数理形態学の新しい２つのパターン変換作用素を用いた多段階想起認識

鈴木　昇一

Multi-stage Associative Recognition of Patterns with the Help of New Two Morphological Transformations of Patterns

Shoichi Suzuki

要　約

処理の対象となる問題の，すべてのパターンφの集まりを記号Φで表す．パターンモデル$T\varphi$とは原パターンφの標準形であって，原パターンφと同じように見えたり，聞こえたりするようなものである．このようなパターンモデルを出力する写像

$$T:\Phi \to \Phi$$

をモデル構成作用素という．モデル構成作用素Tがパターンφの変形を吸収できるためには，SS理論［B3]，［B4］によれば，(1）零元不動点性，(2）正定数倍不変性，(3）ベキ等性，(4）非零写像性という4性質を少なくとも満たさなければならない．本研究では，モデル構成作用素Tが基本的に使われる．

処理の対象となるパターンφが帰属しているカテゴリ（第$j \in J$番目のカテゴリ）$\mathfrak{C}_j$の番号（カテゴリ番号）jの，すべての集まりを記号Jで表す．SS多段階連想形認識［B3]，［B4⟩ の過程を実現するには，パターンからパターンへ変換する写像（パターン想起変換）の列が帰納的推理で選ばれることが必要である．このパターン想起変換として使われているのが，従来の，候補カテゴリ番号のリスト$\mu\,(\subseteq J)$を助変数に持つ構造受精作用素

$$A\,(\mu):\Phi \to \Phi,\ \mu \subseteq J$$

である．このパターン想起変換$A\,(\mu)$の代りに，数理形態学に基づき，新しい構造受精作用素

$$D\,(\mu):\Phi \to \Phi,\ \mu \subseteq J$$

$$E\,(\mu):\Phi \to \Phi,\ \mu \subseteq J$$

などが提案される．SS多段階想起認識の働きの実現に役立つ“パターンモデルを変換する2つの写像$D\,(\mu), E\,(\mu)$”は，新しいニューラルネットへの，数理形態学に基づいた移行で得られたものである．つまり，パターン変換$D\,(\mu), E\,(\mu)$は従来のニューラルネットにおいて，総和演算$\sum$が最大値選択演算max，或いは，最大値選択演算minに置き換えられ，乗算$\times$が加算$+$に置き換えられて得られたものである．２つの構造受精作用素$D\,(\mu), E\,(\mu)$につき，べき等性

$D(\mu)D(\mu)=D(\mu),\ E(\mu)E(\mu)=E(\mu)$

が成り立つことが基本的である．各カテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の持つ諸性質を典型的に代表している代表パターン ω_j のモデル $T\omega_j$ の集合（代表パターンモデルの集合）

$T\cdot\Omega\equiv\{T\omega_j \mid j\in J\}$

の持つ情報と比較しながら得られるパターン

$(D(\mu)\varphi)(x),\ x\in M'$

はパターン $\varphi(x),\ x\in M'$ の欠損箇所を補ったパターンとなつており，また，同様に比較しながら得られるパターン

$(E(\mu)\varphi)(x),\ x\in M'$

はパターン $\varphi(x),\ x\in M'$ の冗長箇所を取り除いたパターンとなつている．

本研究で解明された $D(\mu),\ E(\mu)$ の諸性質に基づいて，SS多段階想起認識の働きへのその応用が簡単に研究される．２つの構造受精作用素 $D(\mu),\ E(\mu)$ はモデル構成作用素で両側を挟んだ形式 $TD(\mu)T,\ TE(\mu)T$ で使われるが，この２つの構造受精変換 $TD(\mu)T,\ TE(\mu)T$ には，SS理論［B1］～［B4｝での多段階連想形認識の働きを改良する働きがあることが期待される．また，２つの構造受精作用素 $D(\mu),\ E(\mu)$ を用い，パターンからその形状を特徴付けるパターンスペクトルが抽出され得ることが示される．

キーワード

（1）数理形態学　（2）パターンの標準形　（3）想起変換
（4）多段階想起認識　（5）パターンスペクトル

Abstract

We denote a set of all patterns in question to be processed by a symbol Φ. $T\varphi$ called a correspomding Pattern-model of an original pattern φ is a canonical form of φ. If we see or hear model $T\varphi$, we have a sense of seeing or hearing the original pattern φ as though the model $T\varphi$ were the original pattern φ. The mapping

$T:\Phi\rightarrow\Phi$

is called a model-construction operator whose output is the pattern-model. T that can absorb some deformation which appears in patterns must four properties of（1）having 0 as its fixed-point,（2）an invariance under a multiplication by any positive number,（3）idempotency, and（4）non-zero mapping［B3］,［B4］. In this paper T is used to pursue an argument to its logical conclusion.

A symbol J is used to denote a set of all numbers of categories to one（for example the jth category $\mathfrak{C}_j$）of which a pattern in question belongs. In order to realize a multi-stage associative recognition-process［B3］,［B4］proposed by S. Suzuki, it is necessary to select by an inductive reasoning a sequence of associative transformations to convert the t-th pattern-model into the（t+1）th pattern-model. There is as such an associative transformation a conventional structural fertilization operator

$A(\mu):\Phi\rightarrow\Phi,\ \mu\subseteq J$

having as a parameter $\mu(\subseteq J)$ that seems to be a list of numbers of categories to be offered as a candinate for category. In stead of $A(\mu)$, two new structural fertilization operators

$D(\mu): \Phi \to \Phi,\ \mu \subseteq J$

$E(\mu): \Phi \to \Phi,\ \mu \subseteq J$

are presented here based on the mathematical morphology.

Two operators $D(\mu)$ and $E(\mu)$ which will serve to transform the pattern-models and may be serviceable to a realization of SS multi-stage associative recognition was acquired upon receiving a hint from shifting to a new neural networks according to mathematical morphology. That is to say, $D(\mu)$ and $E(\mu)$ could be gotten by respectively replacing a sum total operation Σ and a multiplication $\times$ which appeared in the conventional neural net with the maximum operation or the minimum operation and an addition $+$. It is fundamentally important that an idempotency

$D(\mu)D(\mu) = D(\mu),\ E(\mu)E(\mu) = E(\mu)$

of $D(\mu)$ and $E(\mu)$ holds good. The pattern

$(D(\mu)\varphi)(x),\ x \in M'$

may be made up for the loss of pattern $\varphi(x),\ x \in M'$, compared with an information of a set $T \cdot \Omega \equiv \{T\omega_j \mid j \in J\}$ of prototypical models $T\omega_j s$ of prototypical patterns ω_j s, where is typical of many properties owned by the jth category $\mathfrak{C}_j$. The pattern

$(E(\mu)\varphi)(x),\ x \in M'$

may remove the redundancy from the pattern $\varphi(x),\ x \in M'$ under similar circumstances.

Applications of some properties of $D(\mu)$ and $E(\mu)$ to SS multi-stage associative recognition are briefly explained. $D(\mu)$ and $E(\mu)$ are used in that place taking forms $TD(\mu)T$ and $TE(\mu)T$ on the right-hand and left-hand sides of which T is put. A faculties of SS multi-stage associative recognition can become better with the help of $TD(\mu)T$ and $TE(\mu)T$. Two kinds of pattern-spectra by which attributes of the pattern in question are characterized can be defined by the use of two operators $D(\mu)$ and $E(\mu)$.

Key Words:（1）mathematical morphology　（2）canonical form of patterns　（3）associative transform of patterns　（4）multi-stage associative recognition　（5）pattern-spectrum

1.　まえがき

音声，画像などのパターンφから情報を抽出するディジタルフィルタとして，ラプラシアン（Laplacian），離散フーリェ変換（discrete Fourier transform），離散コサイン変換（discrete cosine transform），離散ウェーブレット変換（discrete wavelet transform）などがよく使われるが［A3］，いずれも重畳の法則が成立する線形な変換なので，連想的働き（想起的な働き）を用いて必要な情報を検索し再生する連想形記憶システムなどの上首尾な実現に不向きな場合が多い．因みに，文献［B17］の付録2には，顔画像にラプラシアンを施して得られる画像がある．そのため，数理形態学（mathematical morphology）［A1］で考案されている非線形な変換を導入し，連想形記憶システムの性能を改善することが考えられる．

最大値選択操作，最小値選択操作，算術和，算術差の4つの演算のみを有限回使ってパタ～ンからパターンへの変換を行う処理は数理形態学（mathematical morphology）に基づいているといわれる．

処理の対象とする問題のパターンφの集合をΦで表すとしよう．S. Suzukiは，万能性認識システムRECOGNITRONがモデル$T\varphi \in \Phi$を見たり聞いたりしたならば（$T\varphi$を感性的に受け取ったならば），

原パターン$\varphi \in \Phi$と同じように見えたり聞こえたりすること（原パターンφと錯覚し原パターンφと同じように感性的に受容すること）だと解釈可能なパターンモデル$T\varphi \in \Phi$を考案している．パターンモデル$T\varphi \in \Phi$は座標変換されていたり，雑音が含まれていたりして変形があってもよいパターンφの標準形（canonical form）である．標準形に直す手段により，以後の認識処理が容易になると共に，良好な認識の性能が保証されることがある．

SS理論［B1］〜［B4］での，axiom 1を満たす対【Φ, T】での，後半の写像

$$T : \Phi \to \Phi \tag{1.1}$$

はパターン$\varphi \in \Phi$のパターンモデル$T\varphi \in \Phi$を生成するが，この写像Tをモデル構成作用素（model-construction operator）という．既に，数理形態学のopening operator，closing operatorに対応し，モデル構成作用素TをS. Suzukiは２種類構成しており（文献［B3］の2.5.2項，或いは，文献［A4］），この2種類のTに関し計算機シミュレーション結果も得ている（文献［B17］の付録６）．

パターンφが入力されたことが契機になって，記憶内容（各カテゴリの性質を典型的に備えている代表パターンのモデルの集合）を活性化し，入力パターンφの構造を生成する働きを備えているパターン変換（パターンからパターンへの想起変換）をSS理論［B1］〜［B4｝では，構造受精作用素（structural fertilization operator）という．構造受精作用素はパターンからパターンへの想起変換である．本論文では，連想形多段階認識の働きに役立つ数理形態学上の２種類の構造受精作用素

$$D(\mu) : \Phi \to \Phi,\ \mu \subseteq J \tag{1.2}$$

$$E(\mu) : \Phi \to \Phi,\ \mu \subseteq J \tag{1.3}$$

が新しく提案され，その諸性質が解明され，その応用が簡単に研究される．

２つのパターン想起変換$D(\mu), E(\mu)$がどのように得られるかを見るため，数理形態学では，従来のニューラルネットの稼動方程式がどのように表されるかを説明しよう．

５記号$u_i(t), x_i(t), w_{ij}, h_i, f_i$を

$u_i(t)$：時刻tでの，第$i\ (=1, 2, \cdots, n)$番目のニューロンの内部状態　(1.4)

$x_i(t)$：時刻tでの，第$i\ (=1, 2, \cdots, n)$番番目のニューロンの出力　(1.5)

w_{ij}：第$j\ (=1, 2, \cdots, n)$番目のニューロンから第$i\ (=1, 2, \cdots, n)$番目のニューロンへの結合の強さ　(1.6)

h_i：第$i\ (=1, 2, \cdots, n)$番目のニューロンの閾値　(1.7)

f_i：第$i\ (=1, 2, \cdots, n)$番目のニューロンの発火関数　(1.8)

とすると，離散時刻$t = 0, 1, 2, \cdots$で動作する従来の，n個のニューロンからなる標準のニューラルネット（standard neural network）の稼動方程式は，

$$u_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \cdot x_j(t) - h_i,\ i = 1, 2, \cdots, n \quad \text{（内部活動状態の方程式）} \tag{1.9}$$

$$x_i(t+1) = f_i(u_i(t+1)),\ i = 1, 2, \cdots, n \quad \text{（出力の方程式）} \tag{1.10}$$

と表わされる．

The basic goal of these neural networks which have been welcome to the use of associative memories is the retrieval of complete stored patterns from noisy or incomplete input pattern keys.

a set of complete stored patternsは重みw_{ij}の組，閾値h_iの組に学習の働きなどで記憶され，pattern keyは初期値ベクトル$x_i(0), i = 1, 2, \cdots, n$に設定される．

上記の標準のニューラルネットに対し，数理形態学に基づいたニューラルネット（morphological neural network）が考えられ，その稼動方程式は，

