

2つのパターンモデル構成作用素の, λ 言語論理による合成法

鈴木 昇一

A Synthetic Method of Two Model-Construction Operators with the Help of λ -Language Logic

Shoichi Suzuki

要 約

パターンモデル $T\varphi$ とは原パターン φ と同じに見えたり、聞こえたりするようなものである (同一知覚原理)。このようなパターンモデル $T\varphi$ を出力する写像をモデル構成作用素という。

モデル構成作用素 T がパターン変形を吸収できるためには、零元不動点性、正定数倍不変性、ベキ等性、非零写像性という 4 性質を満たさなければならない。本論文では、2つのモデル構成作用素を合成し、新しい T を再帰的に得ることを試みる。2つのモデル構成作用素双方のパターン変形に関する吸収能力を統合した能力を持つ T を再帰的に得ることを試み、4 定理 2～5 を得ている。 T の集合は一般に単位元を持つ半群、線形空間などを形成しない (定理 1)。2 定理 2, 3 では、特徴抽出後定まる 2つのモデル構成作用素から、上述の 4 性質を満たすように、 T を再帰的に構成する min 手法、max 手法が研究されている。定理 4 では、2つのモデル構成作用素の合成積が再び、モデル構成作用素 T になるための条件が作用素同士の可換性であることが指摘されている。定理 5 では、殆ど無制限に 2つのモデル構成作用素からモデル構成作用素 T を再帰的に構成できる単方向積の存在と構造が明らかにされている。

キーワード

パターンモデル モデル構成作用素 再帰的構成 可換 λ 言語 単方向積

Abstract

If we see or hear a corresponding model of an original pattern, we often have a sense of seeing or hearing the original pattern as though the model were the original pattern (the same consciousness principle).

Such a mapping T that gives a model as its output is called a model-construction operator. T that can absorb some deformation which appears in patterns must four properties of (1) having 0 as its fixed-point, (2)

an invariance under a multiplication by any positive number, (3) an idempotency, and (4) non-zero mapping. A set of such model-construction operators can not necessarily build up a semigroup or a linear space (theorem 1).

By the use of two operators that are settled after extracting its features from the pattern in question, we can construct a T by taking the minimum or the maximum of the corresponding features extracted from the pattern. It is pointed out that a product T of two operators become a model-construction operators under a commutativity of their operators. Lastly We recursively construct a unidirectional product T of two operators which can become a model-construction operator almost without any restriction.

Key Words: pattern model model-construction operator recursive construction commutativity
 λ -Language unidirectional product

1. はじめに

1.1 本研究は何を解決したのか？

パターンというものは、その1部分が他のパターンに隠されて欠落していたり、変形して構造が崩れていたり、雑音に加わり変質していたり、座標変換がなされていたりする。欠落を補ったり、崩れる以前の状態に直したり、雑音を取り除いたり、座標変換がなされる前の状態（標準形）に戻したりする操作を、一般に、パターン正規化ということになっている。

従来のパターン正規化手法が解決できていない技術

“交換可能でない2つの正規化の操作（例えば、位置ずれと相似拡大・縮小を是正する2つの操作）を合成して、1つの正規化の操作として同時に実現すること” (1.1)

が、特に λ 言語論理の適用により合成する方法により解決したことが、2つのパターンモデル構成作用素を合成する数個の手法をあわせて研究した本論文の功績である。従来では、不可能とされていたことを、本論文が初めて解決したもので、他の研究者が全く、挑戦していなかったといえよう。

1.2 特徴を抽出した後、確保されるパターンモデル $T\varphi$

知能の働きは探索 (search)、推論 (inference)、学習 (learning) などによって実現される。

推論の動作を記号の操作で計算機により実現する場面を考えよう。

任意の命題論理式 (propositional logical formula) を節形式 (clausal form) へ変換するアルゴリズムは存在する。その結果、同じ意味を表すのに見かけ上異なる幾つかの論理式は1つの節形式で代表されることになり、この節形式を論理式の標準形 (canonical form) と考えると、以後の記号による論理推論動作が容易になることが知られている [A21]。

パターン正規化とは、パターンを対応するその標準形へ変換する働きであろう。

論理式の標準形としての節形式に対応して、パターン情報処理におけるパターン φ の標準形と考えられるものに、 φ に存在するかも知れないパターン変形などを吸取出来るS. Suzukiのパターンモデル $T\varphi$ がある [A1]～[A7]。

パターン φ を認識する動作は通常、

正規化→特徴抽出→識別 (1.2)

と、この順に処理されることによってなされる。認識システムが行う正規化の段階では、 φ の骨格を求めたり (本付録のA1を参照)、或いは、 φ の構造を求めたり (本付録のA2を参照)、或いは、座標

変換前の状態に戻したりして（本付録のA3.を参照），そのパターンモデル $T\varphi$ を得る．

認識システムは原パターン φ を処理する代りにそのパターンモデル $T\varphi$ を用い， $T\varphi$ から特徴抽出し，識別を行う．S. Suzukiの理論 [A1]～[A4] では，(5.1の③)が成立している場合，モデル $T\varphi$ からの特徴抽出は必要ないが，いわば，) 認識システムはパターンモデル $T\varphi$ をあたかも原パターン φ かのごとく，錯覚すると考えている．この錯覚は，**2性質**

(イ) モデル $T\varphi$ が原パターン φ と同じ特徴量を備えている

(ロ) $T\varphi$ のモデル $T(T\varphi)$ はそれ自身の $T\varphi$ である

の何れかの成立で保証されると考えられる（同一知覚原理）．

処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ から抽出された各特徴量 $u(\varphi, \ell)$ を係数に持つ1次形式

$$T \cdot = \sum_{\ell \in L} u(\cdot, \ell) \cdot \psi_{\ell} : \Phi \rightarrow \Phi \quad (1.3)$$

から得られる $T\varphi$ の1例は本付録のA2.で説明されており，この様な $T\varphi$ は2性質（イ），（ロ）を共に持つパターンモデルとして，採用できる [A1]～[A4]，[A7]，[B8]．ここに， $\{\psi_{\ell}\}_{\ell \in L}$ は可分なヒルベルト空間 Φ での1次独立な系である．

本付録のA1.，A3.で説明されているパターンモデル $T\varphi$ は構造形式（1.3）を備えていなくて，性質（ロ）を満たすのみであるが，この場合，処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ から第 $\ell \in L$ 番目の特徴量 $u'(\varphi, \ell)$ が抽出された場合，

$$u(\varphi, \ell) \equiv u'(\varphi, \ell) \quad (1.4)$$

と定義される $u(\varphi, \ell)$ を，パターン $\varphi \in \Phi$ から第 $\ell \in L$ 番目の特徴量として改めて採用すれば，以下の③のベキ等性 $T \cdot T = T$ から性質（イ）も成立することになる．

処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ から抽出される第 $\ell \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, \ell)$ として，ユニタリ座標変換に不変な測度的ユニタリ不変量の2値量0,1を選び，また，直交系 $\{\psi_{\ell}\}_{\ell \in L}$ （1次独立な系は直交系である）を選んでみよう．1次形式（1.3）を備えた写像

$$T : \Phi \rightarrow \Phi \quad (1.5)$$

による φ の像としてのパターン（パターンモデル） $T\varphi$ が原パターン φ と同じ特徴量を備えていること，言い替えれば，等式（写像 T の下での不変性）

$$\forall \ell \in L, u(T\varphi, \ell) = u(\varphi, \ell) \quad \text{for any } \varphi \in \Phi \quad (1.6)$$

が成立すること（位相情報復元可能定理）が，S. Suzukiによってパターン認識分野で初めて証明されている [A5]，[A1]，[A7]．そこでは，原パターン φ の構造を反映しているという意味で $T\varphi$ は φ の構造モデルと呼ばれている．式（1.3）の構造形式を持ち，特徴抽出後定まるパターンモデル $T\varphi$ を，正規化（の操作で得られた）パターンと想定すると，

$$\text{特徴抽出} \rightarrow \text{正規化} \rightarrow \text{識別} \quad (1.7)$$

と，通常の特徴抽出，正規化に関する処理順序が逆転することに注意しておこう．

1.3 パターンモデル $T\varphi$ の計算機シミュレーション諸例

その後， $\bar{\eta}$ を η の複素共役として，

$$M : q\text{次元ユークリッド空間 } R^q \text{ の可測部分集合} \quad (1.8)$$

$$\text{dm}(x) : \text{正值ルベーグ・スティルチェス式測度} \quad (1.9)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_q) \in M (\subseteq R^q) : \text{実数値 } q \text{ 変数の直交座標系} \quad (1.10)$$

を導入し，その内積 (φ, η) ，ノルム $\|\varphi\|$ を

$$(\varphi, \eta) = \int_M dm(x) \varphi(x) \cdot \overline{\eta}(x) \quad (1.11)$$

$$\|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)} \quad (1.12)$$

とする線形空間（ベクトル空間）としての可分な [A19] ヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ の特別な場合として，

$$M = R^2 \text{ (2次元全平面)} \quad (1.13)$$

$$dm(x) = [x_1^2 + x_2^2]^{-1} \cdot dx_1 dx_2 \quad (1.14)$$

を選び，本付録のA2.で説明されている構造形式 (1.3) のパターンモデル $(T\varphi)(x_1, x_2)$ が誤認識されない程度に手書き漢字パターン $\varphi(x_1, x_2)$ の構造を再生する能力を備えていることが，計算機シミュレーションで確かめられている [A6]．このパターンモデル $T\varphi$ は，

$$\begin{aligned} (S_t\varphi)(x_1, x_2) \\ = \varphi(x_1 \cdot \exp(-t), x_2 \cdot \exp(-t)) \end{aligned} \quad (1.15)$$

