

会話音声・動画像処理への、万能性類似度関数の採用による SS多段階認識の改良

鈴木 昇一

An Adoption of Universal Similarity-Measure Functions Which Leads to an Improvement upon SS Multi-Stage Recognition and Its Application to a Processing of Discoursed Speeches and Animated Images

Shoichi Suzuki

あらまし

本論文の主要な目的は、これまでの、axiom 2を満たす類似度関数

$$SM : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s | 0 \leq s \leq 1\}$$

を、axiom 2Uを満たす類似度関数（万能性類似度関数；universal similarity-measure function）

$$USM : \Phi \times \Omega \rightarrow R = \{s | -\infty < s < +\infty\}$$

へと、拡張することである。この拡張に伴い、多段階認識過程を生成する連想形認識システム RECOGNITRONが内部状態を変換する写像は構造受精作用素 $A(\mu)$ から $B(\mu)$ へと拡張され、RECOGNITRONが入力パターンの帰属するカテゴリを決定するのに探索する範囲がパターン φ の凸集合から凸集合を含む超平面へと拡大されるという利点が生まれる。この利点により、実際に処理の対象とする問題の、パターン集合 Φ の元 φ が会話音声・動画像処理である場面において、認識不定（該当するカテゴリが複数個あること）、認識不能（該当するカテゴリが1個もないこと）になる事態が $A(\mu)$ を使うより $B(\mu)$ を使うことにより、より避けられる可能性が強まり、一層、適切に処理できるようになることが期待される。

これまでの axiom 2を満たすの類似度関数 SM を唯関数変換して得られる axiom 2 $^{\pm\infty}$ を満たすが規格化条件を満たさない類似度関数 $sm^{\pm\infty}$ とは異なり、axiom 2の拡張である axiom 2Uを提案し、この axiom 2Uを満たす6種類の類似度関数 USM を構成する。この際、SS理論の axiom 1を満たすパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ から、近似条件付き自乗ノルムの最小化規準を最小にするパターンモデル $T' \cdot T\varphi \in \Phi$ がSS理論の axiom 1を満たすように、求められる。更に、axiom 2Uを満たす1つの万能性類似度関数 USM が構成されれば、万能性類似度関数が無数に存在することが明らかにされる。

キーワード

SS多段階認識 万能性類似度関数 凸性 超平面 モデル構成作用素

Abstract

The main aim of this paper is to extend the similarity-measure function

$$SM : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leq s \leq 1\}$$

so far which must satisfy axiom 2 proposed by S. Suzuki into a similarity-measure function

$$USM : \Phi \times \Omega \rightarrow R = \{s \mid -\infty < s < +\infty\}$$

called a universal similarity-measure function which must satisfy axiom 2U presented here. The extension leads to an extension $B(\mu)$ of a structural fertilization operator $A(\mu)$ which can transform one internal state of an associative recognition system RECOGNITRON into another state, which may generate a SS-process of a multi-stage recognition. As a result of adopting $B(\mu)$ instead of $A(\mu)$ a search area of RECOGNITRON which must determine a category to which an input pattern φ belongs can be enlarged from a convex set to a hyperplane which contains the convex set. Spreading a search area has many advantages. It can be probably avoided by making use of $B(\mu)$ instead of $A(\mu)$ in some cases where RECOGNITRON have to deal with pattern $\varphi \in \Phi$ in question which is one of discoursed speeches or animated Images that RECOGNITRON meets with a set of categories to which $\varphi \in \Phi$ belongs having elements more than two (indefinite recognition) or being empty (unrecognizability). Thus it is expected that a set Φ of patterns in question can be appropriately recognized by RECOGNITRON.

We can transform a similarity-measure function SM thus far which satisfies axiom 2 of SS-theory into a similarity-measure function $sm^{\pm\infty}$ which satisfies axiom $2^{\pm\infty}$ and does not satisfy a condition of normalization. We propose an axiom 2U and construct six kinds of USM which satisfy the axiom 2U as opposed to $sm^{\pm\infty}$. Under the present circumstances, pattern-model $T' \cdot T\varphi \in \Phi$ from $T\varphi \in \Phi$ which satisfies axiom 1 can be obtained so that it can satisfy axiom 1 if T is an identity operator. $T' \cdot T\varphi \in \Phi$ is a corresponding model of $\varphi \in \Phi$ required so as to minimize the squared norm so that it can approximate $\varphi \in \Phi$ to a designated extent. Moreover we make clear that if we construct only one of USM, there are innumerable USMs.

Key Words:SS-multi-stage recognition universal similarity-measure function convexity hyperplane model-construction operator

1. まえがき

S. Suzukiにより組み立てられたSS理論 [B1] ~ [B4] は本来，パターン認識の数学的理論であるが，文章・音声・画像 (text, audio and image) などのマルチメディアを統合して処理するマルチメディア・コンピュータの構成，マルチメディア情報内容検索，パターンを用いた“記号による述語推論”，パターンを用いた“知識推論”などの多方面へ，その応用を拡大しつつある (文献B)。

モデル構成作用素 T ，類似度関数 SM ，大分類関数 BSC ，カテゴリ選択関数 CSF が各々満たす4公理 axiom 1~4を出発点としているのがSS理論であり，このような公理論的手法を駆使して得られたパターン認識の理論はSS理論以外，存在していないのが現状である。

3構成要素 T ， SM ， BSC を使って，外界のパターン φ に対応しているパターンモデル $T\varphi$ について，多段階認識 (SS多段階認識) の過程 (連想形認識方程式 [B3]，いわゆる，SS方程式の求解過程) のポテンシャルエネルギー (SSポテンシャル) が次第に減少し0に収束すれば，その収束結果に φ の

帰属するカテゴリと、 φ の表象との対(カテゴリ帰属知識；付録Aの節A5を参照)が表示されている。

この多段階認識の働きを備えているのが、S. Suzukiの認識システムRECOGNITRONである。

モデル構成作用素 T の役割は、処理の対象とする問題のパターン集合($\varphi \in \Phi$)の単一化・簡素化、つまり、要約である。モデル構成作用素 T には、個々のパターン φ を要約して、そのモデル $T\varphi$ を作る役割がある。

類似度関数 SM には、外界を写し取ったパターン φ に対応して短期記憶内に確保されたパターンモデルの列 $\psi_0 = T\varphi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_t, \psi_{t+1}, \dots$ (SS多段階認識の過程)の各成分 ψ_t が、長期記憶内の各パターンモデル(カテゴリ \mathfrak{C}_j の代表パターン ω_j のモデル) $T\omega_j$ ($j \in J$)と似ている程度(類似度)を測る機能がある。

大分類関数 BSC には、SS多段階認識の過程の各成分 ψ_t が帰属する可能性のある複数個の候補カテゴリを推論する働きがある。

カテゴリ選択関数 CSF には、SS多段階認識の過程の各成分 ψ_t が帰属する可能性のある複数個の候補カテゴリを絞ってその内有効な意味のある複数個の候補カテゴリを得る役割がある。

3構成要素 T, SM, BSC を使って構成される構造受精変換 $TA(\mu)T$ には、短期記憶内に確保されたパターンモデル ψ_t を今1つのパターンモデル ψ_{t+1} へ変換し、第($t+1$)認識段階のこのパターンモデル ψ_{t+1} を短期記憶内に再び、蓄える役割があり、この繰り返しによりSS多段階認識過程が生成される。

本論文の主要な目的は、今までの、axiom 2を満たす式(A3.5)の類似度関数

$$SM : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s | 0 \leq s \leq 1\} \quad (1.1)$$

を、axiom 2Uを満たす類似度関数(万能性類似度関数；universal similarity-measure function)

$$USM : \Phi \times \Omega \rightarrow R = \{s | -\infty < s < +\infty\} \text{ (実数全体の集合)} \quad (1.2)$$

へと、拡張することである。この拡張の基盤を与えるのが、可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の1次独立な系 $\psi_q, q \in Q$ により張られる(パターン集合の)超平面を表示する定理2.1である。この拡張に伴い、連想形認識システムRECOGNITRONが内部状態を変換する写像は、構造受精作用素 $A(\mu)$ から $B(\mu)$ へと拡張され、RECOGNITRONが入力パターン φ の帰属するカテゴリを決定するのに探索する範囲がパターンの凸集合から凸集合を含む超平面へと拡大されるという利点が生まれる。この利点により、実際に処理の対象とする問題の、式(A1.10)のパターン集合 Φ が一層、適切に処理できるようになること、言い換えれば、

入力パターン φ が会話音声・動画像処理の場面において、認識不定(該当するカテゴリが複数個あること)、認識不能(該当するカテゴリが1個もないこと)になる事態が $A(\mu)$ を使うより $B(\mu)$ を使うことにより、より避けられる可能性が強まり、一層、適切に処理できるようになることが期待される。

付録Aのaxiom 2を満たす式(A3.5)の類似度関数 SM を唯関数変換して得られるaxiom 2 $^{\pm\infty}$ を満たすが規格化条件を満たさない類似度関数 $sm^{\pm\infty}$ とは異なり、axiom 2Uを提案し、このaxiom 2Uを満たす6種類の類似度関数 USM を構成する。この際、SS理論のaxiom 1を満たすパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ から、近似条件付き自乗ノルムの最小化規準 $F \equiv F(a_j, j \in J)$ を最小にするパターンモデル $T' \cdot T\varphi \in \Phi$ が再び、SS理論のaxiom 1を T が恒等作用素 I の場合満たすように、求められる。更に、axiom 2Uを満たす1つの万能性類似度関数 USM が構成されれば、2不動点性質を満たすだけの関数の系 $g, j \in J$ で変換することにより、万能性類似度関数が無数に存在することが明らかにされる(定理3.1；万能性類似度関数 USM の再帰定理)。この定理3.1は万能性類似度関数 USM を構成する場面

において、実際に処理しなければならないパターン集合 Φ に応じて適切にUSMを選択できることを可能にしている。

尚、付録Aでは、パターン認識の数学的理論(SS理論) [B1] ~ [B4] の基本前提である4公理 axiom 1~4を各々、満たさなければならないパターン集合 Φ とモデル構成作用素 T との対 $[\Phi, T]$ 、類似度関数SM, 大分類関数BSC, カテゴリ選択関数CSFの4事項が解説されている。また、付録Bでは、パターン集合を2分割することや、情報検索に有効であると判明して来た支持ベクトルマシーンSVM [A1], [A5], [B23] に対応して、支持パターンマシーンspmを提案し、axiom 3を満たすように大分類関数BSCの構成へ、応用しておいた。更に、付録Cでは、SS多段階認識の過程

$$\phi_0 = T\varphi, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_t, \phi_{t+1}, \dots \quad (1.3)$$

の各成分 ϕ_t が如何なる考えで生成されるかが簡単に説明されている。

2. $A(\mu)\varphi, \varphi \in \Phi$ の張る凸1次結合の集合から $B(\mu)\varphi, \varphi \in \Phi$ の張る平面へ探索の範囲を広げよう

本章では、先ず、1次独立な系 $\phi_q, q \in Q$ により張られる(パターン集合の)超平面を表示する(定理2.1)。次に、類似度関数の値域を非負単位区間から実数全体へと拡張すれば、つまり、式(1.1)のSMから式(1.2)のUSMへと拡張すれば、連想形認識システムRECOGNITRONが内部状態を変換する写像は、構造受精作用素 $A(\mu)$ から $B(\mu)$ へと拡張され、RECOGNITRONが入力パターンの帰属するカテゴリを決定するのに探索する範囲がパターンの凸集合から凸集合を含む超平面へと拡大されるという利点が生まれる。この利点により、実際に処理の対象とする問題の、式(A1.10)のパターン集合 Φ が一層、適切に処理できるようになることが期待される。

付録Aのaxiom 1を満たす対 $[\Phi, T]$ を導入しておく。

2.1 平面上にあるパターン

可分なヒルベルト空間 \mathfrak{H} の部分集合 \mathfrak{M} は、

$$\varphi, \eta \in \mathfrak{M} \wedge 0 \leq a \leq 1 \text{ ならば, } a \cdot \varphi + (1-a) \cdot \eta \in \mathfrak{M} \quad (2.1)$$

を満足するとき、凸集合(convex set)であるといわれる。

$$\varphi = \sum_{i=1}^r a_i \cdot \eta_i, \text{ ここに, } a_i \geq 0 (1 \leq i \leq r) \wedge \sum_{i=1}^r a_i = 1 \quad (2.2)$$

と表される点 φ の集合を、 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ を頂点とする $(r-1)$ 次元単体と呼び、

$$\overline{\eta_1 \eta_2 \dots \eta_r} \quad (2.3)$$

と表す。 $\overline{\eta_1 \eta_2}$ は線分、 $\overline{\eta_1 \eta_2 \eta_3}$ は3角形であり、単体 $\overline{\eta_1 \eta_2 \dots \eta_r}$ は、 $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_r$ を含む最小の凸集合である。

1次独立な系 $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_r$ によって、

$$\varphi = \sum_{i=1}^r a_i \cdot \eta_i, \text{ ここに, 各 } a_i (1 \leq i \leq r) \text{ は実定数であり, } \sum_{i=1}^r a_i = 1 \quad (2.4)$$

と表される点 φ のすべての集合は点 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ を含む r 次元の平面をなすことは、次の定理2.1からわかる。次の定理2.1は、既に文献[B17]定理A4.1として証明されている。

[定理2.1] (パターン集合の平面化定理)

可分なヒルベルト空間 \mathfrak{H} の元としての、有限個のパターン $\phi_q \in \mathfrak{H}$ からなる集合

$$\phi_q, q \in Q \tag{2.5}$$

は1次独立な系としよう。各 $\phi_q \in \mathfrak{S}$ を頂点とする多角形を含む平面上の任意の点 $\varphi \in \mathfrak{S}$ は、等式

$$\sum_{q \in Q} a_q = 1 \tag{2.6}$$

を満たす実定数 $a_q (q \in Q)$ を1次結合の実数係数とする1次結合

$$\varphi = \sum_{q \in Q} a_q \cdot \phi_q \in \mathfrak{S} \tag{2.7}$$

として表される。 □

候補カテゴリの番号を要素とするカテゴリ番号リスト $\mu \in \mathcal{J}$ (すべてのカテゴリの番号の集合 J の、すべての部分集合の集まり)を助変数とする登場している作用素

$$A(\mu): \Phi \rightarrow \Phi \tag{2.8}$$

は、構造受精作用素といわれるものであり、axiom 2の、式(A3.5)の類似度関数SMのT-不変性(iii)、並びに、axiom 3の、式(A4.1)の大分類関数BSCのT-不変性(ii)に注意して、

(i) $\varphi = 0 \vee \mu = \phi$ の場合

$$A(\mu)\varphi = 0. \tag{2.9}$$

(ii) $\varphi \neq 0 \wedge \mu \neq \phi$ の場合

$$A(\mu)\varphi = \begin{cases} \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j) \cdot BSC(\varphi, j) \cdot T\omega_j & \text{if } \sum_{k \in \mu} BSC(\varphi, k) > 0 \\ \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j) \cdot T\omega_j & \text{if } \sum_{k \in \mu} BSC(\varphi, k) = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

と、2式(A3.5), (A4.1)の類似度関数SM, 大分類関数BSCを使って定義されている。
 $\varphi \neq 0 \wedge \mu \neq \phi$ の場合、

$$A(\mu)\varphi / \sum_{k \in \mu} SM(\varphi, \omega_k) \cdot BSC(\varphi, k) \quad \text{if } \sum_{k \in \mu} BSC(\varphi, k) > 0 \tag{2.11}$$

或いは、

$$A(\mu)\varphi / \sum_{k \in \mu} SM(\varphi, \omega_k) \quad \text{if } \sum_{k \in \mu} BSC(\varphi, k) = 0 \tag{2.12}$$

は、1次独立な系 $T\omega_j, j \in \mu$ の張る凸集合($(|\mu|-1)$ 次元単体)にあることに注意する。

2.2 これまでの構造受精作用素 $A(\mu)$ の拡張としての、万能性構造受精作用素 $B(\mu)$

写像

$$B(\mu): \Phi \rightarrow \Phi \tag{2.13}$$

は、2式(2.9), (2.10)の写像 $A(\mu)$ において式(1.1)の類似度関数SMの代わりに式(1.2)の万能性類似度関数USMを採用して得られ、次のように定義される：

(i) $\varphi = 0 \vee \mu = \phi$ の場合

$$B(\mu)\varphi = 0. \tag{2.14}$$

(ii) $\varphi \neq 0 \wedge \mu \neq \phi$ の場合

$$B(\mu)\varphi = \begin{cases} \sum_{j \in \mu} USM(\varphi, \omega_j) \cdot BSC(\varphi, j) \cdot T\omega_j & \text{if } \sum_{k \in \mu} BSC(\varphi, k) > 0 \\ \sum_{j \in \mu} USM(\varphi, \omega_j) \cdot T\omega_j & \text{if } \sum_{k \in \mu} BSC(\varphi, k) = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

□

$\varphi \neq 0 \wedge \mu \neq \phi$ の場合,

$$A(\mu)\varphi / \sum_{k \in \mu} USM(\varphi, \omega_k) \cdot BSC(\varphi, k) \quad \text{if} \quad \sum_{k \in \mu} BSC(\varphi, k) > 0 \quad (2.16)$$

或いは,

$$A(\mu)\varphi / \sum_{k \in \mu} USM(\varphi, \omega_k) \quad \text{if} \quad \sum_{k \in \mu} BSC(\varphi, k) = 0 \quad (2.17)$$

は、1次独立な系 $T\omega_j, j \in \mu$ の張る超平面にあることに注意する (定理2.1).

連想形認識過程を生成するシステムRECOGNITRONでは、処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ を認識するのに、多段階想起認識過程を生成し、あまり崩れていないパターン $\varphi \in \Phi$ についてはこの多段階想起認識過程により最終的には $\varphi \in \Phi$ が帰属するカテゴリの代表パターンのモデルが得られることに思い起こそう [B3], [B4].