（イ）

$$u_i(t+1)=\max_{i=1\sim n}[w_{ij}+x_j(t)],\ i=1,2,\cdots,n \quad \text{（内部活動状態の方程式）} \tag{1.11}$$

$$x_i(t+1)=f_i(u_i(t+1)),\ i=1,2,\cdots,n \quad \text{（出力の方程式）} \tag{1.12}$$

か，或いは，

（ロ）

$$u_i(t+1)=\min_{i=1\sim n}[w_{ij}+x_j(t)],\ i=1,2,\cdots,n \quad \text{（内部活動状態の方程式）} \tag{1.13}$$

$$x_i(t+1)=f_i(u_i(t+1)),\ i=1,2,\cdots,n \quad \text{（出力の方程式）} \tag{1.14}$$

で表わされる．上記の標準のニューラルネットから，数理形態学に基づいたニューラルネットへの移行にあたり，総和演算$\sum$が最大値選択演算max，或いは，最大値選択演算minに置き換えられ，乗算×が加算＋に置き換えられていることに注意する．この種の置き換えにより，２つのパターン想起変換$D(\mu)$, $E(\mu)$が得られる．

尚，付録Aには，SS理論［B1］～［B4］の骨格を成す4 axiom 1～4が解説されている．

2.　多段階の連想形認識過程で使われるパターン変換としての２つの作用素$D(\mu)$, $E(\mu)$

本章では，収束先がある代表パターンのモデルになる従来のSS多段階の連想形認識過程が説明され（2.1節），このSS多段階連想形（想起形）認識の働きの実現に役立つ“パターンモデルを変換する作用素$D(\mu)$, $E(\mu)$を従来の多段階の連想形認識過程へ応用する方法”が説明される（2.2節）．パターンモデル$T\varphi$はパターンφの標準形であるが，多段階連想形認識を実現するために，２つの構造受精作用素$D(\mu)$, $E(\mu)$をモデル構成作用素Tで両側を挟んだ形式$TD(\mu)T$, $TE(\mu)T$で使うのか，その理由が簡単に以下で説明される（2.3節）．

2.1　多段階の連想形認識過程

2.1.1　多段階の連想形（想起形）認識過程の収束先

第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の持つ諸性質を典型的に備えている代表パターンをω_jで表す．処理の対象となる問題のパターンφの集まりΦと，すべての代表パターンω_jの，１次独立な系

$$\Omega\equiv\{\omega_j\mid j\in J\}(\subset\Phi) \tag{2.1}$$

とを導入する．処理の対象となる問題のパターンφが帰属しているカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の番号（カテゴリ番号）jの集まりが記号Jで表されている．．すべてのカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の集合

$$\mathfrak{C}(J)\equiv\{\mathfrak{C}_j\mid j\in J\} \tag{2.2}$$

と，各カテゴリ$\mathfrak{C}_j$の出現確率$p(\mathfrak{C}_j)$が

$$\lceil\forall j\in J,\ 0<p(\mathfrak{C}_j)<1]\wedge\sum_{j\in J}p(\mathfrak{C}_j)=1 \tag{2.3}$$

を満たすように導入されているとしよう．

代表パターンω_jのモデル$T\omega_j$の集合

$$T\cdot\Omega\equiv\{T\omega_j\mid j\in J\}(\subset T\cdot\Phi\equiv\{T\varphi\mid\varphi\in\Phi\}) \tag{2.4}$$

が認識システムが基本的に蓄えている１次独立な記憶内容とする．パターンφが入力されたことが契

機になって，記憶内容$T\cdot\Omega$を活性化し，入力パターンφの構造を帰納的に推論することを考えよう．それには，パターン変換

$$A_t : \Phi \to \Phi \tag{2.5}$$

の列

$$A_0, A_1, \cdots, A_t, \cdots \tag{2.6}$$

を帰納推理の働きで発見しながら，得られるパターンモデルφ_tの列

$$\varphi \to \varphi_0 \equiv T\varphi \to \varphi_1 \equiv TA_0T\varphi_0 \to \varphi_2 = TA_1T\varphi_1 \to \cdots \to \varphi_{t+1} \equiv TA_tT\varphi_1 \to \cdots \tag{2.7}$$

の収束先

$$\varphi_\infty \equiv \lim_{t\to\infty} \varphi_t \tag{2.8}$$

が推論された結果（$T\cdot\Omega$の内容が検索された結果）と考えればよい．帰納的に推論された結果φ_∞は入力パターンφの構造が再生されたパターンモデルであり，パターンφが入力されたことが契機になって，記憶内容$T\cdot\Omega$から呼び出され想起されたパターンモデルである．

式（2.5）のパターンの変換列において登場している各パターン変換A_tは，SS理論［B1］～［B4］では，構造受精作用素（structural fertilization operator）といわれる．構造受精作用素はパターンからパターンへの想起変換である．

もし，収束先$\varphi_\infty \equiv \lim_{t\to\infty} \varphi_t$が存在し，それがある代表パターン$\omega_j$のモデル$T\omega_j$になっているなら，つまり，収束条件式

$$\exists j \in J, \varphi_\infty = T\omega_j \tag{2.9}$$

が成立するならば，入力パターンφは，構造受精変換TA_tTの列

$$TA_tT : \Phi \to \Phi, t = 0, 1, 2, \cdots, \tag{2.10}$$

の働きで，$T\omega_j$として再生されたことになり，第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に認識され，式（2.7）のパターンモデルの列は連想（想起）の働きで得られた多段階の連想形（想起形）認識過程であると解釈されてよいだろう．

2.1.2　処理の対象とする問題のパターンの集合Φの表示

見たり聞いたりしたならば（$T\varphi$を感性的に受け取ったならば），原パターン$\varphi \in \Phi$と同じように見えたり聞こえたりするパターンモデル$T\varphi$については，４性質

①（零元不動点性；axiom 1の（ｉ））

$$\varphi = 0 \in \Phi \text{ については，} T\varphi = 0. \tag{2.11}$$

②（正定数倍不変性；axiom 1の（ⅱ）の後半）

任意の正実定数aに対し，

$$\forall \varphi \in \Phi, T(a\cdot\varphi) = T\varphi. \tag{2.12}$$

③（ベキ等性；axiom 1の（ⅲ）の後半）

$$\forall \varphi \in \Phi, T(T\varphi) = T\varphi. \tag{2.13}$$

④（非零写像性；axiom 1の（ⅳ））

$$\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0 \tag{2.14}$$

を満たしていなければならないし，対$[\Phi, T]$はaxiom 1を満足していなければならないので，処理の対象とする問題のパターンの集合Φは，集合論的再帰領域方程式

$$\Phi = \Phi_B \cup T\cdot\Phi \cup R^{++\cdot}\cdot\Phi \tag{2.15}$$

を満たさなければならない．集合論的再帰領域方程式（2.15）を解いて，パターン集合Φ は

$$\Phi = R^{++}\cdot[\,\Phi_B \cup T\cdot\Phi_B\,] \tag{2.16}$$

と表されることになる．ここに，$\Phi_B\,(\ni 0)$ はパターンと判明している元の集合（基本領域；basic domain）であり，R^{++} は正実数全体の集合である．

2.1.3　従来の構造受精作用素$A\,(\mu)$の，２つのパターン変換$D\,(\mu), E\,(\mu)$による置き換え

多段階連想形認識の過程を実現することを目的としてパターンを変換するのに使われる従来の構造受精作用素［B3］，［B4］

$$A\,(\mu): \Phi \to \Phi,\ \mu \subseteq J \tag{2.17}$$

は，式（2.6）のパターンの変換列において登場している式（2.5）のパターン変換A_t の１例である．

本論文では，記憶$T\cdot\Omega$ 内の各パターンω_j の各モデル$T\omega_j$ を導入し，可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$ の元として表された入力パターンφ を再生し，然も，入力パターンφ が帰属するカテゴリ$\mathfrak{C}_j$ を決定できる連想形多段階認識の働き［B3］，［B4］での，２式（1.2），（1.3）のパターン変換$D\,(\mu), E\,(\mu)$が提案され，その諸性質と，想形多段階認識の働きへの応用が研究される．

2.2　連想形多段階認識の働きへの，$D\,(\mu), E\,(\mu)$の利用方法

axiom 2を満たす類似度関数

$$SM: \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \le s \le 1\} \tag{2.18}$$

と，axiom 3を満たす大分類関数

$$BSC;\ \Phi \times J \to \{0,\ 1\} \tag{2.19}$$

とを用意する［B3］，［B4］．

処理の対象とする問題のパターン（入力パターン）$\varphi \in \Phi$ が与えられたとき，

（1）（初期化段階；initialization）$\varphi_t\,|_{t=0} \equiv T\varphi$ （2.20）

の下で，

（2）（帰納推理化段階；recursion）

$$\varphi_{t+1} \equiv T\,(A\,(\mu_t)\,(T\varphi_t))\,(= TA\,(\mu_t)\,T\varphi_t)$$

$$\equiv T[\sum_{j\in\mu_t} SM\,(T\varphi_t,\ \omega_j)\cdot BSC\,(T\varphi_t,\ j)\cdot T\omega_j\,]$$

$$,\ t = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{2.21}$$

を経て，パターンモデルφ_t の列

$$\varphi_t\,(\in\varphi),\ t = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{2.22}$$

を求めていく．φ_t は，入力パターン$\varphi\in\Phi$ の連想形認識の過程において，第t 段階で想起されたパターンモデルである．登場している列

$$\mu_t\,(\subseteq J),\ t = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{2.23}$$

について説明しておこう．多段階連想形認識の過程の第t 段階で，φ_t が帰属するであろう候補カテゴリの番号のリスト$\mu_t\,(\subseteq J)$ が帰納推理の働きで，選ばれなければならない．通常，減少列に，つまり，

$$\mu_0 \supseteq \mu_1 \supseteq \mu_2 \supseteq\cdots\supseteq \mu_t \supseteq \mu_{t+1} \supseteq\cdots\supset \phi \ \text{（the empty set）} \tag{2.24}$$

が成立するように選ばれる．大抵の場合，収束条件式（2.9）の場合と異なり，収束条件を

（3）（終了段階；termination）

不動点方程式（fixed-point equation）

$$\varphi_{t+1}\,(= TA\,(\mu_t)\,T\varphi_t) = \varphi_t \tag{2.25}$$

の成立する第 t 連想段階の φ_t で終了

と設定すると，

$$\exists j \in J,\ \varphi_t = T\omega_j \tag{2.26}$$

を満たす有限の非負整数 t が，不等式

$$0 \le t \le |J| - 1 \tag{2.27}$$

が満たされる形で存在する［B26］．

２つの構造受精作用素 $D(\mu), E(\mu)$ による多段階連想形認識を実現するためには，これまでの，式(2.17)の構造受精作用素 $A(\mu)$ の代りに，２つの構造受精作用素 $D(\mu), E(\mu)$ を使うことになる．然も，２つの構造受精作用素 $D(\mu), E(\mu)$ をモデル構成作用素で両側を挟んだ形式 $TD(\mu)T$, $TE(\mu)T$ で使わなければならない．この２つの構造受精変換 $TD(\mu)T, TE(\mu)T$ には，SS理論［B1］～［B4］での多段階連想形認識の働きを改良する働きがあることが期待される．

式（2.21）の，第 $t+1$ 段階の想起パターンモデル φ_{t+1} に登場している構造受精変換 $TA(\mu_t)T$ の代りに，

$$TD(\mu)T,\quad TD(\mu)A(\mu)D(\mu)T,\quad TE(\mu)A(\mu)D(\mu)T \tag{2.28}$$

$$TE(\mu)T,\quad TE(\mu)A(\mu)E(\mu)T,\quad TD(\mu)A(\mu)E(\mu)T \tag{2.29}$$

$$TD(\mu)E(\mu)T,\quad TD(\mu)E(\mu)A(\mu)D(\mu)E(\mu)T \tag{2.30}$$

$$TE(\mu)D(\mu)T,\quad TE(\mu)D(\mu)A(\mu)E(\mu)D(\mu)T \tag{2.31}$$

$$TE(\mu)D(\mu)A(\mu)D(\mu)E(\mu)T \tag{2.32}$$

$$TD(\mu)E(\mu)A(\mu)E(\mu)D(\mu)T \tag{2.33}$$

などの変換を用いることができる根拠を，また，

$$T[D(\mu) - E(\mu)]T \tag{2.34}$$

$$T[E(\mu)D(\mu) - D(\mu)E(\mu)]T \tag{2.35}$$

も用いることができる根拠を，本論文で明らかにする．

2.3　２つの構造受精作用素 $D(\mu), E(\mu)$ をモデル構成作用素で両側を挟んだ形式 $TD(\mu)T$, $TE(\mu)T$ で何故使うのか？

不動点方程式（2.25）が成立し，有限の連想段階で終了する多段階連想形認識

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{t-1}, \varphi_t \tag{2.36}$$