と定義される相似拡大・縮小のユニタリ作用素群 $\{S_t\}_{-\infty < t < +\infty}$ に不変であるように， φ を構造化されている．

更に，平行移動，回転に各々，不変な構造形式 (1.3) を備えたパターンモデル $T\varphi$ に関する計算機シミュレーションが続いてなされた [A8]，[A9]．構造形式 (1.3) を備えたパターンモデル $T\varphi$ は特徴エントロピーを保存することから，エントロピーモデルと称され，その総合的な研究 [A7] もなされ，このエントロピーモデルの簡易化版としての，直交系による構造形式 (1.3) を備えたパターンモデル $T\varphi$ が，パターン識別法としての部分空間法におけるパターンモデルであることが明らかにされた [A3]，[A4]，[A15]．

1.4 パターンモデル $T\varphi$ に要求される4条件①～④

一般に，処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ を可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の或る部分集合とすると [A3]，[A4]，パターンモデル $T\varphi$ を出力する式 (1.5) の写像 T に要求されるのは，次の4性質①～④であることが理論的に明らかにされている [A3]，[A4]：

① (零元不動点性) $\varphi = 0 \in \Phi$ については， $T\varphi = 0$ ．

② (正定数倍不変性) 任意の正実定数 a に対し，

$$\forall \varphi \in \Phi, T(a \cdot \varphi) = T\varphi.$$

③ (ベキ等性) $\forall \varphi \in \Phi, T(T\varphi) = T\varphi$ ．

④ (非零写像性) $\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0$ ． □

例えば，構造形式 (1.3) を備えた写像 T について，原パターン φ からパターンモデル $T\varphi$ へのパターン変換

$$\varphi \rightarrow T\varphi \quad (1.16)$$

において，抽出された特徴が保存されるということを要請している等式 (1.6) を満たす特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \rightarrow Z \text{ (複素数全体の集合)} \quad (1.17)$$

はかなり，限定されたものになるけれども，等式 (1.6) は性質③と同等であることが直ちにわかる．

1.5 パターンモデル $T\varphi$ の応用に関する計算機シミュレーション諸例

上述の4性質①～④を満たすという意味でモデル構成作用素 (model-construction operator) と呼ばれる式 (1.5) の写像 T についての研究はS. Suzukiの論文以外には存在しない。この写像 T は、入力顔画像 φ から目、鼻、口の各成分を抽出するのに有用であることも判明している [A16]。また、日本語単独母音の認識 [A14] や、ヒルベルト空間 [A19] \mathfrak{H} で動作し、連想形記憶の働きを備えたニューラルネットの構成 [A2], [A10] にも使用され、計算機シミュレーション済である。

その他のモデル構成作用素 T については、Radial-Basis Function Networks, Wavelet-Based Networksによる構成 [A11], 数理形態学に基づく構成 [A12], 線形補間による構成 [A13], 直交系を使用した構成 [A15], 平均画像を用いた画像2値化をもたらす構成 [A16], 界面エネルギーの減少を利用した構成 [A17], 画素単位の構成 [A18], [B26], [B29], [B30] などがある。

1.6 本研究の内容

本論文では、上述の4性質①～④を満たすモデル構成作用素の構造を、パターン変形が吸収出来るように改良するために、式 (1.3) の構造形式を持つ2つのモデル構成作用素 T_1, T_2 から、上述の4性質①～④を満たすように、その抽出された2特徴量の小さい方、大きい方を採用することにより、 T を再帰的に構成するmin手法, max手法が研究される (2定理2,3)。更に、 T_1, T_2 の合成積 $T = T_2 \cdot T_1$ が上述の4性質①～④ T_1, T_2 を満たすためには T_1, T_2 が可換でなければならないことを説明した後 (定理4), 非可換なときにも4性質①～④を満たすように、合成積 $T_2 \cdot T_1 T = T_2 \cdot T_1$ の一般化に相当するモデル構成作用素の単方向積 $T_1 \circ T_2$ を研究し (定理5), その後、2つのモデル構成作用素 T_1, T_2 から新たな今1つのモデル構成作用素 T を再帰的に構成する一般的手法を確保する。

尚、付録Aを設け、5定理1～5の意味を理解しやすくするために、パターンモデル $T\varphi$ を3例構成している。

2. パターンモデル $T\varphi$ の利用方法

一般に、パターン φ の、写像 T による変換像 $T\varphi$ を考えよう。 $T\varphi$ は φ を処理する認識システムにとっては φ の代りとなるパターンである。言い替えれば、その認識システムが $T\varphi$ を見たり聞いたりしたならば、 φ と同じに見えたり聞こえたりするときのものである。このようなモデル $T\varphi$ と原パターン φ との間に“同一知覚原理”が成立するためには、 φ を処理の対象とする問題のパターン φ の集合とした場合、S. Suzukiは、式 (1.3) の写像 T が1.4の4性質①～④を満たさなければならないと主張し、その結果ありとあらゆる認識の働きを模擬できる機能を備えた不動点連想形の万能性認識システム Δ RECOGNITRON [A3] が構成されることになった：

4性質①～④の内、特に、③について、説明しておこう。多段階パターン変換

$$\varphi_0 \equiv T\varphi \rightarrow \varphi_1 \equiv T\varphi_0 \rightarrow \varphi_2 \equiv T\varphi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \varphi_{i+1} = T\varphi_i \rightarrow \dots \quad (2.1)$$

を考えると、

$$\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_i = \varphi_{i+1} = \dots \quad (2.2)$$

が成立し、パターン φ のモデル化過程

$$\varphi \rightarrow T\varphi \quad (2.3)$$

の、(モデルのモデルはモデルであるという) 完結性が成立している。

このような式 (1.5) のモデル構成作用素 T を考えて得られる利点は， ω_j を第 $j \in J$ 番目のカテゴリ (類概念) \mathfrak{C}_j の持つ諸性質を典型的に表している代表パターンとして，主として次の (イ)，(ロ) のように述べられる：

(イ) φ が ω_j と似ている確率を与える類似度 $SM(\varphi, \omega_j)$ が， T -不変性

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j) \quad (2.4)$$

を満たすように，例えば，

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} S(\varphi, \omega_j) / \sum_{k \in J} S(\varphi, \omega_k) & \text{if } \sum_{k \in J} S(\varphi, \omega_k) > 0 \\ s_j / \sum_{k \in J} s_k & \text{if } \sum_{k \in J} s_k > 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

ここに，

$$S(\varphi, \omega_j) = -2^{-1} \cdot \log_e [1 - |(T\varphi \| T\varphi \|^{-1}, T\omega_j \| T\omega_j \|^{-1})|^2] \quad (2.6)$$

$$[\forall j \in J, 0 < s_j < 1] \wedge \sum_{k \in J} s_k = 1 \quad (2.7)$$

と構成でき [A4]， $T\varphi$ と φ とが同一カテゴリに帰属するように，認識できる源泉をもたらす。

パターンモデル $T\varphi$ があたかも原パターン φ かのようにシステムが錯覚すると考えてよいのは， T -不変式 (2.4) が成立するように類似度関数 SM を構成するからである。

(ロ) 入力パターン φ について，最大類似度条件

$$\exists t, \exists j \in J, SM(\varphi^t, \omega_j) = 1 \quad (2.8)$$

が満たされ， φ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j に認識される事態をもたらす多段階パターン変換

$$\varphi^0 \equiv T\varphi \rightarrow \varphi^1 \equiv TA_1 T\varphi^0 \rightarrow \cdots \rightarrow \varphi^t \equiv TA_{t-1} T\varphi^{t-1} \quad (2.9)$$

を導入できる [A3]，[A4]．ここに， φ^s のモデル $T\varphi^s$ を第 $s (= 0, 1, \dots, t-1)$ 認識段階での探索によって選定されたパターン変換作用素

$$A_s : \Phi \rightarrow \Phi \quad (2.10)$$

によって $A_s T\varphi^s$ と変換したパターンのモデルが $\varphi^s \equiv T(A_s T\varphi^s)$ である。□

尚，上記の多段階パターン変換に基づく RECOGNITRON による認識法については，文献 [A5] で位相情報復元化写像と称され，文献 [A6] でも採用されているモデル構成作用素 T を用いて，日本語単独母音に関しその多段階パターン変換効果を計算機シミュレーションで確認済である。或いは，風景画像の理解に関する計算機シミュレーション [A18]，[B26]，[B29]，[B30] でも，上記の多段階パターン変換に基づく認識法が採用されている。

3. パターン集合 Φ とモデル構成作用素 T との対 $[\Phi, T]$ の基本構成

本章では，1.4節の4性質①～④を満たすパターン集合 Φ ，パターン変換 T の対 $[\Phi, T]$ の満たすべき axiom 1 が説明される。

認識システム RECOGNITRON がモデル $T\varphi \in \Phi$ を見たり聞いたりしたならば，原パターン $\varphi \in \Phi$ と同じに見えたり聞こえたりすることだと，解釈可能な対 $[\Phi, T]$ について説明しよう。

処理の対象とするパターン φ の集合 Φ はある可分なヒルベルト空間 [A19] \mathfrak{H} の，零元 0 を含むあ

る部分集合であり、この Φ 、並びに式(1.5)の写像 T の対 $[\Phi, T]$ は1.4の4性質①～④(以下のaxiom 1の(i), (ii), (iii)の3後半、並びに(iv))を含む形で、次のaxiom 1を満たさなければならない。このとき、写像 T はモデル構成作用素(model-construction operator)と呼ばれ、 $T\varphi \in \Phi$ は $\varphi \in \Phi$ の代りとなり得るという意味で、パターン $\varphi \in \Phi$ のモデル(model)と呼ばれる。

Axiom 1 (パターン集合 Φ とモデル構成作用素 T との対 $[\Phi, T]$ の満たすべき公理) [A3], [A4]

(i) (零元0の Φ への埋込性, 零元0の T -不動点性)

$$0 \in \Phi \wedge T0 = 0.$$

(ii) (Φ の錐性, T の正定数倍吸収性)

$$\forall \varphi \in \Phi, a \cdot \varphi \in \Phi \wedge T(a \cdot \varphi) = T\varphi.$$

for any positive real number a .

