# Householder変換と，素想起の働きを備えた<br>その連想形認識への応用

鈴木昇一

# Householder Conversion, and Its Application to the Associative Recognition Having Primitive Recollection

**Shoichi Suzuki**


## あらまし

パターン$\varphi \in \Phi$から特徴を抽出する方法（特徴抽出法）を上首尾に設定できたことは，そのパターン$\varphi \in \Phi$が各カテゴリの各代表パターン$\omega \in \Omega$とどの程度に似ているかを計量すること（類似度関数の構成法）を上首尾に設定できたことであり，逆もいえるという考え（特徴抽出法の設定と類似度関数の構成法との同等性）などを背景に組み立てられたS.Suzukiのパターン認識（連想形パターン認識）の数学的理論[3]，[4]では，多段階自己想起認識法を採用した認識システムRECOGNITRONが採用されている．この多段階自己想起認識法は基本となるパターン変換として，構造受精作用素$A(\lambda)$を採用しており，風景画像の認識・理解に適用され[21]～[23]，或る程度の成果が得られている．

本論文では，この多段階自己想起認識法を採用した認識システムRECOGNITRONのパターン認識能力を向上させるのに，他想起の働きを利用する研究などが行われる．

入力パターン$\varphi \in \Phi$のモデル$T\varphi \in \Phi$が代表パターン$\omega_j \in \Omega \subset \Phi$のモデル

$$T\omega_j \in T \cdot \Omega \equiv \{T\omega_j \mid j \in J\} \subset \Phi \qquad (\#1)$$

の集合（記憶しているパターンの集合）内のどれとも全く似ていなくて，パターン集合$\Psi(\subset \Phi)$内の何れか1つと似ている場合，先ず，モデル$T\varphi \in \Phi$から，パターン集合$\Psi(\subset \Phi)$内の1つのパターンを想起した後（他想起），この想起されたパターンから，$T \cdot \Omega$内の1つのパターンを想起すること（自己想起）が，良好なパターン認識の働きを実現するのに基本的に必要とされる．

自己想起，他想起の働きに基本的に要求されるのは，記憶した個々のパターンが単段階で誤差なく，読み出される（想起される）という「素想起性質」である．素想起性質が満たされていないと，記憶した個々のパターンのいずれかに似ているパターンが入力されたとき，この入力パターンをprobe（探り針）とし，単段階想起認識の性能を向上しようとする目的を持つ想起の多段階認識構成法（連想形認識法）ですら記憶した個々のパターンを誤差なく，読み出すことが必ずしも期待されないからである．本研究で提案される諸想起の方法はいずれも，素想起の働きがあるように実現されている．

入力パターン$\varphi$のモデル$T\varphi$があるカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターン$\omega_j$のモデル$T\omega_j$と異質であれば，

先ず，$T\varphi$を$T\omega_j$に対応するパターンモデル（の定数倍$\eta'_j \equiv \dfrac{T\eta_j}{\|T\eta_j\|}$）に想起変換した後（他想起の後），得られたこのパターンモデルをあるカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターン$\omega_j$のモデル$T\omega_j$に変換した方（自己想起の方法）が，良好な連想形認識の働きが達成されやすい．本論文は，主として，この他想起の働きを素想起の性質を備えているように構成する方法を研究している．

任意の単位ベクトル$\vec{w}$に直交し原点$O$を通る超平面$Mirror_{\vec{w}}$を鏡と考えた時，この鏡$Mirror_{\vec{w}}$に映る任意のベクトル$\vec{a}$の像$\vec{b}$を得るHouseholder変換で，ノルムが等しい2つの元$\vec{a},\vec{b}$について，一方の元$\vec{a}$から他方の元$\vec{b}$へ移す変換を鏡映変換という．本論文では，先ず，可分な一般抽象複素ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$でのHouseholder変換の諸性質を調べた後，実ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$での，Householder変換に制限を付けて定義される鏡映変換の諸性質，諸例と，その2つの応用（上3角行列への変換に伴う連立1次方程式の解法，パターンの簡単な連想形認識法）とが検討された（第2〜5章）．ノルムが1の任意のパターンからノルムが1の任意のパターンへ変換できる鏡映変換の有限列が存在することが第6章で示されるが，この数理的存在は，パターンがある1つのカテゴリに帰属するかどうかの認識決定が如何に困難になるかを窺がうことに役立つ．つまり，パターンがある1つのカテゴリに帰属するかどうかの境界は限りなく曖昧なことが判明することになる．

入力パターン$\varphi$のモデル$T\varphi$は，パターンモデル$T\eta_j$の有限集合

$$T\eta_j, j \in J = \{1,2,\cdots,m\} \tag{\#2}$$

の内の何れか1つに似ているとして，この入力パターン$\varphi$から，$T\eta_j$と1対1の対応がある$T\omega_j$の集合

$$T\omega_j, j \in J = \{1,2,\cdots,m\} \tag{\#3}$$

の内の1つを想起し，この入力パターン$\varphi$を認識する他想起認識法が，

（1）鏡映変換$U_i$を利用する方法

（2）鏡映変換$U_i$を利用しなくて実数値類似度関数$RSM'$を使う方法

の2つの形で提案される．

式(#3)の有限集合の内の何れか1つに似ているとして，入力パターン$\varphi$から，この式(#3)の有限集合の内の1つ（に似たパターン）を想起し，入力パターン$\varphi$を認識するのが自己想起認識法であるが，更に，この自己想起認識法も研究される．

第7章，7.3節において，次の多段階他想起認識法1が提案されている：

[多段階他想起認識法1]

パターン$\varphi$のモデル$T\varphi$を求め，ノルム規格化パターン

$$\varphi' \equiv \frac{T\varphi}{\|T\varphi\|}(\neq 0), where \quad T\varphi = 0 \text{ のとき } \varphi' \equiv 0 \tag{\#4}$$

を作る．$J$をカテゴリ番号の全有限集合として，パターン変換

$$U_i\eta'_i = \omega'_i, i \in J \tag{\#5}$$

を満たす鏡映変換$U_i(i \in J)$の族を用意する．

$$\arg\max_{i \in J} SM(U_i\varphi', \omega'_i) = j \in J \tag{\#6}$$

ならば，

RECOGNITRONが$\varphi$を処理の対象とする問題の入力パターンとする場面において，$\varphi$の代りに，$U_i\varphi'$を多段階自己想起認識法を採用しているRECOGNITRONへの入力とする．□

この多段階他想起認識法1は7.2節の単段階他想起認識法1を改良した認識法であり，これまでの不動点想起形帰納推理認識法を採用するRECOGNITRONで，補助のパターン前処理法として使用でき

ることを示している．これまでの研究においては，入力パターン$\varphi$のモデル$T\varphi$があるカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターン$\omega_j$のモデル$T\omega_j$と似ていること（$T\varphi$が$T\omega_j$に比べあまり変形していないこと）が想定されており，本研究内容はこの想定がなくても，認識システムRECOGNITRONが良好な認識の働きを備えていることを可能にするものである．

次に，第8章において，入力パターン$\varphi \in \Phi$との相関を内積で測って，離散化しない内積値$a_j(T\varphi)$，離散化した内積値$a'_j(T\varphi)$を使う2つの方法で，単段階で素想起の働きを実現しようとする2つの自己想起作用素$B_1(\gamma), B'_1(\gamma)$が構成され，$B_1(\gamma), B'_1(\gamma)$を使った単段階で素想起の働きがある自己想起認識の働きが研究される．

次に，単段階で素想起の働きがある想起の働きを多段階構成する方法が研究される．

入力パターン$\varphi \in \Phi$のモデル$T\varphi \in \Phi$が代表パターン$\omega_j \in \Omega \subset \Phi$のモデル$T\omega_j \in T \cdot \Omega$の集合内のどれとも全く似ていなくて，パターン集合$\Psi(\subset \Phi)$内の何れか1つと似ている場合，モデル$T\varphi \in \Phi$を$\Psi(\subset \Phi)$内の何れか1つと似ているパターン$Q(\gamma)T\varphi(=Q(\gamma)\varphi)$に変換した後，S.Suzukiの提案した認識システムRECOGNITRONで多段階連想形認識処理をする必要（他想起認識法の導入の必要）がある．本論文は，このような他想起認識法を研究する1つの準備であり，Householder変換を利用した鏡映形想起作用素$B_2(\gamma)$の構成法を論じ，その後，実数値類似度関数$RSM'$を使い，Householder変換を利用しない他想起法に役立つ写像$B(\mu)$の構成法につき，検討する（10.2節）．

これまでのシミュレーション[21]，[22]，[23]からは，恐らく，$B(\mu)$の方が$B_2(\gamma)$より良好な認識性能をもたらすだろうと，予想されるが，$B_2(\gamma)$を使う方は簡便であるなどの利点がある．

**キーワード**

（1）他想起　（2）自己想起　（3）素想起　（4）Householder変換　（5）鏡映変換
（6）大分類関数　（7）多段階パターン変換　（8）認識システムRECOGNITRON
（9）カテゴリ　（10）代表パターン　（11）カテゴリ帰属知識

## Abstract

How to extract the features from a pattern $\varphi \in \Phi$ (a setup of the feature-extracting process) has set up in satisfactory is equivalent to measuring how much the pattern $\varphi \in \Phi$ resembles in shape each prototypical pattern $\omega \in \Omega$ of each category (a construction of a similarity-measure function). A contrary can also say. In a mathematical theory(SS-theory)[3], [4] of an associative pattern-recognition, a multi-stage autoassociative pattern-recognizer RECOGNITRON proposed by S.Suzuki has been presented making such an idea into a background. As basic pattern conversion, this multi-stage autoassociative recognizing method has adopted the structural fertilization operator $A(\lambda)$. This method was applied to recognition and an understanding of a landscape image, and the result of a certain grade is obtained.

In this paper, research which uses a function of heteroassociation for raising the pattern recognition capability of the recognition system RECOGNITRON which adopted this multi-stage autoassociative recognizing method is done.

When the model $T\varphi \in \Phi$ of an input pattern $\varphi \in \Phi$ does not resemble which in a corresponding

pattern-model set

$$T\omega_j \in T\cdot\Omega \equiv \{T\omega_j \mid j\in J\} \subset \Phi \qquad (\#1)$$

of the memorized prototypical patterns（$\omega_j \in \Omega \subset \Phi$, $j\in J$）at all and the model $T\varphi \in \Phi$ resembles any one of a pattern set $\Psi(\subset\Phi)$, after recollecting one pattern in a pattern set $\Psi(\subset\Phi)$ from a model $T\varphi\in\Phi$ （heteroassociation), to recollect one pattern in $T\cdot\Omega$ from this recollected pattern（autoassociation）is needed fundamentally to realize work of good pattern recognition.

What is fundamentally demanded to work of autoassociation and heteroassociation is a character of primitive recollection which means that each pattern memorized can be recollected without error in a single stage. Unless the character of primitive recollection is fulfilled, recollecting without error each pattern memorized even with the multi-stage recognition construction of association with the purpose which is going to improve the performance of single stage associative recognition is not necessarily expected when the pattern similar to either of each memorized patterns is inputted, and this input pattern is assumed to be a probe. Each method of many association proposed by this research can realize the character of primitive recollection.

If the model $T\varphi$ of an input pattern $\varphi$ is as heterogeneous as the model $T\omega_j$ of the prototypical pattern $\omega_j$ of a category $\mathfrak{C}_j$, an heteroassociative conversion is made from $T\varphi$ into the pattern $\eta'_j \equiv \frac{T\eta_j}{\|T\eta_j\|}$ obtained multiplying the pattern model $T\eta_j$ by the constant $\frac{1}{\|T\eta_j\|}$ corresponding to the model $T\omega_j$ of a representation pattern $\omega_j$. Changing this obtained pattern into the model $T\omega_j$ of the prototypical pattern $\omega_j$ of a certain category $\mathfrak{C}_j$, good associative recognition is easy to be attained rather than directly changing at a single step the model $T\varphi$ of an input pattern $\varphi$ into the model $T\omega_j$ of the prototypical pattern $\omega_j$ of the category $\mathfrak{C}_j$. In addition, this paper is going to study some works of heteroassociation as it has the character of primitive recollection.

When the hyperplane $Mirror_{\vec{w}}$ which intersects perpendicularly with an arbitrary unit vector $\vec{w}$ and passes along the original point $O$ is considered to be a mirror, the conversion which is a special form of the Householder conversion which obtains the image $\vec{b}$ of arbitrary vectors $\vec{a}$ reflected in this mirror $Mirror_{\vec{w}}$ and which moved from one element $\vec{a}$ to the element $\vec{b}$ of another side is called a mirrored-image transformation about the two element $\vec{a},\vec{b}$ with the equal norm. After investigating many character of Householder conversion in separable abstract complex Hilbert space $\mathfrak{H}$, many properties and many examples of the mirrored-image transformation which imposes restriction on Householder conversion in real space $\mathfrak{H}$, and two applications of this transformation to a solution of the simultaneous linear equations accompanying conversion in upper triangular matrix and the easy methods of recognizing a pattern associatively were considered from Chapter 2 of this paper by Chapter 5.

It is shown by Chapter 6 that the finite sequence of mirrored-image transformations convertible from the arbitrary patterns whose norm is 1 into the arbitrary patterns whose norm is 1 exists. This mathematical existence is useful to hearing the reason why the recognition determination of whether a pattern belongs to one category becomes difficult. That is, it will become clear that the boundary of whether a pattern belongs to one category is ambiguous infinite.

It is supposed that the model $T\varphi$ of an input pattern $\varphi$ is similar to someone of the limited sets

$T\eta_j, j \in J = \{1, 2, \cdots, m\}$ (#2)

of pattern models $T\eta_j$ s. A heteroassociative method of recognizing patterns which from an input pattern $\varphi$, recollects one of set

$T\omega_j, j \in J = \{1, 2, \cdots, m\}$ (#3)

of prototypical models $T\omega_j$ s with correspondence of 1 to 1 to pattern-model $T\eta_j$ s, and which recognizes this input pattern $\varphi$ is presented in the following two forms（1）and（2）:

（1）How to use the mirrored-image transformation $U_i$.

（2）The method using a real-valued similarity-measure function $RSM'$ not using the mirrored-image transformation $U_i$. □

Furthermore, supposing that an input pattern $\varphi$ is similar to someone of limited set of an expression（#3）, a pattern which may be similar to one of limited sets of this expression（#3）is recollected from $\varphi$, and the autoassociative recognizing method recognizes an input pattern $\varphi$. This autoassociative recognizing method is also studied.

In Section 7.3 of Chapter 7 , the multi-stage heteroassociative recognizing method 1 is proposed as follows:

[the multi-stage heteroassociative recognizing method]

RECOGNITRON asks for the model $T\varphi$ of a pattern $\varphi$ and a pattern normalized by norm $\|T\varphi\|$

$\varphi' \equiv \dfrac{T\varphi}{\|T\varphi\|} (\neq 0), where \quad \varphi' \equiv 0 \text{ if } T\varphi = 0$ (#4)

is made. The fellows $U_i (i \in J)$ of mirrored-image transformatios who fill pattern conversion

$U_i \eta'_i = \omega'_i, i \in J$ (#5)

are prepared where the set J denotes a whole-finite set of a category number. If RECOGNITRON knows

$\arg\max_{i \in J} SM(U_i\varphi', \omega'_i) = j \in J$ (#6)

, in the scene of that RECOGNITRON uses pattern $\varphi$ as the input pattern in question, a pattern $U_i\varphi'$ is considered as the input pattern instead of $\varphi$ to RECOGNITRON which has adopted the multi-stage autoassociative recognizing method. □

The multi-stage heteroassociative recognizing method 1 is the recognizing method which improved the single-stage heteroassociative recognizing method 1 of Section 7.2. It is shown that RECOGNITRON which adopts the fixed-point recall type inductive inference recognizing method can use the multi-stage heteroassociative recognizing method 1 as a pattern pretreating method of assistance. It is assumed in old research that the model $T\varphi$ of an input pattern $\varphi$ is similar to the model $T\omega_j$ of the prototypical pattern $\omega_j$ of a category $\mathfrak{C}_j$, that is, $T\varphi$ is seldom changing compared with $T\omega_j$. Even if these contents of research do not have this assumption, they enable the recognition system RECOGNITRON to have work of good recognition.

Next, in Chapter 8, the method of measuring correlation between the pattern remembered and an input pattern $\varphi \in \Phi$ by the inner product is adopted. Then, by two methods using the inner product value $a_j(T\varphi)$ which is not quantized and the quantized inner product value $a'_j(T\varphi)$, two

autoassociative operators $B_1(\gamma), B_1'(\gamma)$ which are going to realize the work of primitive recollection are constituted. The work of the single-step autoassociative recognition with the primitive recollection is studied using $B_1(\gamma), B_1'(\gamma)$.

Next, the method of carrying out multi-stage composition is studied by use of a single-step remembrance with the work of primitive recollection.

When the model $T\varphi \in \Phi$ of an input pattern $\varphi \in \Phi$ does not resemble which in a set of the model $T\omega_j \in T \cdot \Omega$ of a prototypical pattern $\omega_j \in \Omega \subset \Phi$ at all and resembles someone of another pattern set $\Psi(\subset \Phi)$, after changing a pattern model $T\varphi \in \Phi$ into the pattern $Q(\gamma)T\varphi(=Q(\gamma)\varphi)$ similar to someone of the pattern set $\Psi(\subset \Phi)$, it is necessary to carry out multi-stage associative type recognition processing by the recognition system RECOGNITRON which S.Suzuki proposed (the necessity for introduction of the heteroassociative recognizing method). This paper is one preparation which studies such a heteroassociative recognizing method:

The construction of the mirrored-image transformation type associative operator $B_2(\gamma)$ using Householder conversion is discussed. Then, we inquires about the construction of the map $B(\mu)$ which is useful to the associative method using the real-valued similarity-measure function $RSM'$ is used for instead of Householder conversion(paragraph 10.2). □

Although it will be expected from the previous simulation[21], [22], [23] if $B(\mu)$ will probably bring about a recognition performance better than $B_2(\gamma)$, there is an advantage in the method who use $B_2(\gamma)$ which is simple.

Key words

(1) heteroassociation (2) autoassociation (3) primitive recollection
(4) Householder conversion (5) mirrored-image transformation
(6) rough classification (7) multi-stage pattern-transformation
(8) recognition system RECOGNITRON (9) pattern model (10) prototypical pattern
(11) categorical-membership knowledge

## 第1章　まえがき

### 1.1　本研究の目的と，自己想起認識法・他想起認識法

任意の単位ベクトル$\vec{w}$に直交し原点$O$を通る超平面$Mirror_{\vec{w}}$を鏡と考えた時，この鏡$Mirror_{\vec{w}}$に映る任意のベクトル$\vec{a}$の像$\vec{b}$を得る変換を，Householder変換という．

ノルムが等しい2つの元について，一方の元から他方の元へ移す，可分な一般抽象実ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$でのHouseholder変換を鏡映変換という．本論文では，可分な一般抽象複素ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$でのHouseholder変換の諸性質を調べた後，可分な一般抽象実ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$での，Householder変換に制限を付けて定義される鏡映変換の諸性質と，その2つの応用(連立1次方程式の解法，パターンの連想形認識法)を検討する．入力パターン$\varphi$のモデル$T\varphi$があるカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターン$\omega_j$のモデル$T\omega_j$と異質であれば，先ず，$T\varphi$を$T\omega_j$と対応を備えているパターンモデル(の定数倍$\eta_j' \equiv \dfrac{T\eta_j}{\|T\eta_j\|}$)

に想起変換した後，得られたこのパターンモデルをあるカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターン$\omega_j$のモデル$T\omega_j$に想起変換した方(他想起の方法)が，良好な認識の働きが達成されやすい．本論文は，主として，素想起の性質を備えているようにこの他想起の働きを構成する方法を研究したものである．

### 1.1.1　単段階変換形自己想起認識法

$\Phi$は処理の対象とする問題のパターン$\varphi$の集合であるとしよう．

入力パターン$\varphi \in \Phi$が認識システムに取り込まれると，パターンモデル$T\varphi \in \Phi$となる．モデル$T\varphi \in \Phi$はパターン$\varphi \in \Phi$の代りとなる標準形(canonical form)であり，パターン$\varphi \in \Phi$の，付録Bのaxiom 1を満たす式(B.3)のモデル構成作用素$T:\Phi \to \Phi$による変換像である．

第$j \in J$番目のカテゴリ(類概念)$\mathfrak{C}_j$の諸性質を典型的に備えているパターン(代表パターン)$\omega_j \in \Omega(J) \subset \Phi$を導入する(付録Bの2式(B.12)，(B.13)を参照)．

入力パターン$\varphi \in \Phi$のモデル$T\varphi \in \Phi$は，有限個のパターンモデル$T\omega_j$の集合

$$T\omega_i, i \in \gamma = [1 \quad 2 \quad \cdots \quad m] \in 2^J \tag{1.1}$$

の何れか1つに似ているとしよう．ここに，$\gamma = [1 \quad 2 \quad \cdots \quad m] \in 2^J$は$m$個のカテゴリ番号$1, 2, \cdots, m$を要素にもつリストであり，$2^J$は1つもカテゴリ番号を含まない空リスト$\phi$，すべてのカテゴリ番号を含む全要素リスト$J$を含む「すべてのカテゴリ番号のリストからなる集合(べき集合;power set)」である．

入力パターン$\varphi$から，そのモデル$T\varphi$と各$T\omega_i, i \in \gamma$との相関を使って，式(1.1)の代表パターンモデル集合内の1つ$T\omega_j$に近い$Q(\gamma)\varphi$(作用素$Q(\gamma)$によるパターン$\varphi$の変換像)を想起し，入力パターン$\varphi$を第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属すると認識するのが，(単段階でパターンを変換することによる)自己想起認識法(single-stage recognition method using autoassociation)である(図1.1を参照)．

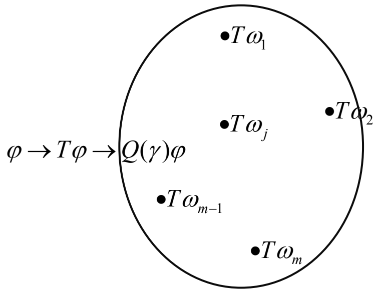


Fig.1.1　single-stage recognition method using autoassociation

**図1.1　単段階変換形自己想起認識法**

### 1.1.2　単段階変換形他想起認識法

入力パターン$\varphi$のモデル$T\varphi$は，有限個のパターンモデル$T\eta_j$の集合

$$T\eta_i, i \in \gamma = [1 \quad 2 \quad \cdots \quad m] \tag{1.2}$$

の何れか1つに似ているとしよう．入力パターン$\varphi$から，そのモデル$T\varphi$と各$T\eta_i, i \in \gamma$との相関を使って，式(1.1)の代表パターンモデルの集合内の1つ$T\omega_j$に近い$Q(\gamma)\varphi$(作用素$Q(\gamma)$によるパターン$\varphi$の変換像)を想起し，入力パターン$\varphi$を第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属すると認識するのが，単

段階でパターンを変換することによる）他想起認識法（single-stage recognition method using heteroassociation）である（図1.2を参照）． □

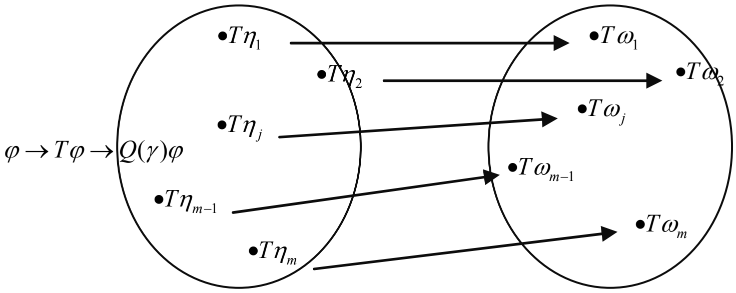


Fig.1.2 single-stage recognition method using heteroassociation

**図1.2 単段階変換形他想起認識法**

本論文では，鏡映変換を利用して，また，鏡映変換を利用しないで，パターン想起作用素（pattern-recall operator）と呼ばれる写像

$$Q(\gamma):\Phi \to \Phi \tag{1.3}$$

を構成する．

### 1.1.3 多段階自己想起認識法

カテゴリ番号リスト$\lambda_s$の列

$$\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s,\lambda_{s+1},\cdots,\lambda_{t-1},\lambda_t,\cdots \tag{1.4}$$

を帰納推理の働きで選び，入力パターン$\varphi \in \Phi$を

$$\varphi \to \varphi_0 \equiv T\varphi \to \varphi_1 \equiv TQ(\lambda_0)T\varphi_0 \to \varphi_2 \equiv TQ(\lambda_1)T\varphi_1 \to \cdots \to \varphi_{s+1} \equiv TQ(\lambda_s)T\varphi_s \to \cdots$$
$$\to \varphi_t = TQ(\lambda_{t-1})T\varphi_{t-1} \to \varphi_{t+1} = TQ(\lambda_t)T\varphi_t \to \cdots \tag{1.5}$$

という具合に，多段階変換し（連想的変換），入力パターン$\varphi \in \Phi$が帰属する1つのカテゴリ$\mathfrak{C}_j$と，入力パターン$\varphi \in \Phi$から想起されるパターン$TQ(\lambda_t)T\varphi_t$とが同時に得られる連想形認識処理（S.Suzukiが提案した認識システムRECOGNITRON[3]，[4]による認識処理）に，この鏡映変換を応用する方法が研究される．式(1.5)のパターン列（入力パターン$\varphi \in \Phi$の認識過程）

$$\varphi,\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s,\varphi_{s+1},\cdots,\varphi_t,\varphi_{t+1} \tag{1.6}$$

の終了条件は，不動点方程式

$$(\varphi_{t+1} \equiv)TQ(\lambda_t)T\varphi_t = \varphi_t \tag{1.7}$$

の成立である．通常，崩れていない正常な入力パターン$\varphi \in \Phi$から最終的に想起されるパターン$TQ(\lambda_t)T\varphi_t$は，不動点方程式(1.7)を満たす．また，入力パターン$\varphi \in \Phi$が帰属する1つのカテゴリ$\mathfrak{C}_j$は，この不動点想起パターン$\varphi_t \in \Phi$の帰属する1つのカテゴリとして，

$$\arg\max_{i \in J} SM(\varphi_t,\omega_i) = j \in \gamma \tag{1.8}$$

と決められる．ここに，$\arg\max_{i \in J} SM(\varphi_t,\omega_i) = j \in \gamma$は，$SM(\varphi_t,\omega_i), i \in \gamma$の内の最大値を与えるカテゴリ番号の最も小さいカテゴリ番号が$j \in \gamma$であることの意味である．

実は，初期設定

$\varphi_0 = T\varphi \in \Phi, \lambda_0 = \gamma \in 2^J$，つまり，$<\varphi_0, \lambda_0> =_\Delta <T\varphi, \gamma> \in <\Phi, 2^J>$ (1.9)

を採用し，式(1.6)のパターン列の代りに，

パターン$\varphi_s$はカテゴリ集合

$$\mathfrak{C}(\lambda_s) \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid j \in \lambda_s\} \tag{1.10}$$

の1つに帰属する可能性がある

と読まれるカテゴリ帰属知識$<\varphi_s, \lambda_s> \in <\Phi, 2^J>$の列

$$<\varphi_0, \lambda_0>, <\varphi_1, \lambda_1>, <\varphi_2, \lambda_2>, \cdots, <\varphi_s, \lambda_s>, <\varphi_{s+1}, \lambda_{s+1}>, \cdots, <\varphi_t, \lambda_t>, <\varphi_{t+1}, \lambda_{t+1}>, \cdots \tag{1.11}$$

を採用するのが，入力パターン$\varphi \in \Phi$を受け入れた認識システムRECOGNITRON[3]，[4]の認識過程である．ここに，付録Bの定理B.1のカテゴリ選択関数

$$CSF : \Phi \times 2^J \to 2^J \tag{1.12}$$

を使って，$\varphi_{s+1}, \lambda_{s+1}$は

$$\varphi_{s+1} = TQ(\mu_s \cap \lambda_s)T\varphi_s,\ \lambda_{s+1} = CSF(\varphi_s, \mu_s \cap \lambda_s), s = 0,1,2,\cdots,t \tag{1.13}$$

と定義される．式(1.4)のカテゴリ番号リスト$\lambda_s$の列の代りに，カテゴリ番号リスト$\mu_s$の列

$$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s, \mu_{s+1}, \cdots, \mu_{t-1}, \mu_t, \cdots \tag{1.14}$$

を帰納推理の働きで選ばなければならない．

このとき，終了条件式(1.7)の代りに，終了条件

$$\varphi_t = TQ(\mu_t \cap \lambda_t)T\varphi_t, \lambda_t = CSF(\varphi_t, \mu_t \cap \lambda_t) \tag{1.15}$$

つまり，$<\varphi_{t+1}, \lambda_{t+1}> =_\Delta <\varphi_t, \lambda_t>$ (1.16)

を採用することになる．

通常，終了条件式(1.16)のカテゴリ番号のリスト$\lambda_t \in 2^J$は，式(1.8)のカテゴリ番号$j \in J$と

$$\lambda_t = [j] \in 2^J \tag{1.17}$$

という関係にあるし，終了条件式(1.16)のパターン$\varphi_t \in \Phi$は，

$$\varphi_t = T\omega_j \in \Phi \tag{1.18}$$

である．

## 1.2　認識システムRECOGNITRON≡RECOGNITRON$(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) \equiv <\Phi_B, T, SM, BSC>$

S.Suzukiは，これまで，

(1#) パターン$\varphi \in \Phi$を整形する時のSS整形化方程式[44]（半順序関係$\propto$に関する2元$K\varphi, B\phi$の上限$\phi = K\varphi \Delta B\phi$を解に持つ整形化方程式）

$$\phi = K\varphi \triangle B\phi \tag{1.19}$$

(2#) パターン$\varphi$の集合$\Phi$を構成的に決定する時のSS再帰領域方程式（パターン集合$\Phi$を定義する再帰領域方程式[3]）

$$\Phi = \Phi_B \cup T \cdot \Phi \cup R^{++} \cdot \Phi \tag{1.20}$$

(3#) パターン$\varphi \in \Phi$の帰属するカテゴリを決定する時に認識システムRECOGNITRONが解かねばならないSS認識方程式（連想形認識方程式[3]，[4]）

$$<\phi, \lambda> =_\Delta <T\varphi, \gamma> \bigsqcup_\Delta{}^* TA(\mu)T \cdot <\phi, \lambda>, \mu \subseteq \gamma \tag{1.21}$$

(4#) カテゴリ帰属知識$<\varphi, \gamma>$のSS標準分解[3]（認識システムRECOGNITRONが連想形認識方程式を解くときの，途中の作業状態を分析するときに役立つ分解）

(5#) 発想推論の設定に役立つパターン$\varphi \in \Phi$のSS外積分解[42]

(6#) カテゴリ帰属知識$<\varphi, \gamma>$のSSポテンシャル（連想形認識方程式の求解過程が収束している程

度を評価できる非負量）

$$E(\varphi,\gamma)=|\gamma|-\sum_{j\in\gamma}SM(\varphi,\omega_j) \tag{1.22}$$

（7#） 2つのパターンモデル$T\varphi,T\eta\in\Phi$間のSS相互情報量（$T\varphi$が$T\eta$を含む程度を表す情報量）[49]

$$MI(T\varphi:T\eta)=-\frac{1}{2}\cdot\log_e[1-\left|\frac{(T\varphi,T\eta)}{\|T\varphi\|\cdot\|T\eta\|}\right|^2] \tag{1.23}$$

を提案している． □

例えば，視覚のパターン認識機能は，外界に関する知識を学習しておかねばならないという条件の下で，刺激としてのパターンに意味を見出し，外界にあるパターンの表象（再表現）を作り出す必要がある．このようなパターン認識機能を持つ認識システム

$$\mathrm{RECOGNITRON}\equiv\mathrm{RECOGNITRON}(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))\equiv<\Phi_B,T,SM,BSC> \tag{1.24}$$

が連想形認識方程式(1.21)を解いて，パターン$\varphi\in\Phi$を認識する際，

RECOGNITRONが行う各操作がパターン$\varphi\in\Phi$のどんな情報を抽出しているか (1.25)

について

パターン$\varphi\in\Phi$を多段階にわたりある操作の不動点に変換して，認識する方法
（不動点を想起する認識法；不動点連想形多段階認識法） (1.26)

は，

不動点の近くにあるパターン（不動点をあるカテゴリの代表パターンに対応させた場合，
この代表パターンの情報の殆どを持つけれども，不動点から少し変形しているパターン）は，
この不動点に単段階ではなく多段階では，変換され得る (1.27)

という考えを採用している．

不動点から変形しているパターンが不動点と同じに見るためには，

任意のパターンが記憶している有限個のパターン（代表パターン）の内の，どの1つと最も
似ているかを決めることのできる類似度関数$SM$の設計法 (1.28)

が必要とされる．

### 1.3 量子計算情報系の時間的発展（ユニタリ発展）に対応するのは，認識システムRECOGNITRONが連想形認識方程式を解く求解過程（パターン認識過程）である

量子力学の諸原理を採用した量子計算情報系[48]では，密度作用素（density operator）

$$\rho*1=\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot(*1,\phi_i)\cdot\phi_i \tag{1.29}$$

は，確率$p_i$で純粋状態（pure state）$\phi_i$をとる混合状態（mixed state；mixture）

$$\{[\phi_i,p_i]\,|\,i=1,2,\cdots,m\} \tag{1.30}$$

を記述する統計作用素（statistical operator）であり，認識システムRECOGNITRONでは，以下のパターン想起作用素$A(*2)*1$に相当する．量子計算情報系の時間的発展（ユニタリ発展）に対応するのは，認識システムRECOGNITRONが連想形認識方程式を解く求解過程（パターン認識過程）である．

式(1.24)の認識システムRECOGNITRONの純粋状態は，或るカテゴリ番号$j\in J$を選んで，

$$<\omega_j,[j]> \tag{1.31}$$

と表される．認識システムRECOGNITRONの混合状態は，

$$<*1,*2> \tag{1.32}$$

と表される．ここに，*1はパターン，或いはパターンモデルであり，*2はカテゴリ番号リストである．

混合状態$<*1,*2>$は，S.Suzukiの，カテゴリ帰属知識の標準分解定理[3]によれば，

$$<*1,*2>=\sum_{k\in CSF(*1,*2)}\sqrt{SM(*1,\omega_k)}\cdot<\omega_k,[k]> \tag{1.33}$$

と展開され（文献[3]，p.119，定理7.1），この混合状態$<*1,*2>$は，確率

$$\frac{SM(*1,\omega_k)}{\sum_{i\in CSF(*1,*2)}SM(*1,\omega_i)} \tag{1.34}$$

で純粋状態$<\omega_k,[k]>$をとる状態である（文献[3]の付録Gの定理G4）．

混合状態$<*1,*2>$を記述する作用素は構造受精作用素と呼ばれるパターン想起作用素の典型的なものであり，式(1.12)のカテゴリ選択関数$CSF$を使って，

$$A(*2)*1\equiv\sum_{k\in CSF(*1,*2)}SM(*1,\omega_k)\cdot T\omega_k \tag{1.35}$$

と表される（文献[3]のp.174，定理G2）．

認識の働きとは，連想形認識方程式を解くことであり，この求解過程は

構造受精変換（パターン想起変換）

$$TA(*3)T<*1,*2>$$
$$=_\Delta<TA(*3\cap *2)T*1,CSF(*1,*3\cap *2)> \tag{1.36}$$

からなる系列を使って，混合状態をある純粋状態に変換すること (1.37)