この認識の働きにおいて、定理2.1 (パターン集合の平面化定理) を勘案すればわかるように、作用素 $A(\mu)$ の代りに $B(\mu)$ を使うことにより、入力パターン φ の帰属するカテゴリを決定するのに探索する範囲がパターンの凸集合から凸集合を含む超平面へと拡大されることに注意しよう.

多段階認識過程を生成する連想形認識システムRECOGNITRONが内部状態を変換する写像は、構造受精作用素 $TA(\mu)T$ から $TB(\mu)T$ へと拡張され、RECOGNITRONが入力パターン φ の帰属するカテゴリを決定するのに探索する範囲がパターンの凸集合から凸集合を含む超平面へと拡大するという利点が生まれる. この利点により、実際に処理の対象とする問題の、パターン集合の元 φ が認識不定、認識不能になる事態が $A(\mu)$ を使うより $B(\mu)$ を使うことにより、避けられる可能性が強まり、一層、適切に処理できるようになることが期待される.

3. 万能性類似度関数 USM

本章では、付録Aの axiom 2を満たす式(A3.5)の類似度関数 SM を唯関数変換して得られる axiom $2^{\pm\infty}$ を満たすが規格化条件を満たさない類似度関数 $sm^{\pm\infty}$ とは異なり、axiom 2Uを提案し、この axiom 2Uを満たす6種類の類似度関数 USM を構成する. 更に、axiom 2Uを満たす1つの万能性類似度関数が構成されれば、万能性類似度関数が無数に存在することが明らかにされる (定理3.1; 万能性類似度関数 USM の再帰定理).

3.1 規格化条件を満たさない類似度関数 $sm^{\pm\infty}$ とは別物を構成しなければならない

写像

$$sm^{\pm\infty}: \Phi \times \Omega \rightarrow R = \{s | -\infty < s < +\infty\} \quad (3.1)$$

が、付録Aの axiom 2, (ii) の規格化条件が排除された次の Axiom $2^{\pm\infty}$ を満たすように構成されるところ.

Axiom $2^{\pm\infty}$ (類似度関数 $sm^{\pm\infty}$ の満たすべき公理)

(i) (正規直交性; orthonormality)

$$\forall j \in J, sm^{\pm\infty}(\omega_j, \omega_j) = +\infty \wedge [\forall i \in J - \{j\}, sm^{\pm\infty}(\omega_i, \omega_j) = -\infty] \quad (3.2)$$

(ii) (写像 T の下での不変性; invariance under mapping T)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, sm^{\pm\infty}(T\varphi, \omega_j) = sm^{\pm\infty}(\varphi, \omega_j). \quad (3.3)$$

□

付録A, A3章のaxiom 2の正規直交性と異なった形で, 上述の axiom 2^{±∞} の正規直交性が設定されていることに注意しよう.

Axiom 2 を満たす式 (A3.5) の類似度関数 SM から,

$$\lim_{s \rightarrow 0} F_j(s) = -\infty \wedge \lim_{s \rightarrow 1} F_j(s) = +\infty \quad (3.4)$$

$$\exists m_j (-\infty < m_j < +\infty), \lim_{s \rightarrow 1/2} F_j(s) = m_j \quad (3.5)$$

を考え,

$$sm^{\pm\infty}(\varphi, \omega_j) = F_j(SM(\varphi, \omega_j)) \quad (3.6)$$

とおけば, この写像 $sm^{\pm\infty}$ は axiom 2^{±∞} を満たす. 例えば,

$$m_j = 0 \quad (3.7)$$

と設定したとき,

$$F_j(s) = \tan(\pi(s - 2^{-1})) \quad (3.8)$$

は, 2式 (3.4), (3.5) を満たす. 尚, 文献 [B31] の付録Hによれば,

$$s_j = \frac{sm^{\pm\infty}(\varphi, \omega_j) - m_j}{\sigma_j} \quad (3.9)$$

において,

$$SM(\varphi, \omega_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{s_j} dq \exp\left\{-\frac{q^2}{2}\right\} \quad (3.10)$$

を満たすものとして, 写像 $sm^{\pm\infty}$ が与えられる.

3.2 万能性類似度関数 USM の満たすべき公理と, その再帰的構成

式 (1.2) の万能性類似度関数 USM とは, 次の axiom 2U を満たす写像である.

Axiom 2U (類似度関数 USM の満たすべき公理)

(i) (正規直交性; orthonormality)

$$\forall i, \forall j, USM(\omega_i, \omega_j) = \delta_{ij} \quad (\text{クロネッカーの } \delta \text{ 記号}). \quad (3.11)$$

(ii) (規格化条件, 確率性, 正規性; probability condition, normalization)

$$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} USM(\varphi, \omega_j) = 1. \quad (3.12)$$

(iii) (写像 T の下での不変性; invariance under mapping T)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, USM(T\varphi, \omega_j) = USM(\varphi, \omega_j). \quad (3.13)$$

□

上述の axiom 2U を満たす 1 つの万能性類似度関数 USM が構成されれば, 万能性類似度関数が無数に存在することは, 次の定理3.1からわかる.

[定理3.1] (万能性類似度関数の再帰定理)

2 不動点性質

$$g_j(0) = 0 \quad (3.14)$$

$$g_j(1) = 1 \quad (3.15)$$

を満たす関数

$$g_j : R \rightarrow R \quad (3.16)$$

と， axiom 2U を満たす式 (1.2) の万能性類似度関数 USM とを用いて，

$$USM'(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} \frac{g_j(USM(\varphi, \omega_j))}{\sum_{k \in J} g_k(USM(\varphi, \omega_k))} \cdots \sum_{k \in J} g_k(USM(\varphi, \omega_k)) \neq 0 \text{ の場合} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \sum_{k \in J} g_k(USM(\varphi, \omega_k)) = 0 \text{ の場合} \end{cases} \quad (3.17)$$

と構成された関数

$$USM' : \Phi \times \Omega \rightarrow R = \{s \mid -\infty < s < +\infty\} \quad (3.18)$$

は， axiom 2U を満たす。

(証明) (i) の証明：2式 (3.14)，(3.15) の2不動点性質を使えば，

$$\varphi = \omega_j \text{ であれば， } USM'(\varphi, \omega_j) = \frac{g_j(1)}{g_j(1) + \sum_{k \in J - \{j\}} g_k(0)} = 1/1 = 1 \quad (3.19)$$

$$\varphi = \omega_j (i \neq j) \text{ であれば， } USM'(\varphi, \omega_j) = \frac{g_j(0)}{g_i(1) + \sum_{k \in J - \{j\}} g_k(0)} = 0/1 = 0 \quad (3.20)$$

を得る。

(ii) の証明： USM の定義式 (3.17) から明らか。

(iii) の証明： USM が写像 T の下で，不変性を備えていることから明らか。 \square

この定理3.1は万能性類似度関数 USM を構成する場面において，実際に処理しなければならないパターン集合 Φ に応じて適切に USM を選択できることを可能にしている。それは，式 (3.16) の関数 g_j が，式 (3.14)，(3.15) の2不動点性質を満たすだけでよいことから理解できる。

式 (3.14)，(3.15) の2不動点性質を満たす式 (3.16) の関数 g_j は，例えば，次の5種類①～⑤が存在する：

$$\textcircled{1} g_j(u) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \quad (3.21)$$

$$\textcircled{2} g_j(u) = \begin{cases} 0 \cdots u \leq \varepsilon_j(0) \text{ のとき} \\ h_j(u) \cdots \varepsilon_j(0) < u < \varepsilon_j(1) \text{ のとき} \\ 1 \cdots u \geq \varepsilon_j(1) \text{ のとき} \end{cases} \quad (3.22)$$

ここに，関数 $h_j(u)$ ($\varepsilon_j(0) < u < \varepsilon_j(1)$) は

$\varepsilon_j(0) < u < \varepsilon_j(1)$ について， $h_j(u) \neq 0, \neq 1$ であるような任意の実数値関数であって，例えば， u の1次関数

$$h_j(u) = \frac{u - \varepsilon_j(0)}{\varepsilon_j(1) - \varepsilon_j(0)} \quad (3.24)$$

がそうである。

$$\textcircled{3} g_j(u) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \quad (3.25)$$

$$\textcircled{4} g_j(u) = \frac{1 - \exp(-a_j \cdot u^2)}{1 - \exp(-a_j)}, a_j > 0 \quad (3.26)$$

$$\textcircled{5} g_j(u) = \frac{\log_e(1 + a_j \cdot u^2)}{\log_e(1 + a_j)}, a_j > 0 \quad (3.27)$$

□

3.3 万能性類似度関数 USM の 5 構成

節3.2の axiom 2Uを満たす万能性類似度関数 USM の 5 種類①～⑤を, 以下に構成しよう.

① (構成 1)

内積, ノルムを各々, $(\varphi, \eta), \|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ とする可分なヒルベルト空間 (節A1を参照) \mathfrak{H} の有限個の元 $T\omega_j$ からなる式 (A3.4) の 1 次独立な系 $\{T\omega_j\}_{j \in J}$ の 1 次結合

$$\sum_{k \in J} d_k \cdot T\omega_k \quad (3.28)$$

を用いて, 原パターン $\varphi \in \Phi$ のモデル $T\varphi \in \Phi$ を最小自乗近似するときの近似誤差

$$T\varphi - \sum_{k \in J} d_k \cdot T\omega_k \quad (3.29)$$

の自乗ノルム

$$\|T\varphi - \sum_{k \in J} d_k \cdot T\omega_k\|^2 \quad (3.30)$$

を最小ならしめる各 1 次結合係数 $d_k(\varphi) \equiv d_k (k \in J)$ を求めよう. つまり,

$$\|T\varphi - \sum_{k \in J} d_k \cdot T\omega_k\|^2 \rightarrow \min \quad (3.31)$$

ならしめる各 1 次結合係数 $d_k(\varphi) \equiv a_k (k \in J)$ は, 最小自乗法によれば, 連立 1 次方程式

$$\sum_{k \in J} (T\omega_k, T\omega_j) \cdot d_k(\varphi) = (T\varphi, T\omega_j), j \in J \quad (3.32)$$

の解として与えられる. このとき, モデル $T\varphi \in \mathfrak{H}$ の表現 (1 次展開式)

$$\exists (T\varphi)_\perp \in \mathfrak{H}, T\varphi = \sum_{k \in J} d_k(\varphi) \cdot T\omega_k + (T\varphi)_\perp \quad (3.33)$$

$$\wedge [\forall k \in J, ((T\varphi)_\perp, T\omega_k) = 0] \quad (3.34)$$

が成り立つ. 1 次独立な系 $\{T\omega_j\}_{j \in J}$ が

$$(T\omega_i, T\omega_j) = 0 \quad \text{if} \quad i \neq j \quad (3.35)$$

を満たすという意味で, 直交系であれば, 連立 1 次方程式 (3.32) の解 $d_j(\varphi) (j \in J)$ は

$$d_j(\varphi) = \frac{(T\varphi, T\omega_j)}{(T\omega_j, T\omega_j)}, j \in J \quad (3.36)$$

と求まることに気付く.

(イ) (連立 1 次方程式 (3.32) の解 $d_j(\varphi) (j \in J)$ の T-不変性)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, d_j(T\varphi) = d_j(\varphi). \quad (3.37)$$

(ロ) (連立 1 次方程式 (3.32) の解 $d_j(\varphi) (j \in J)$ の正規直交性)

$$d_i(\omega_j) = 1 \quad \text{if } i=j, = 0 \quad \text{if } i \neq j. \quad (3.38)$$

が成立することがわかり，

$$USM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} \frac{d_j(\varphi)}{\sum_{k \in J} d_k(\varphi)} & \text{if } \sum_{k \in J} d_k(\varphi) \neq 0 \\ p(\mathfrak{C}_j) & \text{if } \sum_{k \in J} d_k(\varphi) = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

と定義された式 (1.2) の写像 USM は，節3.2の Axiom 2U を満たすことがわかる。

② (構成 2)

連立 1 次方程式 (3.32) の解 $d_j(\varphi) (j \in J)$ について，考えよう。式 (3.38) を勘案し，不等式

$$\max_{i \in J - \{j\}} |d_j(\omega_i)| = 0 \leq e_0(j) < e_1(j) \leq |d_j(\omega_j)| = 1 \quad (3.40)$$

を満たす閾値の系

$$e_0(j), e_1(j), j \in J \quad (3.41)$$

を導入する。このとき，各 $d_j(\varphi) (j \in J)$ を

$$d'_j(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{if } |d_j(\varphi)| \leq e_0(j) \\ d_j(\varphi) & \text{if } e_0(j) < |d_j(\varphi)| < e_1(j) \\ \frac{d_j(\varphi)}{|d_j(\varphi)|} & \text{if } e_1(j) \leq |d_j(\varphi)| \end{cases} \quad (3.42)$$

と変換して得られる各 $d'_j(\varphi) (j \in J)$ を用いて，

$$USM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} \frac{d'_j(\varphi)}{\sum_{k \in J} d'_k(\varphi)} & \text{if } \sum_{k \in J} d'_k(\varphi) \neq 0 \\ p(\mathfrak{C}_j) & \text{if } \sum_{k \in J} d'_k(\varphi) = 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

と定義された式 (1.2) の写像 USM は，節3.2の axiom 2U を満たすことがわかる。何故ならば，2式 (3.37)，(3.38) から，

$$(イ') \quad \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, d'_j(T\varphi) = d'_j(\varphi). \quad (3.44)$$

$$(ロ') \quad d'_j(\omega_j) = 1 \quad \text{if } i=j, = 0 \quad \text{if } i \neq j. \quad (3.45)$$

が成立しているからである。

③ (構成 3)

第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j の代表パターン $\omega_j \in \Phi$ のモデル $T\omega_j \in \Phi$ の複素定数倍 $c_j \cdot T\omega_j \in \Phi$ で，パターンモデル $T\varphi \in \Phi$ を近似するときの誤差

$$T\varphi - c_j \cdot T\omega_j \quad (3.46)$$

の自乗ノルム

$$\|T\varphi - c_j \cdot T\omega_j\|^2 \quad (3.47)$$

を最小ならしめる複素係数 $c_j(\varphi) = c_j$ は，最小自乗法によれば，

$$c_j(\varphi) = (T\varphi, T\omega_j) / (T\omega_j, T\omega_j) \quad (3.48)$$

と求められる．このとき，モデル $T\varphi \in \mathfrak{S}$ の直交分解式

$$\exists (T\varphi)_\perp \in \mathfrak{S}, T\varphi = c_j(\varphi) \cdot T\omega_j + (T\varphi)_\perp \quad (3.49)$$

$$\wedge ((T\varphi)_\perp, T\omega_j) = 0 \quad (3.50)$$

が成立する．

$$(イ'') \quad \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, c_j(T\varphi) = c_j(\varphi). \quad (3.51)$$

$$(ロ'') \quad \forall j \in J, c_j(\omega_j) = 1 \quad (3.52)$$

が成立することがわかり，不等式

$$0 < \max_{i \in J - \{j\}} |c_j(\omega_i)| \leq e_0(j) < e_1(j) \leq |c_j(\omega_j)| = 1 \quad (3.53)$$

を満たす閾値の，式 (3.41) の系を導入する．このとき，各 $c_j(\varphi) (j \in J)$ を

$$c'_j(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{if } |c_j(\varphi)| \leq e_0(j) \\ c_j(\varphi) & \text{if } e_0(j) < |c_j(\varphi)| < c_j(j) \\ \frac{c_j(\varphi)}{|c_j(\varphi)|} & \text{if } e_1(j) \leq |c_j(\varphi)| \end{cases} \quad (3.54)$$

と変換して得られる各 $c'_j(\varphi) (j \in J)$ を用いて，

$$USM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} \frac{c'_j(\varphi)}{\sum_{k \in J} c'_k(\varphi)} & \text{if } \sum_{k \in J} c'_k(\varphi) \neq 0 \\ p(\mathfrak{S}_j) & \text{if } \sum_{k \in J} c'_k(\varphi) = 0 \end{cases} \quad (3.55)$$

と定義された式 (1.2) の写像 USM は，節3.2の axiom 2U を満たすことがわかる．何故ならば，2式 (3.37)，(3.38) から，

$$(イ''') \quad \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, c'_j(T\varphi) = c'_j(\varphi). \quad (3.56)$$

$$(ロ''') \quad c'_i(\omega_j) = 1 \quad \text{if } i = j, = 0 \quad \text{if } i \neq j. \quad (3.57)$$

が成立しているからである．

④ (構成4)

式 (A3.4) のパターンモデル集合 $T \cdot \Omega = \{T\omega_j | j \in J\}$ は1次独立な系としよう． $T \cdot \Omega$ を用いて， c_{ij} を

$$c_{ij} = (T\omega_j, T\omega_i) \quad (3.58)$$

と定義する． c_{ij} を第 $i \in J$ 行第 $j \in J$ 列の要素とする行列 C の逆行列 C^{-1} は， $T \cdot \Omega$ が1次独立な系であるから，存在する． C^{-1} の第 $i \in J$ 行第 $j \in J$ 列の要素を， $(C^{-1})_{ij}$ と表す．

パターン $\varphi \in \Phi$ につき， $v_j(\varphi)$ を

$$v_j(\varphi) \equiv \sum_{i \in J} (C^{-1})_{ji} \cdot (T\varphi, T\omega_i) \quad (3.59)$$

と定義する．このとき，

$$(イ^4) \quad \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, v_j(T\varphi) = v_j(\varphi) \quad (3.60)$$

$$(ロ^4) \quad \forall j \in J, v_j(\omega_j) = 1 \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \therefore v_j(\omega_j) &= \sum_{i \in J} (C^{-1})_{ji} \cdot (T\omega_j, T\omega_i) \\ &= \sum_{i \in J} (C^{-1})_{ji} \cdot c_{ij} = 1 \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, v_j(\omega_i) = 0 \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad k \neq j &\Rightarrow v_j(\omega_k) = \sum_{i \in J} (C^{-1})_{ji} \cdot (T\omega_k, T\omega_i) \\ &= \sum_{i \in J} (C^{-1})_{ji} \cdot c_{ik} = 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