(iii) (Φ への埋込性, T のベキ等性)

$$\forall \varphi \in \Phi, T\varphi \in \Phi \wedge T(T\varphi) = T\varphi.$$

(iv) (T の非零写像性)

$$\exists \varphi \in \Phi, 0 \neq T\varphi \in \Phi.$$

□

上述のaxiom 1からわかるように、処理の対象とする問題のパターン集合 Φ は、埋込性

$$T \cdot \Phi \equiv \{T\varphi \in \Phi \mid \varphi \in \Phi\} \subset \Phi \tag{3.1}$$

を満たし、原点(=0)を始点とし、 Φ の任意の点を通る半直線を含むような集合、つまり、錐(cone)であらねばならない。

パターンと判明している Φ の集合(基本領域; basic domain) $\Phi_B (\ni 0)$ と、すべての正実定数の集合 R^{++} とを用意する。

次の定理1は、axiom 1を満たす対 $[\Phi, T]$ を決定している。

[定理1] (パターン集合 Φ とモデル構成作用素 T との対 $[\Phi, T]$ の構成定理)

パターンと判明している φ の集合(基本領域) $\Phi_B (\ni 0)$ と、すべての正実定数の集合 R^{++} とを用意する。式(1.5)の写像 T がaxiom 1の(i), (ii), (iii)の3後半、並びに、(iv)を満たすとしよう。このとき、次の(イ)、(ロ)が成り立つ：

(イ) 処理の対象とする問題のパターンの集合 Φ を、

$$\Phi = R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B) \tag{3.2}$$

の如く設定すれば、2式

$$T \cdot \Phi = T \cdot \Phi_B \subseteq \Phi \tag{3.3}$$

$$R^{++} \cdot \Phi = \Phi \tag{3.4}$$

が成立し、axiomの(i), (ii), (iii)の3前半を Φ は満たし、結局、対 $[\Phi, T]$ はaxiom 1を満たす。

(ロ)逆に、 $(0 \in) \Phi_B$ を部分集合に持つ Φ がaxiom 1の(i), (ii), (iii)の3前半を満たすとすれば、

$$\Phi \supseteq \Phi_B \cup R^{++} \cdot \Phi \cup T \cdot \Phi \tag{3.5}$$

が成立するが、ここで、特に、包含式(3.5)において等号が成立するような最小の Φ を採用すれば、つまり、**集合論的再帰領域方程式**(set-theoretic reflexive domain equation)

$$\Phi = \Phi_B \cup T \cdot \Phi \cup R^{++} \cdot \Phi \tag{3.6}$$

の成立を仮定すれば、axiom 1を満たす対 $[\Phi, T]$ の Φ は式(3.2)のように表され、2式(3.3), (3.4)も成立する。

(証明) (イ)は文献[A4], 付録1の定理A1.1である。(ロ)は文献[A3], pp.64-66(2.4節)文献[B3], pp.64-66(2.4節)で証明されている。 □

4. 何故対 $[T, \Phi]$ を再帰的に構成するのか？

本章では，現在の対 $[\Phi, T]$ から今1つの対 $[\Phi', T']$ を何故，再帰的に構成するか？その理由が説明される．パターン変形に耐え，良好な認識の働きを実現するために，式 (1.5) のモデル構成作用素 T ，式 (2.5) のような類似度関数 SM に関し，各々の木目の細かさを荒っぽく更新し構成する方法がある [A4]．例えば，付録のA1.の骨格モデル（2値0,1の何れかをとるモデル） $T\varphi$ は，文献 [A4] の定理A10.1で構成されている同様な多値モデルより，木目の細かさが荒っぽく構成されており，2値モデル $T\varphi$ は多値モデルより，より多くのパターン変形を吸収出来る．

認識システムRECOGNITRON [A3]，[A4] が処理の対象とする問題の，見かけ上異なる幾つかののパターン $\varphi \in \Phi$ を，例えば，式 (1.3) の同一の構造形式を備えた1つのパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ に変換するのは，3.のaxiom 1を満たす $T\varphi$ はパターン標準形（standard form）と考えられ，標準形に変換しないで処理するよりもパターン φ の持つ規則的な変形と不規則的な変形とを， T の木目の細かさを荒っぽさに吸収することにより或る程度取り除け，以後の認識処理が容易になるからである．これは，命題論理式を標準形としての節形式に変換しておくこと，以後の記号論理による推論処理が用意になると同様な効果をもたらす．

より多くのパターン変形を吸収するモデル構成作用素 T を構成するには，上述の木目の細かさを荒っぽく，構成する上述の非再帰的な方法以外に，今1つ，再帰的な方法がある．

それは，3式 (3.2)～(3.4) を勘案し，以後の4定理2～5の如く，2つのモデル構成作用素 T_1, T_2 を使って， T_1, T_2 の個々のパターン変形に関する吸収能力を越えるように，今1つのモデル構成作用素 T を再帰的に構成する方法である．つまり， Φ_j ($j=1, 2$)内の T_j -モデル集合

$$T_j \cdot \Phi_j (= T_j \cdot \Phi_B \subset \Phi_j) \quad (4.1)$$

より，式 (3.3) の T -モデル集合 $T \cdot \Phi$ の方がより多くのパターン変形に耐えるように，3.のaxiom 1を満たすモデル構成作用素 T を再帰的に構成すればよい．

以後，この再帰的構成法が研究される．

5. 特徴抽出後定まる2種類のモデル構成作用素の，再帰による2構成

本章では，定理1を適用できるように，3.のaxiom 1の (i)，(ii)，(iii) の3後半，並びに (iv) を満たし，特徴抽出後定まる2種類の，式 (1.3) の形式を備えた複合モデル構成作用素 T を，2つのモデル構成作用素 T_1, T_2 から再帰的に構成する手法が研究される．

5.1 特徴抽出後定まるパターンモデルの構造形式

可分なヒルベルト空間 \mathfrak{H} の元 ψ_ℓ からなる1次独立な系

$$\psi_\ell, \ell \in L \quad (5.1)$$

を導入する．また，パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出される第 $\ell \in L$ 番目の実数値特徴量を $u(\varphi, \ell) \in R$ （実数全体の集合）とすると，特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \rightarrow R \quad (5.2)$$

が定義される．このとき，特徴抽出後定まるパターンモデル $T\varphi$ の構造形式の1つは式 (1.3) の，各 $u(\varphi, \ell) \in R$ を1次結合係数に持つ式 (5.1) の系 $\psi_\ell, \ell \in L$ の1次形式である．

処理の対象とする問題のパターン φ の集合($0 \in \Phi \subset \mathfrak{P}$)を想定すれば、式(1.5)の写像 T がaxiom 1の(i), (ii), (iii)の3後半、並びに、(iv)を満たすように構成され、しかも、 Φ が式(3.2)の如く与えられれば、この写像 T との対 $[\Phi, T]$ がaxiom 1を満たすことになる(定理1)。

式(5.1)の系 $\psi_\ell, \ell \in L$ が1次独立であることを考慮すれば、写像 T がaxiom 1の(i), (ii), (iii)の3後半、並びに、(iv)を満たすことと、式(5.2)の特徴抽出写像 u が次の4性質①'~④'を満たすことは同値であることがわかる：

①' axiom 1の(i)の後半： $\varphi = 0$ とする。

$$T\varphi = 0 \Leftrightarrow \forall \ell \in L, u(\varphi, \ell) = 0 \tag{5.3}$$

②' axiom 1の(ii)の後半： a を正定数とする。

$$\begin{aligned} &\forall \varphi \in \Phi, \\ &T(a \cdot \varphi) = T\varphi \\ &\Leftrightarrow \forall \ell \in L, u(a \cdot \varphi, \ell) = u(\varphi, \ell). \end{aligned} \tag{5.4}$$

③' axiom 1の(iii)の後半：

$$\begin{aligned} &\forall \varphi \in \Phi, \\ &T(T\varphi) = T\varphi \\ &\Leftrightarrow \forall \ell \in L, u(T\varphi, \ell) = u(\varphi, \ell). \end{aligned} \tag{5.5}$$

④' axiom 1の(iv)：

$$\begin{aligned} &\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0. \\ &\Leftrightarrow \exists \varphi \in \Phi, u(\varphi, \ell) \neq 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

□

5.2 minによる再帰的構成

特徴抽出後定まる式(1.3)の構造形式を持つ2種類のパターンモデル

$$T_j\varphi = \sum_{\ell \in L} u_j(\varphi, \ell) \cdot \psi_\ell, j = 1, 2 \tag{5.7}$$

を考える。2つの写像 T_1, T_2 、2つのパターン集合 Φ_1, Φ_2 の2つの対 $[\Phi_1, T_1], [\Phi_2, T_2]$ は共に、axiom 1を満たすとしよう。このとき、定理1の(ロ)により、 Φ_j の表現が

$$\Phi_j = R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T_j \cdot \Phi_B), j = 1, 2 \tag{5.8}$$

の如く、与えられる。

次の定理2は、パターン φ の、モデル構成作用素 T_1 によるパターンモデル $T_1\varphi$ の各特徴量 $u_1(\varphi, \ell) (= u_1(T_1\varphi, \ell))$ (∵ 式(5.5))と、モデル構成作用素 T_2 によるパターンモデル $T_2\varphi$ の各特徴量 $u_2(\varphi, \ell) (= u_2(T_2\varphi, \ell))$ (∵ 式(5.5))との最小値 $\min\{u_1(\varphi, \ell), u_2(\varphi, \ell)\}$ を備えた式(5.14)の \mathfrak{P} の元 $T\varphi$ はまた、パターンモデルになり得る場合があることを指摘している。

$$\forall \varphi \in \Phi_B, \forall \ell \in L, \max\{u_1(\varphi, \ell), u_2(\varphi, \ell)\} \leq \min\{u_1(T_2\varphi, \ell), u_2(T_1\varphi, \ell)\} \tag{5.9}$$