である．ここに，*1はパターン，或いはパターンモデルであり，*2,*3は共にカテゴリ番号リストである．特に，カテゴリ番号リスト*3は帰納推理の働きでその都度選定されなければならない．

連想形認識方程式(1.21)を解くことについて説明しておこう．その帰属するカテゴリの候補が，

$$\mathfrak{C}(\gamma)\equiv\{\mathfrak{C}_j\mid j\in\gamma\} \tag{1.38}$$

の内の1つであるような処理の対象とする問題の入力パターン$\varphi\in\Phi$についての，認識システムRECOGNITRONの稼動場面における時間的発展（入力パターン$\varphi\in\Phi$についての認識過程）は，

$$<\phi_{s+1},\lambda_{s+1}>=_\Delta<T\varphi,\gamma>\bigsqcup{}_\Delta^{*}\ TA(\mu_s)T\cdot<\phi_s,\lambda_s>,\mu_s\subseteq\gamma,s=0,1,2,\cdots \tag{1.39}$$

$$\text{on condition that}\quad <\phi_s,\lambda_s>|_{s=0}=_\Delta<T\varphi,\gamma> \tag{1.40}$$

という連想形認識方程式(1.21)の求解過程である．

連想形認識方程式の求解過程

$$<\phi_0,\lambda_0>,<\phi_1,\lambda_1>,\cdots,<\phi_s,\lambda_s>,<\phi_{s+1},\lambda_{s+1}>,\cdots,<\phi_t,\lambda_t> \tag{1.41}$$

$$\text{ここに，}<\phi_{t+1},\lambda_{t+1}>=_\Delta<\phi_t,\lambda_t> \tag{1.42}$$

には，相互情報量$MI(\mathfrak{C}(J):\phi_s)$の列

$$MI(\mathfrak{C}(J):\phi_s)\equiv\sum_{j\in J}prob\{\frac{\mathfrak{C}_j}{\phi_s}\}\cdot\log_e\frac{prob\{\frac{\mathfrak{C}_j}{\phi_s}\}}{p(\mathfrak{C}_j)},s=0,1,2,\cdots,t \tag{1.43}$$

$$\text{ここに，}\quad prob\{\frac{\mathfrak{C}_j}{\phi_s}\}=SM(\phi_s,\omega_j),j\in J,s=0,1,2,\cdots,t \tag{1.44}$$

につき，

$\lambda_t=[j]$ならば，最終値$MI(\mathfrak{C}(J):\phi_t)$が最大値$-\log_e p(\mathfrak{C}_j)$をとること (1.45)

が望ましい．つまり，

$$\max_{s=0,1,2,\cdots,t} MI(\mathfrak{C}(J):\phi_s) = MI(\mathfrak{C}(J):\phi_t) \wedge MI(\mathfrak{C}(J):\phi_t) = -\log_e p(\mathfrak{C}_j) \tag{1.46}$$

が望ましい．ここに，$-\log_e p(\mathfrak{C}_j)$ は，RECOGNITRONにより，第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属すると認識断定された入力パターン $\varphi \in \Phi$ の自己情報量(amount of self- information)である．

付録Fによれば，入力パターン $\varphi \in \Phi$ からカテゴリ帰属に関する最大の不確定さを取り除くという意味で，相互情報量 $MI$ を最大にならしめるパターン認識過程が連想形認識方程式(1.21)の解を求めている式(1.11)のカテゴリ帰属知識の列なのである．

## 1.4　SS展開1，SS展開2

S.Suzukiは，次の2展開(1#)，(2#)を考えている：

(1#)　SS展開1(外積によるパターン $\varphi$ の直交展開)[42]

任意の $\varphi \in \mathfrak{H}$ を，$|L|$ 次元ユークリッド空間 $R^{|L|}$ の内積 $[\varphi,\eta]$，ノルム $|\varphi|$ を使って展開しよう．

1次独立な系 $\{\phi_\ell\}_{\ell \in \{1,2,\cdots,3n\}}$ で展開された，実ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の元

$$\varphi = \sum_{\ell=1}^{3n} c_\ell \cdot \phi_\ell + \varphi_\perp \quad \text{such that} \quad \forall \ell \in \{1,2,\cdots,3n\}, (\varphi_\perp, \phi_\ell) = 0 \tag{1.47}$$

に対応するような，$R^{3n} <1><2> \cdots <n> \equiv R^3 <1> \times R^3 <2> \times \cdots \times R^3 <n>$ の元は，順序対

$$\vec{\varphi} = col(\varphi <1> \quad \varphi <2> \quad \cdots \quad \varphi <n>) \text{ (列ベクトル)} \tag{1.48}$$

で表わされる．ここに，

$$\varphi <k> \equiv \sum_{\ell=3k-2}^{3k} c_\ell \cdot \phi_\ell, k = 1,2,\cdots,n \tag{1.49}$$

であり，結局，

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi <k> + \varphi_\perp \tag{1.50}$$

が成立している．同様に，パターン $\eta \in \mathfrak{H}$ についても

$$\eta = \sum_{\ell=1}^{3n} d_\ell \cdot \phi_\ell + \eta_\perp \quad \text{such that} \quad \forall \ell \in \{1,2,\cdots,3n\}, (\eta_\perp, \phi_\ell) = 0 \tag{1.51}$$

$$\eta <k> \equiv \sum_{\ell=3k-2}^{3k} d_\ell \cdot \phi_\ell \tag{1.52}$$

$$\eta = \sum_{k=1}^{n} \eta <k> + \eta_\perp \tag{1.53}$$

をも導入すると，$R^{3n} <1><2> \cdots <n>$ の内積 $[\varphi,\eta]$，ノルム $|\varphi|$ は，

$$[\varphi,\eta] \equiv \sum_{\ell=1}^{3n} c_\ell \cdot d_\ell, |\varphi| \equiv \sqrt{[\varphi,\varphi]} \tag{1.54}$$

と定義され，$R^3 <k>$ の内積 $[\varphi <k>, \eta <k>]$，ノルム $|\varphi <k>|$ は，

$$[\varphi <k>, \eta <k>] \equiv \sum_{\ell=3k-2}^{3k} c_\ell \cdot d_\ell, |\varphi <k>| \equiv \sqrt{[\varphi <k>, \varphi <k>]} \tag{1.55}$$

と定義される．そうすると，

$$[\varphi,\eta] = \sum_{k=1}^{n} [\varphi <k>, \eta <k>] \tag{1.56}$$

$$|\varphi| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\varphi <k>|^2} \tag{1.57}$$

が成り立つ．

1次独立な系$\{\phi_\ell\}_{\ell\in\{1,2,\cdots,3n\}}$を用いて2式(1.49)，(1.52)のように分解される2つのパターン$\varphi,\eta\in\mathfrak{H}$に対して，第3のパターンとしての外積$\varphi<k>\otimes\eta<k>$を各々，

$$\varphi<k>\otimes\eta<k>\equiv\begin{vmatrix}\phi_{3k-2} & c_{3k-2} & d_{3k-2}\\ \phi_{3k-1} & c_{3k-1} & d_{3k-1}\\ \phi_{3k} & c_{3k} & d_{3k}\end{vmatrix} \tag{1.58}$$

と定義する．$\varphi,\eta$の外積$\varphi\otimes\eta$は，

$$\varphi\otimes\eta\equiv\sum_{k=1}^{n}\varphi<k>\otimes\eta<k> \tag{1.59}$$

と定義される．

任意の$\varphi\in\mathfrak{H}$と任意の$k\in\{1,2,\cdots,n\}$とに対し，

$$\varphi'<k>\equiv\frac{1}{[\eta<k>,\eta<k>]}\cdot\eta<k>\cdot[\varphi<k>,\eta<k>] \tag{1.60}$$

$$\varphi''<k>\equiv\frac{1}{[\eta<k>,\eta<k>]}\cdot\eta<k>\otimes(\varphi<k>\otimes\eta<k>) \tag{1.61}$$

とおけば，直和分解性

$$\varphi<k>=\varphi'<k>+\varphi''<k> \tag{1.62}$$

が成り立つ．ここに，2成分$\varphi'<k>,\varphi''<k>\ (k=1,2,\cdots,n)$の間に，直交性

$$[\varphi'<k>,\varphi''<k>]=0 \tag{1.63}$$

が成立している．

そうすると，SS分解1(パターン$\varphi$の分解;パターン$\varphi\in\Phi$のSS外積分解[42])

$$\varphi=\sum_{k=1}^{n}\varphi'<k>+\sum_{k=1}^{n}\varphi''<k>+\varphi_{\perp} \tag{1.64}$$

が成り立つ．

(2#) SS展開2(カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$の直交分解)[3]

カテゴリ帰属知識と呼ばれ，認識システムRECOGNITRONがパターン$\varphi\in\Phi$に対し持つ知識$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$は，パターン$\varphi\in\Phi$がカテゴリ集合

$$\mathfrak{C}(\gamma)\equiv\{\mathfrak{C}_j\mid j\in\gamma\}\in 2^J \tag{1.65}$$

内のいずれか1つのカテゴリに帰属している可能性があると読む．ここに，付録Bの式(B.9)のカテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$が導入されている．

付録Bの定理B.1で求められている式(B.34)のカテゴリ選択関数$CSF$を使って，内積$(<\varphi,\gamma>,<\phi,\lambda>)$，ノルム$\|<\varphi,\gamma>\|$を

$$(<\varphi,\gamma>,<\phi,\lambda>)\equiv\sum_{j\in CSF(\varphi,\gamma)\cap CSF(\phi,\lambda)}\sqrt{SM(\varphi,\omega_j)}\cdot\sqrt{SM(\phi,\omega_j)} \tag{1.66}$$

$$\|<\varphi,\gamma>\|\equiv\sqrt{(<\varphi,\gamma>,<\varphi,\gamma>)} \tag{1.67}$$

と，導入する．

付録Bの式(B.11)の，axiom 2を満たす類似度関数$SM$，付録Bの式(B.19)の，axiom 3を満たす大分類関数$BSC$が共に全射性を備えているとの仮定の下で，SS展開2(カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$のSS標準分解[3])

$$\forall<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>,$$
$$<\varphi,\gamma>=\sum_{j\in J}(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)\cdot<\omega_j,[j]>. \tag{1.68}$$

が成り立ち（文献[3]の定理7.1（カテゴリ帰属知識の標準分解定理）），

$$<\Omega, J> \equiv \{<\omega_j,[j]> \mid j \in J\} \tag{1.69}$$

はカテゴリ帰属知識空間$<\Phi, 2^J>$の完全正規直交系である．

よって，パーシバァルの等式

$$\forall <\varphi,\gamma> \in <\Phi, 2^J>,$$

$$\| <\varphi,\gamma> \|^2 = \sum_{j \in J} \left| (<\varphi,\gamma>, <\omega_j,[j]>) \right|^2 . \tag{1.70}$$

も成り立つ（文献[3]の定理7.1の系1）． □

# 第2章　Householder変換$U$と鏡映変換との諸性質

本章では，可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$が複素空間である場合のHouseholder変換$U \bullet = \bullet - 2\cdot(\bullet,\vec{w})\cdot\vec{w}$を説明し，その特別の場合として，可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$が実空間である場合の鏡映変換が，ノルムが等しい2つの元について，一方の元から他方の元へ移すHouseholder変換であることを説明しながら，Householder変換，鏡映変換の諸性質を調べる．

## 2.1　可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$が複素空間である場合のHouseholder変換$U$

### 2.1.1　Householder変換$U$の定義

可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$が複素空間であれば，$\overline{a}$を複素数$a$の共役複素数として，

$$\forall\varphi, \forall\eta \in \mathfrak{H}, (\varphi,\eta) = \overline{(\eta,\varphi)} \tag{2.1}$$

であり，よって，任意の複素定数$a$について，

$$\forall\varphi, \forall\eta \in \mathfrak{H}, (\varphi, a\cdot\eta) = \overline{a}\cdot(\varphi,\eta) = (\overline{a}\cdot\varphi,\eta) \tag{2.2}$$

が成立するが，以後，鏡映変換を考えているときには，可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$は実空間とし，

$$\forall\varphi, \forall\eta \in \mathfrak{H}, (\varphi,\eta) = (\eta,\varphi) \tag{2.3}$$

が成り立つとする．可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$が実空間であれば，任意の複素定数$a$について，

$$\forall\varphi, \forall\eta \in \mathfrak{H}, (\varphi, a\cdot\eta) = a\cdot(\varphi,\eta) = (a\cdot\varphi,\eta) \tag{2.4}$$

が成り立つことに，注意しておく．

任意の単位ベクトル$\vec{w}$に直交し原点$O$を通る超平面を$Mirror_{\vec{w}}$とする．$Mirror_{\vec{w}}$を鏡と考えた時，この鏡$Mirror_{\vec{w}}$に映る任意のベクトル$\vec{a}(=\varphi\in\mathfrak{H})$の像$\vec{b}(=\eta\in\mathfrak{H})$は

$$\vec{b} = \vec{a} - 2\cdot(\vec{a},\vec{w})\cdot\vec{w} \tag{2.5}$$

である（図2.1を参照）．$\vec{b}$は$\vec{a}$についてのHouseholder変換$U$によって得られるという:

$$\vec{b} = U\vec{a} = \vec{a} - 2\cdot(\vec{a},\vec{w})\cdot\vec{w} \tag{2.6}$$

$$U \bullet = \bullet - 2\cdot(\bullet,\vec{w})\cdot\vec{w}\text{，ここに，}\|\vec{w}\| = 1 \tag{2.7}$$

□

### 2.1.2　Householder変換$U$の反不動点性，自己共役性，逆性，ユニタリ性

次の定理2.1は，Householder変換$U$が$\vec{w}$を$-\vec{w}$に移す反不動点の性質を表している．

**［定理2.1］**（Householder変換$U$の反不動点性）

複素ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$，実ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の双方で，

$$U\vec{w} = -\vec{w}. \tag{2.8}$$

（証明）$U\vec{w}$

$$= \vec{w} - 2\cdot(\vec{w},\vec{w})\cdot\vec{w}$$
$$= \vec{w} - 2\cdot\vec{w} \quad \because \quad \|\vec{w}\| = 1$$
$$= -\vec{w}. \qquad \square$$

線形作用素$B:\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$のノルム$\|B\|$は

$$\|B\| \equiv \sup_{\|\varphi\|\le 1}\|B\varphi\| \tag{2.9}$$

と定義され，$\|B\|<\infty$のとき，$B$は有界な線形作用素（bounded linear operator）であるという．

等式

$$\forall\varphi,\forall\eta\in\mathfrak{H},(B\varphi,\eta) = (\varphi,B_1\eta) \tag{2.10}$$

が成り立つ線形作用素$B_1$を有界な線形作用素$B$の共役作用素（adjoint operator）といい，$B^*$で表わす．$B=B^*$のとき，$B$を自己共役作用素（self-adjoint operator）であるという．

等式（ノルム保存式）

$$\forall\varphi\in\mathfrak{H},\|B\varphi\| = \|\varphi\| \tag{2.11}$$

が成り立つ有界な線形作用素$B$をユニタリ作用素（unitary operator）という．

$$B\varphi = 0 \text{ の時，} \varphi = 0 \text{ である} \tag{2.12}$$

が満たされている時，

$$[\forall\varphi\in\mathfrak{H},BA\varphi=\varphi]\wedge[\forall\eta\in\mathfrak{H},AB\eta=\eta] \tag{2.13}$$

を満たす線形作用素$A:\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$が存在するが，この$A$を$B:\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$の逆作用素（inverse operator）といい，$B^{-1}$と表わす．

次の定理2.2は，Householder変換$U$が自己共役性，逆性，ユニタリ性の3性質を備えていることを指摘している．

**［定理2.2］**（Householder変換$U$の自己共役性，逆性，ユニタリ性）

複素ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$，実ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の双方で次の（ｉ）～（iv）が成り立つ．

（ｉ）（自己共役性）$\forall\varphi,\forall\eta\in\mathfrak{H},(U\varphi,\eta) = (\varphi,U\eta)$．　(2.14)

（ii）（逆性）$\forall\varphi\in\mathfrak{H},UU\varphi=\varphi.$　(2.15)

（iii）（ユニタリ性）$\forall\varphi\in\mathfrak{H},\|U\varphi\| = \|\varphi\|.$　(2.16)

（iv）$U = U^* = U^{-1}.$　(2.17)

（証明）（ｉ）の証明：$\forall\varphi,\forall\eta\in\mathfrak{H},(U\varphi,\eta)$

$$= (\varphi - 2\cdot(\varphi,\vec{w})\cdot\vec{w},\eta).$$
$$= (\varphi,\eta) - 2\cdot(\varphi,\vec{w})\cdot(\vec{w},\eta).$$
$$= (\varphi,\eta) - 2\cdot(\varphi,(\eta,\vec{w})\cdot\vec{w})$$
$$= (\varphi,\eta - 2\cdot(\eta,\vec{w})\cdot\vec{w})$$
$$= (\varphi,U\eta).$$

（ii）の証明：$\forall\varphi\in\mathfrak{H},UU\varphi$

$=U[\varphi-2\cdot(\varphi,\vec{w})\cdot\vec{w}]$
$=U\varphi-2\cdot(\varphi,\vec{w})\cdot U\vec{w}$
$=U\varphi+2\cdot(\varphi,\vec{w})\cdot\vec{w}$　$\because$　定理2.1
$=\varphi.$　$\because$　式(2.7)

（ⅲ）の証明：$\forall\varphi\in\mathfrak{H},\|U\varphi\|^2=(U\varphi,U\varphi)$
$=(\varphi,UU\varphi)$　$\because$　（ⅰ）
$=(\varphi,\varphi)$　$\because$　（ⅱ）
$=\|\varphi\|^2.$

（ⅳ）の証明：（ⅰ）より，$U^*=U$であることがわかる．（ⅱ）より，$U^{-1}=U$であることがわかる．よって，$U^*=U=U^{-1}$である．□

## 2.2　可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$が実空間である場合の鏡映変換$U$

可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$が実空間である場合の，式(2.7)のHouseholder変換$U$は，単位ベクトル$\vec{w}$を，ノルム保存条件

$$\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\| \tag{2.18}$$

の下で，

$$\vec{w}\equiv\frac{\vec{a}-\vec{b}}{\|\vec{a}-\vec{b}\|} \tag{2.19}$$

と置かれたとき時，鏡映変換(mirrored-image transformation)であるという．$\vec{b}$は$\vec{a}$についての鏡映変換によって得られるという(図2.1を参照)．

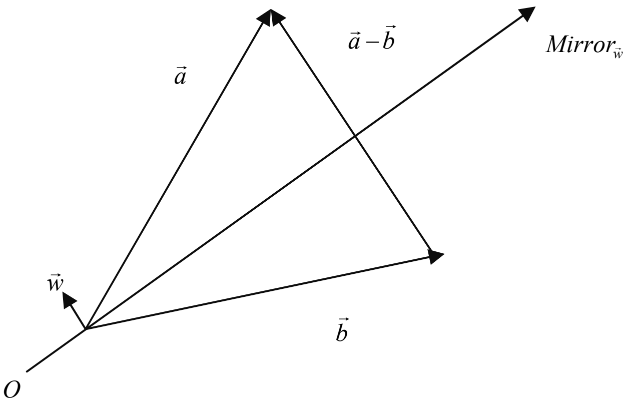


Fig.2.1　Mirroring transformation $U$ having a common original point $O$
**図2.1　共通な原点を持つ鏡映変換$U$**

次の定理2.3，（ⅱ）は，条件式(2.18)を満たすとは限らない定理2.3，（ⅰ）で決定された式(2.7)のHouseholder変換$U$が条件式(2.18)を満たすとき，正に鏡映の性質を備えたものであることを示している．

［定理2.3］（鏡映変換定理）

可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$が実空間である場合，

$$\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\| \neq 0 \wedge \left\|\vec{a}\right\| \neq 0 \wedge \left\|\vec{b}\right\| \neq 0 \tag{2.20}$$

として，式(2.19)の如く式(2.6)のHouseholder変換$U$内の$\vec{W}$を定義する．この時，

$$(\mathrm{i})\quad U\vec{a}=\vec{b}-\frac{\left\|\vec{a}\right\|^2-\left\|\vec{b}\right\|^2}{\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|}\cdot\vec{w}. \tag{2.21}$$

特に，

$$(\mathrm{ii})\ \left\|\vec{a}\right\|=\left\|\vec{b}\right\| \text{の時，}\ U\vec{a}=\vec{b}. \tag{2.22}$$

（証明）（ｉ）の証明：$U\vec{a}=\vec{a}-2\cdot(\vec{a},\vec{w})\cdot\vec{w}$

$$=\vec{a}-2\cdot(\vec{a},\frac{\vec{a}-\vec{b}}{\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|})\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|} \quad \because \quad \text{式}(2.19)$$

$$=\vec{a}-(2\vec{a},\frac{\vec{a}-\vec{b}}{\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|})\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|}$$

$$=\vec{a}-([\vec{a}-\vec{b}]+[\vec{a}+\vec{b}],\frac{\vec{a}-\vec{b}}{\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|})\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|} \quad \because \quad 2\vec{a}=[\vec{a}-\vec{b}]+[\vec{a}+\vec{b}]$$

$$=\vec{a}-(\vec{a}-\vec{b},\frac{\vec{a}-\vec{b}}{\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|})\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|}-(\vec{a}+\vec{b},\frac{\vec{a}-\vec{b}}{\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|})\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|}$$

$$=\vec{a}-(\vec{a}-\vec{b})-(\vec{a}+\vec{b},\frac{\vec{a}-\vec{b}}{\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|})\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|}$$

$$=\vec{a}-(\vec{a}-\vec{b})-(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b})\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|^2}$$

$$=\vec{a}-(\vec{a}-\vec{b})-[\left\|\vec{a}\right\|^2-\left\|\vec{b}\right\|^2]\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|^2} \quad \because \quad (\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$$

$$=\vec{b}-[\left\|\vec{a}\right\|^2-\left\|\vec{b}\right\|^2]\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|^2} \tag{2.23}$$

$$=\vec{b}-\frac{\left\|\vec{a}\right\|^2-\left\|\vec{b}\right\|^2}{\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|}\cdot\vec{w}. \quad \because \quad \text{式}(2.19)$$

（ⅱ）の証明：（ｉ）から明らか.　□

## 第3章　Householder変換の例（周期関数$\varphi(x)$の標本化定理に関連して）

本章では，可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$が複素空間である場合，周期$a(>0)$の周期関数$\varphi(x)$が$2\ell+1$個の離散座標点$x=m\cdot\frac{a}{\ell+1}(m=-\ell\sim+\ell)$での値$\varphi(m\cdot\frac{a}{\ell+1})$により一意的に表現される非負整数$\ell$が存在するという標本化定理が，染谷-Shannonの標本化定理を適用して証明される．その後，第

2章のHouseholder変換を完全正規直交系としての複素指数関数系 $\{\phi_k\}_{k=0,\pm1,\pm2,\cdots}$ で表現する．

### 3.1　周期関数 $\varphi(x)$ の標本化

よく知られている周期関数 $\varphi(x)$ の標本化定理につき，その証明を考案したので，以下にその記述をしておく．

$$\varphi(x+a)=\varphi(x) \quad \text{for} \quad \text{every} \quad x\in R\ (\text{実数全体の集合}) \tag{3.1}$$

が，或る正定数 $a$ について成り立つとしよう．ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}=L_2(\{x\,|-a<x<+a\},dx)$ での，内積 $(\varphi,\eta)$，ノルム $\|\varphi\|$ は，

$$(\varphi,\eta)=\int_{-a}^{+a}dx\varphi(x)\cdot\bar{\eta}(x)\text{，ここに，}\bar{\eta}\text{は}\eta\text{の複素共役} \tag{3.2}$$

$$\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi,\varphi)} \tag{3.3}$$

である．このとき，

$$\lambda_k=k\cdot\frac{\pi}{a}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{3.4}$$

として，第 $k(=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 番目の関数

$$\phi_k(x)\equiv\frac{1}{\sqrt{2a}}\cdot\exp(+i\lambda_k x),i\equiv\sqrt{-1} \tag{3.5}$$

を導入する．この複素指数関数系 $\{\phi_k\}_{k=0,\pm1,\pm2,\cdots}$ は，次の2性質（1%），（2%）を満たすという意味で，完全正規直交系である:

（1%）（正規直交性）$(\phi_k,\phi_\ell)=$

$$\begin{cases}1\cdots k=\ell\text{のとき}\\ 0\cdots k\neq\ell\text{のとき}\end{cases} \tag{3.6}$$

（2%）（完全性）$\forall k(=0,\pm1,\pm2,\cdots),(\varphi,\phi_k)=0\Rightarrow\|\varphi\|=0$.　(3.7)

□

上述のように，完全正規直交系としての複素指数関数系 $\{\phi_k\}_{k=0,\pm1,\pm2,\cdots}$ を使って，$\varphi$ は，フーリェ級数

$$\varphi(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\varphi,\phi_k)\cdot\phi_k(x) \quad \text{for} \quad |x|<a \tag{3.8}$$

と，無限和の形に展開できる．ところが，帯域制限式(3.10)が成り立っているようなパターン $\varphi$ については，有限和の形

$$\varphi(x)=\sum_{k=-\ell}^{+\ell}(\varphi,\phi_k)\cdot\phi_k(x) \quad \text{for} \quad |x|<a \tag{3.9}$$

に変形され，この式(3.9)が式(3.11)のように書き直されるというのが，次の定理3.1である．

**［定理3.1］**（周期関数 $\varphi(x)$ の標本化定理）

フーリェ式展開係数 $(\varphi,\ \phi_k)$ が第 $\ell+1$ 次で帯域制限されている場合，つまり，

$$(\varphi,\ \phi_k)=0 \quad \text{for} \quad |k|>\ell+1 \tag{3.10}$$

が成り立っているならば，実は，周期 $a(>0)$ の $\varphi(x)$ は無限項の和ではなく，有限項の和として，次のように表現できる．

$$\varphi(x)=\sum_{m=-\ell}^{+\ell}\varphi(m\cdot\frac{a}{\ell+1})\cdot\frac{\sin[\pi(\ell+1)\cdot(\frac{x}{a}-\frac{m}{\ell+1})]}{\pi(\ell+1)\cdot(\frac{x}{a}-\frac{m}{\ell+1})}\quad \text{for}\quad |x|<a \tag{3.11}$$

［定理3.1の系1］

核関数

$$K(x,y)=\frac{1}{2a}\cdot\sum_{k=-\ell}^{+\ell}\exp[+i\lambda_k(x-y)]$$

$$=\frac{1}{2a}\cdot\exp[-i\ell\frac{\pi}{a}\cdot(x-y)]\cdot\frac{1-\exp[i(2\ell+1)\frac{\pi}{a}\cdot(x-y)]}{1-\exp[i\frac{\pi}{a}\cdot(x-y)]} \tag{3.12}$$

を用意すると，式(3.11)の$\varphi$は，$|x|<a$を満たす$x$について，

$$\varphi(x)=\sum_{k=-\ell}^{+\ell}(\varphi,\phi_k)\cdot\phi_k(x)=\int_{-a}^{+a}dyK(x,y)\cdot\varphi(y) \tag{3.13}$$

と表現される．

（定理3.1の証明）関数

$$\varphi'(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{for}\ |x|<a\\ 0 & \text{for}\ |x|\geq a\end{cases} \tag{3.14}$$

を考えると，$\varphi'(x)$はフーリェ積分の形で，

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}d\mu\cdot\exp(+i\mu x)\cdot\int_{-a}^{+a}dy\cdot\exp(-i\mu x)\cdot\varphi'(y) \tag{3.15}$$

と表現できる．ところが，式(3.10)より，

$$\int_{-a}^{+a}dy\cdot\exp(-i\mu x)\cdot\varphi'(y)=\int_{-a}^{+a}dy\cdot\exp(-i\mu x)\cdot\varphi(y)=0\quad \text{for}\quad |\mu|>(\ell+1)\cdot\frac{\pi}{a} \tag{3.16}$$

であることがわかり，式(3.15)は実は，

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{|\mu|\leq(\ell+1)\cdot\frac{\pi}{a}}d\mu\cdot\exp(+i\mu x)\int_{-a}^{+a}dy\cdot\exp(-i\mu x)\cdot\varphi'(y) \tag{3.17}$$

と書ける．ところで，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\cdot\phi(\mathrm{x})\cdot\exp(-\mathrm{i}\lambda\mathrm{x})=0\ \ \text{if}\ \ |\lambda|>2\pi W \tag{3.18}$$

であれば，ヒルベルト空間$\mathfrak{H}=L_2(\{x\mid-\infty<x<+\infty\},dx)$の元である関数$\phi(x)$は実は，

$$\phi(x)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\phi(\frac{m}{2W})\cdot\frac{\sin(2\pi Wx-\pi m)}{2\pi Wx-\pi m} \tag{3.19}$$

と表現できる(染谷-Shannon標本化定理)．この表現定理を式(3.17)に適用しよう．

$$(\ell+1)\cdot\frac{\pi}{a}=2\pi w\quad\therefore\quad\frac{a}{\ell+1}=\frac{1}{2W} \tag{3.20}$$

と，正定数$W$を決めれば，

$$\varphi'(x)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\varphi'(\frac{m}{2W})\cdot\frac{\sin(2\pi Wx-\pi m)}{2\pi Wx-\pi m} \tag{3.21}$$

と表現できることになる．ここで，

$$\left|m\cdot\frac{a}{\ell+1}\right|<a \quad \therefore \quad |m|<\ell+1 \tag{3.22}$$

を満たす $m$ については，

$$\varphi'(m\cdot\frac{a}{\ell+1})=\varphi(m\cdot\frac{a}{\ell+1}) \tag{3.23}$$

であるから，

$|x|<a$ を満たす $x$ について，

$$\varphi(x)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\varphi'(m\cdot\frac{a}{\ell+1})\cdot\frac{\sin((\ell+1)\cdot\frac{\pi}{a}\cdot x-\pi m)}{(\ell+1)\cdot\frac{\pi}{a}\cdot x-\pi m} \tag{3.24}$$

$$=\sum_{m=-\ell}^{+\ell}\varphi(m\cdot\frac{a}{\ell+1})\cdot\frac{\sin\{\pi(\ell+1)\cdot(\frac{x}{a}-\frac{m}{\ell+1})\}}{\pi(\ell+1)\cdot(\frac{x}{a}-\frac{m}{\ell+1})}$$

を得，証明が終わる．

（定理3.1の系1証明）

式(3.9)を変形するために，演算 $\sum_{k=-\ell}^{+\ell}$，$\int_{-a}^{+a}dy$ の適用順序を交換すれば，

$|x|<a$ を満たす $x$ について，

$$\varphi(x)=\sum_{k=-\ell}^{+\ell}\int_{-a}^{+a}dy\cdot\varphi(y)\cdot\bar{\phi}_k(y)\cdot\phi_k(x)$$

$$=\sum_{k=-\ell}^{+\ell}\int_{-a}^{+a}dy\cdot\varphi(y)\cdot\frac{1}{2a}\cdot\exp\{+\mathrm{i}\lambda_{\mathrm{k}}(\mathrm{x}-\mathrm{y})\} \tag{3.25}$$

$$=\int_{-a}^{+a}dy\cdot\varphi(y)\cdot\frac{1}{2a}\cdot\sum_{k=-\ell}^{+\ell}\exp\{+\mathrm{i}\lambda_{\mathrm{k}}(\mathrm{x}-\mathrm{y})\} \tag{3.26}$$

$$=\int_{-a}^{+a}dy\cdot K(x,y)\cdot\varphi(y) \quad \because \quad \text{式}(3.12)$$

を得，証明が終わる．式(3.12)の最右辺の表現は等比級数の和の公式

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=a\cdot\frac{1-r^n}{1-r} \tag{3.27}$$

を適用したものである．

□

### 3.2 Householder変換の，複素指数関数系による表現

前節の複素指数関数系 $\{\phi_k\}_{k=0,\pm1,\pm2,\cdots}$ は，ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}=L_2(\{x\,|-a<x<+a\},dx)$ では，完全正規直交系であるから，式(3.8)のように展開できる．よって，式(2.7)のHouseholder変換 $U$ の定義から，任意の整数 $\ell(=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ についてのHouseholder変換 $U_\ell$ は，

$$U_\ell\varphi=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\varphi,\phi_{\mathrm{k}})\,\phi_{\mathrm{k}}-2\cdot(\varphi,\phi_\ell)\cdot\phi_\ell \tag{3.28}$$

と表わされ，結局，

$$U_\ell\varphi=-(\varphi,\phi_\ell)\cdot\phi_\ell+\sum_{k=-\infty,k\neq\ell}^{+\infty}(\varphi,\phi_{\mathrm{k}})\,\phi_{\mathrm{k}} \tag{3.29}$$

が求めるものである.

# 第4章　鏡映変換$U$の例

本章では，可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$が実空間である場合，特別な鏡映変換を構成してみよう.

## 4.1　パターン$\varphi$の正部分$\max\{\varphi,0\}$から，パターン$\omega$の負部分$\min\{\omega,0\}$への鏡映変換$U$

付録GのG1節の，パターン$\varphi$の正部分$\max\{\varphi,0\}$，負部分$\min\{\varphi,0\}$への分解式(G.5)を考慮して，$w$を

$$w=\frac{\dfrac{\max\{\eta,0\}}{\|\max\{\eta,0\}\|}-\dfrac{\max\{\omega,0\}}{\|\max\{\omega,0\}\|}}{\left\|\dfrac{\max\{\eta,0\}}{\|\max\{\eta,0\}\|}-\dfrac{\max\{\omega,0\}}{\|\max\{\omega,0\}\|}\right\|} \tag{4.1}$$

とおき，線形作用素$U$を式(2.7)に従い，

$$U\varphi=\varphi-2\cdot(\varphi,w)\cdot w \quad \text{for any} \quad \varphi\in \text{real separable Hilbert space} \quad \mathfrak{H} \tag{4.2}$$

と定義すると，定理2.3の(ⅱ)を適用して，

$$\|\max\{\eta,0\}\|\cdot\|\max\{\omega,0\}\|>0 \text{ なら，} \quad U\frac{\max\{\eta,0\}}{\|\max\{\eta,0\}\|}=\frac{\min\{\omega,0\}}{\|\min\{\omega,0\}\|} \tag{4.3}$$

が成り立ち，$U$は鏡映変換である.