が成立することがわかり，

$$USM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} \frac{v_j(\varphi)}{\sum_{k \in J} v_k(\varphi)} & \text{if } \sum_{k \in J} v_k(\varphi) \neq 0 \\ p(\mathfrak{C}_j) & \text{if } \sum_{k \in J} v_k(\varphi) = 0 \end{cases} \quad (3.65)$$

と定義された式 (1.2) の写像USMは，節3.2の axiom 2U を満たすことがわかる．

⑤ (構成 5)

式 (3.59) の $v_j(\varphi)$ を導入する．不等式

$$\max_{i \in J - \{j\}} |v_j(\omega_i)| = 0 \leq e_0(j) < e_1(j) \leq |v_j(\omega_j)| = 1 \quad (3.66)$$

を満たす閾値の，式 (3.41) の系 $e_0(j), e_1(j), j \in J$ を導入する．このとき，各 $v_j(\varphi) (j \in J)$ を

$$v'_j(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{if } |v_j(\varphi)| \leq e_0(j) \\ v_j(\varphi) & \text{if } e_0(j) < |v_j(\varphi)| < e_1(j) \\ \frac{v_j(\varphi)}{|v_j(\varphi)|} & \text{if } e_0(j) \leq |v_j(\varphi)| \end{cases} \quad (3.67)$$

と変換して得られる各 $d'_j(\varphi) (j \in J)$ を用いて，

$$USM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} \frac{v'_j(\varphi)}{\sum_{k \in J} v'_k(\varphi)} & \text{if } \sum_{k \in J} v'_k(\varphi) \neq 0 \\ p(\mathfrak{C}_j) & \text{if } \sum_{k \in J} v'_k(\varphi) = 0 \end{cases} \quad (3.68)$$

と定義された式 (1.2) の写像USMは，節3.2の axiom 2U を満たすことがわかる．何故ならば，3式 (3.60), (3.61), (3.63) から，

$$(\text{I}^5) \quad \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, v'_j(T\varphi) = v'_j(\varphi). \quad (3.69)$$

$$(\text{O}^5) \quad v'_i(\omega_j) = 1 \quad \text{if } i = j, = 0 \quad \text{if } i \neq j. \quad (3.70)$$

が成立しているからである．

4. パターンを近似できるという拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデル $T \cdot T' \varphi$ と， 万能性類似度関数 USM の構成

本章では，内積，ノルムを各々， $(\varphi, \eta), \|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ とする可分なヒルベルト空間 (節A1を参照) \mathfrak{H} の高々可算個の元 ψ_ℓ からなる 1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ を採用した場合の，文献 [B36] での研究成果

を適用し、第⑥番目の、節3.2のaxiom 2Uを満たす万能性類似度関数USMを構成しよう。1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ として、式(A3.4)のパターンモデル集合 $T \cdot \Omega = \{T\omega_j | j \in J\}$ を採用することになる。この際、近似条件付き自乗ノルムの最小化規準 $F \equiv F(a_j, j \in J)$ を最小にするパターンモデル $T' \cdot T\varphi \in \Phi$ がSS理論のaxiom 1を満たすように、求められる(定理4.2)。

4.1 近似条件付き自乗ノルムの最小化規準 $F \equiv F(a_j, j \in J)$ を最小にする各複素定数 $a_j (j \in J)$

内積、ノルムを各々、 $(\varphi, \eta), \|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ とする可分なヒルベルト空間(節A1を参照) \mathfrak{H} の有限個の元 $T\omega_j$ からなる1次独立な系式(A3.4)の1次独立な系

$$\{T\omega_j\}_{j \in J} \tag{4.1}$$

の1次結合

$$\sum_{k \in J} a_k \cdot T\omega_k \tag{4.2}$$

を用いて、原パターン $\varphi \in \Phi$ のモデル $T\varphi \in \Phi$ を最小自乗近似するときの近似誤差

$$T\varphi - \sum_{k \in J} a_k \cdot T\omega_k \tag{4.3}$$

の自乗ノルム

$$\|T\varphi - \sum_{k \in J} a_k \cdot T\omega_k\|^2 \tag{4.4}$$

を一定に保ったとき、エネルギー

$$\|\sum_{j \in J} a_j \cdot T\omega_j\|^2 \tag{4.5}$$

$$\text{の最小となるパターンモデル } T\varphi \in \Phi \tag{4.6}$$

をSS理論のaxiom 1を満たすように、求める。

形状は全体として形態的に秩序あるまとまりをなそうとする傾向、つまり、心理学のプレグナンツの傾向に注目し、エネルギー(ノルムの自乗)が小さいパターンモデルほど見慣れた形状であり、実現しやすく、更に、形状にまとまりがあると、本章では想定する。

式(4.1)の1次独立な系 $\{T\omega_j\}_{j \in J}$ を選定し、各複素定数 $a_j (j \in J)$ によるその1次結合式(4.5)のエネルギー $\|\sum_{j \in J} a_j \cdot T\omega_j\|^2$ がある与えられた条件下で最小となる場合、式(4.2)のパターンをこの条件下で最も簡単なパターン(the simplest pattern)という。

パターン $\varphi \in \Phi \subset$ a separable Hilbert space \mathfrak{H} の形状を1次独立な系 $\{T\omega_j\}_{j \in J}$ の1次結合式(4.2)の形で近似的、かつ、要約的に抽出し、原パターン $\varphi \in \Phi$ をノルムの意味で最小自乗近似するときの、式(4.3)の近似誤差の、式(4.4)の自乗ノルムを

$$\|T\varphi - \sum_{k \in J} a_k \cdot T\omega_k\|^2 = c^2 \tag{4.7}$$

という具合に、一定値 c^2 に抑えるという拘束条件の下で、式(4.2)の抽出した形状 $\sum_{k \in J} a_k \cdot T\omega_k$ のノルム $\|\sum_{j \in J} a_j \cdot T\omega_j\|^2$ の自乗(エネルギー)なる式(4.5)の $\|\sum_{j \in J} a_j \cdot T\omega_j\|^2$ を最小にする式(1.2)の $\sum_{k \in J} a_k \cdot T\omega_k$ を求めることは、近似拘束条件付き最小自乗ノルム規準(constrained least square norm criterion)、つまり、近似条件付き自乗ノルムの最小化規準

$$F \equiv F(a_j, j \in J) \equiv$$

$$\|\sum_{j \in J} a_j \cdot \phi_j\|^2 + b \cdot [\|T\varphi - \sum_{k \in J} a_k \cdot T\omega_k\|^2 - c^2] \quad (4.8)$$

を最小にする各複素定数 a_ℓ ($\ell \in L$) を求めることである（近似条件付き自乗ノルムの最小化問題）。ここに，実乗数 b はラグランジュ乗数（the Lagrange multiplier）であり，方程式（4.7）を満足するように決定しなければならない。但し，ラグランジュ乗数については，正条件

$$b > 0 \quad (4.9)$$

を課する。何故ならば， $b = 0$ という設定は拘束条件式（4.7）が無視されることになり， $b < 0$ という設定は汎関数 F の最小化に矛盾することになるからである。

4.2 各1次結合係数，ラグランジュ乗数を決定する連立1次方程式

式（4.8）の汎関数 F が実際に各 a_j で最小値をとるものとすれば，方程式

$$0 = \frac{\partial F}{\partial a_j}, j \in J \text{ (setting the derivatives of } F \text{ with respect to each } a_j \text{ to zero)} \quad (4.10)$$

を，この各 a_j は満たさなければならない。 \bar{a}_j を a_j の複素共役とすれば，

$$\partial a_j / \partial \bar{a}_k = 0 \quad (4.11)$$

であるから，具体的に計算すれば，

$$\begin{aligned} \forall j \in J, 0 &= \frac{\partial F}{\partial a_j} \\ &= (T\omega_j, \sum_{q \in J} a_q \cdot T\omega_q) + b \cdot (-T\omega_j, T\varphi - \sum_{q \in J} a_q \cdot T\omega_q) \end{aligned} \quad (4.12)$$

が得られる。両辺の複素共役をとれば，

$$\forall j \in J, (\sum_{q \in J} a_q \cdot T\omega_q, T\omega_j) - b \cdot (T\varphi - \sum_{q \in J} a_q \cdot T\omega_q, T\omega_j) = 0 \quad (4.13)$$

が成り立つ。式（4.13）を更に変形すれば，

$$\sum_{q \in J} [1 + b] \cdot a_q \cdot (T\omega_q, T\omega_j) = b \cdot (T\varphi, T\omega_j), j \in J \quad (4.14)$$

を得， $c_{jq}(b)$ ， d_j を

$$c_{jq}(b) \equiv (1 + b^{-1}) \cdot (T\omega_q, T\omega_j), j, q \in J \quad (4.15)$$

$$d_j \equiv (T\varphi, T\omega_j), j \in J \quad (4.16)$$

とおくと，結局，各1次結合係数 a_j を決定する連立1次方程式は，

$$\sum_{q \in J} c_{jq}(b) \cdot a_q = d_j, j \in J \quad (4.17)$$

であることがわかる。

4.3 近似条件付き自乗ノルムの最小化

式（4.8）の近似拘束条件付き最小自乗ノルム規準 F を最小にする各1次結合係数 a_j ($j \in J$) は連立1次方程式（4.17）の解として求められ，このとき得られる各1次結合係数 a_j を $a_j(\varphi)$ ($j \in J$) と書こう。

まず，式（4.1）の1次独立な系 $\{T\omega_j\}_{j \in J}$ が式（3.35）を満たすという意味で，直交系であれば，連立1次方程式（4.17）の解 $a_j(\varphi)$ ($j \in J$) は

$$a_j(\varphi) = \frac{1}{1+b^{-1}} \cdot \frac{(T\varphi, T\omega_j)}{(T\omega_j, T\omega_j)}, j \in J \quad (4.18)$$

と求まることに気付く。

次の定理4.1が成り立ち、節4.2で提起した近似条件付き自乗ノルムの最小化問題は解決されたことになる。

[定理4.1] (近似条件付自乗ノルムの最小化定理)

式(4.4)の自乗ノルムを式(4.7)が成立する拘束条件の下で、つまり、一定値 c^2 に抑えるという拘束条件の下で、式(4.2)の抽出した形状 $\sum_{j \in J} a_j \cdot T\omega_j$ のノルム $\|\sum_{j \in J} a_j \cdot T\omega_j\|$ の自乗(エネルギー)なる式(4.5)の $\|\sum_{j \in J} a_j \cdot T\omega_j\|^2$ を最小にする各1次結合係数 $a_j(\varphi) (j \in J)$ が求まると、次の(i), (ii)が成立する。つまり、原パターン $\varphi \in \Phi$ は式(4.19)のように、1次展開され、近似条件付き自乗ノルムの最小化規準式(4.8)の F でのラグランジュ乗数 b は式(4.21)のように、求まる。

(i) (原パターンの1次展開)

$$\exists (T\varphi)_\perp \in \mathfrak{H}, T\varphi = \sum_{k \in J} a_k(\varphi) \cdot T\omega_k + (T\varphi)_\perp \quad (4.19)$$

$$\wedge [\forall j \in J, ((T\varphi)_\perp, T\omega_j) = (T\varphi, T\omega_j) / (b+1)] \quad (4.20)$$

(ii) (ラグランジュ乗数 b の決定)

$$b = \frac{\|\sum_{k \in J} a_k(\varphi) \cdot T\omega_k\|^2}{\|T\varphi\|^2 - (\sum_{k \in J} a_k(\varphi) \cdot T\omega_k, T\varphi) - c^2} \quad (4.21)$$

(証明) $(T\varphi)_\perp$ を

$$(T\varphi)_\perp \equiv T\varphi - \sum_{q \in J} a_q(\varphi) \cdot T\omega_q$$

とおき、式(4.13)に代入すると、

$$\forall j \in J, (T\varphi - (T\varphi)_\perp, T\omega_j) - b \cdot ((T\varphi)_\perp, T\omega_j) = 0$$

を得、これから(i)が成り立つことがわかる。

次に、(ii)を証明しよう。

式(4.20)に、 $\sum_{j \in J} a_j(\varphi) \cdot$ 作用させれば、式(4.19)を考慮すれば、

$$((T\varphi)_\perp, T\varphi - (T\varphi)_\perp) = \frac{(T\varphi, T\varphi - (T\varphi)_\perp)}{b+1}$$

が得られる。これから、

$$\begin{aligned} b &= \frac{(T\varphi, T\varphi - (T\varphi)_\perp)}{((T\varphi)_\perp, T\varphi - (T\varphi)_\perp)} - 1 \\ &= \frac{(T\varphi, T\varphi - (T\varphi)_\perp) - ((T\varphi)_\perp, T\varphi - (T\varphi)_\perp)}{((T\varphi)_\perp, T\varphi - (T\varphi)_\perp)} \\ &= \frac{\|T\varphi - (T\varphi)_\perp\|^2}{((T\varphi)_\perp, T\varphi) - \|(T\varphi)_\perp\|^2} \end{aligned}$$

を得、この式に、式(4.19)、並びに、式(4.7)に式(4.19)を代入した値

$$\|(T\varphi)_\perp\|^2 = c^2$$

を代入すれば、式(4.21)が得られる。□

4.4 近似条件付き自乗ノルムの最小化モデル $T' \cdot T\varphi$

本節では、連立1次方程式 (4.17) の解である各1次結合係数 $a_j(\varphi) (j \in J)$ を

$$a'_j(T\varphi) = a_j(\varphi) (j \in J) \quad (4.22)$$

と書く。

4.4.1 axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半, 並びに, (iv) を満たす写像 T'

各1次結合係数 $a'_j(T\varphi) = 0$ を求め, 0値計算規則

$$a'_j(T\varphi) / \sup_{k \in J} |a'_k(T\varphi)| = 0 \quad \text{if} \quad \sup_{k \in J} |a'_k(T\varphi)| = 0 \quad (4.23)$$

を約束して, パターンモデル $T\varphi \in T \cdot \Phi$ から抽出される第 $j \in J$ 番目の特徴量 $u'(T\varphi, j) \in Z$ (複素数全体の集合) を

$$u'(T\varphi, j) = a'_j(T\varphi) / \sup_{k \in J} |a'_k(T\varphi)| \quad (4.24)$$

と定義する。ここに, 特徴抽出写像

$$u' : T \cdot \Phi \times J \rightarrow Z \quad (4.25)$$

が導入されたことに注意しておく。ここに, $T \cdot \Phi$ はパターンモデル $T\varphi$ の集合であり,

$$T \cdot \Phi \equiv \{T\varphi | \varphi \in \Phi\} \quad (4.26)$$

と定義されている。

その後, 式 (A1.8) の写像 T' を,

$$T' \cdot T\varphi = \sum_{j \in J} u'(T\varphi, j) \cdot T\omega_j, \quad \varphi \in \Phi \quad (4.27)$$

と定義すると, 次の近似条件付自乗ノルムの最小化モデル定理が証明できる。

[定理4.2] (近似条件付自乗ノルムの最小化モデル定理)

式 (4.27) のように定義された式 (A1.8) の写像 T' は, ラグランジュ乗数 b の正条件式 (4.9) の下で, 4性質

(イ) (零元 $T\varphi = 0$ の T' -不動点性; fixed-point property of zero element under mapping T')

$$T\varphi = 0 \text{ のとき, } T' \cdot T\varphi = T\varphi. \quad (4.28)$$

(ロ) (T' の正定数倍吸収性; absorbent property about any positive real multiplicand a)

任意の正実定数 a に対し,

$$\forall \varphi \in \Phi, T' \cdot (a \cdot T\varphi) = T' \cdot T\varphi. \quad (4.29)$$

(ハ) (T' のベキ等性; idempotent property)

T を強制的に恒等作用素 I とするとき,

$$\forall \varphi \in \Phi, T'(T'\varphi) = T'\varphi. \quad (4.30)$$

(ニ) (T' 写像の非零写像性; non-zero mapping property of T')

$$\exists T\varphi \in \Phi, T' \cdot T\varphi \neq 0. \quad (4.31)$$

を満たし, つまり, と定義される式 (A1.8) の写像 T' は, axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半, 並びに, (iv) を満たす。□

以下の2補助定理4.1, 4.2を使って, 付録Dに, 上述の定理4.2が証明されている。

[補助定理4.1] (零パターンモデル定理)

(i) $T\varphi = (T\varphi)_\perp$ について,

$$\forall k \in J, a'_k(T\varphi) = 0 \quad (4.32)$$

$$\wedge T' \cdot T\varphi = 0. \tag{4.33}$$

(ii) $T\varphi = 0$ について、2式 (4.32), (4.33) が成り立つ。

(証明) (i) について： $a'_j(T\varphi)$ の定義式 (4.22) に注意し、系 $T\omega_j, j \in J$ の1次独立性を考慮すれば、式 (4.19) から式 (4.32) が従う。残りは、 $u'(T\varphi, j)$ の定義式 (4.24), 並びに、 $T' \cdot T\varphi$ の定義式 (4.27) から、式 (4.33) が従う。

(ii) について： $T\varphi = 0$ とすれば、式 (4.16) の各 d_j につき、 $\forall_j, d_j = 0$ を得る。よって、系 $T\omega_j, j \in J$ の1次独立性を考慮し、連立1次方程式 (4.17) を解けば、

$$\forall j \in J, a_j(\varphi) = 0 \quad \because \quad a'_j(T\varphi) = 0 \quad (\because \text{式 (4.22)})$$

が得られる。残りは、(i) と同様にして示される。 □

パターンモデル $T\varphi = 0$ の1次展開2式 (4.19), (4.20), 並びに、 T' の定義式 (4.27) からわかるように、各 $T\omega_m (m \in J)$ は、パターンモデル $T' \cdot T\varphi \in \Phi$ の形状を決定する極小の要素であり、パターン形状素 (primitive shape-component) と呼ばれる。各形状素 $T\omega_m (m \in J)$ は写像 T' により完全に復元されるという次の補助定理4.2が成り立つ。

[補助定理4.2] (各形状素 $T\omega_m (m \in J)$ の不動点定理)