を実現するために，２つの構造受精作用素 $D(\mu), E(\mu)$ をモデル構成作用素で両側を挟んだ形式，$TD(\mu)T, TE(\mu)T$ で使うのか，その理由を簡単に以下で説明しよう．

分類の働きの対象となるデータが画像や音声などのパターンで与えられる場合，この分類の働きはパターン認識といわれる．更に，複数の事物がある場合での画像の内容や，会話音声の内容を確定する働きはパターン理解と呼ばれることが多い．

パターンというものは，その１部分が他のパターンに隠されて欠落していたり，変形して構造が崩れていたり，雑音が加わり変質していたり，不規則な座標変換，或いは，規則的な座標変換がなされていたりする．欠落を補ったり，崩れる以前の状態に直したり，雑音を取り除いたり，座標変換がなされる前の状態に戻したりする操作を，一般に，パターン正規化ということになっている．本論文では，パターン φ を標準形（パターンのモデル）$T\varphi$ に変換すること，つまり

$$\varphi \to T\varphi \tag{2.37}$$

をパターン正規化と呼び，この種の正規化の下で連想形多段階認識の働きが研究される．

その途中でパターンが得られたなら常にそのパターンの標準形を求める形式に多段階連想形認識の働きを設定するため，モデル構成作用素と呼ばれる式（1.1）の写像Tを導入し２つの構造受精作用素$D(\mu)$, $E(\mu)$をモデル構成作用素で両側を挟むのであり，この挟むことが，他の研究者によるこれ迄の研究内容から本研究内容を区別している．

3.　数理形態学を適用して得られた２つの想起作用素$D(\mu)$, $E(\mu)$

本章では，従来のニューラルネットを数理形態学に基づいたニューラルネットへ移行するにあたり，総和演算$\sum$が最大値選択演算max，或いは，最大値選択演算minに置き換えられ，乗算$\times$が加算$+$に置き換えられたとき得られるような，SS多段階想起認識の働きの実現に役立つ“パターンモデルを変換する作用素$D(\mu)$, $E(\mu)$”が提案される．

3.1　作用素$D(\mu): \Phi \to \Phi,\ \mu \subseteq J$

Mを，q次元ユークリッド空間R^qの可測部分集合とする．Mの部分集合M'内の任意の座標点$x \in M'$をとろう．

パターン

$$\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in M\} \tag{3.1}$$

は実数値関数としよう．代表パターンω_jのモデル$T\omega_j$の，式（2.4）の集合$T \cdot \Omega$は１次独立な系と約束する．

任意のカテゴリ番号$j \in J$のリスト$\mu(\neq \phi) \subseteq J$について，作用素$D(\mu)$を

$$(D(\mu)\varphi)(x) = \max_{y \in M'}[K_D(x, y; \mu) + \varphi(y)],\ x \in M' \tag{3.2}$$

と定義する．パターン

$$(D(\mu)\varphi \equiv \{(D(\mu)\varphi)(x) \mid x \in M'\} \tag{3.3}$$

は，式（3.1）のパターン（pattern key）φから連想，或いは想起されるパターンを表している．

作用素$D(\mu)$の核関数（nuclear function）と呼ばれる$K_D(x, y; \mu)$は，

$$K_D(x, y; \mu) \equiv \min_{j \in \mu}\{(T\omega_j)(x) - (T\omega_j)(y)\},\ x, y \in M' \tag{3.4}$$

と定義される．カテゴリ間の相互分離性質

$$i \neq j \Rightarrow \exists x \in M', \exists y \in M', T\omega_i(x) - (T\omega_i)(y) \neq T\omega_j(x) - (T\omega_j)(y) \tag{3.5}$$

の成立が望ましい．

先ず，次の定理3.1は，$i = j,\ i \neq j$の２つの場合，代表パターンモデル$T\omega_j$を入力した時$D([i])$から想起されるパターンを決定している．特に，$i = j$の場合，代表パターンモデル$T\omega_j$を入力した時$D([j])$から想起されるパターン$(D([i])T\omega_j$が入力$T\omega_j$そのものであるであることに注意しておこう．

［定理3.1］（代表パターンモデル$T\omega_j$から想起される内容）

$$\forall i, \forall j \in J, \forall x \in M', (D([i])T\omega_j)(x) =$$

$$\begin{cases}(T\omega_i)(x) \quad if \quad i=j & (3.6)\\ (T\omega_i)(x)+\max_{y\in M'}[(T\omega_j)(y)-(T\omega_i)(y)] \quad if \quad i\neq j & (3.7)\end{cases}$$

（証明）$K_D(x, y;[i])=(T\omega_i)(x)-(T\omega_i)(y)$ ∵ 式（3.4） (3.8)
であるから，

$$\forall i, \forall j\in J, \forall x\in M', (D([i])T\omega_j)(x)=\max_{y\in M'}[K_D(x, y;[i])+(T\omega_j)(y)] \quad ∵ 式（3.2）$$

$$\max_{y\in M'}[(T\omega_i)(x)-(T\omega_i)(y)+(T\omega_j)(y)] \quad ∵ 式（3.8）$$

$$=(T\omega_i)(x)+\max_{y\in M'}[-(T\omega_i)(y)+(T\omega_j)(y)]$$

を得，これから，明らかである． □

次の定理3.2は，作用素$D(\mu)$がパターンφの振幅を減少させない性質（単調増加性，或いは，単調非減少性）を備えていることを明らかにしている．

［定理3.2］（$D(\mu)$の単調増加定理）

$$\forall\varphi\in\Phi, \forall x\in M', (D(\mu)\varphi)(x)\geq\varphi(x). \tag{3.9}$$

（証明）先ず，

$$\forall x\in M', K_D(x, x;\mu)=0 \tag{3.10}$$

に注意して，

$$\forall x\in M', (D(\mu)\varphi)(x)=\max_{y\in M'}[K_D(x, y;\mu)+\varphi(y)]$$

$$\geq K_D(x, x;\mu)+\varphi(x) \tag{3.11}$$

$$=\varphi(x)$$

を得，証明が終わる． □

次の定理3.3は，パターン$D(\mu)\varphi$に作用素$D(\mu)$を作用させても変化しない性質（べき等性）を備えていることを明らかにしている．

［定理3.3］（$D(\mu)$のべき等定理；idempotent theorem of $D(\mu)$）

$$\forall\varphi\in\Phi, \forall x\in M', (D(\mu)\cdot D(\mu)\varphi)(x)=(D(\mu)\varphi)(x). \tag{3.12}$$

（証明）２不等式

（1）$\forall\varphi\in\Phi, \forall x\in M', (D(\mu)\cdot D(\mu)\varphi)(x)\geq(D(\mu)\varphi)(x).$

（2）$\forall\varphi\in\Phi, \forall x\in M', (D(\mu)\cdot D(\mu)\varphi)(x)\leq(D(\mu)\varphi)(x).$

（3.13）

を示せばよい．先ず，$\phi(x)$を，

$$\phi(x)=(D(\mu)\varphi)(x), x\in M' \tag{3.14}$$

とおく．

（1）の証明：$\varphi(x)$の代りに，$\phi(x)$を考えれば，定理3.2より明らか．

（2）の証明：

先ず，

$$\forall i\in\mu, \forall x, \forall y\in M', K_D(x, y;\mu)\leq(T\omega_i)(x)-(T\omega_i)(y) \tag{3.15}$$

$$\forall i \in \mu,\ \forall x,\ \forall y \in M',\ K_D(y, z; \mu) \le (T\omega_i)(y) - (T\omega_i)(z) \tag{3.16}$$

が成り立ち，よって，

$$\forall i \in \mu,\ \forall x,\ \forall y,\ \forall z \in M',\ K_D(x, y; \mu) + K_D(y, z; \mu) \le (T\omega_i)(x) - (T\omega_i)(z) \tag{3.17}$$

を得る．よって，

$$\forall x,\ \forall y,\ \forall z \in M',\ K_D(x, y; \mu) + K_D(y, z; \mu) \le \min_{i \in \mu}\{(T\omega_i)(x) - (T\omega_i)(z)\}$$

$$= K_D(x, z; \mu) \tag{3.18}$$

が成り立つ．それ故，

$$\forall x \in M',\ \phi(x) = (D(\mu)\varphi)(x) = \max_{z \in M'}[K_D(x, z; \mu) + \varphi(z)]$$

$$\ge \max_{z \in M'}[K_D(x, y; \mu) + K_D(y, z; \mu) + \varphi(z)] \quad \textit{for any} \quad y \in M' \tag{3.19}$$

がいえ，

$$\forall x \in M',\ \phi(x) \ge \max_{y \in M'} \max_{z \in M'}[K_D(x, y; \mu) + K_D(y, z; \mu) + \varphi(z)]$$

$$= \max_{y \in M'}[K_D(x, y; \mu) + \max_{z \in M'}[K_D(y, z; \mu) + \varphi(z)]] \tag{3.20}$$

$$= \max_{y \in M'}[K_D(x, y; \mu) + (D(\mu)\varphi)(y)] \tag{3.21}$$

$$= \max_{y \in M'}[K_D(x, y; \mu) + \phi(y)]$$

$$= (D(\mu)\phi)(x)$$

を得，証明が終わる．□

２つのパターン $\varphi, \eta \in \Phi$ が与えられたとき，

$$\forall x \in M',\ (T\eta)(x) = (D(\mu)T\varphi)(x) \tag{3.22$_1$}$$

が成り立つための必要かつ十分条件を研究しよう．

次の定理3.4は，不動点方程式

$$\forall x \in M',\ (T\varphi)(x) = (D(\mu)T\varphi)(x) \tag{3.22$_2$}$$

を満たすという意味で，作用素 $D(\mu)$ の不動点パターンモデル（fixed-point pattern-model）$T\varphi$ の存在条件を明らかにしている．不動点パターンモデル $T\varphi$ は，作用素 $D(\mu)$ が式（2.4）の記憶内容 $T\cdot\Omega$ から誤差なく呼び出すことの可能なパターンであり，作用素 $D(\mu)$ が完全に記憶しているパターンである．

［定理3.4］（$D(\mu)$ の不動点定理；fixed-point theorem of $D(\mu)$）

２つのパターン $\varphi, \eta \in \Phi$ が与えられたとき，

式（3.22$_1$）

$\Leftrightarrow$

$$\forall x \in M',\ \exists y \in M',\ \exists k \in \mu \quad \text{such that} \quad \min_{j \in \mu}[(T\omega_j)(x) - (T\omega_j)(y)] = (T\omega_k)(x) - (T\omega_k)(y)$$

$$,(T\eta)(x) - (T\varphi)(y) = (T\omega_k)(x) - (T\omega_k)(y) \tag{3.23}$$

が成り立ち，よって，

任意のカテゴリ番号$i \in J$について，

$$\forall x \in M', \ (T\omega_i)(x) = (D(\mu)T\omega_i)(x) \tag{3.24}$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall x \in M', \exists y \in M', \exists k \in \mu \quad \text{such that} \quad \min_{j \in \mu}[(T\omega_j)(x) - (T\omega_j)(y)] = (T\omega_k)(x) - (T\omega_k)(y)$$

$$,(T\omega_i)(x) - (T\omega_i)(y) = (T\omega_k)(x) - (T\omega_k)(y) \tag{3.25}$$

［定理3.4の系］（$D(\mu)$についての入出力差の表現）

作用素$D(\mu)$への入力パターン$\varphi \in \Phi$のモデル$T\varphi \in \Phi$と，作用素$D(\mu)$からの出力パターン$D(\mu)T\varphi$との差$T\varphi - D(\mu)T\varphi$は，

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall x \in M', \ (T\varphi)(x) - (D(\mu)T\varphi)(x)$$

$$= \min_{y \in M'}[(T\varphi)(x) - (T\varphi)(y) - \min_{j \in \mu}\{(T\omega_j)(x) - (T\omega_j)(y)\}].$$

（証明）

式（3.22_1）

$$\Leftrightarrow \forall x \in M', \ 0 = (T\eta)(x) - \max_{y \in M'}[K_D(x, y; \mu) + (T\varphi)(y)]$$

$$= (T\eta)(x) + \min_{y \in M'}[-K_D(x, y; \mu) - (T\varphi)(y)] \tag{3.26}$$

$$= \min_{y \in M'}[(T\eta)(x) - (T\varphi)(y) - K_D(x, y; \mu)]$$

$$= \min_{y \in M'}[(T\eta)(x) - (T\varphi)(y) - \min_{j \in \mu}\{(T\omega_j)(x) - (T\omega_j)(y)\}] \tag{3.27}$$

$\Leftrightarrow$

式（3.23）

を得，前者が示された．後者は，前者において，

$$\eta = \varphi = \omega_i \tag{3.28}$$

とおいたものである．

［定理3.4の系の証明］

式（3.27）において，

$$\eta = \varphi \tag{3.29}$$

と考えれば明らか． □

式（3.25）が成立すれば,，不動点方程式（3.24）は成立する（定理3.10を参照）．

3.3　作用素$E(\mu): \Phi \to \Phi, \mu \subseteq J$

任意のカテゴリ番号$j \in J$のリスト$\mu(\neq \phi) \subseteq J$について，作用素$E(\mu)$を

$$(E(\mu)\varphi)(x) = \min_{y \in M'}[K_E(x, y; \mu) + \varphi(y)], \ x \in M' \tag{3.30}$$

と定義する．パターン

$$(E(\mu)\varphi \equiv \{(E(\mu)\varphi)(x) \mid x \in M'\} \tag{3.31}$$

は，式（3.1）のパターン（pattern key）φから連想，或いは想起されるパターンを表している．

作用素$E(\mu)$の核関数と呼ばれる$K_D(x, y; \mu)$は,

$$K_E(x, y; \mu) \equiv \max_{j \in \mu}\{(T\omega_j)(x) - (T\omega_j)(y)\},\ x, y \in M' \tag{3.32}$$

と定義される.

