

新しいパターン外積演算と、発想推論に役立つ異種想起の働き

鈴木 昇一

A New Operation of an Exterior Product using Patterns, and a Heteroassociation Which Is Useful for an Inference of Abduction

Shoichi Suzuki

あらまし

パターンからパターンを想起できるようなこれまでの単段階のパターン想起システムは、パターンからこのパターンに似た(このパターンに平行する)パターンを内積演算で想起する同種パターン想起システムであって、パターンからこのパターンと異なっている(このパターンに直交する)パターンを外積演算で想起する異種パターン想起システムではなかった。本論文では、パターンの表現空間が無限次元空間であってもいい場合に、2つのパターンに直交する外積パターンを定義し、異種パターン想起システムを構築できるための基礎を確立している。本論文で提案された3つの異種パターン想起は人工知能学では発展途上にある発想推論に役立つことも説明されている。

1つのパターンに今1つのパターンを蓄えることのできる、出来ない程度を各々2種類の情報量として計量した情報容量が新しく提案されている。万能性認識システム

RECOGNITRON = $\langle \Phi_B, T, SM, BSC \rangle$

の4構成成分の内の3番目の構成成分である類似度関数 SM が、提案されたこの種の2種類の情報容量を大局化したものを利用し、SS理論でのaxiom 2を満たすように、2種類、構成されている。

1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ を基底に採用し、パターン φ の最小自乗近似表現

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \varphi \langle k \rangle + \varphi_{\perp}$$

を求め、第 $k(=1, 2, \dots, n)$ 番目のパターン成分

$$\varphi \langle k \rangle = \sum_{\ell \in L_k} c_{\ell} \cdot \phi_{\ell}$$

内の各1次結合係数 $c_{\ell} (\ell \in L_k \equiv \{3k-2, 3k-1, 3k\})$ を使い、外積演算

$$\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle$$

を定義する。

2つのパターン φ, η が直交していれば、 φ, η は互いに最も異なっていると考えよう。そうすれば、 $\varphi \langle k \rangle$ から $\eta \langle k \rangle$ へ向かう間の角を $(0 \leq) \theta_k (\leq \pi)$ とすると、

$$\cos \theta_k, \sin \theta_k$$

が各々、2つのパターン $\varphi < k >, \eta < k >$ 間の類似性、相違性の程度であるということになる。

本論文では、「発想推論の実現に役立つ異種パターンの想起」により有用と思われる今1つの外積 $\varphi \otimes \eta$ を

$$\varphi \otimes \eta = \sum_{k=1}^n \varphi < k > \otimes \eta < k >$$

と定義する。

新しい内積演算を $[\varphi < k >, \eta < k >]$ と表わすと、パターン φ の第 $k(1, 2, \dots, n)$ 番目の成分 $\varphi < k >$ が

$$\varphi < k > = \varphi' < k > + \varphi'' < k > \wedge [\varphi' < k >, \varphi'' < k >] = 0$$

という具合に、2つの成分

$$\varphi' < k > \equiv \frac{1}{[\eta < k >, \eta < k >]} \cdot \eta < k > [\varphi < k >, \eta < k >]$$

$$\varphi'' < k > \equiv \frac{1}{[\eta < k >, \eta < k >]} \cdot \eta < k > \otimes \{\varphi < k > \otimes \eta < k >\}$$

に直交・直和分解されること(付録Oの定理O1)、並びに、互いに直交するこの2成分 $\varphi' < k >, \varphi'' < k >$ が各々、 $\varphi < k >$ の内積成分、外積成分であることが明らかにされる。パターン情報処理の分野でこれまでに提案されているのはすべて、帰納推論に役立つ「探りパターン $\varphi < k >$ に平行なパターン成分 $\varphi' < k >$ の1部分を含む記憶 $\eta < k >$ 内の内積成分

$$\eta < k > [\varphi < k >, \eta < k >]$$

を想起する同種パターンの想起」である。同種パターンの想起は内積成分 $\eta < k > [\varphi < k >, \eta < k >]$ を呼び出しているといえる。本論文では、「発想推論に役立つような探りパターン $\varphi < k >$ 内の内積成分 $\varphi' < k >$ に垂直なパターン $\varphi'' < k >$ に平行な記憶成分

$$\eta < k > \otimes (\varphi < k > \otimes \eta < k >)$$

を想起する異種パターンの想起」が提案される。異種パターンの想起は、外積成分 $\varphi'' < k >$ の1部分を含む記憶 $\eta < k >$ 内の3重外積成分 $\eta < k > \otimes (\varphi < k > \otimes \eta < k >)$ を呼び出しているといえる。

更に、次の3事項(1)、(2)、(3)にも、内積 $[\varphi < k >, \eta < k >]$ 、外積 $\varphi < k > \otimes \eta < k >$ が利用できることが示されている：

- (1) パターン $\varphi < k >$ にパターン $\eta < k >$ が蓄えられる程度を表す情報容量

$$C_1(\varphi < k > : \eta < k >) = \log_e \frac{1}{\sin \theta_k}$$

- (2) パターン $\varphi < k >$ にパターン $\eta < k >$ が蓄えられない程度を表す情報容量

$$C_2(\varphi < k > : \eta < k >) = \log_e \frac{1}{|\cos \theta_k|}$$

- (3) 上述の2種類の情報容量を利用しての、S.Suzukiの提案しているパターン認識の数学的理論(SS理論)での axiom 2を満たす類似度関数 SM の構成 □

キーワード

- (1) モデル構成作用素 (2) 1次独立な系 (3) 外積 (4) 類似度
(5) 直交直和分解 (6) 異種想起作用素 (7) 情報容量

Abstract

Current associative pattern-systems that can recall a pattern from a probe-pattern within a single step have been systems that can recall only the pattern that looks like the memorized pattern from the probe-pattern by using the operation of inner-product. Such a system is called an autoassociative system because the recalled pattern is parallel to one of the memorized patterns. On the other hand, there is a heteroassociative system that recalls a part of one of the patterns different from memorized patterns from the probe-pattern by using the operation of exterior product. The heteroassociative system must recall a pattern perpendicular(orthogonal) to the memorized pattern. In this paper we newly acquire a pattern which is defined by operation of exterior product and which is orthogonal to the given two patterns, and we establish the base because the different kind pattern recollection system can be constructed. It is explained that the recall of three different kinds proposed with this thesis is useful for the abductive inference that exists in development in artificial intelligence on the way.

The newly proposed two information capacities that shows how much one patterns can or cannot be saved in the other pattern are respectively measured as two kinds of amount of information.

Two kinds of similar measure function SM that is the third composition element in four composition element of universal or all-purpose recognition system

$$\text{RECOGNITRON} = \langle \Phi_B, T, SM, BSC \rangle$$

are composed to fill axiom 2 in the SS theory by using the one of this proposed information capacities of two kinds which are made a general situation.

A linearly independent system $\{\phi_k\}_{k \in L}$ is adopted for the base, and the minimum square approximation expression

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \varphi \langle k \rangle + \varphi_{\perp}$$

of the pattern φ is requested. By using each linear combination coefficient $c_{\ell} (\ell \in L_k \equiv \{3k-2, 3k-1, 3k\})$ in the k th pattern elements

$$\varphi \langle k \rangle = \sum_{\ell \in L_k} c_{\ell} \cdot \phi_{\ell}$$

, an exterior product $\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle$ is defined.

Let's think that φ and η are mutually most different if two pattern φ and η are orthogonal. When we assume the angle between $\varphi \langle k \rangle$ and $\eta \langle k \rangle$ when $\varphi \langle k \rangle$ is rotated into $\eta \langle k \rangle$ to be $(0 \leq) \theta_k (\leq \pi)$.

$$\cos \theta_k \text{ and } \sin \theta_k$$

becomes a similarity level and a different level of two patterns $\varphi \langle k \rangle$ and $\eta \langle k \rangle$ respectively.

In this thesis, the exterior product $\varphi \otimes \eta$ is defined as

$$\varphi \otimes \eta = \sum_{k=1}^n \varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle$$

, which seems to be useful according to a heteroassociation for the achievement of the abductive

inference.

When the new inner-product operation is shown $[\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle]$, the k th element $\varphi \langle k \rangle$ of pattern φ is decomposed as

$$\varphi \langle k \rangle = \varphi' \langle k \rangle + \varphi'' \langle k \rangle \wedge [\varphi' \langle k \rangle, \varphi'' \langle k \rangle] = 0.$$

Thus, two direct sum components $\varphi' \langle k \rangle$ and $\varphi'' \langle k \rangle$ must orthogonalize (theorem O1 of appendix O). It is clarified that these two mutually orthogonal component $\varphi' \langle k \rangle$ and $\varphi'' \langle k \rangle$ are the inner-product component, and the exterior product component in $\varphi \langle k \rangle$ respectively.

All researches that has been proposed in field of pattern information processing so far have been to do with the autoassociation that recalls inner-product component

$$\eta \langle k \rangle \cdot [\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle]$$

in memorized pattern $\eta \langle k \rangle$ including one part of pattern component $\varphi' \langle k \rangle$ parallel to the probe-pattern $\varphi \langle k \rangle$. The autoassociation is useful for the induction inference. It can be said that the autoassociation will call the inner product component $\eta \langle k \rangle \cdot [\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle]$. "Heteroassociator that recalls the memorized component

$$\eta \langle k \rangle \otimes (\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle)$$

parallel to the pattern- component $\varphi'' \langle k \rangle$ perpendicular to the inner product component $\varphi' \langle k \rangle$ in the probe-pattern $\varphi \langle k \rangle$ is presented here, which is useful for the abductive inference. It can be said that heteroassociator will call a triple $\eta \langle k \rangle \otimes (\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle)$ in the memorized pattern $\eta \langle k \rangle$ containing one part of the exterior product $\varphi'' \langle k \rangle$.

In addition, it is shown to be able to use the inner product $[\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle]$ and the exterior product $\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle$ also for the following three matters (1), (2) and (3) :

(1) Information capacity

$$C_1(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle) = \log_e \frac{1}{\sin \theta_k}$$

measured as an amount of information that shows how much $\eta \langle k \rangle$ can be saved in $\varphi \langle k \rangle$.

(2) Information capacity

$$C_2(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle) = \log_e \frac{1}{|\cos \theta_k|}$$

measured as an amount of information that shows how much $\eta \langle k \rangle$ can not be saved in $\varphi \langle k \rangle$.

(3) Construction of similar measure function SM that fills axiom 2 in mathematical theory (SS theory) of pattern recognition (proposed by S.suzuki), which uses two kinds $C_1(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle), C_2(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle)$ of above-mentioned information capacity \square

Key words

- (1) model-construction operator (2) linearly independent system
 (3) exterior product (4) similarity-measure (5) orthogonal direct sum
 (6) heteroassociator (7) information capacity

1. まえがき

これまでのS.Suzukiの研究 [B1] ~ [B4] では、パターンの表現空間として、可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} が採用されている。 \mathfrak{H} の内積を (φ, η) と表わす。 $\varphi \in \mathfrak{H}$ のノルムは $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ と定義される。但し、

$$\forall a \in \mathbb{C} \text{ (複素数全体の集合)}, (a \cdot \varphi, \eta) = a \cdot (\varphi, \eta) \quad (1.1)$$

と約束する。

パターン φ を入力して、パターン φ に似ている(出来るだけ平行している)「パターン η 内の成分 η^* 」、つまり、 $(\varphi, \eta^*) \approx \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \cos \theta$ が成立するパターン η^* を呼び出すことは、同種のパターンを想起する(自己想起; autoassociation)といわれ、 φ を探り針パターン(probe pattern)、 η を検索記憶パターン(retrieval memory-pattern)という。また、探り針パターン φ を入力して、探り針パターン φ と異なっている(出来るだけ垂直・直交している)「パターン η 内の成分 $\eta^\#$ 」、つまり、 $(\varphi, \eta^\#) \approx \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \cos \frac{\pi}{2}$ が成立するパターン $\eta^\#$ を呼び出すことは、異種のパターンを想起する(異種想起; heteroassociation)といわれる。

ここで、

(1#) 2つのパターン $\varphi, \eta \in \mathfrak{H}$ が平行していれば、 φ, η 間に極大の類似性があると考えよう。

(2#) 2つのパターン $\varphi, \eta \in \mathfrak{H}$ が直交していれば、 φ, η 間に極大の相違性があると考えよう。

そうすると、 φ から η へ向かう φ, η 間の角を $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とすると、

(3#) $(-1 \leq) \cos \theta (= \frac{(\varphi, \eta)}{\|\varphi\| \cdot \|\eta\|} \leq +1), (0 \leq) \sin \theta (= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \leq +1)$ が各々、2つのパターン φ, η 間の規格化

された類似性、相違性の程度である

ということになる。

$\cos \theta$ に比例する非負量を大きさに持つ演算が、2つのパターン φ, η の内積 (φ, η) であるが、本論文では、 $\sin \theta$ に比例する非負量を大きさに持つ演算として、2つのパターン φ, η の外積 $\varphi \otimes \eta$ が定義される。

内積が (φ, η) である無限次元のベクトル空間 \mathfrak{H} にパターン情報処理に役立つ今1つの内積 $[\varphi, \eta]$ を定義するのは、やさしい。しかし、外積 $\varphi \otimes \eta$ を2つのパターン $\varphi, \eta \in \mathfrak{H}$ に対し定義するのは難しい。何故ならば、外積で定義されるパターン $\varphi \otimes \eta$ はその性質上、2つのパターン $\varphi, \eta \in \mathfrak{H}$ に直交するように定義されねばならないが、2つのパターン $\varphi, \eta \in \mathfrak{H}$ に直交するパターンは3次元空間と異なり、無数に存在し、任意性が存在するからである。S.Suzukiは以前、この問題に1つの解答を与えた。つまり、2つのパターン $\varphi, \eta \in \mathfrak{H}$ に蓄えられる情報容量の定義と axiom 2を満たす類似度関数 SM の構成との双方に有用な1つの、 \mathfrak{H} での外積 $\varphi \otimes \eta$ の定義を与えた [B60]。本論文では、可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} が複素空間ではなく、実空間の場合、3次元空間 $R^3 < k > (k=1, 2, \dots, n)$ の直積

$$R^{3n} < 1 > < 2 > \dots < n > \equiv R^3 < 1 > \times R^3 < 2 > \times \dots \times R^3 < n > \quad (1.2)$$

を考案し、 $R^{3n} < 1 > < 2 > \dots < n >$ での、これまでの如何なる研究者が提案しなかった外積 $\varphi \otimes \eta$ を定義する。この空間 $R^{3n} < 1 > < 2 > \dots < n >$ での外積 $\varphi \otimes \eta$ は、情報容量 $C_1(\varphi; \eta), C_2(\varphi; \eta)$ の定義(2式(4.7), (4.8))と類似度関数 SM の構成(6.3~6.6節)との双方のみならず、「発想推論の実現に役立つ異種パターン想起」(5.4~5.6節)にもより有用と思われる(新規性と有効性)。

パターン情報処理の分野でこれまでに提案されているのはすべて、帰納推論に役立つ「探りパ

ターンに平行なパターンを想起する同種パターン想起」である。本論文では、「発想推論に役立つような探りパターンに垂直なパターンを想起する異種パターン想起」を3重外積(付録N, O, V) $\eta \otimes (\varphi \otimes \eta)$ を利用して、提案する(新規性)。

相違性を利用して、探り針パターンから記憶しているパターンの集まり内の複数の成分(探り針パターンに直交している複数のパターン)を想起(検索)するのが異種想起の働きであることが明らかにされる。

因みに、これまで研究されているのは、類似性を利用して、探り針パターンから記憶しているパターンの集まり内の単一の成分(探り針パターンに平行している単一のパターン)を想起(検索)する同種想起の働きである。本論文では、同種想起の働きについても新しい意味付けを行う(5.2節)。

第 $j \in J$ 番目のカテゴリ(類概念)を \mathcal{C}_j で表わし、 \mathcal{C}_j の持つ典型的な諸性質を備えているパターン(代表パターン)を ω_j で表わす。全記憶集合 Ω は、式(Q.4)の如く、表わされる。

パターン φ のパターンモデルを $T\varphi$ と表わす。付録Hには、モデル $T\varphi$ が構成されている。パターン φ の代りとなるパターンが $T\varphi$ である。同一知覚原理によれば、 $T\varphi$ は、モデル $T\varphi$ を見たり聞いたりしたならば、原パターン φ と同じように見えたり聞こえたりするようなものでなければならぬ。

ヒルベルト空間 \mathfrak{H} で説明しよう。探り針のパターンモデル $T\varphi$ から、 $T\varphi$ の内に含まれる最大の $T\omega_j$ 成分は、付録Tの定理T1の(1&)からわかるように、

$$\frac{(T\varphi, T\omega_j)}{(T\omega_j, T\omega_j)} \cdot T\omega_j (= A'_j \varphi) \quad (1.3)$$

である。それで、パターンモデル $T\varphi$ が入力された想起作用素(同種想起作用素) A'_j は、からの出力パターン

$$A'_j \varphi \equiv \frac{1}{(T\omega_j, T\omega_j)} \cdot (T\omega_j) \cdot (T\varphi, T\omega_j) = \frac{\|T\varphi\|}{\|T\omega_j\|} \cdot b_j(\varphi) \cdot T\omega_j \quad (1.4)$$

と定義すればよい。このとき、 $b_j(\varphi) (j \in J)$ を、

$$b_j(\varphi) \equiv \frac{(T\varphi, T\omega_j)}{(T\omega_j, T\omega_j)} \cdot \frac{\|T\omega_j\|}{\|T\varphi\|} = \frac{(T\varphi, T\omega_j)}{\|T\varphi\| \cdot \|T\omega_j\|} \quad (1.5)$$

と定義すれば、シュワルツの不等式(2.9)からわかるように、 $b_j(\varphi)$ はその絶対値が1より大きくない。次の解釈(1\$), (2\$)が得られる。

(1\$) $b_j(\varphi)$ は、 $T\varphi$ 内に $T\omega_j$ が含まれている(その絶対値が1より大きくない正負を考慮した)割合である。

(2\$) $1 - b_j(\varphi)$ は、 $T\varphi$ 内に $T\omega_j$ が含まれていない(正負を考慮した)割合である。□

さて、パターン φ が入力されたとき、式(R1.4)のカテゴリ集合 $\mathcal{C}(\gamma)$ にわたる総和

$$A'(\gamma)\varphi \equiv \sum_{j \in \gamma} A'_j \varphi \quad (1.6)$$

が、 $T\varphi$ と同種の、記憶集合

$$T \cdot \Omega(\gamma) \equiv \{T\omega_j \mid j \in \gamma\} \quad (1.7)$$

から想起された(呼び出された)内容であると考え。その絶対値が1より大きくない正負を考慮した量 $a_j(\varphi) (j \in J)$ を、

$$a_j(\varphi) \equiv \frac{\frac{(T\varphi, T\omega_j)}{(T\omega_j, T\omega_j)}}{\sum_{i \in \gamma} \left| \frac{(T\varphi, T\omega_i)}{(T\omega_i, T\omega_i)} \right|} \quad (1.8)$$

と定義し、 $A'(\gamma)\varphi$ の代りに、

$$\frac{1}{\sum_{i \in \gamma} \left| \frac{(T\varphi, T\omega_i)}{(T\omega_i, T\omega_i)} \right|} \cdot A'(\gamma)\varphi \equiv \sum_{j \in \gamma} a_j(\varphi) \cdot (T\omega_j) \quad (1.9)$$

を用いれば、

(1%) $a_j(\varphi)$ は、 $T\varphi$ 内に $T\omega_j$ が含まれている (正負を考慮した) 割合であると、解釈される。尚、1 より大きくない各量 $a_j(\varphi) (j \in \gamma)$ を、付録Pの量子化器 Q で量子化すれば、 $\sum_{j \in \gamma} a_j(\varphi) \cdot (T\omega_j)$ は離散想起作用素に変わり、一層、耐雑音性に強い想起作用素になる。

残された問題は、 $T\varphi$ と異種の、記憶集合 $T \cdot \Omega(\gamma)$ から想起された内容

$$A''(\gamma)\varphi \equiv \sum_{j \in \gamma} [T\varphi - A'_j\varphi] \quad (1.10)$$

を表現できる想起作用素 (異種想起作用素) $A''(\gamma)$ の構造が判明していないことである。

可分な一般抽象実ヒルベルト空間 \mathfrak{H} での1次独立な系 $\{\phi_\ell\}_{\ell \in \{1,2,\dots,3n\}}$ を導入する。1次独立な系を正規直交系に変換する方法が付録Aに説明されている。直交系であれば、1次独立な系である。1次独立な系 (基底) としての正規直交系 $\{\phi_k\}_{k \in L} = \{\phi_\ell\}_{\ell=1,2,\dots,3n}$ の例が4付録D, E, F, Gに説明されている。

実ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の商空間

$$\left\{ \sum_{\ell=1}^{3n} c_\ell \cdot \phi_\ell \mid c_\ell \in R (\ell \in L) \right\}, \quad \text{ここに、} R \text{ は実数全体の集合} \quad (1.11)$$

を、3次元空間 $R^3 <k> (k=1,2,\dots,n)$ の、式(1.2)の直積 $R^{3n} <1><2>\dots<n>$ に分解する。その後、 $R^3 <k> (k=1,2,\dots,n)$ での外積演算 \otimes を提案し、外積演算 \otimes を用いて、異種想起作用素 $A''(\gamma)$ を表現できることを示すが、本論文の主たる目的の1つである。

1次独立な系 $\{\phi_\ell\}_{\ell \in \{1,2,\dots,3n\}}$ で展開された、実ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の元

$$\varphi = \sum_{\ell=1}^{3n} c_\ell \cdot \phi_\ell + \varphi_\perp \quad \text{such that } \forall \ell \in \{1,2,\dots,3n\}, (\varphi_\perp, \phi_\ell) = 0 \quad (1.12)$$

に対応するような、 $R^3 <1> \times R^3 <2> \times \dots \times R^3 <n>$ の元は、順序対

$$\vec{\varphi} = \text{col}(\varphi <1> \quad \varphi <2> \quad \dots \quad \varphi <n>) \quad (\text{列ベクトル}) \quad (1.13)$$

ここに、

$$\varphi <k> \equiv \sum_{\ell=3k-2}^{3k} c_\ell \cdot \phi_\ell, \quad k=1,2,\dots,n \quad (1.14)$$

で表わされる。

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \varphi <k> + \varphi_\perp \quad (1.15)$$