であれば、2式(5.11), (5.12)が成り立つことに注意する。

[定理2] (min構成による特徴抽出に関する T -再帰定理)

式(5.7)の2つの作用素 $T_j, j = 1, 2$ は、axiom 1の(i), (ii), (iii)の3後半、並びに、(iv)を満たし、

$$u_j(\varphi, \ell), \ell \in L \text{ は実数値の組である } (j = 1, 2) \tag{5.10}$$

とする。

パターン集合 Φ_j を式(5.8)の如く定義すると、対 $[\Phi_j, T_j]$ はaxiom 1を満たす。

このとき，2条件

$$\textcircled{1} \forall \varphi \in \Phi_B, \forall \ell \in L, u_1(\varphi, \ell) \leq u_2(T_1\varphi, \ell) \quad (5.11)$$

$$\wedge u_2(\varphi, \ell) \leq u_1(T_2\varphi, \ell) \quad (5.12)$$

$$\textcircled{2} \exists \varphi \in \Phi_B, \exists \ell \in L, u_1(\varphi, \ell) \neq 0 \wedge u_2(\varphi, \ell) \neq 0 \quad (5.13)$$

の下で，

$$T\varphi$$

$$\equiv \sum_{\ell \in L} \min\{u_1(\varphi, \ell), u_2(\varphi, \ell)\} \cdot \psi_\ell \quad \text{for any } \varphi \in \Phi_B \quad (5.14)$$

と定義される式 (1.5) の作用素 T は，axiom 1 の (i)，(ii)，(iii) の3後半，並びに，(iv) を満たし，パターン集合 Φ を式 (3.2) の如く定義すると，対 $[\Phi, T]$ は axiom 1 を満たす。

(証明) 式 (5.14) の作用素 T が axiom 1 の (i)，(ii)，(iii) の3後半，並びに，(iv) を満たすことを示せば，残りは，定理 1 から明らかである。

axiom 1，(i) の後半の成立： $\varphi = 0$ とする。

$$T_1\varphi = 0 \Leftrightarrow \forall \ell \in L, u_1(\varphi, \ell) = 0 \quad (5.15)$$

$$T_2\varphi = 0 \Leftrightarrow \forall \ell \in L, u_2(\varphi, \ell) = 0 \quad (5.16)$$

が成り立っているから，

$$T\varphi = \sum_{\ell \in L} \min\{u_1(\varphi, \ell), u_2(\varphi, \ell)\} \cdot \psi_\ell$$

$$\sum_{\ell \in L} \min\{0, 0\} \cdot \psi_\ell \quad \because \text{2式 (5.15), (5.16)} \quad (5.17)$$

$$= 0.$$

axiom 1，(ii) の後半の成立： a を正定数とする。

$$T_1(a \cdot \varphi) = T_1\varphi$$

$$\Leftrightarrow \forall \ell \in L, u_1(a \cdot \varphi, \ell) = u_1(\varphi, \ell) \quad (5.18)$$

$$T_2(a \cdot \varphi) = T_2\varphi$$

$$\Leftrightarrow \forall \ell \in L, u_2(a \cdot \varphi, \ell) = u_2(\varphi, \ell) \quad (5.19)$$

が成り立っているから，

$$T(a \cdot \varphi)$$

$$= \sum_{\ell \in L} \min\{u_1(a \cdot \varphi, \ell), u_2(a \cdot \varphi, \ell)\} \cdot \psi_\ell$$

$$= \sum_{\ell \in L} \min\{u_1(\varphi, \ell), u_2(\varphi, \ell)\} \cdot \psi_\ell \quad \because \text{2式 (5.18), (5.19)} \quad (5.20)$$

$$= T\varphi.$$

axiom 1 (iii) の後半の成立:式 (5.5) より，

$$T_1(T_1\varphi) = T_1\varphi$$

$$\Leftrightarrow \forall \ell \in L, u_1(T_1\varphi, \ell) = u_1(\varphi, \ell) \quad (5.21)$$

$$T_2(T_2\varphi) = T_2\varphi$$

$$\Leftrightarrow \forall \ell \in L, u_2(T_2\varphi, \ell) = u_2(\varphi, \ell) \quad (5.22)$$

が成り立っていることに注意しておく。

$$\eta = T\varphi$$

$$= \sum_{\ell \in L} \min\{u_1(\varphi, \ell), u_2(\varphi, \ell)\} \cdot \psi_\ell \quad (5.23)$$

とおく。そうすれば、

$$T\eta = \sum_{\ell \in L} \min\{u_1(\eta, \ell), u_2(\eta, \ell)\} \cdot \psi_\ell \quad (5.24)$$

であるが、固定した $\ell \in L$ について、2つの場合にわけて示そう。

(イ) $\min\{u_1(\varphi, \ell), u_2(\varphi, \ell)\} = u_1(\varphi, \ell)$ の場合

$$\begin{aligned} & \eta \\ &= \sum_{\ell \in L} u_1(\varphi, \ell) \cdot \psi_\ell \quad \because \text{式 (5.23)} \\ &= T_1\varphi \quad \because \text{式 (5.7)} \end{aligned} \quad (5.25)$$

であり、

$$\begin{aligned} T\eta &= \sum_{\ell \in L} \min\{u_1(T_1\varphi, \ell), u_2(T_1\varphi, \ell)\} \cdot \psi_\ell \quad \because \text{2式 (5.24), (5.25)} \\ &= \sum_{\ell \in L} \min\{u_1(\varphi, \ell), u_2(T_1\varphi, \ell)\} \cdot \psi_\ell \quad \because \text{式 (5.21)} \\ &= \sum_{\ell \in L} u_1(\varphi, \ell) \cdot \psi_\ell \quad \because \text{式 (5.11)} \\ &= \eta. \quad \because \text{式 (5.25)} \end{aligned}$$

(ロ) $\min\{u_1(\varphi, \ell), u_2(\varphi, \ell)\} = u_2(\varphi, \ell)$ の場合

$$\begin{aligned} & \eta \\ &= \sum_{\ell \in L} u_2(\varphi, \ell) \cdot \psi_\ell \quad \because \text{式 (5.23)} \\ &= T_2\varphi \quad \because \text{式 (5.7)} \end{aligned} \quad (5.26)$$

であり、

$$\begin{aligned} T\eta &= \sum_{\ell \in L} \min\{u_1(T_2\varphi, \ell), u_2(T_2\varphi, \ell)\} \cdot \psi_\ell \quad \because \text{2式 (5.26), (5.24)} \\ &= \sum_{\ell \in L} \min\{u_1(T_2\varphi, \ell), u_2(\varphi, \ell)\} \cdot \psi_\ell \quad \because \text{式 (5.22)} \\ &= \sum_{\ell \in L} u_2(\varphi, \ell) \cdot \psi_\ell \quad \because \text{式 (5.12)} \\ &= \eta. \quad \because \text{式 (5.26)} \end{aligned}$$

axiom 1, (iv) の成立: 条件式 (5.13) を考慮し、

$$\exists \varphi \in \Phi_B, \exists \ell \in L, u_1(\varphi, \ell) \neq 0 \wedge u_2(\varphi, \ell) \neq 0$$

なる $\varphi \in \Phi_B$ をとれば、

$$T\varphi = \sum_{\ell \in L} \min\{u_1(\varphi, \ell), u_2(\varphi, \ell)\} \cdot \psi_\ell \neq 0 \quad (5.27)$$

が成り立ち、ここで、式 (3.3) の $T \cdot \Phi = T \cdot \Phi_B \subset \Phi$ が成立するように Φ を構成することを考慮すれば、この $\varphi \in \Phi_B$ を

$$\varphi \in \Phi \quad (5.28)$$

ととることができる。□

式 (5.14) で定義されている $T\varphi$ は， $T_1\varphi$ と $T_2\varphi$ とに共通な情報を持つパターンモデルである。

5.3 maxによる再帰的構成

次の定理3は，パターン φ の，モデル構成作用素 T_1 によるパターンモデル $T_1\varphi$ の各特微量 $u_1(\varphi, \ell)(=u_1(T_1\varphi, \ell) \quad \because \text{式 (5.5)})$ と，モデル構成作用素 T_2 によるパターンモデル $T_2\varphi$ の各特微量 $u_2(\varphi, \ell)(=u_2(T_2\varphi, \ell) \quad \because \text{式 (5.5)})$ との最大値 $\max\{u_1(\varphi, \ell), u_2(\varphi, \ell)\}$ を備えた式 (5.33) の Φ の元 $T\varphi$ はまた，パターンモデルになり得る場合があることを指摘している。

$$\forall \varphi \in \Phi_B, \forall \ell \in L, \min\{u_1(\varphi, \ell), u_2(\varphi, \ell)\} \geq \max\{u_1(T_2\varphi, \ell), u_2(T_1\varphi, \ell)\} \quad (5.29)$$

であれば，2式 (5.30)，(5.31) が成り立つことに注意する。

【定理3】(max構成による特徴抽出に関する T -再帰定理)

式 (5.7) の2つの作用素 $T_j, j=1, 2$ は，axiom 1の (i)，(ii)，(iii) の3後半，並びに，(iv) を満たし，抽出された特微量 $u_j(\varphi, \ell), \ell \in L$ の実数値条件式 (5.10) が成り立つとする。