## 4.2　3角関数系$\{\phi_k\}_{k=0,\pm1,\pm2,\cdots}$を利用した鏡映変換

実ヒルベルト空間$\mathfrak{H}=L_2(\{x\mid -a<x<+a\},dx)$では，内積$(\varphi,\eta)$，ノルム$\|\varphi\|$は

$$(\varphi,\eta)=\int_{-a}^{+a}dx\varphi(x)\cdot\eta(x) \tag{4.4}$$

である．次のように定義された3角関数系$\{\phi_k\}_{k=1,2,\cdots}$は，実ヒルベルト空間$\mathfrak{H}=L_2(\{x\mid -a<x<+a\},dx)$では，完全正規直交系である：

$$\phi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2a}} \tag{4.5}$$

$$\phi_{2k}(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\cos\frac{k\pi x}{a} \tag{4.6}$$

$$\phi_{2k+1}(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\sin\frac{k\pi x}{a} \tag{4.7}$$

$$k=1,2,\cdots$$ □

3角関数系$\{\phi_k\}_{k=1,2,\cdots}$は，実ヒルベルト空間$\mathfrak{H}=L_2(\{x\mid -a<x<+a\},dx)$では，完全正規直交系であるから，$\varphi$は，フーリエ級数

$$\varphi(x)=(\varphi,\phi_1)\cdot\phi_1(x)+\sum_{k=1}^{+\infty}[(\varphi,\phi_{2k})\cdot\phi_{2k}(x)+(\varphi,\phi_{2k+1})\cdot\phi_{2k+1}(x)] \quad \text{for} \quad |x|<a \tag{4.8}$$

と，無限和の形に展開できる.

よって，式(2.7)のHouseholder変換$U$の定義から，任意の正整数$\ell(=1,2,3,4,\cdots)$についての，4.1節の鏡映変換$U$は，

$$(U\varphi)(x)=(\varphi,\phi_1)\cdot\phi_1(x)+\sum_{k=1}^{+\infty}[(\varphi,\phi_{2k})\cdot\phi_{2k}(x)+(\varphi,\phi_{2k+1})\cdot\phi_{2k+1}(x)]$$
$$-2\cdot(\varphi,\frac{\frac{\max\{\eta,0\}}{\|\max\{\eta,0\}\|}-\frac{\min\{\omega,0\}}{\|\min\{\omega,0\}\|}}{\left\|\frac{\max\{\eta,0\}}{\|\max\{\eta,0\}\|}-\frac{\min\{\omega,0\}}{\|\min\{\omega,0\}\|}\right\|})\cdot\frac{\frac{\max\{\eta,0\}}{\|\max\{\eta,0\}\|}-\frac{\min\{\omega,0\}}{\|\min\{\omega,0\}\|}}{\left\|\frac{\max\{\eta,0\}}{\|\max\{\eta,0\}\|}-\frac{\min\{\omega,0\}}{\|\min\{\omega,0\}\|}\right\|} \tag{4.9}$$

と表わされる.

## 第5章　鏡映変換の例（$n(\geq 1)$次元ユークリッド空間$R^n$の場合の鏡映変換$C$と，上3角行列への変換への応用）

本章では，可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$が実空間である場合，$\mathfrak{H}$として，$n(\geq 1)$次元ユークリッド空間$R^n$をとってみよう.

本章では，可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$が実空間の$n$次元ユークリッド空間$R^n$である場合，Householder変換，鏡映変換は行列で表現されることに注目し，鏡映変換を利用して任意の実行列を，連立1次方程式を解く時に便利な上3角行列へ変換できることを示そう.

### 5.1　$n(\geq 1)$次元ユークリッド空間$R^n$の場合の鏡映変換$U$

$n(\geq 1)$次元ユークリッド空間$R^n$の場合，2元$\vec{x}=col(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$（列ベクトル），$\vec{y}=col(y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)\in R^n$の内積$(\vec{x},\vec{y})$は,

$$(\vec{x},\vec{y})=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i \tag{5.1}$$

であり，$\vec{x}\in R^n$のノルム$\|\vec{x}\|$は$\|\vec{x}\|=\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}$と定義される．列ベクトル$\vec{x}$の転置ベクトル$\vec{x}^t$は,

$$\vec{x}^t=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\ (\text{行ベクトル}) \tag{5.2}$$

と表される．Householder変換$U$は2式(2.6) (2.7)によって定義される．そうすると，大きさ$n\times n$の行列

$$U=\left(u_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n} \tag{5.3}$$

は，大きさ$n\times n$の単位行列$I$を使って，行列

$$C=I-2\cdot\vec{w}\vec{w}^t$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}-2\cdot\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ \vdots\\ w_{n-1}\\ w_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}w_1 & w_2 & \cdots & w_{n-1} & w_n\end{bmatrix} \tag{5.4}$$

で表される．ここに,

$$\vec{w}=\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ \vdots\\ w_{n-1}\\ w_n\end{bmatrix}=col(w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n \quad w_{n-1}) \tag{5.5}$$

は$\|\vec{w}\|=1$であるようなノルム1の列ベクトルである.

結局，Householder行列$C$の第$i(=1\sim n)$行第$j(=1\sim n)$列の要素$u_{ij}$は,

$$u_{ij} = \begin{cases} 1-2\cdot w_i w_i & \cdots i=j \text{のとき} \\ -2\cdot w_i w_j & \cdots i\neq j \text{のとき} \end{cases} \tag{5.6}$$

と求められる.

## 5.2　長方形行列$C(0)$の，有限個の鏡映変換行列$U_q(1\le q\le k)$を用いた上3角行列$C(k)$への変換

### 5.2.1　$(k+1)$個の行列$C(q)(1\le q\le k)$を得るための$k$個の鏡映変換行列$U_q(1\le q\le k)$

大きさ$n\times k$の行列（長方形行列）$C(0)$を対角線上より下の要素がすべて零であるような上3角行列$C(k)$に変換するために，有限個の鏡映変換行列$U_q(1\le q\le k)$を使ってみよう.

$$n\ge k\ge 1 \tag{5.7}$$

とする．$n$は行数，$k$は列数である.

$$n\times k \text{ 行列} C(q)=(c_{ij}(q))_{1\le i\le n;1\le j\le k},\quad q=0,1,2,\cdots,k \tag{5.8}$$

は,

$$C(q)=U_q C(q-1), q=1,2,\cdots,k \tag{5.9}$$

と定義される．このとき,

$$C(q)=U_q U_{q-1}\cdots U_2 U_1 C(0), q=1,2,\cdots,k \tag{5.10}$$

である.

初期行列$C(0)$は，鏡映変換$U_q(1\le q\le k)$の列

$$U_1,U_2,\cdots,U_k \tag{5.11}$$

を使って，最終行列である上3角行列$C(k)$へ，変換できることを以下の項で，示そう.

最終行列$C(k)$は，その第$i(=1\sim n)$行第$j(=1\sim k)$列の要素$c_{ij}(k)$が

$$c_{ij}(k)=0\cdots i>j\wedge j\le k \text{ のとき} \tag{5.12}$$

を満たすという意味で，上3角行列

$$C(k)=\begin{bmatrix} c_{11}(k) & c_{12}(k) & c_{13}(k) & \cdots & c_{1k}(k) \\ 0 & c_{22}(k) & c_{23}(k) & \cdots & c_{2k}(k) \\ \vdots & 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & c_{kk}(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

である．実は，各行列$C(q),q=1,2,\cdots,k$の要素$c_{ij}(q)(i>j\wedge j\le q)$は,

$$c_{ij}(q)=0\cdots i>j\wedge j\le q \text{ のとき} \tag{5.14}$$

を満たす上3角行列である.

### 5.2.2　$k$個の鏡映変換行列$U_q(1\le q\le k)$の構成

式(5.10)の，$k$個の鏡映変換行列$U_q(1\le q\le k)$を構成してみよう.

第$j(=1\sim k)$番目の，大きさ$n\times 1$の列ベクトル$\vec{c}_j(q)$を導入し，大きさ$n\times k$の行列$C(q)$を

$$C(q)=\begin{bmatrix}\vec{c}_1(q) & \vec{c}_2(q) & \cdots & \vec{c}_k(q)\end{bmatrix} \tag{5.15}$$

と表わす．第$j(=1\sim k)$番目の，大きさ$n\times 1$の列ベクトル$\vec{u}_j(q)$を導入し，大きさ$n\times n$の行列$U(q)$を

$$U(q)=\begin{bmatrix}\vec{u}_1(q) & \vec{u}_2(q) & \cdots & \vec{u}_n(q)\end{bmatrix} \tag{5.16}$$

と表わす．そして，2式(2.6)，(2.7)での$\|\vec{w}(q)\|=1$なるベクトル$\vec{w}(q)$を

$$\vec{w}(q)\equiv\frac{\vec{c}_q(q-1)-\vec{c}_q(q)}{\|\vec{c}_q(q-1)-\vec{c}_q(q)\|}=\begin{bmatrix}w_1(q)\\ w_2(q)\\ \vdots\\ w_n(q)\end{bmatrix} \tag{5.17}$$

と定める．ここで，Kroneckerの$\delta$記号

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1\cdots i=j\text{のとき}\\ 0\cdots i\neq j\text{のとき}\end{cases} \tag{5.18}$$

を導入する．2式(2.6)，(2.7)に従い，ベクトル$\vec{w}(q)$を使って，第$q(=1\sim k)$番目の鏡映変換$U_q$を，

$$U_q\bullet=I-2\cdot(\bullet,\vec{w}(q))\cdot\vec{w}(q) \tag{5.18}$$

$$=I-2\cdot\vec{w}(q)\cdot\vec{w}(q)^t\bullet \tag{5.19}$$

$$=(u_{ij}(q))_{1\le i\le n,1\le j\le n}\bullet \tag{5.20}$$

$$\text{ここに，}\ u_{ij}(q)=\delta_{ij}-2\cdot w_i(q)\cdot w_j(q) \tag{5.21}$$

と定める．式(2.18)に従い，ノルムの保存条件

$$\|\vec{c}_q(q-1)\|=\|\vec{c}_q(q)\|,q=1\sim k \tag{5.22}$$

が成立しているように，第$q(=1\sim n)$段階の行列$C(q)$の各要素$\vec{c}_{ij}(q)$を

$$c_{11}(1)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}c_{i1}(0)^2},c_{i1}(1)=0(i\ge 2) \tag{5.23}$$

$$c_{22}(2)=\sqrt{\sum_{i=2}^{n}c_{i2}(1)^2},c_{i2}(2)=0(i\ge 3),c_{12}(2)=c_{12}(1) \tag{5.24}$$

$$c_{33}(3)=\sqrt{\sum_{i=3}^{n}c_{i3}(2)^2},c_{i3}(3)=0(i\ge 4),c_{i3}(3)=c_{i3}(2)(i=1,2) \tag{5.25}$$

$$\vdots$$

$$c_{qq}(q)=\sqrt{\sum_{i=q}^{n}c_{iq}(q-1)^2},c_{iq}(q)=0(i\ge q+1),c_{iq}(q)=c_{iq}(q-1)(i=1\sim q-1) \tag{5.26}$$

$$\vdots$$

$$c_{kk}(k)=\sqrt{\sum_{i=k}^{n}c_{ik}(k-1)^2},c_{ik}(k)=0(i\ge k+1),c_{ik}(k)=c_{ik}(k-1)(i=1\sim k-1) \tag{5.27}$$

と決め，2式(5.9)，(5.10)の示すように，

$$C(0),C(1),C(2),\cdots,C(q-1),C(q),\cdots,C(k) \tag{5.28}$$

を求めて行けばよい．

### 5.2.3　$k$個の鏡映変換行列$U_q(1\le q\le k)$の表現

$\vec{w}$の設定式(5.17)の下で，$k$個の鏡映変換行列$U_q(1\le q\le k)$を表現してみよう．

$q=1,2,\cdots,k$ について，$U_q$ を $C(q-1)$ に作用させ，$C(q)$ を得る過程においては，$C(q-1)$ の第1行～第 $q-1$ 行，第1列～第 $q-1$ 列の各行列要素は変化しないことに注意する．また，$U(q)=(u_{ij}(q))_{1\le i\le n,1\le j\le n}$ の各要素 $u_{ij}(q)$ については,

(1&)　$\cdots 1\le i\le q-1, 1\le j\le q-1$ のとき

$$u_{ij}(q)=\delta_{ij} \tag{5.29}$$

(2&)　$q\le i\le n \wedge q\le j\le n$ のとき

$$u_{ij}(q)=$$
$$\begin{cases} 1-2\cdot w_i(q)\cdot w_i(q) & \cdots i=j \text{ のとき} \\ -2\cdot w_i(q)\cdot w_j(q) & \cdots i\ne j \text{ のとき} \end{cases} \tag{5.30}$$

となっている．つまり，*を零とは限らない行列要素として,

$$U(q)=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \text{第q行} \\ \\ \text{第n行} \end{array} \\ \text{第q列　第n列} \end{array} \tag{5.31}$$

の形である．

### 5.2.4　行列 $C(0),C(1),\cdots,C(k)$ の計算

$C(q)(q=1,2,\cdots,k)$ の定義式(5.9)に従い，5式(5.23)～(5.27)の設定の下で，行列 $C(0),C(1),\cdots,C(k)$ を計算してみよう．

(1#)　$q=1$ のとき

式(5.23)より $\|\vec{c}_1(1)\|=\|\vec{c}_1(0)\|$ が成立しているから，定理2.3を適用して,

$$U_1\vec{c}_1(0)=\vec{c}_1(1) \tag{5.32}$$

がいえ,

$$C(1)=U_1C(0)=\begin{bmatrix}U_1\vec{c}_1(0) & U_1\vec{c}_2(0) & \cdots & U_1\vec{c}_k(0)\end{bmatrix} \tag{5.33}$$

$$=\begin{bmatrix}\vec{c}_1(1) & \vec{c}_2(1) & \cdots & \vec{c}_k(1)\end{bmatrix} \tag{5.34}$$

$$=\begin{bmatrix} c_{11}(1) & c_{12}(1) & c_{13}(1) & \cdots & c_{1k}(1) \\ 0 & c_{22}(1) & c_{23}(1) & \cdots & c_{2k}(1) \\ \vdots & c_{32}(1) & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & c_{k3}(1) & \ddots & c_{kk}(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & c_{k+1k-1}(1) & c_{k+1k}(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2}(1) & c_{n3}(1) & c_{nk-1}(1) & c_{nk}(1) \end{bmatrix} \tag{5.35}$$

であることがわかる．

(2#)　$q=2$ のとき

先ず，式(5.24)より，$c_{12}(2)=c_{12}(1)$ であるから，$w_1(2)=0$ である．よって，$U_2$ は,

$$U_2=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&*&*&\cdots&*\\0&*&*&\cdots&*\\0&*&\ddots&*&*\\0&*&*&*&*\end{bmatrix} \tag{5.36}$$

の形をしている．それ故，$C(1)$ から $C(2)$ への変換において，$C(1)$ の第1行，第1列の要素は保存されて，$C(2)$ となる．

次に，式(5.24)より $\|\vec{c}_2(2)\|=\|\vec{c}_2(1)\|$ が成立しているから，定理2.3を適用して，

$$U_2\vec{c}_2(1)=\vec{c}_2(2) \tag{5.37}$$

がいえる．

$$C(2)=U_2C(1)=\left[U_2\vec{c}_1(1)\quad U_2\vec{c}_2(1)\quad\cdots\quad U_2\vec{c}_k(1)\right] \tag{5.38}$$

$$=\left[\vec{c}_1(2)\quad \vec{c}_2(2)\quad\cdots\quad \vec{c}_k(2)\right] \tag{5.39}$$

$$=\begin{bmatrix}c_{11}(1)&c_{12}(1)&c_{13}(1)&\cdots&c_{1k}(1)\\0&c_{22}(2)&c_{23}(2)&\cdots&c_{2k}(2)\\\vdots&0&\vdots&\cdots&\vdots\\\vdots&\vdots&c_{k3}(2)&\ddots&c_{kk}(2)\\\vdots&\vdots&\vdots&c_{k+1k-1}(2)&c_{k+1k}(2)\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&c_{n3}(2)&c_{nk-1}(2)&c_{nk}(2)\end{bmatrix} \tag{5.40}$$

であることがわかる．

(3#) $q=3$ のとき

先ず，式(5.25)より，$c_{i3}(3)=c_{i3}(2)(i=1,2)$ であるから，$w_i(3)=0(i=1,2)$ である．よって，$U_3$ は，

$$U_3=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&*&\cdots&*\\0&0&\ddots&*&*\\0&0&*&*&*\end{bmatrix} \tag{5.41}$$

の形をしている．それ故，$C(2)$ から $C(3)$ への変換において，$C(2)$ の第1,2 行，第1,2 列の要素は保存されて，$C(3)$ となる．

次に，式(5.25)より $\|\vec{c}_3(3)\|=\|\vec{c}_3(2)\|$ が成立しているから，定理2.3を適用して，

$$U_3\vec{c}_3(2)=\vec{c}_3(3) \tag{5.42}$$

がいえる．よって，

$$C(2)=U_3C(2)=\left[U_3\vec{c}_1(2)\quad U_3\vec{c}_2(2)\quad\cdots\quad U_3\vec{c}_k(3)\right] \tag{5.43}$$

$$=\left[\vec{c}_1(3)\quad \vec{c}_2(3)\quad\cdots\quad \vec{c}_k(3)\right] \tag{5.44}$$

$$=\begin{bmatrix} c_{11}(1) & c_{12}(1) & c_{13}(1) & \cdots & c_{1k}(1) \\ 0 & c_{22}(2) & c_{23}(2) & \cdots & c_{2k}(2) \\ \vdots & 0 & c_{33}(3) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & c_{kk}(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & c_{k+1k-1}(3) & c_{k+1k}(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & c_{nk-1}(3) & c_{nk}(3) \end{bmatrix} \tag{5.45}$$

であることがわかる.

以下，同様に考えれば，$q=k$のとき，式(5.13)の最終の上3角行列$C(k)$に変換されることがわかる.

### 5.3　$k$個の鏡映変換行列$U_q(1\le q\le k)$の，連立1次方程式の解法への応用

連立1次方程式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot x_j = b_i, i=1\sim n \tag{5.46}$$

の解

$$\vec{x}=col(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \tag{5.47}$$

を求めるのに，鏡映変換を利用しよう.

正方行列$A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$を行列$C(0)$とおけば，上の連立1次方程式は

$$C(0)\vec{x}=\vec{b} \tag{5.48}$$

と書き直され，よって，方程式

$$U_n\cdots U_2U_1C(0)\vec{x}=U_n\cdots U_2U_1\vec{b} \tag{5.49}$$

が得られる.

$U_n\cdots U_2U_1C(0)$は，対角線上より下の要素がすべて零であるような

$$\begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \tag{5.50}$$

の形の3角正方行列であるから(*は零とは限らない行列要素)，この3角正方行列第$n$行から$x_n$が求まり，この$x_n$の値を第$n-1$行に代入すれば，$x_{n-1}$が求まる．求まった2つの$x_n,x_{n-1}$の値を第$n-2$行に代入すれば，$x_{n-2}$が求まる．以下，同様にして，$x_n,x_{n-1},x_{n-2},\cdots,x_2,x_1$がこの順に求まる.

## 第6章　ノルムが規格化された任意のパターンからノルムが規格化された任意のパターンへ変換できる鏡映変換の列

本章では，任意のノルム規格化実数値パターンパターン$\eta(\ne 0)\in\Phi$から，任意のノルム規格化実数値パターンパターン$\omega(\ne 0)\in\Phi$へ変換できる鏡映変換$U_i$の有限列が存在することが，定理6.1で証明される．この事実は，正の定数倍を除いてパターン同士を同一視する場合，正の整数$N$を充分大きく適切に選ぶと，互いに異なるカテゴリに帰属する2つの実数値パターンパターン$\eta,\omega$の境界にあ

るような，式(1.24)の認識システムRECOGNITONにより正しく認識されない実数値パターンパターンが多数存在することを明らかにしている．

任意に，2つのパターン$\eta'(\neq 0),\omega'(\neq 0)\in\Phi$が与えられたとき，2つのパターン$\eta(\neq 0),\omega(\neq 0)\in\Phi$を，

$$\eta\equiv\frac{\eta'}{\|\eta'\|}(\neq 0),\omega\equiv\frac{\omega'}{\|\omega'\|}(\neq 0)\in\Phi \tag{6.1}$$

とおけば，2つのパターン$\eta,\omega$は共にノルムが1に規格化されており，

$$\|\eta\|=\|\omega\|=1 \tag{6.2}$$

が成り立つ．ここで，正の整数$N$を選び，各$\phi'_{\mathrm{i}}\in\Phi$を，

$$\phi'_{\mathrm{i}}\equiv\eta\cdot\cos(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{i}{N})+\omega\cdot\sin(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{i}{N})\in\Phi,i=0,1,2,\cdots,N \tag{6.3}$$

とおけば，

$$\phi'_0=\eta,\phi'_{\mathrm{N}}=\omega \tag{6.4}$$

が成り立つ．各$\phi_{\mathrm{i}}\in\Phi$を，

$$\phi_{\mathrm{i}}\equiv\frac{\phi'_{\mathrm{i}}}{\|\phi'_{\mathrm{i}}\|}\in\Phi,i=0,1,2,\cdots,N \tag{6.5}$$

とおくと，

$$\phi_0=\frac{\eta}{\|\eta\|}=\eta,\phi_{\mathrm{N}}=\frac{\omega}{\|\omega\|}=\omega \tag{6.6}$$

が成り立つ．

可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$が実空間である場合，第$i(=0,1,2,\cdots,N-1)$番目の鏡映変換$U_i$を，4式(2.6)，(2.7)，(2.18)，(2.19)の意味するところに従い，

$$\forall\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H},U_i\varphi\equiv\varphi-2\cdot(\varphi,\frac{\phi_i-\phi_{i+1}}{\|\phi_i-\phi_{i+1}\|})\cdot\frac{\phi_i-\phi_{i+1}}{\|\phi_i-\phi_{i+1}\|},i=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{6.7}$$

と定義すると，

$$\|\phi_i\|=1,\ i=0,1,2,\cdots,N \tag{6.8}$$

であるから，定理2.3，(ⅱ)により，

$$U_i\phi_i=\phi_{i+1},i=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{6.9}$$

が成り立つ．

以上を整理すれば，鏡映変換が万能変換であること，つまり，ノルムが1に規格化された任意の実数値パターン$\eta\in\Phi$から，ノルムが1に規格化された任意の実数値パターンパターン$\omega\in\Phi$へ変換できる鏡映変換$U_i$の有限列が存在することが，次の定理6.1で示されたことになる．

**［定理6.1］**（パターンの鏡映変換定理）

可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$が実空間である場合を考えよう．

任意に，2つの実数値パターン$\eta'(\neq 0),\omega'(\neq 0)\in\Phi$が与えられたとき，2つの実数値パターン$\eta,\omega\in\Phi$を式(6.1)の如く，定義する．正の整数$N$を選ぶ．

$$\phi_0=\eta,\phi_{\mathrm{N}}=\omega \tag{6.10}$$

であるような，実数値パターンパターン列

$$\phi_0,\ \phi_1,\ \phi_2,\cdots,\ \phi_{N-1},\ \phi_N \tag{6.11}$$

が，実数値パターンパターン$\phi_i$から実数値パターンパターン$\phi_{i+1}$へのパターン変換式(6.9)を満たす鏡映変換$U_i$ $(i=0,1,2,\cdots,N-1)$の列

$$U_0, U_1, U_2, \cdots, U_{N-1} \tag{6.12}$$

で与えられる．ここに，$\phi_i \in \Phi (i = 0,1,2,\cdots,N)$ は2式(6.3)，(6.5)で定義され，$U_i (i = 0,1,2,\cdots,N-1)$ は式(6.7)で定義されている．

## 第7章　単段階，多段階での他想起認識法への，鏡映変換の応用

本章では，単段階で入力パターン $\varphi \in \Phi$ から，$\varphi \in \Phi$ と異質なパターンを想起する他想起認識法が鏡映変換を利用して組み立てられる．

### 7.1　$|J|$（カテゴリ総数）個の鏡映変換 $U_j (j \in J)$ の構成

式(2.19)に従って，2式(2.6)，(2.7)の $\vec{w}_j$ を

$$\vec{w}_j = \frac{\eta'_j - \omega'_j}{\|\eta'_j - \omega'_j\|} \neq 0 \tag{7.1}$$

と定義して，式(2.6)に従い，任意のパターン $\varphi \in \Phi$ が入力された時の出力 $U_j \varphi$ を

$$U_j \varphi = \varphi - 2 \cdot (\varphi, \vec{w}_j) \cdot \vec{w}_j \tag{7.2}$$

と定義する．

$$\eta'_j = \frac{T\eta_j}{\|T\eta_j\|} (\neq 0), \omega'_j = \frac{T\omega_j}{\|T\omega_j\|} (\neq 0) \tag{7.3}$$

と定義する．

$$\|\eta'_j\| = \|\omega'_j\| = 1 \tag{7.4}$$

が成り立つ．よって，定理2.3の(ⅱ)を適用して，

$$U_j \eta'_j = \omega'_j \tag{7.5}$$

が成り立つ．$U_j$ は鏡映変換である．

### 7.2　鏡映変換の族 $U_j, j \in J$ による単段階他想起認識法1

入力パターン $\varphi$ を認識する単段階他想起認識法1を説明しよう．

入力パターン $\varphi$ のモデル $T\varphi$ に関し，

$$\varphi' = \frac{T\varphi}{\|T\varphi\|} (\neq 0)\text{，但し，} T\varphi = 0 \text{ のとき } \varphi' \equiv 0 \tag{7.6}$$

は，

$$\eta'_j \text{ の非零定数倍，} j = 1 \sim m \tag{7.7}$$

の何れか1つのパターンに似ているとしよう．

axiom 2を満たすように，付録B，B5節の式(B.11)の類似度関数 $SM$ を導入する．

$$\arg\max_{i \in J} SM(U_i \varphi', \omega_i) = j \in J \tag{7.8}$$

ならば，

$$\text{パターン } \varphi \text{ は第 } j \in J \text{ 番目のカテゴリ } \mathfrak{C}_j \text{ に帰属する} \tag{7.9}$$

と推論するのが，単段階他想起認識法1である．ここに，

$$\arg\max_{k \in K} f(k) \tag{7.10}$$

は，変数 $k \in K$ の値を変えて得られる実数値関数 $f(k)$ の値の内，最大値を与える変数 $k$ の値の内，

最も若い値を指す. □

axiom 2を満たすように構成されたこれまでの式(B.11)の類似度関数$SM$は,

任意の正定数$a$について,

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J, SM(a\cdot\varphi,\omega_j)=SM(\varphi,\omega_j) \tag{7.11}$$

を満たすことを使えば，次の定理7.1が証明され，$\varphi$がすべての$\eta_i(i\in J-\{j\})$に似ていなくて，$\eta_j$に似ていれば，式(7.8)が成り立つことが期待されよう.

［定理7.1］（単段階他想起認識法1の素認識定理）

上述の単段階他想起認識法1では，処理の対象とする問題のパターン$\varphi$が$\varphi=\eta_j$のとき

$$\varphi=\eta_j \text{ のとき，} U_j\varphi'=\omega'_j \tag{7.12}$$

が成り立ち,

$$SM(U_j\varphi',\omega_j)=1 \tag{7.13}$$

を得，式(7.8)が成り立ち，式(7.9)が推論される.

（証明）式(7.12)の成立は，式(7.5)から明らか.

$$\begin{aligned}&SM(U_j\varphi',\omega_j)\\&=SM(\omega'_j,\omega_j) \quad \because \quad \text{式}(7.5)\\&=SM(T\omega_j,\omega_j) \quad \because \quad 2\text{式}(7.3),(7.11)\\&=SM(\omega_j,\omega_j) \quad \because \quad \text{axiom } 2,(\text{iii})\\&=1 \quad \because \quad \text{axiom } 2,(\text{i})\end{aligned}$$ □

第8，9，10章で，他想起認識法1を改良した認識法が自己想起認識法と共に研究される.

### 7.3 認識システムRECOGNITRONへ入力するパターンの，鏡映変換の族$U_j, j\in J$による決定に伴う多段階他想起認識法1

認識システムRECOGNITRONへ入力するパターンを鏡映変換の族$U_j, j\in J$により決定し，決定されたパターンを多段階自己想起認識システムRECOGNITRONへ入力し認識する多段階他想起認識法1を説明しよう.

入力パターン$\varphi$のモデル$T\varphi$に関し，式(7.6)の$\varphi'$は，式(7.7)のパターン集合内の何れか1つのパターンに似ているとしよう.

RECOGNITRONが$\varphi$を処理の対象とする問題の入力パターンとする場面において，式(7.8)が成り立つならば，$\varphi$の代りに，$U_j\varphi'$をRECOGNITRONへの入力とし，$\varphi$を認識するのが，多段階他想起認識法1である. □

認識システムRECOGNITRONへ入力するパターンの，鏡映変換の族$U_j, j\in J$による決定に伴う多段階他想起認識法1が $\varphi$がすべての$\eta_i(i\in J-\{j\})$に似ていなくて，$\eta_j$に似ている$\varphi$を式(7.9)の如く処理することが期待されることを次の定理7.2が示している.

［定理7.2］（多段階他想起認識法1の素認識定理）

上述の多段階他想起認識法1では，処理の対象とする問題のパターン$\varphi$が$\varphi=\eta_j$のとき，式(7.12)が成り立ち，$j\in\gamma$なるカテゴリ番号リスト$\gamma\in 2^J$を採用し，$\varphi$の代りに$U_i\varphi'$を入力したときの，連想形認識方程式(1.21)を解く式(1.24)の認識システムRECOGNITRONの解出力$<\phi,\lambda>$について

$$<\phi,\lambda> =_{\Delta} <T\omega_j,[j]> \tag{7.14}$$

を得，式(7.9)が推論される.

（証明）式(7.12)の成立は，式(7.5)から明らか.

式(7.12)が成立するから，$j \in \gamma$ なるカテゴリ番号リスト $\gamma \in 2^J$ を採用し，$\varphi$ の代りに $U_j \varphi' = \omega_j'$ を入力したときの，連想形認識方程式(1.21) の解出力 $<\phi, \lambda>$ は，式(7.11)，並びに，

任意の正定数 $a$ について，

$$\forall \varphi \in \Phi, T(a \cdot \varphi) = T\varphi \quad \because \quad \text{axiom 2, (ⅱ)の後半} \tag{7.15}$$

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, BSC(a \cdot \varphi, j) = BSC(\varphi, j) \tag{7.16}$$

が成立しているから，式(7.14)であることが，文献[3]の定理6.1(万能認識定理)の証明を参考にして導かれる． □

# 第8章　内積相関を利用した2つの想起作用素 $B_1(\gamma)$，$B_1'(\gamma)$ と，自己想起

自己想起，他想起の働きに基本的に要求されるのは，記憶した個々のパターンが単段階で誤差なく，読み出される(想起される)という「素想起性質(primitive recollection)」である．素想起性質が満たされていないと，記憶した個々のパターンのいずれかに似ているパターンが入力されたとき，想起の多段階構成法でも記憶した個々のパターンを誤差なく，読み出されることが期待されないからである．

本章では，入力パターン $\varphi \in \Phi$ との相関を内積で測って，離散化しない内積値，離散化した内積値を使う2つの方法で，素想起の働きがある自己想起の働きが実現される．

## 8.1　離散化しない内積相関を利用した想起作用素 $B_1(\gamma)$ と，自己想起

任意のパターン $\varphi \in \Phi$ が入力された時の，カテゴリ番号リスト $\gamma \in 2^J$ を助変数にもつ出力 $B_1(\gamma)\varphi$ を

$$B_1(\gamma)\varphi = \sum_{k \in \gamma} BSC(T\varphi, k) \cdot a_k(T\varphi) \cdot T\omega_k \tag{8.1}$$

と定義する．axiom 1，(ⅲ)の後半より，

$$\text{(T-不変性)}\ \forall \gamma \in 2^J, \forall \varphi \in \Phi, B_1(\gamma) T\varphi = B_1(\gamma)\varphi \tag{8.2}$$

が成り立つ．また，axiom 3，(ⅱ)により，

$$\forall \gamma \in 2^J, \forall \varphi \in \Phi, B_1(\gamma)\varphi = \sum_{k \in \gamma} BSC(\varphi, k) \cdot a_k(T\varphi) \cdot T\omega_k \tag{8.3}$$

が成り立つ．ここに，2値関数 $BSC$ は式(B.19)で表わされるものであり，付録B，B6節のaxiom 3を満たす大分類関数としている．付録Dの式(D.1)のカテゴリ間の相互排除性を考えておく．

実ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ では，Schwarzの不等式から得られる不等式

$$-1 \le a_j(T\varphi) \le +1,\ j \in J, \varphi \in \Phi \tag{8.4}$$

を満たす係数

$$a_j(T\varphi) \equiv \frac{(T\varphi, T\omega_j)}{\|T\varphi\| \cdot \|T\omega_j\|} \tag{8.5}$$

は $T\varphi$ と $T\omega_j$ との間の規格化相関値であり，個々の $a_j(T\varphi) \cdot T\omega_j (j \in \gamma)$ はパターンモデル $T\varphi$ とカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターンモデル $T\omega_j$ との内積相関を使い，想起された(呼び出された)パターンである．カテゴリ番号リスト $\gamma \in 2^J$ を助変数にもつ写像

$$B_1(\gamma) : \Phi \to \Phi \tag{8.6}$$

は内積相関を利用した想起作用素であり，内積相関形想起作用素という．

内積相関形想起作用素 $B_1(\gamma)$ を使った自己想起認識法を説明しよう:

入力パターン $\varphi$ のモデル $T\varphi$ は，式(1.1)のパターンモデル $T\omega_i (i \in \gamma)$ の集合の何れか1つに似ている

としよう．入力パターン$\varphi$から，式(1.1)のパターンモデル集合内の1つのモデル(に近いパターン)を想起し，入力パターン$\varphi$を認識するのが自己想起認識法である．入力パターン$\varphi$から，式(1.1)のパターンモデル集合内の1つに近い$B_1(\gamma)\varphi$を想起し，入力パターン$\varphi$を認識するのが内積相関形想起作用素$B_1(\gamma)$による自己想起認識法である．つまり，axiom 2を満たすように，付録B，B5節の式(B.11)の類似度関数$SM$を導入して，入力パターン$\varphi$は，式(1.65)のカテゴリ集合$\mathfrak{C}(\gamma)$の1つに帰属していると判明している時,

$$\arg\max_{i\in\gamma} SM(B_1(\gamma)\varphi,\omega_i) = j\in\gamma \tag{8.7}$$

ならば,

入力パターン$\varphi\in\Phi$は第$j\in\gamma(\subseteq J)$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属する (8.8)

と，推論するのが内積相関形想起作用素$B_1(\gamma)$による自己想起認識法である．□

次の定理8.1が成り立ち，離散化しない式(8.5)の内積相関値$a_j(T\varphi)(j\in\gamma)$を使い，記憶した個々のパターン$T\omega_j(j\in\gamma)$が単段階で誤差なく，読み出される(想起される)という「素想起性質」が実現されている．

$$\sum_{k\in\gamma-\{j\}} BSC(\omega_j,k)\cdot a_k(T\varphi)\cdot T\omega_k \tag{8.9}$$

は，他のカテゴリ$\mathfrak{C}(\gamma-\{j\})$から干渉してくる雑音成分

$$BSC(\omega_j,k)\cdot a_k(T\varphi)\cdot T\omega_k\ (k\in\gamma-\{j\}) \tag{8.10}$$

の総和である．

**[定理8.1]**（離散化しない内積相関値を使った内積相関形想起作用素$B_1(\gamma)$による素想起定理1）

$j\in\gamma$のとき，$B_1(\gamma)\omega_j$

$$= T\omega_j + \sum_{k\in\gamma-\{j\}} BSC(\omega_j,k)\cdot a_k(T\varphi)\cdot T\omega_k \tag{8.11}$$