任意の $m \in J$ について、 $T\varphi = T\omega_m$ に対し、

$$a'_j(T\varphi) = [1 + b^{-1}]^{-1} \quad \text{if } j = m, = 0 \quad \text{if } j \neq m \tag{4.34}$$

$$\wedge T' \cdot T\varphi = T\varphi \quad (\text{fixed-point equation}). \tag{4.35}$$

(証明) $T\varphi = T\omega_m$ とおき、連立1次方程式 (4.17) を解けば、式 (4.22) の各 $a_j(\varphi) = a'_j(T\varphi)$ について、式 (4.34) が得られる。

次に、式 (4.34) から、式 (4.24) の $u'(T\varphi, j)$ につき、

$$u'(T\varphi, j) = 1 \quad \text{if } j = m, = 0 \quad \text{if } j \neq m$$

が得られ、よって、式 (4.27) $T' \cdot T\varphi$ について

$$T' \cdot T\varphi = T\omega_m = T\varphi$$

が成り立ち、証明が終わる。 □

4.4.2 写像 T' が備えている単一化・簡素化双方の2性質

式 (4.27) のように定義された式 (A1.8) の写像 T' は、単一化・簡素化双方の2性質を満たすことを以下に示そう。

[単一化の性質]

パターンモデル $T\varphi \in \Phi$ に対し、

$$\varphi_1 = a \cdot T\varphi \text{ for any positive real number } a \tag{4.36}$$

$$\varphi_2 = T'\varphi \tag{4.37}$$

$$\varphi_3 = \sum_{k \in J} a'_k(T\varphi) \cdot T\omega_k \tag{4.38}$$

について、等式

$$T'\varphi_1 = T'\varphi_3, T'\varphi_2 = \varphi_2 \tag{4.39}$$

が成立し、3種類のパターン

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \Phi \tag{4.40}$$

から共通の性質が抜き出され (定理2.2の (ロ), (ハ), 並びに、 T' の定義式 (4.27) を参照), 共通のパターンモデル $T' \cdot T\varphi \in \Phi$, 或いは $\varphi_2 \in \Phi$ に単一化されている。

[簡素化の性質]

$$\begin{aligned} T' \cdot T\varphi &= T' \left(\sum_{k \in J} a'_k(T\varphi) \cdot T\omega_k + (T\varphi_{\perp}) \right) \\ &= T' \left(\sum_{k \in J} a'_k(T\varphi) \cdot T\omega_k \right) \end{aligned} \quad (4.41)$$

が成立し ($T\varphi \in \Phi$ の1次展開2式 (4.19), (4.20), 並びに, T' の定義式 (4.27) を参照), パターンモデル $T\varphi \in T \cdot \Phi$ から雑音 φ_{\perp} を除去できた形で, パターンモデル $T' \cdot T\varphi \in \Phi$ が求められている. \square

上述のように, 簡素化の性質は単一化の性質の1部にまとめられる場合が多い.

4.5 万能性類似度関数 USM の, ⑥構成6

連立1次方程式 (4.17) の解である各1次結合係数 $a_j(\varphi) (j \in J)$ について, 考えよう.
不等式

$$0 = \max_{i \in J-(j)} |a_j(\omega_i)| \leq e_0(j) < e_1(j) \leq |a_j(\omega_j)| = \frac{1}{1+b^{-1}} \quad \because \text{2式 (4.22), (4.34)} \quad (4.42)$$

を満たす閾値の系

$$e_0(j), e_1(j), j \in J \quad (4.43)$$

を導入する. このとき, 各 $a_j(\varphi) (j \in J)$ を

$$\begin{aligned} a_j''(\varphi) &= \\ &\begin{cases} 0 & \text{if } |a_j(\varphi)| \leq e_0(j) \\ a_j(\varphi) & \text{if } e_0(j) < |a_j(\varphi)| < e_1(j) \\ \frac{a_j(\varphi)}{|a_j(\varphi)|} & \text{if } e_1(j) \leq |a_j(\varphi)| \end{cases} \end{aligned} \quad (4.44)$$

と変換して得られる各 $d_j'(\varphi) (j \in J)$ を用いて,

$$\begin{aligned} USM(\varphi, \omega_j) &= \\ &\begin{cases} \frac{a_j''(\varphi)}{\sum_{k \in J} a_k''(\varphi)} & \text{if } \sum_{k \in J} a_k''(\varphi) \neq 0 \\ p(\mathfrak{C}_j) & \text{if } \sum_{k \in J} a_k''(\varphi) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.45)$$

と定義された式 (1.2) の写像 USM は, 節3.2のaxiom 2Uを満たすことがわかる. 何故ならば, 連立1次方程式 (4.17) の解である各1次結合係数 $a_j(\varphi) (j \in J)$ の T -不変性

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, a_j(T\varphi) = a_j(\varphi) \quad \because \quad T \cdot T = T \quad (4.46)$$

から,

$$(1^6) \quad \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, a_j''(T\varphi) = a_j''(\varphi). \quad (4.47)$$

が成立しており, 更に, 3式 (4.34), (4.42), (4.44) から

$$(1^6) \quad a_j''(\omega_j) = 1 \quad \text{if } i = j, = 0 \quad \text{if } i \neq j. \quad (4.48)$$

が成立しているからである.

5. あとがき

付録Aの axiom 2を満たす式 (A3.5) の類似度関数 SM を唯関数変換して得られる公理 axiom $2^{\pm\infty}$ を満たすが規格化条件を満たさない類似度関数 $sm^{\pm\infty}$ とは異なり, axiom 2Uを提案し, この axiom 2U を満たす6種類の類似度関数 USM が構成された. 6種類の類似度関数 USM の各々がどのような種類のパターン集合(会話音声・動画像)に適切に機能するかどうかについては, 計算機シミュレーションを繰り返して確かめる必要がある. また, 6番目の USM を構成する際に, 近似条件付き自乗ノルムの最小化規準 $F \equiv F(a_j, j \in J)$ を最小にするパターンモデル $T' \cdot T\phi \in \Phi$ が SS理論の axiom 1 を満たすように, 求められたが, $T\phi \in \Phi$ の代わりに, $T' \cdot T\phi \in \Phi$ を用いれば, どのような場面において有効となるかも, 計算機シミュレーションで確かめる必要がある. 更に, axiom 2U を満たす1つの万能性類似度関数 USM が構成されれば, 万能性類似度関数 USM' が無数に存在することが, 2不動点性質 (3.14), (3.15) のみを満たす式 (3.16) の関数の系 $g_j, j \in J$ の使用により明らかにされた(定理3.1; 万能性類似度関数 USM の再帰定理). 系 $g_j, j \in J$ を具体的に設定するときの余裕を明らかにしているこの定理3.1の効果が, どのようなパターン集合(会話音声・動画像) Φ に対し有効に働くかも, 計算機シミュレーションで確かめる必要がある.

1次独立な系 $\psi_i, q \in Q$ により張られる(パターン集合の)超平面を表示する定理2.1に注目した本論文の主要な目的は, 今までの, axiom 2を満たす式 (A3.5) の類似度関数 SM を, 公理 axiom 2U を, 式 (1.2) の満たす万能性類似度関数 USM へと, 拡張することであった. この拡張に伴い, 連想形認識システム RECOGNITRON が内部状態を変換する写像は, 構造受精作用素 $A(\mu)$ から $B(\mu)$ へと拡張され, RECOGNITRON が入力パターン ϕ の帰属するカテゴリを決定するのに探索する範囲がパターンの凸集合から凸集合を含む超平面へと拡大されるという利点が生まれた. この利点により, 実際に処理の対象とする問題の, 式 (A1.10) のパターン集合 Φ が一層, 適切に処理できるようになること, つまり,

$A(\mu)$ を使うより $B(\mu)$ を使うことにより, 探索の範囲が広がり, パターン集合 Φ の元 ϕ が認識不定, 認識不能になる事態がより避けられる可能性が強まるかどうか

を会話音声・動画像処理の場面において, 計算機シミュレーションで確かめる必要がある.

付録Bでは, 支持パターンマシーン spm を1次ニューラルネットとして構成し, axiom 3を満たす式 (A4.1) の大分類関数 BSC を構成したが, spm を2次ニューラルネットとしても容易に構成でき, 大分類関数 BSC の構成に利用できる. が, 紙面の都合上, この記述は割愛された.

文献 A

- [A 1] Bernhard Scholkopf, Alexander Smola: "Nonlinear component analysis as a kernel eigenvalue problem", Neural Computation, vol.10, pp.1299-1319, 1998
- [A 2] Yuan Tian, Tieniu Tan, Yunhong Wang, Yuchun Fang: "Do singular values contain adequate information for face recognition", Pattern Recognition, vol.36, pp.649-655, 2003
- [A 3] 仲田晋, 北川高嗣, 細田陽介, 岩間尚文: "QR分解を用いた正則化による画像再構成", 電子情報通信学会論文誌D-II, vol. J83-D-II, no.9, pp.1888-1894, Sept. 2000
- [A 4] Yih-Ming Su, Jhing-Fa Wang: "A novel stroke extraction method for Chinese characters using Gabor filters", Pattern Recognition, vol.36, pp.635-647, 2003

- [A 5] Giao Daqi, Yang Genxing: "Influences of variable scales and activation functions on the performances of multiplayer feedforward neural networks", Pattern Recognition, vol.36, pp.869-878, 2003

文 献 B

- [B 1] 鈴木昇一：「認識工学」，柏書房，Feb.1975
- [B 2] 鈴木昇一：「ニューラルネットの新数理」，近代文芸社，Sept.1996
- [B 3] 鈴木昇一：「パターン認識問題の数理的な一般解決」，近代文芸社，June 1997
- [B 4] 鈴木昇一：「認識知能情報論の新展開」，近代文芸社，Aug.1998
- [B 6] 鈴木昇一：「手書き漢字の側抑制効果的分解とその計算機シミュレーション」，情報処理学会誌，vol.15, no.12, pp.927-934, Dec.1974
- [B 7] 鈴木昇一：「画像情報量とその手書き漢字への応用」，画像電子学会誌，vol.4, no.1, pp.4-12, Apr.1975
- [B 8] 鈴木昇一：「抽出された特徴による手書き漢字構造の再生」，情報処理学会誌，vol.18, no.11, pp.1115-1122, Nov.1977
- [B 9] 鈴木昇一：「回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シミュレーション」，情報研究（文教大学・情報学部），no.4, pp.36-56, Dec.1983
- [B10] 鈴木昇一：「連想形記憶N器MEMOTRONと日本語単独母音系列の再生に関する計算機シミュレーション」，情報研究（文教大学・情報学部），no.7, pp.14-29, Dec.1986
- [B11] 鈴木昇一：「多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション」，情報研究（文教大学・情報学部），no.10, pp.35-49, Dec.1989
- [B12] 鈴木昇一：「帰属係数法に基づく類似度、帰属関係あいまい度、認識情報量の計算機シミュレーション」，情報研究（文教大学・情報学部），no.11, pp.51-68, Dec.1990
- [B13] 鈴木昇一：「構造受精法と日本語単独母音の認識」，情報研究（文教大学・情報学部），no.18, pp.17-51, Dec.1998
- [B14] 鈴木昇一，前田英明：「有声破裂音の代表パターンの学習的決定と，その計算機シミュレーション」，情報研究（文教大学・情報学部），no.20, pp.77-95, Dec.1998
- [B15] 鈴木昇一，前田英明：「変動エントロピーによる有声破裂音の順序付けと，その計算機シミュレーション」，情報研究（文教大学・情報学部），no.21, pp.51-78, Mar.1999
- [B16] 鈴木昇一：「平均顔を用いた顔画像の2値化、並びに、目・鼻・口の抽出と、その計算機シミュレーション」，情報研究（文教大学・情報学部），no.22, pp.65-150, Dec.1999
- [B17] 鈴木昇一：「界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の，顔画像処理に関する計算機シミュレーション」，情報研究（文教大学・情報学部），no.23, pp.109-182, Mar.2000
- [B18] 鈴木昇一：「風景画から知識を抽出し，解釈するシステムの，ファジィ推論ニューラルネットによる構成」，情報研究（文教大学・情報学部），no.23, pp.183-265, Mar.2000
- [B19] 鈴木昇一：「各個人の感性を反映した認識システムRECOGNITRON」，情報研究（文教大学・情報学部），no.24, pp.185-257, Dec.2000
- [B20] 鈴木昇一：「プロダクション・システムとしてのファジィ・マルチメディア・コンピュータと、空間多重パターンファジィ推論系」，情報研究（文教大学・情報学部），no.24, pp.105-183,

Dec.2000

- [B21] 鈴木昇一：“SS大分類関数BSCの適応的構成への、計算論的学習理論の適用”，情報研究（文教大学・情報学部），no.25, pp.185-236, Mar.2001
- [B22] 鈴木昇一：“量子力学の諸原理，多段階量子認識系と，心理状態を取り入れた想起に基づく部分空間認識法”，情報研究（文教大学・情報学部），no.25, pp.237-282, Mar.2001
- [B23] 鈴木昇一：“Support Vector Machineを利用した大分類関数の構成”，情報研究（文教大学・情報学部），no.26, pp.1-62, Dec.2001
- [B24] 鈴木昇一：“2カテゴリ分類困難度の情報理論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.26, pp.63-160, Dec.2001
- [B25] 鈴木昇一：“一般化類似度関数を用いた“導出原理による第1階述語推論””，情報研究（文教大学・情報学部），no.27, pp.27-71, Mar.2002
- [B26] 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：“風景画の理解に関するJAVA言語によるRECOGNITRONの計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.27, pp.73-109, Mar.2002
- [B27] 鈴木昇一：“遺伝的アルゴリズムにおける適合度比例選択戦略を利用した進化方程式の，パターン多段階変換に基づく認識への応用”，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.37-67, Dec.2002
- [B28] 鈴木昇一：“近傍を利用した音素認識のためのモデル構成作用素T，類似度関数SM，大分類関数BSCの諸構成と，SS不動点探索型多段階想起認識”，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.69-141, Dec.2002
- [B29] 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：“JAVA言語で実装化された画像理解システムIUSの動作概要と，その稼動方法”，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.143-165, Dec.2002
- [B30] 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：“JAVA言語による計算機シミュレーションで生じた風景画像の理解場面での多段階連想形認識過程の異常現象”，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.123-166, Jul.2003
- [B31] 鈴木昇一：“パターン情報処理（モデル構成作用素，誤差逆伝播学習2層ニューラルネット）と，論理的含意とによる非単調的知識推論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.75-121, Jul.2003
- [B32] 鈴木昇一：“可分な一般抽象ヒルベルト空間でのK-L直交系の理論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.41-73, Jul.2003
- [B33] 鈴木昇一：“パターン系列（動画像，会話音声）の，dynamical systemによる連想理論と，連想器SPATEMTRON”，情報研究（文教大学・情報学部），no.30, pp.139-186, Jan.2004
- [B34] 鈴木昇一：“測度的不変量検出形認識系の構成理論”，電子通信学会論文誌（D），vol.55-D, no.8, pp.513-538, Aug.1972
- [B35] 鈴木昇一：“パターンのエントロピーモデル”，電子情報通信学会論文誌（D-II），vol.J77-D-II, no.10, pp.2220-2238, Nov.1994

付 録

付録A. Axiom1~4を各々、満たさなければならないパターン集合 Φ ，モデル構成作用素 T の対 $[\Phi, T]$ ，類似度関数 SM ，大分類関数 BSC ，カテゴリ選択関数 CSF

本付録Aでは、SS公理系 (axiom 1~4) が解説されている。

本付録Aでは、処理の対象となる問題のパターン φ の集合 Φ ，モデル構成作用素 T ，類似度関数 SM ，カテゴリ選択関数 CSF について説明される。対 $[\Phi, T]$ のみたされなければならないaxiom 1と、類似度関数 SM の満たされなければならないaxiom 2も説明され、 Φ の表示が明らかにされ、 Φ が構成的集合であることが指摘される。更に、大分類関数 BSC の満たされなければならないaxiom 3も説明される。カテゴリ選択関数 CSF が満たされなければならないaxiom 4も説明され、 CSF の構造が SM, BSC を用いて決定される。

A1. axiom 1とパターン集合 Φ ，モデル構成作用素 T

一般に、処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ は或る可分な [A1] な (separable) 一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の零元 0 を含む或る部分集合である。例えば、 $\bar{\eta}$ を η の複素共役として、

$$M; q \text{ 次元ユークリッド空間 } R^q \text{ の可測部分集合} \quad (A1.1)$$

$$dm(x) : \text{正値ルベグ・スティルチェス式測度} \quad (A1.2)$$

$$x = \langle x_1, x_2, \dots, x_q \rangle \in M (\subseteq R^q) : \text{実数値 } q \text{ 変数直交座標系} \quad (A1.3)$$

を導入し、その内積 (φ, η) ，ノルム $\|\varphi\|$ を、

$$(\varphi, \eta) = \int_M dm(x) \varphi(x) \cdot \bar{\eta}(x) \quad (A1.4)$$

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \quad (A1.5)$$

とする線形空間 (ベクトル空間) としての可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ の特別な場合として、

$$M = R^2 \text{ (2次元全平面)} \quad (A1.6)$$

$$dm(x) = [x_1^2 + x_2^2]^{-1} \cdot dx_1 dx_2 \quad (A1.7)$$

を選ぶことができる [B7], [B9].