が成立している。同様に、パターン $\eta \in \mathfrak{H}$ についても

$$\eta = \sum_{\ell=1}^{3n} d_\ell \cdot \phi_\ell + \eta_\perp \quad \text{such that } \forall \ell \in \{1,2,\dots,3n\}, (\eta_\perp, \phi_\ell) = 0 \quad (1.16)$$

$$\eta \langle k \rangle \equiv \sum_{\ell=3k-2}^{3k} d_{\ell} \cdot \phi_{\ell} \quad (1.17)$$

$$\eta = \sum_{k=1}^n \eta \langle k \rangle + \eta_{\perp} \quad (1.18)$$

を導入すると、 $R^{3n} \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \cdots \langle n \rangle$ の内積 $[\varphi, \eta]$ 、ノルム $|\varphi|$ は、

$$[\varphi, \eta] \equiv \sum_{\ell=1}^{3n} c_{\ell} \cdot d_{\ell}, \quad |\varphi| \equiv \sqrt{[\varphi, \varphi]} \quad (1.19)$$

と定義され、 $R^3 \langle k \rangle$ の内積 $[\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle]$ 、ノルム $|\varphi \langle k \rangle|$ は、

$$[\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle] \equiv \sum_{\ell=3k-2}^{3k} c_{\ell} \cdot d_{\ell}, \quad |\varphi \langle k \rangle| \equiv \sqrt{[\varphi \langle k \rangle, \varphi \langle k \rangle]} \quad (1.20)$$

と定義される。そうすると、

$$[\varphi, \eta] = \sum_{k=1}^n [\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle] \quad (1.21)$$

$$|\varphi| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |\varphi \langle k \rangle|^2} \quad (1.22)$$

が成り立つ。

付録Bには、式(1.12)のパターン φ 内の各1次結合係数 $c_{\ell} (\ell \in L)$ は式(B.3)の連立1次方程式の解として求められることが示されている。

更に、

(1&) 式(B.1)からわかるように、パターン $\varphi \in \mathfrak{S}$ の、式(1.12)の直和・直和分解

$$\exists \varphi_{\perp} \in \mathfrak{S}, \quad \left(\sum_{\ell=1}^{3n} c_{\ell} \cdot \phi_{\ell}, \varphi_{\perp} \right) = 0 \quad \text{such that} \quad \varphi = \sum_{\ell=1}^{3n} c_{\ell} \cdot \phi_{\ell} + \varphi_{\perp} \quad (1.23)$$

が成り立つが、このパターン φ 内の剰余元 φ_{\perp} を無視して得られる式(1.14)の第 k 成分 $\varphi \langle k \rangle$ は、

$$\varphi \langle k \rangle = \varphi' \langle k \rangle + \varphi'' \langle k \rangle \quad (1.24)$$

という具合に、 $\varphi' \langle k \rangle$ 、 $\varphi'' \langle k \rangle$ に直和・直和分解される(付録Oの式(O.5)を参照)。

1次独立な系 $\{\phi_{\ell}\}_{\ell \in \{1, 2, \dots, 3n\}}$ を用いて2式(1.14)、(1.17)のように分解される2つのパターン $\varphi, \eta \in \mathfrak{S}$ に対して、第3のパターンとしての外積 $\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle$ を各々、

$$\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle \equiv \begin{vmatrix} \phi_{3k-2} & c_{3k-2} & d_{3k-2} \\ \phi_{3k-1} & c_{3k-1} & d_{3k-1} \\ \phi_{3k} & c_{3k} & d_{3k} \end{vmatrix} \quad (1.25)$$

と定義する。 φ, η の外積 $\varphi \otimes \eta$ は、

$$\varphi \otimes \eta \equiv \sum_{k=1}^n \varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle \quad (1.26)$$

と定義される。

(2&) 2つのパターン $\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle$ の内積 $[\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle]$ の定数倍を係数に持つ式(O.3)のパターン $\varphi' \langle k \rangle$ は2つのパターン $\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle$ 間の類似性を表現するパターンである。

(3&) 2つのパターン $\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle$ の、付録Nの3重外積 $\eta \langle k \rangle \otimes (\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle)$ の定数倍である式(O.4)のパターン $\varphi'' \langle k \rangle$ は2つのパターン $\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle$ 間の相違性を表現するパターンである。

つまり、相違性、類似性を表現するのに、本論文では、外積、内積が使えることが示される(新規性)。

情報を表現するには、(1)記号列による方法、(2)パターンによる方法がある。両者を混合して情報を表現するのがマルチメディア表現である。

文字列をその成分が0,1である2値ベクトル(パターン)に符号化して、情報検索とか、データマイニング [A22] には、2付録F, Gの正規直交系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ を使った上述の同種想起作用素、以下の異種想起作用素を利用できる。

異種想起の3種類の働きを実現する3種類の想起作用素が本研究の外積を使用して、提案される(新規性)。

(4&) 2つのパターン $\varphi, \eta \in \mathfrak{S}$ と、複素定数 a との間に、付録Tの恒等式(T.2)が成り立つことが示され、 $R^3 \langle k \rangle (k=1,2,\dots,n)$ で、内積 $[\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle]$ 、外積 $\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle$ を使った、この恒等式(T.2)の応用が研究される。この恒等式(T.2)から、式(T.4)の φ' が φ の内に含まれる最大の η 成分であることが判明するが(付録Tを参照)、この事実を利用して、パターン φ の中に、パターン η が含まれている程度を、付録Sの式(S.1)の情報容量 $C'(\varphi:\eta)$ として、計量する方法を提案し、解析する。付録Uには、包含情報量とも呼ばれる情報容量 $C'(\varphi:\eta)$ がShannon情報理論の相互情報量 $I(X,Y)$ と同じ意味合いを備えていることが示されている。パターン φ の中に、パターン η が含まれていない程度を、式(S.3)の情報容量 $C''(\varphi:\eta)$ として、計量できることが示され(付録S)、3次元空間 $R^3 \langle k \rangle (k=1,2,\dots,n)$ での表現が確立される。付録Sの定理S1には、 φ から η へ向かう φ, η 間の角 $(0 \leq \theta \leq \pi)$ を用いて $C'(\varphi:\eta), C''(\varphi:\eta)$ が各々、 $-\log_e \sin \theta, -\log_e |\cos \theta|$ と表現されることが示されている。

推論(inference)には、

- (1@) 真なる前提(premise)から真なる結論(conclusion)を正しい推論規則(inference rule)を適用して導き出す「真理を保存する」演繹推論(deductive inference)
- (2@) 結論が真ならば、前提が真であるような、つまり、偽なる前提から偽なる結論を正しいとは限らない推論規則を適用して導き出す「偽を保存する」帰納推論(inductive inference)
- (3@) 既知システムで知られている知識を似ている点に基づいて、未知システムに適用し、未知システムに関する知識を得る類推(analogical inference)
- (4@) 現在持っている知識から、記憶内に潜む現在持っている知識とは異なる知識の断片を取り出す発想推論(abduction; getting an idea from)

があるが [B11]、同種想起を利用して、類推を実現できる。本論文の主たる目的の1つは、同種想起、異種想起を利用して、特に、異種想起を利用して、発想推論を実現できる基礎を固めることである。

併せて、カテゴリ帰属知識の不動点を認識結果とする付録Qの、式(Q.1)の万能性多段階連想形認識システム [B3], [B4]

$$\text{RECOGNITRON} = \langle \Phi_B, T, SM, BSC \rangle \quad (1.27)$$

(付録Rも参照)を構築するのに必要なaxiom 2を満たす付録Iの類似度関数 SM を、2種類の情報容量の大局化を使って構成できることを示すことも、本論文の主たる目的の1つである。

2. 可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{S} の元であるパターン φ

処理の対象とするパターン φ は可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{S} の元であるとしよう。しかしながら、 \mathfrak{S} の元は処理の対象とするパターンであるとは限らなくて、処理の対象とするパターンの集まり Φ は式(Q.2)で表される(\mathfrak{S})の部分集合である。

実は、本論文では、パターン φ は実数値でなければならない。本章では、この φ が属する可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} について説明し、可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の、典型的な1例として、 $\mathfrak{H} = L_2(M, dm)$ があること、並びに、ユニタリ作用素 $\exp(tA)$ ($-\infty < t < +\infty$) の作る1パラメータ座標変換連続群 $\{\exp(tA)\}_{-\infty < t < +\infty}$ からの、正值ルベーグ・スティルチェス式測度 $dm(x)$ の選び方が説明され、縮小・拡大のユニタリ作用素 $\exp(tA)$ ($-\infty < t < +\infty$) の作る座標変換連続群 $\{\exp(tA)\}_{-\infty < t < +\infty}$ から可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(R^2; \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot dx_1 dx_2)$ が得られることを示す。併せて、実数値パターン φ を一意的に1次展開できるような最も一般的な1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ についても説明される。

2.1 可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H}

本論文では、可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の実数値元 ϕ_k の系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ は、複素定数 a_ℓ の組 $\{a_\ell\}_{\ell \in L}$ について、

$$\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \phi_\ell = 0 \Leftrightarrow \forall \ell \in L, a_\ell = 0 \quad (2.1)$$

が成立するという意味で、実数値の1次独立な系とする。 \mathfrak{H} での内積、ノルムを各々、 $(\varphi, \eta), \|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ とする。但し、

$$\forall a \in Z \text{ (複素数全体の集合)}, (a \cdot \varphi, \eta) = a \cdot (\varphi, \eta) \quad (2.2)$$

と約束する。

例えば、可分なヒルベルト空間 \mathfrak{H} として、2.2の $\mathfrak{H} = L_2(M, dm)$ がある。

位相空間 (topological space) X が稠密 (dense) な可算部分集合を持つとき、 X を可分な空間 (separable space) であるという [A2]。また、文献 [A18] の5.1節 (p.25) の定理5.2では、

(1#) 可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} には、高々可算個からなり、

$$\text{(完全性)} \quad \forall k \in L, (\varphi, \eta_k) = 0 \Rightarrow \|\varphi\| = 0 \quad (2.3)$$

(正規直交性) $(\eta_k, \eta_\ell) =$

$$\begin{cases} 1 \cdots k = \ell \text{ のとき} \\ 0 \cdots k \neq \ell \text{ のとき} \end{cases}$$

(2.4)

が成り立つという意味で、完全な正規直交系 $\{\eta_k\}_{k \in L}$ を作るすることができることが証明されている。完全な正規直交系が高々可算個からなっていれば、ヒルベルト空間 \mathfrak{H} は可分である。よって、一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} で高々可算個からなる完全な正規直交系が存在すること、一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} が可分なこととは同値であることに注意しておこう。

ヒルベルト空間 \mathfrak{H} とは内積が定義された無限次元であってよいベクトル空間 (内積が定義され得る線形空間) のことであり、有限次元の場合を含む。

4性質

$$(1\$) \text{ (非負性・一意性)} \quad (\varphi, \varphi) \geq 0, \text{ かつ, } \lceil \varphi = 0 \Leftrightarrow (\varphi, \varphi) = 0 \rceil \quad (2.5)$$

$$(2\$) \text{ 複素数 } (\eta, \varphi) \text{ は } (\varphi, \eta) \text{ の共役複素数} \quad (2.6)$$

$$(3\$) \text{ (線形性1)} \quad (\varphi_1 + \varphi_2, \eta) = (\varphi_1, \eta) + (\varphi_2, \eta) \quad (2.7)$$

(4\\$) (線形性2) 任意の複素定数 a について、

$$(a \cdot \varphi, \eta) = a \cdot (\varphi, \eta) \quad (2.8)$$

を満たすだけの、複素数値を与える内積 (φ, η) というものが定義されている。

2つのパターン φ, η の内積 (φ, η) の評価を与えるのは, Schwarzの不等式

$$\forall \varphi, \forall \eta \in \mathfrak{H}, \quad |(\varphi, \eta)| \leq \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \tag{2.9}$$

である. ここに,

$$(1\%) \quad |(\varphi, \eta)| = \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \text{ が成り立つのは, } \varphi \text{ が } \eta \text{ の定数(零を含む)倍の時か, } \eta \text{ が } \varphi \text{ の定数(零を含む)倍の時かに限る} \tag{2.10}$$

ことが知られている. Schwarzの不等式(2.9)から,

$$(\varphi, \eta) = \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \cos \theta \tag{2.11}$$

を満たす角 $(0 \leq \theta \leq \pi)$ が存在する. この θ を φ から η へ向かう φ, η の間の角という.

$$\frac{(\varphi, \eta)}{\|\varphi\| \cdot \|\eta\|} = 0 \text{ if } \|\varphi\| \cdot \|\eta\| = 0 \tag{2.12}$$

を約束すると,

$$0 \leq \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left| \frac{(\varphi, \eta)}{\|\varphi\| \cdot \|\eta\|} \right|^2} \leq 1 \tag{2.13}$$

が成立し, よって, 等式

$$\|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2 - |(\varphi, \eta)|^2 = \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sin^2 \theta \tag{2.14}$$

が成り立つ.

内積 (φ, η) , ノルム $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ が導入されている一般抽象ヒルベルト空間(加法+が導入されている群としての線形ベクトル空間) \mathfrak{H} は,

$$(1\&) \quad (\text{非負性} \cdot \text{一意性}) \quad dis(\varphi, \eta) \geq 0 \wedge [dis(\varphi, \eta) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \eta] \tag{2.15}$$

$$(2\&) \quad (\text{対称性}) \quad dis(\varphi, \eta) = dis(\eta, \varphi) \tag{2.16}$$

$$(3\&) \quad (3\text{角不等式}) \quad dis(\varphi, \phi) \leq dis(\varphi, \eta) + dis(\eta, \phi) \tag{2.17}$$

が成立しているという意味で, 距離

$$dis(\varphi, \eta) = \|\varphi - \eta\| \tag{2.18}$$

が導入され得る距離空間であり, この距離で位相が定義された位相空間である「高々可算個からなる完全な正規直交系が存在するというだけのヒルベルト空間 \mathfrak{H} 」が可分な一般抽象という意味である.

2.2 可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の, 典型的な1例として, $\mathfrak{H} = L_2(M, dm)$

可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の, 典型的な1例として, $\mathfrak{H} = L_2(M, dm)$ が説明される. 例えば, $\bar{\eta}$ を η の複素共役として,

$$M : q \text{ 次元ユークリッド空間 } R^q \text{ の可測部分集合} \tag{2.19}$$

$$dm(x) : \text{ 正值ルベーグ・スティルチェス式測度} \tag{2.20}$$

$$x = \langle x_1, x_2, \dots, x_q \rangle \in M (\subseteq R^q) : \text{ 実数値 } q \text{ 変数の直交座標系} \tag{2.21}$$

を導入し, その内積 (φ, η) , ノルム $\|\varphi\|$ が,

$$(\varphi, \eta) = \int_M dm(x) \varphi(x) \cdot \bar{\eta}(x) \tag{2.22}$$

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \tag{2.23}$$

と与えられる線形空間(ベクトル空間) \mathfrak{H} が, $\mathfrak{H} = L_2(M, dm)$ である.

2.3 ユニタリ作用素 U_t の作る座標変換連続群 $\{U_t\}_{-\infty < t < +\infty}$ ，ここに， $U_t \equiv \exp(tA)$ からの，正值ルベグ・スティルチェス式測度 $dm(x)$ の選び方

1実パラメータ t に関しても微分可能なLie群と呼ばれる“ユニタリ作用素 U_t の作る座標変換連続群”

$$\{U_t\}_{-\infty < t < +\infty}, \text{ ここに, } U_t \equiv \exp(tA) \quad (2.24)$$

の作用(座標変換)をしばしば、処理の対象とするパターンが受けている．この種の座標変換群が作用する前の状態に戻す処理は、いわゆる通常の意味の正規化である．

先ず、線形作用素 tA の指数関数 $\exp(tA)$ とは、

$$\exp(tA) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k (j!)^{-1} \cdot (tA)^j \quad (2.25)$$

と定義される．ここに、 t は任意の実数である．

任意に $\varphi \in \mathfrak{S}$ を選んで、1実パラメータ t のLie座標変換群(移動変換群) S_t に対し、

$$(U_t \varphi)(x) \equiv \varphi(S_t x) \text{ for any } x \in M \quad (2.26)$$

と定義される作用素 U_t は、線形作用素であることに、注意しておく．この時、少なくとも、実数のある集合 M は、 n 次元ユークリッド空間 R^n の或る開集合と局所的には同相 [A2] な近傍を持つ位相多様体(topological manifold) [A1] でなければならない．

内積 (φ, η) が可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{S} = L_2(M; dm)$ における正值測度 $dm(x)$ について、表現

$$dm(x) = p(x) dx \text{ for any } x \in M \quad (2.27)$$

を許す密度関数 $p(x)$ が存在するとしよう．

初期条件式

$$y = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle |_{t=0} = x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \quad (2.28)$$

の下で、微分方程式系

$$\frac{dy_j}{dt} = F_j(y), j = 1 \sim n, -\infty < t < +\infty \quad (2.29)$$

が成立としているとしよう．更に、座標点

$$x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in M \quad (2.30)$$

の実数値関数 $F_j(x)$ の系

$$F_j \equiv F_j(x) \equiv F_j(x_1, x_2, \dots, x_n), j = 1 \sim n \quad (2.31)$$

は、次の2条件(1%), (2%)を満たしているとする：

(1%) $F_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ は、 M 上で1階までの連続な偏導関数を持つ．

$$(2\%) \forall x \in M, \sum_{j=1}^n |F_j(x)|^2 \neq 0. \quad (2.32)$$

□

このとき、次の定理2.1が証明され、無限小変換 A が

$$(A\varphi)(x) \equiv \frac{d\varphi(y)}{dt} \Big|_{t=0} \quad (2.33)$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{dy_j}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_j} \Big|_{t=0} \quad (2.34)$$

$$= \sum_{j=1}^n F_j(x) \cdot \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} \Big|_{t=0} \quad (2.35)$$

で与えられる式(2.24)のLie群 $\{U_t\}_{-\infty < t < +\infty}$ をユニタリ化する式(2.27)の密度関数 $p(x)$ を決定できる方程式(2.36)が指摘されている。

[定理2.1] (Lie座標変換群のユニタリ化定理) [B50]

2条件(1%), (2%)の下で, 次の3命題(1&), (2&), (3&)は互いに同値である:

$$(1\&) \quad \forall x \in M, \sum_{j=1}^n \frac{\partial [F_j \cdot p]}{\partial x_j} = 0. \quad (2.36)$$

$$(2\&) \quad A \equiv A(x) \equiv A(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \sum_{j=1}^n F_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \\ = \sum_{j=1}^n \sqrt{-1} \cdot F_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (\sqrt{-1})^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (2.37)$$

の指数関数 $U_t \equiv \exp(tA)$ は任意の実数 t について, 式(2.39)が成り立つという意味でユニタリ作用素である。

$$(3\&) \quad G \equiv \sqrt{-1} \cdot A \\ = \sum_{j=1}^n (-1) \cdot F_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (\sqrt{-1})^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \\ = \sum_{j=1}^n \sqrt{-1} \cdot F_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (2.38)$$

は自己共役作用素である。

[定理2.1の系1] (保測定理) [B50]

式(2.24)内の線形作用素 A の, 指数関数 $U_t \equiv \exp(tA)$ は, 式(2.26)で定義される1実パラメータ t のLie座標変換群 $S_t \equiv \exp(tA)$ を引き起こし,

$$\forall \varphi \in L_2(M; dm), \forall t (-\infty < t < +\infty), \|U_t \varphi\| = \|\varphi\| \quad (2.39)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in M, \sum_{k=1}^n \frac{\partial [F_k \cdot p]}{\partial x_k} = 0. \quad (2.40)$$

□

よって, 偏微分方程式(2.40)を解いて, 密度関数 $p(x)$ を求め, 式(2.27)の正値ルベーク・スティルチェス式測度 $dm(x)$ を求めればよい。この求める例を次節で与えよう。

2.4 縮小・拡大群に不変な正値ルベーク・スティルチェス式測度 $dm(x) = p(x)dx$

1例として, 縮小・拡大群 $\{\exp(t \cdot A)\}_{-\infty < t < +\infty}$ について, 考えよう。

$$y_1 = \exp(-t) \cdot x_1, y_2 = \exp(-t) \cdot x_2 \quad (2.41)$$

については, 微分方程式系

$$dy_1/dt = -y_1, dy_2/dt = -y_2 \quad (2.42)$$

が成り立つ。

式(2.40)の微分方程式

$$0 = \frac{\partial (F_1 \cdot p)}{\partial x_1} + \frac{\partial (F_2 \cdot p)}{\partial x_2} \\ = -\frac{\partial (x_1 \cdot p)}{\partial x_1} - \frac{\partial (x_2 \cdot p)}{\partial x_2} \quad \because \quad F_1 = -x_1, F_2 = -x_2$$

$$= -[2p + x_1 \cdot \frac{\partial p}{\partial x_1} + x_2 \cdot \frac{\partial p}{\partial x_2}] \quad (2.43)$$

を解けば、 C を正定数として、

$$p \equiv p(x_1, x_2) = C \cdot \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \quad (2.44)$$

が得られる。以後、 $C=1$ ととる。

そうすると、ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の内積 (φ, η) については、式(2.27)から、

$$\begin{aligned} & (\varphi, \eta) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \varphi(x_1, x_2) \cdot \bar{\eta}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.45)$$

と与えられる可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(R^2; \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot dx_1 dx_2)$ が得られた。

この内積 (φ, η) は、縮小・拡大の下でのユニタリ座標変換不変性(unitary invariance about expansion-and-contraction around origin)を備えている。

一般に、SS理論 [B3], [B4] では、処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ は或る可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の零元 0 を含む或る部分集合であるが、構成的集合として、式(Q.2)の如く設定される。

3. 可分な一般抽象実ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の元であるパターン φ の1次展開に基づく 3n次元ユークリッド空間 $R^{3n} \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \cdots \langle n \rangle$ での外積 $\varphi \otimes \eta$ の諸性質

本章では、1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ により、可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の元 φ が1次展開できる事実を指摘し、この事実に基づき、 \mathfrak{H} が実空間の場合、 φ, η に関し、 $|L|$ 次元ユークリッド空間での内積 $[\varphi, \eta]$ 、ノルム $|\varphi|$ を定義する。更に、実ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の、式(1.2)の剰余空間 $R^{3n} \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \cdots \langle n \rangle$ (式(1.11)の商空間)が3n次元のユークリッド空間と同型であるように設定されたことから、文献[B55]とは異なる外積 $\varphi \otimes \eta$ が発想推論に役立つように、新しく定義され得ることが示される。その意味が説明され、その諸性質が明らかにされ、3重内積 $[\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle]$ 、3重外積 $\eta \langle k \rangle \otimes (\varphi \langle k \rangle, \omega \langle k \rangle)$ が研究される。