が成り立ち，大分類関数$BSC$に関し付録Dの式(D.1)のカテゴリ間の相互排除性が成立していれば,

$j\in\gamma$のとき，$B_1(\gamma)\omega_j = T\omega_j$． (8.12)

（証明）$B_1(\gamma)\omega_j$

$$= BSC(T\omega_j,j)\cdot a_j(T\omega_j)\cdot T\omega_j + \sum_{k\in\gamma-\{j\}} BSC(T\omega_j,k)\cdot a_k(T\omega_j)\cdot T\omega_k$$

$$= BSC(\omega_j,j)\cdot a_j(T\omega_j)\cdot T\omega_j + \sum_{k\in\gamma-\{j\}} BSC(\omega_j,k)\cdot a_k(T\omega_j)\cdot T\omega_k \quad \because \text{ axiom 3の(ⅱ)} \tag{8.13}$$

を得，この式に,

$$a_j(T\omega_j) = 1 \tag{8.14}$$

$$BSC(T\omega_j,j) = 1 \quad \because \quad \text{axiom 3の(ⅰ)} \tag{8.15}$$

を代入すればよい．□

## 8.2　離散化した内積相関を利用した2つの想起作用素$B_1'(\gamma)$と，自己想起

先ず，不等式

$$-1\le e_{j,-1} < e_{j,-0} \le 0 \le e_{j,+0} < e_{j,+1} \le +1 \tag{8.16}$$

を満たす閾値$e_{j,-1}, e_{j,-0}, e_{j,+0}, e_{j,+1}$を用意しておく．その後，式(8.5)の規格化相関係数$a_j(T\varphi)$を離散化して,

$a_j'(T\varphi) =$

$$\begin{cases} -1 \cdots -1 \le a_j(T\varphi) \le e_{j,-1} \text{ のとき} \\ a_j(T\varphi) \cdots e_{j,-1} < a_j(T\varphi) < e_{j,-0} \text{ のとき} \\ 0 \cdots e_{j,-0} \le a_j(T\varphi) \le e_{j,+0} \text{ のとき} \\ a_j(T\varphi) \cdots e_{j,+0} < a_j(T\varphi) < e_{j,+1} \text{ のとき} \\ +1 \cdots e_{j,+1} \le a_j(T\varphi) \le +1 \text{ のとき} \end{cases} \tag{8.17}$$

という具合に，離散化した $a'_j(T\varphi)$ を得るものとしよう．

任意のパターン $\varphi \in \Phi$ が入力された時の，カテゴリ番号リスト $\gamma \in 2^J$ を助変数にもつ出力 $B'_1(\gamma)\varphi$ を

$$B'_1(\gamma)\varphi = \sum_{k\in\gamma} BSC(T\varphi, k) \cdot a'_k(T\varphi) \cdot T\omega_k \tag{8.18}$$

と定義する．axiom 1，（ⅲ）の後半より，

$$(\text{T-不変性})\ \forall\gamma \in 2^J, \forall\varphi \in \Phi, B'_1(\gamma)T\varphi = B'_1(\gamma)\varphi \tag{8.19}$$

が成り立つ．また，axiom 3，（ⅱ）により，

$$\forall\gamma \in 2^J, \forall\varphi \in \Phi, B'_1(\gamma)\varphi = \sum_{k\in\gamma} BSC(\varphi, k) \cdot a'_k(T\varphi) \cdot T\omega_k \tag{8.20}$$

が成り立つ． $a'_j(\varphi) \cdot T\omega_j$ はパターンモデル $T\varphi$ の，カテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に関する内積相関変換像 $a_j(\varphi) \cdot T\omega_j$ の離散化である．

内積相関形想起作用素 $B'_1(\gamma)$ を使った自己想起認識法を説明しよう:

入力パターン $\varphi$ のモデル $T\varphi$ は，式(1.1)のパターンモデル集合の何れか1つに似ているとしよう．入力パターン $\varphi$ から，式(1.1)のパターンモデル集合内の1つのモデル(に近いパターン)を想起し，入力パターン $\varphi$ を認識するのが自己想起認識法である．入力パターン $\varphi$ から，式(1.1)のパターンモデル集合内の1つに近い $B'_1(\gamma)\varphi$ を想起し，入力パターン $\varphi$ を認識するのが内積相関形想起作用素 $B'_1(\gamma)$ による自己想起認識法である．つまり，axiom 2を満たすように，付録B，B5節の式(B.11)の類似度関数 $SM$ を導入して，入力パターン $\varphi$ は，式(1.65)のカテゴリ集合 $\mathfrak{C}(\gamma)$ の1つに帰属していると判明している時,

$$\arg\max_{i\in\gamma} SM(B'_1(\gamma)\varphi, \omega_i) = j \in \gamma \tag{8.21}$$

ならば，式(8.8)の如く推論するのが内積相関形想起作用素 $B_1(\gamma)$ による自己想起認識法である．

□

上述のように，作用素 $B_1(\gamma)$ の代りに $B'_1(\gamma)$ を採用して，前節の自己想起認識法が適用され，パターン $\varphi \in \Phi$ を認識することが出来る．

次の定理8.2が成り立つ．離散化した内積相関値 $a'_j(T\varphi)(j \in \gamma)$ を使い，記憶した個々のパターン $T\omega_j(j \in \gamma)$ が単段階で誤差なく，読み出される(想起される)という「素想起性質」が実現されている．

**［定理8.2］**（離散化した内積相関値を使った内積相関形想起作用素 $B_1(\gamma)$ による素想起定理2)

$j \in \gamma$ のとき， $B'_1(\gamma)\omega_j$

$$= T\omega_j + \sum_{k\in\gamma-\{j\}} BSC(\omega_j, k) \cdot a'_k(T\varphi) \cdot T\omega_k \tag{8.22}$$

が成り立ち，大分類関数 $BSC$ に関しカテゴリ間の相互排除性が成立していれば,

$$j \in \gamma \text{ のとき，} B'_1(\gamma)\omega_j = T\omega_j\,. \tag{8.23}$$

（証明） $B'_1(\gamma)\omega_j$

$$= BSC(T\omega_j, j)\cdot a'_j(T\omega_j)\cdot T\omega_j + \sum_{k\in\gamma-\{j\}} BSC(T\omega_j, k)\cdot a'_k(T\omega_j)\cdot T\omega_k$$

$$= BSC(\omega_j, j)\cdot a'_j(T\omega_j)\cdot T\omega_j + \sum_{k\in\gamma-\{j\}} BSC(\omega_j, k)\cdot a'_k(T\omega_j)\cdot T\omega_k \because \text{ axiom 3の(ii)} \tag{8.24}$$

を得，この式(8.24)に，

$$a'_j(T\omega_j) = 1 \tag{8.25}$$

$$BSC(T\omega_j, j) = 1 \quad \because \quad \text{axiom 3の(i)} \tag{8.26}$$

を代入すればよい． □

［**定理8.2の系1**］（離散化した内積相関値を使った内積相関形想起作用素 $B_1(\gamma)$ による素想起定理2の系1）

$$e_{j,+1} \le a_j(T\varphi) \le +1 \tag{8.27}$$

が成立しているようなパターン $\varphi$ のモデル $T\varphi$ に関し，

$j\in\gamma$ のとき， $B'_1(\gamma)\varphi$

$$= BSC(\varphi, j)\cdot T\omega_j + \sum_{k\in\gamma-\{j\}} BSC(\varphi, k)\cdot a'_k(T\varphi)\cdot T\omega_k \tag{8.28}$$

が成り立ち，大分類関数 $BSC$ に関しカテゴリ間の相互排除性が成立していれば，つまり，

$$BSC(\varphi, j) = 1 \tag{8.29}$$

$$\forall i \in J-\{j\}, BSC(\varphi, i) = 0 \tag{8.30}$$

が成立していれば，

$$j\in\gamma \text{ のとき，} \quad B'_1(\gamma)\varphi = T\omega_j. \tag{8.31}$$

（証明） $B'_1(\gamma)\varphi$

$$= BSC(T\varphi, j)\cdot a'_j(T\varphi)\cdot T\omega_j + \sum_{k\in\gamma-\{j\}} BSC(T\varphi, k)\cdot a'_k(T\varphi)\cdot T\omega_k$$

$$= BSC(\varphi, j)\cdot a'_j(T\varphi)\cdot T\omega_j + \sum_{k\in\gamma-\{j\}} BSC(\varphi, k)\cdot a'_k(T\varphi)\cdot T\omega_k \quad \because \quad \text{axiom 3の(ii)} \tag{8.32}$$

を得，この式(8.32)に，2仮定式(8.29)，(8.30)，並びに，

$$a'_j(T\varphi) = 1 \quad \because \quad \text{2式(8.17)，(8.27)} \tag{8.30}$$

を代入すればよい． □

## 第9章　鏡映変換を利用した想起作用素 $B_2(\gamma)$ と，素想起の性質を備えた他想起

本章では，鏡映変換を利用し，他想起作用素 $B_2(\gamma)$ を構成する．その後，作用素 $B_2(\gamma)$ によるこの他想起の働きが素想起の性質を備えているかどうかを検討する．

### 9.1　2つのパターン $\eta'_j, \omega'_j$ $(j\in\gamma)$ と大分類関数 $BSC'$

2つのパターン $\eta_j, \omega_j$ $(j\in\gamma)$ から，2つのパターン $\eta'_j, \omega'_j$ $(j\in\gamma)$ を

$$\eta'_j = \frac{T\eta_j}{\|T\eta_j\|}(\ne 0),\ \omega'_j = \frac{T\omega_j}{\|T\omega_j\|}(\ne 0) \tag{9.1}$$

と作る．ノルムの規格化

$$\|\eta'_j\| = \|\omega'_j\| = 1 \tag{9.2}$$

が成り立つ．更に，2値関数

$$BSC' : \Phi\times J \to \{0,1\} \tag{9.3}$$

は，以下のaxiom 3′を満たすものとしよう． $BSC'(\varphi, j) = 1$ が成立すれば，パターン $\varphi \in \Phi$ はパターン $\eta'_j \in \Phi$ と対応の関係にあるパターン $\omega'_j \in \Phi$ が帰属する第 $j \in \gamma (\subseteq J)$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に結びつく可能性があると，読む：

Axiom 3′（大分類関数 $BSC'$ の満たすべき公理）

（ⅰ）（カテゴリ抽出能力;category separability）

$$\forall j \in J, BSC'(\eta'_j, j) = 1.$$

（ⅱ）（写像 $T$ の下での不変性;invariance under mapping $T$）

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, BSC'(T\varphi, j) = BSC'(\varphi, j).$$ □

axiom 3′を満たす式の $BSC'$ については，

正の定数 $(= a > 0)$ 倍に関する不変性

$$\forall j \in J, \forall \varphi \in \Phi, BSC'(a \cdot \varphi, j) = BSC'(\varphi, j) \tag{9.4}$$

が成立することは，

$$\begin{aligned} &\forall j \in J, \forall \varphi \in \Phi, BSC'(a \cdot \varphi, j) \\ &= BSC'(T(a \cdot \varphi), j) \quad \because \quad \text{axiom } 3', (\text{ii}) \\ &= BSC'(T\varphi, j) \quad \because \quad \text{axiom } 1, (\text{ii})\text{の後半} \\ &= BSC'(\varphi, j) \quad \because \quad \text{axiom } 3', (\text{ii}) \end{aligned}$$

と示される．

尚，axiom 3を満たす式(B.19)の大分類関数 $BSC$ を構成する方法[3]，[4]を利用して，axiom 3′を満たす式(B.19)の大分類関数 $BSC'$ を構成することができる．

## 9.2　他想起作用素 $B_2(\gamma)$ の構成

式(2.19)に従って，$\vec{w}_j$ を

$$\vec{w}_j = \frac{\eta'_j - \omega'_j}{\left\| \eta'_j - \omega'_j \right\|} \neq 0 \tag{9.5}$$

と定義して，2式(2.6)，(2.7)のHouseholder変換 $U$ に注目し，任意のパターン $\varphi \in \Phi$ が入力された時の，カテゴリ番号リスト $\gamma \in 2^J$ を助変数にもつ出力 $B_2(\gamma)\varphi$ を

$$B_2(\gamma)\varphi = \sum_{k \in \gamma} BSC'(T\varphi, k) \cdot [T\varphi - 2 \cdot (T\varphi, \vec{w}_k) \cdot \vec{w}_k] \tag{9.6}$$

と定義する． $T\varphi - 2 \cdot (T\varphi, \vec{w}_k) \cdot \vec{w}_k$ はパターンモデル $T\varphi$ の鏡映変換像である．カテゴリ番号リスト $\gamma \in 2^J$ を助変数にもつ写像

$$B_2(\gamma) : \Phi \to \Phi \tag{9.7}$$

は鏡映変換を利用した想起作用素であり，鏡映形想起作用素（associative operator using mirror function）という．

axiom 1，（ⅲ）の後半より，

$$(\text{T-不変性})\ \forall \gamma \in 2^J, \forall \varphi \in \Phi, B_2(\gamma)T\varphi = B_2(\gamma)\varphi \tag{9.8}$$

が成り立つ．また，axiom 3′，（ⅱ）により，

$$\forall \gamma \in 2^J, \forall \varphi \in \Phi, B_2(\gamma)\varphi = \sum_{k \in \gamma} BSC'(\varphi, k) \cdot [T\varphi - 2 \cdot (T\varphi, \vec{w}_k) \cdot \vec{w}_k] \tag{9.9}$$

が成り立つ．

### 9.3　鏡映変換を利用し構成された他想起作用素$B_2(\gamma)$を用いた他想起認識に備わっている素想起

式(9.7)の鏡映形想起作用素$B_2(\gamma)$を使った他想起認識法を説明しよう：

入力パターン$\varphi$のモデル$T\varphi$に関し，

$$\varphi' \equiv \frac{T\varphi}{\|T\varphi\|}(\neq 0)\ ，但し，T\varphi = 0 のとき \varphi' \equiv 0 \tag{9.10}$$

は，

$$\eta'_j, j = 1 \sim m \tag{9.11}$$

の何れか1つのパターンに似ているとしよう.

axiom 2を満たすように，付録B，B5節の式(B.11)の類似度関数$SM$を導入する.

入力パターン$\varphi \in \Phi$が帰属する1つのカテゴリ$\mathfrak{C}_j$は，この不動点想起パターン$B_2(\gamma)\varphi \in \Phi$の帰属する1つのカテゴリとして，

$$\arg\max_{i \in J} SM(B_2(\gamma)\varphi, \omega_i) = j \in \gamma \tag{9.12}$$

と決められる.　□

以上の鏡映形想起作用素$B_2(\gamma)$を使った他想起認識法について，その素想起が成立するかどうかを検討しよう.

$$T\eta'_j$$
$$= TT\eta_j \quad \because \quad 式(9.1)，axiom\ 1，(ⅱ)の後半$$
$$= T\eta_j \quad \because \quad axiom\ 1，(ⅲ)の後半 \tag{9.13}$$
$$= \|T\eta_j\| \cdot \eta'_j \tag{9.14}$$

に注意すれば，

$j \in \gamma$のとき，

$$B_2(\gamma)\eta'_j$$
$$= \sum_{k \in \gamma} BSC'(T\eta'_j, k) \cdot [T\eta'_j - 2 \cdot (T\eta'_j, \vec{w}_k) \cdot \vec{w}_k]$$
$$= \sum_{k \in \gamma} BSC'(\eta'_j, k) \cdot [T\eta'_j - 2 \cdot (T\eta'_j, \vec{w}_k) \cdot \vec{w}_k] \quad \because \quad axiom\ \ 3' の(ⅱ)$$
$$= \sum_{k \in \gamma} BSC'(\eta'_j, k) \cdot \|T\eta_j\| \cdot [\eta'_j - 2 \cdot (\eta'_j, \vec{w}_k) \cdot \vec{w}_k]$$
$$= BSC'(\eta'_j, j) \cdot \|T\eta_j\| \omega'_j + \sum_{k \in \gamma - \{j\}} BSC'(\eta'_j, k) \cdot \|T\eta_j\| \cdot [\eta'_j - 2 \cdot (\eta'_j, \vec{w}_k) \cdot \vec{w}_k]$$

$\because$　定理2.3の(ⅱ)

$$= \frac{\|T\eta_j\|}{\|T\omega_j\|} \cdot T\omega_j + \sum_{k \in \gamma - \{j\}} BSC'(\eta'_j, k) \cdot \|T\eta_j\| \cdot [\eta'_j - 2 \cdot (\eta'_j, \vec{w}_k) \cdot \vec{w}_k] \quad \because \quad axiom\ \ 3' の(ⅰ) \tag{9.15}$$

が成り立つ．カテゴリ間の相互排除性(the mutual exclusion of the one category from the other categories)

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, BSC'(\eta'_i, j) = 0 \tag{9.16}$$

が成立していれば，

$j \in \gamma$のとき，

$$B_2(\gamma)\eta'_j$$
$$= \frac{\|T\eta_j\|}{\|T\omega_j\|} \cdot T\omega_j \tag{9.17}$$

が成り立つ．以上を整理して，次の定理9.1が得られる．

［**定理9.1**］（鏡映変換を利用した他想起作用素 $B_2(\gamma)$ による多想起素の素想起定理3）

$j \in \gamma$ のとき，式(9.6)の $B_2(\gamma)$ からの出力 $B_2(\gamma)\eta'_j$ は式(9.15)のように表され，axiom $3'$ を満たす大分類関数 $BSC'$ に関しカテゴリ間の相互排除式(9.16)が成立していれば，$j \in \gamma$ のとき，$B_2(\gamma)\eta'_j$ は式(9.17)のように表され，素想起の働きが実現されている．　□

尚，式(9.10)のパターン $\varphi'$ について，axiom 1の(ⅱ)，(ⅲ)の2後半から，2式(9.13)，(9.14)への変形と同様にして，

$$T\varphi' = T\varphi = \|T\varphi\| \cdot \varphi' \tag{9.18}$$

が成り立っていることに注意しておく．

## 第10章　カテゴリ分類困難度 $DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j)$ を使って構成された実数値類似度関数 $RSM'(\varphi, \eta'_j)$ による想起作用素と，その素想起

本章では，入力パターンを多段階変換し(連想的変換)，入力パターンが帰属するカテゴリと，入力パターンから想起されるパターンとが同時に得られるRECOGNITRONによる連想形認識処理に，この鏡映変換を利用しない実数値類似度関数 $RSM'$ を使った方法が研究されている．

### 10.1　離散化実数値類似度関数 $RSM'(\varphi, \eta'_j)$ の構成

#### 10.1.1　カテゴリ分類容易度 $EOC(\varphi : \mathfrak{C}_j)$

付録Eでは，カテゴリ分類困難度 $DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j)$ が式(E.6)で定義されている．その逆のカテゴリ分類容易度(easiness of binary classification) $EOC(\varphi : \mathfrak{C}_j)$ を

$$EOC(\varphi : \mathfrak{C}_j) \equiv -DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j) = \log_e \frac{SM(\varphi, \omega_j)}{1 - SM(\varphi, \omega_j)} \tag{10.1}$$

と定義する．この $EOC(\varphi : \mathfrak{C}_j)$ は，次の性質を持っている：

$$EOC(\varphi : \mathfrak{C}_j) = \begin{cases} +\infty \cdots SM(\varphi, \omega_j) = 1 \text{ のとき} \\ 0 \cdots SM(\varphi, \omega_j) = \dfrac{1}{2} \text{ のとき} \\ -\infty \cdots SM(\varphi, \omega_j) = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{10.2}$$

□

$EOC(\varphi : \mathfrak{C}_j)$ は，パターン $\varphi \in \Phi$ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン $\omega_j$ に似ていればいるほど(パターン $\varphi \in \Phi$ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に強く帰属していればいるほど)，大きな実数値をとることに注意しておく．

#### 10.1.2　axiom $2'$ を満たす非離散化実数値類似度関数 $RSM'$

式(9.1)のサンプルパターン $\eta'_j$ の集合

$$\Psi \equiv \{\eta'_j \mid j \in J\} \tag{10.3}$$

を導入する．そのノルム規格化パターン $\eta'_j$ は式(9.1)で定義されている．

実数値類似度関数(real-valued similarity-measure function)と呼ばれる関数

$$RSM' : \Phi \times \Psi \to R(\equiv \{s \mid -\infty \le s \le +\infty\}) \tag{10.4}$$

は，次のaxiom $2'$を満たすように構成されねばならない:

Axiom $2'$（類似度関数$RSM'$の満たすべき公理）

（ⅰ）（正規直交性;orthonormality）

$$\forall i, \forall j, \exists s_{ij} \gg 0, RSM'(\eta'_i, \eta'_j) = s_{ii} \quad if \quad i = j, = -s_{ij} \quad if \quad i \ne j .$$

（ⅱ）（写像$T$の下での不変性;invariance under mapping $T$）

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, RSM'(T\varphi, \eta'_j) = RSM'(\varphi, \eta'_j).$$ □

axiom $2'$を満たす式(10.4)の実数値類似度関数$RSM'$について，次の解釈を採用する：

$RSM'(\varphi, \eta'_j) \gg s_{jj}, \ll \min_{i \in J - \{j\}} [-s_{ij}]$に従って，パターン$\varphi \in \Phi$は各々，$\eta'_j$と確定的な類似度関係，相違関係にあり，また，$|RSM'(\varphi, \eta'_j)|$が十分，小さい場合は，あいまいな類似・相違関係にある．

□

正の定数$(= a > 0)$倍に関する不変性

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, RSM'(a \cdot \varphi, \eta'_j) = RSM'(\varphi, \eta'_j) \tag{10.5}$$

が成立することは,

$$\begin{aligned}
&\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, RSM'(a \cdot \varphi, \eta'_j) \\
&= RSM'(T(a \cdot \varphi), \eta'_j) \quad \because \quad \text{axiom } 2', (\text{ii}) \\
&= RSM'(T\varphi, \eta'_j) \quad \because \quad \text{axiom } 1, (\text{ii})\text{の後半} \\
&= RSM'(\varphi, \eta'_j) \quad \because \quad \text{axiom } 2', (\text{ii})
\end{aligned}$$

と示される．

尚，axiom 2を満たす式(B.11)の類似度関数$SM$を構成する方法[3]，[4]を利用して，axiom $2'$を満たす式(10.4)の実数値類似度関数$RSM'$を構成することができる．簡単な実数値類似度関数$SM'$を構成すれば，以下のようになる．

$$EOC'(\varphi : \mathfrak{C}_j) \equiv \log_e \frac{SM'(\varphi, \eta'_j)}{1 - SM'(\varphi, \eta'_j)} \tag{10.6}$$

は式(10.1)からわかるように，「式(B.11)の類似度関数$SM$において第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターン$\omega_j$の代りに$\eta'_j$を採用した，axiom $2'$を満たす類似度関数$SM'$」で構成されるカテゴリ分類容易度である．

$$RSM'(\varphi, \eta'_j) = EOC'(\varphi : \mathfrak{C}_j) \tag{10.7}$$

と定義された式(10.4)の$RSM'$がaxiom $2'$を満たすことは，式(10.2)からわかる．

式(10.6)のカテゴリ分類容易度$EOC'(\varphi : \mathfrak{C}_j)$を離散化して，式(10.7)の実数値類似度関数$RSM'$より，一層実用的な「axiom $2'$を満たす式(10.4)の実数値類似度関数」$RSM'$を次項で構成しよう．

### 10.1.3　カテゴリ分類容易度$EOC'(\varphi : \mathfrak{C}_j)$の離散化としての，実数値類似度関数$RSM'(\varphi, \eta'_j)$

式(10.1)のカテゴリ分類容易度$EOC(\varphi : \mathfrak{C}_j)$と同様に，式(10.6)のカテゴリ分類容易度$EOC'(\varphi : \mathfrak{C}_j)$ を離散化して，

$$RSM'(\varphi, \eta'_j) =$$

$$\begin{cases} s'_{j,-1} \cdots -\infty \le EOC'(\varphi : \mathfrak{C}_j) \le u_{j,-1} \text{のとき} \\ EOC'(\varphi : \mathfrak{C}_j) \cdots u_{j,-1} < EOC'(\varphi : \mathfrak{C}_j) < u_{j,-0} \text{のとき} \\ 0 \cdots u_{j,-0} \le EOC'(\varphi : \mathfrak{C}_j) \le u_{j,+0} \text{のとき} \\ EOC'(\varphi : \mathfrak{C}_j) \cdots u_{j,+0} < EOC'(\varphi : \mathfrak{C}_j) < u_{j,+1} \text{のとき} \\ s'_{j,+1} \cdots u_{j,+1} \le EOC'(\varphi : \mathfrak{C}_j) \le +\infty \text{のとき} \end{cases} \tag{10.8}$$

という具合に，離散化した $RSM'(\varphi,\eta'_j)$ を得るものとしよう．ここに，不等式

$$-\infty < u_{j,-1} < u_{j,-0} \le 0 \le u_{j,+0} < u_{j,+1} < +\infty \tag{10.9}$$

を満たす閾値 $u_{j,-1}, u_{j,-0}, u_{j,+0}, u_{j,+1}$ を用意しておく．また，不等式

$$-\infty < s_{j,-1} < 0 < s_{j,+1} \le +\infty \tag{10.10}$$

を満たす $s_{j,-1}, s_{j,+1}$ を用意しておく．

式(10.8)の $RSM'(\varphi,\eta'_j)$ も，式(10.7)の $RSM'(\varphi,\eta'_j)$ と同様に，axiom $2'$ を満たす．

## 10.2　想起作用素 $B(\mu)$ の構成

任意のパターン $\varphi \in \Phi$ が入力された時の出力 $B(\gamma)\varphi$ を次のように定義する．

カテゴリ番号リスト $\mu \in 2^J$ を助変数に持つ構造受精作用素(structural-fertilization operator)と呼ばれる写像

$$B(\mu) : \Phi \to \Phi \tag{10.11}$$

が，

式(10.3)の1次独立なパターンモデル集合 $\Psi \equiv \{\eta'_j \mid j \in J\}$

式(10.8) の実数値類似度関数 $RSM' : \Phi \times \Psi \to \{s \mid -\infty \le s \le +\infty\}$

axiom $3'$ を満たす式(9.3)の大分類関数 $BSC' : \Phi \times J \to \{0,1\}$

(10.12)

を使って，次のように定義される：

$$RSM''(\varphi,\eta'_j) \equiv \frac{RSM'(\varphi,\eta'_j)}{\max_{k \in J} \left| RSM'(\varphi,\eta'_k) \right|} \tag{10.13}$$

並びに，2つの閾値 $\gamma_{j,-}, \gamma_{j,+} (j \in J)$ を

$$\max_{k \in J-\{j\}} RSM''(\eta'_k,\eta'_j) \le \gamma_{j,-1} < 0 < \gamma_{j,+1} \le +1 \tag{10.14}$$

を満たす形で用意し，

$$BRSM(\varphi,\eta_j) \equiv \begin{cases} 1 \cdots \gamma_{j+1} < RSM''(\varphi,\eta'_j) \text{ のとき} \\ RSM''(\varphi,\eta_j) \cdots \gamma_{j,-1} < RSM''(\varphi,\eta'_j) \le \gamma_{j,+} \text{ のとき} \\ 0 \cdots RSM''(\varphi,\eta'_j) \le \gamma_{j,-} \text{ のとき} \end{cases} \tag{10.15}$$

を導入し，

(ⅰ) $\varphi = 0 \vee \mu = \phi$ のとき

$$B(\mu)\varphi = 0. \tag{10.16}$$

(ⅱ) $\varphi \ne 0 \wedge \mu \ne \phi$ のとき

(ⅱ-1) $\sum_{j \in \mu} BSC'(\varphi, j) = 0$　のとき

$$B(\mu)\varphi = \sum_{j \in \mu} BRSM(\varphi,\eta'_j) \cdot T\omega_j. \tag{10.17}$$

（ⅱ-2）$\sum_{j\in\mu} BSC'(\varphi,j)>0$ のとき

$$B(\mu)\varphi=\sum_{j\in\mu} BRSM(\varphi,\eta'_j)\cdot BSC'(\varphi,j)T\omega_j. \tag{10.18}$$

$$=\sum_{j\in\mu\wedge BSC'(\varphi,j)=1} BRSM(\varphi,\eta'_j)\cdot T\omega_j. \tag{10.19}$$

□

2式(10.17)，(10.18)からわかるように，$j\in\mu$ のときの，

$$BRSM(\varphi,\eta'_j)\cdot T\omega_j,\ BRSM(\varphi,\eta'_j)\cdot BSC'(\varphi,j)\cdot T\omega_j \tag{10.20}$$

はパターン $\varphi$ の，第 $j\in J$ 番目のカテゴリ成分である．axiom 1，（ⅲ）の後半より，

$$\text{(T-不変性)}\ \forall\mu\in 2^J,\forall\varphi\in\Phi, B(\mu)T\varphi=B(\mu)\varphi \tag{10.21}$$

が成り立つ．

## 10.3　想起作用素 $B(\mu)$ を使った単段階他想起認識法

式(10.11)の想起作用素 $B(\mu)$ を使い，単段階(で)他想起(を行い)認識(する)法を提案しよう．

入力パターン $\varphi$ のモデル $T\varphi$ は，

$$T\eta_j, j\in\mu\subseteq J=\{1,2,\cdots,m\} \tag{10.22}$$

の何れか1つに似ているとしよう．

パターン $\varphi$ はカテゴリ集合

$$\mathfrak{C}(\mu)\equiv\{\mathfrak{C}_j \mid j\in J\} \tag{10.23}$$

の1つに帰属していることが判明しているとしよう．このとき，

$$\arg\max_{i\in\mu\subseteq J} SM(B(\mu)\varphi,\omega_i)=j\in\mu\subseteq J \tag{10.24}$$

ならば，

$$\text{パターン}\varphi\text{は第}\ j\in\mu\subseteq J\ \text{番目のカテゴリ}\ \mathfrak{C}_j\ \text{に帰属する} \tag{10.25}$$

と推論する．

次の定理10.1が成り立ち，$B(\mu)\eta'_j$ は式(10.23)のように表され，素想起の働きが実現されている．

**［定理10.1］**（素想起定理4）

$$j\in\gamma\ \text{のとき，}\ B(\mu)\eta'_j=T\omega_j. \tag{10.26}$$

（証明） 第9章のaxiom 3′，（ｉ）より，$BSC(\eta'_j,j)=1$ であり，axiom 2′の（ｉ），3式(10.13)，(10.14)，(10.15)から

$$BRSM(\eta'_i,\eta'_j)=$$

$$\begin{cases}1\cdots i=j\ \text{のとき}\\ 0\cdots i\neq j\ \text{のとき}\end{cases} \tag{10.27}$$

が判明し，作用素 $B(\mu)$ の定義の（ⅱ-2）が適用され，

$$B(\mu)\eta'_j$$

$$=BRSM(\eta'_j,\eta'_j)\cdot BSC'(\eta'_j,j)\cdot T\omega_j+\sum_{k\in\mu-\{j\}} BRSM(\eta'_j,\eta'_k)\cdot BSC'(\eta'_j,k)\cdot T\omega_k \tag{10.28}$$

$$=1\cdot 1\cdot T\omega_j+\sum_{k\in\mu-\{j\}} 0\cdot BSC'(\eta'_j,k)\cdot T\omega_k \quad \because\ \text{axiom 2}',(\mathrm{i})\ \text{axiom 3}',(\mathrm{i})$$

$$=T\omega_j$$

を得る．　□

# 第11章　結　び

## 11.1　認識システムのパターン認識能力とは？

感性に訴えるように表現されたパターンの持つ情報とは，パターンがどの1つのカテゴリ(類概念)に帰属するかを決定できる特徴(feature)である．この帰属情報(membership)が存在していないパターン(a noninformative pattern)は正常なパターン(well-formed pattern)ではない．あるカテゴリの典型的な事例パターン(プロトタイプ；代表パターン)に類似する事例入力パターンが存在するとき，この入力パターンを典型的な事例パターンからの拡張例として取り込んでいく能力( プロトタイプに基づくカテゴリ化の能力)が，認識システムのパターン認識能力である．

## 11.2　本論文は何を研究したのか？

入力パターンを多段階変換し(連想的変換)，入力パターンが帰属するカテゴリと，入力パターンから想起されるパターンとが同時に得られる連想形認識処理に，鏡映変換$B_2(\gamma)$を利用する方法(第9章)，利用しない実数値類似度関数$RSM'$を使った他想起作用素$B(\mu)$による方法(第10章)が研究された．

これまでの研究においては，入力パターン$\varphi$のモデル$T\varphi$があるカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターン$\omega_j$のモデル$T\omega_j$と似ていること($T\varphi$が$T\omega_j$に比べあまり変形していないこと)が想定されており，本研究内容はこの想定がなくても，式（1.24)の認識システムRECOGNITRONが良好な認識の働きを備えさせることを可能にするものである．

## 11.3　他想起と自己想起

入力パターン$\varphi$のモデル$T\varphi$があるカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターン$\omega_j$のモデル$T\omega_j$と異質であれば，先ず，$T\varphi$を$T\omega_j$と対応を備えているパターンモデル(の定数倍$\eta'_j \equiv \dfrac{T\eta_j}{\|T\eta_j\|}$)に想起変換した後，得られたこのパターンモデルをあるカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターン$\omega_j$のモデル$T\omega_j$に想起変換した方(他想起の方法)が，良好な認識の働きが達成されやすい．本論文は，主として，この他想起の働きを素想起の性質を備えているように構成する方法を研究した．

入力パターン$\varphi$のモデル$T\varphi$は，パターンモデル$T\eta_j$の有限集合

$$T\eta_j,\ j \in J = \{1, 2, \cdots, m\} \tag{11.1}$$

の内の何れか1つに似ているとして，入力パターン$\varphi$から，$\eta_j$と1対1の対応をもたせた代表パターン$\omega_j$のモデル$T\omega_j$の有限集合

$$T\omega_j,\ j \in J = \{1, 2, \cdots, m\} \tag{11.2}$$

の内の1つを想起した後(他想起)，入力パターン$\varphi$を認識する他想起認識法が，(1) 鏡映変換$U_i$を利用する方法，(2) 鏡映変換$U_i$を利用しないで実数値類似度関数$RSM'$を使った方法の2つの形で提案された．

更に，代表パターン$\omega_j$のモデル$T\omega_j$の，式(11.2)の有限集合の内の何れか1つに似ているとして，入力パターン$\varphi$から，この式(11.2)の有限集合の内の1つを想起し(自己想起)，入力パターン$\varphi$を認識するのが自己想起認識法であるが，この自己想起認識法も研究された．

### 11.4　自己想起のみならず，他想起が良好な連想形認識の働きを達成するために必要である

パターン$\varphi \in \Phi$から特徴を抽出する方法（特徴抽出法の設定）を上首尾に設定できたことは，そのパターン$\varphi \in \Phi$が各カテゴリの各代表パターン$\omega \in \Omega$とどの程度に似ているかを計量すること（類似度関数の構成法）を上首尾に設定できたことであり，逆もいえるという考え（特徴抽出法の設定と類似度関数の構成法との同等性）などを背景に組み立てられたS.Suzukiのパターン認識（連想形パターン認識）の数学的理論[3]，[4]では，1.1.3項の多段階自己想起認識法において，パターン変換$Q(\lambda)$の代りにパターン変換（構造受精作用素）$A(\lambda)$を採用した多段階自己想起認識法[3]，[4]が考案され，風景画像の認識・理解に適用され[21]～[23]，或る程度の成果が得られている．入力パターン$\varphi \in \Phi$のモデル$T\varphi \in \Phi$が代表パターン$\omega_j \in \Omega \subset \Phi$のモデル

$$T\omega_j \in T \cdot \Omega \equiv \{T\omega_j \mid j \in J\} \subset \Phi \tag{11.3}$$

