi, k) \neq 0$$

⇒6.2節の規格化条件式（A3.2）が成立している （A3.42）

から，式（A3.9）の$q\,(\varphi, k)$について，

$$\forall \mathrm{k} \in \mathrm{L},\ q\,(\varphi, k) = u\,(\varphi, k) \qquad \text{(A3.43)}$$

が成立している．この時，

$\exists \mathrm{k} \in \mathrm{L}$，$\rho_k \neq 0$が満たされるパターン集合$\Phi_B$に対し，情報理論的次元$DIM\,(\Phi_B)$を最小にする正規直交系$\{\psi_k\}_{k \in L}$は，いわゆる，K−L直交系である （A3.44）

こと［A16］，［A17］，［A22］が知られている．K−L正規直交系$\{\psi_k\}_{k \in L}$を基底として採用したパターン$\varphi$の直交展開式（6.1）において，打ち切られた級数

$$\sum_{k \in L} (\varphi, \psi_k) \cdot \psi_k \qquad \text{(A3.45)}$$

が，その平均自乗誤差が最小になるという意味で原パターン$\varphi$の最良近似を与え，パターンモデル$T\varphi$がthe reduced order modeling of $\varphi$と考えられるのは，K−L直交系$\{\psi_k\}_{k \in L}$を採用したときの，情報理論的次元$DIM\,(\Phi_B)$の最小性に起因するのである．

同様に考えると，一般に，パターン集合$\Phi_B$の表現上の能率性が最も良い座標軸の集合$\{\psi_k\}_{k \in L}$が存在するとみなすならば，パターン集合$\Phi_B$を固定している限り，$DIM\,(\Phi_B)$を可能な限り小となる直交系$\{\psi_k\}_{k \in L}$を選定することが必要とされる，といえよう．

尚，文献［B22］の付録C（特徴抽出における不確定性原理）に本付録 3 に関連した研究がある．

（著者　鈴木昇一，論文題目　共役勾配法の一般解における直交系の 3 応用，文教大学情報学部情報研究no.30投稿論文，投稿年月日　2003年 9 月 1 日（月））