3.1 3n次元空間 $R^{3n} \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \cdots \langle n \rangle \equiv R^3 \langle 1 \rangle \times R^3 \langle 1 \rangle \times \cdots \times R^3 \langle n \rangle$

内積、ノルムが各々、 (φ, η) 、 $\|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ と表わされる可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の元 ϕ_k からなる系 $\{\phi_\ell\}_{\ell \in L}$ は、複素定数の組 $\{a_\ell\}_{\ell \in L}$ について、

$$\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \phi_\ell = 0 \Leftrightarrow \forall \ell \in L, a_\ell = 0 \quad (3.1)$$

が成り立つという意味で、1次独立な系であることが要請されるが、

$$\begin{aligned} & (\phi_k, \phi_\ell) = \\ & \begin{cases} 1 \cdots k = \ell \text{ のとき} \\ 0 \cdots k \neq \ell \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

が成り立つという意味で、正規直交系である必要はない。正規直交系であれば、1次独立な系である。

但し、付録Aで説明されているように、1次独立な系 $\{\phi_\ell\}_{\ell \in L}$ を常に正規直交系に変換できる。

可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の元 φ は次のように、付録Bの式(B.1)の如く、1次展開できる。各1次展開係数 $c_k (k \in L)$ は連立1次方程式(B.3)を解いて得られる：

$$\begin{aligned} \exists \varphi_\perp \in \mathfrak{H}, \\ \varphi = \sum_{k \in L} c_k \cdot \phi_k + \varphi_\perp, \end{aligned} \tag{3.3}$$

satisfying the orthogonality condition

$$\forall k \in L, (\varphi_\perp, \phi_k) = 0 \tag{3.4}$$

□

以後、1より小さくない正整数 n を選び、有限集合 L を

$$\begin{aligned} |L| \equiv 3n \geq 3, \quad L = \{1, 2, 3, \dots, 3k-2, 3k-1, 3k, \dots, 3n-2, 2n-1, 3n\} = \{L_1, L_2, \dots, L_k, \dots, L_n\} \\ L_k = \{3k-2, 3k-1, 3k\} (k=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \tag{3.5}$$

とする。以後、1次展開式に(3.3)について、各 $c_k (k \in L)$ は実定数であるとしよう。例えば、可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} は実空間とすれば、各 $c_k (k \in L)$ が実定数であることは保証される。同様に、 \mathfrak{H} の元 η, ω が

$$\eta = \sum_{k \in L} d_k \cdot \phi_k + \eta_\perp \quad \text{where } \forall k \in L, (\eta_\perp, \phi_k) = 0 \tag{3.6}$$

$$\omega = \sum_{k \in L} e_k \cdot \phi_k + \omega_\perp \quad \text{where } \forall k \in L, (\omega_\perp, \phi_k) = 0 \tag{3.7}$$

と展開されるとしよう。

$\varphi \langle k \rangle$ を式(1.14)の如く定義すると、表現式(1.15)が成り立つ。

内積 $[\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle]$ 、ノルム $|\varphi \langle k \rangle|$ が各々、式(1.20)の如く定義される3次元実空間 $R^3 \langle k \rangle$ では、

$$\frac{[\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle]}{|\varphi \langle k \rangle| \cdot |\eta \langle k \rangle|} = 0 \quad \text{if } |\varphi \langle k \rangle| \cdot |\eta \langle k \rangle| = 0 \tag{3.8}$$

を約束する。

空間 $R^3 \langle k \rangle$ での基底となる各部分系 $\{\phi_\ell\}_{\ell \in \{3k-2, 3k-1, 3k\}}$ ($k=1, 2, \dots, n$) は、次の2性質①, ②が成り立つという意味で、 $R^3 \langle k \rangle$ の完全正規直交系である：

①(正規直交性) $p, q \in \{3k-2, 3k-1, 3k\}$ について、

$$\begin{aligned} [\phi_p \langle k \rangle, \phi_q \langle k \rangle] = \\ \begin{cases} 1 \cdots p = q \text{ のとき} \\ 0 \cdots p \neq q \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned} \tag{3.9}$$

②(完全性) $\forall p \in \{3k-2, 3k-1, 3k\}, [\varphi \langle k \rangle, \phi_p \langle k \rangle] = 0 \Rightarrow |\varphi \langle k \rangle| = 0$ (3.10)

□

式(1.11)の商空間である $3n$ 次元実空間 $R^{3n} \langle 1 \rangle \times \langle 2 \rangle \times \dots \times \langle n \rangle$ は式(1.2)の如く定義され、 n 個の直積(direct product) $R^3 \langle 1 \rangle \times R^3 \langle 2 \rangle \times \dots \times R^3 \langle n \rangle$ であり、その内積 $[\varphi, \eta]$ 、ノルム $|\varphi|$ は式(1.19)で定義され、2式(1.21), (1.22)が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} |\varphi| \cdot |\eta| = 0 &\Leftrightarrow [\forall \ell \in L, c_\ell = 0] \vee [\forall \ell \in L, d_\ell = 0] \\ &\Leftrightarrow [\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, |\varphi \langle k \rangle| = 0] \vee [\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, |\eta \langle k \rangle| = 0] \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, |\varphi \langle k \rangle| \cdot |\eta \langle k \rangle| = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \frac{[\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle]}{|\varphi \langle k \rangle| \cdot |\eta \langle k \rangle|} = 0 \quad \because \text{式(3.8)} \quad (3.11)$$

が成り立つから、

$$\frac{[\varphi, \eta]}{|\varphi| \cdot |\eta|} = 0 \quad \text{if } |\varphi| \cdot |\eta| = 0 \quad (3.12)$$

を約束する。

可分な一般抽象実ヒルベルト空間 \mathfrak{H} では、基底 $\{\phi_k\}_{k \in L} = \{\phi_k\}_{k=1, 2, \dots, 3n}$ は正規直交系とは限らない1次独立な系であるが、 $R^{3n} \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \dots \langle n \rangle$ では、系 $\{\phi_k\}_{k=1, 2, \dots, 3n}$ は完全な正規直交系であり、基底である。

3.2 外積 $\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle$, $\varphi \otimes \eta$ の定義

式(1.14)の $\varphi \langle k \rangle$ に注目し、 $\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle$ の外積 $\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle$ を式(1.25)の如く定義する。

外積 $\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle$ は、

$$\begin{aligned} & \varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle \\ &= \phi_{3k-2} \cdot \begin{vmatrix} c_{3k-1} & d_{3k-1} \\ c_{3k} & d_{3k} \end{vmatrix} + \phi_{3k-1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} c_{3k-2} & d_{3k-2} \\ c_{3k} & d_{3k} \end{vmatrix} + \phi_{3k} \cdot \begin{vmatrix} c_{3k-2} & d_{3k-2} \\ c_{3k-1} & d_{3k-1} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.13)$$

と展開され、

$$\begin{aligned} & |\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle|^2 \\ &= \begin{vmatrix} c_{3k-1} & d_{3k-1} \\ c_{3k} & d_{3k} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_{3k-2} & d_{3k-2} \\ c_{3k} & d_{3k} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_{3k-2} & d_{3k-2} \\ c_{3k-1} & d_{3k-1} \end{vmatrix}^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

が成り立ち、付録Kの②より、 $|\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle|$ は3次元実数ベクトル

$$\bar{c}_k = \begin{bmatrix} c_{3k-2} \\ c_{3k-1} \\ c_{3k} \end{bmatrix}, \quad \bar{d}_k = \begin{bmatrix} d_{3k-2} \\ d_{3k-1} \\ d_{3k} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

を2辺とする平行四辺形の面積である。

式(1.15)の φ に注目し、 φ, η の外積 $\varphi \otimes \eta$ を式(1.26)の如く定義する。外積 $\varphi \otimes \eta$ は \bar{c}_k, \bar{d}_k 2辺とする平行四辺形の面積を大きさに持つ $\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle$ の n 個の和である。

3.3 外積 $\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle$ の大きさと、内積の大きさとの関係

\mathfrak{H} でのシュワルツの不等式(2.9)を $R^3 \langle k \rangle$ で考えれば成り立つシュワルツの不等式

$$|[\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle]| \leq |\varphi \langle k \rangle| \cdot |\eta \langle k \rangle| \quad (3.16)$$

から、式(3.8)の約束の下で、

$$-1 \leq \cos \theta_k = \frac{[\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle]}{|\varphi \langle k \rangle| \cdot |\eta \langle k \rangle|} \leq +1 \quad (3.17)$$

が成り立つ「数値3次元ベクトル \bar{c}_k から実数値3次元ベクトル \bar{d}_k へのなす角 θ_k 」が存在する。ここに、式(3.8)の約束の下で、

$$0 \leq \theta_k \leq \pi \quad (3.18)$$

とする。

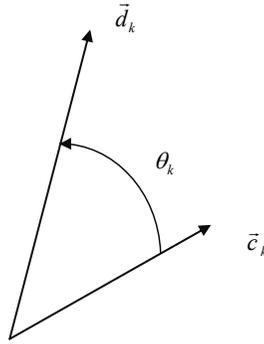


図3.1 \vec{c}_k から \vec{d}_k への, 180度以内の右手系回転

Fig.3.1 the motion of a right-hand screw when \vec{c}_k is rotated into \vec{d}_k (angle of rotation less than 180°)

式(3.14)の外積の大きさ $|\varphi\langle k \rangle \otimes \eta\langle k \rangle|$ を, 付録Jのラグランジュの恒等式(J.5)を使って書き直せば,

$$|\varphi\langle k \rangle|^2 \cdot |\eta\langle k \rangle|^2 - [\varphi\langle k \rangle, \eta\langle k \rangle]^2 = |\varphi\langle k \rangle \otimes \eta\langle k \rangle|^2 \quad (3.19)$$

が得られる. そうすると, この式(3.19)から, 式(3.8)の約束の下で,

$$|\varphi\langle k \rangle| \cdot |\eta\langle k \rangle| = 0, \quad |\varphi\langle k \rangle| \cdot |\eta\langle k \rangle| \neq 0 \quad (3.20)$$

の2つの場合に分けて証明される恒等式

$$|\varphi\langle k \rangle \otimes \eta\langle k \rangle|^2 = |\varphi\langle k \rangle|^2 \cdot |\eta\langle k \rangle|^2 \cdot \left[1 - \frac{[\varphi\langle k \rangle, \eta\langle k \rangle]^2}{|\varphi\langle k \rangle| \cdot |\eta\langle k \rangle|}\right] \quad (3.21)$$

が成立し, 更に,

$$\begin{aligned} 0 \leq \sin \theta_k &= \sqrt{\sin^2 \theta_k} \\ &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta_k} \\ &= \sqrt{1 - \frac{[\varphi\langle k \rangle, \eta\langle k \rangle]^2}{|\varphi\langle k \rangle| \cdot |\eta\langle k \rangle|}} \leq +1 \end{aligned} \quad (3.22)$$

を考慮すれば, 式(3.8)の約束の下で, 式(3.14)の外積の大きさ $|\varphi\langle k \rangle \otimes \eta\langle k \rangle|$ は,

$$|\varphi\langle k \rangle \otimes \eta\langle k \rangle| = |\varphi\langle k \rangle| \cdot |\eta\langle k \rangle| \cdot \sin \theta_k \quad (3.23)$$

と表わされる. よって, この式(3.23)から, 式(3.8)の約束の下で,

$$[\omega\langle k \rangle, \varphi\langle k \rangle] = 0 \quad (3.24)$$

$$[\omega\langle k \rangle, \eta\langle k \rangle] = 0 \quad (3.25)$$

が成立していることを考えて, 3次元空間において, $\varphi\langle k \rangle$ と $\eta\langle k \rangle$ とのなす平面に直交している大きさ

$$|\omega\langle k \rangle| = 1 \quad (3.26)$$

のベクトル $\omega\langle k \rangle$ を導入すれば, 外積 $\varphi \otimes \eta$ の表現式

$$\begin{aligned} \varphi\langle k \rangle \otimes \eta\langle k \rangle &= |\varphi\langle k \rangle \otimes \eta\langle k \rangle| \cdot \omega\langle k \rangle \end{aligned}$$

$$= |\varphi \langle k \rangle| \cdot |\eta \langle k \rangle| \cdot \sin \theta_k \cdot \omega \langle k \rangle \quad (3.27)$$

が成り立つ．

3.4 外積 \otimes の，簡単な諸性質

3.4.1 反対称性

2つのパターン $\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle$ の外積パターン $\psi \langle k \rangle \equiv \varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle$ について，外積 \otimes の定義式(1.25)から反対称性

$$\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle = -\eta \langle k \rangle \otimes \varphi \langle k \rangle \quad (3.28)$$

が成立し，これから，べき等 $\varphi \langle k \rangle \otimes \varphi \langle k \rangle$ が0になる性質

$$\varphi \langle k \rangle \otimes \varphi \langle k \rangle = 0 \quad (3.29)$$

が成り立つ．

3.4.2 線形性

線形性

$$(c \cdot \varphi \langle k \rangle) \otimes \eta \langle k \rangle = c \cdot (\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle) \quad \text{for any real number } c \quad (3.30)$$

$$\varphi \langle k \rangle \otimes (c \cdot \eta \langle k \rangle) = c \cdot (\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle) \quad \text{for any real number } c \quad (3.31)$$

$$(\varphi \langle k \rangle + \eta \langle k \rangle) \otimes \psi \langle k \rangle = (\varphi \langle k \rangle \otimes \psi \langle k \rangle) + (\eta \langle k \rangle \otimes \psi \langle k \rangle) \quad (3.32)$$

$$\varphi \langle k \rangle \otimes (\eta \langle k \rangle + \psi \langle k \rangle) = (\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle) + (\varphi \langle k \rangle \otimes \psi \langle k \rangle) \quad (3.33)$$

が成立する．

3.4.3 直交雑音 $\varphi_{\perp}, \eta_{\perp}$ の除去性質

直交雑音 $\varphi_{\perp}, \eta_{\perp}$ の除去性質

$$(\varphi - \varphi_{\perp}) \langle k \rangle \otimes (\eta - \eta_{\perp}) \langle k \rangle = \varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle \quad (3.34)$$

\therefore 3式(1.12), (1.14), (1.15)から

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (\varphi - \varphi_{\perp}) \langle k \rangle = \varphi \langle k \rangle, \quad (\eta - \eta_{\perp}) \langle k \rangle = \eta \langle k \rangle \quad (3.35)$$

が成立する．

3.4.4 外積の非結合性

一般的には，

$$(\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle) \otimes \omega \langle k \rangle \neq \varphi \langle k \rangle \otimes (\eta \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle) \quad (3.36)$$

である．この事実を次の定理3.1にしておく．

[定理3.1] (外積の非結合定理)

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \otimes \varphi_3 = \varphi_1 \otimes (\varphi_2 \otimes \varphi_3) \quad (3.37)$$

は一般に成立しない．

(証明) $L = \{1, 2, 3\}$ の場合で考えよう．

$$\varphi_1 = a \cdot \phi_1 + 0 \cdot \phi_2 + 0 \cdot \phi_3 + (\varphi_1)_{\perp} \quad (3.38)$$

$$\varphi_2 = 0 \cdot \phi_1 + b \cdot \phi_2 + 0 \cdot \phi_3 + (\varphi_2)_{\perp} \quad (3.39)$$

$$\varphi_3 = c \cdot \phi_1 + d \cdot \phi_2 + e \cdot \phi_3 + (\varphi_3)_{\perp} \quad (3.40)$$

としよう．

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2 = \begin{vmatrix} \phi_1 & a & 0 \\ \phi_2 & 0 & b \\ \phi_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot \phi_3 \quad (3.41)$$

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \otimes \varphi_3 = \begin{vmatrix} \phi_1 & 0 & c \\ \phi_2 & 0 & d \\ \phi_3 & ab & e \end{vmatrix} = -a \cdot b \cdot d \cdot \phi_1 + a \cdot b \cdot c \cdot \phi_2 \quad (3.42)$$

と計算される.

$$\varphi_2 \otimes \varphi_3 = \begin{vmatrix} \phi_1 & 0 & c \\ \phi_2 & b & d \\ \phi_3 & 0 & e \end{vmatrix} = b \cdot e \cdot \phi_1 - b \cdot c \cdot \phi_3 \quad (3.43)$$

$$\varphi_1 \otimes (\varphi_2 \otimes \varphi_3) = \begin{vmatrix} \phi_1 & a & be \\ \phi_2 & 0 & 0 \\ \phi_3 & 0 & -bc \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot c \cdot \phi_2 \quad (3.44)$$

と計算され、よって、

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \otimes \varphi_3 - \varphi_1 \otimes (\varphi_2 \otimes \varphi_3) = -a \cdot b \cdot d \cdot \phi_1 \quad (3.45)$$

と計算され、

$$a \cdot b \cdot c \neq 0 \text{ であれば, } (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \otimes \varphi_3 \neq \varphi_1 \otimes (\varphi_2 \otimes \varphi_3) \quad (3.46)$$

□

3.4.5 3重内積 [$\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle$]

パターン $\varphi \langle k \rangle$ と外積パターン $\eta \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle$ との内積 [$\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle$] は3重内積と呼ばれるが、この3重内積の意味、諸性質について調べておこう.

まず、 $\eta \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle$ の定義、並びに、式(3.13)からわかるように、直交性

$$[\varphi \langle k \rangle, \varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle] = 0 \quad (3.47)$$

$$[\eta \langle k \rangle, \varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle] = 0 \quad (3.48)$$

が成立する.

[例3.1]

$$\varphi_1 = a \cdot \phi_1 + b \cdot \phi_2 + c \cdot \phi_3 + (\varphi_1)_\perp \quad (3.49)$$

$$\varphi_2 = d \cdot \phi_1 + 0 \cdot \phi_2 + 0 \cdot \phi_3 + (\varphi_2)_\perp \quad (3.50)$$

$$\varphi_3 = 0 \cdot \phi_1 + e \cdot \phi_2 + 0 \cdot \phi_3 + (\varphi_3)_\perp \quad (3.51)$$

に対し、

$$\varphi_2 \otimes \varphi_3 = \begin{vmatrix} \phi_1 & d & 0 \\ \phi_2 & 0 & e \\ \phi_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = d \cdot e \cdot \phi_3 \quad (3.52)$$

$$[\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_3] = \begin{vmatrix} a & d & 0 \\ b & 0 & e \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = c \cdot d \cdot e \quad (3.53)$$

□

この例3.1からいえることは次の通りである :

$$\varphi_2 \otimes \varphi_3 = d \cdot e \cdot \phi_3 \quad (3.54)$$

は、 φ_2, φ_3 を2辺とする平行四辺形の面積 $d \cdot e$ を大きさに持つ。

$$[\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_3] = c \cdot d \cdot e \quad (3.55)$$

は、

$$\varphi'_1 = 0 \cdot \phi_1 + 0 \cdot \phi_2 + c \cdot \phi_3 + (\varphi_1)_\perp, \quad \varphi_2, \varphi_3 \quad (3.56)$$

を3辺とする平行四辺形の体積 $c \cdot d \cdot e$ を大きさに持つ。

3重内積 $[\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle]$ の構造は、次の定理3.2で決定される。

[定理3.2] (3重内積 $[\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle]$ の表現定理)

3式(3.3), (3.6), (3.7)の展開式を使えば、

$$\begin{aligned} & [\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle] \\ &= \begin{vmatrix} c_{3k-2} & d_{3k-2} & e_{3k-2} \\ c_{3k-1} & d_{3k-1} & e_{3k-1} \\ c_{3k} & d_{3k} & e_{3k} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.57)$$

(証明) 式(1.25)の外積 $\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle$ の展開式(3.13)より、

$$\begin{aligned} & \eta \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle \\ &= \phi_{3k-2} \cdot \begin{vmatrix} d_{3k-1} & e_{3k-1} \\ d_{3k} & e_{3k} \end{vmatrix} + \phi_{3k-1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} d_{3k-2} & e_{3k-2} \\ d_{3k} & e_{3k} \end{vmatrix} + \phi_{3k} \cdot \begin{vmatrix} d_{3k-2} & e_{3k-2} \\ d_{3k-1} & e_{3k-1} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.58)$$

である。よって、

$$\begin{aligned} & [\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle] \\ &= c_{3k-2} \cdot \begin{vmatrix} d_{3k-1} & e_{3k-1} \\ d_{3k} & e_{3k} \end{vmatrix} + c_{3k-1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} d_{3k-2} & e_{3k-2} \\ d_{3k} & e_{3k} \end{vmatrix} + c_{3k} \cdot \begin{vmatrix} d_{3k-2} & e_{3k-2} \\ d_{3k-1} & e_{3k-1} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$= \begin{vmatrix} c_{3k-2} & d_{3k-2} & e_{3k-2} \\ c_{3k-1} & d_{3k-1} & e_{3k-1} \\ c_{3k} & d_{3k} & e_{3k} \end{vmatrix} \quad (3.60)$$

□

このようにして、2パターン $\varphi, \eta \in \mathfrak{S}$ の第 $k (= 1, 2, \dots, n)$ 番目の2パターン成分 $\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle$ の、式(3.15)の係数ベクトル \bar{c}_k, \bar{d}_k に加えて、 $\omega \in \mathfrak{S}$ の展開式(3.7)から得られる $\omega \langle k \rangle$ の係数ベクトル

$$\bar{e}_k = \begin{bmatrix} e_{3k-2} \\ e_{3k-1} \\ e_{3k} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

を使えば、 $[\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle]$ は、3係数ベクトル $\bar{c}_k, \bar{d}_k, \bar{e}_k$ を三稜とする平行六面体の体積を表わすことになる。