2つのパターン集合 Φ_j を式 (5.8) の如く定義すると，対 $[\Phi_j, T_j]$ はaxiom 1を満たす。

このとき，2条件

$$\textcircled{1} \forall \varphi \in \Phi_B, \forall \ell \in L, u_1(\varphi, \ell) \geq u_2(T_1\varphi, \ell) \quad (5.30)$$

$$\wedge u_2(\varphi, \ell) \leq u_1(T_2\varphi, \ell) \quad (5.31)$$

$$\textcircled{2} \exists \varphi \in \Phi_B, \exists \ell \in L, u_1(\varphi, \ell) \neq 0 \vee u_2(\varphi, \ell) \neq 0 \quad (5.32)$$

の下で，

$T\varphi$

$$\equiv \sum_{\ell \in L} \max\{u_1(\varphi, \ell), u_2(\varphi, \ell)\} \cdot \phi_\ell \quad \text{for any } \varphi \in \Phi_B \quad (5.33)$$

と定義される式 (1.5) の作用素 T は，axiom 1の (i)，(ii)，(iii) の3後半，並びに，(iv) を満たし，パターン集合 Φ を式 (3.2) の如く定義すると，対 $[\Phi, T]$ はaxiom 1を満たす。

(証明) 定理2 ほぼ同様にして証明できる。□

式 (5.33) で定義されている $T\varphi$ は， $T_1\varphi$ と $T_2\varphi$ とを合わせた情報を持つパターンモデルである。

上述の2定理2,3は，axiom 1に関し，2種類の再帰性が成り立つことを指摘している。

6. 可換とは限らない任意の2つのモデル構成作用素の合成

本章では，2つのモデル構成作用素 T_1, T_2 の合成積 $T_1 \cdot T_2$ が再び，モデル構成作用素になるための諸条件を明示し，この諸条件の内，最も重要な条件が T_1, T_2 が可換であることを勘案し，その後，可換とは限らない2つのモデル構成作用素 T_1, T_2 を用いて，式 (6.29) が成立しているという意味で，合成積 $T_1 \cdot T_2$ の拡張となる新しいモデル構成作用素 $T = T_1 \circ T_2$ が提案される。

6.1 2つのモデル構成作用素の合成積 $T = T_2 \cdot T_1$

2つの写像

$$T_1 : \Phi_1 \rightarrow \Phi_1, T_2 : \Phi_2 \rightarrow \Phi_2 \quad (6.1)$$

がaxiom 1を満たすモデル構成作用素であっても，その合成積

$$T \equiv T_2 \cdot T_1 : \Phi_1 \rightarrow \Phi_2 \tag{6.2}$$

は無条件で、3.のaxiom 1を満たすモデル構成作用素になるとは限らないことは、次の定理4からわかる。尚、可換式(6.5)を満たす $T_1 \cdot T_2$ の例については、付録のA3.にある。

【定理4】(モデル構成作用素の合成積定理)

式(6.2)の合成写像 $T = T_2 T_1$ がaxiom 1の(i), (ii), (iii)の3後半、並びに、(iv)を満たすモデル構成作用素であるための十分条件は、3条件

$$[\exists \varphi_1 \in \Phi_1, \eta_1 \equiv T_1 \varphi_1 \neq 0 \text{ であるような任意の } \varphi_1 (\neq 0) \text{ について, } T_2 \eta_1 \neq 0] \tag{6.3}$$

$$\wedge \Phi_2 = \Phi_1 \tag{6.4}$$

$$\wedge T_2 T_1 = T_1 T_2 \text{ (可換性)} \tag{6.5}$$

である。よって、この3条件が満たされるとき、パターン集合 Φ を式(3.2)の如く定義すると、対 $[\Phi, T]$ はaxiom 1を満たす。

(証明) axiom 1の(i), (ii), (iii)の3後半、並びに、(iv)を満たすことを示せば、残りは定理1より明らかである。

axiom 1の(i), (ii), (iii)の3後半、並びに、(iv)の成立を以下に示す。

(i)の後半の成立:

$$\begin{aligned} T0 &= T_2 T_1 0 \\ &= T_2 0 \quad \because \text{ axiom 1の(i)の後半} \\ &= 0 \quad \because \text{ axiom 1の(i)の後半} \end{aligned}$$

(ii)の後半の成立:

$$\begin{aligned} T(a \cdot \varphi) &= T_2(T_1(a \cdot \varphi)) \\ &= T_2(T_1 \varphi) \quad \because \text{ axiom 1の(ii)の後半} \\ &= T\varphi \quad \text{for any positive real number } a. \end{aligned}$$

(iii)の後半の成立の成立:

$$\begin{aligned} TT & \\ &= T_2 T_1 (T_2 T_1) \quad \because \text{ 式(6.4)} \\ &= T_2 T_1 T_1 T_2 \quad \because \text{ 式(6.5)} \\ &= T_2 T_1 T_2 \quad \because \text{ axiom 1の(iii)の後半} \\ &= T_2 T_2 T_1 \quad \because \text{ 式(6.5)} \\ &= T_2 T_1 \quad \because \text{ axiom 1の(iii)の後半} \\ &= T \end{aligned} \tag{6.6}$$

(iv)の成立: axiom 1の(iv)より,

$$[\exists \varphi_1 \in \Phi_1, \eta_1 \equiv T_1 \varphi_1 \neq 0] \tag{6.7}$$

$$\wedge [\exists \eta_1 (= T_1 \varphi_1) \in \Phi_2, T_2 \eta_1 \neq 0] \quad \because \text{ 2式(6.3), (6.4)} \tag{6.8}$$

と、 φ_1, η_1 を選ぶことが出来、よって、

$$\begin{aligned} T\varphi_1 &= T_2 T_1 \varphi_1 \\ &= T_2 \eta_1 \neq 0 \quad \because \text{ 式(6.8)} \end{aligned} \quad \square$$

2つのモデル構成作用素 T_1, T_2 が可換であれば、 T_1, T_2 の双方に不変なパターンモデルの集合

$$\text{Range}(T) \equiv \{\eta \mid \exists \varphi \in \Phi, \eta = T\varphi\} \text{ (Tの値域)} \tag{6.9}$$

が得られることを、上記の定理4は説明している。 T -不変性

$$T \cdot \text{Range}(T) = \text{Range}(T) \tag{6.10}$$

が axiom 1, (iii) の後半から成立するからである。

axiom 1, (ii) の後半から恒等作用素 (単位元) はモデル構成作用素と採用できないことがわかり、また、定理 4 を考慮すれば、モデル構成作用素の集合はモノイド (monoid)、つまり、単位元を持つ半群 (semigroup with identity) を形成しないことが判明する。また、モデル構成作用素 T の正の定数 ($= c > 0$) 倍 $c \cdot T$ は再び、モデル構成作用素になるが、2つのモデル構成作用素 T_1, T_2 の和 $T_1 + T_2$ は一般には、モデル構成作用素にならないことは直ちにわかる。つまり、モデル構成作用素の集合は一般には線形空間 (ベクトル空間) を形成しない。

6.2 ラムダ言語の計算

前節の定理 4 での、式 (6.2) の合成積 $T = T_2 T_1$ に注意して、次の2つのモデル構成作用素 T_1, T_2 の単方向積 (unidirectional product) $T = T_1 \bowtie T_2$ を定義する演算 \bowtie を導入して、任意の2つのモデル構成作用素 T_1, T_2 を合成し、モデル構成作用素 T を得る再帰的手法を研究しよう。この結果、 T に関する一般再帰構成問題が解決されたことになる。

まず、ラムダ言語 (λ language; プログラム言語としての λ 論理) の計算に関する規約 [A20] を説明しよう。

[ラムダ言語の計算に関する規約]

まず、ラムダ計算 (lambda calculus) を簡単に説明する。

例えば、平方根関数 $y = \sqrt{x} (x \geq 0)$ は、

(i) 引数 x の定義域 $[0, \infty) \equiv \{x \mid 0 \leq x < \infty\}$ を明示した場合、

$$\lambda x \in [0, \infty). \sqrt{x} \tag{6.11}$$

(ii) 引数 x の定義域 $[0, \infty) \equiv \{x \mid 0 \leq x < \infty\}$ を明示しない場合、

$$\lambda x. \sqrt{x} \tag{6.12}$$

と、引数 (argument) x を λx なるごとく、前置して表現するものとする。引数 x による関数 λ 抽象 (functional λ -abstraction) と呼ばれる λ 式 (λ -expression) $\lambda x. \sqrt{x}$ は、 x を引数とする関数 \sqrt{x} を表している。 λx を抽象化オペレータ (abstraction operator) といい、この x を $\lambda x. \sqrt{x}$ の束縛変数 (bound variable) と呼ぶ。

また、 $y = \sqrt{x} (x \geq 0)$ において、引数 x に特別な値 $a \geq 0$ を代入して得られる \sqrt{a} は、関数適用 (function application) で得られたといわれ、 λ が消失する形式で、

$$(\lambda x. \sqrt{x}) a (= \sqrt{a}) \tag{6.13}$$

と書かれる。

更に、2つの関数 f_1, f_2 の合成 (composition) としての “ f_2 に f_1 を作用させたもの” “ $f_1 \cdot f_2$ ” は、

$$(\lambda z. f_1(z)) (\lambda y. f_2(y)) \tag{6.14}$$

$$= f_1(\lambda y. f_2(y))$$

$$\dots \text{変数 } z \text{ のところに、} \lambda y. f_2(y) \text{ を代入するの意} \tag{6.15}$$

$$= (\lambda y. f_1(f_2(y)))$$

$$\dots \lambda \text{ 式 } f_1 \text{ は引数 } y \text{ を含まないから、} \lambda y.. \text{ は } f_1 \text{ の前に移動させることが出来る} \tag{6.16}$$

と書かれる。

最後に、3個の関数 F_1, F_2, F_3 について

$$\lambda x. F_1 F_2 F_3 \text{ は, } \lambda x. ((F_1 F_2) F_3) \text{ の意} \tag{6.17}$$