の集合（記憶しているパターンの集合）内のどれとも全く似ていなくて，パターン集合$\Psi(\subset \Phi)$内の何れか1つと似ている場合，先ず，モデル$T\varphi \in \Phi$から，パターン集合$\Psi(\subset \Phi)$内の1つのパターンを想起した後（他想起），この想起されたパターンから，$T \cdot \Omega$内の1つのパターンを想起する（自己想起）ことが，良好なパターン認識の働きを実現するのに基本的に必要とされる．

### 11.5　素想起性質の具備は多段階想起認識構成法においても必要とされる

自己想起，他想起の働きに基本的に要求されるのは，記憶した個々のパターンが単段階で誤差なく，読み出される（想起される）という「素想起性質」である．素想起性質が満たされていないと，記憶した個々のパターンのいずれかに似ているパターンが入力されたとき，この入力パターンをprobe（探り針）とし，単段階想起認識の性能を向上しようとする目的を持つ想起の多段階認識構成法（連想形認識法）ですら記憶した個々のパターンを誤差なく，読み出すことが必ずしも期待されないからである．本研究で実現される諸想起の方法はいずれも，素想起の働きがあるように実現された．

### 11.6　本研究の内容に関する批判・検討・吟味

任意の単位ベクトル$\vec{w}$に直交し原点$O$を通る超平面$Mirror_{\vec{w}}$を鏡と考えた時，この鏡$Mirror_{\vec{w}}$に映る任意のベクトル$\vec{a}$の像$\vec{b}$を得るHouseholder変換で，ノルムが等しい2つの元について，一方の元から他方の元へ移す変換を鏡映変換という．本論文では，先ず，可分な一般抽象複素ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$でのHouseholder変換の諸性質を調べた後，可分な一般抽象実ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$での，Householder変換に制限を付けて定義される鏡映変換の諸性質，諸例と，その2つの応用（上3角行列への変換に伴う連立1次方程式の解法，パターンの簡単な連想形認識法）とが検討された（第2～5章）．ノルムが$1$の任意のパターンからノルムが1の任意のパターンへ変換できる式(6.7)の鏡映変換$U_i$の有限列が存在することが第6章で示されたが，この数理的存在は，パターンがある1つのカテゴリに帰属するかどうかの認識決定が如何に困難になるかを窺がうことに役立つ．つまり，パターンがある1つのカテゴリに帰属するかどうかの境界は限りなく曖昧なことが判明したのである．

第7章，7.3節において，次の多段階他想起認識法1が提案された：

［多段階他想起認識法1］

パターン変換式(7.5)を満たす式(7.2)の鏡映変換$U_j(j \in J)$の族を用意する．

$$\arg\max_{i \in J} SM(U_i\varphi', \omega_i') = j \in J \tag{11.4}$$

ならば，

RECOGNITRONが$\varphi$を処理の対象とする問題の入力パターンとする場面において，$\varphi$の代りに，式(7.6)の$\varphi'$の変換$U_i\varphi'$を多段階自己想起認識法を採用しているRECOGNITRONへの入力とする．□

この多段階他想起認識法1は，これまでの不動点想起形帰納推理認識法を採用するRECOGNITRONで，補助のパターン前処理法として使用できることを示している．7.2節の単段階他想起認識法1を改良した認識法であることが分る．

次に，第8章において，入力パターン$\varphi \in \Phi$との相関を内積で測って，離散化しない内積値$a_j(T\varphi)$，離散化した内積値$a'_j(T\varphi)$を使う2つの方法で，単段階で素想起の働きを実現しようとする2つの自己想起作用素$B_1(\gamma), B'_1(\gamma)$が構成され，$B_1(\gamma), B'_1(\gamma)$を使った単段階で素想起の働きがある自己想起認識の働きが研究された．

次に，単段階で素想起の働きがある想起の働きを多段階構成する方法が研究された．

入力パターン$\varphi \in \Phi$のモデル$T\varphi \in \Phi$が代表パターン$\omega_j \in \Omega \subset \Phi$のモデル$T\omega_j \in T \cdot \Omega$の集合内のどれとも全く似ていなくて，パターン集合$\Psi(\subset \Phi)$内の何れか1つと似ている場合，モデル$T\varphi \in \Phi$を$\Psi(\subset \Phi)$内の何れか1つと似ているパターン$Q(\gamma)T\varphi(=Q(\gamma)\varphi)$に変換した後，S.Suzukiの提案した認識システムRECOGNITRONで多段階連想形認識処理をする必要(他想起認識法の導入の必要)がある．本論文は，このような他想起認識法を研究する1つの準備であり，Householder変換を利用した鏡映形想起作用素$B_2(\gamma)$の構成法を論じ，その後，実数値類似度関数$RSM'$を使い，Householder変換を利用しない他想起法に役立つ写像$B(\mu)$の構成法につき，検討された(10.2項)．

これまでのシミュレーション[21]，[22]，[23]からは，恐らく，$B(\mu)$の方が$B_2(\gamma)$より良好な認識性能をもたらすだろうと，予想されるが，$B_2(\gamma)$を使う方は簡便であるなどの利点がある．

### 11.7　多段階自己想起認識法での写像$Q(\gamma)$の発見

本研究に似た研究などを繰り返し，これまでの構造受精作用素$A(\gamma)$[3]，[4]以外に，$A(\gamma)$より良好な連想形認識法をもたらす1.1.3項の多段階自己想起認識法での写像$Q(\gamma)$を発見するように，一層努力を重ねなければならない．

## 文　　献


[ 1]　鈴木昇一：認識工学，柏書房，Feb.1975

[ 2]　鈴木昇一：ニューラルネットの新数理，近代文芸社，Sept.1996

[ 3]　鈴木昇一：パターン認識問題の数理的一般解決，近代文芸社，June 1997

[ 4]　鈴木昇一：認識知能情報論の新展開，近代文芸社，Aug.1998

[ 5]　鈴木昇一：測度的不変量検出形認識系の構成理論，電子通信学会論文誌(D)，vol.55-D，no.8，pp.513-538,Aug.1972

[ 6]　鈴木昇一：手書き漢字の側抑制効果的分解とその計算機シミュレーション，情報処理学会誌，vol.15,no.12,pp.927-934,Dec.1974

[ 7]　鈴木昇一：画像情報量とその手書き漢字への応用，画像電子学会誌，vol.4,no.1,pp.4-12,Apr.1975

[ 8]　鈴木昇一：パターン認識における構造化モデルの4性質とその応用，電子通信学会論文誌(D)，vol.J60-D,no.9,pp.710-717,Sept.1977

[ 9]　鈴木昇一：抽出された特徴による手書き漢字構造の再生，情報処理学会誌，

vol.18,no.11,pp.1115- 1122,Nov.1977
［10］ 鈴木昇一：パターンのエントロピーモデル，電子情報通信学会論文誌（D-Ⅱ），vol.J77-D-Ⅱ,no.10,pp.2220-2238,Nov.1994
［11］ 鈴木昇一，斎藤静昭，奥野治雄，太田芳雄：画像の復元とその計算機シュミレーション，工学院大学研究報告，no.39,pp.198-206,Jan.1976
［12］ 鈴木昇一：回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.4,pp.36-56,Dec.1983
［13］ 鈴木昇一：連想形記憶器MEMOTRONと日本語単独母音系列の再生に関する計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.7,pp.14-29,Dec.1986
［14］ 鈴木昇一：多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.10,pp.35-49,Dec.1989
［15］ 鈴木昇一：帰属係数法に基づく類似度，帰属関係・あいまい度，認識情報量の計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.11,pp.51-68,Dec.1990
［16］ 鈴木昇一：構造受精法と日本語単独母音の認識，情報研究（文教大学・情報学部）no.18,pp.17-51,Dec.1998
［17］ 鈴木昇一，前田英明:有声破裂音の代表パターンの学習的決定と，その計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.20，pp.77－95,Dec.1998
［18］ 鈴木昇一，前田英明：変動エントロピーによる有声破裂音の順序付けと，その計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.21,pp.51－77,Mar.1999
［19］ 鈴木昇一：界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の，顔画像処理に関する計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.23,pp.109－182,Mar.2000
［20］ 鈴木昇一：風景画から知識を抽出し，解釈するシステムの，ファジィ推論ニューラルネットによる構成，情報研究（文教大学・情報学部），no.23,pp.183-265,Mar.2000
［21］ 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹:風景画の理解に関するJAVA言語によるRECOGNITRONの計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.27,pp.73－109,Mar.2002
［22］ 鈴木昇一：JAVA言語で実装化された画像理解システムIUSの動作概要と，その稼動方法，情報研究（文教大学・情報学部），no.28,pp.143－165,Dec.2002
［23］ 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹:JAVA言語による計算機シミュレーションで生じた風景画像の理解場面での多段階連想形認識過程の異常現象，情報研究（文教大学・情報学部），no.29,pp.123－166,July 2003
［24］ 鈴木昇一：1パラメータLie座標変換群とそのパターン正規化への応用，情報研究（文教大学・情報学部），no.32,pp.21－74,Jan.2005
［25］ 鈴木昇一:曖昧さに関する半順序 $\propto$ を単調に保つモデル構成作用素 $T$，情報研究（文教大学・情報学部），no.32,pp.75－126,Jan.2005
［26］ 鈴木昇一：パターン $\varphi$ から抽出された特徴量 $u(\varphi,\ell)$ のfuzzy単調変換，情報研究（文教大学・情報学部），no.32,pp.127－168,Jan.2005
［27］ 鈴木昇一：パターンモデル（パターンの標準形）の一般形，情報研究（文教大学・情報学部），no.32,pp.169－218,Jan.2005
［28］ 鈴木昇一：類似度関数の密度を用いた，画素毎のパターン認識処理（パターン理解処理）の方法，情報研究（文教大学・情報学部），no.32,pp.219－285,Jan.2005

［29］ 鈴木昇一：パターン（画像，音声）から感性情報を計量できる一般的な方法（視野を考慮して構成された類似度関数 *SM* の応用），情報研究（文教大学･情報学部），no.33,pp.261-316,Jul. 2005

［30］ 鈴木昇一：知識工学におけるcertainty factorによる多段階認識過程の評価，情報研究（文教大学･情報学部），no.33,pp.199-260,Jul.2005

［31］ 鈴木昇一:線形方程式の制約条件下での，残差法によるパターンモデル，情報研究（文教大学･情報学部），no.33,pp.149-197,Jul.2005

［32］ 鈴木昇一：正規直交性を満たす類似度関数 *SM* に積分核が存在するか？，情報研究（文教大学･情報学部），no.33,pp.111-147,Jul.2005

［33］ 鈴木昇一：原パターンを近似できるという拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの，会話音声・動画像処理への応用，情報研究（文教大学･情報学部），no.33,pp.43-110,Jul.2005

［34］ 南哲人，乾敏郎：ルールに基づく遅延見本合わせ課題のニューラルネットワークモデル，認知科学，vol.10,no.4,497-508,Dec.2003

［35］ Shimon Ullman,Ronen Basri：Recognition by linear combinations of models,IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence,vol.13,no.10,pp.992-1006,Oct.1991

［36］ 池上高志：言語・認知・複雑系（レクチャーシリーズ「AI研究者が学ぶ言語学の新展開　第5回」），人工知能学会誌，vol.19,no.2,pp.267-272,Mar.2004

［37］ Sang-Woon Kim,B.John Oommen:On using protype reduction schemes to optimize kernel-based nonlinear subspace methods,Pattern Recognition,vol.37,,pp.227-239,2004

［38］ 高野明彦:連想に基づく情報空間との対話技術（連想の情報学をめざして），心理学ワールド（編集・発行　日本心理学会），no.27,pp.13-16,Oct.2004

［39］ Tosiyuki Kirishima,Kosuke Sato,Kunihiro Chihara:Real-time gesture recognition by learning and selective control of visual interest points,IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence,vol.27,no.3,pp.351-364,Mar.2005

［40］ 坂本慶行，石黒真木夫，北川源四郎:情報量統計学（情報科学講座A・5・4），共立出版，Jun.1993

［41］ 鈴木昇一：パターンの変形量を外積演算による情報量で捉えよう-情報容量の提案と，情報容量を用いた類似度関数 *SM* の構成-，情報研究（文教大学･情報学部），no.36,pp.107-167,Dec.2006

［42］ 鈴木昇一：新しいパターン外積演算と，発想推論に役立つ異種想起の働き，情報研究（文教大学･情報学部），no.37,pp.85-171,July 2007

［43］ 鈴木昇一：認識の階層とC-RECOGNITRON，情報研究（文教大学･情報学部），no.36,pp.39-106,Dec.2006

［44］ 鈴木昇一：パターンの整形化方程式，情報研究（文教大学･情報学部），no.34,pp.73-127,Jan.2006

［45］ 鈴木昇一：入出力例の系列を用いた“対連想問題・その擬逆問題”の一般解，情報研究（文教大学･情報学部），no.30,pp.81-137,Jan.2004

［46］ 栗田稔：積分幾何学（現代数学講座20），共立出版，Sept.1967

［47］ 鈴木昇一：2カテゴリ分類困難度の情報理論，情報研究（文教大学･情報学部），no.26,pp.63－160,Dec.2001

[48] 早稲田篤志，双紙正和，宮地充子: $n$ 次元量子状態を使用した量子コイン投げプロトコル，情報処理学会論文誌，vol.46,no.8,pp.1903－1911,Aug.2005
[49] 鈴木昇一：マルチメディア情報理論入門，東京図書出版会，Dec.2007
[50] 寺本英：エネルギーとエントロピー（化学モノグラフ25），（株）化学同人，Jun.1973
[51] Shoichi Suzuki: Memorization and reasoning of semantic network using paired-associate mapping of patterns, Information and communication stndies of the faculty of Information and communication, Bunkyo University,vol.38,pp-59－76,Jan.2008
[52] 鈴木昇一：画像プロダクションシステムの記憶と推論，情報研究（文教大学・情報学部），no.38,pp.77－103,Jan.2008

## 付録A. パターン集合 $\Phi$ の表現空間は可分なヒルベルト空間である

### A1. パターン集合 $\Phi$ は構成的集合である

一般に，SS理論[3]，[4]では，処理の対象とする問題のパターン $\varphi$ の集合 $\Phi$ は或る可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の零元0を含む或る部分集合であるが，パターンと判明している集合（基本領域;basic domain）$\Phi_B(\ni 0)$ 並びに，すべての正実数の集合 $R^{++}$ を導入すれば，構成的集合（constructible set）として，

$$\Phi = R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B) \tag{A.1}$$

の如く設定される．パターン集合 $\Phi$ の表現空間は可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の部分集合であり，式（A.1）で規定されている．$\Phi$ は，包含不等式

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} \subset \Phi_B(\ni \{0\}) \subset \Phi \subset \mathfrak{H} \tag{A.2}$$

を満たしていなければならない．ここに，$\omega_j$ は第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の諸性質を典型的に備えている代表パターンであり，集合 $\Omega$ は全カテゴリ集合

$$\mathfrak{C}(J) = \{\mathfrak{C}_j \mid j \in J\} \tag{A.3}$$

と1対1の対応がある代表パターン集合である．

本付録Aでは，包含不等式（A.2）での可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ について説明し，典型的な1例として，$\mathfrak{H} = L_2(M, dm)$ が説明される．

尚，$\mathfrak{H}$ の大部分の元がパターンとして意味のないものであることに意識し，意味のないものを

$$\text{RECOGNITRON} \equiv \text{RECOGNITRON}(\mathfrak{C}(J) : \Omega(J)) \equiv < \Phi_B, T, SM, BSC > \tag{A.4}$$

への入力から排除できるという意味で，式（A.1）のパターン集合 $\Phi$ を何故式（A.4）のRECOGNITRONへの入力集合として採用するかが，付録Bにおいて，パターンの帰納的定義を使い，説明される．

### A2. 加法＋が導入されている群としての線形ベクトル空間としての，可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$

位相空間（topological space）$X$ が稠密（dense）な可算部分集合を持つとき，$X$ を可分な空間（separable space）であるという．

$$内積(\varphi, \eta)，ノルム \|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)} \tag{A.5}$$

が導入されている一般抽象ヒルベルト空間（加法＋が導入されている群としての線形ベクトル空間）$\mathfrak{H}$ は距離

$$dis(\varphi, \eta) \equiv \|\varphi - \eta\| \tag{A.6}$$

が導入され得る距離空間であり，この距離で位相が定義された位相空間である．パターン$\varphi$を内積$(\varphi,\eta)$，ノルム$\|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi,\varphi)}$とする可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元とする．$\mathfrak{H}$が可分(separable)とは，稠密な(dense)可算部分集合が$\mathfrak{H}$に存在することを指す．

完全な正規直交系が高々可算個からなっていれば、ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$は可分である．また，

可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$には，高々可算個からなる完全な正規直交系を作ることができる　(A.7)

ことが証明されている．よって，一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$で高々可算個からなる完全な正規直交系が存在することと，一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$が可分なこととは同値であることに注意しておこう．

ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$とは内積が定義された無限次元であってよいベクトル空間(内積が定義され得る線形空間)のことであり，有限次元の場合を含む．4性質

(イ)$(\varphi,\varphi)\geqq 0$，かつ，「$\varphi=0 \Leftrightarrow (\varphi,\varphi)=0$」　(A.8)

(ロ)$(\eta,\varphi)$は$(\varphi,\eta)$の共役複素数　(A.9)

(ハ)$(\varphi_1+\varphi_2,\eta)=(\varphi_1,\eta)+(\varphi_2,\eta)$　(A.10)

(ニ)任意の複素定数$a$について，

$(a\cdot\varphi,\eta)=a\cdot(\varphi,\eta)$　(A.11)

を満たすだけの，複素数値を与える内積$(\varphi,\eta)$というものが定義でき、高々可算個からなる完全な正規直交系が存在するというだけのヒルベルト空間$\mathfrak{H}$が可分な一般抽象という意味である．

### A3.　可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}=L_2(M,dm)$

例えば，$\bar{\eta}$を$\eta$の複素共役として，

$M$:$q$次元ユークリッド空間$R^q$の可測部分集合　(A.12)

$dm(x)$:正値ルベーグ・スティルチェス式測度　(A.13)

$x=<x_1,x_2,\cdots,x_q>\in M(\subseteq R^q)$:実数値$q$変数の直交座標系　(A.14)

を導入し，その内積$(\varphi,\eta)$,ノルム$\|\varphi\|$が，

$$(\varphi,\eta)=\int_M dm(x)\ \ \varphi(\mathrm{x})\cdot\bar{\eta}(\mathrm{x}) \qquad (A.15)$$

$$\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi,\varphi)} \qquad (A.16)$$

と与えられる線形空間(ベクトル空間)$\mathfrak{H}$が$\mathfrak{H}=L_2(M,dm)$である．

［例1］(ユークリッド的測度)

$$q=1 \qquad (A.17)$$

$$dm(x)=dx \qquad (A.18)$$

$$M=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\} \qquad (A.19)$$

と，設定すれば，

$$(\varphi,\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \ \varphi(\mathrm{x})\cdot\bar{\eta}(\mathrm{x}) \qquad (A.20)$$

であり，平行移動

$x\to x'=x+t$，ここに，$t$は任意の実定数　(A.21)

について．点の測度の不変性

$$dx'=dx \qquad (A.22)$$

が成り立つ．つまり，$dm(x)=dx$は平行移動の下で不変な測度である．よって，内積の保存性

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \quad \varphi(x')\cdot\overline{\eta}(x') \quad (=\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \quad \varphi(x')\cdot\overline{\eta}(x'))$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} dx \quad \varphi(x)\cdot\overline{\eta}(x) \tag{A.23}$$

が成り立つ. □

［**例2**］（楕円的測度）

文献[46]の2.3節（pp.39-42）からヒントを得て，構成する.

$$q=1 \tag{A.24}$$

$$dm(x)=d\tan^{-1}x=\frac{1}{1+x^2}\cdot dx \tag{A.25}$$

$$M=\{x\,|-\infty<x<+\infty\} \tag{A.26}$$

と，設定すれば,

$$(\varphi,\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx \quad \varphi(x)\cdot\overline{\eta}(x) \tag{A.27}$$

であり，変位

$$x\to x'=\frac{x+c}{1-c\cdot x}，\text{ ここに，} c \text{ は任意の実定数} \tag{A.28}$$

について，下の命題A.2に示されているように，不変性

$$\frac{1}{1+(x')^2}dx'=\frac{1}{1+x^2}dx \tag{A.29}$$

が成り立つ．つまり，$dm(x)=\dfrac{1}{1+x^2}dx$ はこの変位の下で不変な測度である．よって，内積の保存性

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx \quad \varphi(x')\cdot\overline{\eta}(x') \; (=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+(x')^2}dx' \quad \varphi(x')\cdot\overline{\eta}(x'))$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx \quad \varphi(x)\cdot\overline{\eta}(x) \tag{A.30}$$

が成り立つ.

次の2命題A.1，A.2が成り立つ.

［**命題A.1**］

$$x'=\frac{x+a}{1-a\cdot x}\to x''=\frac{x'+b}{1-b\cdot x'} \tag{A.31}$$

とすれば,

$$x''=\frac{x+c}{1-c\cdot x}，\quad \text{ここに，}\quad c=\frac{a+b}{1-b\cdot a} \tag{A.32}$$

が成り立つ.

（証明）

$$x''=\frac{x'+b}{1-b\cdot x'}=\frac{\dfrac{x+a}{1-a\cdot x}+b}{1-b\cdot\dfrac{x+a}{1-a\cdot x}}=\frac{(1-ab)x+a+b}{1-(a+b)x-ab} \tag{A.33}$$

$$=\frac{x+c}{1-c\cdot x}.$$

□

［命題A.2］

$$dm(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot dx \tag{A.34}$$

が，変位

$$x' = \frac{x+c}{1-c \cdot x} \tag{A.35}$$

によって，

$$dm(x') = \frac{1}{1+(x')^2} \cdot dx' \tag{A.36}$$

に移れば，

$$dm(x) = dm(x'). \tag{A.37}$$

（証明）
$$dm(x') = \frac{1}{1+(x')^2} \cdot dx' = \frac{1}{1+[\frac{x+c}{1-c \cdot x}]^2} \cdot [\frac{d}{dx}\frac{x+c}{1-c \cdot x}] \cdot dx \tag{A.38}$$

$$= \frac{1}{1+[\frac{x+c}{1-c \cdot x}]^2} \cdot \frac{(1-cx)+c(x+c)}{[1-c \cdot x]^2} \cdot dx \tag{A.39}$$

$$= \frac{1+c^2}{[1-c \cdot x]^2 + (x+c)^2} \cdot dx$$

$$= \frac{1+c^2}{[1-c \cdot x]^2 + (x+c)^2} \cdot dx$$

$$= \frac{1+c^2}{(1+c^2)+(1+c^2)x^2} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$$

$$= dm(x).$$

□

［例3］（双曲的測度）

文献[46]の2.3節（pp.39-42）からヒントを得て，構成する.

$$q = 1 \tag{A.40}$$

$$dm(x) = d\tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2} \cdot dx \tag{A.41}$$

$$M = \{x \mid -1 < x < +1\} \tag{A.42}$$

ここに，
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x})}{\frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{A.43}$$

と，設定すれば，

$$(\varphi, \eta) = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{1-x^2} dx \quad \varphi(\mathrm{x}) \cdot \overline{\eta}(\mathrm{x}) \tag{A.44}$$

であり，変位

$$x \to x' = \frac{x+c}{1+c \cdot x}, \quad \text{ここに，} \quad -1 < c < +1 \tag{A.45}$$

について，下の命題A.4に示されているように，不変性

$$\frac{1}{1-(x')^2}dx' = \frac{1}{1-x^2}dx \tag{A.46}$$

が成り立つ．つまり，$dm(x) = \frac{1}{1-x^2}dx$ はこの変位の下で不変な測度である．よって，内積の保存性

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1-x^2}dx \quad \varphi(x')\cdot\overline{\eta}(x') \;(=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1-(x')^2}dx' \quad \varphi(x')\cdot\overline{\eta}(x'))$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1-x^2}dx \quad \varphi(x)\cdot\overline{\eta}(x) \tag{A.47}$$

が成り立つ．

次の2命題A.2,A.3が成り立つ．

［命題A.3］

$$x' = \frac{x+a}{1+a\cdot x} \to x'' = \frac{x'+b}{1+b\cdot x'} \tag{A.48}$$

とすれば，

$$x'' = \frac{x+c}{1+c\cdot x}, \quad ここに，\quad c = \frac{a+b}{1+b\cdot a} \tag{A.49}$$

が成り立つ．

（証明）$$x'' = \frac{x'+b}{1+b\cdot x'} = \frac{\frac{x+a}{1+a\cdot x}+b}{1+b\cdot\frac{x+a}{1+a\cdot x}} = \frac{(1+ab)x+a+b}{1+(a+b)x+ab} \tag{A.50}$$

$$=\frac{x+c}{1+c\cdot x}.$$ □

［命題A.4］

$$dm(x) = \frac{1}{1-x^2}\cdot dx \tag{A.51}$$

が，変位

$$x' = \frac{x+c}{1+c\cdot x} \tag{A.52}$$

によって，

$$dm(x') = \frac{1}{1-(x')^2}\cdot dx' \tag{A.53}$$

に移れば，

$$dm(x) = dm(x'). \tag{A.54}$$

（証明）$$dm(x') = \frac{1}{1-(x')^2}\cdot dx' = \frac{1}{1+[\frac{x+c}{1+c\cdot x}]^2}\cdot[\frac{d}{dx}\frac{x+c}{1+c\cdot x}]\cdot dx \tag{A.55}$$

$$=\frac{1}{1-[\frac{x+c}{1+c\cdot x}]^2}\cdot\frac{(1+cx)-c(x+c)}{[1+c\cdot x]^2}\cdot dx \tag{A.56}$$

$$=\frac{1-c^2}{[1+c\cdot x]^2-(x+c)^2}\cdot dx$$

$$=\frac{1-c^2}{[1+c\cdot x]^2-(x+c)^2}\cdot dx$$

$$= \frac{1-c^2}{(1-c^2)-(1-c^2)x^2} \cdot dx$$
$$= \frac{1}{1-x^2} \cdot dx$$
$$= dm(x).$$
□

［例4］（直線の集合の測度）

文献[46]の1.2節（pp.14-15）から，構成する．

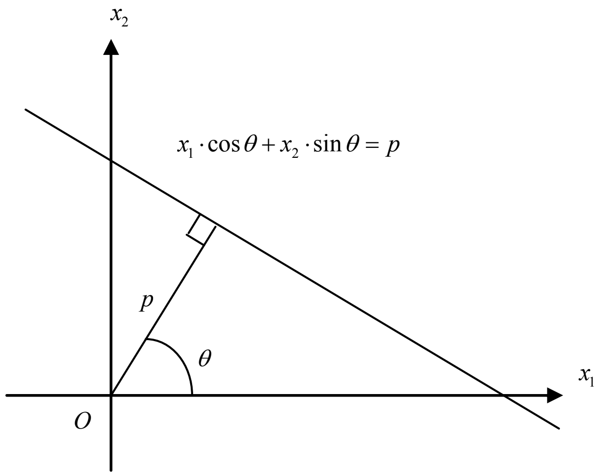


Fig.A.1　The diagram of the measure of straight lines

**図A.1 直線の測度の説明図**

平面上の直角座標系 $x =< x_1, x_2 >$ においては，直線の方程式は

$$x_1 \cdot \cos\theta + x_2 \cdot \sin\theta = p \tag{A.57}$$

と表わされる．ここに，$\theta$ は原点 $O$ からこの直線に向って引いた垂線と $x_1$ 軸とのなす角であり，$p$ はこの垂線の長さである．$p, \theta$ が決まれば，この直線は決まってくる．

例えば，パターン $\varphi(p,\theta)$ を

$$\varphi(p,\theta) = \begin{cases} 1 \cdots \text{式(A.57)の直線が平面上に存在する時} \\ 0 \cdots \text{式(A.57)の直線が平面上に存在しない時} \end{cases} \tag{A.58}$$

と考えてみればわかるように，このパターンは平面上にある直線の集合を表現している．内積 $(\varphi,\eta)$ は

$$(\varphi,\eta) = \int_0^\infty dp \int_0^{2\pi} d\theta \quad \varphi(p,\theta) \cdot \overline{\eta}(p,\theta) \tag{A.59}$$

と与えてみよう．

$$dm(p,\theta) = dpd\theta \text{，ここに，} 0 \le p < \infty, 0 \le \theta < 2\pi \tag{A.60}$$

は直線の集まり $K$ の測度である．

直線の集まり $K$ に回転と平行移動とからなる変位

$$x_1' = x_1 \cdot \cos\alpha - x_2 \cdot \sin\alpha + a_1, x_2' = x_1 \cdot \sin\alpha + x_2 \cdot \cos\alpha + a_2 \tag{A.61}$$

を作用させて得られる直線の集まり $K'$ を考える．式(A.57)の直線は，回転と平行移動とからなるこの変位により，

$$x_1' \cdot \cos\theta' + x_2' \cdot \sin\theta' = p' \tag{A.62}$$

で表わされる直線に移るが，回転と平行移動とからなるこの変位に不変な性質

$$\int_{K'} dp' d\theta' = \int_K dpd\theta \tag{A.63}$$

が成り立つ．よって，内積の不変性

$$\int_0^\infty dp \int_0^{2\pi} d\theta \quad \varphi(p',\theta') \cdot \overline{\eta}(p',\theta') \; (= \int_0^\infty dp' \int_0^{2\pi} d\theta' \quad \varphi(p',\theta') \cdot \overline{\eta}(p',\theta'))$$

$$= \int_0^\infty dp \int_0^{2\pi} d\theta \quad \varphi(p,\theta) \cdot \overline{\eta}(p,\theta) \tag{A.64}$$

が成り立つ． □

（付A・終わり）

## 付録B． SS公理系と，認識システムRECOGNITRON $(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) \equiv <\Phi_B, T, SM, BSC>$

本付録Bでは，万能性認識の働きを備えた式(A.4)の認識システムRECOGNITRON ≡ RECONITRON $(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) \equiv <\Phi_B, T, SM, BSC>$ の構成を可能ならしめるSS公理系(a system of axioms proposed by S.Suzuki)が説明される．カテゴリ帰属知識を解に持つ，S.Suzukiの発見したSS連想形認識方程式(SS equation of associative recognition)の解を求める多段階過程が万能性認識の働きを備えた認識システムRECONITRONの多段階パターン認識過程であり，その解が認識可能，認識不能，認識不定の3種類に分類されることが既に，明らかになっている[3]，[4].

尚，以下のモデル構成作用素 $T$ ，類似度関数 $SM$ ，大分類関数 $BSC$ を構成した諸例については，S.Suzukiの論文にある.

### B1． パターンの帰納的定義

情報学では，システムが扱う対象に領域(domain)を整合的に指定することを，型付け(type-assignment)という．パターン認識システムが扱う対象であるパターン集合にS.Suzukiの理論以外では，領域を指定するという型付けがなされていないのは，それらの理論が型付けが可能でないほど，何がしかの欠点を備えているからであろう．パターン集合 $\Phi$ の表現空間は可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ であるとすると，$\mathfrak{H}$ の大部分の元がパターンとして意味のないものであるから，型付けが必須であることが明らかにも拘らず.

無限個の対象(例えば，処理の対象とする問題のパターン $\varphi$ の集合 $\Phi$ )を定義する最も確実な方法の1つは，以下の帰納的定義，再帰的定義(recursive definition)である：

(1) 先ず，最初に，具体的な対象を与える.

(2) 次に，具体的な対象を使って，別の具体的な対象を定義する.

(3) 以上の(1),(2)で定義されたもののみが今定義しようとする対象である. □

S.Suzukiは，以下のパターンの帰納的定義に従い，式(B.1)の再帰的領域方程式を導き，その解を式(A.1)の如く求め，式(A.4)のRECOGNITRONに関し，パターン集合 $\Phi$ の型付けをパターン認識学

の分野で初めて成し遂げた：パターン$\varphi$のモデル$T\varphi$を導入する．

［パターンの帰納的定義］

$\mathfrak{H}$の零元0を含む基本領域(basic domain) $\Phi_B \subset \mathfrak{H}$を導入する．

①$\Phi_B$の元$\varphi \in \mathfrak{H}$はパターンである．

②$\varphi$がパターンならば，$a \cdot \varphi, T\varphi$はパターンである．ここに，$a$は任意の正の実数である．

③以上の①，②により，パターンと判明するもののみがパターンである．　□

以上の，パターンの帰納的定義より，再帰領域方程式

$$\Phi = \Phi_B \cup T \cdot \Phi \cup R^{++} \cdot \Phi \tag{B.1}$$

が得られ，この再帰領域方程式(B.1)の解として，構成的集合式(A.1)の$\Phi$が求まる．

## B2. パターン$\varphi$のモデル$T\varphi$

前章のパターンの帰納的定義で登場しているパターンモデル$T\varphi$について説明しておこう．

式(A.4)のRECOGNITRONは，上首尾なパターン認識の働きを達成するため，パターンの形状における多少の違いを排除して，パターン$\varphi \in \Phi$のモデル$T\varphi \in \Phi$を確保する必要がある．

モデル$T\varphi \in \Phi$の典型的なものは，$\mathfrak{H}$の元$\phi_\ell$からなる1次独立な系$\{\phi_\ell\}_{\ell \in L}$を導入して得られる1次形式

$$T\varphi = \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell) \cdot \phi_\ell \tag{B.2}$$

である．ここに，$u(\varphi, \ell)$はパターン$\varphi \in \Phi$から抽出された第$\ell \in L$番目の特徴量である．このパターンモデル$T\varphi \in \Phi$内の各特徴量$u(\varphi, \ell)$に関し，

(1) 抽出される特徴量からの，雑音の除去

(2) ユニタリ的な座標変換の下で不変な特徴量の抽出

(3) 抽出された特徴量の離散化

が可能であり[3]，[4]，パターンの形状$\varphi \in \Phi$を整形した効果を$T\varphi \in \Phi$に取り入れることが出来る．

## B3. パターン集合$\Phi$とモデル構成作用素$T$との対【$\Phi, T$】の満たすべき公理

基本領域$\Phi_B$を導入し，写像

$$T : \Phi \to \Phi \tag{B.3}$$

がaxiom 1の(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ)の3後半，並びに，(ⅳ)を満たすものとすれば，順序対(ordered pair) $[\Phi, T]$は以下のaxiom 1を満たすことが示される．

Axiom 1（**パターン集合$\Phi$とモデル構成作用素$T$との対【$\Phi, T$】の満たすべき公理**）

(ⅰ)（零元0の$\Phi$－包含性と，零元0の$T$－不動点性;fixed-point property of zero element under mapping $T$）

$0 \in \Phi \wedge T0 = 0.$

(ⅱ)（$\Phi$の錐性，$T$の正定数倍吸収性;cone property）

$\forall \varphi \in \Phi, a \cdot \varphi \in \Phi \wedge T(a \cdot \varphi) = T\varphi$

for any positive real number $a \in R^{++}$.