このような Φ ，並びに、写像

$$T : \Phi \rightarrow \Phi \quad (A1.8)$$

は次のaxiom 1を満たさなければならない。このとき、写像 T はモデル構成作用素 (model-construction operator)と呼ばれ、 $T\varphi \in \Phi$ は $\varphi \in \Phi$ の代りとなり得るという意味で、パターン $\varphi \in \Phi$ のモデル(model)と呼ばれる。

下記のaxiom 1からわかるように、パターン集合 Φ は、埋込性

$$T \cdot \Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \subset \Phi \quad (A1.9)$$

を満たし、原点 (=0) を始点とし、 Φ の任意の点を通る半直線を含むような集合、つまり、錐であらねばならない。下記の式 (A1.14) による Φ の表示が正に Φ が錐であることを明らかにしている。

axiom 1を満たすパターン集合 Φ は実は、構成的集合 (constructible set) である。S.Suzukiはパターンというものが満たされなければならない帰納的定義から Φ の集合論的再帰領域方程式 (axiom 1を満たす最小の Φ の表現式; set-theoretic reflective domain equation) を提案し、この方程式を解き、 Φ の構造を明らかにしている (文献 [B3] の2.4節)。その結果は次のとおりである：

パターンと判明している元の集合（基本領域；basic domain）（axiom 1の（i）の前半から， $0 \in \Phi_B$ ）を導入して，集合論的再帰領域方程式

$$\Phi = \Phi_B \cup T \cdot \Phi \cup R^{++} \cdot \Phi \tag{A1.10}$$

ここに，

$$T \cdot \Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \tag{A1.11}$$

$$R^{++} \text{ は正実数全体の集合} \tag{A1.12}$$

$$R^{++} \cdot \Phi \equiv \{r^{++} \cdot \varphi \mid r^{++} \in R^{++}, \varphi \in \Phi\} \tag{A1.13}$$

の解 Φ は

$$\Phi = R^{++} \cdot [\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B] \tag{A1.14}$$

と表示される（文献 [B3] の式 (2.56) を参照）． Φ の表示式 (A1.14) から，明らかに，2つの等式

$$\begin{aligned} \text{(a) } T \cdot \Phi &= T \cdot \Phi_B \subseteq \Phi \\ &\because \text{ axiom 1の (ii), (iii) の2後半} \end{aligned} \tag{A1.15}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } R^{++} \cdot \Phi &= \Phi (= R^{++} \cdot \Phi_B \cup R^{++} T \cdot \Phi_B) \\ &\because \text{ axiom 1の (ii) の後半} \end{aligned} \tag{A1.16}$$

が成り立つ．

Axiom 1（パターン集合 Φ とモデル構成作用素 T との対【 Φ, T 】の満たすべき公理）

(i)（零元の Φ -包含性と，零元の T -不動点性；fixed-point property of zero element under mapping T ）

$$0 \in \Phi \wedge 0 = 0.$$

(ii)（ Φ の錐性， T の正定数倍吸収性；cone property）

$$\forall \varphi \in \Phi, a \cdot \varphi \in \Phi \wedge T(a \cdot \varphi) = T\varphi \text{ for any positive real number } a.$$

(iii)（ Φ の埋込性（embeddedness）と， T のべき等性（idempotency））

$$\forall \varphi \in \Phi, T\varphi \in \Phi \wedge T(T\varphi).$$

(iv)（写像 T の非零写像性；non-zero mapping property of T ）

$$\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0. \quad \square$$

A2. 処理の対象となる問題のパターン φ の集合 Φ とモデル構成作用素 T との対【 Φ, T 】の基本構成と，モデル $T\varphi$ と φ との間の同一知覚原理

原パターン $\varphi \in \Phi$ が如何なる意味を備えているか，つまり， φ が如何なる類概念（category）を表しているかを決定する働きをもつのが，認識システムRECOGNITRONである．RECOGNITRONがモデル $T\varphi$ を見たり聞いたりしたならば，原パターン $\varphi \in \Phi$ と同じに見えたり聞こえたりすることだと，解釈可能な対【 Φ, T 】について説明しよう．

パターンモデル $T\varphi$ を出力する式 (A1.8) の写像 T に要求されるのは，次の4性質①～④である [B3], [B4], [B6]：

①（零元不動点性；axiom 1の（i））

$$\varphi = 0 \in \Phi \text{ については, } T\varphi = 0.$$

②（正定数倍不変性；axiom 1の（ii）の後半）

任意の正実定数 a に対し，

$$\forall \varphi \in \Phi, T(a \cdot \varphi) = T\varphi.$$

③（べき等性；axiom 1の（iii）の後半）

$$\forall \varphi \in \Phi, T(T\varphi) = T\varphi.$$

④ (非零写像性； axiom 1の (iv))

$$\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0. \quad \square$$

上述の①～④は各々，A1章の axiom 1の (i)，(ii)の後半，(iii)の後半，(iv)である．零元 $\varphi = 0 \in \Phi$ は背景も何も無いパターンである．

Φ は処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ であり， $T\varphi \in \Phi$ は $\varphi \in \Phi$ に対応するパターンモデルであって，原パターン $\varphi \in \Phi$ と同じ空間 Φ に埋め込まれている．モデル $T\varphi$ は， $T\varphi \in \Phi$ を見たり聞いたりしたならばあたかも原パターン $\varphi \in \Phi$ かのように見えたり聞こえたりするようなものである (同一知覚原理)．この同一知覚原理を達成するために，SS理論 [B1] ～ [B6] では，式 (A1.8) の写像であるモデル構成作用素 T が導入され，対 $[\Phi, T]$ はA1章の axiom 1を満たしていなければならないことになる．このとき，写像 T はモデル構成作用素と呼ばれ， $T\varphi \in \Phi$ は $\varphi \in \Phi$ の代りとなり得るという意味で， $\varphi \in \Phi$ パターンのモデルと呼ばれる．

処理の対象とするパターン φ の集合 Φ は或る可分なヒルベルト空間 Φ の，零元 0 を含む或る部分集合であり，この Φ ，並びに，式 (A1.8) の写像 T の対 $[\Phi, T]$ は上記の4性質①～④ ((ii)，(iii)の2後半，並びに (i)，(iv)) を含む形で，A1章の axiom 1をみたさなければならない．

次の定理A2.1は， axiom 1を満たす対 $[\Phi, T]$ を決定している．

[定理A2.1] (パターン集合 Φ とモデル構成作用素 T との対 $[\Phi, T]$ の構成定理)

パターンと判明している φ 集合 (基本領域) $\Phi_B (\ni 0)$ と，すべての正実定数の集合 R^{++} とを用意する．

式 (A1.8) の写像 T が axiom 1の (i)，(ii)，(iii)の3後半，並びに，(iv)を満たすとしよう．このとき，次の (イ)，(ロ) が成り立つ：

(イ) 処理の対象とする問題のパターンの集合 Φ を，式 (A1.14) の如く設定すれば，2式 (A1.15)，(A1.16) が成立し， axiom の (i)，(ii)，(iii)の3前半を Φ は満たし，結局，対 $[\Phi, T]$ は axiom 1を満たす．

(ロ) 逆に， $(0 \in) \Phi_B$ を部分集合に持つ Φ が axiom 1の (i)，(ii)，(iii)の3前半を満たすとすれば，

$$\Phi \supseteq \Phi_B \cup R^{++} \cdot \Phi \cup T \cdot \Phi \quad (\text{A2.1})$$

が成立するが，ここで，特に，包含式 (A2.1) において等号が成立するような最小の Φ を採用すれば，つまり，領域方程式 (A1.10) の成立を仮定すれば， axiom 1を満たす対 $[\Phi, T]$ の Φ は式 (A2.14) のように表され，2式 (A1.15)，(A1.16) も成立する．

(証明) (イ) は文献 [B4]，付録1の定理A1.1である．(ロ) は文献 [B3]，pp.64-66 (2.4節) で証明されている． \square

A3. axiom 2と類似度関数 SM

記憶されている代表的なパターンからなる有限個の元からなる集合内の任意の代表パターンと任意のパターン $\varphi \in \Phi$ がどの程度似ているか，違っているかを計量する手段を設定することが，認識の働きを確保するために必要とされる．類似性計量のための手段が類似度関数 SM である．

“正常なパターン” (well-formed pattern) は，ある1つのカテゴリ (category) \mathfrak{C}_j (第 $j \in J$ 番目の類概念) のみに帰属しているものとし，このような \mathfrak{C}_j の集まり (有限集合)

$$\mathfrak{C}(J) = \{\mathfrak{C}_j | j \in J\} \quad (\text{A3.1})$$

を想定する． \mathfrak{C}_j の備えている性質を典型的に持っている代表パターン (prototypical pattern) $\omega_j (\neq 0)$

を1つ選定する。 \mathfrak{C}_j は、典型 (prototype) としての代表パターン ω_j を中心とした緩やかなカテゴリであることを仮定したことに注意しておく。ここに、

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} \subset \Phi \tag{A3.2}$$

が式 (A3.1) の全カテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J)$ に対応する代表パターンの集合である。式 (A3.2) の系 Ω は、

$$\text{複素定数 } a_j \text{ の組 } \{a_j \mid j \in J\} \text{ について } \sum_{j \in J} a_j \cdot \omega_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J, a_j = 0 \tag{A3.3}$$

が成立しているという意味で、1次独立 (linearly independent) でなければならない。 Ω を視察で決定できる場合があるが、訓練パターン系列から Ω を適応的に決定する方法については、文献 [B3] の付録 I で説明されている。

Axiom 1を満たす式 (A1.1) のモデル構成作用素 T によって、式 (A3.2) の代表パターン集合 Ω が変換されて得られる系

$$T \cdot \Omega \equiv \{T\omega \mid \omega \in \Omega\} = \{T\omega_j \mid j \in J\} \tag{A3.4}$$

も1次独立であると要請する。このとき、類似度関数 (similarity-measure function)

$$SM: \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \tag{A3.5}$$

を導入し、

$SM(\varphi, \omega_j) = 1, 0$ に従って、パターン $\varphi \in \Phi$ は各々、 ω_j と確定的な類似度関係、相違関係にあり、また、 $0 < SM(\varphi, \varphi_j) < 1$ の場合は、あいまいな類似・相違関係にあると、 SM を解釈しよう。

式 (A3.5) の関数 SM は次のaxiom 2を満たすように構成されねばならない。Axiom 2の (i) では、クロネッカー (Kronecker) の δ 記号

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{if } i = j, = 0 \quad i \neq j \tag{A3.7}$$

が導入されているが、特にaxiom 2の (i) なるこの直交性は、候補カテゴリの分離・抽出が効果的に行われ、

候補カテゴリの鋭利な削減 (a sharp reduction) をもたらすために要請されている。

axiom 2 (類似度関数 SM の満たすべき公理)

(i) (正規直交性; orthonormality)

$$\forall i, \forall j, SM(\omega_i, \omega_j) = \delta_{ij}.$$

(ii) (規格化条件, 確率性, 正規性; probability condition, normalization)

$$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} SM(\varphi, \omega_j) = 1.$$

(iii) (写像 T の下での不変性; invariance under mapping T)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j). \quad \square$$

上述のaxiom 2の (i) ~ (iii) について簡単に説明しておこう。

SM の解釈式 (A3.6) の下で、(i) は、相異なるカテゴリの代表パターン同士は確定的な相違関係にあり、同一カテゴリの代表パターン同士は確定的な類似度関係にあることを要請している。(ii) は、任意のパターン φ について、すべてのカテゴリについての類似度の総和は1であることを要請している。(iii) は、パターンモデル $T\varphi$ は原パターン φ と任意のカテゴリについて同一類似度を持つことを要請している。ということは、パターンモデル $T\varphi$ を見たり、聞いたりするならば、原パターン φ と同じように見えたり、聞こえたりすること (同一知覚原理; A2章を参照) を要請していることになる。

尚、第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j の生起確率である非負実数 $p(\mathfrak{C}_j)$ を、2条件

$$[\forall j \in J, 0 < p(\mathfrak{C}_j) < 1] \wedge [\sum_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) = 1] \quad (\text{A3.9})$$

を満たすものとして導入しておく。

A4. axiom 3と大分類関数

本章では、ある1つのカテゴリに帰属するかどうかを決定する2カテゴリ分類器としての大分類関数BSCは、axiom 3を満たすように構成されなければならないことが説明される。

式 (A3.5) の類似度関数SMが式 (A3.8) でいう“候補カテゴリの鋭利な削減”を持つためには、axiom 2, (i) の正規直交性を満たす必要があることがA3.で指摘されたが、 $SM(\varphi, \omega_j)$ の代りに $SM(\varphi, \omega_j) \cdot BSC(\varphi, j)$ を用いれば、パターン φ が帰属するかも知れない候補カテゴリを益々、鋭利に削減できると期待される。

大分類関数 (rough classifier, binary-state classifier) と呼ばれる2値関数

$$BSC : \Phi \times J \rightarrow \{0, 1\} \quad (\text{A4.1})$$

を、次のaxiom 3を満たすものとして導入し、解釈

パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属する候補カテゴリの1つが第 $j \in J$ 番目の \mathfrak{C}_j であるならば、

$$BSC(\varphi, j) = 1 \text{ であることが望ましい} \quad (\text{A4.2})$$

を採用しよう。この際、注意すべきは、

$BSC(\varphi, j) = 0$ であっても、パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属する候補カテゴリの1つは、第 $j \in J$ 番目の \mathfrak{C}_j でないとは限らない

$$(\text{A4.3})$$

としていることである。また、axiom 3の(i)からわかるように、カテゴリ間の相互排除性(the mutual exclusion of the one category from the other categories)

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, BSC(\omega_j, i) = 0 \quad (\text{A4.4})$$

を公理として要請していない事実に注意しておこう。この事実を補うのが実は、式 (A3.5) の類似度関数SMが満たさなければならないとしているaxiom 2の(i) (正規直交性) である。

Axiom 3 (大分類関数BSCの満たすべき公理)

(i) (カテゴリ抽出能力; category separability)

$$\forall j \in J, BSC(\omega_j, j) = 1$$

(ii) (写像Tの下での不変性; invariance under mapping T)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, BSC(T\varphi, j) = BSC(\varphi, j). \quad \square$$

A5. axiom 4と、カテゴリ選択関数CSFの構造形式

認識システムRECOGNITRONがパターン $\varphi \in \Phi$ に対し、

「パターン $\varphi \in \Phi$ が、式 (A3.1) の全カテゴリ集合 \mathfrak{C}_j の部分集合

$$\mathfrak{C}(\gamma) \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid j \in \gamma\} \quad (\text{A5.1})$$

内の何れか1つのカテゴリ \mathfrak{C}_j に帰属する可能性がある」

$$(\text{A5.2})$$

という“パターン $\varphi \in \Phi$ のカテゴリ帰属知識 (categorical membership-knowledge)”を持っているとする。この知識を、

$$\langle \varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle \quad (\text{A5.3})$$

と表す。

$$\langle \Phi, 2^J \rangle \equiv \{ \langle \varphi, \gamma \rangle \mid \varphi \in \Phi, \gamma \in 2^J \} \quad (\text{A5.4})$$

は、カテゴリ帰属知識空間 (categorical membership-knowledge space) と呼ばれ、すべてのパターン $\varphi \in \Phi$ と、すべてのカテゴリ番号のリスト $\gamma \in 2^J$ とのなす順序の付いた対リスト (an ordered pair list) $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の集合である。 2^J はカテゴリ番号集合 J のすべての部分集合のつくる集合 (J のべき集合; power set) である。

カテゴリ選択関数 (category-selection function) と呼ばれる写像

$$\text{CSF} : \Phi \times 2^J \rightarrow 2^J \quad (\text{A5.5})$$

は、包含関係 (inclusion relation)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \gamma \in 2^J, \text{CSF}(\varphi, \gamma) \subseteq \gamma \subseteq J \in 2^J \quad (\text{A5.6})$$

を満たし、然も、次のaxiom 4を満たすものとして、設定されるとしよう。

Axiom 4 (カテゴリ選択関数CSFの満たすべき公理)

(i) $\varphi = 0 \vee \gamma = \phi$ の場合

如何なるカテゴリ番号 $k \in \gamma$ も $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリの番号ではない。

(ii) $\text{SM}(\varphi, \omega_k) = 0 \wedge \text{BSC}(\varphi, k) = 0$ の場合

カテゴリ番号 $k \in \gamma$ は、 $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリの番号ではない

(iii) $\sum_{k \in \gamma} \text{BSC}(\varphi, k) = 0$ の場合

$\text{BSC}(\varphi, k) = 0$ であっても、 $\text{SM}(\varphi, \omega_k) > 0$ であるようなカテゴリ番号 $k \in \gamma$ は、 $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリの番号である。

(iv) $\sum_{k \in \gamma} \text{BSC}(\varphi, k) > 0$ の場合

(iv-1) $\text{BSC}(\varphi, k) = 0$ なるカテゴリ番号 $k \in \gamma$ は、 $\text{SM}(\varphi, \omega_k) > 0$ であっても、 $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリの番号ではない。

(iv-2) $\text{BSC}(\varphi, k) = 1$ なるカテゴリ番号 $k \in \gamma$ は、 $\text{SM}(\varphi, \omega_k) = 0$ であれば、 $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリの番号ではない。 □

次の定理A4.1では、式 (A5.1) の写像CSFは、式 (A2.5) の類似度関数SM、式 (A3.1) の大分類関数BSCを使用する形式で、

その定義域が $\Phi \times 2^J$ であり、その値域が、パターン $\varphi \in \Phi$ のカテゴリ帰属知識 $\langle \varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$ の“有効な”候補カテゴリの番号リスト (a list of significant category-numbers) の集合である

$$(\text{A5.7})$$

の如く、構成されている。

次の定理A4.1は、axiom 4を満たすように、式 (A5.5) のカテゴリ選択関数CSFの構造を決定したものである。

[定理A4.1] (カテゴリ選択関数CSFの構成定理)

次のように定義される式 (A5.5) の1つの写像CSFは式 (A5.2) と上述のaxiom 4を満たす：

(i) $\varphi = 0 \vee \gamma = \phi$ の場合

$$\text{CSF}(\varphi, \gamma) = \phi. \quad (\text{A5.8})$$

(ii) $\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ の場合

$$\text{CSF}(\varphi, \gamma) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{k \in \gamma \mid SM(\varphi, \omega_k) > 0\} \quad \text{if} \quad \sum_{k \in \gamma} \text{BSC}(\varphi, k) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A5.9})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{k \in \gamma \mid SM(\varphi, \omega_k) > 0 \wedge \text{BSC}(\varphi, k) = 1\} \quad \text{if} \quad \sum_{k \in \gamma} \text{BSC}(\varphi, k) > 0 \end{array} \right. \quad (\text{A5.10})$$