その説明をしておこう。

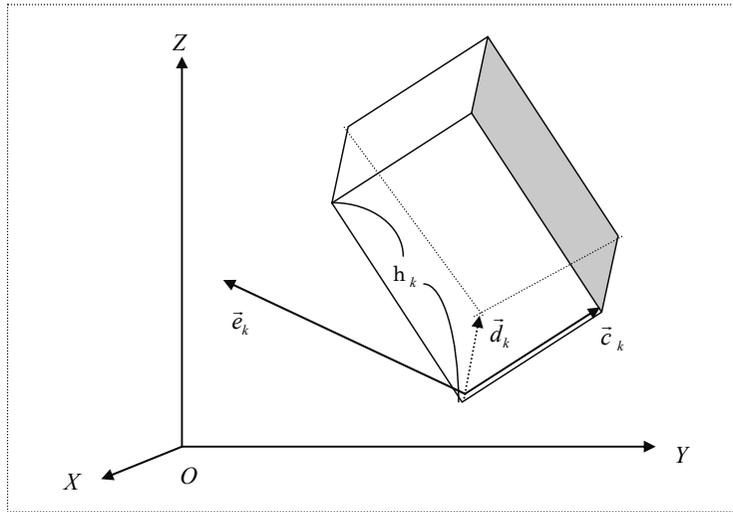


図3.2 3ベクトル $\vec{c}_k, \vec{d}_k, \vec{e}_k$ で張られる平行六面体の体積
 Fig.3.2 a volume of parallelepiped spanned by three vectors $\vec{c}_k, \vec{d}_k, \vec{e}_k$

体積 $[\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle]$ の符号は、ベクトル系 $\vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ の向きが3次元座標軸 $O-X-Y-Z$ の向きと同じであるならば、正である。また、3つのベクトル $\vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ が共平面的であれば、この平行六面体の体積は0となる。

$[\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle]$ が平行六面体の体積を与えることを証明しておこう。

$\eta \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle$ の大きさ $|\eta \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle|$ は2つのベクトル \vec{d}_k, \vec{e}_k により張られた平行四辺形の面積に等しくて、 $\eta \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle$ はこの平行四辺形に垂直となる。

ζ_k をベクトル $\varphi \langle k \rangle$ からベクトル $\eta \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle$ への間のなす角とすると、

$$\begin{aligned} & [\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle] \\ &= |\varphi \langle k \rangle| \cdot |\eta \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle| \cdot \cos \zeta_k \\ &= h_k \cdot |\eta \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle| \\ &= 3\text{つのベクトル } \vec{c}, \vec{d}, \vec{e} \text{ を三稜とする平行六面体の体積} \end{aligned} \tag{3.62}$$

を得、示された。ここに、

$$h_k = |\varphi \langle k \rangle| \cdot \cos \zeta_k \tag{3.63}$$

は2つのベクトル \vec{d}, \vec{e} により張られた平行四辺形を底面とするような、3つのベクトル $\vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ を三稜とする平行六面体の高さである。

3.4.6 3重外積 $\eta \langle k \rangle \otimes (\varphi \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle)$ の表現

3重外積 $\eta \langle k \rangle \otimes (\varphi \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle)$ の構造は、

$$\begin{aligned} & \eta \langle k \rangle \otimes (\varphi \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle) \\ &= [\eta \langle k \rangle, \omega \langle k \rangle] \cdot \varphi \langle k \rangle - [\eta \langle k \rangle, \varphi \langle k \rangle] \cdot \omega \langle k \rangle \end{aligned} \tag{3.64}$$

と、決定される。これは、付録Nの定理N1である。

3.4.7 パターン $\varphi < k >$ 内の、 $\eta < k >$ に平行な、或いは直交する成分の大きさ

式(3.15)の2つの3次元実数ベクトル \vec{c}_k, \vec{d}_k に注目する。 \vec{c}_k から \vec{d}_k へ向かう間の角を $(0 \leq) \theta_k (\leq \pi)$ とすると(式(3.18)を参照),

$$|\varphi < k >, \eta < k >| = |\varphi < k >| \cdot |\eta < k >| \cdot \cos \theta_k \quad \because \text{式(3.17)} \quad (3.65)$$

$$|\varphi < k > \otimes \eta < k >| = |\varphi < k >| \cdot |\eta < k >| \cdot \sin \theta_k \quad \because \text{式(3.23)} \quad (3.66)$$

$$[|\varphi < k >, \eta < k >|]^2 + |\varphi < k > \otimes \eta < k >|^2 = |\varphi < k >|^2 \cdot |\eta < k >|^2 \quad \because \text{式(J.5)} \quad (3.67)$$

が成立する(式(3.19)を参照)。よって、次の解釈①, ②が成り立つ:

- ① $[|\varphi < k >, \eta < k >|]^2$ はパターン $\varphi < k >$ 内の、 $\eta < k >$ に平行な成分の大きさを与え、 $\varphi < k >, \eta < k >$ 間の類似性(同相性, 平行性)の程度を与える。
- ② $|\varphi < k > \otimes \eta < k >|^2$ は $\eta < k >$ に直交する成分の大きさを与え、 $\varphi < k >, \eta < k >$ 間の相違性(異相性, 直交性)の程度を与える。 □

3.4.8 パターン $\varphi < k >$ の直交・直和分解性

付録Oの定理01によれば,

$$\varphi' < k > \equiv \frac{1}{|\eta < k >, \eta < k >|} \cdot \eta < k > \cdot |\varphi < k >, \eta < k >| \quad (3.68)$$

$$\varphi'' < k > \equiv \frac{1}{|\eta < k >, \eta < k >|} \cdot \eta < k > \otimes (\varphi < k > \otimes \eta < k >) \quad (3.69)$$

とおけば、パターン $\varphi < k >$ の直交・直和分解

$$\varphi < k > = \varphi' < k > + \varphi'' < k > \quad (3.70)$$

が成り立つ、ここに,

$$(\text{同相性, 平行性}) [|\varphi' < k >, \eta < k >|] = |\varphi < k >, \eta < k >| \quad (3.71)$$

$$(\text{異相性, 直交性}) [|\varphi'' < k >, \eta < k >|] = 0 \quad (3.72)$$

が成り立っている。 $\varphi < k >$ 内の2成分 $\varphi' < k >, \varphi'' < k >$ は各々、 $\eta < k >$ に平行な成分、 $\eta < k >$ に垂直な成分($\eta < k >$ に直交する成分)である。 □

4. 4つの情報容量 $C_1(\varphi < k > : \eta < k >), C_2(\varphi < k > : \eta < k >), C_1(\varphi : \eta), C_2(\varphi : \eta)$

本章では、4つの情報容量 $C_1(\varphi < k > : \eta < k >), C_2(\varphi < k > : \eta < k >), C_1(\varphi : \eta), C_2(\varphi : \eta)$ を定義し、その意味を検討する。

4.1 各 $\varphi < k > (k=1, 2, \dots, n)$ の直和直交分解

付録Tの定理T1を適用すれば、ヒルベルト空間 $R^3 < k >$ で適用すれば,

$$\varphi_{\eta} < k > \equiv \frac{|\varphi < k >, \eta < k >|}{|\eta < k >, \eta < k >|} \cdot \eta < k > \quad (4.1)$$

は、 $\varphi < k >$ の内に含まれる最大の $\eta < k >$ 成分である。また,

$$\varphi_{-\eta} < k > \equiv \varphi < k > - \frac{|\varphi < k >, \eta < k >|}{|\eta < k >, \eta < k >|} \cdot \eta < k > \quad (4.2)$$

はこの最大の $\eta < k >$ 成分 $\varphi_{\eta} < k >$ をから取り除いて得られる成分である。

直交性

$$[\varphi_\eta \langle k \rangle, \varphi_{-\eta} \langle k \rangle] = 0 \tag{4.3}$$

が成り立っているが、それ故、各 $\varphi \langle k \rangle (k=1,2,\dots,n)$ の直和分解

$$\varphi \langle k \rangle = \varphi_\eta \langle k \rangle + \varphi_{-\eta} \langle k \rangle, k=1,2,\dots,n \tag{4.4}$$

は直交分解である。

4.2 4つの包含情報量 $C_1(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle), C_2(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle), C_1(\varphi : \eta), C_2(\varphi : \eta)$ の定義

まず、 $C_1(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle), C_2(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle)$ を

$$C_1(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle) \equiv \log_e \frac{|\varphi \langle k \rangle|}{|\varphi_{-\eta} \langle k \rangle|} \tag{4.5}$$

$$C_2(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle) \equiv \log_e \frac{|\varphi \langle k \rangle|}{|\varphi_\eta \langle k \rangle|} \tag{4.6}$$

と定義する。 $C_1(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle), C_2(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle)$ は各々、パターン $\varphi \langle k \rangle$ の中にパターン $\eta \langle k \rangle$ が含まれている程度、含まれていない程度を表す情報量(包含情報量)である。次に、 $C_1(\varphi : \eta), C_2(\varphi : \eta)$ を

$$C_1(\varphi : \eta) \equiv \sum_{k=1}^n C_1(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle) \tag{4.7}$$

$$C_2(\varphi : \eta) \equiv \sum_{k=1}^n C_2(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle) \tag{4.8}$$

と定義する。 $C_1(\varphi : \eta), C_2(\varphi : \eta)$ は各々、式(1.15)のパターン $\varphi = \sum_{k=1}^n \varphi \langle k \rangle + \varphi_\perp$ の中にパターン $\eta = \sum_{k=1}^n \eta \langle k \rangle + \eta_\perp$ が含まれている程度、含まれていない程度を表す情報量である。

4.3 $C_1(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle), C_2(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle), C_1(\varphi : \eta), C_2(\varphi : \eta)$ の再表現

式(3.15)の2つの3次元実数ベクトル \vec{c}_k, \vec{d}_k に注目する。 \vec{c}_k から \vec{d}_k へ向かう間の角を $(0 \leq \theta_k \leq \pi)$ とすると(式(3.18)を参照)、付録Sの定理S1を適用すれば、

$$C_1(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle) = \log_e \frac{1}{\sin \theta_k} \tag{4.9}$$

$$C_2(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle) = \log_e \frac{1}{|\cos \theta_k|} \tag{4.10}$$

が成り立つ。2式(4.9), (4.10)の $C_1(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle), C_2(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle)$ は、 \mathfrak{H} を内積 $[\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle]$, ノルム $|\varphi \langle k \rangle|$ を持つ3次元ヒルベルト空間 $R^3 \langle k \rangle$ にとれば、2式(S.5), (S.6)からわかるように、各々、 $C'(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle), C''(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle)$ に一致することがわかる。また、2式(4.14), (U.11)からわかるように、式(4.9)の $C_1(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle)$ は、 \mathfrak{H} を $R^3 \langle k \rangle$ にとり、式(U.11)の $I(T\varphi, T\phi)$ において、 $T\varphi, T\phi$ の代りに各々、 φ, ϕ を考えた

$$I(\varphi, \phi) \equiv -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \frac{(\varphi, \phi)^2}{\|\varphi\| \cdot \|\phi\|} \right]$$

に注目すれば、包含情報量 $I(\varphi \langle k \rangle : \eta \langle k \rangle)$ に一致する量である。

付録Sの定理S1の系1を適用すれば、等式

$$\exp[-2 \cdot C_1(\varphi < k > : \eta < k >)] + \exp[-2 \cdot C_2(\varphi < k > : \eta < k >)] = 1 \quad (4.11)$$

が成り立つ。また、 $C_1(\varphi : \eta), C_2(\varphi : \eta)$ は4式(4.7)～(4.10)より、

$$C_1(\varphi : \eta) = \log_e \frac{1}{\prod_{k=1}^n \sin \theta_k} \quad (4.12)$$

$$C_2(\varphi : \eta) = \log_e \frac{1}{\prod_{k=1}^n |\cos \theta_k|} \quad (4.13)$$

と再表現される。付録Sの系2より、 $C_1(\varphi < k > : \eta < k >), C_2(\varphi < k > : \eta < k >)$ は、具体的に

$$C_1(\varphi < k > : \eta < k >) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \frac{|\varphi < k >, \eta < k >|}{|\varphi < k >| \cdot |\eta < k >|} \right]^2 \quad (4.14)$$

$$C_2(\varphi < k > : \eta < k >) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left| \frac{|\varphi < k >, \eta < k >|}{|\varphi < k >| \cdot |\eta < k >|} \right|^2 \quad (4.15)$$

と再表現される。 $C_1(\varphi < k > : \eta < k >), C_2(\varphi < k > : \eta < k >)$ の代わりに、 φ, η の代わりにそのモデル $T\varphi, T\eta$ を考えた包含情報量

$$C_1((T\varphi) < k > : (T\eta) < k >) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \frac{|[(T\varphi) < k >, (T\eta) < k >]|}{|(T\varphi) < k >| \cdot |(T\eta) < k >|} \right]^2 \quad (4.16)$$

$$C_2((T\varphi) < k > : (T\eta) < k >) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left| \frac{|[(T\varphi) < k >, (T\eta) < k >]|}{|(T\varphi) < k >| \cdot |(T\eta) < k >|} \right|^2 \quad (4.17)$$

が用いられることになる。

4.4 情報容量 $C_1(\varphi < k > : \eta < k >)$ の、規格化内積の絶対値 $\frac{|\varphi < k >, \eta < k >|}{|\varphi < k >| \cdot |\eta < k >|}$ による級数展開

定義域 $|x| < 1$ での、関数 $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e(1-x)$ の展開式

$$-\frac{1}{2} \cdot \log_e(1-x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{for } |x| < 1 \quad (4.18)$$

を使えば、

$$\begin{aligned} C_1(\varphi < k > : \eta < k >) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left| \frac{|\varphi < k >, \eta < k >|}{|\varphi < k >| \cdot |\eta < k >|} \right|^{2n} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left| \frac{|\varphi < k >, \eta < k >|}{|\varphi < k >| \cdot |\eta < k >|} \right|^2 + \left| \frac{|\varphi < k >, \eta < k >|}{|\varphi < k >| \cdot |\eta < k >|} \right|^4 + \left| \frac{|\varphi < k >, \eta < k >|}{|\varphi < k >| \cdot |\eta < k >|} \right|^6 + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

と展開される。

4.5 情報容量 $C_1(\varphi < k > : \eta < k >)$ の関数としての、規格化内積の絶対値 $\frac{|\varphi < k >, \eta < k >|}{|\varphi < k >| \cdot |\eta < k >|}$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot \log_e(1-x^2) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x = \sqrt{1 - \exp[-2y]} \leq 1, y \geq 0 \quad (4.20)$$

が成り立っているから、

$$\frac{|\langle \varphi < k \rangle, \eta < k \rangle|}{|\langle \varphi < k \rangle \rangle \cdot |\langle \eta < k \rangle|} = \sqrt{1 - \exp[-2 \cdot C_1(\langle \varphi < k \rangle; \eta < k \rangle)]} \quad (4.21)$$

が成り立つ。

4.6 $\langle \varphi < k \rangle$ を $\langle \eta < k \rangle$ の a 倍 (定数倍) で近似するとき、その誤差のノルムの自乗 $g(a) \equiv |\langle \varphi < k \rangle - a \cdot \langle \eta < k \rangle|^2$ の、助変数 a を変えたときの最小値は外積のノルムの自乗 $|\langle \varphi < k \rangle \otimes \langle \eta < k \rangle|^2$ の定数 ($= \frac{1}{|\langle \eta < k \rangle, \eta < k \rangle|}$) 倍である

実数値変数 a の非負関数

$$g(a) \equiv |\langle \varphi < k \rangle - a \cdot \langle \eta < k \rangle|^2 \quad (4.22)$$

は

$$a = \frac{|\langle \varphi < k \rangle, \eta < k \rangle|}{|\langle \eta < k \rangle, \eta < k \rangle|} \quad (4.23)$$

のとき、最小値

$$\begin{aligned} & \frac{|\langle \varphi < k \rangle|^2 \cdot |\langle \eta < k \rangle|^2 - [|\langle \varphi < k \rangle, \eta < k \rangle|]^2}{|\langle \eta < k \rangle|^2} \\ &= \frac{|\langle \varphi < k \rangle \otimes \langle \eta < k \rangle|^2}{|\langle \eta < k \rangle, \eta < k \rangle|} \quad \because \text{式(3.19)} \end{aligned} \quad (4.24)$$

を持つ(付録Iの補助定理T1)。

よって、実数値変数 a_j の非負関数

$$h_j(a_j) \equiv |(T\varphi) \langle k \rangle - a_j \cdot (T\omega_j) \langle k \rangle|^2 \quad (4.25)$$

は

$$a_j = \frac{|(T\varphi) \langle k \rangle, (T\omega_j) \langle k \rangle|}{|(T\omega_j) \langle k \rangle, (T\omega_j) \langle k \rangle|} \quad (4.26)$$

のとき、最小値

$$\begin{aligned} & \frac{|(T\varphi) \langle k \rangle|^2 \cdot |(T\omega_j) \langle k \rangle|^2 - [|(T\varphi) \langle k \rangle, (T\omega_j) \langle k \rangle|]^2}{|(T\omega_j) \langle k \rangle|^2} \\ &= \frac{|(T\varphi) \langle k \rangle \otimes (T\omega_j) \langle k \rangle|^2}{|(T\omega_j) \langle k \rangle, (T\omega_j) \langle k \rangle|} \end{aligned} \quad (4.27)$$

を持つ。

5. 想起作用素の各種構成

本章では、直交・直和分解定理の応用として、各種の想起方法を研究しよう。

5.1 パターンモデル $(T\varphi)\langle k \rangle$ の、内積・外積を用いた直交・直和分解

次の定理5.1は、式(1.18)のパターン η に注目し、パターン $\varphi \in \Phi$ のパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ が、 $\eta \langle k \rangle$ に平行な成分 $(T\varphi)'\langle k \rangle$ と、 $\eta \langle k \rangle$ に垂直な成分 $(T\varphi)''\langle k \rangle$ の和に直交分解され得ることを指摘したものである。

[定理5.1] (パターンモデル $(T\varphi)\langle k \rangle$ の、内積・外積を用いた直交・直和分解定理)

$$(T\varphi)'\langle k \rangle \equiv \frac{1}{[\eta \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle]} \cdot \eta \langle k \rangle \cdot [(T\varphi)\langle k \rangle, \eta \langle k \rangle] \quad (5.1)$$

$$(T\varphi)''\langle k \rangle \equiv \frac{1}{[\eta \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle]} \cdot \eta \langle k \rangle \otimes \{(T\varphi)\langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle\} \quad (5.2)$$

とおけば、次の4性質①、②、③、④が成り立つ：

①(直和分解性)

$$(T\varphi)\langle k \rangle = (T\varphi)'\langle k \rangle + (T\varphi)''\langle k \rangle \quad (5.3)$$

つまり、 $(T\varphi)\langle k \rangle$ は、2つの直和成分 $(T\varphi)'\langle k \rangle$ 、 $(T\varphi)''\langle k \rangle$ に分解できる。

②($\eta \langle k \rangle$ に平行(同相)な成分の抽出)

$$[(T\varphi)'\langle k \rangle, \eta \langle k \rangle] = [(T\varphi)\langle k \rangle, \eta \langle k \rangle] \quad (5.4)$$

つまり、 $\eta \langle k \rangle$ に平行な、 $(T\varphi)\langle k \rangle$ の成分が $(T\varphi)'\langle k \rangle$ である。

③($\eta \langle k \rangle$ に垂直(異相)な成分の抽出)

$$[(T\varphi)''\langle k \rangle, \eta \langle k \rangle] = 0 \quad (5.5)$$

つまり、 $\eta \langle k \rangle$ に垂直な、 $(T\varphi)\langle k \rangle$ の成分が $(T\varphi)''\langle k \rangle$ である。

④(直交分解性)

$$[(T\varphi)'\langle k \rangle, (T\varphi)''\langle k \rangle] = 0 \quad (5.6)$$

つまり、 $(T\varphi)\langle k \rangle$ の直和成分 $(T\varphi)'\langle k \rangle$ は、 $(T\varphi)\langle k \rangle$ の直和成分 $(T\varphi)''\langle k \rangle$ に直交する。

(証明) 付録Oの定理O1において、パターン $\varphi \in \Phi$ の代りにそのパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ を考えたものである。□

5.2 同種想起1

まず、次の同種想起を提案する。

$(T\varphi)\langle k \rangle$ を探り針(probe)として、1つのパターンモデル $(T\omega_j)\langle k \rangle$ に平行な成分

$$(T\omega_j)\langle k \rangle \cdot [(T\varphi)\langle k \rangle, (T\omega_j)\langle k \rangle] \\ : (T\omega_j)\langle k \rangle \text{ の定数 } (= [(T\varphi)\langle k \rangle, (T\omega_j)\langle k \rangle] \text{ 倍成分}) \quad (5.7)$$

を想起(検索)すること(同種想起)を考えよう。ここに、定数 $[(T\varphi)\langle k \rangle, (T\omega_j)\langle k \rangle]$ は、 $(T\varphi)\langle k \rangle$ が $(T\omega_j)\langle k \rangle$ と相関のある程度を表していることに注意する。

まず、定理5.1からわかるように、パターン $\varphi \in \Phi$ の代りにそのパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ を考え、パターン $\eta \in \Phi$ の代りにパターンモデル $T\omega_j \in \Phi$ を考えると、直交分解式

$$\forall k, (T\varphi)\langle k \rangle =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[T\omega_j \langle k \rangle, (T\omega_j) \langle k \rangle]} \cdot (T\omega_j) \langle k \rangle \{ (T\varphi) \langle k \rangle, (T\omega_j) \langle k \rangle \} \\ & + \frac{1}{[T\omega_j \langle k \rangle, (T\omega_j) \langle k \rangle]} \cdot (T\omega_j) \langle k \rangle \otimes \{ (T\varphi) \langle k \rangle \otimes (T\omega_j) \langle k \rangle \} \end{aligned} \quad (5.8)$$

が成り立ち、この直交分解式(5.8)の前半の成分

$$(T\varphi)' \langle k, j \rangle \equiv \frac{1}{[T\omega_j \langle k \rangle, (T\omega_j) \langle k \rangle]} \cdot (T\omega_j) \langle k \rangle \{ (T\varphi) \langle k \rangle, (T\omega_j) \langle k \rangle \} \quad (5.9)$$

は、 $(T\varphi) \langle k \rangle$ 内の、 $(T\omega_j) \langle k \rangle$ に平行な(同相な)成分である。

この成分 $(T\varphi)' \langle k, j \rangle$ を $k(=1 \sim n)$ にわたり総和して、作用素 A'_j が

$$A'_j \varphi \equiv \sum_{k=1}^n \frac{1}{[T\omega_j \langle k \rangle, (T\omega_j) \langle k \rangle]} \cdot (T\omega_j) \langle k \rangle \{ (T\varphi) \langle k \rangle, (T\omega_j) \langle k \rangle \} \quad (5.10)$$

$$= \sum_{k=1}^n (T\varphi)' \langle k, j \rangle \quad (5.11)$$

という具合に定義される。そうすると、カテゴリ番号集合 J のすべての部分集合

$$\gamma \in 2^J \text{ (カテゴリ番号集合 } J \text{ のすべての部分集合を要素とする集合)} \quad (5.12)$$

を助変数とする作用素 $A'(\gamma)$ が、式(5.10)の A'_j の、 $(j \in \gamma) \in 2^J$ にわたる総和として、

$$A'(\gamma)\varphi \equiv \sum_{j \in \gamma} A'_j \varphi, \varphi \in \Phi \quad (5.13)$$