と解釈する。

関数抽象より、関数適用の方が結合性が強い

こと、つまり、 $\lambda x. AB$ は $(\lambda x. (AB))$ であって、 $((\lambda x. A)B)$ ではないことに注意しておく。また、 $(\lambda x. A)B$ での2つの括弧 $(,)$ は省略できない。 (規約終わり)

6.3 2つのモデル構成作用素の単方向積 $T = T_1 \bowtie T_2$

パターンモデル集合の変換を行えるモデル構成作用素 T を構成し、 T に関する一般再帰構成問題を解決しよう。

$[\Phi \rightarrow \Phi]_0$ を、

$$\varphi = 0 \text{ ならば } B\varphi = 0 \text{ である}$$

ような Φ から Φ への写像 (パターン変換) B の全体の集合とすると、次の定理5は、パターンモデル集合の変換を可能にするモデル構成作用素 T が λ 言語計算式 (6.19) で与えられることを指摘している。以下の式 (6.19) の λ 抽象においては、引数 B はパターンの値をとるのではなく、パターン変換の値をとることに注意しておく。

【定理5】(モデル構成作用素の単方向積定理)

式 (6.1) の2つの写像 T_1, T_2 は、axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半、並びに、(iv) を満たすとしよう。

このとき、包含条件

$$\Phi_1 \subseteq \Phi_2 \tag{6.18}$$

の下で、2つの写像 T_1, T_2 の (T_1 から T_2 の方向への) 単方向積と称され、

$$T \equiv (T_1 \bowtie T_2) \equiv (\lambda B \in [\Phi \rightarrow \Phi]_0. T_2 B T_1) \tag{6.19}$$

のごとく定義される写像 T (B を引数とする関数抽象 $\lambda B. T_2 B T_1$) は、axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半、並びに、(iv) を満たす。そして、

$$Range(T_1) \equiv \{\eta \mid \exists \varphi \in \Phi_1, \eta = T_1 \varphi\} \text{ (} T_1 \text{ の値域)} \tag{6.20}$$

を、

$$Range(T_2)' \equiv \{\eta \mid \exists \varphi \in \Phi_1 \subseteq \Phi_2, \eta = T_2 \varphi\} (\subseteq Range(T_2)) \tag{6.21}$$

へと変換する。

よって、パターン集合 Φ を式 (3.2) の如く定義すると、対 $[\Phi, T]$ は axiom 1 を満たす。

(証明) 先ず、写像 $T = T_1 \bowtie T_2$ が $Range(T_1)$ を $Range(T_2)'$ へと変換することは、 T_1 の定義域が Φ_1 であり、 T_2 の値域が Φ_2 であることを考慮すれば、 T の定義式 (6.19) から明らかである。

次に、式 (6.19) の $T = T_1 \bowtie T_2$ が axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半、並びに、(iv) を満たすことを以下に示す、残りは、定理1から明らかである。

さて、以下に、axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半、並びに、(iv) の成立を示そう：

(i) の後半の成立：

$\varphi = 0 \in \Phi_1$ について、

$$\begin{aligned} T\varphi &= (T_1 \bowtie T_2)\varphi \\ &= (\lambda B. T_2 B T_1)\varphi \quad \because \text{式 (6.19)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lambda B. T_1 B (T_1 \varphi) \\
 &= \lambda B. T_1 B (T_1 0) \\
 &= \lambda B. T_1 B 0 \quad \because \text{axiom 1の (i) の後半} \\
 &= \lambda B. T_1 0 \quad \because B \in [\Phi \rightarrow \Phi]_0 \\
 &= \lambda B. 0 \quad \because \text{axiom 1の (i) の後半} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

(ii) の後半の成立：

a を任意の正定数とする．任意の $\varphi = \Phi_1$ について，

$$\begin{aligned}
 T(a \cdot \varphi) &= (T_1 \wp T_2)(a \cdot \varphi) \\
 &= (\lambda B. T_2 B T_1)(a \cdot \varphi) \quad \because \text{式 (6.19)} \\
 &= \lambda B. T_2 B ((T_1)(a \cdot \varphi)) \\
 &= \lambda B. T_1 B (T_1 \varphi) \quad \because \text{axiom 1の (ii) の後半} \\
 &= [\lambda B. T_1 B T_1] \varphi \\
 &= T \varphi.
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

(iii) の後半の成立：

任意の $\varphi \in \Phi_1$ について，

$$\begin{aligned}
 T(T \varphi) &= [(T_1 \wp T_2) T] \varphi \\
 &= [(\lambda B. T_2 B T_1) T] \varphi \quad \because \text{式 (6.19)} \\
 &= [T_2 T T_1] \varphi \quad \because \text{引数 } B \text{ に値 } T \text{ を代入} \\
 &= [T_2 (\lambda C. T_2 C T_1) T_1] \varphi \quad \because \text{式 (6.19)} \\
 &= [\lambda C. T_2 (T_2 C T_1) T_1] \varphi \\
 &= [\lambda C. T_2 C T_1] \varphi \quad \because \text{axiom 1の (iii) の後半} \\
 &= T \varphi. \quad \because \text{式 (6.19)}
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

(iv) の成立：

T_1 が axiom 1の (iv) を満たすから，

$$\exists \varphi \in \Phi_1, T_1 \varphi \neq 0$$

である．よって，

$$\begin{aligned}
 T \varphi &= (T_1 \wp T_2) \varphi \\
 &= (\lambda B. T_2 B T_1) \varphi \quad \because \text{式 (6.19)} \\
 &= \lambda B. T_2 B (T_1 \varphi) \\
 &\neq 0.
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

であるようなパターン変換 $B \in [\Phi \rightarrow \Phi]_0$ を考えるこい出来る． \square

2つの不変性

$$T_1 \cdot \text{Range}(T_1) = \text{Range}(T_1) \tag{6.26}$$

$$T_2 \cdot \text{Range}(T_2)' = \text{Range}(T_2)' \tag{6.27}$$

の成立が axiom 1, (iii) の後半からわかり，式 (6.19) のモデル構成作用素 T は T_1 に不変なパターンモデル集合 $\text{Range}(T_1)$ から T_2 に不変なパターンモデル集合 $\text{Range}(T_2)'$ へと変換していることに注意しておこう．

なお，2の (ロ) の多段階パターン変換に基づく認識法において登場するパターン変換 $T A_1 T$ については，式 (6.19) の T を採用していれば，その表現

$$\begin{aligned} & \forall \varphi \in \Phi, (T_1 \circ T_2) A_t T_1 \circ T_2 \varphi \\ & = [T_2 A_t T_2](T_1 \varphi) \end{aligned} \tag{6.28}$$

よって A_t を恒等作用素 I とおけば、

$$\begin{aligned} & [(T_1 \circ T_2) I (T_1 \circ T_2)] \varphi \\ & = T_2 (T_1 \varphi) \quad \because \text{axiom 1, (iii) の後半} \end{aligned} \tag{6.29}$$

が成り立つことは、

$$\begin{aligned} & (T_1 \circ T_2) A_t T_1 \circ T_2 \\ & = (\lambda B. T_2 B T_1) A_t T_1 \circ T_2 \quad \because \text{式 (6.19)} \\ & = T_2 A_t (T_1 \circ T_2) T_1 \quad \because \text{引数 } B \text{ に値 } A_t (T_1 \circ T_2) \text{ を代入} \end{aligned} \tag{6.30}$$

$$\begin{aligned} & = T_2 A_t (\lambda B. T_2 B T_1) T_1 \quad \because \text{式 (6.19)} \\ & = T_2 A_t T_2 T_1 T_1 \quad \because \text{引数 } B \text{ に値 } T_1 \text{ を代入} \end{aligned} \tag{6.31}$$

$$= [T_2 A_t T_2] T_1 \quad \because \text{axiom 1, (iii) の後半} \tag{6.32}$$

とわかる．等式 (6.29) は、式 (6.19) の単方向積 $T = T_1 \circ T_2$ が式 (6.2) の合成積 $T = T_2 \cdot T_1$ の拡張であることを物語っている．

尚、定理4によれば、 T_1, T_2 が可換でないと、合成積 $T = T_2 \cdot T_1$ は、 T_1, T_2 双方に不変なように2. のパターン認識処理ができないが、単方向積 $T = T_1 \circ T_2$ を用いれば異なった形式で、 T_1, T_2 双方に不変なように認識処理ができることがわかる．これが定理5の功績である．

7. おわりに

パターン変換

$$U: \Phi \rightarrow \Phi \tag{7.1}$$

に関し、等式

$$T(U\varphi) = T\varphi \tag{7.2}$$

が成立するならば（その実例については、式 (A.18) を参照）、パターンモデル $T\varphi$ を生成する写像 T は、パターン φ の変形

$$\varphi \rightarrow U\varphi \tag{7.3}$$

を吸収する能力を備えている．何故ならば、 φ とその変形 $U\varphi$ は共に、共通なパターン標準形 $T\varphi$ を持つことになるからである（同一知覚原理）．この意味で、写像 U を同一知覚（をもたらす）パターン変換ということがある．この種のパターン変換 U として規則的変形としてのユニタリ座標変換、不規則的な変形をを許容する離散量子化変換があることは既に示されている [A1], [A3]～[A7]．

Axiom 1を満たすような上述のパターンモデル $T\varphi$ については、他の研究では全く見られなくて、S. Suzukiのみが研究しているのみである．S. Suzukiの研究以外には存在しないこのようなパターンモデルを出力する式 (1.5) の写像 T は、1.4における4性質①～④を満たさなければならないとし [A3], [A4], 満たす場合、モデル構成作用素と称された．

パターンモデル $T\varphi$ とは原パターン φ と同じに見えたり、聞こえたりするようなものである．このためには、1.4の4性質①～④を満たす式 (1.5) のモデル構成作用素 T は原パターン φ を骨格化できたり、構造化できたり、座標変換前の状態に戻したりする機能を備えていなければならない．この3性質を備えた T の3例を付録で説明しておいた．