(証明) 文献 [B3] の定理E1である。 \square

定理A4.1の写像CSFについて、次のように解釈できる：

処理の対象とするパターン $\varphi \in \Phi$ がカテゴリ $\mathfrak{C}_j, j \in \gamma$ の何れか1つに帰属する可能性があると思定した場合、絞り上げて、その内のカテゴリ $\mathfrak{C}_j, j \in \text{CSF}(\varphi, \gamma) \subseteq \gamma$ の何れか1つに帰属する可能性があると思定できる機能を備え、その出力 $\text{CSF}(\varphi, \gamma)$ はパターン $\varphi \in \Phi$ の有効な候補カテゴリの番号のリストを与えている。 (A5.11)

付録B. 支持パターンマシンspmによる大分類関数BSCの構成

その重みが支持ベクトルの1次結合で与えられるSupport Vector Machine [A1], [A5], B23] とは、

$$f(\vec{x}) = \text{sgn}\left(\sum_{i=1}^{\ell} y_i \cdot a_i \cdot k(\vec{x}, \vec{x}_i) + b\right) \in \{-1, +1\}, y_i \in \{-1, +1\} (1 \leq i \leq \ell) \quad (\text{B.1})$$

で与えられ、或る1つのカテゴリに帰属するかどうかを決定できるパターン識別関数としては優秀な分離能力があるという事実が確かめられている。ここに、

$$\{\vec{x}_i \in R^n \mid i = 1, 2, \dots, \ell\} \quad (\text{B.2})$$

は支持ベクトルの組であり、

$$k(\cdot, \vec{x}_i) \equiv k(\cdot, \vec{x}_i; \{\vec{x}_i \in R^n \mid i = 1, 2, \dots, \ell\}) : R^n \rightarrow R, i = 1 \sim \ell \quad (\text{B.3})$$

は核関数 (a priori chosen kernel function) である。 R^n は n 次元ユークリッド空間であり、 R は実数全体の集合である。 sgn は式 (B.2.4) で定義される符号関数であり、 $\{a_i \mid i = 1, 2, \dots, \ell\}$ は支持ベクトルの組 $\{\vec{x}_i \in R^n \mid i = 1, 2, \dots, \ell\}$ がカテゴリ境界から一定値以上の距離をとるように、2次計画法で決定されるパラメータの組である。支持ベクトル \vec{x}_i が注目しているカテゴリに帰属していれば、+1の値をとり、そうでなければ、-1の値をとる変数 y_i がある。

本章では、上述の支持パターンマシンの識別構造から暗示を受けて、可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} で動作可能な支持パターンマシン (support pattern machine) spmを提案し、併せて、spmを用いてaxiom 3を満たす式 (A4.1) の大分類関数BSCを構成する。

B1. パターン φ の、支持パターンの集合 $\eta_k, k \in K$ との類似度関数 $g(T\varphi, T\eta_k)$ の構成

B1.1 関数の4構成

系 $\eta_k, k \in K$ は \mathfrak{H} において1次独立な元の組としよう。

$$\eta_k \in \mathfrak{H} : \text{第} k \in K \text{ 番目の支持パターン (support pattern)} \quad (\text{B1.1})$$

ということにして、支持パターンの集合

$$\{\eta_k \mid k \in K\} \quad (\text{B1.2})$$

から決まる関数

$$g(T\cdot, T\cdot) : \Phi \times \{\eta_k \mid k \in K\} \rightarrow R \quad (\text{実数全体の集合}) \quad (\text{B1.3})$$

を、

$T\varphi$ が $T\eta_\ell$ よりも $T\eta_k$ に一層似ていれば、不等式

$$g(T\varphi, T\eta_\ell) \leq g(T\varphi, T\eta_k) \tag{B1.4}$$

が成立する (相似性の単調増大への反映性)

を満たすように、以下の4種類 (1#) ~ (2#) を構成する.

先ず, T-不変性

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall k \in K, g(T(T\varphi), T\eta_k) = g(T\varphi, T\eta_k) \tag{B1.5}$$

が axiom 1, (iii) の後半 $T \cdot T = T$ から, 成立していることに注意しておく.

$$(1\#) \quad g(T\varphi, T\eta_k) = \exp\left[-\frac{\|T\varphi - T\eta_k\|^2}{2\sigma_j^2}\right], \sigma_j > 0 \tag{B1.6}$$

$$(2\#) \quad g(T\varphi, T\eta_k) = \frac{(T\varphi, T\eta_k)}{\|T\varphi\| \cdot \|T\eta_k\|} \tag{B1.7}$$

$$\text{但し, } \|T\varphi\| \cdot \|T\eta_k\| = 0 \text{ のとき } \frac{(T\varphi, T\eta_k)}{\|T\varphi\| \cdot \|T\eta_k\|} = 0 \tag{B1.8}$$

と約束する. この約束は, (4#) にも適用される.

$$(3\#) \quad g(T\varphi \cdot T\eta_k) = e_k(\varphi) / \sum_{q \in K} e_q(\varphi) \tag{B1.9}$$

$$\text{such that } \inf_{e_k, k \in K} \|T\varphi - \sum_{k \in K} e_k \cdot T\eta_k\|^2 = \|T\varphi - \sum_{k \in K} e_k(\varphi) \cdot T\eta_k\|^2 \tag{B1.10}$$

$$(4\#) \quad g(T\varphi, T\eta_k) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e [1 - |\frac{(T\varphi, T\eta_k)}{\|T\varphi\| \cdot \|T\eta_k\|}|^2] / \sum_{k \in K} -\frac{1}{2} \cdot \log_e [1 - |\frac{(T\varphi, T\eta_k)}{\|T\varphi\| \cdot \|T\eta_k\|}|^2] \tag{B1.11}$$

但し,

$$\sum_{k \in K} -\frac{1}{2} \cdot \log_e [1 - |\frac{(T\varphi, T\eta_k)}{\|T\varphi\| \cdot \|T\eta_k\|}|^2] = 0 \text{ のとき, } g(T\varphi, T\eta_k) = 0 \tag{B1.12}$$

と約束する.

(1#), (2#), (3#), (4#) の $g(T\varphi, T\eta_k)$ については,

$$g(T\varphi, T\eta_k) = 1 \quad \text{if } \varphi = \eta_k \tag{B1.13}$$

であるが, 特に, (3#), (4#) の $g(T\varphi, T\eta_k)$ については, 更に,

$$g(T\eta_\ell, T\eta_k) = 0 \quad \text{if } \ell \neq k \tag{B1.14}$$

が成り立っている. 特に,

$$e_k(\eta_\ell) = 1 \quad \text{if } \ell = k, = 0 \quad \text{if } k \neq \ell \tag{B1.15}$$

が成立していることは, 更に, (3#) の $g(T\varphi, T\eta_k)$ が 2式 (B1.13), (B1.14) を満たすことは, 節B1.2で示される.

B1.2 各1次結合係数 $e_k(\varphi)$, $k \in K$ の求め方

$\{T\eta_k\}_{k \in K}$ が Hilbert空間 \mathfrak{H} での1次独立な系であるとする. パターンモデル $T\varphi$ を1次独立な系の1次結合 $\sum_{k \in K} e_k \cdot T\eta_k$ で近似するときの自乗ノルム距離

$$\|T\varphi - \sum_{k \in K} e_k \cdot T\eta_k\|^2 \tag{B1.16}$$

を最小ならしめる1次結合実係数 e_k を $e_k(\varphi)$ と書く. 各 $e_k(\varphi)$ は, 1次独立な系 $\{T\eta_k\}_{k \in K}$ が

$$(T\eta_k, T\eta_\ell) = 1 \quad \text{if } k = \ell, = 0 \quad \text{if } k \neq \ell \tag{B1.17}$$

を満たすという意味で, 正規直交系であれば,

$$e_k(\varphi) = (T\varphi, T\eta_k) / (T\eta_k, T\eta_k), k \in K, \quad (\text{B1.18})$$

と，与えられる．

最小自乗法によれば，系 $\{T\eta_k\}_{k \in K}$ が 1 次独立である場合，各 $e_k(\varphi)$ は，連立 1 次方程式

$$\sum_{\ell \in K} a_{k\ell} \cdot e_\ell(\varphi) = b_k, k \in K \quad (\text{B1.19})$$

を解けばよい．ここに，

$$a_{k\ell} = (T\eta_\ell, T\eta_k), b_k = (T\varphi, T\eta_k), k, \ell \in K \quad (\text{B1.20})$$

である．1 次独立な系 $\{T\eta_k\}_{k \in K}$ については，必ず，この方程式 (B1.19) の解である各 $e_k(\varphi)$ は存在する． $|K|$ 次行列 $A = (a_{k\ell})_{k, \ell \in K}$ ， $|K|$ 次縦ベクトル $b = \text{col}(b_k)_{k \in K}$ を導入すると，

$$e_k(\varphi) = \text{solution}(A, b; T\varphi), k \in J \quad (\text{B1.21})$$

と表すことが出来る．このとき，モデル $T\varphi$ の，支持パターン η_k のモデル $T\eta_k$ による 1 次結合表現

$$\forall \varphi \in \Phi, \exists (T\varphi)_\perp \in \mathfrak{H}, T\varphi = \sum_{k \in K} e_k(\varphi) \cdot T\eta_k + (T\varphi)_\perp \in \mathfrak{H} \quad (\text{B1.22})$$

$$\wedge [\forall k \in J, ((T\varphi)_\perp, T\eta_k) = 0] \quad (\text{B1.23})$$

が成り立つ．次の 2 補助定理 B1.1, B1.2 が成り立つ．

[補助定理 B1.1] (各 $e_k(\varphi)$ 間の正規直交性)

$$[\forall k \in K, e_k(\eta_k) = 1] \quad (\text{B1.24})$$

$$\wedge [\forall \ell \in K - \{k\}, e_k(\eta_\ell) = 0]. \quad (\text{B1.25})$$

(証明) 2 式 (B1.19), (B1.22) から明らか． \square

[補助定理 B1.2] (各 $e_k(\varphi)$ の T-不変性)

$$\forall k \in K, \forall \varphi \in \Phi, e_k(T\varphi) = e_k(\varphi). \quad (\text{B1.26})$$

(証明) axiom 1, (iii) の後半

$$T \cdot T = T \quad (\text{B1.27})$$

から，式 (B1.20) の a_{jk}, b_j は T に対し，不変であることから，明らか． \square

B2. 支持パターンマシン spm を用いた axiom 3 を満たす大分類関数 BSC の 2 構成

B2.1 spm 自身による構成

式 (A4.1) の大分類関数 BSC を構成するために，重み $w(j, k)$ ，閾値 $-b(j)$ を学習した後稼動できる 1 次ニューラルネット

$$SPM(j, T\varphi) = \sum_{k \in K} W(j, k) \cdot g(T\varphi, T\eta_k) + b(j) \quad (\text{B2.1})$$

を導入しよう．このとき，

$$spm(j, T\varphi) = \frac{1 + \text{sgn}(SPM(j, T\varphi))}{2} \quad (\text{B2.2})$$

と定義される写像

$$spm : J \times T \cdot \Phi \rightarrow \{-1, +1\} \quad (\text{B2.3})$$

を支持パターンマシンということにしよう．符号関数

$$\text{sgn}(u) = +1 \quad \text{if } u \geq 0, = -1 \quad \text{if } u < 0 \quad (\text{B2.4})$$

を導入しておく．

次の定理B2.1は、支持パターンマシン spm によって、axiom 3を満たす大分類関数BSCが、カテゴリ間の相互排他性が成立するように構成され得る事実を指摘したものである。

[定理B2.1] (支持パターンマシン spm による大分類関数BSCの構成定理)

式 (B2.2) の spm を用いて、

$$BSC(\varphi, j) = spm(j, T\varphi) = \frac{1 + \text{sgn}(SPM(j, T\varphi))}{2} \quad (\text{B2.5})$$

と定義される式 (A4.1) のBSCは、条件

$$\forall j \in J, SPM(j, T\omega_j) \geq 0 \quad (\text{B2.6})$$

の下でaxiom 3を満たす。更に、

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, SPM(j, T\omega_i) < 0 \quad (\text{B2.7})$$

であれば、カテゴリ間の相互排他性

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, BSC(T\omega_i, j) = 0 \quad (\text{B2.8})$$

を満たす。

(証明) axiom 3, (i) の成立: 式 (B2.6) より、

$$\forall j \in J, BSC(T\omega_j, j) = 1 \quad (\text{B2.9})$$

が成り立つことになる。

axiom 3, (ii) の成立: axiom 1, (iii) の後半 $T \cdot T = T$ より、

$$\forall j \in \Phi, \forall j \in J, BSC(T\varphi, j) = BSC(\varphi, j) \quad (\text{B2.10})$$

が成り立つことになる。

カテゴリ間の相互排他性の成立: 式 (B2.7) より式 (B2.8) の成立は明らか。□

B2.2 spm の近似による構成

式 (B2.4) の符号関数 sgn を近似するような単調非減少関数 (発火関数; activation function)

$$f_j: R \rightarrow R, \text{ここに、} R \text{は実数全体の集合} \quad (\text{B2.11})$$

を用いて、式 (B2.2) の支持パターンマシン $spm(j, T\varphi)$ の近似

$$F(\varphi, j) = \frac{1 + f_j(SPM(j, T\varphi))}{2} \quad (\text{B2.12})$$

を、 $BSC(\varphi, j)$ の近似として考えてみよう。

次の定理B2.2は、支持パターンマシン spm の近似 $F(\cdot, j)$ によって、大分類関数BSCがaxiom 3を満たし、然も、カテゴリ間の相互排他性の式 (B2.8) を満たすように構成され得ることを指摘したものである。

[定理B2.2] (支持パターンマシン spm の近似 $F(\cdot, j)$ による大分類関数BSCの構成定理)

$$BSC(\varphi, j) = 1 \text{ if } F(\varphi, j) \geq 0, = 0 \text{ if } F(\varphi, j) < 0 \quad (\text{B2.13})$$

と定義される式 (A4.1) の関数BSCは、条件

$$\forall j \in J, f_j(SPM(j, T\omega_j)) \geq -1 \quad (\text{B2.14})$$

の下でaxiom 3を満たす。更に、

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, f_j(SPM(j, T\omega_i)) < -1 \quad (\text{B2.15})$$

であれば、カテゴリ間の相互排他性の式 (B2.8) を満たす。

(証明) axiom 3, (i) の成立: 式 (B2.14) より、式 (B2.9) が成り立つことになる。

axiom 3, (ii) の成立: axiom 1, (iii) の後半 $T \cdot T = T$ より、式 (B2.10) が成り立つことになる。

カテゴリ間の相互排他性の成立: 式 (B2.15) より式 (B2.8) の成立は明らか。□

B2.3 符号関数sgnを近似するような単調非減少関数 f の系の6構成

式 (B2.4) の符号関数sgnを近似するような式 (B2.11) の単調非減少関数 f を構成してみよう。

(1) シグモイド関数

$$f_j(u) = \frac{2}{1 + \exp(-2u)} - 1 = \begin{cases} -1 & \text{if } u \rightarrow -\infty \\ 0 & \text{if } u = 0 \\ +1 & \text{if } u \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (\text{B2.16})$$

$$\frac{df_j(u)}{du} = [1 + f_j(u)] \cdot [1 - f_j(u)] \geq 0 \quad (\text{B2.17})$$

$$\frac{d^2f_j(u)}{du^2} = -2f_j(u) \cdot \frac{df_j(u)}{du} \quad (\text{B2.18})$$

(2) 区分的1次関数1

$$f_j(u) = \begin{cases} -1 & \text{if } u \leq h_j^- \\ \frac{2}{h_j^+ - h_j^-} \cdot (u - h_j^-) - 1 & \text{if } h_j^- < u < h_j^+ \\ +1 & \text{if } u \geq h_j^+ \end{cases} \quad (\text{B2.19})$$

$$\frac{df_j(u)}{du} = \begin{cases} 0 & \text{if } u \leq h_j^- \\ \frac{2}{h_j^+ - h_j^-} & \text{if } h_j^- < u < h_j^+ \\ 0 & \text{if } u \geq h_j^+ \end{cases} \quad (\text{B2.20})$$

$$\frac{d^2f_j(u)}{du^2} = 0 \quad (\text{B2.21})$$

ここに，

$$-\infty < h_j^- < 0 < h_j^+ < +\infty \quad (\text{B2.22})$$

(3) 区分的1次関数2

$$f_j(u) = \begin{cases} -c & \text{if } u \leq -b \\ \frac{c}{b-a} \cdot (u+b) - c & \text{if } -b < u < -a \\ 0 & \text{if } -a \leq u \leq +a \\ \frac{c}{b-a} \cdot (u-a) & \text{if } +a < u < +b \\ +c & \text{if } +b \leq u \end{cases} \quad (\text{B2.23})$$

$$\frac{df_j(u)}{du} = \begin{cases} 0 & \text{if } u \leq -b \\ \frac{c}{b-a} & \text{if } -b < u < -a \\ 0 & \text{if } -a \leq u \leq +a \\ \frac{c}{b-a} & \text{if } +a < u < +b \\ 0 & \text{if } +b \leq u \end{cases} \quad (\text{B2.24})$$

$$\frac{d^2f_j(u)}{du^2} = 0 \tag{B2.25}$$

ここに,

$$0 \leq a < b, 0 \leq c \tag{B2.26}$$

(4) 区分的1次関数3

$$f_j(u) =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{if } u \leq -b \\ \frac{2^{-1}}{b-a} \cdot (u+b) & \text{if } -b < u < -a \\ 2^{-1} & \text{if } -a \leq u \leq +a \\ \frac{2^{-1}}{b-a} \cdot (u-a) + 2^{-1} & \text{if } +a < u < +b \\ 1 & \text{if } +b \leq u \end{cases} \tag{B2.27}$$

$$\frac{df_j(u)}{du} =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{if } u \leq -b \\ \frac{2^{-1}}{b-a} & \text{if } -b < u < -a \\ 0 & \text{if } -a \leq u \leq +a \\ \frac{2^{-1}}{b-a} & \text{if } +a < u < +b \\ 0 & \text{if } +b \leq u \end{cases} \tag{B2.28}$$

$$\frac{d^2f_j(u)}{du^2} = 0 \tag{B2.29}$$

ここに,

$$0 \leq a < b \tag{B2.30}$$

(5) 区分的1次関数4

$$f_j(u) =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{if } u \leq +a \\ \frac{2^{-1}}{b-a} \cdot (u-a) & \text{if } a < u < b \\ 2^{-1} & \text{if } b \leq u \leq c \\ \frac{2^{-1}}{d-c} \cdot (u-c) + 2^{-1} & \text{if } c < u < d \\ 1 & \text{if } +d \leq u \end{cases} \tag{B2.31}$$

$$\frac{df_j(u)}{du} =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{if } u \leq +a \\ \frac{2^{-1}}{b-a} & \text{if } a < u < b \\ 0 & \text{if } b \leq u \leq c \\ \frac{2^{-1}}{d-c} & \text{if } c < u < d \\ 0 & \text{if } d \leq u \end{cases} \tag{B2.32}$$

$$\frac{d^2f_j(u)}{du^2} = 0 \tag{B2.33}$$

ここに,

$$0 \leq a < b \leq c < d \tag{B2.34}$$

(6) 区分的余弦・正弦関数

$$f_j(u) =$$

$$\begin{cases} 1 - \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{u}{a}\right) & \text{if } u < +a \\ 2^{-1} & \text{if } a \leq u \leq b \\ \sin\left(\frac{2^{-1}}{c-b} \cdot (u-b) \cdot \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) & \text{if } b < u < c \\ 1 & \text{if } +c \leq u \end{cases} \quad (\text{B2.35})$$

$$\frac{df_j(u)}{du} = \begin{cases} \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{u}{a}\right) \right\} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{a} & \text{if } u < +a \\ 0 & \text{if } a \leq u \leq b \\ \left\{ \cos\left[\frac{2^{-1}}{c-b} \cdot (u-b) \cdot \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right] \right\} \cdot \frac{2^{-1}}{c-b} \cdot \frac{2\pi}{3} & \text{if } b < u < c \\ 0 & \text{if } c \leq u \end{cases} \quad (\text{B2.36})$$

$$\frac{d^2f_j(u)}{du^2} = \begin{cases} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{u}{a}\right) \right\} \cdot \left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{a}\right)^2 & \text{if } u < +a \\ 0 & \text{if } a \leq u \leq b \\ -\left\{ \sin\left[\frac{2^{-1}}{c-b} \cdot (u-b) \cdot \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right] \right\} \cdot \left(\frac{2^{-1}}{c-b} \cdot \frac{2\pi}{3}\right)^2 & \text{if } b < u < c \\ 0 & \text{if } c \leq u \end{cases} \quad (\text{B2.37})$$