という具合に、定義される。パターン φ の変換過程

$$\varphi \rightarrow TA'(\gamma)T(\varphi) \equiv T[A'(\gamma)\{(T\varphi)\}] \quad (5.14)$$

が、 φ を探り針 (probe) として、 $T\omega_j$ に平行している $(T\omega_j)$ に似ており、 $T\omega_j$ と同質な) パターン $(T\varphi)' \langle k, j \rangle$ を想起した結果の、 $k=1 \sim n, j \in \gamma$ にわたり総和したパターンのモデルである。

ここで、直交分解式(5.8)の後半の成分

$$(T\varphi)'' \langle k, j \rangle \equiv \frac{1}{[T\omega_j \langle k \rangle, (T\omega_j) \langle k \rangle]} \cdot (T\omega_j) \langle k \rangle \otimes \{ (T\varphi) \langle k \rangle \otimes (T\omega_j) \langle k \rangle \} \quad (5.15)$$

をも導入し、定理5.1を適用すると、以下が成り立つ：

平行性

$$[(T\varphi)' \langle k, j \rangle, (T\omega_j) \langle k \rangle] = [(T\varphi) \langle k \rangle, (T\omega_j) \langle k \rangle] \quad (5.16)$$

と、直交性

$$[(T\varphi)'' \langle k, j \rangle, (T\omega_j) \langle k \rangle] = 0 \quad (5.17)$$

が成り立ち、 $(T\varphi) \langle k \rangle$ の直交・直交分解

$$(T\varphi) \langle k \rangle = (T\varphi)' \langle k, j \rangle + (T\varphi)'' \langle k, j \rangle \quad (5.18)$$

が成り立つ。ここに、 $(T\varphi) \langle k \rangle$ の2成分の直交性

$$[(T\varphi)' \langle k, j \rangle, (T\varphi)'' \langle k, j \rangle] = 0 \quad (5.19)$$

が成り立っている。

5.3 多段階想起変換

予め、十分小さい正数 ε を決めておく。パターン φ の、式(5.14)の変換過程が安定した結果

$$\exists j \in \gamma, |TA'(\gamma)T(\varphi) - (T\omega_j)| < \varepsilon \quad (5.20)$$

をもたらすことが望ましい．この場合， φ を探り針として，ある $T\omega_j$ に平行している($T\omega_j$ に似ており， $T\omega_j$ と同質な)パターン(同種パターン)を想起することが成功したことになる．

もし，安定した結果式(5.20)をもたらさない時には，次の多段階パターン想起変換を考える必要がある：

$$\begin{aligned} \varphi \rightarrow \varphi_0 &\equiv T\varphi \rightarrow \varphi_1 \equiv TA'(\gamma)T\varphi_0 \rightarrow \varphi_2 \equiv TA'(\gamma)T\varphi_1 \rightarrow \varphi_3 \equiv TA'(\gamma)T\varphi_2 \\ &\rightarrow \varphi_{t+1} \equiv TA'(\gamma)T\varphi_t \end{aligned} \quad (5.21)$$

□

ここに，予め，決めておいた十分小さい正数 ε' について，式(5.21)の多段階パターン想起変換過程における最終想起段階番号($1 \leq t$)は，不動点方程式

$$|\varphi_{t+1} - \varphi_t| < \varepsilon' \quad (5.22)$$

を満たしていなければならない．もし，不動点方程式(5.22)を満たすが，

$$\exists j \in \gamma, |\varphi_t - T\omega_j| < \varepsilon \quad (5.23)$$

を満たさなければ， φ を探り針として，ある $T\omega_j$ に同種なパターンを想起することが失敗したことになる．

5.4 異種想起1

次に，簡単な異種想起を提案する．

先ず，同種想起式(5.10)の $A'_j\varphi$ 内の式(5.9)の，想起される成分 $(T\varphi)' < k; j >$ は， $(T\varphi) < k >$ の直交・直交分解式(5.18)からわかるように， $(T\varphi) < k >$ に潜む $(T\omega_j) < k >$ に平行な最大の成分であることに注意する．

$(T\varphi) < k >$ を探り針として，1つのパターンモデル $(T\omega_j) < k >$ に直交する式(5.15)の成分 $(T\varphi)'' < k; j >$ を想起(検索)することを考えよう．想起されるべき内容 $(T\varphi)'' < k; j >$ は，直交式(5.17)からわかるように， $(T\omega_j) < k >$ に直交しているから， $(T\omega_j) < k >$ に異種の内容である．然も， $(T\varphi) < k >$ の直交・直交分解式(5.18)からわかるように，想起されるべき内容 $(T\varphi)'' < k; j >$ は， $(T\varphi) < k >$ に潜む $(T\omega_j) < k >$ に直交する最大の成分である．

式(5.11)の $A'_j\varphi$ ，式(5.13)の $A'(\gamma)\varphi$ に対応して，理想的には，つまり，上首尾に想起された場合には， $(T\varphi) < k >$ 内の， $(T\omega_j) < k >$ に垂直な最大の成分 $(T\varphi)'' < k; j >$ が想起されるために，2つの作用素

$$A''_j\varphi \equiv \sum_{k=1}^n (T\varphi)'' < k; j >, \varphi \in \Phi \quad (5.24)$$

$$A''(\gamma)\varphi \equiv \sum_{j \in \gamma} A''_j\varphi, \varphi \in \Phi \quad (5.25)$$

を考えよう．パターン φ の，式(5.14)の変換過程に対応して，変換過程

$$\varphi \rightarrow TA''(\gamma)T(\varphi) \equiv T[A''(\gamma)\{T(\varphi)\}] \quad (5.26)$$

を導入すれば，この過程は， φ を探り針として， $T\omega_j$ に垂直な($T\omega_j$ に相違しており， $T\omega_j$ と異質な)パターン $(T\varphi)'' < k; j >$ を想起した結果の， $k=1 \sim n, j \in \gamma$ にわたり総和したパターンである．

次の定理5.2は，同種想起結果 $A'(\gamma)\varphi$ ，異種想起結果 $A''(\gamma)\varphi$ の和が，パターンモデルから直交雑音を取り除いて得られる $T\varphi - (T\varphi)_\perp$ の定数倍になることを明らかにしたものである．

[定理5.2] (直交・直和分解定理1)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \gamma \in 2^J,$$

$$\exists(T\varphi)_\perp, \forall \ell \in \{1, 2, \dots, 3n\}, [(T\varphi)_\perp, \phi_\ell] = 0 \quad (5.27)$$

$$\text{such that } T\varphi - (T\varphi)_\perp = \frac{1}{|\gamma|} \cdot [A'(\gamma)\varphi + A''(\gamma)\varphi] \quad (5.28)$$

(証明)

$$\forall j \in J, A'_j\varphi + A''_j\varphi = \sum_{k=1}^n (T\varphi) \langle k \rangle \quad \because \text{式(5.18)} \quad (5.29)$$

$$= T\varphi - (T\varphi)_\perp \quad \because \text{式(1.15)} \quad (5.30)$$

$$\therefore A'(\gamma)\varphi + A''(\gamma)\varphi = |\gamma| \cdot T\varphi - |\gamma| \cdot (T\varphi)_\perp \quad (5.31)$$

□

式(5.20)の安定な同種想起結果に対応して、

$$\exists j \in \gamma, |[TA''(\gamma)T(T\varphi), T\omega_j]| < \varepsilon \quad (5.32)$$

が成立すれば、 $TA'(\gamma)T(T\varphi)$ は安定な異種想起結果である。

尚、式(5.20)の安定な同種想起結果の代わりに、

$$\exists j \in \gamma, |[TA'(\gamma)T(T\varphi), T\omega_j]| > |TA'(\gamma)T(T\varphi)| \cdot |T\omega_j| \cdot [1 - \varepsilon] \quad (5.33)$$

を採用できる。

式(5.32)が成立した場合、 φ を探り針として、ある $T\omega_j$ に垂直な($T\omega_j$ と異なっており、 $T\omega_j$ と異質な)パターン(異種パターン)を想起することが成功したことになる。

もし、安定した結果式(5.32)をもたらしなない時には、次の多段階パターン想起変換を考える必要がある：

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \varphi_0 \equiv T\varphi \rightarrow \varphi_1 \equiv TA''(\gamma)T\varphi_0 \rightarrow \varphi_2 \equiv TA'(\gamma)T\varphi_1 \rightarrow \varphi_3 \equiv TA''(\gamma)T\varphi_2 \\ &\rightarrow \varphi_{t+1} \equiv TA''(\gamma)T\varphi_t \rightarrow \varphi_{t+2} \equiv TA'(\gamma)T\varphi_{t+1} \end{aligned} \quad (5.34)$$

□

ここに、予め、決めておいた十分小さい正数 ε' について、式(5.34)の多段階パターン想起変換過程における奇数の最終想起段階番号($1 \leq t$)は、不動点方程式

$$|\varphi_{t+1} - \varphi_t| < \varepsilon' \quad (5.35)$$

を満たしていなければならない。もし、不動点方程式(5.35)を満たすが、

$$\exists j \in \gamma, [\varphi, T\omega_j] < \varepsilon \quad (5.36)$$

を満たさなければ、 φ を探り針として、ある $T\omega_j$ に異種のパターンを想起することが失敗したことになる。

5.5 異種想起2

式(5.10)の A'_j 、式(5.13)の $A'(\gamma)$ などを同種想起作用素、或いは同種検索作用素という。同様に、式(5.24)の A''_j 、式(5.25)の $A''(\gamma)$ などを同種想起作用素、或いは同種検索作用素という。

本節では、 $(T\varphi) \langle k \rangle$ を検索針として、2つのパターンモデル $(T\omega_i) \langle k \rangle$ 、 $(T\omega_j) \langle k \rangle$ の張る平面内にあり、且つ、直交関係

$$[A_i \langle k : i, j \rangle \varphi, \frac{(T\varphi) \langle k \rangle}{|(T\varphi) \langle k \rangle|}] = 0 \quad (5.37)$$

が成り立つという意味で、 $(T\varphi) \langle k \rangle$ にも垂直な成分 $A_i \langle k : i, j \rangle \varphi$ を想起してみよう。

$A_i \langle k : i, j \rangle \varphi$ は次のように表わされる：

$$A_1 \langle k : i, j \rangle \varphi \equiv \frac{(T\varphi) \langle k \rangle}{|(T\varphi) \langle k \rangle|} \otimes \left(\frac{(T\omega_i) \langle k \rangle}{|(T\omega_i) \langle k \rangle|} \otimes \frac{(T\omega_j) \langle k \rangle}{|(T\omega_j) \langle k \rangle|} \right) \quad (5.38)$$

$$= \left[\frac{(T\varphi) \langle k \rangle}{|(T\varphi) \langle k \rangle|}, \frac{(T\omega_j) \langle k \rangle}{|(T\omega_j) \langle k \rangle|} \right] \cdot \frac{(T\omega_i) \langle k \rangle}{|(T\omega_i) \langle k \rangle|} - \left[\frac{(T\varphi) \langle k \rangle}{|(T\varphi) \langle k \rangle|}, \frac{(T\omega_i) \langle k \rangle}{|(T\omega_i) \langle k \rangle|} \right] \cdot \frac{(T\omega_j) \langle k \rangle}{|(T\omega_j) \langle k \rangle|}$$

∴ 付録Nの定理N1

(5.39)

□

$$(1\#) \left[\frac{(T\varphi) \langle k \rangle}{|(T\varphi) \langle k \rangle|}, \frac{(T\omega_i) \langle k \rangle}{|(T\omega_i) \langle k \rangle|} \right] \rightarrow 0 \quad (5.40)$$

であれば，

$$A_1 \langle k : i, j \rangle \varphi \rightarrow \left[\frac{(T\varphi) \langle k \rangle}{|(T\varphi) \langle k \rangle|}, \frac{(T\omega_j) \langle k \rangle}{|(T\omega_j) \langle k \rangle|} \right] \cdot \frac{(T\omega_i) \langle k \rangle}{|(T\omega_i) \langle k \rangle|} \quad (5.41)$$

即ち，

パターン φ が ω_i に相違しており，かつ， ω_i に似ていれば， φ が入力された $A_1 \langle k : i, j \rangle$ は $\frac{(T\omega_i) \langle k \rangle}{|(T\omega_i) \langle k \rangle|}$ に近いパターンを想起するといえる。

$$(2\#) \left[\frac{(T\varphi) \langle k \rangle}{|(T\varphi) \langle k \rangle|}, \frac{(T\omega_j) \langle k \rangle}{|(T\omega_j) \langle k \rangle|} \right] \rightarrow 0 \quad (5.42)$$

であれば，

$$A_1 \langle k : i, j \rangle \varphi \rightarrow - \left[\frac{(T\varphi) \langle k \rangle}{|(T\varphi) \langle k \rangle|}, \frac{(T\omega_i) \langle k \rangle}{|(T\omega_i) \langle k \rangle|} \right] \cdot \frac{(T\omega_j) \langle k \rangle}{|(T\omega_j) \langle k \rangle|} \quad (5.43)$$

即ち，

パターン φ が ω_j に相違しており，かつ， ω_j に似ていれば， φ が入力された $A_1 \langle k : i, j \rangle$ は $-\frac{(T\omega_j) \langle k \rangle}{|(T\omega_j) \langle k \rangle|}$ に近いパターンを想起するといえる。 □

その後，2つの異種想起作用素 $A_1 \langle i, j \rangle \varphi$ ， $A_1(\gamma, \mu)\varphi$ を

$$A_1 \langle i, j \rangle \varphi \equiv \sum_{k=1}^n A_1 \langle k : i, j \rangle \varphi \quad (5.44)$$

$$A_1(\gamma, \mu)\varphi \equiv \sum_{i \in \gamma} \sum_{j \in \mu} A_1 \langle i, j \rangle \varphi \quad (5.45)$$

と定義する。

上記の(1#)からわかるように，

パターン φ に相違している複数個の $\omega_\ell (\ell \in \gamma)$ の内， φ に極めて相違している唯一つの $\omega_i (i \in \gamma)$ があり，かつ， φ に極めて似ている唯一つの $\omega_j (j \in \mu)$ があれば， φ が入力された $A_1 \langle k : i, j \rangle$ は $\frac{(T\omega_i) \langle k \rangle}{|(T\omega_i) \langle k \rangle|}$ に近いパターンを想起し，よって，

$$A_1 \langle i, j \rangle \varphi \approx \sum_{k=1}^n \frac{(T\omega_i) \langle k \rangle}{|(T\omega_i) \langle k \rangle|} \quad (5.46)$$

を得， $A_1 \langle \gamma, \mu \rangle$ は

$$A_1 \langle \gamma, \mu \rangle \varphi \approx A_1 \langle i, j \rangle \varphi \approx \sum_{k=1}^n \frac{(T\omega_i) \langle k \rangle}{|(T\omega_i) \langle k \rangle|} \quad (5.47)$$

という具合に,

$$\sum_{k=1}^n \frac{(T\omega_i) \langle k \rangle}{|(T\omega_i) \langle k \rangle|} = \frac{1}{|T\omega_i|} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{|T\omega_i|}{|(T\omega_i) \langle k \rangle|} \cdot (T\omega_i) \langle k \rangle \quad (5.48)$$

に近いパターンを想起するといえる. 3式(1.12), (1.15), (3.5)から,

$$T\omega_i = \sum_{k=1}^n (T\omega_i) \langle k \rangle + (T\omega_i)_\perp \quad \text{such that } \forall \ell \in \{1, 2, \dots, 3n\}, [(T\varphi)_\perp, \phi_\ell] = 0 \quad (5.49)$$

が成立していることに注意しておく.

5.6 異種想起3

$(T\varphi) \langle k \rangle$ を検索針として, 2つのパターンモデル $(T\omega_i) \langle k \rangle$, パターンモデル $(T\omega_j) \langle k \rangle$ の張る平面に

$$[A_2 \langle k : i, j \rangle, (T\omega_i) \langle k \rangle] = 0 \quad (5.50)$$

$$[A_2 \langle k : i, j \rangle, (T\omega_j) \langle k \rangle] = 0 \quad (5.51)$$

という具合に, 直交する成分 $A_2 \langle k : i, j \rangle \varphi$ を想起することを考えよう.

2式(3.47), (3.48)を適用して, パターン φ が入力された異種想起作用素からの出力 $A_2 \langle k : i, j \rangle \varphi$ を

$$\begin{aligned} & A_2 \langle k : i, j \rangle \varphi \\ & \equiv \frac{1}{|(T\omega_i) \langle k \rangle \otimes (T\omega_j) \langle k \rangle|^2} \cdot ((T\omega_i) \langle k \rangle \otimes (T\omega_j) \langle k \rangle) \cdot \\ & \quad [(T\varphi) \langle k \rangle, (T\omega_i) \langle k \rangle \otimes (T\omega_j) \langle k \rangle] \end{aligned} \quad (5.52)$$

と定義する. $A_2 \langle k : i, j \rangle \varphi$ は2つのパターンモデル $(T\omega_i) \langle k \rangle, (T\omega_j) \langle k \rangle$ に異種のパターンを想起する機能を備えている.

2つの異種想起作用素 $A_2 \langle i, j \rangle \varphi$, $A_2(\gamma, \mu)\varphi$ を,

$$A_2 \langle i, j \rangle \varphi \equiv \sum_{k=1}^n A_2 \langle k : i, j \rangle \varphi \quad (5.53)$$

$$A_2(\gamma, \mu)\varphi \equiv \sum_{i \in \gamma} \sum_{j \in \mu} A_2 \langle i, j \rangle \varphi \quad (5.54)$$

と定義する.

不等式

$$\begin{aligned} & \forall p \in \gamma - \{i\}, \forall q \in \mu - \{j\} \quad |[(T\varphi) \langle k \rangle, (T\omega_p) \langle k \rangle \otimes (T\omega_q) \langle k \rangle]| \\ & \ll [(T\varphi) \langle k \rangle, (T\omega_i) \langle k \rangle \otimes (T\omega_j) \langle k \rangle] \end{aligned} \quad (5.56)$$

を満たす2つのカテゴリ番号 $i \in \gamma, j \in \mu$ が存在すれば,

$$A_2(\gamma, \mu)\varphi \approx A_2 \langle k : i, j \rangle \varphi \quad (5.57)$$

が成り立つ.

6. パターン認識法と、情報容量を用いたaxiom 2を満たす類似度関数 SM の構成

本章では、簡単な単段階パターン認識法が説明され、その後、単段階パターン認識法を改良した多段階パターン認識法を採用している、S.Suzuki のパターン認識システム RECOGNITRON = $\langle \Phi_b, T, SM, BSC \rangle$ が説明される。最後に、1つのカテゴリに複数個の代表パターンがある場合の、axiom 2を満たす類似度関数 SM を、4式(4.16), (4.17), (4.7), (4.8)の情報容量を大局化して用い、構成する。

6.1 簡単な単段階パターン認識法

6.1.1 認識方法1

認識方法1として、簡単な単段階類似度法としては、次の単段階相関法がある：

$$-1 \leq \cos \theta(i) = \frac{[T\varphi, T\omega_i]}{|T\varphi| \cdot |T\omega_i|} \leq +1, i \in J \quad (6.1)$$

の内、最も大きいカテゴリ番号 $j \in J$ を選んで、

$$\text{パターン } \varphi \text{ は第 } j \in J \text{ 番目のカテゴリ } \mathfrak{C}_j \text{ に帰属する} \quad (6.2)$$

と認識する。ここに、 $(0 \leq) \theta(i) (\leq \pi)$ は $T\varphi$ から $T\omega_i$ へ向う間の角である。このとき、単段階パターン変換過程

$$(\varphi \rightarrow) T\varphi \rightarrow T\omega_j \quad (6.3)$$

が生じていると考えられ、パターン φ は第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j の代表パターン ω_j のモデル $T\omega_j$ に再生されると考えられる。□

6.1.2 認識方法2

次に、認識方法2として、次の単段階相違度法を説明しよう：

$$0 \leq \sin \theta(i) = \sqrt{1 - \left| \frac{[T\varphi, T\omega_i]}{|T\varphi| \cdot |T\omega_i|} \right|^2} \leq 1, i \in J \quad (6.4)$$

の内、最も小さいカテゴリ番号 $j \in J$ を選んで、式(6.2)の如く、認識する。このとき、単段階パターン変換過程式(6.3)が生じていると考えられ、パターン φ は第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j の代表パターン ω_j のモデル $T\omega_j$ に再生されると考えられる。□

等式

$$\cos^2 \theta(i) + \sin^2 \theta(i) = 1 \quad (6.5)$$

が成立している故に、認識法1, 2で決まる認識カテゴリ番号は一致し、同一認識性能をもたらすことになる。

6.1.3 認識方法3

最後に、認識方法3として、式(R1.13)の、axiom 2を満たす類似度関数 SM を用いた簡単な単段階認識法としての、最大類似度法を説明する：

$$0 \leq SM(\varphi, \omega_j) \leq +1, i \in J \quad (6.6)$$

の内、最も大きいカテゴリ番号 $j \in J$ を選んで、式(6.2)の如く、認識する。ここに、 $SM(\varphi, \omega_i)$ は φ が ω_i と似ている程度を計量した類似度である。

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall i \in J, SM(T\varphi, \omega_i) = SM(\varphi, \omega_i) \quad \because \text{axiom 2, (iii)} \quad (6.7)$$

が成立している。よって、このとき、これまで構成された式(R1.13)の、axiom 2を満たす類似度関数 SM については、式(Q.4)の全代表パターン集合 Ω についての T -不変性

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall i \in J, SM(\varphi, T\omega_i) = SM(\varphi, \omega_i) \quad (6.8)$$

が成立しているので、単段階パターン変換過程式(6.3)が生じていると考えられ、パターン φ は第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathcal{C}_j の代表パターン ω_j のモデル $T\omega_j$ に再生されると考えられる。□

以下、上述の最大類似度法に必要な式(R1.13)の類似度関数 SM を情報容量を使って構成する方法を研究する。その前に式(R1.13)の類似度関数 SM を使い多段階パターン変換過程を生成し認識を行う認識システムRECOGNITRONを次節で説明しておこう。RECOGNITRONは、実質、多段階(にわたり、各段階で最大類似度を生じさせようとする)最大類似度法を採用しているといえる。

6.2 axiom 2を満たす類似度関数 SM を用いた多段階認識法を採用した認識システム RECOGNITRON

付録Qでは、RECOGNITRONの説明がなされており、付録Rでは、RECOGNITRONの動作について更に詳細に説明されている。

式(Q.3)の T 、式(R1.13)の SM 、式(R1.14)の BSC を用いて、式(Q.2)のパターン集合 Φ を認識する式(Q.1)の

$$\text{RECOGNITRON} = \langle \Phi, T, SM, BSC \rangle \quad (6.9)$$

を構成する。

パターン $\phi_s (0 \leq s \leq t)$ の多段階変換過程式(R1.1)、或いは、このパターン変換過程(R1.1)を前半に持つカテゴリ帰属知識 $\langle \phi_s, \lambda_s \rangle (0 \leq s \leq t)$ の多段階変換過程式(R2.5)が、RECOGNITRONの認識過程である。6.1.3の単段階認識法としての、最大類似度法を多段階化したものである。

認識システムRECOGNITRONは、認識結果式(6.2)を得る形で、認識断定することができる。それのみならず、認識システムRECOGNITRONは、

$$\text{入力パターン } \varphi \text{ を整形し復元した結果は } T\omega_j \text{ である (連想・想起の結果)} \quad (6.10)$$

という具合に、連想断定することができる。この式(6.10)からは、認識システムRECOGNITRONは、

$$\text{入力パターン } \varphi \text{ に似ているパターンの集まりの表象は } T\omega_j \text{ である} \quad (6.11)$$

という帰納学習経験をした、ということが出来る。

認識システムRECOGNITRONは、連想形認識方程式(R2.4)の最小不動点解 $\langle \phi_s, \lambda_s \rangle$ を求める形式で、カテゴリ帰属知識の多段階変換過程式(R2.5)に示されているように、初期状態のカテゴリ帰属知識 $\langle T\varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$ を多段階にわたり次第に変換して行き、付録RのR1.5節での、通常(I#)の場合、最終的に $\langle T\omega_j, [j] \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$ に到達したとき、入力パターン $\varphi \in \Phi$ の連想形認識(多段階帰納推理によるパターン認識)が終了する。この通常(I#)の場合、RECOGNITRONは、

$$\text{入力パターン } \varphi \in \Phi \text{ は } T\omega_j \in \Phi \text{ に再生され、第 } j \in J \text{ 番目のカテゴリ } \mathcal{C}_j \text{ に帰属する} \quad (6.12)$$

という連想形認識結果(a result of associative recognition)を出力することになる。

6.3 複数個の代表パターンを用意しての、axiom 2を満たす類似度関数 SM の構成

全カテゴリ集合

$$\mathcal{C}(J) = \{ \mathcal{C}_j \mid j \in J \} \quad (6.13)$$

内の1つの各カテゴリ \mathcal{C}_j に複数個の代表パターンを用意し、式(6.9)のRECOGNITRON

$=\langle \Phi_B, T, SM, BSC \rangle$ 内の第2番目の構成要素である式(R1.13)の, axiom 2を満たす類似度関数 SM が4式(4.16), (4.17), (4.7), (4.8)の情報容量を用い, 構成される.