(ⅲ)（$\Phi$の埋込性(embeddedness)と，$T$のベキ等性(idempotency)）

$\forall \varphi \in \Phi, T\varphi \in \Phi \wedge T(T\varphi) = T\varphi.$

(ⅳ)（写像$T$の非零写像性;non-zero mapping property of T）

$\exists\varphi\in\Phi, T\varphi\neq 0.$ □

以後，順序対$[\Phi,T]$は上述のaxiom 1を満たすとしよう．

パターン$\varphi$の代りに，そのモデル$T\varphi$を採用するとき，当然ながら，$\varphi_{nonfixed}\equiv\varphi-T\varphi$の情報を捨て去っていることになる．これは，パターン$\varphi$に含まれる情報の内，式(B.3)の写像$T$の不動点$\varphi_{fixed}\equiv T\varphi$のみを取り出したことになる．等式

$$\varphi=\varphi_{fixed}+\varphi_{nonfixed}$$

が成立しており，このとき，不動点方程式

$$T\varphi_{fixed}=\varphi_{fixed}$$

は常に成立しているが(axiom 1,(ⅲ)の後半)，一般に，

$$T\varphi_{nonfixed}\neq\varphi_{nonfixed}$$

であることに，注意しておく．

原パターン$\varphi$のモデル$\varphi_{fixed}\equiv T\varphi$を生成し，補間能力・近似能力を持つ式(B.3)の写像$T$は，対立する2つの機能

(1%) 原パターン$\varphi$へ向けての，再現(の場面における)忠実性(fidelity to the original pattern $\varphi$)

(2%) 原パターン$\varphi$へ向けての，再現(の場面における) 要約性(summary to the original pattern $\varphi$)

を備えていなければならない．再現忠実能力が強くなればなるほど，再現要約能力が弱くなるし，再現要約能力が強くなればなるほど，再現忠実能力が弱くなる．この両機能を折衷し，ほどよく備えた式(B.3)の写像$T$を採用しなければならない．

## B4. カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$

S.Suzukiが構築した式(A.4)の認識システムRECOGNITRONへの入力，からの出力は，以下に説明されるカテゴリ帰属知識(categorical-membership knowledge)

$$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J> \tag{B.4}$$

である．

代数構造として加法演算が導入された集合$\mathfrak{H}$は内積，ノルムを各々，$(\varphi,\eta),\|\varphi\|\equiv\sqrt{(\varphi,\varphi)}$とするある可分なヒルベルト空間としよう．2つの集合$\Phi,2^J$は，

(一) $\Phi(\ni 0)(\subset\mathfrak{H})$：処理の対象とする問題のパターン$\varphi$の集合(パターン集合) (B.5)

(二) $2^J\equiv\{\gamma\mid\gamma\subseteq J\}$：(パターン$\varphi\in\Phi$の帰属するかも知れない)カテゴリ$\mathfrak{C}_j$の添え字(カテゴリ番号)を要素とするすべての部分集合(カテゴリ番号集合)(或いは，この部分集合のリストによる表現)の集合 (B.6)

としよう．集合$2^J$の元は順序の付いた要素の並びとして，集合の今1つの表現であるリストとして表されることがある．

認識システム RECOGNITRON が，処理の対象とする問題のパターン$\varphi\in\Phi$について，

$\varphi$が，有限個のカテゴリ$\mathfrak{C}_i(i\in\gamma)$からなる式(B.16)の集合$\mathfrak{C}(\gamma)$ の内の何れか1つのカテゴリに帰属している可能性があるというカテゴリ事前知識 (B.7)

を持っている場合，このカテゴリ事前知識を式(B.4)の如く表す．連想形認識方程式(1.21)を近似的に解くことによりパターン$\varphi$を連想形認識処理し終えたRECOGNITRONは式(B.4)のカテゴリ事前知識$<\varphi,\gamma>$をカテゴリ事後知識$<\phi,\lambda>$に最終認識段階で変換している．$<\phi,\lambda>$は通常，或るカテゴリ番号が存在し，$<T\omega_j,[j]>$の形をしている．1.2節，(3#)の連想形認識方程式(1.21)の求解過程式

$$<T\varphi,\gamma>(=_\Delta<\phi_0,\lambda_0>)\to<\phi_1,\lambda_1>\to<\phi_2,\lambda_2>\to\cdots$$

$$\to <\phi_s,\lambda_s> \quad \{=_\Delta TA(\mu_{s-1})T\cdot<\phi_{s-1},\lambda_{s-1}>=_\Delta<TA(\mu_{s-1}\cap\lambda_{s-1})T\phi_{s-1},CSF(\phi_{s-1},\mu_{s-1}\cap\lambda_{s-1})>\}\to\cdots$$
$$\to<T\omega_j,[j]>(=_\Delta<\phi_t,\lambda_t>) \tag{B.8}$$

において，最終の認識段階(第$t$段階)の$<\phi,\lambda>=_\Delta<\phi_t,\lambda_t>$が$<T\omega_j,[j]>$の形をするとき，パターン$\varphi$は第$j\in\gamma\subset J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に認識可能であるという．そして，パターン$\varphi$は$T\omega_j$に再生される($\varphi$から$T\omega_j$が連想・想起される)という．ここに，カテゴリ帰属知識空間と呼ばれる空間

$$<\Phi,2^J>\equiv\{<\varphi,\gamma>|\varphi\in\Phi,\gamma\in 2^J\} \tag{B.9}$$

上の2元関係$=_\Delta$は等形式関係と呼ばれるものであり，

$$<\varphi,\gamma>=_\Delta<\phi,\lambda>\Leftrightarrow[\varphi=\phi\wedge\gamma=\lambda] \tag{B.10}$$

という具合に定義されている[3].

この種のカテゴリ知識$<\varphi,\gamma>$のすべての集合がカテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$である.

## B5. 類似度関数 $SM$ の満たす公理

類似度関数(similarity-measure function)と呼ばれる関数

$$SM:\Phi\times\Omega\to\{s|\leq s\leq 1\} \tag{B.11}$$

は，次のaxiom 2を満たすように構成されねばならない.

<u>Axiom 2</u>（**類似度関数 $SM$ の満たすべき公理**）

（ⅰ）(正規直交性;orthonormality)

$$\forall i,\forall j,SM(\omega_i,\omega_j)=\delta_{ij}(=1\quad if\quad i=j,=0\quad if\quad i\neq j).$$

（ⅱ）(規格化条件，確率性，正規性;probability condition,normalization)

$$\forall\varphi\in\Phi,\sum_{j\in J}SM(\varphi,\omega_j)=1.$$

（ⅲ）(写像$T$の下での不変性;invariance under mapping $T$)

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J,SM(T\varphi,\omega_j)=SM(\varphi,\omega_j).$$
□

1より大きくない非実数$SM(\varphi,\omega_j)$は，パターン$\varphi\in\Phi$が，第$j\in J$番目のカテゴリ

$$\mathfrak{C}_j\in\mathfrak{C}\equiv\mathfrak{C}(J)\equiv\{\mathfrak{C}_i\,|\,i\in J\} \tag{B.12}$$

の諸性質を備えている代表パターン

$$\omega_j\in\Omega\equiv\Omega(J)\equiv\{\omega_i\,|\,i\in J\}\subseteq\Phi \tag{B.13}$$

と似ている程度を表している，と解釈できる．ここに，$J$は全カテゴリ番号の集合といわれるものである．全カテゴリ番号の集合$J$の部分集合

$$\gamma=\{i,j,\cdots k\}(\subseteq J) \tag{B.14}$$

は，重複要素があってもよいリスト

$$\gamma=\begin{bmatrix}i & j & \cdots & k\end{bmatrix}\in 2^J\equiv\{\lambda|\ \lambda\subseteq J\} \tag{B.15}$$

として，表現されることがあり，このカテゴリ番号リスト$\gamma\in 2^J$から定まるような，

$\mathfrak{C}(J)$ ,$\Omega(J)$の部分集合

$$\mathfrak{C}(\gamma)\equiv\{\mathfrak{C}_i\,|\,i\in\gamma\}\subseteq\mathfrak{C}(J),\gamma\subseteq J \tag{B.16}$$
$$\Omega(\gamma)\equiv\{\omega_i\,|\,i\in\gamma\}\subseteq\in\Omega(J),\gamma\subseteq J \tag{B.17}$$

も定義しておく.

尚,

$$[\forall j\in J,0<p(\mathfrak{C}_j)<1]\wedge\sum_{j\in J}p(\mathfrak{C}_j)=1 \tag{B.18}$$

を満たす第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の出現確率$p(\mathfrak{C}_j)$を導入しておく.

## B6. 大分類関数 $BSC$ の満たす公理

大分類関数（binary-state classifier）と呼ばれる関数

$$BSC : \Phi \times J \to \{0,1\} \tag{B.19}$$

は，次のaxiom 3を満たすように構成されねばならない．

<u>Axiom 3</u>（**大分類関数 $BSC$ の満たすべき公理**）

（ⅰ）（カテゴリ抽出能力;category separability）

$\forall j \in J, BSC(\omega_j, j) = 1.$

（ⅱ）（写像 $T$ の下での不変性;invariance under mapping $T$）

$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, BSC(T\varphi, j) = BSC(\varphi, j).$ □

$BSC(\varphi, j) = 1$ であれば，第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ は，パターン $\varphi \in \Phi$ が帰属する候補カテゴリの1つであると，解釈できる．

## B7. $SM$ と $BSC$ とを用いたカテゴリ選択関数 $CSF$ の構成

2式（B.36），（B.38）に登場している式（B.34）のカテゴリ選択関数 $CSF : \Phi \times 2^J \to 2^J$ は，包含関係（inclusion relation）

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \gamma \in 2^J, CSF(\varphi, \gamma)) \subseteq \gamma \subseteq J \in 2^J \tag{B.20}$$

を満たし，然も，次のaxiom 4を満たすものとして，設定されなければならない．

<u>Axiom 4</u>（**カテゴリ選択関数 $CSF$ の満たすべき公理**）

（ⅰ）$\varphi = 0 \vee \gamma = \phi$ の場合

如何なるカテゴリ番号 $k \in \gamma$ も $<\varphi, \gamma>$ の有効な候補カテゴリの番号ではない．

（ⅱ）$\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ であり，かつ，$SM(\varphi, \omega_k) = 0 \wedge BSC(\varphi, k) = 0$ の場合

カテゴリ番号 $k \in \gamma$ は，$<\varphi, \gamma>$ の有効な候補カテゴリの番号ではない．

（ⅲ）$\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ であり，かつ，$\sum_{k \in \gamma} BSC(\varphi, k) = 0$ の場合

$SM(\varphi, \omega_k) > 0$ であるようなカテゴリ番号 $k \in \gamma$ は，$<\varphi, \gamma>$ の有効な候補カテゴリの番号である．

（ⅳ）$\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ であり，かつ，$\sum_{k \in \gamma} BSC(\varphi, k) > 0$ の場合

（ⅳ-1）$BSC(\varphi, k) = 0$ なるカテゴリ番号 $k \in \gamma$ は，$<\varphi, \gamma>$ の有効な候補カテゴリの番号ではない．

（ⅳ-2）$BSC(\varphi, k) = 1$ なるカテゴリ番号 $k \in \gamma$ は，$SM(\varphi, \omega_k) > 0$ であれば，$<\varphi, \gamma>$ の有効な候補カテゴリの番号である． □

上述のaxiom 4を満たすカテゴリ選択関数 $CSF$ は，次の定理B.1で決定される．

**［定理B.1］**（カテゴリ選択関数 $CSF$ の構成定理）

次のように定義される式（B.34）の1つの写像 $CSF$ は式（B.20）と上述のaxiom 4を満たす:

（ⅰ）$\varphi = 0 \vee \gamma = \phi$ の場合

$$CSF(\varphi, \gamma) = \phi. \tag{B.21}$$

（ⅱ）$\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ の場合

$$CSF(\varphi, \gamma) =$$

$$\begin{cases} \{k \in \gamma \mid SM(\varphi, \omega_k) > 0\} & \text{if } \sum_{k \in \gamma} BSC(\varphi, k) = 0 \qquad \text{(B.22)} \\ \{k \in \gamma \mid SM(\varphi, \omega_k) > 0 \wedge BSC(\varphi, k) = 1\} & \text{if } \sum_{k \in \gamma} BSC(\varphi, k) > 0 \qquad \text{(B.23)} \end{cases}$$

（証明）文献[3]の定理E1である． □

## B8. 構造受精変換と呼ばれる写像 $TA(\mu)T :<\Phi,2^J>\to<\Phi,2^J>$

### B8.1　構造受精写像と呼ばれる写像 $TA(\mu)T : \Phi \to \Phi$

カテゴリ番号リスト $\mu \in 2^J$ を助変数に持つ構造受精作用素（structural-fertilization operator）と呼ばれる写像

$$A(\mu) : \Phi \to \Phi \quad \text{(B.24)}$$

が，

式（A.2）の代表パターン集合 $\Omega$ をモデル構成作用素 $T$ で変換して得られる1次独立な代表パターンモデル集合（1次独立な系であること）$T \cdot \Omega \equiv \{T\omega_j \mid j \in J\}$，並びに，

$$\text{類似度関数 } SM : \Phi \times \Omega \to \{s \mid \leq s \leq 1\} \quad \text{(B.25)}$$

$$\text{大分類関数 } BSC : \Phi \times J \to \{0,1\} \quad \text{(B.26)}$$

を使って，次のように定義される：

（ⅰ）$\varphi = 0 \vee \mu = \phi$ のとき

$$A(\mu)\varphi = 0. \quad \text{(B.27)}$$

（ⅱ）$\varphi \neq 0 \wedge \mu \neq \phi$ のとき

（ⅱ-1）$\sum_{j \in \mu} BSC(\varphi, j) = 0$ 　のとき

$$A(\mu)\varphi = \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j) \cdot T\omega_j. \quad \text{(B.28)}$$

よって，

$$\sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j) = 0 \text{ のとき，} \quad A(\mu)\varphi = 0 \text{ である．} \quad \text{(B.29)}$$

（ⅱ-2）$\sum_{j \in \mu} BSC(\varphi, j) > 0$ のとき

$$A(\mu)\varphi = \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j) \cdot BSC(\varphi, j) \cdot T\omega_j. \quad \text{(B.30)}$$

$$= \sum_{j \in \mu \wedge BSC(\varphi, j)=1} SM(\varphi, \omega_j) \cdot T\omega_j. \quad \text{(B.31)}$$

よって，

$$\sum_{j \in \mu \wedge BSC(\varphi, j)=1} SM(\varphi, \omega_j) = 0 \text{ のとき，} \quad A(\mu)\varphi = 0 \text{ である．} \quad \text{(B.32)}$$

□

式（B.24）の構造受精作用素 $A(\mu)$ の，上述の定義に登場している2式（B.25），（B.26）の2つの関数 $SM, BSC$ は各々，axiom 2,axiom 3を満たさなければならない．

この $A(\mu)$ の両側にaxiom 1を満たす式（B.3）のモデル構成作用素 $T$ を配置した写像

$$TA(\mu)T : \Phi \to \Phi \quad \text{(B.33)}$$

を考えることができる．

### B8.1　構造受精写像 $TA(\mu)T : \Phi \to \Phi$ の，構造受精変換と呼ばれる写像 $TA(\mu)T :<\Phi,2^J>\to<\Phi,2^J>$ の拡張

式（B.33）の写像 $TA(\mu)T$ は，その定義域，値域が $\Phi$ である写像である．類似度関数 $SM$，大分類関数 $BSC$ を使って定義されるカテゴリ選択関数（category-selection function）

$$CSF : \Phi \times 2^j \to 2^j \quad \text{(B.34)}$$

を導入し，定義域，値域が共にパターン空間 $\Phi$ ではなく，カテゴリ帰属知識空間 $<\Phi,2^J>$ である写像

$$TA(\mu)T<\varphi,\gamma>=_{\Delta}<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^{J}> \quad \text{for} \quad <\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^{J}> \tag{B.35}$$

に拡張できる．それには，カテゴリ番号リスト$\mu\in 2^{J}$を助変数に持つ式(B.33)の写像$TA(\mu)T$を，

$$TA(\mu)T<\varphi,\gamma>=_{\Delta}<TA(\mu\cap\gamma)T\varphi, CSF(\varphi,\mu\cap\gamma)>\in<\Phi,2^{J}> \tag{B.36}$$

,where

$$\phi=TA(\mu\cap\gamma)T\varphi \tag{B.37}$$

$$\lambda=CSF(\varphi,\mu\cap\gamma) \tag{B.38}$$

と定義すればよくて，この結果，式(B.33)の構造受精写像$TA(\mu)T:\Phi\to\Phi$は，構造受精変換と呼ばれる式(B.36)の写像$TA(\mu)T:<\Phi,2^{J}>\to<\Phi,2^{J}>$に拡張される．式(B.33)の写像$TA(\mu)T$はパターンをパターンへ変換するのみであるが，拡張された式(B.36)の写像$TA(\mu)T$はカテゴリ帰属知識をカテゴリ帰属知識へ変換することに留意しておく．

（付録B・終わり）

## 付録C.axiom 2を満たす類似度関数$SM$の再帰的諸性質

本付録Cでは，axiom 2を満たす類似度関数$SM$から，axiom 2を満たす今1つの類似度関数$SM'$を構成する方法(再帰的構成法)の1つとして，2値論理関数による合成法などを用いることを考えよう．

$SM$の再帰的諸性質が本付録Cにより，また，1つ明らかになったことになる．

### C1. 3関数$\log,\exp,\tan$による$SM$の再帰的構成

次の定理C.1は，自然対数関数$\log$，指数関数$\exp$，正接関数$\tan$を用いて，axiom 2を満たす類似度関数をaxiom 2を満たす類似度関数$SM$から構成する方法(再帰的構成法)を与えている．

［**定理C.1**］（3関数$\log,\exp,\tan$による$SM$の再帰的構成定理）

式(B.11)の類似度関数$SM$はaxiom 2を満たすとしよう．このとき，

(ｉ) $$SM_{\log}(\varphi,\omega_j)=\frac{\dfrac{1}{-\log_e SM(\varphi,\omega_j)}}{\displaystyle\sum_{i\in J}\frac{1}{-\log_e SM(\varphi,\omega_i)}}=\frac{\dfrac{1}{\log_e\dfrac{1}{SM(\varphi,\omega_j)}}}{\displaystyle\sum_{i\in J}\frac{1}{\log_e\dfrac{1}{SM(\varphi,\omega_i)}}} \tag{C.1}$$

(ⅱ) $$SM_{\exp}(\varphi,\omega_j)=\frac{\dfrac{1}{1-\exp[-(1-SM(\varphi,\omega_j)]}}{\displaystyle\sum_{i\in J}\frac{1}{1-\exp[-(1-SM(\varphi,\omega_i)]}} \tag{C.2}$$

(ⅲ) $$SM_{\tan}(\varphi,\omega_j)=\frac{\dfrac{1}{\tan[\frac{\pi}{2}\cdot\{1-SM(\varphi,\omega_j)\}]}}{\displaystyle\sum_{i\in J}\frac{1}{\tan[\frac{\pi}{2}\cdot\{1-SM(\varphi,\omega_i)\}]}} \tag{C.3}$$

と定義された3種類の関数

$$SM_{\log}, SM_{\exp}, SM_{\tan} \tag{C.4}$$

はaxiom 2を満たす．

（証明） $SM_{\log}, SM_{\exp}, SM_{\tan}$ のいずれも，その分子は

$\varphi = \omega_j$ のとき，$\infty$ であり，$\varphi = \omega_i (i \in J - \{j\})$ のとき，有限な非負実数である

ことから，axiom 2,(ⅰ)を満たすことが示され，また，その定義式からaxiom 2,(ⅱ)を明らかに満たすことがわかり，最後に，$SM$ がaxiom 2,(ⅲ)を満たすことにより，その定義式からaxiom 2,(ⅲ)を満たすことがわかる．□

## C2. 2値論理関数による $SM$ の再帰的構成

次の定理C.2では，命題論理における3基本論理演算

（1）選言(disjunction)，（2）連言(conjunction)，（3）否定(negation)

により，axiom 2を満たす2つの類似度関数 $SM_k$，1つの類似度関数 $SM$ から，axiom 2を満たす2つの類似度関数 $SM_{\#1\vee\#2}, SM_{\#1\wedge\#2}$，類似度関数 $SM_{\neg\#}$ が再帰的に構成されている．

尚，式(C.6)の $SM_{\#1\vee\#2}$ について，次の補助定理C.1に注意しておく．

**［補助定理C.1］**（$x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2$ の値域定理）

$0 \le x_1, x_2 \le 1$ のとき，$0 \le f(x_1, x_2) \equiv x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2 \le 1$

（証明） $f(x_1,x_2) = (1-x_2)\cdot x_1 + x_2$，$f(x_1,x_2) = (1-x_1)\cdot x_2 + x_1$

と変形されるから，$f(x_1,x_2)$ は $x_1, x_2$ の1次式である．また，

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1,x_2) = (1-x_2) \ge 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1,x_2) = (1-x_1) \ge 0$$

であり，$x_1, x_2$ の非減少関数である．よって，$f(x_1,x_2)$ は，$x_1 = x_2 = 0$ のとき，最小値 $f(0,0)=0$ をとり，$x_1 = x_2 = 1$ のとき，最大値 $f(1,1)=1$ をとる．□

**［定理C.2］**（選言・連言・連言による類似度関数 $SM$ の再帰構成定理）

式(B.11)の類似度関数 $SM$，並びに，2個の類似度関数

$$SM_k : \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \le s \le 1\}, k = 1, 2 \tag{C.5}$$

はaxiom 2を満たすとしよう．

$$SM_{\#1\vee\#2}(\varphi,\omega_j) = \frac{SM_1(\varphi,\omega_j) + SM_2(\varphi,\omega_j) - SM_1(\varphi,\omega_j)\cdot SM_2(\varphi,\omega_j)}{\sum_{i\in J}[SM_1(\varphi,\omega_i) + SM_2(\varphi,\omega_i) - SM_1(\varphi,\omega_i)\cdot SM_2(\varphi,\omega_i)]}$$

$$\text{但し，分母が}0\text{の場合，}\quad SM_{\#1\vee\#2}(\varphi,\omega_j) = p(\mathfrak{C}_j) \tag{C.6}$$

$$SM_{\#1\wedge\#2}(\varphi,\omega_j) = \frac{SM_1(\varphi,\omega_j)\cdot SM_2(\varphi,\omega_j)}{\sum_{i\in J} SM_1(\varphi,\omega_i)\cdot SM_2(\varphi,\omega_i)}$$

$$\text{但し，分母が}0\text{の場合，}\quad SM_{\#1\wedge\#2}(\varphi,\omega_j) = p(\mathfrak{C}_j) \tag{C.7}$$

$$SM_{\neg\#}(\varphi,\omega_j) = \frac{\dfrac{1}{1-SM(\varphi,\omega_j)}}{\sum_{i\in J}\dfrac{1}{1-SM(\varphi,\omega_i)}} \tag{C.8}$$

と定義される3つの関数

$$SM_{\#1\vee\#2}, SM_{\#1\wedge\#2}\ SM_{\neg\#} : \Phi\times\Omega \to \{s \mid 0 \le s \le 1\} \tag{C.9}$$

も，axiom 2を満たす．

（証明）割愛される．□

以上の定理C.2を拡張しよう．

例えば，2命題 $A, B$ の含意命題 $A \to B$ =if　$A$　then　$B$ は

$$A \to B = \neg A \vee B \tag{C.10}$$

であることを思い起こすと，次の定理C.3が成り立つ.

［定理C.3］（含意 による類似度関数 $SM$ の再帰構成定理）

式(C.5)の2個の類似度関数 $SM_k$ はaxiom 2を満たすとしよう．このとき，

$$SM_{\#1\to\#2}(\varphi,\omega_j) \equiv SM_{\neg\#1\cup\#2}(\varphi,\omega_j)$$

$$= \frac{\dfrac{[1-SM_1(\varphi,\omega_j)]^{-1}}{\sum_{k\in J}[1-SM_1(\varphi,\omega_k)]^{-1}} + SM_2(\varphi,\omega_j) - \dfrac{[1-SM_1(\varphi,\omega_j)]^{-1}}{\sum_{k\in J}[1-SM_1(\varphi,\omega_k)]^{-1}}\cdot SM_2(\varphi,\omega_j)}{\sum_{i\in J}[\dfrac{[1-SM_1(\varphi,\omega_i)]^{-1}}{\sum_{k\in J}[1-SM_1(\varphi,\omega_k)]^{-1}} + SM_2(\varphi,\omega_i) - \dfrac{[1-SM_1(\varphi,\omega_i)]^{-1}}{\sum_{k\in J}[1-SM_1(\varphi,\omega_k)]^{-1}}\cdot SM_2(\varphi,\omega_i)]}$$

但し，分母が0の場合， $SM_{\#1\to\#2}(\varphi,\omega_j) = p(\mathfrak{C}_j)$ (C.11)

と定義される関数

$$SM_{\#1\to\#2} : \Phi\times\Omega \to \{s \mid 0 \le s \le 1\} \tag{C.12}$$

も，axiom 2を満たす.

（証明）割愛される. □

定理C.3の $SM_{\#1\to\#2}(\varphi,\omega_j) \equiv SM_{\neg\#1\cup\#2}(\varphi,\omega_j)$ の構成法を一般化しよう.

任意の $n$ 変数2値 $(=0,1)$ 論理関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)(\in\{0,1\})$ は，選言∨，連言∧，否定¬の各論理記号を使って表現されるから，次の定理C.4が証明される.

［定理C.4］（類似度関数 $SM$ の再帰的2値論理的性質）

否定¬を含まない任意の $n$ 変数2値 $(=0,1)$ 論理関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,1\}$ の，各2値 $(=0,1)$ 変数 $x_k(k=1\sim n)$ に，axiom 2を満たす類似度関数

$$SM_k : \Phi\times\Omega \to \{s \mid 0\le s\le 1\}, k=1\sim n \tag{C.13}$$

を代入して得られる関数

$$SM_{f\#1\sim\#n}(\varphi,\omega_j) = \frac{f(SM_1(\varphi,\omega_j), SM_2(\varphi,\omega_j),\cdots,SM_n(\varphi,\omega_j))}{\sum_{i\in J} f(SM_1(\varphi,\omega_i), SM_2(\varphi,\omega_i),\cdots,SM_n(\varphi,\omega_i))}$$

但し，分母が0の場合， $SM_{f(\#1\sim\#n)}(\varphi,\omega_j) = p(\mathfrak{C}_j)$ (C.14)

は，axiom 2を満たす．但し，式(C.14)の論理関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,1\}$ においては，選言 $x_k \vee x_\ell$，連言 $x_k \wedge x_\ell$ について各々， $x_k + x_\ell - x_k\cdot x_\ell, x_k\cdot x_\ell$ に置き換えるものとする.

（証明）割愛される. □

## C3. $SM_{\max\{\#1,\#2\}}, SM_{\min\{\#1,\#2\}}$ による $SM_{\#1\vee\#2}, SM_{\#1\wedge\#2}$ の代用

次の定理C.5は， $SM_{\#1\vee\#2}, SM_{\#1\wedge\#2}$ が各々， $SM_{\max\{\#1,\#2\}}, SM_{\min\{\#1,\#2\}}$ により代用できることを示している.

［定理C.5］（ $SM_{\max\{\#1,\#2\}}, SM_{\min\{\#1,\#2\}}$ の再帰的構成定理）

式(C.5)の2個の類似度関数 $SM_k$ はaxiom 2を満たすとしよう． $SM_{\#1\vee\#2}$ の代りに，

$$SM_{\max\{\#1,\#2\}}(\varphi,\omega_j) = \frac{\max\{SM_1(\varphi,\omega_j), SM_2(\varphi,\omega_j)\}}{\sum_{i\in J}\max\{SM_1(\varphi,\omega_i), SM_2(\varphi,\omega_i)\}}$$

但し，分母が0の場合， $SM_{\max\{\#1,\#2\}}(\varphi,\omega_j) = p(\mathfrak{C}_j)$ (C.15)

を採用しても，関数

$$SM_{\max\{\#1,\#2\}}:\Phi\times\Omega\to\{s\mid 0\le s\le 1\} \tag{C.16}$$

はaxiom 2を満たす．同様に，

$SM_{\#1\wedge\#2}$ の代りに，

$$SM_{\min\{\#1,\#2\}}(\varphi,\omega_j)=\frac{\min\{SM_1(\varphi,\omega_j),SM_2(\varphi,\omega_j)\}}{\sum_{i\in J}\min\{SM_1(\varphi,\omega_i),SM_2(\varphi,\omega_i)\}}$$

$$\text{但し，分母が0の場合，}\ SM_{\min\{\#1,\#2\}}(\varphi,\omega_j)=p(\mathfrak{C}_j) \tag{C.17}$$

を採用しても，関数

$$SM_{\min\{\#1,\#2\}}:\Phi\times\Omega\to\{s\mid 0\le s\le 1\} \tag{C.18}$$

はaxiom 2を満たす．この代用でも，2定理C.3,C.4が成り立つ．□

## C4.　類似度関数 $SM$ の一般的再帰構成

集合 $X$ 内の要素の総数を $|X|$ と表す．positive-sign function と呼ばれてよい1実変数 $u$ の関数

$$psn(u)=\begin{cases}0\cdots u<0\text{のとき}\\1\cdots u\ge 0\text{のとき}\end{cases} \tag{C.19}$$

を導入する．更に，不等式

$$0<e_j\le 1 \tag{C.20}$$

を満たす閾値 $e_j$ を導入する．全カテゴリ番号集合 $J$ の部分集合

$$J_{+,0}(\varphi)=\{j\in J\mid SM(\varphi,\omega_j)\ge e_j\} \tag{C.21}$$

を考えておく．

次の定理C.6は，positive-sign function $psn$ を使って，類似度関数 $SM$ を再帰的に構成している．

**［定理C.6］**（2値関数 $psn$ による類似度関数 $SM$ の一般再帰定理）

$$SM'(\varphi,\omega_j)=\begin{cases}\dfrac{psn(SM(\varphi,\omega_j)-e_j)}{\sum_{i\in J}psn(SM(\varphi,\omega_i)-e_i)}\cdots\sum_{i\in J}psn(SM(\varphi,\omega_i)-e_i)=|J_{+,0}(\varphi)|>0\text{のとき}\\p(\mathfrak{C}_j)\cdots\sum_{i\in J}psn(SM(\varphi,\omega_i)-e_i)=|J_{+,0}(\varphi)|=0\text{のとき}\end{cases} \tag{C.22}$$

と定義された

$$SM':\Phi\times\Omega\to\{s\mid 0\le s\le 1\} \tag{C.23}$$

はaxiom 2を満たす．

（証明）割愛される．□

次の定理C.7は，定理C.6の一般化である．2条件(1#),(2#)を満たす関数 $f_j$ として，

（1%）　$f_j(s)=s^n, n=2,3,4,\cdots$

（2%）　$f_j(s)=\sqrt{s}$

（3%）　$f_j(s)=-s\cdot\log_e s+s$，ここに，$0\cdot\log_e 0\equiv 0$

（4%）　$f_j(s)=\log_e(1+s)$

（5%）　$f_j(s)=\sin(\frac{\pi}{2}\cdot s)$

（6%）　$f_j(s) = 1 - \cos(\frac{\pi}{2} \cdot s)$

（7%）　$f_j(s) = 1 - \exp(-s)$

（8%）　$f_j(s) = \exp[-\frac{1-s}{s}]$

（9%）　$f_j(s) = \frac{1}{2} \cdot \log_e(1+s^2)$

（10%）　$f_j(s) =$

$$\begin{cases} 0 \cdots 0 \le s \le a_1 \text{ のとき} \\ \frac{b_2}{a_2 - a_1} \cdot (x - a_1) \cdots a_1 < s \le a_2 \text{ のとき} \\ \frac{b_3 - b_2}{a_3 - a_2} \cdot (x - a_2) + b_2 \cdots a_2 < s \le a_3 \text{ のとき} \\ \frac{1 - b_3}{a_4 - a_3} \cdot (x - a_3) + b_3 \cdots a_3 < s < a_4 \text{ のとき} \\ 1 \cdots a_4 \le s \le 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

ここに，

$$0 \le a_1 < a_2 < \frac{1}{2} < a_3 < a_4 \le 1 \tag{C.24}$$

$$0 < b_2 < b_3 < +\infty \tag{C.25}$$

$$0 < \frac{b_2}{a_2 - a_1} < 1, \frac{b_3 - b_2}{a_3 - a_2} = 1, \frac{1 - b_3}{a_4 - a_3} > 1 \tag{C.26}$$

などがある．

**［定理C.7］**（0 を不動点に持つ関数 $f_j$ による類似度関数 $SM$ の一般再帰定理）

2条件

（1♯）　$f_j(0) = 0$　　(C.27)

（2♯）　$0 < f_j(1) < +\infty$　　(C.28)

を満たすような1変数 $s$ の関数

$$f_j : \{s \mid 0 \le s \le 1\} \to R^+ \text{ (非負実数全体の集合)} \tag{C.29}$$

を導入する．式(B.11)の関数 $SM$ はaxiom 2を満たしているとしよう．

$$SM'(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} \frac{f_j(SM(\varphi, \omega_j))}{\sum_{i \in J} f_i(SM(\varphi, \omega_i))} \cdots \sum_{i \in J} f_i(SM(\varphi, \omega_i)) > 0 \text{ のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \sum_{i \in J} f_i(SM(\varphi, \omega_i)) = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{C.30}$$

と定義された式(C.23)の関数 $SM'$ はaxiom 2を満たす.