次の定理3.5は，$i=j$, $i \neq j$の２つの場合，代表パターンモデル$T\omega_j$を入力した時$E([i])$から想起されるパターンを決定している．特に，$i=j$の場合，代表パターンモデル$T\omega_j$を入力した時$E([j])$から想起されるパターン$E([i])T\omega_j$が入力$T\omega_j$そのものであるであることに注意しておこう.

[定理3.5]（代表パターンモデルから想起される内容）

$$\forall i, \forall j \in J, \forall x \in M', (E([i])T\omega_j)(x) =$$

$$\begin{cases} (T\omega_j)(x) \quad if \quad i=j & (3.33) \\ \\ (T\omega_j)(x) + \min_{y \in M'}[(T\omega_j)(y) - (T\omega_i)(y)] \quad if \quad i \neq j & (3.34) \end{cases}$$

（証明）$K_E(x, y; [i]) = (T\omega_i)(x) - (T\omega_i)(y)$ (3.35)

であるから,

$$\forall i, \forall j \in J, \forall x \in M', (E([i])T\omega_j)(x) = \min_{y \in M'}[K_E(x, y; [i]) + (T\omega_j)(y)]$$

$$= \min_{y \in M'}[(T\omega_i)(x) - (T\omega_i)(y) + (T\omega_j)(y)]$$

$$= (T\omega_i)(x) + \min_{y \in M'}[-(T\omega_i)(y) + (T\omega_j)(y)]$$

を得，これから，明らかである．　□

次の定理3.6は，作用素$E(\mu)$がパターンφの振幅を増加させない性質（単調減少性，或いは，単調非増加性）を備えていることを明らかにしている.

[定理3.6]（$E(\mu)$の単調増加定理）

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall x \in M', (E(\mu)\varphi)(x) \leq \varphi(x) \tag{3.36}$$

（証明）先ず,

$$\forall x \in M', K_E(x, x; \mu) = 0 \tag{3.37}$$

に注意して,

$$\forall x \in M', (E(\mu)\varphi)(x) = \min_{y \in M'}[K_E(x, y; \mu) + \varphi(y)]$$

$$\leq K_E(x, x; \mu) + \varphi(x) \tag{3.38}$$

$$\varphi(x)$$

を得，証明が終わる．　□

次の定理3.7は，パターン$E(\mu)\varphi$に作用素$E(\mu)$を作用させても変化しない性質（べき等性）を備えていることを明らかにしている.

[定理3.7]（$E(\mu)$のべき等定理；idempotent theorem of $E(\mu)$）

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall x \in M', (E(\mu) \cdot E(\mu)\varphi)(x) = (E(\mu)\varphi)(x). \tag{3.39}$$

（証明）２不等式

(1) $\forall \varphi \in \Phi, \forall x \in M', (E(\mu) \cdot E(\mu)\varphi)(x) \geq (E(\mu)\varphi)(x).$

（2） $\forall\varphi\in\Phi,\ \forall x\in M',\ (E(\mu)\cdot E(\mu)\varphi)(x)\leq(E(\mu)\varphi)(x).$ （3.40）

を示せばよい．先ず，$\phi(x)$ を，

$$\phi(x)=(E(\mu)\varphi)(x),\ x\in M' \tag{3.41}$$

とおく．

（2）の証明：$\varphi(x)$ の代りに，$\phi(x)$ を考えれば，定理3.6より明らか．

（1）の証明：

先ず，

$$\forall i\in\mu,\ \forall x,\ \forall y\in M',\ K_E(x, y;\mu)\geq(T\omega_i)(x)-(T\omega_i)(y) \tag{3.42}$$

$$\forall i\in\mu,\ \forall y,\ \forall z\in M',\ K_E(y, z;\mu)\geq(T\omega_i)(y)-(T\omega_i)(z) \tag{3.43}$$

が成り立ち，よって，

$$\forall i\in\mu,\ \forall x,\ \forall y,\ \forall z\in M',\ K_E(x, y;\mu)+K_E(y, z;\mu)\geq(T\omega_i)(x)-(T\omega_i)(z) \tag{3.44}$$

を得る．よって，

$$\forall x,\ \forall y,\ \forall z\in M',\ K_E(x, y;\mu)+K_E(y, z;\mu)\geq\max_{i\in\mu}\{(T\omega_i)(x)-(T\omega_i)(z)\}$$

$$=K_E(x, z;\mu) \tag{3.45}$$

が成り立つ．それ故，

$$\forall x\in M',\ \phi(x)=(E(\mu)\varphi)(x)=\min_{z\in M'}[K_E(x, z;\mu)+\varphi(z)]$$

$$\leq\min_{z\in M'}[K_E(x, y;\mu)+K_E(y, z;\mu)+\varphi(z)]\quad\text{for any}\quad y\in M' \tag{3.46}$$

がいえ，

$$\forall x\in M',\ \phi(x)\leq\min_{y\in M'}\min_{z\in M'}[K_E(x, y;\mu)+K_E(y, z;\mu)+\varphi(z)]$$

$$=\min_{y\in M'}[K_E(x, y;\mu)+\min_{z\in M'}[K_E(y, z;\mu)+\varphi(z)]] \tag{3.47}$$

$$=\min_{y\in M'}[K_E(x, y;\mu)+(E(\mu)\varphi)(y)] \tag{3.48}$$

$$=\min_{y\in M'}[K_E(x, y;\mu)+\phi(y)]$$

$$=(E(\mu)\phi)(x)$$

を得，証明が終わる． □

２つのパターン $\varphi,\eta\in\Phi$ が与えられたとき，

$$\forall x\in M',\ (T\eta)(x)=(E(\mu)T\varphi)(x) \tag{3.49$_1$}$$

が成り立つための必要かつ十分条件を研究しよう．

次の定理3.8は，不動点方程式

$$\forall x\in M',\ (T\varphi)(x)=(E(\mu)T\varphi)(x) \tag{3.49$_2$}$$

を満たすという意味で，作用素 $E(\mu)$ の不動点パターンモデル（fixed-point pattern-model）$T\varphi$ の存在条件を明らかにしている．不動点パターンモデル $T\varphi$ は，作用素 $E(\mu)$ が式（2.4）の記憶内容 $T\cdot\Omega$ から誤差なく呼び出すことの可能なパターンであり，作用素 $E(\mu)$ が完全に記憶しているパターンで

ある．

［定理3.8］（$E(\mu)$ の不動点定理；fixed-point theorem of $E(\mu)$）

2つのパターン $\varphi, \eta \in \Phi$ が与えられたとき，

式（3.49_1）

$\Leftrightarrow$

$$\forall x \in M', \forall y \in M', \exists k \in \mu \quad \text{such that} \quad \max_{j \in \mu}[(T\omega_j)(x)-(T\omega_j)(y)]=(T\omega_k)(x)-(T\omega_k)(y)$$

$$,\ (T\eta)(x)-(T\varphi)(y)=(T\omega_k)(x)-(T\omega_k)(y) \tag{3.50}$$

が成り立ち，よって，

任意のカテゴリ番号 $i \in J$ について，

$$\forall x \in M',\ (T\omega_i)(x)=(E(\mu)T\omega_i)(x) \tag{3.51}$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall x \in M', \forall y \in M', \exists k \in \mu \quad \text{such that} \quad \max_{j \in \mu}[(T\omega_j)(x)-(T\omega_j)(y)]=(T\omega_k)(x)-(T\omega_k)(y)$$

$$,\ (T\omega_i)(x)-(T\omega_i)(y)=(T\omega_k)(x)-(T\omega_k)(y) \tag{3.52}$$

［定理3.8の系］（$E(\mu)$ についての入出力差の表現）

作用素 $E(\mu)$ への入力パターン $\varphi \in \Phi$ のモデル $T\varphi \in \Phi$ と，作用素 $E(\mu)$ からの出力パターン $E(\mu)T\varphi$ との差 $T\varphi - E(\mu)T\varphi$ は，

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall x \in M',\ (T\varphi)(x)-(E(\mu)T\varphi)(x)$$

$$=\max_{i \in M'}[(T\varphi)(x)-(T\varphi)(y)-\max_{j \in \mu}\{(T\omega_j)(x)-(T\omega_j)(y)\}].$$

（証明）

式（3.49_1）

$$\Leftrightarrow \forall x \in M',\ 0=(T\eta)(x)-\min_{y \in M'}[K_E(x, y; \mu)+(T\varphi)(y)]$$

$$=(T\eta)(x)+\max_{y \in M'}[-K_E(x, y; \mu)-(T\varphi)(y)] \tag{3.53}$$

$$=\max_{y \in M'}[(T\eta)(x)-(T\varphi)(y)-K_E(x, y; \mu)]$$

$$=\max_{y \in M'}[(T\eta)(x)-(T\varphi)(y)-\max_{j \in \mu}\{(T\omega_j)(x)-(T\omega_j)(y)\}] \tag{3.54}$$

$\Leftrightarrow$

式（3.50）

を得，前者が示された．後者は，前者において，式（3.28）の如く，おいたものである．

［定理3.8の系の証明］

式（3.54）において，式（3.29）の如く考えれば明らか．　□

式（3.52）が成立すれば，不動点方程式（3.51）は成立する（定理3.10を参照）．

3.4　代表パターンモデル $T\omega_j$ に関する $D(\mu), E(\mu)$ の，簡単な不等式，不動点

定理3.2と定理3.6を使い，任意のカテゴリ番号 $i \in J$ について，不動点方程式式（3.24），（3.51）が

成り立つための必要かつ十分条件を研究しよう．

次の定理3.9は，式(2.4)の代表パターンモデル集合$T\cdot\Omega$に関し，２つの作用素$D\,(\mu)$, $E\,(\mu)$が各々，単調非増加性，単調非減少性を備えていることを指摘しており，勿論，２定理3.2, 3.6の特別な場合である．

［定理3.9］（代表パターンモデル集合$T\cdot\Omega$に関する$D\,(\mu)$, $E\,(\mu)$の不等式定理）
任意のカテゴリ番号$j\in\mu$について，

$$\forall x\in M',\ (D\,(\mu)\,T\omega_j)(x)\le(T\omega_j)(x)\le(E\,(\mu)\,T\omega_j)(x). \tag{3.55}$$

（証明）２つの核関数$K_D\,(x, y;\mu)$, $K_E\,(x, y;\mu)$の両定義式（3.4），（3.32）から，任意のカテゴリ番号$j\in\mu$について，不等式

$$\forall x, \forall y\in M',\ K_D\,(x, y;\mu)\le(T\omega_j)(x)-(T\omega_j)(y)\le K_E\,(x, y;\mu) \tag{3.56}$$

が成り立つ．よって，任意のパターン$\varphi\in\Phi$について，

$$\forall x, \forall y\in M',\ K_D\,(x, y;\mu)+\varphi\,(y)\le(T\omega_j)(x)-(T\omega_j)(y)+\varphi\,(y)\le K_E\,(x, y;\mu)+\varphi\,(y) \tag{3.57}$$

がいえ，ここで，

$$\varphi=T\omega_j \tag{3.58}$$

とおけば，

$$\forall x, \forall y\in M',\ K_D\,(x, y;\mu)+(T\omega_j)(y)\le(T\omega_j)(x)\le K_E\,(x, y;\mu)+(T\omega_j)(y) \tag{3.59}$$

を得，

$$\forall x, \forall y\in M',\ \max_{y\in M}[K_D\,(x, y;\mu)+(T\omega_j)(y)]\le(T\omega_j)(x)\le\min_{y\in M}[K_E\,(x, y;\mu)+(T\omega_j)(y)] \tag{3.60}$$