この際,

原パターン $\varphi \in \Phi$ の代りに, 原パターン φ と同じ感性を与えるそのパターンモデル $T\varphi$ を使って, このモデル $T\varphi$ と記憶しているパターン $\omega \in \Omega$ のモデル $T\omega$ との違いを測る

ことが重要である. 何故ならば, パターンモデル $T\varphi$ とは現実のパターン φ から個別的な変形を取り除き, φ を可能な限りの単純さで, 認識の働きが誤認識しないように写しとっているようなものであるからである.

1つのカテゴリに複数個の代表パターンがある場合に, axiom 2を満たす類似度関数 SM を構成するには:

本来の, 式(Q.4)の代表パターン集合 $\Omega = \{\omega_j | j \in J\}$ 内の第 $j \in J$ 番目の要素 ω_j は, 式(6.13)内の第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathbb{C}_j の持つ諸性質を典型的に備えている代表パターンである. ここで, 第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathbb{C}_j の代表パターン集合を

$$\Omega_j = \{\omega_{j_k} | k=1,2,\dots,n(j)\} \quad (6.14)$$

とする. 但し, 各 Ω_j ($j \in J$) は, 2性質

$$\forall j \in J, \omega_j \in \Omega_j \text{ (帰属性)} \quad (6.15)$$

$$\forall i \in J, \forall j \in J - \{i\}, \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \text{ (非交差性)}$$

を満たすものでなければならない.

分離条件

$$\forall i \in J, \forall j \in J - \{i\}, \min_{k=1,2,\dots,n(i)} \min_{\ell=1,2,\dots,n(j)} |T\omega_{i_k} - T\omega_{j_\ell}| > 0 \quad (6.16)$$

の下で, 2式(4.7), (4.14)の情報容量 $C_1(\varphi:\eta)$, $C_1(\varphi < k >:\eta < k >)$ を考慮し, 大局的な情報容量

$$C_1(\varphi:\eta)_{global} \equiv -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \frac{[\varphi, \eta]^2}{|\varphi| \cdot |\eta|} \right] \quad (6.17)$$

を定義した後,

$$s_j(\varphi) \equiv \max_{k=1,2,\dots,n(j)} C_1(T\varphi, T\omega_{j_k})_{global} \quad (6.18)$$

を定義する.

式(R1.13)の類似度関数 SM というものが満足しなければならない付録Iのaxiom 2 [B3], [B4] が S.Suzukiにより提案されている. このとき, 次の定理6.1が成り立ち, 情報容量 $C_1(\varphi:\eta)$ を使い, 複数個の代表パターンを用意した場合, axiom 2を満たす類似度関数 SM が構成されたことがわかる.

[定理6.1] (情報容量 $C_1(\varphi:\eta)$ を使い, 複数個の代表パターンを用意しての, axiom 2を満たす類似度関数 SM の構成定理)

分離条件式(6.16)の下で,

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} \frac{s_j(\varphi)}{\sum_{k \in J} s_k(\varphi)} \cdots \sum_{k \in J} s_k(\varphi) > 0 \text{ のとき} \\ p(\mathbb{C}_j) \cdots \sum_{k \in J} s_k(\varphi) = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (6.19)$$

と定義された式(R1.13)の関数 SM は上述の axiom 2 を満たす.

(証明) axiom 2, (i) の成立: 式(6.18)の $s_j(\varphi)(j \in J)$ は, 式(6.16)を考慮すれば,

$$0 \leq s_j(\omega_i) = \begin{cases} \infty \cdots i = j \text{ のとき} \\ < \infty \cdots i \neq j \text{ のとき} \end{cases} \quad (6.20)$$

が成り立ち, これから明らか.

axiom 2, (ii) の成立: SM の定義式(6.18)から明らか.

axiom 2, (iii) の成立: SS理論 [B3], [B4] の axiom 1, (iii) の後半 $T \cdot T = T$ より, 式(6.18)の $s_j(\varphi)(j \in J)$ につき,

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, s_j(T\varphi) = s_j(\varphi) \quad (6.21)$$

が成立することから, 明らか. □

6.4 axiom 2 を満たす類似度関数 SM の一般化構成1

前節の SM 構成法を一般化しよう.

R^+ を非負実数全体の集合とする.

2条件

$$(1\#) \text{ (0-不動点性, 非負性)} \forall s(0 < s < \infty), 0 = f_j(0) < f_j(s) < +\infty \quad (6.22)$$

$$(2\#) \text{ (発散性)} \lim_{s \rightarrow \infty} f_j(s) = +\infty \quad (6.23)$$

を満たす関数

$$f_j: R^+ \rightarrow R^+ \quad (6.24)$$

を用意する. 式(6.18)の $s_j(\varphi)$ の代りに,

$$s_j(\varphi) \equiv \max_{k=1,2,\dots,n(j)} f_j(C_1(T\varphi, T\omega_{jk}))_{global} \quad (6.25)$$

を採用しても, 定理6.1が成り立つことがわかる.

上述の2条件(1#), (2#) を満たす非負実数値変数 s の非負実数値関数 $f_j(s)$ として, 例えば,

$$(1\%) f_j(s) = a_j \cdot s^k, a_j > 0, k = 1, 2, \dots \quad (6.26)$$

$$(2\%) f_j(s) = a_j \cdot \{\exp[b_j \cdot s^k] - \exp[-b_j \cdot s^k]\}, a_j, b_j > 0, k = 1, 2, \dots \quad (6.27)$$

$$(3\%) f_j(s) = a_j \cdot \log_e[1 + b_j \cdot s^k], a_j, b_j > 0, k = 1, 2, \dots \quad (6.28)$$

がある.

6.5 パターン $\varphi \in \Phi$ が他のカテゴリ $\mathbb{C}_i, i \in J - \{j\}$ を表していなければならないほど, 着目しているカテゴリ \mathbb{C}_j を表している程度が大きくなる量 $\ell_j(\varphi)$ を用いた類似度関数 SM の構成

パターンが他のカテゴリを表していなければならないほど, そのパターンが自分のカテゴリを表していると想定するのは, axiom 2 を満たす類似度関数 SM の構成がたやすくなり, 魅力的である.

本節では, パターン $\varphi \in \Phi$ が他のカテゴリ $\mathbb{C}_i, i \in J - \{j\}$ を表していなければならないほど, 着目しているカテゴリ \mathbb{C}_j を表している程度が大きくなる量 $\ell_j(\varphi)$ を使って, 1つのカテゴリに複数個の代表パターンを用意した場合に, axiom 2 を満たす式(R1.13)の類似度関数 SM の1例が構成される.

分離条件式(6.16)の下で, 2式(4.8), (4.15)の情報容量 $C_2(\varphi:\eta)$, $C_2(\varphi < k > \eta < k >)$ を考慮し, 大局的な情報容量

$$C_2(\varphi:\eta)_{\text{global}} \equiv -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left| \frac{[\varphi, \eta]}{|\varphi| \cdot |\eta|} \right|^2 \quad (6.29)$$

を定義した後、

$$\ell_j(\varphi) \equiv \min_{i \in J - \{j\}} \min_{k=1-n_i} C_2(T\varphi: T\omega_k) \quad (6.30)$$

を導入する。

着目しているカテゴリ番号 $j \in J$ を固定すると、 $\ell_j(\varphi)$ は他のすべてのカテゴリ $\mathbb{C}_i, i \in J - \{j\}$ との相違性の程度の最小値を表しており、この相違の程度の最小値が、処理の対象とするパターン $\varphi \in \Phi$ が着目しているカテゴリ \mathbb{C}_j に帰属している程度と想定していることになる。他のカテゴリを表していなければならないほど、着目しているカテゴリを表している程度が大きくなると考えているわけである。

このとき、

$$\forall j \in J, \ell_j(\omega_j) > 0 \quad (6.31)$$

$$i \neq j \in J \Rightarrow \ell_j(\omega_i) = 0 \quad (6.32)$$

が成立する。各 $s_j(\varphi) (j \in J)$ を、

$$s_j(\varphi) \equiv \frac{\ell_j(\varphi)}{\ell_j(\omega_j)} \quad (6.33)$$

と定義する。

このとき、次の定理6.2が成立し、axiom 2を満たす式(R1.13)の類似度関数 SM が構成されたことがわかる。

[定理6.2] (類似度関数 SM の構成定理)

$$SM(\varphi, \omega_j) \equiv \begin{cases} \frac{s_j(\varphi)}{\sum_{k \in J} s_k(\varphi)} \cdots \sum_{k \in J} s_k(\varphi) > 0 \text{ のとき} \\ p(\mathbb{C}_j) \cdots \sum_{k \in J} s_k(\varphi) = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (6.34)$$

と定義される式(R1.13)の関数 SM は付録Iのaxiom 2を満たす。

(証明) axiom 2, (i)の成立：式(6.33)の $s_j(\varphi) (j \in J)$ は、2式(6.31), (6.32)から、

$$s_j(\omega_i) = \begin{cases} 1 \cdots i = j \text{ のとき} \\ 0 \cdots i \neq j \text{ のとき} \end{cases} \quad (6.35)$$

が成り立ち、これから明らか。

axiom 2, (ii)の成立： SM の定義式(6.34)から明らか。

axiom 2, (iii)の成立：axiom 1, (iii)の後半 $T \cdot T = T$ より、

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \ell_j(T\varphi) = \ell_j(\varphi) \quad (6.36)$$

が成立することから、明らか。□

6.6 axiom 2を満たす類似度関数 SM の一般化構成2

前節の SM 構成法を一般化しよう.

R^+ を非負実数全体の集合とする. 2条件

$$(1\&) \quad (0\text{-不動点性}) \quad \forall s(0 \leq s < 1), 0 = f_j(0) < f_j(s) < +\infty \quad (6.37)$$

$$(2\&) \quad (1\text{-不動点性}) \quad \lim_{s \rightarrow 1} f_j(s) = 1 \quad (6.38)$$

を満たす関数

$$f_j : \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \rightarrow R^+ \quad (6.39)$$

を用意する. 式(6.30)の $\ell_j(\varphi)$ の代わりに,

$$s_j(\varphi) \equiv f_j\left(\frac{\ell_j(\varphi)}{\ell_j(\omega_j)}\right) \quad (6.40)$$

を採用しても, 定理6.2が成り立つことがわかる.

上述の2条件(1&), (2&)を満たす非負実数値変数 s の非負実数値関数 $f_j(s)$ として, 例えば,

$$(1^*) \quad f_j(s) = s^k, k = 1, 2, \dots \quad (6.41)$$

$$(2^*) \quad f_j(s) = \frac{\exp(a_j \cdot s^k) - \exp(-a_j \cdot s^k)}{\exp(a_j) - \exp(-a_j)}, a_j > 0, k = 1, 2, \dots \quad (6.42)$$

$$(3^*) \quad f_j(s) = \frac{\log_e(1 + a_j \cdot s^k)}{\log_e(1 + a_j)}, a_j > 0, k = 1, 2, \dots \quad (6.43)$$

がある.

7. 結 び

パターンからパターンを想起できるようなこれまでの単段階のパターン想起システムは, パターンからこのパターンに似た(このパターンに平行する)パターンを内積演算で想起する同種パターン想起システムであって, パターンからこのパターンと異なっている(このパターンに直交する)パターンを外積演算で想起する異種パターン想起システムではなかった. 本論文では, パターンの表現空間が無次元空間であってもいい場合に, 2つのパターンを含む平面に直交する外積パターンを定義し, 異種パターン想起システムを構築できるための基礎を確立した. 本論文で提案された3つの異種パターン想起は人工知能学では発展途上にある発想推論に役立つことが期待される.

1つのパターンに今1つのパターンを蓄えることのできる, できない程度を2種類の情報量として計量した情報容量を新しく提案され, この種の情報容量を大局化したものを利用し, SS理論でのaxiom 2を満たすような, 式(Q.1)の万能性認識システム RECOGNITRON $\equiv \langle \Phi_B, T, SM, BSC \rangle$ の4構成成分の内の3番目の構成成分である類似度関数 SM を2種類, 構成できた.

パターンの, 4次元以上の表現空間では, 2つのパターンに直交するパターンの選び方には, 任意性があるので, 2つのパターン φ, η に直交するパターンを外積パターン $\varphi \otimes \eta$ と定義するのは難しい.

実ヒルベルト空間 \mathcal{H} の商空間(パターンの表現空間)を外積演算 $\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle$ が定義可能な3次元空間 $R^3 \langle k \rangle (k = 1, 2, \dots, n)$ の, 式(1.2)の直積 $R^{3n} \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \dots \langle n \rangle$ として表現しなおし, 本論文では,

$\varphi \otimes \eta \equiv \sum_{k=1}^n \varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle$ を定義し, この困難な問題を解決した.

2つのパターン φ, η について, 1次独立な系(基底) $\{\phi_k\}_{k \in L} = \{\phi_\ell\}_{\ell=1, 2, \dots, 3n}$ を用いて, 式(1.25)の

$\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle$ を用いて定義される式(1.26)の外積 $\phi \equiv \varphi \otimes \eta \equiv \sum_{k=1}^n \varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle$ に注目し, その基礎

としての外積の性質の解明と, その応用としての異種想起の構成論を展開したが, 外積演算 \otimes の

更なる諸性質の解明と，更なる応用の展開を行うことが望まれる。

尚，パターン $\varphi \in \mathfrak{S}$ の，1次独立な系(基底) $\{\phi_k\}_{k \in L} = \{\phi_\ell\}_{\ell=1,2,\dots,3n}$ を用いての，2式(3.3)，(3.4)による1次展開形式

$$\varphi = \sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \phi_\ell + \varphi_\perp$$

内の各1次結合係数 $c_\ell (\ell \in L)$ の求め方は，付録Bに説明されているが，

(1#) 添え字 ℓ の集合 L は3の倍数からなる集合 $\{1,2,3,4,\dots,3k-2,3k-1,3k,\dots,3n\}$ であること

(2#) $\{\phi_k\}_{k \in L}$ は必ずしも直交系である必要はないこと

に注意しておかねばならない。

文 献 A

- [A 1] 松島与三：多様体入門(数学選書5)，裳華房，May 1966
- [A 2] 青木利夫，高橋渉：集合・位相空間要論，培風館，Sept.1979
- [A 3] Angus E.Taylor , David C.Lay：Introduction to function analysis", John Wiley & Sons,Inc., 1980
- [A 4] Gilbert G.Walter：Wavelets and other orthogonal systems with applications,CRC Press, Inc., 1994
- [A 5] Luc Devroye,Lászlo Györfi and Gábor Lugosi：A probabilistic theory of pattern recognition , Springer-Verlag New York.Inc., 1996
- [A 6] E.クライツィグ：数値解析(原著第8版)，田村義保訳，近藤次郎・堀素夫監訳，培風館，Dec.2003
- [A 7] M.シュピッツァー：脳 回路網のなかの精神 ニューラルネットが描く精神，村井俊哉・山岸洋共訳，株式会社 新曜社，Nov.2001
- [A 8] 鳥脇純一郎：認識工学(一パターン認識とその応用一)，コロナ社(テレビジョン学会教科書シリーズ 9)，コロナ社，Mar.1993
- [A 9] 酒井幸市：デジタル画像処理入門，コロナ社，Aug.1998
- [A10] 太原育夫：人工知能の基礎知識(コンピュータサイエンス大学講座)，近代科学社，Sept.1988
- [A11] 美濃導彦，西田正吾：情報メディア工学(新世代工学シリーズ)，オーム社，June 1999
- [A12] 安西祐一郎：認識と学習(岩波講座ソフトウェア科学 16)，岩波書店，Dec.2000
- [A13] 安居院猛，長尾智晴：画像の処理と認識，昭晃堂，April.2000
- [A14] 今井聖：音声認識(情報・電子入門シリーズ⑩)，共立出版，Nov.1995
- [A15] 瀧保夫;通信方式(電気通信講座19)，コロナ社，電気通信学会編，June 1964
- [A16] 安西祐一郎：認知科学と人工知能(計算機科学/ソフトウェア技術講座17)，共立出版，p.17，Nov.1987
- [A17] 石井健一郎，上田修功，前田英作，村瀬洋：わかりやすいパターン認識，オーム社，2000
- [A18] 吉田耕作：近代解析，共立出版，Dec.1963
- [A19] スミルノフ：高等数学教程④II 卷第2分冊，福原満洲雄訳者代表，共立出版，Jun.1966
- [A20] C.K.Chow and S.S.M.Wang：Sequential classification of patient recovery patterns after coronary artery bypass graft surgery, Computers and Biomedical Research, vol.12, pp.589-613, 1979
- [A21] 福村晃夫：情報理論(情報工学講座3)，コロナ社，Jun.1970

- [A22] 津本周作, 平野章二, 高林克日己: ラフ集合に基づくアクティブマイニングによる診療情報生成システムの開発, 人工知能学会誌, vol.20, no.2, Mar.2005
- [A23] 石原繁, 竹村由也: 微分幾何, 森北出版, Apr.2004

文 献 B

- [B 1] 鈴木昇一: 認識工学, 柏書房, Feb.1975
- [B 2] 鈴木昇一: ニューラルネットの新数理, 近代文芸社, Sept.1996
- [B 3] 鈴木昇一: パターン認識問題の数理的一般解決, 近代文芸社, June 1997
- [B 4] 鈴木昇一: 認識知能情報論の新展開, 近代文芸社, Aug.1998
- [B 5] 鈴木昇一: パターンのエントロピーモデル, 電子情報通信学会論文誌(D-II), vol.J77-D-II, no.10, pp.2220-2238, Nov.1994
- [B 6] 鈴木昇一: 手書き漢字の側抑制効果的分解とその計算機シミュレーション, 情報処理学会誌, vol.15, no.12, pp.927-934, Dec.1974
- [B 7] 鈴木昇一: 画像情報量とその手書き漢字への応用, 画像電子学会誌, vol.4, no.1, pp.4-12, Apr.1975
- [B 8] 鈴木昇一: 抽出された特徴による手書き漢字構造の再生, 情報処理学会誌, vol.18, no.11, pp.1115-1122, Nov.1977
- [B 9] 鈴木昇一: 回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シミュレーション, 情報研究(文教大学・情報学部), no.4, pp.36-56, Dec.1983
- [B10] 鈴木昇一: 連想形記憶器MEMOTRONと日本語単独母音系列の再生に関する計算機シミュレーション, 情報研究(文教大学・情報学部), no.7, pp.14-29, Dec.1986
- [B11] 鈴木昇一, 中村三郎: 知識情報処理における帰納的推論, 情報研究(文教大学・情報学部), no.9, pp.173-196, Dec.1988
- [B12] 鈴木昇一: 多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション, 情報研究(文教大学・情報学部), no.10, pp.35-49, Dec.1989
- [B13] 鈴木昇一: 帰属係数法に基づく類似度, 帰属関係・あいまい度, 認識情報量の計算機シミュレーション, 情報研究(文教大学・情報学部), no.11, pp.51-68, Dec.1990
- [B14] 鈴木昇一: Radial-Basis Function Networks, Wavelet-Based Networks を用いたモデル構成作用素の構成法, 情報研究(文教大学・情報学部)no.17, pp.71-131, Dec.1996
- [B15] 鈴木昇一: 構造受精法と日本語単独母音の認識, 情報研究(文教大学・情報学部)no.18, pp.17-51, Dec.1998
- [B16] 鈴木昇一, 前田英明: 有声破裂音の代表パターンの学習的決定と, その計算機シミュレーション, 情報研究(文教大学・情報学部), no.20, pp.77-95, Dec.1998
- [B17] 鈴木昇一, 前田英明: 変動エントロピーによる有声破裂音の順序付けと, その計算機シミュレーション, 情報研究(文教大学・情報学部), no.21, pp.51-78, Mar.1999
- [B18] 鈴木昇一: 平均顔を用いた顔画像の2値化, 並びに, 目・鼻・口の抽出と, その計算機シミュレーション, 情報研究(文教大学・情報学部), no.22, pp.65-150, Dec.1999
- [B19] 鈴木昇一: 界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の, 顔画像処理に関する計算機シミュレーション, 情報研究(文教大学・情報学部), no.23, pp.109-182, Mar.2000