（証明）割愛される．　□

次の定理C.8は，定理C.1の $SM_{\exp}(\varphi, \omega_j), SM_{\tan}(\varphi, \omega_j)$，定理C.2の $SM_{\neg\#}(\varphi, \omega_j)$ を一般化したものである．2条件(1$),(2$)を満たす関数として，

（1&）　$g_j(s) = \frac{1}{s^n}, n = 1, 2, 3, \cdots \quad \because \quad$ 定理C.2の $SM_{\neg\#}(\varphi, \omega_j)$

（2&）$g_j(s)=\dfrac{1}{1-\exp(-s)}$　∵　定理C.1の$SM_{\exp}(\varphi,\omega_j)$

（3&）$g_j(s)=\dfrac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}\cdot s)}$　∵　定理C.1の$SM_{\tan}(\varphi,\omega_j)$

（4&）$g_j(s)=-\log_e s$

（5&）$g_j(s)=\dfrac{1}{1-\cos(\frac{\pi}{2}\cdot s)}$

（6&）$g_j(s)=\dfrac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}\cdot s)}$

（7&）$g_j(s)=\exp[\dfrac{1-s}{s}]$

（8&）$g_j(s)=\dfrac{1}{\log_e(1+s)}$

（9&）$g_j(s)=\dfrac{1}{\frac{1}{2}\cdot\log_e(1+s^2)}$

（10&）$g_j(s)=\log_e(1+\dfrac{1}{s^n}), n=1,2,3,\cdots$

（11&）$g_j(s)=\tan(\dfrac{\pi}{2}\cdot(1-s))$

（12&）$a_1=0$のときの(10%)の関数を用いて，

$$g_j(s)=\frac{1}{f_j(s)}$$

などがある．

［**定理C.8**］（否定による類似度関数$SM$の一般再帰定理）

2条件

（1$）$g_j(0)=+\infty$ (C.31)

（2$）$0\le g_j(1)<+\infty$ (C.32)

を満たすような1変数$s$の関数

$$g_j:\{s\,|\,0\le s\le 1\}\to R^+ \text{（非負実数全体の集合）} \tag{C.33}$$

を導入する．式(B.11)の関数$SM$はaxiom 2を満たしているとしよう．

$$SM'(\varphi,\omega_j)=$$
$$\begin{cases}\dfrac{g_j(1-SM(\varphi,\omega_j))}{\sum_{i\in J}g_i(1-SM(\varphi,\omega_i))}\cdots\sum_{i\in J}g_i(1-SM(\varphi,\omega_i))>0\text{のとき}\\ p(\mathfrak{C}_j)\cdots\sum_{i\in J}g_i(1-SM(\varphi,\omega_i))=0\text{のとき}\end{cases} \tag{C.34}$$

と定義された式(C.23)の関数$SM'$はaxiom 2を満たす．

（証明）割愛される．□

（付録C・終わり）

## 付録D. axiom 3を満たす大分類関数 $BSC$ の再帰的諸性質

本付録Dでは，axiom 3を満たす式(B.19)の大分類関数 $BSC$ から，axiom 3を満たす今1つの大分類関数 $BSC'$ を構成する方法(再帰的構成法)の1つとして，2値論理関数による合成法などを用いることを考えよう．

$BSC$ の再帰的諸性質が本付録Dにより，また，1つ明らかになったことになる．

カテゴリ間の相互排除性(the mutual exclusion of the one category from the other categories)

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, BSC(\omega_j, i) = 0 \tag{D.1}$$

を考えておく．更に，実数値 $a_j$ の組 $\{a_j\}_{i=1\sim n}$ について，計算規則

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \text{ のとき，} \frac{a_j}{\sum_{i=1}^{n} a_i} = 0 \tag{D.2}$$

を約束しておく．最後に，不等式

$$o < e_j \le 1 \tag{D.3}$$

を満たす閾値 $e_j$ の組 $\{e_j\}_{j\in J}$ を導入しておく．最後に，集合 $X$ 内の要素の総数を $|X|$ と表す．

### D1. 4関数 $psn, \log, \exp, \tan$ による $BSC$ の再帰的構成

#### D1.1 規格化操作による大分類関数の再帰的構成

次の定理D.1は，定理C.6で登場している2値関数 $psn$ を用いて，axiom 3を満たす大分類関数をaxiom 3を満たす大分類関数 $BSC$ から構成する方法(再帰的構成法)を与えている．

**[定理D.1]**（規格化操作による大分類関数 $BSC$ の再帰的構成定理）

式(B.19)の大分類関数 $BSC$ はaxiom 3を満たすとしよう．しかも，式(D.1)のカテゴリ間の相互排除性を満たしているとしよう．式(C.19)のように定義された2値関数 $psn$ を用いて，

$$BSC'(\varphi, j) = psn\left(\frac{BSC(\varphi, j)}{\sum_{i\in J} BSC(\varphi, i)} - e_j\right) \tag{D.4}$$

と定義された関数

$$BSC' : \Phi \times J \to \{0,1\} \tag{D.5}$$

はaxiom 3を満たし，カテゴリ間の相互排除性をも満たしている．

（証明）(1#) $\varphi = \omega_j$ のとき，$$\frac{BSC(\varphi, j)}{\sum_{i\in J} BSC(\varphi, i)} = \frac{1}{1} = 1 \tag{D.6}$$

(2#) $\varphi = \omega_i (i \in J - \{j\})$ のとき，$$\frac{BSC(\varphi, j)}{\sum_{i\in J} BSC(\varphi, i)} = \frac{0}{1} = 0 \tag{D.7}$$

を考慮すれば，axiom 3,(ⅰ)を満たすことが示され，カテゴリ間の相互排除性を満たしていることもわかる．また，その定義式(D.4)から式(D.4)の関数 $BSC'$ はaxiom 3,(ⅱ)を明らかに満たすことがわかる． □

式(D.4)で定義された関数 $BSC'$ について，検討しよう．

$$J_1(\varphi) \equiv \{j \in J \mid BSC(\varphi, j) = 1\} \tag{D.8}$$

として，規格化された(normalized) $Nbsc(\varphi, j)$ を

$$Nbsc(\varphi, j) \equiv \frac{BSC(\varphi, j)}{\sum_{i \in J} BSC(\varphi, i)} \tag{D.9}$$

と定義すれば，

$$Nbsc(\varphi, j) = \begin{cases} \dfrac{1}{|J_1(\varphi)|} \cdots J_1(\varphi) \neq \phi \wedge j \in J_1(\varphi) \text{ のとき} \\ 0 \cdots J_1(\varphi) \neq \phi \wedge j \notin J_1(\varphi) \text{ のとき} \\ 0 \cdots J_1(\varphi) = \phi \text{ のとき} \end{cases} \tag{D.10}$$

であり，

$$[\forall j \in J, 0 \leq Nbsc(\varphi, j) \leq 1] \wedge \sum_{j \in J} Nbsc(\varphi, j) \in \{0,1\} \tag{D.11}$$

が成立する．

さて，次の事柄に注意しておこう：式(D.4)で定義された2値関数

$$BSC'(\varphi, j) = psn(Nbsc(\varphi, j) - e_j) \tag{D.12}$$

を考えると，先ず，

$$BSC(\varphi, j) = 0 \Rightarrow BSC'(\varphi, j) = 0 \tag{D.13}$$

がわかる．次に，

$$BSC(\varphi, j) = 1 \tag{D.14}$$

の場合を考えよう．式(D.14)を満たす候補カテゴリ$\mathfrak{C}_j$の数が少なくて，不等式

$$e_j \leq \frac{1}{|J_1(\varphi)|} \wedge J_1(\varphi) \neq \phi \tag{D.15}$$

を満たすパターン$\varphi \in \Phi$に対しては，$BSC(\varphi, j) = 0,1$のいずれの場合でも，等式

$$\forall j \in J, BSC'(\varphi, j) = BSC(\varphi, j) \tag{D.16}$$

が成立することがわかる．ところが，候補カテゴリの数が大きくなり，不等式

$$0 < \frac{1}{|J_1(\varphi)|} < e_j \wedge J_1(\varphi) \neq \phi \tag{D.17}$$

を満たすパターン$\varphi \in \Phi$に対しては，$BSC(\varphi, j) = 0,1$のいずれの場合でも，等式

$$\forall j \in J, BSC'(\varphi, j) = 0 \tag{D.18}$$

が成立することになる．　□

更に，次の命題D.1が成り立つことがわかる．

**［命題D.1］**（定理D.1の一般化定理）

式(B.19)の大分類関数$BSC$はaxiom 3を満たすとしよう．しかも，式(D.1)のカテゴリ間の相互排除性を満たしているとしよう．2条件式(C.27),(C.28)を満たす付録Cの式(C.29)の関数$f_j$を用いて，

$$BSC'(\varphi, j) = psn\left(\frac{f_j(BSC(\varphi, j))}{\sum_{i \in J} f_j(BSC(\varphi, i))} - e_j\right) \tag{D.19}$$

と定義された式(D.5)の関数$BSC'$はaxiom 3を満たし，カテゴリ間の相互排除性をも満たしている．

（証明）
$$q_j(\varphi) \equiv \frac{f_j(BSC(\varphi, j)}{\sum_{i \in J} f_i(BSC(\varphi, i)} \tag{D.20}$$

について，

（1@）$J_1(\varphi)=\phi$ のとき，$q_j(\varphi)=0 \quad \therefore \quad BSC'(\varphi,j)=0$

（2@）$J_1(\varphi)\neq\phi \wedge BSC(\varphi,j)=0$ のとき，$q_j(\varphi)=\dfrac{f_j(0)}{\sum_{i\in J_1(\varphi)} f_i(1)}=0 \quad \therefore \quad BSC'(\varphi,j)=0$

（3@）$J_1(\varphi)\neq\phi \wedge BSC(\varphi,j)=1$ のとき，$q_j(\varphi)=\dfrac{f_j(1)}{\sum_{i\in J_1(\varphi)} f_i(1)}\leq 1$

$\therefore \quad BSC'(\varphi,j)=0 \vee BSC'(\varphi,j)=1 \quad \therefore \quad BSC'(\omega_j,j)=1$

より，axiom 3,(ⅰ)，並びに，カテゴリ間の相互排除性の成立は明らか．更に，axiom 3,(ⅱ)の成立は，$BSC$ がaxiom 3,(ⅱ)を満たすことより明らか． □

更に，次の命題D.2が成り立つことがわかる．

**［命題D.2］**（大分類関数 $BSC$ と等価な1つの大分類関数 $BSC'$ の構成定理）

式(B.19)の大分類関数 $BSC$ はaxiom 3を満たすとしよう．しかも，式(D.1)のカテゴリ間の相互排除性を満たしているとしよう．

$$BSC'(\varphi,j)=psn\left(\frac{\dfrac{1}{1-BSC(\varphi,j)}}{\sum_{i\in J}\dfrac{1}{1-BSC(\varphi,j)}}-e_j\right) \tag{D.21}$$

と定義された式(D.5)の関数 $BSC'$ はaxiom 3を満たし，カテゴリ間の相互排除性をも満たしている．

（証明）
$$q_j(\varphi)\equiv\frac{\dfrac{1}{1-BSC(\varphi,j)}}{\sum_{i\in J}\dfrac{1}{1-BSC(\varphi,j)}} \tag{D.22}$$

について，

（1&）$J_1(\varphi)=\phi$ のとき，$q_j(\varphi)=\dfrac{1}{|J|}\leq\dfrac{1}{2} \quad \therefore \quad BSC'(\varphi,j)=0 \vee BSC'(\varphi,j)=1$

（2&）$J_1(\varphi)\neq\phi \wedge BSC(\varphi,j)=0$ のとき，$q_j(\varphi)=0 \quad \therefore \quad BSC'(\varphi,j)=0$

（3&）$J_1(\varphi)\neq\phi \wedge BSC(\varphi,j)=1$ のとき，$q_j(\varphi)=\dfrac{1}{|J_1(\varphi)|} \quad \therefore \quad BSC'(\omega_j,j)=1$

より，axiom 3,(ⅰ)，並びに，カテゴリ間の相互排除性の成立は明らか．更に，axiom 3,(ⅱ)の成立は，$BSC$ がaxiom 3,(ⅱ)を満たすことより明らか． □

以下で，定理D.1,2命題D.1,D.2の改良を図ろう．

### D1.2　3関数 $\log,\exp,\tan$ による $BSC$ の再帰的構成

前節の大分類関数 $BSC'$ 内の，式(D.9)の規格化関数 $Nbsc(\varphi,j)$ を用いて，3関数 $\log,\exp,\tan$ により，$BSC$ を再帰的に構成すれば，次の定理D.2の如くなる．定理D.2は，自然対数関数 $\log$，指数関数 $\exp$，正接関数 $\tan$ を用いて，axiom 3を満たす大分類関数をaxiom 3を満たす大分類関数 $BSC$ から構成する方法(再帰的構成法)を与えている．

**［定理D.2］**（3関数 $\log,\exp,\tan$ による $BSC$ の再帰的構成定理）

式(B.19)の大分類関数 $BSC$ はaxiom 3を満たすとしよう．しかも，カテゴリ間の相互排除性を満たしているとしよう．

このとき，式(D.9)の規格化された関数 $Nbsc(\varphi, j)$ を用いて,

$$(\mathrm{i})\quad BSC_{\log}(\varphi, j) = psn\left(\frac{\dfrac{1}{-\log_e Nbsc(\varphi, j)}}{\sum_{i \in J} \dfrac{1}{-\log_e Nbsc(\varphi, i)}} - e_j\right) = psn\left(\frac{\dfrac{1}{\log_e \dfrac{1}{Nbsc(\varphi, j)}}}{\sum_{i \in J} \dfrac{1}{\log_e \dfrac{1}{Nbsc(\varphi, i)}}} - e_j\right) \tag{D.23}$$

$$(\mathrm{ii})\quad BSC_{\exp}(\varphi, j) = psn\left(\frac{\dfrac{1}{1-\exp[-(1-Nbsc(\varphi, j)]}}{\sum_{i \in J} \dfrac{1}{1-\exp[-(1-Nbsc(\varphi, i)]}} - e_j\right) \tag{D.24}$$

$$(\mathrm{iii})\quad BSC_{\tan}(\varphi, j) = psn\left(\frac{\dfrac{1}{\tan[\frac{\pi}{2}\cdot\{1-Nbsc(\varphi, j)\}]}}{\sum_{i \in J} \dfrac{1}{\tan[\frac{\pi}{2}\cdot\{1-Nbsc(\varphi, i)\}]}} - e_j\right) \tag{D.25}$$

と定義された3種類の関数

$$BSC_{\log}, BSC_{\exp}, BSC_{\tan} \tag{D.26}$$

はaxiom 3を満たし，カテゴリ間の相互排除性をも満たす.

(証明) $Bsc_{\log}, BSC_{\exp}, BSC_{\tan}$ 内の3つの分数

$$\frac{\dfrac{1}{\log_e \dfrac{1}{Nbsc(\varphi, j)}}}{\sum_{i \in J} \dfrac{1}{\log_e \dfrac{1}{Nbsc(\varphi, i)}}}, \frac{\dfrac{1}{1-\exp[-(1-Nbsc(\varphi, j)]}}{\sum_{i \in J} \dfrac{1}{1-\exp[-(1-Nbsc(\varphi, i)]}}, \frac{\dfrac{1}{\tan[\frac{\pi}{2}\cdot\{1-Nbsc(\varphi, j)\}]}}{\sum_{i \in J} \dfrac{1}{\tan[\frac{\pi}{2}\cdot\{1-Nbsc(\varphi, i)\}]}} \tag{D.27}$$

はいずれも，以下の(1%),(2%)を満たしているから， $Bsc_{\log}, BSC_{\exp}, BSC_{\tan}$ はaxiom 3,(ｉ)を満たすことが示され，また，カテゴリ間の相互排除性をも満たしていることがわかる．更に，$Bsc_{\log}, BSC_{\exp}, BSC_{\tan}$ の定義式(D.23)～(D.25)からaxiom 3,(ⅱ)を明らかに満たす：

(1%) $\varphi = \omega_j$ のとき，式(D.27)の3者は1である.

(2%) $\varphi = \omega_i (i \in J - \{j\})$ のとき，式(D.27)の3者は0 である.　□

## D2. 2値論理関数による大分類関数 $BSC$ の再帰的構成

次の定理D.3では，命題論理における3基本論理演算

(1)選言(disjunction)，(2)連言(conjunction)，(3)否定(negation)

により，axiom 3を満たす2つの大分類関数 $BSC_k$，1つの大分類関数 $BSC$ から，axiom 2を満たす2つの大分類関数 $BSC_{\#1\vee\#2}, BSC_{\#1\wedge\#2}$，大分類関数 $BSC_{\neg\#}$ が再帰的に構成されている.

**[定理D.3]** (選言・連言・否定による大分類関数 $BSC$ の再帰構成定理)

式(B.19)の大分類関数 $BSC$，並びに，2個の大分類関数

$$BSC_k : \Phi \times J \to \{0,1\}, k = 1,2 \tag{D.28}$$

はaxiom 3を満たすとしよう．更に，カテゴリ間の相互排除性をも満たしているとしよう．式(D.9)の $Nbsc(\varphi, j)$ と同様な規格化関数

$$Nbsc_k(\varphi, j) \equiv \frac{BSC_k(\varphi, j)}{\sum_{i\in J} BSC_k(\varphi, i)}, k = 1, 2 \tag{D.29}$$

を定義する．以下の付録Cの補助定理C.1に注意しておく．

$$BSC_{\#1\vee\#2}(\varphi, j) = psn(\frac{Nbsc_1(\varphi, j) + Nbsc_2(\varphi, j) - Nbsc_1(\varphi, j)\cdot Nbsc_2(\varphi, j)}{\sum_{i\in J}[Nbsc_1(\varphi, i) + Nbsc_2(\varphi, i) - Nbsc_1(\varphi, i)\cdot Nbsc_2(\varphi, i)]} - e_j) \tag{D.30}$$

$$BSC_{\#1\wedge\#2}(\varphi, j) = psn(\frac{Nbsc_1(\varphi, j)\cdot Nbsc_2(\varphi, j)}{\sum_{i\in J} Nbsc_1(\varphi, i)\cdot Nbsc_2(\varphi, i)} - e_j) \tag{D.31}$$

$$BSC_{\neg\#}(\varphi, j) = psn(\frac{\frac{1}{1 - Nbsc(\varphi, j)}}{\sum_{i\in J}\frac{1}{1 - Nbsc(\varphi, i)}} - e_j) \tag{D.32}$$

と定義される3つの関数

$$BSC_{\#1\vee\#2}, BSC_{\#1\wedge\#2}\ BSC_{\neg\#} : \Phi\times J \to \{0,1\} \tag{D.33}$$

はaxiom 3を満たし，カテゴリ間の相互排除性をも満たす.

（証明）割愛される. □

以上の定理D.3を拡張しよう.

例えば，2命題 $A, B$ の含意命題（implicational proposition）$A \to B$ =if $A$ then $B$ は式（C.10）の如く表されるから，次の定理D.4が成り立つ.

**［定理D.4］**（含意による大分類関数 $BSC$ の再帰構成定理）

式（D.28）の2個の大分類関数 $BSC_k$ はaxiom 2を満たすとしよう．カテゴリ間の相互排除性をも満たしているとしよう．このとき，

$$f(A, B) \equiv A \to B = \neg A \vee B \tag{D.34}$$

として，定理D.3の $Nbsc_k(\varphi, j)$ を使って，

$$\begin{aligned} BSC_{\#1\to\#2}(\varphi, j) &\equiv BSC_{\neg\#1\cup\#2}(\varphi, j) \\ &\equiv psn(\frac{f(Nbsc_1(\varphi, j), Nbsc_2(\varphi, j)}{\sum_{i\in J} f(Nbsc_1(\varphi, i), Nbsc_2(\varphi, i)} - e_j) \end{aligned} \tag{D.35}$$

$$= psn(\frac{\frac{[1 - Nbsc_1(\varphi, j)]^{-1}}{\sum_{k\in J}[1 - Nbsc_1(\varphi, k)]^{-1}} + Nbsc_2(\varphi, j) - \frac{[1 - Nbsc_1(\varphi, j)]^{-1}}{\sum_{k\in J}[1 - Nbsc_1(\varphi, k)]^{-1}}\cdot Nbsc_2(\varphi, j)}{\sum_{i\in J}[\frac{[1 - Nbsc_1(\varphi, i)]^{-1}}{\sum_{k\in J}[1 - Nbsc_1(\varphi, k)]^{-1}} + Nbsc_2(\varphi, i) - \frac{[1 - Nbsc_1(\varphi, i)]^{-1}}{\sum_{k\in J}[1 - Nbsc_1(\varphi, k)]^{-1}}\cdot Nbsc_2(\varphi, i)]} - e_j) \tag{D.36}$$

と定義される関数

$$BSC_{\#1\to\#2} : \Phi\times J \to \{0,1\} \tag{D.37}$$

はaxiom 3を満たし，カテゴリ間の相互排除性をも満たす.

（証明）割愛される. □

定理D.4の $BSC_{\#1\to\#2}(\varphi, j) \equiv BSc_{\neg\#1\cup\#2}(\varphi, j)$ の構成法を一般化しよう.

任意の $n$ 変数2値 $(=0,1)$ 論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は，選言，連言，否定の各論理記号∨,∧,¬を使って表現されるから，次の定理D.5が証明される.

［定理D.5］（大分類関数 $BSC$ の再帰的2値論理的性質）

axiom 3を満たす大分類関数

$$BSC_k : \Phi \times J \to \{0,1\}, k = 1 \sim n \tag{D.38}$$

は，カテゴリ間の相互排除性をも満たすとしよう．

$$Nbsc_k(\varphi, j) \equiv \frac{BSC_k(\varphi, j)}{\sum_{i \in J} BSC_k(\varphi, i)}, k = 1 \sim n \tag{D.39}$$

を導入する．任意の $n$ 変数2値 $(=0,1)$ 論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \{0,1\}$ の，各2値 $(=0,1)$ 変数 $x_k (k = 1 \sim n)$ に， $Nbsc_k(\varphi, j)$ を代入して得られる関数

$$BSC_{f\#1\sim\#n}(\varphi, j) = psn(\frac{f(Nbsc_1(\varphi, j), Nbsc_2(\varphi, j), \cdots, Nbsc_n(\varphi, j))}{\sum_{i \in J} f(Nbsc_1(\varphi, i), Nbsc_2(\varphi, i), \cdots, Nbsc_n(\varphi, i))} - e_j) \tag{D.40}$$

はaxiom 3を満たし，カテゴリ間の相互排除性をも満たす．

（証明）割愛される．　□

## D3. $BSC_{\max\{\#1,\#2\}}, BSC_{\min\{\#1,\#2\}}$ による $BSC_{\#1\vee\#2}, BSC_{\#1\wedge\#2}$ の代用

次の定理D.6は， $BSC_{\#1\vee\#2}, BSC_{\#1\wedge\#2}$ が各々， $BSC_{\max\{\#1,\#2\}}, BSC_{\min\{\#1,\#2\}}$ により代用できることを示している．

［定理D.6］（ $BSC_{\max\{\#1,\#2\}}, BSC_{\min\{\#1,\#2\}}$ の再帰的構成定理）

式(D.28)の2個の大分類関数 $BSC_k$ はaxiom 2を満たすとしよう．カテゴリ間の相互排除性をも満たしているとしよう． $BSC_{\max\{\#1,\#2\}}$ の代りに，

$$BSc_{\max\{\#1,\#2\}}(\varphi, j) = psn(\frac{\max\{Nbsc_1(\varphi, j), Nbsc_2(\varphi, j)\}}{\sum_{i \in J} \max\{Nbsc_1(\varphi, i), Nbsc_2(\varphi, i)\}} - e_j) \tag{D.41}$$

を採用しても，関数

$$BSC_{\max\{\#1,\#2\}} : \Phi \times J \to \{0,1\} \tag{D.42}$$

はaxiom 2を満たし，カテゴリ間の相互排除性をも満たす．同様に， $BSC_{\min\{\#1,\#2\}}$ の代りに，

$$BSC_{\min\{\#1,\#2\}}(\varphi, j) = psn(\frac{\min\{Nbsc_1(\varphi, j), Nbsc_2(\varphi, j)\}}{\sum_{i \in J} \min\{Nbsc_1(\varphi, i), Nbsc_2(\varphi, i)\}} - e_j) \tag{D.43}$$

を採用しても，関数

$$BSC_{\min\{\#1,\#2\}} : \Phi \times J \to \{0,1\} \tag{D.44}$$

はaxiom 2を満たし，カテゴリ間の相互排除性をも満たす．この代用でも，2定理D.4,D.5が成り立つ．

□

## D4. 大分類関数 $BSC$ の一般的再帰構成

次の定理D.7は，定理D.1，命題D.1の一般化である．2式(C.27),(C.28)で表される2条件(1#),(2#)を満たす関数 $f_j$ については，C4節にある．

［定理D.7］（0を不動点に持つ関数 $f_j$ による大分類関数 $BSC$ の一般再帰定理）

2条件式(C.27),(C.28)で表される2条件(1#),(2#)を満たすような1変数 $s$ の，式(C.29)の関数 $f_j$ を導入する．式(B.19)の関数 $BSC$ はaxiom 3を満たし，カテゴリ間の相互排除性をも満たすとしよう．

$$BSC'(\varphi, j) =$$

$$\begin{cases} psn\left(\dfrac{f_j(Nbsc(\varphi,j))}{\sum_{i\in J} f_i(Nbsc(\varphi,i))} - e_j\right) \cdots \sum_{i\in J} f_i(Nbsc(\varphi,i)) > 0 \text{ のとき} \\ 0 \cdots \sum_{i\in J} f_i(Nbsc(\varphi,i)) = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{D.45}$$

と定義された式(D.5)の2値関数 $BSC'$ はaxiom 2を満たし，カテゴリ間の相互排除性をも満たす．

（証明）割愛される．□

次の定理D.8は，定理D.2の $BSC_{\exp}(\varphi,j), BSC_{\tan}(\varphi,j)$，定理D.3の $BSC_{\neg\#}(\varphi,j)$ を一般化したものである．2式(C.31),(C.32)で表される2条件(1$),(2$)を満たす関数 $g_j$ については，C4節にある．

**［定理D.8］**（否定による大分類関数 $BSC$ の一般再帰定理）

2式(C.31),(C.32)で表される2条件(1$),(2$)を満たすような1変数 $s$ の，式(C.33)の関数 $g_j$ を導入する．式(B.19)の関数 $BSC$ はaxiom 3を満たし，カテゴリ間の相互排除性をも満たすとしよう．

$$BSC'(\varphi,j) =$$
$$\begin{cases} psn\left(\dfrac{g_j(1-Nbsc(\varphi,j))}{\sum_{i\in J} g_i(1-Nbsc(\varphi,i))} - e_j\right) \cdots \sum_{i\in J} g_i(1-Nbsc(\varphi,i)) > 0 \text{ のとき} \\ 0 \cdots \sum_{i\in J} g_i(1-Nbsc(\varphi,i)) = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{D.46}$$

と定義された式(D.5)の2値関数 $BSC'$ はaxiom 2を満たし，カテゴリ間の相互排除性をも満たす．

（証明）割愛される．□

（付録D・終わり）

## 付録E．カテゴリ分類困難度 $DOC(\varphi:\mathfrak{C}_j)$

パターン $\varphi\in\Phi$ が第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属することの確率は，パターン $\varphi\in\Phi$ が第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン $\omega_j$ と似ている程度(類似度) $SM(\varphi,\omega_j)$ であると，想定しよう．そうすれば，$-\log_e SM(\varphi,\omega_j), -\log_e[1-SM(\varphi,\omega_j)]$ を各々，

$$-\log_e SM(\varphi,\omega_j) = \varphi\text{が}\omega_j\text{を含んでいない程度を表わす情報量} \tag{E.1}$$

$$-\log_e[1-SM(\varphi,\omega_j)] = \varphi\text{が}\omega_j\text{を含んでいる程度を表わす情報量} \tag{E.2}$$

と考えると都合がよい．

$$(1) SM(\varphi,\omega_j) < 1-SM(\varphi,\omega_j) \quad (2) SM(\varphi,\omega_j) = 1-SM(\varphi,\omega_j)$$
$$(3) SM(\varphi,\omega_j) > 1-SM(\varphi,\omega_j) \tag{E.3}$$

なる3つの事態は，各々，

パターン $\varphi$ が第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に

（1）帰属しない，（2）帰属するとも帰属しないともいえない，（3）帰属する　(E.4)

に対応している．

$$-\log_e SM(\varphi,\omega_j) - [-\log_e\{1-SM(\varphi,\omega_j)\}]$$
$$= [\varphi\text{が}\omega_j\text{を含んでいない程度を表わす情報量}]$$
$$- [\varphi\text{が}\omega_j\text{を含んでいる程度を表わす情報量}] \tag{E.5}$$

の正負は，パターン $\varphi$ が第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン $\omega_j$ を含んでいない，含んでいる

かの判定を情報量で可能にするものである．

パターン $\varphi \in \Phi$ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属することの困難さの程度であるカテゴリ分類困難度（difficulty of binary classification）[47] $DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j)$ は，$-\infty$ から $+\infty$ 迄の任意の実数値を取るものとする．

最も容易である時，$DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j) = -\infty$ であり，最も困難である時，$DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j) = +\infty$ であり，最も困難である時と最も容易である時との丁度中間の時，$DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j) = 0$ であるような値を取るものとしよう．

$DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j) = -\infty$ である時，$SM(\varphi, \omega_j) = 1$ であり，$DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j) = +\infty$ である時，$SM(\varphi, \omega_j) = 0$ であり，$DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j) = 0$ である時，$SM(\varphi, \omega_j) = \frac{1}{2}$ であるような類似度 $SM(\varphi, \omega_j)$ が存在するであろうか？

$SM(\varphi, \omega_j)$ が 0 から $\frac{1}{2}$ 迄増加するとき，$DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j) > 0$ であり，$SM(\varphi, \omega_j)$ が $\frac{1}{2}$ から 1 迄増加するとき，$DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j) < 0$ であり，$SM(\varphi, \omega_j)$ が $\frac{1}{2}$ の値をとるとき，$DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j) = 0$ の最大値をとるだろうか？

$$DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j) = -\log_e SM(\varphi, \omega_j) - [-\log_e \{1 - SM(\varphi, \omega_j)\}] \tag{E.6}$$

と考えてみたら，都合がよい．

パターン $\varphi \in \Phi$ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属するか，帰属しないかの程度を表わす曖昧度（equivocation）を情報量として表現した時の $EQVO(\varphi, \mathfrak{C}_j)$ は，0 から $\log_e 2 \approx 0.693$ 迄の任意の実数値をとるものとしよう．

$$EQVO(\varphi, \mathfrak{C}_j) \equiv -SM(\varphi, \omega_j) \cdot \log_e SM(\varphi, \omega_j) - [1 - SM(\varphi, \omega_j)] \cdot \log_e [1 - SM(\varphi, \omega_j)] \tag{E.7}$$

と定義すれば，曖昧度 $EQVO(\varphi, \mathfrak{C}_j)$ の，類似度 $SM(\varphi, \omega_j)$ が変化した時の微分係数

$$\frac{d}{dy} EQVO(\varphi, \mathfrak{C}_j), where \quad y \equiv SM(\varphi, \omega_j)$$

が2カテゴリ分類困難度 $DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j)$ であることが示される．言い換えれば，$SM(\varphi, \omega_j)$ が 0 から $\frac{1}{2}$ 迄増加するとき，$EQVO(\varphi, \mathfrak{C}_j)$ は増加し，$DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j) > 0$ であり，$SM(\varphi, \omega_j)$ が $\frac{1}{2}$ から 1 迄増加するとき，$EQVO(\varphi, \mathfrak{C}_j)$ は減少し，$DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j) < 0$ であり，$SM(\varphi, \omega_j)$ が $\frac{1}{2}$ の値をとるとき，$EQVO(\varphi, \mathfrak{C}_j)$ は最大値 $\log_e 2 \approx 0.693$ を取り，$DOC(\varphi, \mathfrak{C}_j) = 0$ をとる．

本付録Eでは，上記の諸性質を持つ2カテゴリ分類困難度 $DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j)$，曖昧度 $EQVO(\varphi, \mathfrak{C}_j)$ が，類似度変数 $y \equiv SM(\varphi, \omega_j)$ の関数として定義しよう．

## E1. シグモイド関数，情報量密度関数，エントロピー関数の間の7公式

$$\frac{d}{dx}[x \cdot \log_e x - x] = \log_e x \quad \text{for} \quad x > 0$$

が成立している．さて，

（1）シグモイド関数（sigmoidal function）$f(x) = \dfrac{1}{1 + \exp(-x)}, -\infty < x < +\infty$ （E.8）

（2）情報量密度関数（information-density function） $g(y)=\log_e\frac{1-y}{y},0<y<1$ (E.9)

（3）エントロピー関数（entropy function） $h(y)=-y\cdot\log_e y-(1-y)\cdot\log_e(1-y),0<y<1$ (E.10)

の間に，次のの7公式が成り立つ：

① $\frac{d}{dy}[-y\cdot\log_e y-(1-y)\cdot\log_e(1-y)]=\log_e\frac{1-y}{y},0<y<1$ (E.11)

② $\frac{d}{dy}\log_e\frac{1-y}{y}=-\frac{1}{y}-\frac{1}{1-y},0<y<1$ (E.12)

③ $\frac{d^2}{dy^2}[-y\cdot\log_e y-(1-y)\cdot\log_e(1-y)]=-\frac{1}{y}-\frac{1}{1-y},0<y<1$ (E.13)

④ $\frac{1}{1+\exp[\log_e\frac{1-y}{y}]}=y,0<y<1$ (E.14)

⑤ $\frac{1}{1+\exp[\frac{d}{dy}\{-y\cdot\log_e y-(1-y)\cdot\log_e(1-y)\}]}=y,0<y<1$ ∵ ①,④ (E.15)

⑥ $\frac{1}{1+\exp[+x]}+\frac{1}{1+\exp[-x]}=1,-\infty<x<+\infty$ (E.16)

⑦ $\frac{d}{dx}\frac{1}{1+\exp[+x]}=-\frac{1}{1+\exp[+x]}\cdot[1-\frac{1}{1+\exp[+x]}]=-\frac{1}{1+\exp[+x]}\cdot\frac{1}{1+\exp[-x]},-\infty<x<+\infty$ (E.17)

$\frac{d}{dx}\frac{1}{1+\exp[-x]}=\frac{1}{1+\exp[-x]}\cdot[1-\frac{1}{1+\exp[-x]}]=\frac{1}{1+\exp[-x]}\cdot\frac{1}{1+\exp[+x]},-\infty<x<+\infty$ (E.18)

□

## E2. シグモイド関数，情報量密度関数，エントロピー関数の性質とグラフ

### E2.1 エントロピー関数 $h(y)$ の性質

エントロピー関数 $z=h(y)=-y\cdot\log_e y-(1-y)\cdot\log_e(1-y),0<y<1$ (E.19)

については,

$$h(0)=0$$
$$h(\frac{1}{2})=\log_e 2\approx 0.693$$
$$h(1)=0$$

(E.20)

である.

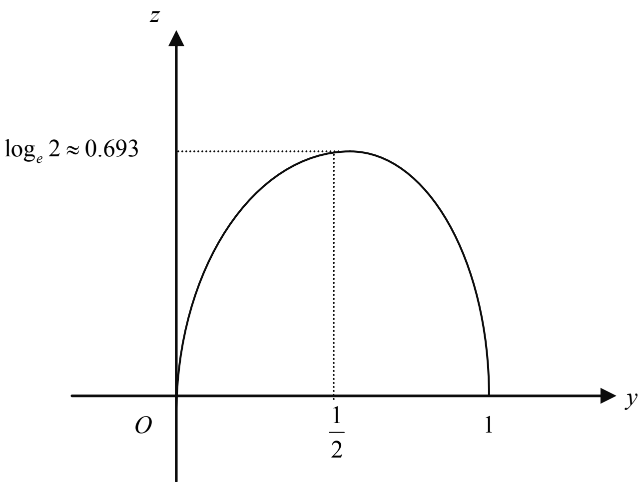


Fig.E.1　A graph of entropy-function　$z = h(y) = -y \cdot \log_e y - (1-y) \cdot \log_e (1-y), 0 < y < 1$
**図E.1　エントロピー関数**　$z = h(y) = -y \cdot \log_e y - (1-y) \cdot \log_e (1-y), 0 < y < 1$**のグラフ**

### E2.2　情報量密度関数 $g(y)$ の性質

$$\text{情報量密度関数}\, g(y) \equiv \frac{d}{dy} h(y) = \log_e \frac{1-y}{y} \tag{E.21}$$

であり，

$$\begin{aligned} &g(0) = +\infty \\ &g(\frac{1}{2}) = 0 \\ &g(1) = -\infty \end{aligned} \tag{E.22}$$

であり，

$$\begin{aligned} &0 < y < \frac{1}{2} \Rightarrow g(y) > 0 \\ &y = \frac{1}{2} \Rightarrow g(y) = 0 \\ &\frac{1}{2} < y < 1 \Rightarrow g(y) < 0 \end{aligned} \tag{E.23}$$

である．

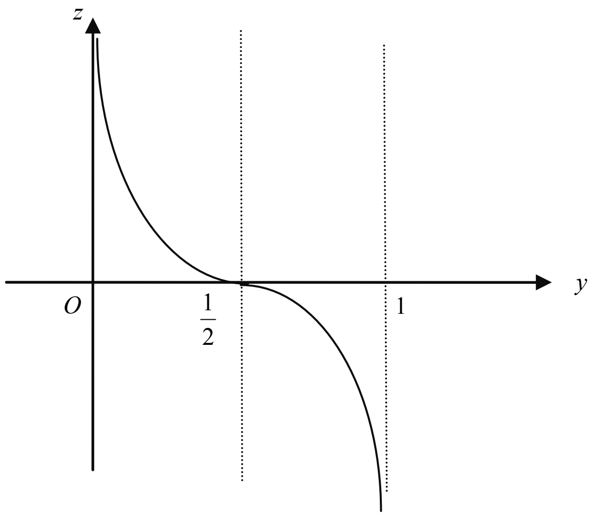


Fig.E.2　A graph of information-density function $z = g(y) = \log_e \dfrac{1-y}{y}, 0 < y < 1$

**図E.2　情報量密度関数 $z = g(y) = \log_e \dfrac{1-y}{y}, 0 < y < 1$ のグラフ**

### E2.3　シグモイド関数 $f(x)$ の性質

シグモイド関数 $y = f(x) = \dfrac{1}{1+\exp(-x)}, -\infty < x < +\infty$ （E.24）

については,

$$
\begin{aligned}
&f(-\infty) = 0 \\
&f(0) = \frac{1}{2} \\
&f(+\infty) = 1
\end{aligned}
\tag{E.25}
$$

である.