本論文では，2つのモデル構成作用素 T_1, T_2 を合成し，新しいモデル構成作用素 T を再帰的に得ることにより， T_1, T_2 双方のパターン変形に関する吸収能力を統合した能力を持つ T を得ることを試み，4 定理 2～5 を得た．特に，定理 5 は，殆ど無制限に2つのモデル構成作用素 T_1, T_2 を使ってモデル構成作用素 T を単方向積の形式で再帰的に構成できる事実を明らかにしており，システムの持つパターン情報処理の働きを T_1 に不変なものから， T_2 に不変なものへと転換できることを指摘している．この方向性ゆえに式 (6.19) の $T = T_1 \circ T_2$ が単方向積と命名されたのである．

本研究内容は抽象的であるが，実際にパターン情報処理をするにあたり，採用可能な技術を提供することになることは，これまでの計算機シミュレーション [A6], [A8]～[A10], [A14], [A16], [A17], [B26], [B29], [B30] から確信できる．

参 考 文 献 A

- [A 1] 鈴木昇一：“認識工学”，柏書房（1975）．
- [A 2] 鈴木昇一：“ニューラルネットの新数理”，近代文芸社（1996）．
- [A 3] 鈴木昇一：“パターン認識問題の数理的一般解決”，近代文芸社（1997）．
- [A 4] 鈴木昇一：“認識知能情報論の新展開”，近代文芸社（1998）．
- [A 5] 鈴木昇一：“測度的不変量検出形認識系の構成理論”，電子通信学会論文誌 (D), vol.55-D, no.8, pp.513-538（1972）．
- [A 6] 鈴木昇一：“抽出された特徴による手書き漢字構造の再生”，情報処理, vol.18, no.11, pp.115-1122（1977）．
- [A 7] 鈴木昇一：“パターンのエントロピーモデル”，電子情報通信学会論文誌 (D-II), vol.J77-D-II, no.10, pp.2220-2238（1994）．
- [A 8] 鈴木昇一，斉藤静昭，奥野治雄，太田芳雄：“画像の復元とその計算機シミュレーション”，工学院大学研究報告, no.39, pp.198-206（1976）．
- [A 9] 鈴木昇一：“回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シミュレーション”，情報研究 (文教大学情報学部), no.4, pp.36-56（1983）．
- [A10] 鈴木昇一：“連想形記憶器MEMOTRONと日本語母音系列の再生に関する計算機シミュレーション”，情報研究 (文教大学情報学部), no.7, pp.14-29（1986）．
- [A11] 鈴木昇一：“Radial-Basis Function Networks, Wavelet-Based Networksを用いたモデル構成作用素の構成法”，情報研究 (文教大学・情報学部), no.17, pp.71-132（1996）．
- [A12] 鈴木昇一，佐久間拓也，前田英明：“数理形態学における諸演算とモデル構成作用素”，情報研究 (文教大学・情報学部), no.17, pp.133-170（1996）．
- [A13] 鈴木昇一：“高次認知機能における論理表現の要素”，情報研究 (文教大学・情報学部), no.19, pp.29-82（1997）．
- [A14] 鈴木昇一：“構造受精法と日本語単独母音の認識”，情報研究 (文教大学・情報学部), no.18, pp.17-51（1998）．
- [A15] 鈴木昇一：“直交系によるパターンモデルの構成”，情報研究 (文教大学・情報学部), no.21, pp.21-47（1999）．
- [A16] 鈴木昇一：“平均顔を用いた顔画像の2値化，並びに，目・鼻・口の抽出と，その計算機シミュ

- レーション”, 情報研究 (文教大学・情報学部), no.22, pp. 65-150 (1999).
- [A17] 鈴木昇一: “界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の, 顔画像処理に関する計算機シミュレーション”, 情報研究 (文教大学・情報学部), no.23, pp.109-182 (2000).
- [A18] 鈴木昇一: “風景画から知識を抽出し, 解釈するシステムの, ファジィ推論ニューラルネットによる構成”, 情報研究 (文教大学・情報学部), no.23, pp. 183-265 (2000).
- [A19] 吉田耕作: “近代解析”, 共立出版 (1963).
- [A20] 中島玲二: “数理情報学入門”, 朝倉書店 (1982)
- [A21] 太原育夫: “人工知能の基礎知識”, 近代科学社 (1999)

参 考 文 献 B

- [B 1] 鈴木昇一: “認識工学”, 柏書房, Feb.1975
- [B 2] 鈴木昇一: “ニューラルネットの新数理”, 近代文芸社, Sept.1996
- [B 3] 鈴木昇一: “パターン認識問題の数理的一般解決”, 近代文芸社, June 1997
- [B 4] 鈴木昇一: “認識知能情報論の新展開”, 近代文芸社, Aug.1998
- [B 6] 鈴木昇一: “手書き漢字の側抑制効果の分解とその計算機シミュレーション”, 情報処理学会誌, vol.15, no.12, pp.927-934, Dec.1974
- [B 7] 鈴木昇一: “画像情報量とその手書き漢字への応用”, 画像電子学会誌, vol.4, no.1, pp.4-12, Apr.1975
- [B 8] 鈴木昇一: “抽出された特徴による手書き漢字構造の再生”, 情報処理学会誌, vol.18, no.11, pp.1115-1122, Nov.1977
- [B 9] 鈴木昇一: “回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シミュレーション”, 情報研究 (文教大学・情報学部), no.4, pp.36-56, Dec.1983
- [B10] 鈴木昇一: “連想形記憶器MEMOTRONと日本語単独母音系列の再生に関する計算機シミュレーション”, 情報研究 (文教大学・情報学部), no.7, pp.14-29, Dec.1986
- [B11] 鈴木昇一: “多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション”, 情報研究 (文教大学・情報学部), no.10, pp.35-49, Dec.1989
- [B12] 鈴木昇一: “帰属係数法に基づく類似度, 帰属関係あいまい度, 認識情報量の計算機シミュレーション”, 情報研究 (文教大学・情報学部), no.11, pp.51-68, Dec.1990
- [B13] 鈴木昇一: “構造受精法と日本語単独母音の認識”, 情報研究 (文教大学・情報学部), no.18, pp.17-51, Dec.1998
- [B14] 鈴木昇一, 前田英明: “有声破裂音の代表パターンの学習の決定と, その計算機シミュレーション”, 情報研究 (文教大学・情報学部), no.20, pp.77-95, Dec.1998
- [B15] 鈴木昇一, 前田英明: “変動エントロピーによる有声破裂音の順序付けと, その計算機シミュレーション”, 情報研究 (文教大学・情報学部), no.21, pp.51-78, Mar.1999
- [B16] 鈴木昇一: “平均顔を用いた顔画像の2値化, 並びに, 目・鼻・口の抽出と, その計算機シミュレーション”, 情報研究 (文教大学・情報学部), no.22, pp.65-150, Dec.1999
- [B17] 鈴木昇一: “界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の, 顔画像処理に関する計算機シミュレーション”, 情報研究 (文教大学・情報学部), no.23, pp.109-182, Mar.2000

- [B18] 鈴木昇一：“風景画から知識を抽出し，解釈するシステムの，ファジィ推論ニューラルネットによる構成”，情報研究（文教大学・情報学部），no.23, pp.183-265, Mar.2000
- [B19] 鈴木昇一：“各個人の感性を反映した認識システムRECOGNITRON”，情報研究（文教大学・情報学部），no.24, pp.185-257, Dec.2000
- [B20] 鈴木昇一：“プロダクション・システムとしてのファジィ・マルチメディア・コンピュータと，空間多重パターンファジィ推論系”，情報研究（文教大学・情報学部），no.24, pp.105-183, Dec.2000
- [B21] 鈴木昇一：“SS大分類関数BSCの適応的構成への，計算論的学習理論の適用”，情報研究（文教大学・情報学部），no.25, pp.185-236, Mar.2001
- [B22] 鈴木昇一：“量子力学の諸原理，多段階量子認識系と，心理状態を取り入れた想起に基づく部分空間認識法”，情報研究（文教大学・情報学部），no.25, pp.237-282, Mar.2001
- [B23] 鈴木昇一：“Support Vector Machineを利用した大分類関数の構成”，情報研究（文教大学・情報学部），no.26, pp.1-62, Dec.2001
- [B24] 鈴木昇一：“2カテゴリ分類困難度の情報理論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.26, pp.63-160, Dec.2001
- [B25] 鈴木昇一：“一般化類似度関数を用いた“導出原理による第1階述語推論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.27, pp.27-71, Mar.2002
- [B26] 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：“風景画の理解に関するJAVA言語によるRECOGNITRONの計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.27, pp.73-109, Mar.2002
- [B27] 鈴木昇一：“遺伝的アルゴリズムにおける適合度比例選択戦略を利用した進化方程式の，パターン多段階変換に基づく認識への応用”，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp. 37-67, Dec.2002
- [B28] 鈴木昇一：“近傍を利用した音素認識のためのモデル構成作用素 T ，類似度関数 SM ，大分類関数 BSC の諸構成と，SS不動点探索型多段階想起認識”，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.69-141, Dec.2002
- [B29] 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：“JAVA言語で実装化された画像理解システムIUSの動作概要と，その稼動方法”，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.143-165, Dec.2002
- [B30] 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：“JAVA言語による計算機シミュレーションで生じた風景画像の理解場面での多段階連想形認識過程の異常現象”，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.123-166, Jul.2003
- [B31] 鈴木昇一：“パターン情報処理（モデル構成作用素，誤差逆伝播学習2層ニューラルネット）と，論理的含意とによる非単調的知識推論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.75-121, Jul.2003
- [B32] 鈴木昇一：“可分な一般抽象ヒルベルト空間でのK-L直交系の理論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.41-73, Jul.2003
- [B33] 鈴木昇一：“パターン系列（動画像，会話音声）の，dynamical systemによる連想理論と，連想器SPATEMTRON”，情報研究（文教大学・情報学部），no.30, pp.139-186, Jan.2004
- [B34] 鈴木昇一：“入出力例の系列を用いた“対連想問題・その擬逆問題”の一般解”，情報研究（文教大学・情報学部），no.30, pp.81-137, Jan.2004
- [B35] 鈴木昇一：“共役勾配法の一般解における直交系の応用（画像復元，パターンモデルの構成，

パターン集合の情報理論的次元”, 情報研究 (文教大学・情報学部), no.30, pp.27-79, Jan.2004

付録A. 3種類のパターンモデル

本付録Aでは, 5 定理 1 ~ 5 の意味を理解しやすくするために, 原パターン φ のパターンモデル $T\varphi$ を 3 例指摘する.