- [B20] 鈴木昇一：風景画から知識を抽出し、解釈するシステムの、ファジィ推論ニューラルネットによる構成, 情報研究(文教大学・情報学部), no.23, pp.183-265, Mar.2000
- [B21] 鈴木昇一：各個人の感性を反映した認識システムRECOGNITRON, 情報研究(文教大学・情報学部), no.24, pp.185-257, Dec.2000
- [B22] 鈴木昇一：プロダクション・システムとしてのファジィ・マルチメディア・コンピュータと、空間多重パターンファジィ推論系, 情報研究(文教大学・情報学部), no.24, pp.105-183, Dec.2000
- [B23] 鈴木昇一：SS大分類関数BSCの適応的構成への、計算論的学習理論の適用, 情報研究(文教大学・情報学部), no.25, pp.185-236, Mar.2001
- [B24] 鈴木昇一：量子力学の諸原理、段階量子認識系と、心理状態を取り入れた想起に基づく部分空間認識法, 情報研究(文教大学・情報学部), no.25, pp.237-282, Mar.2001
- [B25] 鈴木昇一：測度的不変量検出形認識系の構成理論, 電子通信学会論文誌(D), vol.55-D, no.8, pp.513-538, Aug.1972
- [B26] 鈴木昇一, 斉藤静昭, 奥野治雄, 太田芳雄：画像の復元とその計算機シミュレーション, 工学院大学研究報告, no.39, pp.198-206, Jan.1976
- [B27] 鈴木昇一, 佐久間拓也, 前田英明：数理形態学における諸演算とモデル構成作用素, 情報研究(文教大学・情報学部), no.17, pp.133-170, Dec.1996
- [B28] 鈴木昇一：Radial-Basis Function Networks, Wavelet-Based Networksを用いたモデル構成作用素の構成法, 情報研究(文教大学・情報学部), no.17, pp.71-132, Dec.1996
- [B29] 鈴木昇一：類似度関数を用いた確率的緩和法, 情報研究(文教大学・情報学部), no.20, pp.23-75, Dec.1998
- [B30] 鈴木昇一：直交系によるパターンモデルの構成, 情報研究(文教大学・情報学部), no.21, pp.23-49, Mar.1999
- [B31] 鈴木昇一：認識行為に向けての、効用最大化原理, 情報研究(文教大学・情報学部), no.22, pp.151-210, Dec.1999
- [B32] 鈴木昇一：高次認知機能における論理表現の要素, 情報研究(文教大学・情報学部), no.19, pp.29-82, Mar.1998
- [B33] 鈴木昇一：Support Vector Machineを利用した大分類関数の構成, 情報研究(文教大学・情報学部), no.26, pp.1-62, Dec.2001
- [B34] 鈴木昇一：2カテゴリ分類困難度の情報理論, 情報研究(文教大学・情報学部), no.26, pp.63-160, Dec.2001
- [B35] 鈴木昇一：一般化類似度関数を用いた“導出原理による第1階述語推論, 情報研究(文教大学・情報学部), no.27, pp.27-71, Mar.2002
- [B36] 鈴木昇一, 川俣博司, 大槻善樹：風景画の理解に関するJAVA言語によるRECOGNITRONの計算機シミュレーション, 情報研究(文教大学・情報学部), no.27, pp.73-109, Mar.2002
- [B37] 鈴木昇一：遺伝的アルゴリズムにおける適合度比例選択戦略を利用した進化方程式の、パターン多段階変換に基づく認識への応用, 情報研究(文教大学・情報学部), no.28, pp.37-67, Dec.2002
- [B38] 鈴木昇一：近傍を利用した音素認識のためのモデル構成作用素T, 類似度関数SM, 大分類関数BSCの諸構成と, SS不動点探索型多段階想起認識, 情報研究(文教大学・情報学部),

- no.28, pp.69-141, Dec.2002
- [B39] 鈴木昇一：JAVA言語で実装化された画像理解システムIUSの動作概要と、その稼動方法、情報研究(文教大学・情報学部), no.28, pp.143-165, Dec.2002
- [B40] 鈴木昇一, 川俣博司, 大槻善樹：JAVA言語による計算機シミュレーションで生じた風景画像の理解場面での多段階連想形認識過程の異常現象,情報研究(文教大学・情報学部), no.29,pp.123-166,July 2003
- [B41] 鈴木昇一：パターン情報処理(モデル構成作用素, 誤差逆伝播学習2層ニューラルネット)と、論理的含意とによる非単調的知識推論,情報研究(文教大学・情報学部),no.29,pp.75-121,July 2003
- [B42] 鈴木昇一：可分な一般抽象ヒルベルト空間でのK-L直交系の理論, 情報研究(文教大学・情報学部), no.29, pp.41-73, July 2003
- [B43] 鈴木昇一：パターン系列(動画像, 会話音声)の, dynamical systemによる連想理論と, 連想器SPATEMTRON, 情報研究(文教大学・情報学部), no.30, pp.139-186, Jan.2004
- [B44] 鈴木昇一：入出力例の系列を用いた“対連想問題・その擬逆問題”の一般解, 情報研究(文教大学・情報学部), no.30, pp.81-137, Jan.2004
- [B45] 鈴木昇一：共役勾配法の一般解における直交系の応用(画像復元, パターンモデルの構成, パターン集合の情報理論的次元),情報研究(文教大学・情報学部),no.30,pp.27-79,Jan.2004
- [B46] 鈴木昇一：2つのパターンモデル構成作用素の, λ 言語論理による構成法, 情報研究(文教大学・情報学部), no.31, pp.43-66, July 2004
- [B47] 鈴木昇一：会話音声・動画像処理への, 万能性類似度関数の採用によるSS多段階認識の改良, 情報研究(文教大学・情報学部), no.31, pp.67-110, July 2004
- [B48] 鈴木昇一：数理形態学の新しい2つのパターン変換作用素を用いた多段階想起認識, 情報研究(文教大学・情報学部), no.31, pp.111-141, July 2004
- [B49] 鈴木昇一, 太田芳雄, 斉藤静昭, 奥野治雄：感覚空間回路の設計と作用素に対するラプラス変換法, 工学院大学研究報告, no.40.June 1976
- [B50] 鈴木昇一：1パラメータLie座標変換群とそのパターン正規化への応用, 情報研究(文教大学・情報学部), no.32, pp.21-74, Jan.2005
- [B51] 鈴木昇一：曖昧さに関する半順序 α を単調に保つモデル構成作用素 T , 情報研究(文教大学・情報学部), no.32, pp.75-126, Jan.2005
- [B52] 鈴木昇一：パターン φ から抽出された特徴量 $u(\varphi, \ell)$ のfuzzy単調変換, 情報研究(文教大学・情報学部), no.32, pp.127-168, Jan.2005
- [B53] 鈴木昇一：パターンモデル(パターンの標準形)の一般形, 情報研究(文教大学・情報学部), no.32, pp.169-218, Jan.2005
- [B54] 鈴木昇一：類似度関数の密度を用いた, 画素毎のパターン認識処理(パターン理解処理)の方法, 情報研究(文教大学・情報学部), no.32, pp.219-285, Jan.2005
- [B55] 鈴木昇一：パターン(画像, 音声)から感性情報を計量できる一般的な方法(視野を考慮して構成された類似度関数 SM の応用), 情報研究(文教大学・情報学部), no.33, pp.261-316, Jul. 2005
- [B56] 鈴木昇一：知識工学におけるcertainty factorによる多段階認識過程の評価, 情報研究(文教大学・情報学部), no.33, pp.199-260, Jul.2005

- [B57] 鈴木昇一：線形方程式の制約条件下での，残差法によるパターンモデル，情報研究(文教大学・情報学部)，no.33，pp.149-197，Jul.2005
- [B58] 鈴木昇一：正規直交性を満たす類似度関数 SM に積分核が存在するか？，情報研究(文教大学・情報学部)，no.33，pp.111-147，Jul.2005
- [B59] 鈴木昇一：原パターンを近似できるという拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの，会話音声・動画像処理への応用，情報研究(文教大学・情報学部)，no.33，pp.43-110，Jul.2005
- [B60] 鈴木昇一：パターンの変形量を外積演算による情報量で捉えよう-情報容量の提案と，情報容量を用いた類似度関数 SM の構成-，情報研究(文教大学・情報学部)，no.36，pp.107-167，Dec.2006
- [C61] 鈴木昇一：パターンの整形化方程式，情報研究(文教大学・情報学部)，no.34，pp.73-127，Jan.2006
- [C62] 鈴木昇一：一般抽象実ヒルベルト空間でのニューラルネットのon-line学習，情報研究(文教大学・情報学部)，no.35，pp.67-134，Jul.2006
- [C63] 鈴木昇一：SSマルチメディア認識知能情報論に基づく音声の多段階想起認識に役立つモデル構成作用素 T ，類似度関数 SM ，大分類関数 BSC ，情報研究(文教大学・情報学部)，no.35，pp.135-234，Jul.2006
- [C64] 鈴木昇一：多段階連想形認識システムRECOGNITRONの再帰性と分解性・合成性，情報研究(文教大学・情報学部)，no.35，pp.235-331，Jul.2006
- [C65] 鈴木昇一：認識の階層とC-RECOGNITRON，情報研究(文教大学・情報学部)，no.36，pp.39-106，Dec.2006
- [C66] 鈴木昇一：連想形認識方程式と，カテゴリ帰属知識空間での情報容量，情報研究(文教大学・情報学部)，no.36，pp.169-233，Dec.2006

付録A. 1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ を正規直交系 $\{\phi'_k\}_{k \in L}$ に変換する方法

1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ を正規直交系 $\{\phi'_k\}_{k \in L}$ に変換する方法には, the Gram-Schmidt orthogonalization method (グラム-シュミットの直交化法) [A18] がある. 内積 (φ, η) , ノルム $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ を導入して, それは, 次のように説明される.

The Gram-Schmidt orthogonalization method (グラム-シュミットの直交化法)

(1#) $L = \{1, 2, 3\}$ のとき

1次独立な系 $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ から,

$$(\phi'_1, \phi'_2) = 0 \tag{A.1}$$

$$(\phi'_1, \phi'_3) = 0 \tag{A.2}$$

$$(\phi'_2, \phi'_3) = 0 \tag{A.3}$$

$$\|\phi'_1\| = \|\phi'_2\| = \|\phi'_3\| = 1 \tag{A.4}$$

を満たす正規直交系 $\{\phi'_1, \phi'_2, \phi'_3\}$ は, 次のように与えられる:

$$\phi'_1 = \frac{\phi_1}{\|\phi_1\|} \tag{A.5}$$

$$\phi'_2 = \frac{\phi_2''}{\|\phi_2''\|} \quad \text{where } \phi_2'' = \phi_2 - (\phi_2, \phi'_1) \cdot \phi'_1 \tag{A.6}$$

$$\phi'_3 = \frac{\phi_3''}{\|\phi_3''\|} \quad \text{where } \phi_3'' = \phi_3 - (\phi_3, \phi'_1) \cdot \phi'_1 - (\phi_3, \phi'_2) \cdot \phi'_2 \tag{A.7}$$

□

(2#) $L = \{1, 2, \dots, 3n-2, 3n-1, 3n\}$ の場合

$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \dots, \phi_{3n-2}, \phi_{3n-1}, \phi_{3n}\}$ は, 次のように求められる:

$$\phi'_1 = \frac{\phi_1}{\|\phi_1\|} \tag{A.8}$$

$$\phi'_2 = \frac{\phi_2''}{\|\phi_2''\|} \quad \text{where } \phi_2'' = \phi_2 - (\phi_2, \phi'_1) \cdot \phi'_1 \tag{A.9}$$

⋮

$$\phi'_k = \frac{\phi_k''}{\|\phi_k''\|} \quad \text{where } \phi_k'' = \phi_k - \sum_{\ell=1}^{k-1} (\phi_k, \phi'_\ell) \cdot \phi'_\ell \tag{A.10}$$

⋮

$$\phi'_{3n} = \frac{\phi_{3n}''}{\|\phi_{3n}''\|} \quad \text{where } \phi_{3n}'' = \phi_{3n} - \sum_{\ell=1}^{3n-1} (\phi_{3n}, \phi'_\ell) \cdot \phi'_\ell \tag{A.11}$$

□

直交系は1次独立であるが, 1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ を正規直交系 $\{\phi'_k\}_{k \in L}$ として構成すると, 便利である.

(付録A終わり)

付録B. パターン φ の各1次結合係数 c_k の求め方

内積 (φ, η) ，ノルム $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ を導入して，本付録Bでは，パターンの各1次結合係数 c_k の求める方法が説明される．

可分なヒルベルト空間 \mathfrak{H} の元 φ が，1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ を用いて，

$$\exists \varphi_{\perp} \in \mathfrak{H}, \forall k \in L, (\varphi_{\perp}, \phi_k) = 0 \text{ such that } \varphi = \sum_{k \in L} c_k \cdot \phi_k + \varphi_{\perp} \quad (\text{B.1})$$

と1次展開された時，各1次展開係数 c_k は，最小自乗法を適用して，誤差

$$\varphi_{\perp} = \varphi - \sum_{k \in L} c_k \cdot \phi_k \quad (\text{B.2})$$

のノルム $\|\varphi_{\perp}\|$ の自乗 $\|\varphi_{\perp}\|^2$ を最小にするように求めることができる．結果は次の通りである：

各1次展開係数 c_k は，連立1次方程式

$$\sum_{\ell \in L} c_{\ell} \cdot (\phi_{\ell}, \phi_k) = (\varphi, \phi_k), k \in L \quad (\text{B.3})$$

の解として求まる．系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ は1次独立であるから，

$$a_{k\ell} = (\phi_{\ell}, \phi_k) \quad (\text{B.4})$$

を第 $k \in L$ 行第 $\ell \in L$ 列の要素とする行列 $A = (a_{k\ell})_{k, \ell \in L}$ の行列式の値 $\det(A)$ は非零であるから，連立1次方程式(B.3)の解 $\{c_k\}_{k \in L}$ は必ず，求まる．

もし，1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ が

$$(\phi_k, \phi_{\ell}) = 0 \text{ if } k \neq \ell \quad (\text{B.5})$$

を満たすという意味で，直交系であるなら，各1次展開係数 $c_k, k \in L$ は，連立1次方程式(B.3)の解として，

$$c_k = \frac{(\varphi, \phi_k)}{(\phi_k, \phi_k)}, k \in L \quad (\text{B.6})$$

と求まる．更に，1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ が，

$$\forall k \in L, \|\phi_k\| = 1 \quad (\text{B.7})$$

が成立するという意味で，正規直交系であるなら

$$c_k = (\varphi, \phi_k), k \in L \quad (\text{B.8})$$

と求まる．

□

(付録B終わり)

付録C. 離散コサイン変換DCT

1より小さくない正整数 N を選び，離散集合 M を，

$$M = \{0, 1, 2, \dots, N-1\} \quad (\text{C.1})$$

とする．正値ルベーク・スティルチェス式測度 $dm(x)$ を

$$dm(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in M \\ 0 & \text{if } x \notin M \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

と設定する. そうすると, 内積 (φ, η) , ノルム $\|\varphi\|$ は,

$$(\varphi, \eta) = \int_M dM(x) \varphi(x) \cdot \bar{\eta}(x) = \sum_{x=0}^{N-1} \varphi(x) \cdot \bar{\eta}(x), \quad \bar{\eta} \text{ は } \eta \text{ の複素共役} \quad (\text{C.3})$$

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \quad (\text{C.4})$$

である. 集合 L を

$$L \equiv M = \{0, 1, 2, \dots, N-1\} \quad (\text{C.5})$$

とおく. 関数系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ を

$$\phi_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad x \in M \quad (\text{C.6})$$

$$\ell \in L - \{0\} \text{ の時, } \phi_\ell(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \cos \frac{(2x+1) \cdot \ell \cdot \pi}{2N}, \quad x \in M \quad (\text{C.7})$$

と定義すれば, 系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ は1次独立な系であり, 系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ は

$$(C1\#) \text{ (正規直交性)} \quad (\phi_k, \phi_\ell) =$$

$$\begin{cases} 1 & \text{if } k = \ell \\ 0 & \text{if } k \neq \ell \end{cases}$$

(C.8)

$$(C2\#) \text{ (完全性)} \quad \forall k \in L, (\varphi, \phi_k) = 0 \Rightarrow \|\varphi\| = 0 \quad (\text{C.9})$$

が成立するという意味で, 完全な正規直交系である.

パターン φ の直交展開

$$\forall \varphi \in L_2(M; dM(x), \varphi(x)) = \sum_{k \in L} c_k \cdot \phi_k(x), x \in M \quad (\text{C.10})$$

が成り立つ. ここに, 各1次展開係数 $c_k (k \in L)$ は, 式(B.8)を適用して,

$$\forall k \in L, c_k = (\varphi, \phi_k) \quad (\text{C.11})$$

と求められる. 変換

$$\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in M\} \rightarrow \vec{c} \equiv \{c_k \mid k \in L\} \quad (\text{C.12})$$

は, φ の離散コサイン変換 (discrete cosine transform) DCT と呼ばれ, 変換

$$\vec{c} = \{c_k \mid k \in L\} \rightarrow \varphi = \{\varphi(x) \mid x \in M\} \quad (\text{C.13})$$

は, 離散コサイン逆変換 (inverse discrete cosine transform) IDCT と呼ばれる.

(付録C終わり)

付録D. 1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ の例1 (離散コサイン変換関数系)

本付録Dでは, 付録Cの離散コサイン変換を利用して, 1次独立な系

$$\{\phi_k\}_{k \in L} \equiv \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \dots, \phi_{3n-2}, \phi_{3n-1}, \phi_{3n}\} \subset \{\phi_k\}_{k \in K} \quad (\text{D.1})$$

を構成する.

直交系は1次独立であるから, 1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in K}$ を正規直交系として構成する.

D1. 線分上の1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in K}$ の例

1より小さくない奇数 $N \geq 1$ を選ぶ. 線分

$$M = \{x \mid x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{N-1}{2}\} \quad (\text{D.2})$$

上のパターン φ は

$$\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in M\} \quad (\text{D.3})$$

と表わされる. 正值ルベーク・スティルチェス式測度 $dm(x)$ を

$$dm(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in M \\ 0 & \text{if } x \notin M \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

とおくと, 可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{S} = L_2(M; dm(x))$ が導入される. $\bar{\eta}$ は η の複素共役であるとして, 内積 (φ, η) , ノルム $\|\varphi\|$ は

$$\begin{aligned} (\varphi, \eta) &= \int_M dm(x) \varphi(x) \cdot \bar{\eta}(x) = \sum_{x \in M} \varphi(x) \cdot \bar{\eta}(x) \\ &= \sum_{x = \frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \varphi(x) \cdot \bar{\eta}(x) \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

$$\text{ノルム } \|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \quad (\text{D.6})$$

である. 集合 K を

$$K = \{1, 2, \dots, N\} \quad (\text{D.7})$$

とおくと, 1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in K}$ は,

$$\phi_1(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad x \in M \quad (\text{D.8})$$

$$\ell \in K - \{1\} \text{ の時, } \phi_\ell(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \cos \frac{(2x+N) \cdot (\ell-1) \cdot \pi}{2N}, \quad x \in M \quad (\text{D.9})$$

と導入される. ここに,

$$2(x + \frac{N-1}{2}) + 1 = 2x + N \quad (\text{D.10})$$

であり, 完全性と正規直交性が成立しており, 1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in K} = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$ は完全正規直交系である.

1次展開式(B.1)は, 直交展開

$$\forall \varphi \in L_2(M; dm(x)), \varphi(x) = \sum_{k \in K} c_k \cdot \phi_k(x), x \in M \quad (\text{D.11})$$

となる. 式(B.5)を適用して, 各1次展開係数 c_k は, 式(B.8)を適用して,

$$c_k = (\varphi, \phi_k), k \in K \quad (\text{D.12})$$

と求められる.

D2. 長方形上の1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ の例

1より小さくない2つの奇数 $N_1, N_2 \geq 1$ を選ぶ. 長方形

$$M = \{x = \langle x_1, x_2 \rangle \mid x_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{N_j - 1}{2}, j = 1, 2\} \quad (D.13)$$

上のパターン φ は

$$\varphi = \{\varphi(x_1, x_2) \mid x = \langle x_1, x_2 \rangle \in M\} \quad (D.14)$$

と表わされる. 正值ルベーグ・スティルチェス式測度 $dm(x)$ を式(D.4)の如く置くと, 可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dm(x))$ が導入される. $\bar{\eta}$ は η の複素共役であるとして, 内積 (φ, η) , は

$$\begin{aligned} (\varphi, \eta) &= \int_M dM(x) \varphi(x) \cdot \bar{\eta}(x) = \sum_{x \in M} \varphi(x) \cdot \bar{\eta}(x) \\ &= \sum_{x_1 = -\frac{N_1-1}{2}}^{+\frac{N_1-1}{2}} \sum_{x_2 = -\frac{N_2-1}{2}}^{+\frac{N_2-1}{2}} \varphi(x_1, x_2) \cdot \bar{\eta}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (D.15)$$

である. ノルム $\|\varphi\|$ は式(D.6)の如く定義される. このとき, 添え字の集合 L を

$$L = \{1, 2, 3, \dots, 3n - 2, 3n - 1, 3n\} \subseteq K \equiv \{1, 2, \dots, N\} \quad (D.16)$$

とする.