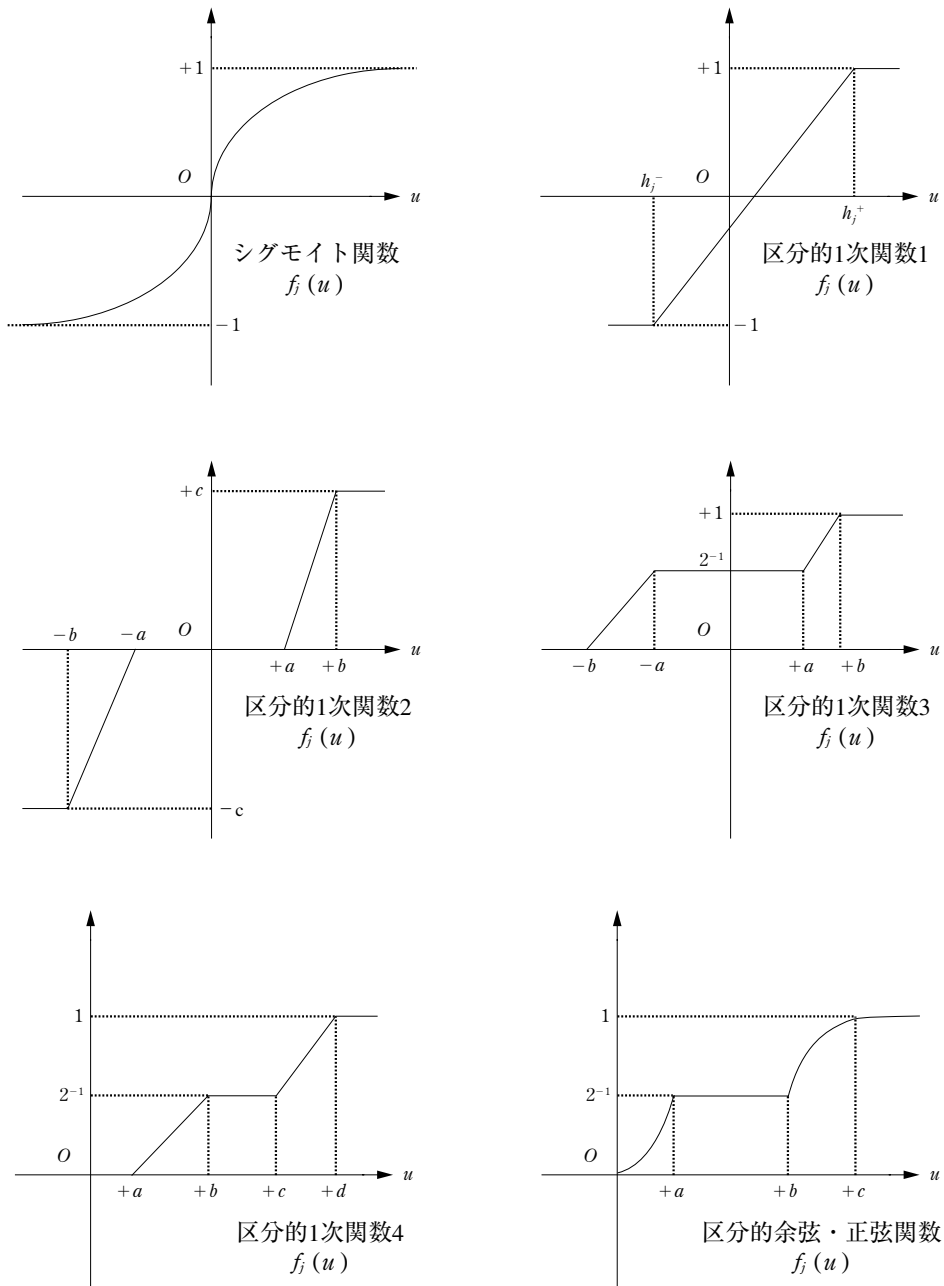
ここに，

$$0 \leq a \leq b < c \quad (\text{B2.38})$$

□

関数 f の上述の6構成 (1) ~ (6) の外形は図B2.1に示されているが， $f(u) = 0$ となる u の区間集合は不応期 (refractory period) と呼ばれる。

尚，(3) の区分的1次関数 $f(u)$ においては， $c = 1$ を採用できる。また，(4)，(5)，(6) の関数 $f(u)$ においては，不等式 (B2.15) の成立の場合を想定し， $f(u)$ の代わりに， $f(u) - 1$ を採用した方がよいかもしれない。



図B2.1 関数 f_j の上述の6構成 (1) ~ (6) の形状

Fig.B2.1 configurations of the above-mentioned construction of functions f_j

B3. 重み $w(j, k)$, 閾値 $-b(j)$ を学習する方法 (最急降下学習法)

本節では、式 (B2.2) のの支持パターンマシン spm 内の重み $w(j, k)$, 閾値 $-b(j)$ を、最急降下法 (method of steepest descent) に従い、学習する方法が研究される。

B3.1 重み $w(j, k)$, 閾値 $-b(j)$ の学習

包含条件

$$\{\eta_k | k \in K\} \subseteq \{\varphi_t | t = 1, 2, \dots\} \quad (\text{B3.1})$$

を満たし、支持パターン集合 $\{\eta_k | k \in K\}$ が $\{\varphi_t | t = 1, 2, \dots\}$ に繰り返し現れるようなパターン系列 (訓練パターン系列)

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_t, \varphi_{t+1}, \dots \quad (\text{B3.2})$$

を採用し、 $s \max$ は選ばれた十分大きい正整数として、時刻 s の訓練パターン φ_s に関する適応誤差

$$f_j \left(\sum_{k \in K} w(j, k) \cdot g(T\varphi_s, T\eta_k) + b(j) - c_j(\varphi_s) \right) \quad (\text{B3.3})$$

の自乗を注目している訓練期間 $1 \leq s \leq s \max$ にわたって総和して得られる第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j についての汎関数

$$G_j \equiv G_j(s \max) \equiv G(w(j, k), b(j); j \in J, k \in K | s \max) \equiv \sum_{s=1}^{s \max} 2^{-1} \cdot [f_j \left(\sum_{k \in K} w(j, k) \cdot g(T\varphi_s, T\eta_k) + b(j) - c_j(\varphi_s) \right)]^2 \quad (\text{B3.4})$$

を最小にするように、重み、閾値の組

$$w(j, k), -b(j), j \in J, k \in K \quad (\text{B3.5})$$

が、初期条件

$$w(j, k; t)|_{t=0} = \frac{1}{|J| + |K| + 1}, j \in J, k \in K$$

$$b(j; t)|_{t=0} = \frac{1}{|J| + 1}, j \in J \quad (\text{B3.6})$$

の下での逐次学習方式

$$w(j, k; t+1) = w(j, k; t) + \Delta w(j, k; t), j \in J, k \in K \quad (\text{B3.7})$$

$$b(j; t)_{t+1} = b(j; t) + \Delta b(j; t), j \in J \quad (\text{B3.8})$$

$$t = 0, 1, 2, \dots$$

を用いて、

$$w(j, k) = \lim_{t \rightarrow \infty} w(j, k; t), j \in J, k \in K \quad (\text{B3.9})$$

$$b(j) = \lim_{t \rightarrow \infty} b(j; t), j \in J \quad (\text{B3.10})$$

と求められるように、時刻 $t (= 1, 2, \dots)$ に訓練パターン φ_t が入力される度に逐次的に更新する方法を研究しよう。ここに、 $c_j(\varphi_s)$ は、

$$c_j(\varphi_s) = \begin{cases} +1 & \text{if } \varphi_s \text{ belongs to the } j\text{th category } \mathfrak{C}_j \\ -1 & \text{if } \varphi_s \text{ does not belong the } j\text{th category } \mathfrak{C}_j \end{cases} \quad (\text{B3.11})$$

と定義されている。

B3.2 更新分 $\Delta w(j, k; t)$, $\Delta b(j; t)$ の決定

最急降下法によれば、式 (B3.4) の $G_j = G_j(s \max)$ を最小にする $\Delta w(j, k; t)$, $\Delta b(j; t)$ は、

$$\Delta w(j, k; t) = -\varepsilon_1(j, k; t) \cdot \frac{\partial G_j(s \max)}{\partial w(j, k; t)}, j \in J, k \in K \tag{B3.12}$$

$$\Delta b(j; t) = -\varepsilon_2(j; t) \cdot \frac{\partial G_j(s \max)}{\partial b(j; t)}, j \in J \tag{B3.13}$$

と与えられる。ここに、2つの関数 $\varepsilon_1(j, k; t)$, $\varepsilon_2(j; t)$ は、極限性質

$$0 < \varepsilon_1(j, k; t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty), j \in J, k \in K \tag{B3.14}$$

$$0 < \varepsilon_2(j; t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty), j \in J \tag{B3.15}$$

を満たす時刻変数 $t (= 0, 1, 2, \dots)$ の正值関数であり、通常は時刻変数 t の単調非増加関数である。

結果は次の通りである：

$$\begin{aligned} \Delta w(j, k; t) &= -\varepsilon_1(j, k; t) \cdot [f_j(\sum_{k \in K} w(j, k; t) \cdot g(T\varphi_t, T\eta_k) + b(j; t)) - c_j(\varphi_t)] \\ &\cdot \frac{df_j(u)}{du} \Big|_{u = \sum_{k \in K} w(j, k; t) \cdot g(T\varphi_t, T\eta_k) + b(j; t)} \cdot g(T\varphi_t, T\eta_k) \end{aligned} \tag{B3.16}$$

$$\begin{aligned} \Delta b(j; t) &= -\varepsilon_2(j; t) \cdot [f_j(\sum_{k \in K} w(j, k; t) \cdot g(T\varphi_t, T\eta_k) + b(j; t)) - c_j(\varphi_t)] \\ &\cdot \frac{df_j(u)}{du} \Big|_{u = \sum_{k \in K} w(j, k; t) \cdot g(T\varphi_t, T\eta_k) + b(j; t)} \cdot (+1) \end{aligned} \tag{B3.17}$$

□

付録C. SS 多段階認識過程 $\phi_0 = T\varphi, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_t, \phi_{t+1}, \dots$ の意味づけ

本付録Cでは、SS多段階認識の、式 (1.3) の過程の各成分 ϕ_t が如何なる考えで生成されるかが簡単に説明される。今少し、詳しく説明しておく。

汎関数 $G(\varphi, \psi) \in R$ の極小値に到達するように、不一致エネルギー $G(\psi_t, \psi_t)$ が減少するような式 (1.3) のパターンモデル列を得るような逐次更新式 (C1.2) を提案される。 ψ_t の十分小さい近傍内にある ψ_{t+1} については、不等式

$$G(\psi_{t+1}, \psi_{t+1}) \leq G(\psi_t, \psi_t) \tag{C0.1}$$

が成立するような逐次更新式 (C1.2) を提案される。

$\varphi = \psi_t$ の十分小さい近傍で $G(\varphi, \varphi)$ が φ の増加に伴い増加の状態にあれば、

$$\psi_{t+1} \leq \psi_t \tag{C0.2}$$

であるように、かつ、 $\varphi = \psi_t$ の十分小さい近傍で φ の増加に伴い $G(\varphi, \varphi)$ が減少の状態にあれば、

$$\psi_{t+1} \geq \psi_t \tag{C0.3}$$

であるように、逐次更新式 (C1.2) の更新分 $\Delta\psi_t$ を求めよう。更新分は式 (C1.5) の $\Delta\psi_t$ で与えられ

る。

C1. 最急降下法を適用しての、パターンの変換列の生成

$\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{S}$ を処理の対象とする問題のパターン（入力パターン）としよう。初期条件

$$\phi_t |_{t=0} = T\varphi \quad (C1.1)$$

を採用して、第 t 段階のパターン ϕ_t を第 $(t+1)$ 段階のパターン ϕ_{t+1} へ

$$\phi_{t+1} = \phi_t + \Delta\phi_t, t = 0, 1, 2, \dots \quad (C1.2)$$

と更新しよう。 ϕ_t から ϕ_{t+1} への更新分 $\Delta\phi_t$ は、最急降下法（gradient-descent method）を適用して、以下の式（C1.5）のように決定する。

パターン $\varphi \in \mathfrak{S}$ の汎関数 $G(\varphi, \Psi) \in R$ （実数全体の集合）は、 $\varphi = \varphi' \in \mathfrak{S}$ で極値をとるものとする。言い換えれば、 $\varphi' \in \mathfrak{S}$ の十分小さい近傍にある任意のパターン $\psi \in \mathfrak{S}$ について、不等式

$$G(\varphi', \varphi') \leq G(\psi, \psi) \quad (C1.3)$$

が成り立つとしよう。

認識段階番号 $t = (0, 1, 2, \dots)$ の、実数値をとる十分小さい正值関数

$$C(t) > 0, \text{ where } \lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 0 \quad (C1.4)$$

と、正值パターン $\eta \in \mathfrak{S}$ とを用意し、

$$\Delta\phi_t = -C(t) \cdot \left. \frac{\partial G(\psi_t + \alpha \cdot \eta, \psi_t)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \cdot \eta \quad (C1.5)$$

と与えよう。ここに、 α は十分小さいパラメータである。更新分 $\Delta\phi_t$ は η の定数倍の形式で与えられていることに注意しておく。

更に、1 より小さくない非負実数 $q_j(\varphi)$ を次のように、与えよう：

$$q_j(\varphi) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{SM(\varphi, \omega_j) \cdot BSC(\varphi, j)}{\sum_{k \in \gamma} SM(\varphi, \omega_k) \cdot BSC(\varphi, k)} \quad \text{if } \varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi \wedge \sum_{k \in \gamma} SM(\varphi, \omega_k) > 0 \wedge \\ \sum_{k \in \gamma} BSC(\varphi, k) > 0 \\ \frac{SM(\varphi, \omega_j)}{\sum_{k \in \gamma} SM(\varphi, \omega_k)} \quad \text{if } \varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi \wedge \sum_{k \in \gamma} SM(\varphi, \omega_k) > 0 \wedge \\ \sum_{k \in \gamma} BSC(\varphi, k) = 0 \\ p(\mathfrak{C}_j) / \sum_{k \in \gamma} p(\mathfrak{C}_k) \quad \text{if } \varphi = 0 \vee \gamma = \phi \vee \sum_{k \in \gamma} SM(\varphi, \omega_k) = 0 \end{array} \right. \quad (C1.6)$$

□

ここに、 $q_j(\varphi)$ について、確率としての性質

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \sum_{j \in \gamma} q_j(\varphi) = 1 \quad (C1.7)$$

が成立していることに注意しておく。注意すべきは、更に、2つの公理 axiom 2, axiom 3 から、2性質

$$(イ) \text{ (T-不変性)} \quad \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in \gamma \subseteq J, q_j(T\varphi) = q_j(\varphi) \quad (C1.8)$$

$$(ロ) \text{ (正規直交生)} \quad j, i \in \gamma \Rightarrow q_j(\omega_i) = 1 \quad \text{if } i = j, = 0 \quad \text{if } i \neq j \quad (C1.9)$$

が成立していることである。

以上の準備の下で、次の定理C.1が成り立ち、更新分 $\Delta\psi_t$ が決定され、SS多段階認識の、式(1.3)の過程が収束する場合もあることがわかる。

【定理C.1】(更新分 $\Delta\psi_t$ の決定定理)