が得られ，２つの作用素$D\,(\mu)$, $E\,(\mu)$の両定義式（3.2），（3.30）を代入すれば，証明が終わる．

□

次の定理3.10は，式（2.4）の代表パターンモデル集合$T\cdot\Omega$の各元$T\omega_j\,(j\in J)$が２つの作用素$D\,(\mu)$, $E\,(\mu)$の不動点パターンモデルであることを明らかにしている．

［定理3.10］（代表パターンモデル集合$T\cdot\Omega$に関する$D\,(\mu)$, $E\,(\mu)$の不動点定理）
任意のカテゴリ番号$j\in\mu$について，

$$\forall x\in M',\ (D\,(\mu)\,T\omega_j)(x)=(T\omega_j)(x)=(E\,(\mu)\,T\omega_j)(x). \tag{3.61}$$

（証明）定理3.2と定理3.9とから，

$$\forall x\in M',\ (D\,(\mu)\,T\omega_j)(x)=(T\omega_j)(x) \tag{3.62}$$

がいえ，定理3.6と定理3.9とから，

$$\forall x\in M',\ (T\omega_j)(x)=(E\,(\mu)\,T\omega_j)(x). \tag{3.63}$$

がいえる．□

4. TAT のべき $(TAT)^n$ と，作用素 $D(\mu)$, $E(\mu)$ の，助変数 $\mu \subseteq J$ についての単調性

本章では，モデル構成作用素 T を使えば，$(TAT)^n$ $(n=1, 2, \cdots)$ がどのように表現され得るかを示し（4.1節），更に 2 つの作用素 $D(\mu)$, $E(\mu)$ が助変数 $\mu \subseteq J$ についてどのような単調性が成り立つかを明らかにする（4.2節）．

4.1　モデル構成作用素 T を使った $(TAT)^n$ $(n=1, 2, \cdots)$ の表現

A^n を再帰的に，$n=0, 1, 2, \cdots$ について，

$$A^{n+1} \equiv A \cdot A^n, \ A^0 \equiv I \quad （恒等写像） \tag{4.1}$$

と定義する．

次の命題4.1は，写像 A に関し，べき等性 $A^2=A$ が成り立つとき，A のべき A^n $(n=1, 2, \cdots)$. がもとの A になることを指摘している．

［命題4.1］

$$A^2=A \text{ のとき } A^n=A \ (n=1, 2, \cdots). \tag{4.2}$$

（証明）$A^3=A \cdot A^2=A \cdot A=A$

であり，

$A^n=A$ を仮定すると，

$A^{n+1}=A \cdot A^n=A \cdot A=A$

を得る．　□

次の命題4.2は，写像 T がモデル構成作用素の場合，TAT のべき $(TAT)^n$ $(n=1, 2, \cdots)$ が $(AT)^n$ $(n=1, 2, \cdots)$ に T を作用した結果になることを指摘している．

［命題4.2］

$$T^2=T \text{ のとき } (TAT)^n=T(AT)^n \ (n=1, 2, \cdots). \tag{4.3}$$

（証明）$(TAT)^2=(TAT) \cdot (TAT)=TAT \cdot AT=T(AT)^2$

であり，

$(TAT)^n=T(AT)^n$ を仮定すると，

$(TAT)^{n+1}=TAT \cdot (TAT)^n=TAT \cdot T(AT)^n=TAT \cdot (AT)^n=T(AT)^{n+1}$

を得る．　□

4.2　2 つの作用素 $D(\mu)$, $E(\mu)$ の単調性

次の命題4.3は，作用素 $D(\mu)$ の，助変数 $\mu \subseteq J$ についての単調減少性を指摘している．

［命題4.3］

$$\mu_1 \supseteq \mu_2 \Rightarrow$$
$$\forall \varphi \in \Phi, \forall x \in M', \ (D(\mu_1)\varphi)(x) \leq (D(\mu_2)\varphi)(x). \tag{4.4}$$

（証明）作用素 $D(\mu)$ の核関数 $K_D(x, y; \mu)$ について，不等式

$$K_D(x, y; \mu_1) = \min_{j \in \mu_1}\{(T\omega_j(x) - (T\omega_j)(y)\}$$

$$\leq \min_{j \in \mu_2}\{(T\omega_j)(x) - (T\omega_j)(y)\} = K_D(x, y; \mu_2), \ x, y \in M', \tag{4.5}$$

を得，

$$\forall x \in M',\ (D(\mu_1)\varphi)(x) = \max_{y \in M'}[K_D(x, y; \mu_1) + \varphi(y)]$$

$$\leq \max_{y \in M'}[K_D(x, y; \mu_2) + \varphi(y)] = (D(\mu_2)\varphi)(x) \tag{4.6}$$

が成り立つ． □

次の命題4.4は，作用素$E(\mu)$の，助変数$\mu \subseteq J$についての単調増大少性を指摘している．

［命題4.4］

$$\mu_1 \supseteq \mu_2 \Rightarrow$$

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall x \in M', (E(\mu_1)\varphi)(x) \geq (E(\mu_2)\varphi)(x). \tag{4.7}$$

（証明）作用素$E(\mu)$の核関数$K_E(x, y; \mu)$について，不等式

$$K_E(x, y; \mu_1) = \max_{j \in \mu_1}\{(T\omega_j)(x) - (T\omega_j)(y)\}$$

$$\geq \max_{j \in \mu_2}\{(T\omega_j)(x) - (T\omega_j)(y)\} = K_E(x, y; \mu_2),\ x, y \in M' \tag{4.8}$$

を得，

$$\forall x \in M',\ (E(\mu_1)\varphi)(x) = \min_{y \in M'}[K_E(x, y; \mu_1) + \varphi(y)]$$

$$\geq \min_{y \in M'}[K_E(x, y; \mu_2) + \varphi(y)] = (E(\mu_2)\varphi)(x) \tag{4.9}$$

が成り立つ． □

次の命題4.4の（ｉ）は，の交換子積

$$[E(\mu), D(\mu)] \equiv E(\mu)D(\mu) - D(\mu)E(\mu) \tag{4.10}$$

が，差$D(\mu) - E(\mu)$により小であることを指摘している．

［命題4.4］

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall x \in M',$$

（ｉ）$(E(\mu)D(\mu)\varphi)(x) - (D(\mu)E(\mu)\varphi)(x) \leq (D(\mu)\varphi)(x) - (E(\mu)\varphi)(x) \geq 0$ (4.11)

（ii）$\max\{(D(\mu)E(\mu)\varphi)(x), (D(\mu)\varphi)(x)\} \geq \min\{(E(\mu)D(\mu)\varphi)(x), (E(\mu)\varphi)(x)\}.$ (4.12)

（証明）（ｉ）の証明：

定理3.2より，

$$\forall x \in M',\ (D(\mu)E(\mu)\varphi)(x) \geq (E(\mu)\varphi)(x) \tag{4.13}$$

$$\therefore\quad \forall x \in M', -(D(\mu)E(\mu)\varphi)(x) \leq -(E(\mu)\varphi)(x) \tag{4.14}$$

が成り立つ．また，定理3.6より，

$$\forall x \in M',\ (E(\mu)D(\mu)\varphi)(x) \leq (D(\mu)\varphi)(x) \tag{4.15}$$

が成り立つ．２式（4.14），（4.15）を加えれば，所要の不等式が得られる．

不等式

$$(D(\mu)\varphi)(x) - (E(\mu)\varphi)(x). \geq 0 \tag{4.16}$$

の成立は，3.3節の定理から明らか．

（ii）の証明：

$$a \geq b \wedge c \geq d \text{ ならば，} \max\{a, c\} \geq \min\{b, d\} \tag{4.17}$$

を，２式（4.13），（4.15）に適用すれば，所要の不等式が得られる． □

5.　２種類のパターンスペクトル

本章では，２式（3.2），（3.30）の２作用素$D(\mu)$, $E(\mu)$の単調性（２定理3.2，3.6）を利用して，２種類のパターンスペクトル$PS1$, $PS2$を定義する．これらはパターンφを特性付ける量である．

5.1　パターンスペクトル１

２式（3.2），（3.30）の２作用素$D(\mu)$, $E(\mu)$を，M'を表示して，各々，

$$D(\mu; M'),\ E(\mu; M') \tag{5.1}$$

と書くことがある．

明らかに，

$$M_1' \subseteq M_2' \Rightarrow \forall x \in M_1',\ (D(\mu; M_1')\varphi)(x) \le (D(\mu; M_2')\varphi(x) \tag{5.2}$$

$$M_1' \subseteq M_2' \Rightarrow \forall x \in M_1',\ (E(\mu; M_1')\varphi)(x) \ge (E(\mu; M_2')\varphi(x) \tag{5.3}$$

が成り立つ．

ユークリッド空間R^q内の２座標点

$$x = col(x_1, x_2, \cdots, x_q)\ （列ベクトル），\ y = col(y_1, y_2, \cdots, y_q) \in R^q \tag{5.4}$$

間のユークリッド距離$|x-y|$は，

$$|x-y| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{q}[|x_i - y_i]^2} \tag{5.5}$$

と定義される．ここで，M'の部分集合M_n'の増大列

$$M_n'(x) \equiv \{y \in M' \mid |x-y| \le \varepsilon_n,\ x \in M'\} \subseteq M',\ n = 0, 1, 2, \cdots \tag{5.6}$$

を導入する．非負数ε_nの増大列は，不等式

$$0 \equiv \varepsilon_0 \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_2 \le \cdots \le \varepsilon_n \le \varepsilon_{n+1} \le \cdots \tag{5.7}$$

を満たさなければならないとしよう．

$n = 0, 1, 2, \cdots$ について，パターンスペクトル１の２種類$PS1_E$, $PS1_D$を

$$PS1_E(n, M')(x) = (E(\mu; M_n'(x))\varphi)(x) - (E(\mu; M_{n+1}'(x))\varphi)(x) \ge 0 \tag{5.8}$$

$$PS1_D(n, M')(x) = (D(\mu; M_{n+1}'(x))\varphi)(x) - (D(\mu; M_n'(x))\varphi)(x) \ge 0 \tag{5.9}$$

と定義する．

5.2　パターンスペクトル２

$n = 0, 1, 2, \cdots$ について，べき乗$E(\mu, M')^n$, $D(n, M')^n$を再帰的に

$$E(\mu; M')^{n+1} \equiv E(\mu; M') \cdot E(\mu; M')^n,\ E(\mu, M')^0 \equiv I\ （恒等写像） \tag{5.10}$$

$$D(\mu; M')^{n+1} \equiv D(\mu; M') \cdot D(\mu; M')^n,\ D(\mu, M')^0 \equiv I\ （恒等写像） \tag{5.11}$$

を定義する．

次の定理は，２作用素$D(\mu)$, $E(\mu)$のべき$D(\mu)^n$, $E(\mu)^n$が指数nの増大に伴い，各々，単調増大性，単調減少性を備えていることを指摘したものである．

［定理5.1］（２作用素$D(\mu)$, $E(\mu)$のべきの単調定理）

$n = 0, 1, 2, \cdots$ について，

$$\forall \varphi \in \Phi, \cdots \le (E(\mu)^n \varphi)(x) \le (E(\mu)^{n-1}\varphi)(x) \le \cdots \le (E(\mu)\varphi)(x) \le \varphi(x) \tag{5.12}$$

$$\le (D(\mu)\varphi)(x) \le \cdots \le (D(\mu)^{n-1}\varphi)(x) \le (D(\mu)^n \varphi)(x) \le \cdots \tag{5.13}$$

（証明）２定理3.2，3.6を，各々，複数回適用したものである．　□

$n = 0, 1, 2, \cdots$ について，パターンスペクトル２の２種類 $PS2_E$, PS''_D を

$$PS2_E\,(n, M')(x) = (E\,(\mu; M')^n \varphi)(x) - (E\,(\mu; M')^{n+1} \varphi)(x) \geq 0 \tag{5.14}$$

$$PS2_D\,(n, M')(x) = (D\,(\mu; M')^{n+1} \varphi)(x) - (D\,(\mu; M')^n \varphi)(x) \geq 0 \tag{5.15}$$

と定義する．

上記の２種類のパターンスペクトル $PS1$, $PS2$ がパターン φ をどのように特性付けるかは，実際に求めて検討する必要がある．

6. 結　び

処理の対象とする問題のパターン φ について，この入力パターン φ を式（2.4）の記憶内 $T\cdot\Omega$ のある１つのパターン ω_j のモデル $T\omega_j$ として再生し，然も，入力パターン φ が帰属するカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ を決定できる連想形多段階認識の働き［B3］，［B4］におけるパターン変換を，数理形態学に基づき，新しい構造受精作用素 $D\,(\mu): \Phi \to \Phi, \mu \subseteq J$, $E\,(\mu): \Phi \to \Phi, \mu \subseteq J$ の如く，２式 (3.2)，(3.30) のごとく，２種類構成した．