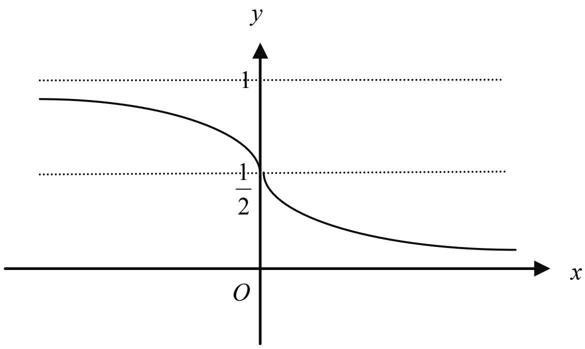


Fig.E.3　A graph of sigmoidal function　$y = f(-x) = \dfrac{1}{1+\exp(x)}, -\infty < x < +\infty$

図E.3　シグモイド関数 $y = f(-x) = \dfrac{1}{1+\exp(x)}, -\infty < x < +\infty$ のグラフ

### E3．類似度関数 $SM(\varphi, \omega_j)$ の関数としての，カテゴリ分類困難度 $DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j)$，曖昧度 $EQVO(\varphi, \mathfrak{C}_j)$

Axiom 2を満たす式(B.11)の類似度関数 $SM$ を導入する．

カテゴリ分類困難度 $DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j)$ を

$$DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j) \equiv \log_e \frac{1 - SM(\varphi, \omega_j)}{SM(\varphi, \omega_j)} \tag{E.26}$$

と定義すれば，式(E.6)の如く変形され，2式(E.1),(E.2)の解釈を採用すれば，　式(E.5)の如く解釈される．

式(E.7)の如く，曖昧度　$EQVO(\varphi, \mathfrak{C}_j)$ を定義する．

2定義式(E.6),(E.7)から，得られる諸公式を以下に掲げよう．

公式①から，

$$\frac{d}{dSM(\varphi, \omega_j)} EQVO(\varphi, \mathfrak{C}_j) = DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j) \tag{E.27}$$

公式②から，

$$\frac{d}{dSM(\varphi, \omega_j)} DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j) = -\frac{1}{SM(\varphi, \omega_j)} - \frac{1}{1 - SM(\varphi, \omega_j)} \tag{E.28}$$

公式③から，

$$\frac{d^2}{dSM(\varphi, \omega_j)^2} EQVO(\varphi, \mathfrak{C}_j) = -\frac{1}{SM(\varphi, \omega_j)} - \frac{1}{1 - SM(\varphi, \omega_j)} \tag{E.29}$$

公式④から，

$$\frac{1}{1 + \exp[DOC(\varphi : \mathfrak{C}_j)]} = SM(\varphi, \omega_j) \tag{E.30}$$

公式⑤から，

$$\frac{1}{1 + \exp[\dfrac{d}{dSM(\varphi, \omega_j)} EQVO(\varphi, \mathfrak{C}_j)]} = SM(\varphi, \omega_j) \tag{E.31}$$

公式⑥から，

$$\frac{1}{1+\exp[DOC(\varphi:\mathfrak{C}_j)]}+\frac{1}{1+\exp[-DOC(\varphi:\mathfrak{C}_j)]}=1 \tag{E.32}$$

公式⑦から，

$$\frac{d}{dDOC(\varphi,\mathfrak{C}_j)}\frac{1}{1+\exp[DOC(\varphi:\mathfrak{C}_j)]}=-\frac{1}{1+\exp[DOC(\varphi:\mathfrak{C}_j)]}\cdot\frac{1}{1+\exp[-DOC(\varphi:\mathfrak{C}_j)]} \tag{E.33}$$

式(E.32)－式(E.30)を計算すれば，

$$1-SM(\varphi,\omega_j)=\frac{1}{1+\exp[-DOC(\varphi:\mathfrak{C}_j)]} \tag{E.34}$$

3式(E.33),(E.30),(E.34)から，

$$\frac{d}{dDOC(\varphi:\mathfrak{C}_j)}SM(\varphi,\omega_j)=-SM(\varphi,\omega_j)\cdot[1-SM(\varphi,\omega_j)] \tag{E.35}$$

（付録E・終わり）

## 付録F. 平均相互情報量 $AMI(\mathfrak{C}(J):\Phi_B)$ を最大にする認識の働きとは？

本付録Fでは，平均相互情報量(average amount of mutual information) $AMI(\mathfrak{C}(J):\Phi_B)$ を最大にする認識の働きとは？が解明される．即ち，平均相互情報量 $AMI(\mathfrak{C}(J):\Phi_B)$ を最大にする認識の働きとは，1.2節の(3#)の連想形認識方程式(1.21)の，求解過程式(B.8)でのパターン列 $\phi_0=T\varphi,\phi_1,\phi_2,\cdots,\ \phi_{t-1},\ \phi_t$ であることが明らかにされる．従って，1.2節の(3#)のS.Suzukiの連想形認識方程式(1.21)を解く求解過程は，パターン $\varphi\in\Phi$ を $\varphi\in\Phi_B$ に限ったとき，パターン $\varphi\in\Phi_B$ の，カテゴリ帰属に関する不確定さを最小にする働きであることがわかる．

### F1. 平均相互情報量 $AMI(\mathfrak{C}(J):\Phi_B)$

$prob\{\mathfrak{C}_j\}$ は第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の出現確率を表し，確率性質

$$[\forall i\in J,0<prob\{\mathfrak{C}_i\}<1]\wedge\sum_{i\in J}prob\{\mathfrak{C}_i\}=1 \tag{F.1}$$

が成り立っているものとする．実は， $prob\{\mathfrak{C}_j\}$ は付録Bの式(B.18)の $p(\mathfrak{C}_j)$ のことである．

$prob\{T\varphi\}$ はパターン $\varphi\in\Phi_B$ の出現確率を表し，確率性質

$$[\forall\varphi\in\Phi_B,0\le prob\{T\varphi\}\le 1]\wedge\sum_{\varphi\in\Phi_B}prob\{T\varphi\}=1 \tag{F.2}$$

が成り立っているものとする．

$prob\{\frac{\mathfrak{C}_i}{T\varphi}\}$ は，パターン $\varphi\in\Phi_B$ のモデル $T\varphi\in\Phi_B$ が与えられたとき，第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の出現確率(条件付確率)を表し，確率性質

$$\forall\varphi\in\Phi_B,【[\forall j\in J,0\le prob\{\frac{\mathfrak{C}_j}{T\varphi}\}\le 1]\wedge\sum_{j\in J}prob\{\frac{\mathfrak{C}_j}{T\varphi}\}=1】 \tag{F.3}$$

が成り立っているものとする．

以後，パターンモデル $T\varphi\in\Phi_B$ の出現確率分布

$$prob\{T\varphi\},\varphi\in\Phi_B \tag{F.4}$$

が与えられたとしよう．式(B.16)の記法を採用した全カテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J)$ とパターン集合の基本領域

$\Phi_B$ との間の平均相互情報量 $AMI(\mathfrak{C}(J):\Phi_B)$ は，

$$AMI(\mathfrak{C}(J):\Phi_B) \equiv \sum_{\varphi\in\Phi_B} prob\{T\varphi\}\cdot\sum_{i\in J} prob\{\frac{\mathfrak{C}_i}{T\varphi}\}\cdot\log_e\frac{prob\{\frac{\mathfrak{C}_i}{T\varphi}\}}{prob\{\mathfrak{C}_i\}} \tag{F.5}$$

と定義される．$AMI(\mathfrak{C}(J):\Phi_B)$ は，この相互情報量 $AMI(\mathfrak{C}(J):\Phi_B)$ の $\varphi\in\Phi_B$ 成分

$$MI(\mathfrak{C}(J):\varphi) \equiv \sum_{i\in J} prob\{\frac{\mathfrak{C}_i}{T\varphi}\}\cdot\log_e\frac{prob\{\frac{\mathfrak{C}_i}{T\varphi}\}}{prob\{\mathfrak{C}_i\}} \tag{F.6}$$

$$= -\sum_{i\in J} prob\{\frac{\mathfrak{C}_i}{T\varphi}\}\cdot\log_e prob\{\mathfrak{C}_i\} - [-\sum_{i\in J} prob\{\frac{\mathfrak{C}_i}{T\varphi}\}\cdot\log_e prob\{\frac{\mathfrak{C}_i}{T\varphi}\}] \tag{F.7}$$

を使って，

$$\begin{aligned}AMI(\mathfrak{C}(J):\Phi_B) &= \sum_{\varphi\in\Phi_B} prob\{T\varphi\}\cdot【-\sum_{i\in J} prob\{\frac{\mathfrak{C}_i}{T\varphi}\}\cdot\log_e prob\{\mathfrak{C}_i\} - \\ &\qquad [-\sum_{i\in J} prob\{\frac{\mathfrak{C}_i}{T\varphi}\}\cdot\log_e prob\{\frac{\mathfrak{C}_i}{T\varphi}\}]】\\ &= \sum_{\varphi\in\Phi_B} prob\{T\varphi\}\cdot MI(\mathfrak{C}(J):\varphi)\end{aligned} \tag{F.8}$$

と再表現される．

$$-\sum_{i\in J} prob\{\frac{\mathfrak{C}_i}{T\varphi}\}\cdot\log_e prob\{\mathfrak{C}_i\} \tag{F.9}$$

は，パターンモデル $T\varphi\in\Phi_B$ が出現したとき，全カテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J)$ 内の各カテゴリ $\mathfrak{C}_j$ がその出現に関し，どの程度の不確定さ(uncertainty)があるかを情報量で計量したものである．また，

$$(0\le)EQVO(\varphi,\mathfrak{C}(J)) \equiv -\sum_{i\in J} prob\{\frac{\mathfrak{C}_i}{T\varphi}\}\cdot\log_e prob\{\frac{\mathfrak{C}_i}{T\varphi}\}(\le\log_e|J|) \tag{F.10}$$

は，パターンモデル $T\varphi\in\Phi_B$ が，全カテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J)$ 内のどの1つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属するかについての，不確定さの程度を与える情報量(equivocation)であり，この両者の差である式(F.7)の

$$MI(\mathfrak{C}(J):\varphi) = -\sum_{i\in J} prob\{\frac{\mathfrak{C}_i}{T\varphi}\}\cdot\log_e prob\{\mathfrak{C}_i\} - EQVO(\varphi,\mathfrak{C}(J)) \tag{F.11}$$

は，パターンモデル $T\varphi\in\Phi_B$ が全カテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J)$ 内のどの1つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属するかについての，取り去られた不確定さ(得られた情報量)を表している．式(F.8)によれば，$AMI(\mathfrak{C}(J):\Phi_B)$ は，この取り去られた不確定さ(得られた情報量)を式(F.4)のパターンモデル $T\varphi\in\Phi_B$ の出現確率分布 $prob\{T\varphi\},\varphi\in\Phi_B$ に関し，平均したものである．出現確率 $prob\{T\varphi\}$ が大きいときは，この取り去られた不確定さ(得られた情報量)を大きくし，出現確率 $prob\{T\varphi\}$ が小さいときは，この取り去られた不確定さ(得られた情報量)を小さく評価したものが，平均相互情報量 $AMI(\mathfrak{C}(J):\Phi_B)$ である．

ここに，式(F.7)の $MI(\mathfrak{C}(J):\varphi)$ は，Kullback-Leiblerの情報量の形式を備えているから，次の3性質(1&),(2&),(3&)が成り立つ[47]：

(1&)　$MI(\mathfrak{C}(J):\Phi_B)\ge 0$ が成り立ち，$MI(\mathfrak{C}(J):\Phi_B)=0$ となるのは，

$$\forall j\in J, prob\{\frac{\mathfrak{C}_j}{T\varphi}\} = prob\{\mathfrak{C}_j\} \tag{F.12}$$

のときに限る．

(2&)　$$MI(\mathfrak{C}(J):\Phi_B) \geq \log_e \frac{1}{1-[\frac{1}{2}\cdot\sum_{j\in J}|\,prob\{\frac{\mathfrak{C}_j}{T\varphi}\} - prob\{\mathfrak{C}_j\}\,|]^2} \tag{F.13}$$

が成り立ち，等号は式(F.12)が成立するときに限る．

(3&)　$$\sum_{j\in J}|\,prob\{\frac{\mathfrak{C}_j}{T\varphi}\} - prob\{\mathfrak{C}_j\}\,| \leq 2\cdot\sqrt{1-\exp[-MI(\mathfrak{C}(J):\Phi_B)]} \tag{F.14}$$

が成り立ち，等号は式(F.12)が成立するときに限る．　□

## F2. 個々のパターン$\varphi\in\Phi_B$についての，相互情報量$MI(\mathfrak{C}(J):\varphi)$

式(F.5)の$AMI(\mathfrak{C}(J):\Phi_B)$を最大にするには，式(F.8)からわかるように，個々のパターン$\varphi\in\Phi_B$について，式(F.11)の$MI(\mathfrak{C}(J):\varphi)$を最大にすればよい．

式(F.10)の$EQVO(\varphi,\mathfrak{C}(J))$は，

$$\exists j\in J,\ prob\{\frac{\mathfrak{C}_j}{T\varphi}\}=1 \wedge [\forall i\in J-\{j\}, prob\{\frac{\mathfrak{C}_i}{T\varphi}\}=0] \tag{F.15}$$

のとき，最小値0をとり，この時，$MI(\mathfrak{C}(J):\varphi)$は最大値$-\log_e prob\{\mathfrak{C}_j\}$をとることに注意する．因みに，式(F.10)の$EQVO(\varphi,\mathfrak{C}(J))$は，

$$\forall i\in J,\ prob\{\frac{\mathfrak{C}_i}{T\varphi}\}=\frac{1}{|J|} \tag{F.16}$$

のとき，最大値$\log_e|J|$をとり，この時，$MI(\mathfrak{C}(J):\varphi)$は最小値

$$\frac{1}{|J|}\cdot\sum_{i\in J}\log_e\frac{1}{prob\{\mathfrak{C}_i\}} - \log_e|J|$$

をとる．

パターン$\varphi\in\Phi$が第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属するとき，1.2節，(3#)の連想形認識方程式(1.21)の，求解過程式(B.8)でのパターン列

$$\exists \mathrm{j}\in J, \phi_0(=T\varphi), \phi_1, \phi_2, \cdots,\ \phi_{t-1},\ \phi_t(=T\omega_j) \tag{F.17}$$

においては，

$$T\phi_s=\phi_s, s=0,1,2,\cdots,t-1,t \quad \because \quad \text{axiom 1,(iii)の後半} \tag{F.18}$$

を考慮すれば，

$$\exists j\in J,\ \lim_{s\to t} prob\{\frac{\mathfrak{C}_j}{T\phi_s}\}=1 \quad \because \quad prob\{\frac{\mathfrak{C}_j}{T\omega_j}\}=1 \tag{F.19}$$

$$\forall i\in J-\{j\},\ \lim_{s\to t} prob\{\frac{\mathfrak{C}_i}{T\phi_s}\}=0 \quad \because \quad prob\{\frac{\mathfrak{C}_i}{T\omega_j}\}=0 \ \text{ for any } \ i\in J-\{j\} \tag{F.20}$$

であるから，

$$\lim_{s\to t} -\sum_{i\in J} prob\{\frac{\mathfrak{C}_i}{T\phi_s}\}\cdot\log_e prob\{\mathfrak{C}_i\} = -\log_e prob\{\mathfrak{C}_j\} \tag{F.21}$$

$$\lim_{s\to t} EQVO(\phi_s,\mathfrak{C}(J))=0 \tag{F.22}$$

を得，2式，(F.11),(F.8)から，

$$\lim_{s\to t} MI(\mathfrak{C}(J):\phi_s) = -\log_e prob\{\mathfrak{C}_j\} \tag{F.23}$$

$$\lim_{s\to t} AMI(\mathfrak{C}(J):\Phi_B) = -\sum_{\phi_t\in\Phi_B} prob\{T\phi_t\}\cdot MI(\mathfrak{C}(J):\phi_t)$$
$$= -\sum_{\phi_t\in\Phi_B} prob\{T\phi_t\}\cdot\log_e prob\{\mathfrak{C}_j\} \tag{F.24}$$

が得られる．このとき，式（F.7）の $MI(\mathfrak{C}(J):\varphi)$ の最大値 $-\log_e prob\{\mathfrak{C}_j\}$ が得られ，式（F.8） $AMI(\mathfrak{C}(J):\Phi_B)$ の最大値 $-\sum_{\phi_t\in\Phi_B} prob\{T\phi_t\}\cdot\log_e prob\{\mathfrak{C}_j\}$ が得られている．

ここに，式(F.24)の $\lim_{s\to t} AMI(\mathfrak{C}(J):\Phi_B)$ 内の総和成分

$$prob\{T\phi_t\}\cdot\log_e prob\{\mathfrak{C}_j\} \tag{F.25}$$

でのパターン $\phi_t\in\Phi_B$ は，ある1つののカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン $\omega_s$ のモデル $\phi_t=T\omega_j$ であるような式(F.17)の求解パターン列を考えているなら，

$$\lim_{s\to t} AMI(\mathfrak{C}(J):\Phi_B) = -\sum_{j\in J} prob\{T\omega_j\}\cdot\log_e prob\{\mathfrak{C}_j\} \tag{F.26}$$

と表現されることに注意しておく．

## F3. 条件付き確率 $prob\{\frac{\mathfrak{C}_j}{T\varphi}\}$ とは？

パターン $\varphi\in\Phi$ が第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属することの条件付き確率 $prob\{\frac{\mathfrak{C}_j}{T\varphi}\}$ は，パターン $\varphi\in\Phi$ が第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン $\omega_j$ と似ている程度(類似度) $SM(\varphi,\omega_j)$ であると，想定しよう．

$$prob\{\frac{\mathfrak{C}_j}{T\varphi}\} = SM(\varphi,\omega_j)(=SM(T\varphi,\omega_j)) \quad \because \quad \text{axiom 2の（iii）} \tag{F.27}$$

ということになる． $prob\{\mathfrak{C}_j\}$ は，付録Bの，B5節の，第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の生起確率 $p(\mathfrak{C}_j)$ と

$$prob\{\mathfrak{C}_j\} = p(\mathfrak{C}_j) \tag{F.28}$$

というように，等しい．

S.Suzukiのパターン認識の数学的理論[3],[4]では，2式(F.27),(F.28)の設定で，F1節，F2節の内容を解釈できる．

（付録F・終わり）

# 付録G. パターン $\varphi\in\Phi$ から正部分，偶関数成分を抽出する2つのモデル構成作用素 $T$

本付録Gでは，パターン $\varphi\in\Phi$ は

$$\text{振幅有界条件} \sup_{x\in M}|\varphi(x)|<\infty \tag{G.1}$$

を満たし，関数空間 $L_2(M,dm)$ の元であるとして，パターン $\varphi\in\Phi$ から

$$\text{正部分} \max\{\varphi(x),0\}，\text{偶関数成分} \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2} \tag{G.2}$$

を抽出する，付録BのB3章のaxiom 1を満たす2つのモデル構成作用素 $T$ を構成しよう．

## G1. パターン $\varphi\in\Phi$ から正部分を抽出するモデル構成作用素 $T$

$\max\{a,b\},\min\{a,b\}$ を各々， $a,b$ の内小さくない方，大きくない方とする．パターン $\varphi\in\Phi$ の正部分

$$\varphi^+(x)\equiv\max\{\varphi(x),0\} = \begin{cases} \varphi(x)\cdots\varphi(x)\ge 0\text{のとき} \\ 0\cdots\varphi(x)<0\text{のとき} \end{cases}$$

(G.3)

と，負部分

$$\varphi^{-}(x) \equiv \min\{\varphi(x), 0\} = \begin{cases} 0 \cdots \varphi(x) > 0 \text{ のとき} \\ \varphi(x) \cdots \varphi(x) \leq 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{G.4}$$

とを加えると,

$$\forall x \in M, \varphi(x) = \max\{\varphi(x), 0\} + \min\{\varphi(x), 0\} \tag{G.5}$$

が成り立つことがわかる．パターン$\varphi$は正部分$\varphi^{+}$，負部分$\varphi^{-}$の両者の和からなっているのである．同様に,

$$\forall x \in M, |\varphi(x)| = \max\{\varphi(x), 0\} - \min\{\varphi(x), 0\} \tag{G.6}$$

が成り立つから，この2式の和，差をとれば,

$$\varphi^{+}(x) = \max\{\varphi(x), 0\} = \frac{\varphi(x) + |\varphi(x)|}{2} \tag{G.7}$$

$$\varphi^{-}(x) = \min\{\varphi(x), 0\} = \frac{\varphi(x) - |\varphi(x)|}{2} \tag{G.8}$$

が成り立つ.

$$\forall x \in M, (T\varphi)(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi^{+}(x)}{\sup\limits_{x \in M} |\varphi^{+}(x)|} \cdots \sup\limits_{x \in M} |\varphi^{+}(x)| > 0 \text{ のとき} \\ 0 \cdots \sup\limits_{x \in M} |\varphi^{+}(x)| = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{G.9}$$

と定義される式(B.3)の写像$T$は，パターン$\varphi \in \Phi$から正部分を抽出していることがわかる．

先ず，写像$T$の不動点の存在を次の補助定理G.1で示す.

$$\forall x \in M, [|\varphi(x)| = \varphi(x)] \Leftrightarrow [\varphi^{+}(x) = \varphi(x)] \tag{G.10}$$

に注意しておく.

**［補助定理G.1］**（不動点定理）

$$\forall x \in M, \varphi(x) \geq 0 \tag{G.11}$$

であれば,

$$\sup_{x \in M} |\varphi^{+}(x)| \in \{0,1\} \text{ のとき，} \quad \forall x \in M, (T\varphi)(x) = \varphi(x). \tag{G.12}$$

（証明）式(G.11)から，$\forall x \in M, |\varphi(x)| = \varphi(x)$が成立し，式(G.10)から,

$$\forall x \in M, \varphi^{+}(x) = \varphi(x) \tag{G.13}$$

が成り立っていることに注意しておく.

（1） $\sup\limits_{x \in M} |\varphi^{+}(x)| = 0$ のとき

先ず，$T$の定義式(G.9)から，$\forall x \in M, (T\varphi)(x) = 0$である．次に，式(G.13)から，$\sup\limits_{x \in M} |\varphi(x)| = 0$を得，$\forall x \in M, \varphi(x) = 0$である.

よって，$\forall x \in M, (T\varphi)(x) = 0 = \varphi(x)$.

（2） $\sup\limits_{x \in M} |\varphi^{+}(x)| = 1$ のとき

$T$の定義式(G.9)と，式(G.13)から,

$$\forall x \in M, (T\varphi)(x) = \varphi^{+}(x) = \varphi(x) \tag{G.14}$$

を得，示された．□

次の定理G.1は，写像$T$がモデル構成作用素であることを明らかにしている．

**［定理G.1］**（正部分$\varphi^{+}$の抽出モデル定理）

上記のように定義された写像$T$は，axiom 1の(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ)の3後半，並びに，(ⅳ)を満たす．

（証明）axiom 1の(ⅰ)の後半を満たすことの証明：$\forall x \in M, \varphi(x) = 0$であれば，$\forall x \in M, \varphi^{+}(x) = 0$である．よって，$\sup_{x \in M} |\varphi^{+}(x)| = 0$を得，補助定理G.1を適用して，

$$\forall x \in M, (T\varphi)(x) = \varphi(x) = 0.$$

axiom 1の(ⅱ)の後半を満たすことの証明：

$a$を正の定数とし，$\eta$を，$\eta \equiv a \cdot \varphi$とおく．

$$\forall x \in M, \eta^{+}(x) = a \cdot \varphi^{+}(x) \tag{G.15}$$

が成り立つ．

(ⅱの1) $\sup_{x \in M} |\varphi^{+}(x)| = 0$のとき

このとき，$T$の定義式(G.9)から，$\forall x \in M, (T\varphi)(x) = 0$である．

式(G.15)から，$\sup_{x \in M} |\eta^{+}(x)| = a \cdot \sup_{x \in M} |\varphi^{+}(x)| = 0$である．よって，$T$の定義式(G.9)から，$\forall x \in M, (T\eta)(x) = 0$を得，$\forall x \in M, (T\eta)(x) = 0 = (T\varphi)(x)$を得る．

(ⅱの2) $\sup_{x \in M} |\varphi^{+}(x)| > 0$のとき

このとき，式(G.15)から，$\sup_{x \in M} |\eta^{+}(x)| = a \cdot \sup_{x \in M} |\varphi^{+}(x)| > 0$である．よつて，$T$の定義式(G.9)から，

$$\forall x \in M, (T\eta)(x) = \frac{\eta^{+}(x)}{\sup_{x \in M} |\eta^{+}(x)|} = \frac{a \cdot \varphi^{+}(x)}{a \cdot \sup_{x \in M} |\varphi^{+}(x)|} = \frac{\varphi^{+}(x)}{\sup_{x \in M} |\varphi^{+}(x)|} = (T\varphi)(x).$$

axiom 1の(ⅲ)の後半を満たすことの証明：

$\eta$を，$\eta \equiv T\varphi$とおく．$T$の定義式(G.9)から，

$$\forall x \in M, 0 \le \eta^{+}(x) = \eta(x) \tag{G.16}$$

が成り立つ．更に，式(G.16)と$T$の定義式(G.9)から，

$$\sup_{x \in M} |\eta^{+}(x)| = \sup_{x \in M} |\eta(x)| \in \{0,1\} \tag{G,17}$$

である．よって，2式(G.16),(G.17)に注意し，補助定理G.1 を適用して，

$$\forall x \in M, (T\eta)(x) = \eta(x) \tag{G.18}$$

が得られる．

axiom 1の（ⅳ)を満たすことの証明：補助定理G.1を適用して，

$[\forall x \in M, \varphi(x) \ge 0] \wedge [\exists x \in M, \varphi(x) > 0]$であれば，$\sup_{x \in M} |\varphi^{+}(x)| = 1$のとき，

$$\forall x \in M, (T\varphi)(x) = \varphi(x) \tag{G.19}$$

を得る．ここに，$\exists x \in M, \varphi(x) \ne 0$である．□

## G2. パターン$\varphi \in \Phi$から偶関数成分を抽出するモデル構成作用素$T$

関数$\varphi \in \Phi$は，

$$\forall x \in M, \varphi(-x) = \varphi(x) \tag{G.20}$$

を満たす時，偶関数(even function)であるといわれる．また，

$$\forall x \in M, \varphi(-x) = -\varphi(x) \tag{G.21}$$

を満たす時，奇関数(odd function)であるといわれる．

パターン$\varphi \in \Phi$の偶関数部分

$$\varphi^{even}(x) \equiv \begin{cases} \varphi(x) \cdots \varphi(-x) = \varphi(x) \text{ である } x \in M \text{ のとき} \\ 0 \cdots \varphi(-x) = -\varphi(x) \text{ である } x \in M \text{ のとき} \end{cases} \tag{G.22}$$

と，奇関数部分

$$\varphi^{odd}(x) \equiv \begin{cases} 0 \cdots \varphi(-x) = \varphi(x) \text{ である } x \in M \text{ のとき} \\ \varphi(x) \cdots \varphi(-x) = -\varphi(x) \text{ である } x \in M \text{ のとき} \end{cases} \tag{G.23}$$

とを加えると，

$$\forall x \in M, \varphi(x) = \varphi^{even}(x) + \varphi(x)^{odd} \tag{G.24}$$

が成り立つことがわかる．パターン$\varphi$は偶関数部分$\varphi^{even}$，奇関数部分$\varphi^{odd}$の両者の和からなっている．同様に，

$$\forall x \in M, \varphi(-x) = \varphi^{even}(x) - \varphi^{odd}(x) \tag{G.25}$$

が成り立つから，この2式(G.24),(G.25)の和，差をとれば，

$$\varphi^{even}(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2} \tag{G.26}$$

$$\varphi^{odd}(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2} \tag{G.27}$$

が成り立つ．

$$\forall x \in M, (T\varphi)(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi^{even}(x)}{\sup\limits_{x \in M} |\varphi^{even}(x)|} \cdots \sup\limits_{x \in M} |\varphi^{even}(x)| > 0 \text{ のとき} \\ 0 \cdots \sup\limits_{x \in M} |\varphi^{even}(x)| = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{G.28}$$

と定義される，式(B.3)の写像$T$は，パターン$\varphi \in \Phi$から偶関数部分を抽出していることがわかる．

先ず，写像$T$の不動点の存在を次の補助定理G.2で示す．

$$\forall x \in M, [\varphi(x) = \varphi(-x)] \Leftrightarrow [\varphi^{even}(x) = \varphi(x)] \tag{G.29}$$

が成り立つことに注意しておく．

**［補助定理G.2］**（不動点定理）

$$\forall x \in M, \varphi(x) = \varphi(-x) \tag{G.30}$$

であれば，

$$\sup_{x \in M} |\varphi^{even}(x)| \in \{0,1\} \text{ のとき，} \forall x \in M, (T\varphi)(x) = \varphi(x). \tag{G.31}$$

（証明）式(G.29)を適用して，式(G.30)から，

$$\forall x \in M, \varphi^{even}(x) = \varphi(x) \tag{G.32}$$

が成り立っていることに注意しておく．

(1) $\sup\limits_{x \in M} |\varphi^{even}(x)| = 0$のとき

$T$ の定義式（G.28）から．$\forall x \in M, (T\varphi)(x)=0$ である．式（G.32）から．$\sup_{x\in M} |\varphi(x)|=0$ を得，$\forall x \in M, \varphi(x)=0$ である．よって，$\forall x \in M, (T\varphi)(x)=0=\varphi(x)$．

（2）$\sup_{x\in M} |\varphi^{even}(x)|=1$ のとき

$T$ の定義式(G.28)と，式(G.32)から，

$$\forall x \in M, (T\varphi)(x)=\varphi^{even}(x)=\varphi(x) \tag{G.33}$$

を得，示された．□

次の定理G.2は，写像 $T$ がモデル構成作用素であることを明らかにしている．

［定理G.2］（偶関数部分の抽出モデル定理）

上記のように定義された写像 $T$ は，axiom 1の（ⅰ），(ⅱ)，(ⅲ)の3後半，並びに，（ⅳ）を満たす．

（証明） axiom 1の（ⅰ）の後半を満たすことの証明：$\forall x \in M, \varphi(x)=0$ であれば，$\forall x \in M, \varphi(x)=\varphi(-x)=0$ である．よって，$\sup_{x\in M} |\varphi^{even}(x)|=0$ を得，補助定理G.2を適用して，

$$\forall x \in M, (T\varphi)(x)=\varphi(x)=0.$$

axiom 1の（ⅱ）の後半を満たすことの証明：

$a$ を正の定数とし，$\eta$ を，$\eta \equiv a\cdot\varphi$ とおく．

$$\forall x \in M, \eta^{even}(x)=a\cdot\varphi^{even}(x) \tag{G.34}$$

が成り立つ．

（ⅱの1）$\sup_{x\in M} |\varphi^{even}(x)|=0$ のとき

このとき，$T$ の定義式(G.28)から，$\forall x \in M, (T\varphi)(x)=0$ である．

式（G.34）から，$\sup_{x\in M} |\eta^{even}(x)|=a\cdot\sup_{x\in M} |\varphi^{even}(x)|=0$ である．よって，$T$ の定義式（G.28）から，$\forall x \in M, (T\eta)(x)=0=(T\varphi)(x)$ を得る．

（ⅱの2）$\sup_{x\in M} |\varphi^{even}(x)|>0$ のとき

このとき，式(G.34)から，$\sup_{x\in M} |\eta^{even}(x)|=a\cdot\sup_{x\in M} |\varphi^{even}(x)|>0$ である．よって，

$$\forall x \in M, (T\eta)(x)=\frac{\eta^{even}(x)}{\sup_{x\in M}|\eta^{even}(x)|}=\frac{a\cdot\varphi^{even}(x)}{a\cdot\sup_{x\in M}|\varphi^{even}(x)|}=\frac{\varphi^{even}(x)}{\sup_{x\in M}|\varphi^{even}(x)|}=(T\varphi)(x).$$

axiom 1の（ⅲ）の後半を満たすことの証明：

$\eta$ を，$\eta \equiv T\varphi$ とおく．$T$ の定義式(G.28)から，

$$\forall x \in M, \eta(-x)=\eta(x)\text{，つまり，}\forall x \in M, \eta^{even}(x)=\eta(x) \tag{G.35}$$

が成り立つ．更に，式(G.35)と，$T$ の定義式(G.28)から，

$$\sup_{x\in M} |\eta^{even}(x)|=\sup_{x\in M} |\eta(x)|\in\{0,1\} \tag{G.36}$$

である．よって，2式(G.35)，(G.36)に注意し，補助定理G.2 を適用して，

$$\forall x \in M, (T\eta)(x)=\eta(x) \tag{G.37}$$

が得られる．

axiom 1の（ⅳ）を満たすことの証明：補助定理G.2を適用して，

$[\forall x \in M, \varphi(x)=\varphi(-x)]\wedge[\exists x \in M, \varphi(x)\neq 0]$ であれば，$\sup_{x\in M} |\varphi^{even}(x)|=1$ のとき，

$$\forall x \in M, (T\varphi)(x)=\varphi(x) \tag{G.38}$$

を得る．ここに，$\exists x \in M, \varphi(x)\neq 0$ である．□

（付録G・終わり）

（著者　鈴木昇一，論文題目　Householder変換と，素想起の働きを備えたその連想形認識への応用，文教大学情報学部情報研究no.39　投稿論文，投稿年月日　2008年4月9日（水））