2パターン変数 $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}$ の汎関数 $G(\varphi, \psi) \in R$ が

$$G(\varphi, \psi) = \sum_{j \in \gamma} 2^{-1} \cdot q_j(\psi) \cdot \|\varphi - T\omega_j\|^2 \tag{C1.10}$$

と設定される場合を考えよう。「カテゴリ番号 $j \in \gamma \subseteq J$ にわたるその総和が1であるような、1より大きくない非負実数 $q_j(\psi)$ を重みに持つ各代表パターンモデル $T\omega_j, j \in \gamma$ の回りの最小自乗ノルム規準を与えるパターンが φ である」ような汎関数が $G(\varphi; \psi) \in R$ である。

実ヒルベルト空間 \mathfrak{H} では、更新分 $\Delta\psi_t$ は

$$\Delta\psi_t = -C(t) \cdot \left[\sum_{j \in \gamma} q_j(\psi_t) \cdot (\psi_t - T\omega_j, \eta) \right] \cdot \eta, t = 0, 1, 2, \dots, t, t+1, \dots \tag{C1.11}$$

である。よって、

$$(1) (\psi_t, \eta) > \sum_{j \in \gamma} q_j(\psi_t) \cdot (T\omega_j, \eta) \Rightarrow \Delta\psi_t < 0 \quad \therefore \psi_{t+1} < \psi_t \tag{C1.12}$$

$$(2) (\psi_t, \eta) < \sum_{j \in \gamma} q_j(\psi_t) \cdot (T\omega_j, \eta) \Rightarrow \Delta\psi_t > 0 \quad \therefore \psi_{t+1} > \psi_t \tag{C1.13}$$

が成り立つ。

【定理C.1の系1】(SS多段階認識の、式(1.3)の過程の収束定理)

ある認識段階 t で、

$$(\psi_t, \eta) = \sum_{j \in \gamma} q_j(\psi_t) \cdot (T\omega_j, \eta) \tag{C1.14}$$

が成立するならば、この認識段階 t で、更新分 $\Delta\psi_t$ について

$$\Delta\psi_t = 0 \tag{C1.15}$$

が成立し、逆も成り立つ。更新分 $\Delta\psi_t$ が0になる式(C1.15)が成立する認識段階 t で、不動点方程式

$$\psi_{t+1} = \psi_t \tag{C1.16}$$

が成り立つ。

(証明) $G(\varphi, \psi)$ の定義式(C1.10)から、

$$G(\psi_t + \alpha \cdot \eta; \psi_t) = \sum_{j \in \gamma} 2^{-1} \cdot q_j(\psi_t) \cdot \|\psi_t + \alpha \cdot \eta - T\omega_j\|^2 \tag{C1.17}$$

であるから、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial G(\psi_t + \alpha \cdot \eta, \psi_t)}{\partial \alpha} \\ &= \sum_{j \in \gamma} 2^{-1} \cdot q_j(\psi_t) \cdot [(\partial/\partial \alpha)\{\psi_t + \alpha \cdot \eta - T\omega_j\}, \psi_t + \alpha \cdot \eta - T\omega_j] + \\ & \quad (\psi_t + \alpha \cdot \eta - T\omega_j, (\partial/\partial \alpha)\{\psi_t + \alpha \cdot \eta - T\omega_j\}) \\ &= \sum_{j \in \gamma} 2^{-1} \cdot q_j(\psi_t) \cdot [(\eta, \psi_t + \alpha \cdot \eta - T\omega_j) + (\psi_t + \alpha \cdot \eta - T\omega_j, \eta)] \end{aligned} \tag{C1.18}$$

と計算される。よって、

$$\frac{\partial G(\psi_t + \alpha \cdot \eta, \psi_t)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j \in \gamma} 2^{-1} \cdot q_j(\psi_t) \cdot [(\eta, \psi_t - T\omega_j) + (\psi_t - T\omega_j, \eta)] \\
 &= \sum_{j \in \gamma} 2^{-1} \cdot q_j(\psi_t) \cdot 2 \cdot \operatorname{Re}[(\psi_t - T\omega_j, \eta)] \\
 &= \sum_{j \in \gamma} q_j(\psi_t) \cdot \operatorname{Re}[(\psi_t - T\omega_j, \eta)] \\
 &= \operatorname{Re}\left[\sum_{j \in \gamma} q_j(\psi_t) \cdot (\psi_t - T\omega_j, \eta)\right] \tag{C1.19}
 \end{aligned}$$

∴

$$\Delta\psi_t = -C(t) \cdot \operatorname{Re}\left[\sum_{j \in \gamma} q_j(\psi_t) \cdot (\psi_t - T\omega_j, \eta)\right] \cdot \eta \tag{C1.20}$$

が得られ，実ヒルベルト空間 \mathfrak{H} では，式 (C1.11) の成立がわかった．最後に，2式 (C1.12)，(C1.13) の成立は，式 (C1.24) から明らかである．

(系1の証明)

式 (C1.15) \Rightarrow 式 (C1.14) の成立を示そう．

$C(t), \eta$ をいずれも正と設定しているから，式 (C1.20) から，

$$\Delta\psi_t = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\left[\sum_{j \in \gamma} q_j(\psi_t) \cdot (\psi_t - T\omega_j, \eta)\right] = 0 \tag{C1.21}$$

を得る．よって，実ヒルベルト空間 \mathfrak{H} では，更新分 $\Delta\psi_t$ について

$$\Delta\psi_t = 0 \Rightarrow \sum_{j \in \gamma} q_j(\psi_t) \cdot (\psi_t - T\omega_j, \eta) = 0 \tag{C1.22}$$

$$\therefore \sum_{j \in \gamma} q_j(\psi_t) \cdot (\psi_t, \eta) = \sum_{j \in \gamma} q_j(\psi_t) \cdot (T\omega_j, \eta) \tag{C1.23}$$

を得，最後の等式 (C1.23) に等式 (C1.7) を考慮すれば式 (C1.14) を得る．

次に，式 (C1.14) \Rightarrow 式 (C1.15) の成立を示そう．

$$\begin{aligned}
 \Delta\psi_t &= -C(t) \cdot \sum_{j \in \gamma} q_j(\psi_t) \cdot (\psi_t - T\omega_j, \eta) \cdot \eta \quad \because \text{式 (C1.11)} \\
 &= -C(t) \cdot \left[\sum_{j \in \gamma} q_j(\psi_t) \cdot (\psi_t, \eta) - \sum_{j \in \gamma} q_j(\psi_t) \cdot (T\omega_j, \eta) \right] \cdot \eta \\
 &= -C(t) \cdot \left[(\psi_t, \eta) - \sum_{j \in \gamma} q_j(\psi_t) \cdot (T\omega_j, \eta) \right] \quad \because \text{式 (C1.7)} \\
 &= 0 \quad \because \text{式 (C1.14)}
 \end{aligned} \tag{C1.24}$$

を得，式 (C1.15) の成立がわかる．

式 (C1.15) を式 (C1.2) に代入すれば，式 (C1.16) の成立がわかる． □

C2. 正確なSS多段階認識の過程

C2.1 式 (1.3) のSS多段階認識の過程が停止するかどうかの判定

本付録Cの結論は次のように説明される．

2式 (C1.12)，(C1.13) を勘案すれば，不動点方程式 (C1.16) が成立する方向に，式 (C1.12) の

ϕ_t は ϕ_{t+1} へと更新されていることが理解できる。処理の対象とする問題のパターン（入力パターン） $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ についての、式 (1.3) のSS多段階認識の過程が停止するかどうかの終了基準（termination criterion）として、式 (C1.14), 或いは、更に強い不動点方程式 (C1.16) 或いは、更に強い以下の不動点方程式 (C2.1) を採用できる。

つまり、ある認識段階 t で、不動点方程式

$$\phi_t = \sum_{j \in \gamma} q_j(\phi_t) \cdot T\omega_j \tag{C2.1}$$

が成立するならば、この認識段階 t で、式 (C1.14) が成立することに注意しよう。正確には、この (C2.1) の ϕ_t のモデル $\phi'_t = T\phi_t, t = 1, 2, \dots$ を生成するのがSS多段階認識 [B3], [B4] の過程

$$\phi'_0 = T\varphi, \phi'_1, \phi'_2, \dots, \phi'_t, \phi'_{t+1}, \dots \tag{C2.2}$$

である。

SS多段階認識の過程が第 $j \in \gamma \subseteq J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j の代表パターン ω_j のモデル $T\omega_j$ を不動点に持つことを指摘する次の定理C.2が成り立つ。

[定理C.2] (SS多段階認識の、式 (1.3) の過程の不動点定理)

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \gamma} q_j(\phi_t) \cdot T\omega_j = \\ \left\{ \begin{array}{ll} T\omega_j & \text{if } \phi_t = T\omega_j \wedge j \in \gamma = \\ \sum_{j \in \gamma} [p(\mathfrak{C}_j) / \sum_{k \in \gamma} p(\mathfrak{C}_k)] \cdot T\omega_j & \text{if } \sum_{j \in \gamma} SM(\phi_t, \omega_j) = 0 \end{array} \right. \end{aligned} \tag{C2.3}$$

が成り立つ。

$$(\text{証明}) \quad q_j(\phi_t) = 1 \quad \text{if } \phi_t = T\omega_j \wedge j \in \gamma \tag{C2.4}$$

が axiom 2の (i), (ii) と axiom 3の (i) とから、成り立つからである。□

定理C.2は次の事実を指摘している。

$$\phi_t = T\omega_j \wedge j \in \gamma \tag{C2.5}$$

ならば、写像

$$f(\bullet) = \sum_{j \in \gamma} q_j(\bullet) \cdot T\omega_j : \Phi \rightarrow \Phi \tag{C2.6}$$

は不動点 $T\omega_j$ を持ち、式 (C2.2) のSS多段階認識の過程は第 $j \in \gamma \subseteq J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j の代表パターン ω_j のモデル $T\omega_j$ を出力する。ここに、axiom 1の (iii) の後半 $T \cdot T = T$ から、

$$\phi_t = T\omega_j \Rightarrow T\phi_t = \phi_t = T\omega_j \tag{C2.7}$$

であることに注意しておく。しかしながら、 $\phi_t = T\omega_j$ であっても $j \notin \gamma$ ならば、写像 $f(\bullet)$ は平均化パターンモデル

$$\sum_{j \in \gamma} [p(\mathfrak{C}_j) / \sum_{k \in \gamma} p(\mathfrak{C}_k)] \cdot T\omega_j \tag{C2.8}$$

を出力してしまう。何故ならば、axiom 2の (i), (ii) から、

$$\phi_t = T\omega_j \wedge j \notin \gamma \tag{C2.9}$$

ならば、

$$\sum_{j \in \gamma} SM(\phi_t, \omega_j) = 0 \tag{C2.10}$$

が成立しているからである。

C2.2 式 (1.3) の多段階認識の過程と同値なこれまでのSS多段階認識過程

Axiom 1の (ii), (iii) の2後半を勘案すれば，上述で説明された多段階認識過程は以下の多段階認識の過程と一致することがわかる。

実は，処理の対象とする問題のパターン（入力パターン） $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ についてのSS多段階認識の過程は，カテゴリ番号リスト $\mu_t \subseteq J$ をその都度，帰納推理の働きで選んで決まる以下の構造受精作用素 $A(\mu)$ を用いて，

$$\begin{aligned} \psi_{t+1} &= TA(\mu_t)T\psi_t, t = 0, 1, 2, \dots \\ \text{where } \psi_t|_{t=0} &= T\varphi \end{aligned} \quad (\text{C2.11})$$

と生成される式 (1.3) の過程であり，このパターンモデル生成過程の終了規準として，不動点方程式

$$\psi_{t+1} = TA(\mu_t)T\psi_t = \psi_t \quad (\text{C2.12})$$

の成立する認識段階番号 t で停止することを採用している。この不動点方程式 (C2.12) の成立する ψ_t が外界を写し取ったパターン（入力パターン） φ の表象である。構造受精作用素と称せられる写像 $A(\mu_t)$, where $\mu_t \subseteq J$ は3式 (2.8)~(2.10) で定義されている。

C3. 問題点

これまでの研究では，次の2事項 (1), (2) については，論を展開していないことを指摘しなければならない。

(1) $\eta (\in \mathfrak{H})$ の選定

式 (C1.5) の更新分 $\Delta\psi_t$ で用いられている正值パターン $\eta \in \mathfrak{H}$ は更新の方向を決定する故，その選定は適切になされなければならない。式 (C2.3) の $\sum_{j \in \gamma} q_j(\psi_t) \cdot T\omega_j$ を考慮し，式 (C2.8) の平均化パターンモデルを選定する方法，つまり，

$$\eta = \max\{0, \sum_{j \in \gamma} [p(\mathfrak{C}_j) / \sum_{k \in \gamma} p(\mathfrak{C}_k)] \cdot T\omega_j\} \quad (\text{C3.1})$$

と選定するのは，最も簡単な方法である。大いに研究の対象としなければならない事項である。

(2) $C(t) > 0$, where $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 0$ の選定

式 (C1.5) の更新分 $\Delta\psi_t$ で用いられている $C(t) > 0$, where $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 0$ をどう選定するかについては，

$$(\#1) C(t) = a \cdot \frac{1}{t+1}, a > 0 \quad (\text{C3.2})$$

$$(\#2) C(t) = \exp(-a^2 \cdot t^2), a > 0 \quad (\text{C3.3})$$

$$(\#3) C(t) = a \cdot \log_e(1 + b \cdot \frac{1}{t+1}), a, b > 0 \quad (\text{C3.4})$$

などが考えられる。

(3) $\gamma (\subseteq J)$ の選定

式 (C2.11) の，SS多段階認識の第 $t+1 (= 1, 2, \dots)$ 段階のパターンモデル ψ_{t+1} が式 (C2.1) の，最急降下法で得られるパターン ψ_t のモデル $T\psi_t$ に一致することを，つまり，等式

$$T\psi_{t+1} = T(\sum_{j \in \gamma} q_j(\psi_t) \cdot T\omega_j), \text{ where } \gamma = \mu_t \subseteq J \quad (\text{C3.5})$$

の成立を示しただけであり、候補カテゴリの番号リスト $\gamma = \mu_t \subseteq J$ を選定する方法はこれからの研究の対象である。全カテゴリ集合 J に設定すること、つまり、

$$\gamma = \mu_t = J, t = 0, 1, 2, \dots \tag{C3.6}$$

は最も簡単な選定法であるが、この選定法は、入力パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属する候補カテゴリについて、認識システム RECOGNITRON が全く無知の場合の非常手段と考えるべきであろう。

付録D. 定理4.2の証明

(イ) について： $T\varphi = 0$ のとき、 $T' \cdot T\varphi = 0$ の成立は補助定理4.1の(ii)で示されている。

(ロ) について： b を任意の正定数とする。

明らかに、連立1次方程式(4.17)の性質から、式(4.22)の各 $a'_j(T\varphi) = a'_j(\varphi)$ につき、

$$\forall j \in J, a'_j(b \cdot T\varphi) = b \cdot a'_j(T\varphi) \tag{D.1}$$

が成り立つことがわかる。

(ロ-1) $\sup_{k \in J} |a'_k(T\varphi)| = 0$ のとき

$$\forall k \in J, a'_k(T\varphi) = 0 \quad \therefore \quad u'(T\varphi, k) = 0 \quad \therefore \quad T' \cdot T\varphi = 0$$

がわかる。同様にして、式(D.1)適用して、

$$\forall k \in J, a'_k(b \cdot T\varphi) = b \cdot 0 = 0 \quad \therefore \quad u'(b \cdot T\varphi, k) = 0 \quad \therefore \quad T' \cdot (bT\varphi) = 0.$$

(ロ-2) $\sup_{k \in J} |a'_k(T\varphi)| > 0$ のとき

$$\begin{aligned} \forall j \in J, u'(b \cdot T\varphi, j) &= \frac{a'_j(b \cdot T\varphi)}{\sup_{k \in J} |a'_k(b \cdot T\varphi)|} \\ &= \frac{a'_j(T\varphi)}{\sup_{k \in J} |a'_k(T\varphi)|} \quad \therefore \quad \text{式(D.1)} \\ &= u'(T\varphi, j) \end{aligned}$$

を得、よって

$$T' \cdot (bT\varphi) = T' \cdot T\varphi.$$

(ハ) について

先ず、 T を強制的に恒等作要素 I とおくと、

$$a'_j(\varphi) = a_j(\varphi), j \in J$$

$$u'(\varphi, j) = a'_j(\varphi) / \sup_{k \in J} |a'_k(\varphi)|$$

$$T'\varphi = \sum_{j \in J} u'_j(\varphi, j) \cdot \omega_j$$

であることに注意しておく。ここで、 η を $\eta \equiv T'\varphi$ とおく

(ハ-1) $\eta = 0$ のとき

$T=I$ とおいた連立1次方程式(4.17)を解けば

$$\forall j \in J, a_j(\eta) = 0$$

を得，

$$\forall j \in J, u'(\eta, j) = 0 \quad \therefore \quad T'\eta = 0 = \eta.$$

(ハ-2) $\eta \neq 0$ のとき

$T=I$ とおいた連立1次方程式(4.17)を解くと，各 $a_j(\eta)$ は

$$a_j(\eta) = [1+b^{-1}]^{-1} \cdot u'(\varphi, j), j \in J$$

であることがわかる。よって，

$$\sup_{k \in J} |a_k(\eta)| = [1+b^{-1}]^{-1} \cdot \sup_{k \in J} |u'(\varphi, k)| = [1+b^{-1}]^{-1}$$

である。従って，

$$\forall j \in J, u'(\eta, j) = u'(\varphi, j) \quad \therefore \quad T'\eta = \eta.$$

(二) について：

補助定理4.2で示されている。つまり，任意の $m \in J$ につき， $T\varphi$ を $T\varphi = T\omega_m$ とおくと，

$$T' \cdot T\varphi = T\varphi = T\omega_m \neq 0.$$

□

(著者 鈴木昇一，論文題目 万能性類似度関数の採用によるSS多段階認識の改良，文教大学情報学部情報研究no.31投稿論文，投稿年月日 2004年3月3日(水))