処理の対象となる問題の，すべてのパターン φ の集まりを記号 Φ で表した．パターンモデル $T\varphi \in \Phi$ とは原パターン $\varphi \in \Phi$ の標準形であって，原パターン φ と同じように見えたり，聞こえたりするようなものであった．このようなパターンモデルを出力する式（1.1）の写像 $T : \Phi \to \Phi$ をモデル構成作用素といった．モデル構成作用素 T がパターン φ の変形を吸収できるためには，SS理論［B3］，［B4］によれば，①零元不動点性，②正定数倍不変性，③ベキ等性，④非零写像性という４性質を少なくとも満たさなければならない．

上述の４性質①～④を満たすという意味でモデル構成作用素と呼ばれる式（1.1）の写像 T についての研究はS. Suzukiの研究以外には存在しない．この写像 T は，入力顔画像 φ から目，鼻，口の各成分を抽出するのに有用であることも判明している［B16］．また，日本語単独母音の認識［B13］や，連想形記憶の働きを備えたニューラルネットの構成［B10］にも使用され，計算機シミュレーション済である．

その他のモデル構成作用素 T については，平均画像を用いた画像２値化をもたらす構成［B16］，界面エネルギーの減少を利用した構成［B17］，画素単位の構成［B18］，「B26」，［B29］などがある．

上述の４性質①～④を満たし，axiom 1を満たす式（1.1）のモデル構成作用素 T については，

計算規則

$$\varphi\,(x)/\sup_{y \in M}|\,\varphi\,(y)\,| = 0 \quad \text{if} \quad \sup_{y \in M}|\,\varphi\,(y)\,| = 0$$

を設け，任意の $x \in M$ について，

$$(T\varphi)(x) = \begin{cases} 1 & if \quad 2/3 < \varphi\,(x)/\sup_{y \in M}|\,\varphi\,(y)\,| \leq 1 \\ 1/2 & if \quad 1/3 < \varphi\,(x)/\sup_{y \in M}|\,\varphi\,(y)\,| \leq 2/3 \\ 0 & if \quad -1/3 \leq \varphi\,(x)/\sup_{y \in M}|\,\varphi\,(y)\,| \leq 1/3 \\ -1/2 & if \quad -2/3 \leq \varphi\,(x)/\sup_{y \in M}|\,\varphi\,(y)\,| < -1/3 \\ -1 & if \quad -1 \leq \varphi\,(x)/\sup_{y \in M}|\,\varphi\,(y)\,| < -2/3 \end{cases}$$

が挙げられ，更に，axiom　2を満たす式（2.18）の類似度関数SMについては，第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属することが判明しているパターンφ_{jt}の集合$\Phi_j\,(\subset\Phi)$を，２条件

$$\omega_j\in\Phi_j=\{\varphi_{j,t}\mid t=1,2,\cdots,n_j\},\ n_j\geq 1$$

$$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},\ \Phi_j\cap\Phi_j=\phi$$

が満たされるように選定しておけば，また，第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$のカテゴリ番号$j\in J$について，$f_j(u)=\log_e(1+a_j\cdot u^k),\ k=1,2,\cdots,a_j>0$と定義される関数

$f_j: R^+\rightarrow R^+$，ここに，R^+は非負実数全体の集合

を用意し，更に，パターンモデル$T\varphi$とパターンモデル集合$T\cdot\Phi_j\equiv\{T\varphi\mid\varphi\in\Phi_j\}$との最小ノルム距離

$$diff\,(T\varphi,\ T\cdot\Phi_j)\equiv\min_{\eta\in\Phi_j}\|T\varphi-T\eta\|$$

を持ち出せば，

$$SM\,(\varphi,\omega_j)=$$

$$\begin{cases}\dfrac{f_j\,(diff\,(T\varphi,\ T\cdot\Phi_j))^{-2}}{\sum_{k\in J}f_k\,(diff\,(T\varphi,\ T\cdot\Phi_k))^{-2}}\cdots\sum_{k\in J}f_k\,(diff\,(T\varphi,\ T\cdot\Phi_j))>0 & \text{のとき}\\ p\,(\mathfrak{C}_j)\cdots\sum_{k\in J}f_k\,(diff\,(T\varphi,\ T\cdot\Phi_j))=0 & \text{のとき}\end{cases}$$

と定義されるものが挙げられる．最後に，カテゴリ間の相互排除条件

$$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},\ BSC\,(\omega_i,j)=0$$

を満たし，然も，axiom 3を満たす式（2.19）の大分類関数BSCについては，

１実変数の２値関数

$$psn\,(u)=1\quad if\quad u\geq 0,=0\quad if\quad u<0$$

と，実数値の重み$w\,(j,\ell)$の組

$$w\,(j,\ell),\ j\in J,\ \ell\in L$$

と，閾値$e\,(j)$の組

$$e\,(j),\ j\in J$$

を導入して，$u\,(\varphi,\ell)\in R$（実数全体の集合）をパターン$\varphi\in\Phi$から抽出された第$\ell\in L$番目の実数値の特徴量として，２条件

$$\forall j\in J,\ f_j\,(T\omega_j)\geq 0$$

$$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},\ f_j\,(T\omega_i)<0$$

を満たすように，パーセプトロンの系

$$f_j\,(T\varphi)\equiv\sum_{\ell\in L}w\,(j,\ell)\cdot u\,(T\varphi,\ell)-e\,(j),\ j\in J$$

が実数値の重み$w\,(j,\ell)$の組と閾値$e\,(j)$の組とを学習の働きで決定されていれば，

$$BSC\,(\varphi,j)=psn\,(f_j\,(T\varphi))$$

と定義されるものが挙げられる．

上述の４性質①～④を満たすという要請などから，Φは集合論的再帰領域方程式（2.15）を満たさなければならなくなり，その結果，パターン集合Φは式（2.16）の如く表示されることになった．本論文では，モデル構成作用素Tが基本的に使われた．

処理の対象となるパターンφが帰属しているカテゴリ（第$j\in J$番目のカテゴリ）$\mathfrak{C}_j$の番号（カテ

ゴリ番号）j の，すべての集まりを記号 J で表した．SS多段階連想形認識［B3]，［B4｝の過程を実現するには，パターンからパターンへ変換する写像（パターン想起変換）の列が帰納的推理で選ばれることが必要である．このパターン想起変換として使われているのが，従来の，候補カテゴリ番号のリスト $\mu\,(\subseteq J)$ を助変数に持つ式（2.17）の構造受精作用素 $A\,(\mu): \Phi \to \Phi, \mu \subseteq J$ であった．このパターン想起変換 $A\,(\mu)$ の代りに，数理形態学に基づき，新しい構造受精作用素 $D\,(\mu): \Phi \to \Phi, \mu \subseteq J$，$E\,(\mu): \Phi \to \Phi, \mu \subseteq J$ などが提案された．SS多段階想起認識の働きの実現に役立つ“パターンモデルを変換する２つの写像 $D\,(\mu), E\,(\mu)$”は，新しいニューラルネットへの，数理形態学に基づいた移行で得られたものである．つまり，パターン変換 $D\,(\mu), E\,(\mu)$ は従来のニューラルネットにおいて，総和演算 $\sum$ が最大値選択演算 max，或いは，最大値選択演算 min に置き換えられ，乗算× が加算＋に置き換えられて得られたものである．２つの構造受精作用素 $D\,(\mu), E\,(\mu)$ につき，べき等性 $D\,(\mu)D\,(\mu) = D\,(\mu), E\,(\mu)E\,(\mu) = E\,(\mu)$ が成り立つことが基本的であった（２定理3.3，3.7）．各カテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の持つ諸性質を典型的に代表している代表パターン ω_j のモデル $T\omega_j$ の，式（2.4）の集合（代表パターンモデルの集合）$T{\cdot}\Omega \equiv \{T\omega_j \mid j \in J\}$ の持つ情報と比較しながら得られるパターン $(D\,(\mu)\varphi)(x), x \in M'$ はパターン $\varphi\,(x), x \in M'$ の欠損箇所を補ったパターンとなつており（定理3.2），また，同様に比較しながら得られるパターン $(E\,(\mu)\varphi)(x), x \in M'$ はパターン $\varphi\,(x), x \in M'$ の冗長箇所を取り除いたパターンとなつている（定理3.6）．例えば，

$$T\,(D\,(\mu) - E\,(\mu)]\varphi)(x), x \in M'$$

は恐らく，パターン $\varphi\,(x), x \in M'$ の輪郭を与えるだろう．

本研究で解明された $D\,(\mu), E\,(\mu)$ の諸性質に基づいて，SS多段階想起認識の働きへのその応用が簡単に研究された．２つの構造受精作用素 $D\,(\mu), E\,(\mu)$ はモデル構成作用素で両側を挟んだ形式 $TD\,(\mu)T, TE\,(\mu)T$ で使われるが，この２つの構造受精変換 $TD\,(\mu)T, TE\,(\mu)T$ には，SS理論[B1]～[B4]での多段階連想形認識の働きを改良する働きがあることが期待される．また，２つの構造受精作用素 $D\,(\mu), E\,(\mu)$ を用い，パターンからその形状を特徴付けるパターンスペクトルが抽出され得ることが示された．

参 考 文 献 A

［A 1］小畑秀文：“モルフォロジー”，コロナ社，Nov.1996

［A 2］Gerhard X. Ritter, Peter Sussner, Juan Luis Diaz-de-Leon:“Morphological associative memories”, IEEE TRANSACTIONS ON NEURAL NETWORKS, vol.9, no.2, pp.281-293, March1998

［A 3］酒井幸市：“ディジタル画像処理入門”，コロナ社，Aug.1998

［A 4］鈴木昇一，佐久間拓也，前田英明：“数理形態学における諸演算とモデル構成作用素”，情報研究（文教大学・情報学部），no.17, pp.133-170, Dec.1996

参 考 文 献 B

［B 1］鈴木昇一：“認識工学”，柏書房，Feb.1975

［B 2］鈴木昇一：“ニューラルネットの新数理”，近代文芸社，Sept.1996

［B 3］鈴木昇一：“パターン認識問題の数理的一般解決”，近代文芸社，June1997
［B 4］鈴木昇一：“認識知能情報論の新展開”，近代文芸社，Aug.1998
［B 6］鈴木昇一：“手書き漢字の側抑制効果的分解とその計算機シミュレーション”情報処理学会誌，vol.15，no.12, pp.927-934, Dec.1974
［B 7］鈴木昇一：“画像情報量とその手書き漢字への応用”，画像電子学会誌，vol.4， no.1， pp.4-12, Apr.1975
［B 8］鈴木昇一：“抽出された特徴による手書き漢字構造の再生”，情報処理学会誌，vol.18， no.11, pp.1115-1122, Nov.1977
［B 9］鈴木昇一：“回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.4, pp.36-56, Dec.1983
［B10］鈴木昇一：“連想形記憶N器MEMOTRONと日本語単独母音系列の再生に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.7, pp.14-29, Dec.1986
［B11］鈴木昇一：“多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.10, pp.35-49, Dec.1989
［B12］鈴木昇一：“帰属係数法に基づく類似度，帰属関係あいまい度，認識情報量の計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.11, pp.51-68, Dec.1990
［B13］鈴木昇一：“構造受精法と日本語単独母音の認識”，情報研究（文教大学・情報学部），no.18, pp.17-51, Dec.1998
［B14］鈴木昇一，前田英明：“有声破裂音の代表パターンの学習的決定と，その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.20, pp.77-95, Dec.1998
［B15］鈴木昇一，前田英明：“変動エントロピーによる有声破裂音の順序付けと，その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.21, pp.51-78, Mar.1999
［B16］鈴木昇一：“平均顔を用いた顔画像の 2 値化，並びに，目・鼻・口の抽出と，その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.22, pp.65-150, Dec.1999
［B17］鈴木昇一：“界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の，顔画像処理に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.23, pp.109-182, Mar.2000
［B18］鈴木昇一：“風景画から知識を抽出し，解釈するシステムの，ファジィ推論ニューラルネットによる構成”，情報研究（文教大学・情報学部），no.23, pp.183-265, Mar.2000
［B19］鈴木昇一：“各個人の感性を反映した認識システムRECOGNITRON”，情報研究（文教大学・情報学部），no.24, pp.185-257, Dec.2000
［B20］鈴木昇一：“プロダクション・システムとしてのファジィ・マルチメディア・コンピュータと，空間多重パターンファジィ推論系”，情報研究（文教大学・情報学部），no.24, pp.105-183, Dec.2000
［B21］鈴木昇一：“SS大分類関数BSCの適応的構成への，計算論的学習理論の適用”，情報研究（文教大学・情報学部），no.25, pp.185-236, Mar.2001
［B22］鈴木昇一：“量子力学の諸原理，多段階量子認識系と，心理状態を取り入れた想起に基づく部分空間認識法”，情報研究（文教大学・情報学部），no.25, pp.237-282, Mar.2001
［B23］鈴木昇一：“Support Vector Machineを利用した大分類関数の構成”，情報研究（文教大学・情報学部），no.26, pp.1-62, Dec.2001
［B24］鈴木昇一：“ 2 カテゴリ分類困難度の情報理論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.26, pp.63-