本付録では, 2 式 (1.13), (1.14) を採用した可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ を採用し, 処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ を $\Phi \subset L_2(M; dm)$ とする.

A1. 原パターン φ の骨格モデル $T\varphi$

式 (1.8) の可測部分集合 $(x \in) M (\subseteq R^q)$ を考え,

$$\forall x \in M, (S\varphi)(x) = \begin{cases} 0 \cdots \sup_{x \in M} |\varphi(x)| = 0 & \text{のとき} \\ \frac{\varphi(x)}{\sup_{x \in M} |\varphi(x)|} \cdots \sup_{x \in M} |\varphi(x)| > 0 & \text{のとき} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

と定義される写像

$$S: \Phi \rightarrow \Phi \quad (\text{A.2})$$

を導入し, 不等式

$$\forall x \in M, 0 \leq h(x) < 1 \quad (\text{A.3})$$

を満たす閾値関数 $h(x)$ を導入すると,

$$(T\varphi)(x) = \begin{cases} 0 \cdots (S\varphi)(x) \leq h(x) & \text{のとき} \\ 1 \cdots (S\varphi)(x) > h(x) & \text{のとき} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

と定義される式 (1.5) の写像 T は 1. の 4 性質①~④を満たす.

1 より小さい十分小さい正値関数 $\varepsilon(x)$ を, 不等式

$$\forall x \in M, 0 < (S\xi)(x) < 1 \Rightarrow (S\xi)(x) < 1 - \varepsilon(x) \quad (\text{A.5})$$

を満たすように導入し, 更に, $\xi(x)$ を A2. での, 式 (A.7) の平均化パターンとすれば, 閾値関数 $h(x)$ として,

$$h(x) = \begin{cases} 1 - \varepsilon(x) \cdots (S\xi)(x) = 1 & \text{の場合} \\ (S\xi)(x) \cdots 0 \leq (S\xi)(x) < 1 & \text{の場合} \\ 0 \cdots (S\xi)(x) \leq 0 & \text{の場合} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

を採用したこのパターンモデル $T\varphi$ は, 文献 [A16] で顔画像・の 2 値化画像を得るために使われている.

訓練パターン系列を設け, この系列からの学習で閾値関数 $h(x)$ を適切に決定すれば, $T\varphi$ は φ の骨格を表す. このようにして, 原パターン φ の骨格 (skeleton) を表すパターンモデル $T\varphi$ (2 値化パ

ターンモデル) が得られたことになる。

A2. 特徴抽出後定まる相似拡大・縮小に不変なパターンモデル $T\varphi$

第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j の生起確率 $p(\mathfrak{C}_j)$ と， \mathfrak{C}_j の代表パターン ω_j とを設け，その平均化パターン ξ を，

$$\xi = \sum_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) \cdot \omega_j \quad (\text{A.7})$$

と定義する。

相似拡大・縮小の，式 (1.15) のユニタリ作用素群 $\{S_t\}_{-\infty < t < +\infty}$ の各元 S_t は，自己共役作用素

$$H = \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot x_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (\text{A.8})$$

を用いて， H の指数関数として

$$S_t = \exp[-\sqrt{-1} \cdot t \cdot H] \quad (\text{A.9})$$

と表現出来る。

H の関数としての第 $\ell \in L$ 番目の射影作用素 $\theta_\ell(H)$ の系 $\{\theta_\ell(H)\}_{\ell \in L}$ を導入する。各 $\theta_\ell(H)$ はその値域が直交していることに注意しておく。

直交性質

$$(\psi_k, \psi_\ell) = 0 \quad \text{if } k \neq \ell \quad (\text{A.10})$$

を満たす第 $\ell \in L$ 番目のパターン形状素 ψ_ℓ を

$$\psi_\ell(x_1, x_2) = (\theta_\ell(H) \xi)(x_1, x_2) \quad (\text{A.11})$$

と定義できる。射影作用素 $\theta_\ell(H)$ の和

$$\theta(H) \equiv \sum_{\ell \in L} \theta_\ell(H) \quad (\text{A.12})$$

を恒等作用素 I にとり， H の関数としての半正值自己共役作用素 $f(H)$ とを導入すれば，

パターン φ から抽出された第 $\ell \in L$ 番目の特徴量 (測度的ユニタリ不変量) $\mathfrak{F}_\ell(\varphi)$ の，各 S_t の下での不変性

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\ell(S_t \varphi) &= \mathfrak{F}_\ell(\varphi) \\ &\equiv (f(H) \cdot \theta_\ell(H) \cdot \theta(H) \varphi, \theta(H) \varphi) / (\theta(H) \varphi, \theta(H) \varphi), \quad -\infty < t < +\infty \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

を満たす [A5]. 不等式

$$0 < e_\ell \leq \mathfrak{F}_\ell(\theta(H) \xi) \quad (\text{A.14})$$

を満たすように，各閾値 e_ℓ が選ばれているとしよう。2値特徴量 $u(\varphi, \ell)$ を

$$u(\varphi, \ell) =$$

$$\begin{cases} 0 \cdots \mathfrak{F}_\ell(\varphi) < e_\ell & \text{のとき} \\ 1 \cdots \mathfrak{F}_\ell(\varphi) \geq e_\ell & \text{のとき} \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

と定義し，各 $u(\varphi, \ell)$ を1次結合係数に持つパターン

$$(T\varphi)(x_1, x_2) = \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell) \cdot \psi_\ell(x_1, x_2) \quad (\text{A.16})$$

は，正に，構造形式 (1.3) を持つ1例であり，式 (A.16) の様に定義される式 (1.5) の写像 T は1.4

の4性質①～④を満たす。式(1.6)の成立が証明されるから、1.4の③が成立するのである。

このパターンモデル $T\varphi$ は文献[A6]で手書き漢字パターン $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ の構造を再現するために使われている。

H と可換な任意のユニタリ作用素 U の下での不変性

$$\forall \varphi \in \mathfrak{S}, \forall \ell \in L. \mathfrak{F}_\ell(U\varphi) = \mathfrak{F}_\ell(\varphi) \tag{A.17}$$

が成立しており、よってパターンモデル $T\varphi$ の不変性

$$T(U\varphi) = T\varphi \tag{A.18}$$

が成立する。特に、式(1.15)の相似・拡大のユニタリ作用素 S_ℓ は H と可換であることに注意しておく。

このようにして、原パターン φ の構造を表すパターンモデル $T\varphi$ が、相似拡大・縮小のユニタリ作用素群 $\{S_\ell\}_{-\infty < \ell < +\infty}$ の下で不変であるように、 φ からの特徴抽出過程

$$\varphi \rightarrow \{u(\varphi, \ell) \mid \ell \in L\} \tag{A.19}$$

の後、定まる。

A3. 相似拡大・縮小の座標変換がなされる前の状態に戻されたパターンモデル $T\varphi$

実数値パターン $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ について、原点の回りの、相似拡大・縮小に関する関数

$$F(\ell) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot [\log_e(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} - \ell] \cdot \varphi(x_1, x_2) \tag{A.20}$$

を最小にする助変数 ℓ の値は、

$$t(\varphi) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \varphi(x_1, x_2) \log_e(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \varphi(x_1, x_2)} \tag{A.21}$$

であることがただちにわかる。このパラメータ値 $t(\varphi)$ を使い、写像 G を、

$$(G\varphi)(x_1, x_2) = \varphi(x_1 \cdot \exp[t(\varphi)], x_2 \cdot \exp[t(\varphi)]) \tag{A.22}$$

と定義する。このパターン $G\varphi$ の1次モーメント

$$M_1(G\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot (G\varphi)(x_1, x_2) \log_e(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \\ / \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot (G\varphi)(x_1, x_2) \tag{A.23}$$

は実は0である。このとき、

$$(T\varphi)(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{(G\varphi)(x_1, x_2)}{\|G\varphi\|} \dots \|\varphi\| > 0 & \text{のとき} \\ 0 \dots \|\varphi\| = 0 & \text{のとき} \end{cases} \tag{A.24}$$

と定義される式 (1.5) の写像 T は1.4の4性質①～④を満たす。 $T\varphi$ はそのノルムが規格化され、相似拡大・縮小の座標変換

$$\langle x_1, x_2 \rangle \rightarrow \langle c \cdot x_1, c \cdot x_2 \rangle, \text{ここに, } c > 0 \quad (\text{A.25})$$

に不変なパターンモデルである。つまり、

$$\forall \varphi \in \Phi, G(T\varphi) = T\varphi \quad (\text{A.26})$$

が成立している。

以上で、相似拡大・縮小の座標変換に不変なパターンモデル（原点に関する相似拡大・縮小の大きさが規格化されたパターンモデル） $T\varphi$ が得られたが、回転 [A9] を訂正する同様なモデル構成作用素 T' を構成すると、 T, T' は互いに可換であることに注意しておく。

（著者 鈴木昇一，論文題目 2つのパターンモデル構成作用素の、 λ 言語論理による合成法，文教大学情報学部情報研究no.31投稿論文，投稿年月日 2004年2月18日（水））