160, Dec.2001
［B25］鈴木昇一：“一般化類似度関数を用いた“導出原理による第1階述語推論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.27, pp.27-71, Mar.2002
［B26］鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：“風景画の理解に関するJAVA言語によるRECOGNITRONの計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.27, pp.73-109, Mar.2002
［B27］鈴木昇一：“遺伝的アルゴリズムにおける適合度比例選択戦略を利用した進化方程式の，パターン多段階変換に基づく認識への応用”，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.37-67, Dec.2002
［B28］鈴木昇一：“近傍を利用した音素認識のためのモデル構成作用素T，類似度関数SM，大分類関数BSCの諸構成と，SS不動点探索型多段階想起認識”，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.69-141, Dec.2002
［B29］鈴木昇一：“JAVA言語で実装化された画像理解システムIUSの動作概要と，その稼動方法”，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.143-165, Dec.2002
［B30］鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：“JAVA言語による計算機シミュレーションで生じた風景画像の理解場面での多段階連想形認識過程の異常現象”，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.123-166, .July2003
［B31］鈴木昇一：“パターン情報処理（モデル構成作用素，誤差逆伝播学習２層ニューラルネット）と，論理的含意とによる非単調的知識推論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.75-121, July2003
［B32］鈴木昇一：“可分な一般抽象ヒルベルト空間でのK-L直交系の理論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.41-73, July2003
［B33］鈴木昇一：“パターン系列（動画像，会話音声）の，dynamical systemによる連想理論と，連想器SPATEMTRON”，情報研究（文教大学・情報学部），no.30, pp.139-186, Jan.2004
［B34］鈴木昇一：“入出力例の系列を用いた“対連想問題・その擬逆問題”の一般解”，情報研究（文教大学・情報学部），no.30, pp.81-137, Jan.2004
［B35］鈴木昇一：“共役勾配法の一般解における直交系の応用（画像復元，パターンモデルの構成，パターン集合の情報理論的次元）”，情報研究（文教大学・情報学部），no.30, pp.27-79, Jan.2004

付録A.　axiom 1～4（SS公理系）を各々，満たさなければならない パターン集合Φ，モデル構成作用素T の対【Φ, T 】，類似度関数SM ， 大分類関数BSC ，カテゴリ選択関数CSF ［B3］，［B4］

本付録Aでは，処理の対象となる問題のパターンφ の集合Φ ，モデル構成作用素T ，類似度関数SM ，カテゴリ選択関数CSF について説明される．対【Φ, T 】の満たされなければならないaxiom 1と，類似度関数SM の満たされなければならないaxiom 2も説明され，Φ の表示が明らかにされ，Φ が構成的集合であることが指摘される．更に，大分類関数BSC の満たされなければならないaxiom 3も説明される．カテゴリ選択関数CSF が満たされなければならないaxiom 4も説明され，CSF の構造がSM ，BSC を用いて決定されることが明らかにされる．

A1.　axiom 1とパターン集合Φ，モデル構成作用素T

一般に，処理の対象とする問題のパターンφの集合Φは或る可分な［A1］な（separable）一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の零元０を含む或る部分集合である．例えば，$\overline{\eta}$をηの複素共役として，

M : q 次元ユークリッド空間R^qの可測部分集合　(A1.1)

$dm(x)$：正値ルベーグ・スティルチェス式測度　(A1.2)

$x = \langle x_1, x_2, \cdots, x_q \rangle \in M\ (\subseteq R^q)$：実数値$q$変数直交座標系　(A1.3)

を導入し，その内積(φ, η)，ノルム$\|\varphi\|$を，

$$(\varphi, \eta) = \int_M dm(x)\,\varphi(x)\cdot\overline{\eta}(x) \tag{A1.4}$$

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \tag{A1.5}$$

とする線形空間(ベクトル空間)としての可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$の特別な場合として，

$M = R^2$（２次元全平面）　(A1.6)

$$dm(x) = dm(x_1, x_2) = [x_1^2 + x_2^2]\cdot dx_1 dx_2 \tag{A1.7}$$

を選ぶことができる．

このようなΦ，並びに，写像

$$T : \Phi \rightarrow \Phi \tag{A1.8}$$

は次のaxiom 1を満たさなければならない．このとき，写像Tはモデル構成作用素（model-construction operator）と呼ばれ，$T\varphi \in \Phi$は$\varphi \in \Phi$の代りとなり得るという意味で，パターン$\varphi \in \Phi$のモデル（model），或いは，パターンモデルと呼ばれる．

下記のaxiom 1からわかるように，パターンモデル$T\varphi$の集合$T\cdot\Phi$は，原パターンφの集合Φへの埋込性

$$T\cdot\Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \subset \Phi \tag{A1.9}$$

を満たし，Φは原点（＝0）を始点とし，Φの任意の点を通る半直線を含むような集合，つまり，錐（cone）であらねばならない．下記の式（A1.14）によるΦの表示が正にΦが錐であることを明らかにしている．

Axiom 1を満たすパターン集合Φは実は，構成的集合（constructible set）である．S. Suzukiは形式と意味とが互いに非分離であるようなパターンというものが満たされなければならない帰納的定義（再帰的定義）からΦの集合論的再帰領域方程式（axiom 1を満たす最小のΦの表現式；set-theoretic reflective domain equation）を提案し，この方程式を解き，Φの構造，構成方法を明らかにしている（文献［B3］の2.4節）．その結果は次のとおりである：

パターンと判明している元の集合（基本領域；basic domain）（axiom 1の（ｉ）の前半から，$0 \in$）Φ_Bを導入して，集合論的再帰領域方程式

$$\Phi = \Phi_B \cup T\cdot\Phi \cup R^{++}\cdot\Phi \tag{A1.10}$$

ここに，

$$T\cdot\Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \tag{A1.11}$$

R^{++}は正実数全体の集合　(A1.12)

$$R^{++}\cdot\Phi \equiv \{r^{++}\cdot\varphi \mid r^{++} \in R^{++}, \varphi \in \Phi\} \tag{A1.13}$$

の解Φは

$$\Phi = R^{++}\cdot[\Phi_B \cup T\cdot\Phi_B] \tag{A1.14}$$

と表示される（文献［B3］の式（2.56）を参照）．Φの表示式（A1.14）から，明らかに，２つの等式

（a）$T \cdot \Phi = T \cdot \Phi_B \subseteq \Phi$

∵　axiom 1の（ⅱ），（ⅲ）の２後半　（A1.15）

（b）$R^{++} \cdot \Phi = \Phi\ (= R^{++} \cdot \Phi_B \cup R^{++} T \cdot \Phi_B)$

∵　axiom 1の（ⅱ）の後半　（A1.16）

が成り立つ．

Axiom 1（パターン集合Φ とモデル構成作用素T との対【Φ, T 】の満たすべき公理）

（ⅰ）（零元０の$\Phi-$ 包含性と，零元０の$T-$ 不動点性；fixed-point property of zero element under mapping T）

$0 \in \Phi \wedge T0 = 0.$

（ⅱ）（Φ 錐性，T の正定数倍吸収性；cone property）

$\forall \varphi \in \Phi,\ a \cdot \varphi \in \Phi \wedge T\,(a \cdot \varphi) = T\varphi$

for any positive real number a.

（ⅲ）（Φ の埋込性（embeddedness）と，T のベキ等性（idempotency））

$\forall \varphi \in \Phi,\ T\varphi \in \Phi \wedge T\,(T\varphi) = T\varphi$

（ⅳ）（写像T の非零写像性；non-zero mapping property of T）

$\exists \varphi \in \Phi,\ T\varphi \neq 0.$ □

A2.　処理の対象となる問題のパターンφ の集合Φ とモデル構成作用素T との対【Φ, T 】の基本構成と，パターンモデル$T\varphi$ とパターンφ との間の同一知覚原理

原パターン$\varphi \in \Phi$ が如何なる意味を備えているか，つまり，φ が如何なる類概念（category）を表しているかを決定する働きをもつのが，認識システムRECOGNITRONである．RECOGNITRONがモデル$T\varphi \in \Phi$ を見たり聞いたりしたならば（$T\varphi$ を感性的に受け取ったならば），原パターン$\varphi \in \Phi$ と同じに見えたり聞こえたりすること（原パターンφ と錯覚し原パターンφ と同じように感性的に受容すること）だと，解釈可能な対【Φ, T 】について説明しよう．

パターンモデル$T\varphi$ を出力する式（A1.8）の写像T に要求されるのは，次の４性質①～④である：

①（零元不動点性；axiom 1の（ⅰ））

$\varphi = 0 \in \Phi$ については，$T\varphi = 0.$

②（正定数倍不変性；axiom 1の（ⅱ）の後半）

任意の正実定数a に対し，

$\forall \varphi \in \Phi,\ T\,(a \cdot \varphi) = T\varphi.$

③（ベキ等性；axiom 1の（ⅲ）の後半）

$\forall \varphi \in \Phi,\ T\,(T\varphi) = T\varphi.$

④（非零写像性；axiom 1の（ⅳ））

$\exists \varphi \in \Phi,\ T\varphi \neq 0.$ □

上述の①～④は各々，A1章のaxiom 1の（ⅰ）の後半，（ⅱ）の後半，（ⅲ）の後半，（ⅳ）である．零元$\varphi = 0 \in \Phi$ は背景も何も無いパターンである．

Φ は処理の対象とする問題のパターンφ の集合Φ であり，$T\varphi \in \Phi$ は$\varphi \in \Phi$ に対応するパターンモデルであって，原パターン$\varphi \in \Phi$ と同じ空間Φ に埋め込まれている．モデル$T\varphi$ は，$T\varphi \in \Phi$ を見たり聞いたりしたならばあたかも原パターン$\varphi \in \Phi$ かのように見えたり聞こえたりするようなものである（$T\varphi$ とφ との間の同一知覚原理）．この同一知覚原理を達成するために，SS理論［B1］～［B6］で

は，式（A1.8）の写像であるモデル構成作用素Tが導入され，対【Φ, T】はA1章のaxiom 1を満たしていなければならないことになる．このとき，写像Tはモデル構成作用素と呼ばれ，$T\varphi \in \Phi$は$\varphi \in \Phi$の代りとなり得るという意味で，パターン$\varphi \in \Phi$のモデルと呼ばれる．

処理の対象とするパターンφの集合Φは或る可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の，零元０を含む或る部分集合であり，このΦ，並びに，式(A1.8)の写像Tの対【Φ, T】は上記の４性質①〜④((ⅰ),(ⅱ),(ⅲ)の３後半，並びに(ⅳ))を含む形で，A1章のaxiom 1をみたさなければならない．

次の定理A2.1は，axiom 1を満たす対【Φ, T】を決定している．

［定理A2.1］（パターン集合Φとモデル構成作用素Tとの対【Φ, T】の構成定理）

パターンと判明しているφの集合（基本領域）$\Phi_B\ (\ni 0)$と，すべての正実定数の集合R^{++}とを用意する．

式（A1.8）の写像Tがaxiom 1の（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）の３後半，並びに，（ⅳ）を満たすとしよう．このとき，次の（イ），（ロ）が成り立つ：

（イ）処理の対象とする問題のパターンの集合Φを，式(A1.14)の如く設定すれば，２式(A1.15)，(A1.16)が成立し，axiomの（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）の３前半をΦは満たし，結局，対【Φ, T】はaxiom 1を満たす．

（ロ）逆に，$(0 \in)\Phi_B$を部分集合に持つΦがaxiom 1の（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）の３前半を満たすとすれば，

$$\Phi \supseteq \Phi_B \cup R^{++}\cdot\Phi \cup T\cdot\Phi \tag{A2.1}$$

が成立するが，ここで，特に，包含式（A2.1）において等号が成立するような最小のΦを採用すれば，つまり，領域方程式(A1.10)の成立を仮定すれば，axiom 1を満たす対【Φ, T】のΦは式(A1.14)のように表され，２式（A1.15），(A1.16）も成立する．

（証明）（イ）は文献［B4］，付録１の定理A1.1である．（ロ）は文献［B3］，pp.64-66（2.4節）で証明されている．□

A3.　axiom 2と類似度関数SM

任意のパターン$\varphi \in \Phi$が，記憶されている代表的なパターンからなる有限個の元からなる集合Ω内の任意の代表パターンω_jとどの程度似ているか，違っているかを計量する手段を設定することが，認識の働きを確保するために必要とされる．類似性計量のための手段が類似度関数SMである．

“正常なパターン”（well-formed　pattern）は，ある１つのカテゴリ（category）$\mathfrak{C}_j$（第$j \in J$番目の類概念）のみに帰属しているものとし，このような$\mathfrak{C}_j$の集まり（有限集合）

$$\mathfrak{C} = \{\mathfrak{C}_j \mid j \in J\} \tag{A3.1}$$

を想定する．$\mathfrak{C}_j$の備えている性質を典型的に持っている（第$j \in J$番目の）代表パターン（prototypical pattern）$\omega_j\ (\neq 0)$を１つ選定する．$\mathfrak{C}_j$は，典型（prototype）としての代表パターンω_jを中心とした緩やかな（第$j \in J$番目の）カテゴリであることを仮定したことに注意しておく

．ここに，

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} \subset \Phi \tag{A3.2}$$

が式（A3.1）の全カテゴリ集合$\underline{\mathfrak{C}}$に１対１に対応する代表パターンの集合である．式（A3.2）の系Ωは，

複素定数a_jの組$\{a_j \mid j \in J\}$について$\sum_{j \in J} a_j \cdot \omega_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J,\ a_j = 0$　(A3.3)

が成立しているという意味で，１次独立（linearly　independent）でなければならない．Ωを視察で決

定できる場合があるが，訓練パターン系列から Ω を適応的に決定する方法については，文献［B3］の付録Iで説明されている．

Axiom 1を満たす式（A1.1）のモデル構成作用素 T によって，式（A3.2）の代表パターン集合 Ω が変換されて得られる系

$$T\cdot\Omega \equiv \{T\omega \mid \omega \in \Omega\} = \{T\omega_j \mid j \in J\} \tag{A3.4}$$

も１次独立であると要請する．このとき，類似度関数（similarity-measure function）

$$SM : \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \tag{A3.5}$$

を導入し

$SM(\varphi, \omega_j) = 1, 0$ に従って，パターン $\varphi \in \Phi$ は各々，ω_j と確定的な類似度関係，相違関係にあり，また，$0 < SM(\varphi, \omega_j) < 1$ の場合は，あいまいな類似・相違関係にある　(A3.6)

と，SM を解釈しよう．

式（A3.5）の関数 SM は次のaxiom 2を満たすように構成されねばならない．Axiom 2の（ｉ）では，クロネッカー（Kronecker）の δ 記号

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{if} \quad i = j, = 0 \quad \text{if} \quad i \neq j \tag{A3.7}$$

が導入されているが，特にaxiom 2の（ｉ）なるこの正規直交性は，候補カテゴリの分離・抽出が効果的に行われ，

候補カテゴリの鋭利な削減（a sharp reduction）　(A3.8)

をもたらすために要請されている．

Axiom 2（類似度関数 SM の満たすべき公理）

（ｉ）（正規直交性；orthonormality）

$\forall i, \forall j, SM(\omega_i, \omega_j) = \delta_{ij}$.

（ii）（規格化条件，確率性，正規性；probability condition, normalization）

$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} SM(\varphi, \omega_j) = 1$.

（iii）（写像 T の下での不変性；invariance under mapping T）

$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j)$.　□

上述のaxiom 2の（ｉ）〜（iii）について簡単に説明しておこう．

SM の解釈式（A3.6）の下で，（ｉ）は，相異なカテゴリの代表パターン同士は確定的な相違関係にあり，同一カテゴリの代表パターン同士は確定的な類似度関係にあることを要請している．（ii）は，任意のパターン φ について，すべてのカテゴリについての類似度の総和は１であることを要請している．つまり，パターン φ は少なくとも１つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属していることを要請している．（iii）は，パターンモデル $T\varphi$ は原パターン φ と任意のカテゴリについて同一類似度を持つことを要請している．ということは，パターンモデル $T\varphi$ を見たり，聞いたりするならば，原パターン φ と同じように見えたり，聞こえたりすること（同一知覚原理；A2章を参照）を要請していることになる．

尚，第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の生起確率である非負実数 $p(\mathfrak{C}_j)$ を，２条件

$$[\forall j \in J, 0 < p(\mathfrak{C}_j) < 1] \wedge [\sum_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) = 1] \tag{A3.9}$$

を満たすものとして導入しておく．

A4.　axiom 3と大分類関数

本章では，ある１つのカテゴリに帰属するかどうかを決定する２カテゴリ分類器としての大分類関数BSC は，axiom 3を満たすように構成されなければならないことが説明される．

式（A3.5）の類似度関数SM が式（A3.8）でいう“候補カテゴリの鋭利な削減”を持つためには，axiom　2，（ｉ）の正規直交性を満たす必要があることがA3.で指摘されたが，$SM\,(\varphi, \omega_j)$の代りに$SM\,(\varphi, \omega_j)\cdot BSC\,(\varphi, j)$を用いれば，パターン$\varphi$ が帰属するかも知れない候補カテゴリを益々，鋭利に削減できると期待される．

大分類関数（rough classifier，binary-state classifier）と呼ばれる２値関数

$$BSC : \Phi \times J \to \{0,\,1\} \tag{A4.1}$$

を，次のaxiom 3を満たすものとして導入し，解釈

パターン$\varphi \in \Phi$ の帰属する候補カテゴリの１つが第$j \in J$番目の$\mathfrak{C}_j$ であるならば，
$BSC\,(\varphi, j) = 1$であることが望ましい　(A4.2)

を採用しよう．この際，注意すべきは，

$BSC\,(\varphi, j) = 0$であっても，パターン$\varphi \in \Phi$ の帰属する候補カテゴリの１つは，第$j \in J$番目の$\mathfrak{C}_j$ でないとは限らない　(A4.3)

としていることである．また，axiom 3の（ｉ）からわかるように，カテゴリ間の相互排除性（the mutual exclusion of the one category from the other categories）

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J-\{j\},\ BSC\,(\omega_i \cdot j) = 0, \tag{A4.4}$$

を公理として要請していない事実に注意しておこう．この事実を補うのが実は，式（A3.5）の類似度関数SM が満たさなければならないとしているaxiom 2の（ｉ）（正規直交性）である．

Axiom 3（大分類関数BSC の満たすべき公理）

（ｉ）（カテゴリ抽出能力；category separability）

$$\forall j \in J,\ BSC\,(\omega_j, j) = 1.$$

（ii）（写像T の下での不変性；invariance under mapping T ）

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall j \in J,\ BSC\,(T\varphi, j) = BSC\,(\varphi, j)\,. \qquad \square$$

A5.　axiom 4と，カテゴリ選択関数CSF の構造形式

認識システムRECOGNITRONがパターン$\varphi \in \Phi$ に対し，

「パターン$\varphi \in \Phi$ が，式（A3.1）の全カテゴリ集合$\mathfrak{C}_j$ の部分集合

$$\mathfrak{C}(\gamma) \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid j \in \gamma\} \tag{A5.1}$$

内の何れか１つのカテゴリ$\mathfrak{C}_j$ に帰属する可能性がある」　(A5.2)

という“パターン$\varphi \in \Phi$ のカテゴリ帰属知識（categorical membership-knowledge）”を持っているとする．この知識を，

$$<\varphi, \gamma> \in <\Phi, 2^J> \tag{A5.3}$$

と表す．

$$<\Phi, 2^J> \equiv \{<\varphi, \gamma> \mid \varphi \in \Phi, \gamma \in 2^J\} \tag{A5.4}$$

は，カテゴリ帰属知識空間（categorical membership-knowledge space）と呼ばれ，すべてのパターン$\varphi \in \Phi$ と，すべてのカテゴリ番号のリスト$\gamma \in 2^J$ とのなす順序の付いた対リスト（an ordered pair list）$<\varphi, \gamma>$の集合である．ここに，集合Jのすべての部分集合のなす集合，つまり，“Jのべき集合（power set）”を2^J で表わしている．

カテゴリ選択関数（category-selection function）と呼ばれる写像

$$CSF : \Phi \times 2^J \to 2^J \tag{A5.5}$$

は，包含関係（inclusion relation）

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \gamma \in 2^J, CSF(\varphi,\gamma) \subseteq \gamma \subseteq J \in 2^J \tag{A5.6}$$

を満たし，然も，次のaxiom 4を満たすものとして，設定されるとしよう．

Axiom 4（カテゴリ選択関数CSFの満たすべき公理）

（ｉ）$\varphi = 0 \vee \gamma = \phi$ の場合

如何なるカテゴリ番号$k \in \gamma$も$< \varphi, \gamma >$の有効な候補カテゴリの番号ではない．

（ⅱ）$\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ であり，かつ，$SM(\varphi, \omega_k) = 0 \wedge BSC(\varphi, k) = 0$の場合

カテゴリ番号$k \in \gamma$は，$< \varphi, \gamma >$の有効な候補カテゴリの番号ではない

（ⅲ）$\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ であり，かつ，$\sum_{k \in \gamma} BSC(\varphi, k) = 0$の場合

$BSC(\varphi, k) = 0$であっても，$SM(\varphi, \omega_k) > 0$であるようなカテゴリ番号$k \in \gamma$は，$< \varphi, \gamma >$の有効な候補カテゴリの番号である．

（ⅳ）$\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ であり，かつ，$\sum_{k \in \gamma} BSC(\varphi, k) > 0$の場合

（ⅳ-1）$BSC(\varphi, k) = 0$なるカテゴリ番号$k \in \gamma$は，$SM(\varphi, \omega_k) > 0$であっても，$< \varphi, \gamma >$の有効な候補カテゴリの番号ではない．

（ⅳ-2）$SM(\varphi, \omega_k) = 0$であっても$BSC(\varphi, k) = 1$なるカテゴリ番号$k \in \gamma$は，$< \varphi, \gamma >$の有効な候補カテゴリの番号ではない．□

次の定理A4.1では，式（A5.5）の写像CSFは，式（A2.5）の類似度関数SM，式（A3.1）の大分類関数BSCを使用する形式で，

その定義域が$\Phi \times 2^J$であり，その値域が，パターン$\varphi \in \Phi$のカテゴリ帰属知識$< \varphi, \gamma > \in < \Phi, 2^J >$の“有効な”候補カテゴリの番号リスト（a list of significant category-numbers）の集合である （A5.7）

の如く，構成されている．

次の定理A4.1は，axiom 4を満たすように，式（A5.5）のカテゴリ選択関数CSFの構造を決定したものである．

［定理A4.1］（カテゴリ選択関数CSFの構成定理）

次のように定義される式（A5.5）の１つの写像CSFは式（A5.6）と上述のaxiom 4を満たす：

（ｉ）$\varphi = 0 \vee \gamma = \phi$ の場合

$$CSF(\varphi, \gamma) = \phi. \tag{A5.8}$$

（ⅱ）$\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ の場合

$$CSF(\varphi, \gamma) =$$

$$\begin{cases} \{k \in \gamma \mid SM(\varphi, \omega_k\} > 0\} \quad \text{if} \quad \sum_{k \in \gamma} BSC(\varphi, k) = 0 & \text{(A5.9)} \\ \{k \in \gamma \mid SM(\varphi, \omega_k\} > 0 \wedge BSC(\varphi, k) = 1\} \quad \text{if} \quad \sum_{k \in \gamma} BSC(\varphi, k) > 0 & \text{(A5.10)} \end{cases}$$

（証明）文献［B3］の定理E1である．□

定理A4.1の写像CSFについて，次のように解釈できる：

処理の対象とするパターン$\varphi \in \Phi$がカテゴリ$\mathfrak{C}_j, j \in \gamma$の何れか１つに帰属する可能性があると想定した場合，更に絞り込んで，その内のカテゴリ$\mathfrak{C}_j, j \in CSF(\varphi, \gamma) \subseteq \gamma$の何れか１つに帰属する可能性があると帰納推論（inductive reasoning）できる機能を備え，その出力$CSF(\varphi, \gamma)$はパターン$\varphi \in \Phi$の有効な候補カテゴリの番号のリストを与えている．（A5.11）

（著者　鈴木昇一，論文題目　数理形態学の新しい２つのパターン変換作用素を用いた多段階想起認識，文教大学情報学部情報研究no. 31　投稿論文，投稿年月日　2004年２月25日（水））