さて, $k, k_1, k_2 = 1, 2, 3, \dots$ として, 対 $\langle k_1, k_2 \rangle$ と $k \in K$ とは,

$$\begin{aligned} \langle k_1, k_2 \rangle &= \langle 1, 1 \rangle \leftrightarrow k = 1 \\ \langle k_1, k_2 \rangle &= \langle 2, 1 \rangle \leftrightarrow k = 2 \\ \langle k_1, k_2 \rangle &= \langle 1, 2 \rangle \leftrightarrow k = 3 \\ \langle k_1, k_2 \rangle &= \langle 3, 1 \rangle \leftrightarrow k = 4 \\ \langle k_1, k_2 \rangle &= \langle 2, 2 \rangle \leftrightarrow k = 5 \\ \langle k_1, k_2 \rangle &= \langle 1, 3 \rangle \leftrightarrow k = 6 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (D.17)$$

などと対応付けるとしよう. そうすると, 対 $\langle k_1, k_2 \rangle$ と1対1対応の関係にある k は,

$$k = \frac{(k_1 + k_2 - 2) \cdot (k_1 + k_2 - 1)}{2} + k_2 \quad (D.18)$$

である. そうすると, 正整数 N は,

$$N = \frac{(N_1 + N_2 - 2) \cdot (N_1 + N_2 - 1)}{2} + N_2 \quad (D.19)$$

となる. 第 $k \in L$ 番目の3角関数 $\phi_k(x) = \phi_k(x_1, x_2)$ を

$$\phi_k(x) = \phi_k(x_1, x_2) = \phi_{k_1}(x_1) \phi_{k_2}(x_2) \quad (D.20)$$

と定義する. ここに, $\phi_{k_1}(x_1), \phi_{k_2}(x_2)$ はD1章で定義されているDCT変換のコサイン関数である.

そうすると, 式(C.8)の正規直交性が成立しており, $\{\phi_k\}_{k \in K}$ は正規直交系である.

1次展開式(B.1)は, 直交展開

$$\forall \varphi \in L_2(M; dx_1 dx_2), \varphi(x_1, x_2) = \sum_{k \in K} c_k \cdot \phi_k(x_1, x_2), x = \langle x_1, x_2 \rangle \in M \quad (D.21)$$

となる. 式(B.7)を適用して, 各1次展開係数 c_k は, 式(D.12)の如く求められる.

(付録D終わり)

付録E. 1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ の例2

本付録Eでは，3角関数系をつかって，式(D.1)の1次独立な系を構成する。

直交系は1次独立であるから，1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in K}$ を正規直交系として構成する。

E1. 線分上の1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ の例

正定数 $a > 0$ を選ぶ．線分

$$M = \{x \mid -a < x < +a\} \quad (\text{E.1})$$

上のパターン φ は

$$\varphi = \{\varphi(x) \mid -a < x < +a\} \quad (\text{E.2})$$

と表わされる．

可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dx)$ を導入する． $\bar{\eta}$ は η の複素共役であるとして，内積 (φ, η) ，ノルム $\|\varphi\|$ は

$$\text{内積 } (\varphi, \eta) = \int_{-a}^{+a} dx \varphi(x) \cdot \bar{\eta}(x) \quad (\text{E.3})$$

$$\text{ノルム } \|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \quad (\text{E.4})$$

である．

ここで， b は1より小さくない正整数であるとして，1次独立な系である正規直交系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ の添え字の集合 L を

$$L \equiv \{1, 2, \dots, 2k, 2k+1, \dots, 3n-2, 3n-1, 3n\} \quad (\text{E.5})$$

としよう．各 $\phi_k (k \in L)$ を

$$\phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

$$\phi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \cos \frac{\pi x}{a}$$

$$\phi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$\phi_4(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \cos \frac{2\pi x}{a}$$

$$\phi_5(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sin \frac{2\pi x}{a}$$

⋮

$$\phi_{2k}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \cos \frac{k\pi x}{a}$$

$$\phi_{2k+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sin \frac{k\pi x}{a}$$

⋮

(E.6)

と設定する．ここに，式(C.8)の正規直交性が成立しており， $\{\phi_k\}_{k \in L} = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{3n-2}, \phi_{3n-1}, \phi_{3n}\}$ は正規直交系である．

直交展開となる1次展開式(B.1), つまり,

$$\forall \varphi \in L_2(M; dx), \varphi(x) = \sum_{k \in L} c_k \cdot \phi_k(x) + \varphi_{\perp}(x), x \in M \tag{E.7}$$

$$\text{such that } \forall k \in L, (\varphi_{\perp}, \phi_k) = 0 \tag{E.8}$$

が成り立ち, 各1次展開係数 c_k は式(B.8)の如く, 求まる.

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき, } \|\varphi_{\perp}\| \rightarrow 0 \tag{E.9}$$

が成り立ち, 1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in \{1, 2, \dots\}}$ は完全である.

E2. 長方形上の1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ の例

2つの正定数 $a_1, a_2 > 0$ を選ぶ. 長方形

$$M = \{x = \langle x_1, x_2 \rangle \mid -a_j < x_j < +a_j, j=1, 2\} \tag{E.10}$$

上のパターン φ は

$$\varphi = \{\varphi(x_1, x_2) \mid -a_1 < x_1 < +a_1, -a_2 < x_2 < +a_2\} \tag{E.11}$$

と表わされる.

可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dx_1 dx_2)$ を導入する. $\bar{\eta}$ は η の複素共役であるとして, 内積 (φ, η) は

$$\text{内積 } (\varphi, \eta) = \int_{-a_1}^{+a_1} dx_1 \int_{-a_2}^{+a_2} dx_2 \varphi(x_1, x_2) \cdot \bar{\eta}(x_1, x_2) \tag{E.12}$$

である. ノルム $\|\varphi\|$ は, 式(C.4)で定義される.

さて, $k, k_1, k_2 = 1, 2, 3, \dots$ として, 対 $\langle k_1, k_2 \rangle$ と1対1対応の関係にある k は, 式(D.18)の如く, 与えられる. このとき, 添え字の集合 L を

$$k \in L = \{1, 2, \dots, 3n-2, 3n-1, 3n\} \tag{E.13}$$

として, 第 $k \in L$ 番目の3角関数 $\phi_k(x) = \phi_k(x_1, x_2)$ を式(D.20)の如く, 定義する.

ここに, $\phi_{k_1}(x_1), \phi_{k_2}(x_2)$ はE1章で定義されている3角関数である.

そうすると, 式(C.8)の正規直交性が成立しており, $\{\phi_k\}_{k \in L}$ は正規直交系である.

1次展開式(B.1)は, 直交展開

$$\forall \varphi \in L_2(M; dx_1 dx_2), \varphi(x_1, x_2) = \sum_{k \in L} c_k \cdot \phi_k(x_1, x_2) + \varphi_{\perp}(x_1, x_2), x = \langle x_1, x_2 \rangle \in M \tag{E.14}$$

$$\text{such that } \forall k \in L, (\varphi_{\perp}, \phi_k) = 0 \tag{E.15}$$

となる. 各1次展開係数 c_k は, 式(B.8)の如く求められる. 式(E.9)が成り立ち, 1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in \{1, 2, \dots\}}$ は完全である.

(付録E終わり)

付録F. 文字列の関数(パターン)を処理するための, Walsh関数系 $\{\phi_k\}_{k=1, 2, \dots, 2^n}$

本付録Fでは, 文字列に関する異種想起(発想推論)を実現するために, 文字列の関数(パターン)を処理できるWalsh関数系 $\{\phi_k\}_{k=1, 2, \dots, 2^n}$ が説明される.

文字列を2値ベクトル

$$x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle, \quad x_i \in \{0, 1\} (i=1, 2, \dots, n) \tag{F.1}$$

に符号化することは, よく行われる.

文字列の関数，つまり，2値ベクトル $x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ の関数

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \in Z \text{ (複素数全体の集合)} \quad (\text{F.2})$$

をパターンと考え，表面的には，文字列処理を行うことを考えよう。

ヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M, dm)$ を導入する．ここに， n 次元ユークリッド空間 R^n の可測部分集合 M を，

$$M \supseteq \{x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid 0 \leq x_i \leq 1 (i=1, 2, \dots, n)\} \text{ (離散集合)} \quad (\text{F.3})$$

とし，正值ルベーク・ステイチェス式測度 $dm(x)$ を

$$dm(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} \cdots x \in \{x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid x_i \in \{0, 1\} (i=1, 2, \dots, n)\} \text{ のとき} \\ 0 \cdots x \notin \{x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid x_i \in \{0, 1\} (i=1, 2, \dots, n)\} \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{F.4})$$

と定義する．

$\bar{\eta}(x)$ を $\eta(x)$ の複素共役として，内積 (φ, η) は，

$$\begin{aligned} (\varphi, \eta) &\equiv \int_M dm(x) \varphi(x) \cdot \bar{\eta}(x) \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{x_1=0}^1 \sum_{x_2=0}^1 \cdots \sum_{x_n=0}^1 \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \bar{\eta}(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

と定義される．ノルム $\|\varphi\|$ は式(C.4)のように定義される．

式(D.1)のWalsh関数系 $\{\phi_k\}_L$ の各成分 ϕ_k は，

$$\phi_{\langle j_1, j_2, \dots, j_n \rangle}(x) = \phi_{\langle j_1, j_2, \dots, j_n \rangle}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \cdot \prod_{i=1}^n (1 - 2x_i)^{j_i} \quad (\text{F.6})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \cdot (-1)^{\sum_{k=1}^n j_k \cdot x_k} \quad (\text{F.7})$$

のように定義される．この時，

①(正規直交性)

$$i = \langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle, i_k \in \{0, 1\} (k=1, 2, \dots, n), \quad j = \langle j_1, j_2, \dots, j_n \rangle, j_k \in \{0, 1\} (k=1, 2, \dots, n) \quad (\text{F.8})$$

として，

$$(\phi_i, \phi_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (\text{F.9})$$

②(完全性)

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H}, \quad \varphi = \sum_i (\varphi, \phi_i) \cdot \phi_i, \quad i = \langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle, i_k \in \{0, 1\} (k=1, 2, \dots, n) \quad (\text{F.10})$$

が成り立つ．

2進ベクトル

$$j = \langle j_1, j_2, \dots, j_n \rangle, j_k \in \{0, 1\} (k=1, 2, \dots, n) \quad (\text{F.11})$$

を，例えば，

$$j = \langle 0, 0, \dots, 0 \rangle \Leftrightarrow k = 1$$

$$\begin{aligned}
 j = \langle 1, 0, \dots, 0 \rangle &\Leftrightarrow k = 2 \\
 j = \langle 0, 1, \dots, 0 \rangle &\Leftrightarrow k = 3 \\
 &\vdots \\
 j = \langle 0, 0, \dots, 1 \rangle &\Leftrightarrow k = n + 1 \\
 j = \langle 1, 1, 0, \dots, 0 \rangle &\Leftrightarrow k = n + 2 \\
 j = \langle 0, 1, 1, \dots, 0 \rangle &\Leftrightarrow k = n + 3 \\
 &\vdots \\
 j = \langle 0, 0, \dots, 1, 1 \rangle &\Leftrightarrow k = 2n + 1 \\
 j = \langle 1, 1, 1, \dots, 0 \rangle &\Leftrightarrow k = 2n + 2 \\
 &\vdots \\
 j = \langle 1, 1, \dots, 1 \rangle &\Leftrightarrow k = 2^n
 \end{aligned}
 \tag{F.12}$$

と順序づければ良い。

(付録F終わり)

付録G. 文字列の関数(パターン)を処理するための、奇遇関数系 $\{\phi_k\}_{k=1,2,\dots,2^n}$

上述の付録Fとは異なり、今1つの文字列処理のための完全正規直交系 $\{\phi_k\}_{k=1,2,\dots,2^n}$ を考えよう。

文字列を式(F.1)の2値ベクトル $x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, $x_i \in \{0,1\} (i=1,2,\dots,n)$ に符号化することは、よく行われる。2値ベクトル $x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ の、式(F.2)の関数(文字列の関数) ϕ をパターンと考え、裏面ではパターンの処理となるが、表面的には、文字列の処理を行なっているように見えることをSS理論で実現しよう。

n 次元ユークリッド空間 R^n の可測部分集合 M を式(F.3)の如く設定し、更に、正値ルベーク・スティチェス式測度 $dm(x)$ を式(F.4)の如く定義し、ヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M, dm)$ を導入する。

$\bar{\eta}(x)$ を $\eta(x)$ の複素共役として、内積 (ϕ, η) は式(F.5)の如く定義され、ノルム $\|\phi\|$ は式(C.4)のように定義される。

奇遇関数と称されてよい系 $\{\phi_s\}_S$ は次のように定義される：

部分集合 S を

$$S \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \tag{G.1}$$

と選び、各2値ベクトル $j = \langle j_1, j_2, \dots, j_n \rangle$ の各成分 $j_i \in \{0,1\} (i=1,2,\dots,n)$ を

$$\begin{cases}
 i=1,2,\dots,n \in S \text{ である時のみ, かつ, そのときに限り, } j_i = 1 \\
 i=1,2,\dots,n \notin S \text{ である時のみ, かつ, そのときに限り, } j_i = 0
 \end{cases}
 \tag{G.2}$$

と定義し、1対1の対応

$$S \Leftrightarrow j = \langle j_1, j_2, \dots, j_n \rangle, j_k \in \{0,1\} (k=1,2,\dots,n) \tag{G.3}$$

を考え、

$$\begin{aligned}
 \phi_S(x) &= \phi_{\langle j_1, j_2, \dots, j_n \rangle}(x) = \phi_{\langle j_1, j_2, \dots, j_n \rangle}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &= (-1)^{\sum_{i \in S} x_i} \\
 &=
 \end{aligned}
 \tag{G.4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \cdots \sum_{i \in S} x_i \text{ が奇数のとき} \\ +1 \cdots \sum_{i \in S} x_i \text{ が偶数のとき} \end{array} \right. \quad (\text{G.5})$$

□

この時、付録Fの①(正規直交性)、②(完全性)が成り立つ。

式(F.11)の2進ベクトル $j = \langle j_1, j_2, \dots, j_n \rangle, j_k \in \{0, 1\} (k=1, 2, \dots, n)$ を、例えば、付録Fの式(F.12)の如く、順序づければ良い。

(付録G終わり)

付録H. モデル構成作用素 T の構成

入力パターン φ の標準形(パターンモデル) $T\varphi$ を求めることを従来のパターン認識技術では、パターン φ の正規化(normalization)といっていると考えてよいだろう。本付録Hでは、登場した式(Q.3)のモデル構成作用素 T の構成例を説明する。

H1. 何故、パターン φ をモデル $T\varphi$ に変換しなければならない理由と、モデル構成作用素 T が満たさなければならない4性質

Φ を処理の対象とする問題のパターン φ の集合(可分な或るヒルベルト空間 \mathfrak{H} の部分集合)として、SS理論 [B3], [B4] では、入力パターン φ の標準形とは、4性質

①(零元不動点性; axiom 1の(i)の後半) $\varphi = 0 \in \Phi$ については、 $T\varphi = 0$

②(正定数倍不変性; axiom 1の(ii)の後半) 任意の正実定数 a に対し、

$$\forall \varphi \in \Phi, T(a \cdot \varphi) = T\varphi$$

③(ベキ等性; axiom 1の(iii)の後半) $\forall \varphi \in \Phi, T(T\varphi) = T\varphi$

④(非零写像性; axiom 1の(iv)) $\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0$

を満たす写像 T に φ を入力して得られる“ φ のモデル(φ に類似しているパターンの、ある集合の表象) $T\varphi$ ”である。

何故、標準形 $T\varphi$ にパターン φ を変換するのであろうか? 4つの理由が考えられ、それは、

(イ) (雑音の除去) パターン φ から、 φ の帰属するカテゴリの代表パターン ω に比べ形状が崩れさせている雑音を取り除く

(ロ) (座標変換の除去) φ に作用している座標変換を取り除く

(ハ) (欠落情報の補充と冗長な情報の除去) 欠けている情報を補ったり、余分に含まれている情報を取り除く

(ニ) (簡単化) 簡単な構造を備えた形式に直す

(ホ) (同一形式化) 同じ意味内容を表すのに見かけ上異なる幾つかの形状を同一形式(標準形式)に直す

である。

パターン φ に正規化の操作 $T: \Phi \rightarrow \Phi$ を行った結果、以後の認識処理が便利かつ容易になることになることが基本的に重要である。

H2. 4性質①～④を満たす写像 $T: \Phi \rightarrow \Phi$ の構成例

上述のH1章の4性質①～④を満たす式(Q.3)の写像 $T: \Phi \rightarrow \Phi$ を挙げておこう.

H2.1 基底 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ を使わない例

その絶対値が1より大きくない実数の全体

$$R_{[-1,+1]} \equiv \{r \mid -1 \leq r \leq +1\} \tag{H.1}$$

を考え, 関数

$$f: R_{[-1,+1]} \rightarrow R_{[-1,+1]} \tag{H.2}$$

を, 4条件

$$(1\#) \text{ (0-不動点条件) } f(0) = 0 \tag{H.3}$$

$$(2\#) \text{ (1-不動点条件) } f(1) = 1 \tag{H.4}$$

$$(3\#) \text{ (1-有界条件) } \forall u \in R_{[-1,+1]}, |f(u)| \leq 1$$

$$(4\#) \text{ (べき等条件) } \forall u \in R_{[-1,+1]}, f(f(u)) = f(u) \tag{H.5}$$

を満たすように構成する.

上述の4条件(1#)～(4#)を満たす関数 f を導入し, 更に, 式(2.19)の可測部分集合 M を1つ選び, 固定し,

$$\forall x \in M, \frac{\varphi(x)}{\sup_{x \in M} |\varphi(x)|} = 0 \quad \text{if} \quad \sup_{x \in M} |\varphi(x)| = 0 \tag{H.6}$$

を約束する.

そうすると, 次の定理H1が成り立ち, パターンモデル $T\varphi$ が構成されたことがわかる.

[定理H1] (基底を使わないパターンモデルの構成定理) (文献 [B53] の定理8.2)

式(2.19)の可測部分集合 M を1つ選び, 4条件(1#)～(4#)を満たす関数 f を導入する.

$$(T\varphi)(x) = f\left(\frac{\varphi(x)}{\sup_{y \in M} |\varphi(y)|}\right), x \in M \tag{H.7}$$

の如く定義された写像 $T: \Phi \rightarrow \Phi$ はH1章の4性質①～④を満たす. □

4条件(1#)～(4#)を満たす関数 f を挙げておく.

[例1] (2値モデル $T\varphi$)

$$f(u) = \begin{cases} 0 \cdots u < e_+ \text{ のとき} \\ 1 \cdots u \geq e_+ \text{ のとき} \end{cases} \tag{H.8}$$

ここに, e_+ は不等式

$$0 < e_+ \leq 1 \tag{H.9}$$

を満たす閾値である.

[例2] (3値モデル $T\varphi$)

$$f(u) = \begin{cases} -1 \cdots u \leq e_- \text{ のとき} \\ 0 \cdots e_- < u < e_+ \text{ のとき} \\ +1 \cdots u \geq e_+ \text{ のとき} \end{cases} \tag{H.10}$$

ここに、 e_-, e_+ は不等式

$$-1 \leq e_- < 0 < e_+ \leq 1 \quad (\text{H.11})$$

を満たす閾値である。

[例3] (5値モデル $T\varphi$)

$$f(u) = \begin{cases} -1 \cdots -1 \leq u \leq e_-(1) \text{ のとき} \\ t_-(1) \cdots e_-(1) < u \leq e_-(0) \text{ のとき} \\ 0 \cdots e_-(0) < u < e_+(0) \text{ のとき} \\ t_+(1) \cdots e_+(0) \leq u < e_+(1) \text{ のとき} \\ +1 \cdots e_+(1) \leq u \leq +1 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{H.12})$$

ここに、 $e_-(1), e_-(0), e_+(0), e_+(1)$ は不等式

$$-1 \leq e_-(1) < e_-(0) < 0 < e_+(0) < e_+(1) \leq 1 \quad (\text{H.13})$$

を満たす閾値である。また、 $t_-(1), t_+(1)$ は、不等式

$$e_-(1) < t_-(1) \leq e_-(0), e_+(0) \leq t_+(1) < e_+(1) \quad (\text{H.14})$$

を満たす振幅値である。例えば、

$$t_-(1) = \frac{e_-(1) + e_-(0)}{2} \quad (\text{H.15})$$

$$t_+(1) = \frac{e_+(0) + e_+(1)}{2} \quad (\text{H.16})$$

を採用すればよい。

H2.2 基底 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ を使う例

上述のH2.1節の4条件(1#)～(4#)を満たす関数 f を導入する。

連立1次方程式(B.3)の解 $c_\ell, \ell \in L$ を $c_\ell(\varphi), \ell \in L$ と書く。但し、定数 $c_\ell(\varphi)$ の列 $\{c_\ell(\varphi)\}_{\ell \in L}$ については、

$$\frac{c_\ell(\varphi)}{\sup_{k \in L} |c_k(\varphi)|} = 0 \quad \text{if} \quad \sup_{k \in L} |c_k(\varphi)| = 0 \quad (\text{H.17})$$

と約束する。以後、 $c_\ell(\varphi)$ を $a_\ell(\varphi)$ と書く。

特徴抽出写像

$$u: \Phi \times L \rightarrow R \text{ (実数全体の集合)} \quad (\text{H.18})$$

を導入する。 $u(\varphi, \ell) \in R$ はパターン $\varphi \in \Phi$ から抽出された第 $k \in L$ 番目の実数値特徴量である。パターンモデル $T\varphi$ を生成するモデル構成作用素 $T: \Phi \rightarrow \Phi$ を、

$$T\varphi \equiv \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell) \cdot \phi_\ell \quad (\text{H.19})$$

と導入する。H2.1節の4条件(1#)～(4#)を満たす関数 f を導入して定義される実数値

$$u(\varphi, \ell) \equiv f\left(\frac{a_\ell(\varphi)}{\sup_{k \in L} |a_k(\varphi)|}\right) \quad (\text{H.20})$$

はパターン $\varphi \in \Phi$ から抽出された第 $k \in L$ 番目の特徴量である。パターンモデル $T\varphi$ を生成する式(Q.3)のモデル構成作用素 T を、式(H.19)の如くと導入する。次の定理9.2は、パターン $\varphi \in \Phi$ から抽

出された第 $\ell \in L$ 番目の特微量 $u(\varphi, \ell)$ として、式(H.20)を採用し、構成された式(Q.3)の作用素 T が1章の4性質①～④を満たすことを指摘したものである。

【定理H2】(1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ を基底とするモデル構成作用素 T の構成定理)(文献 [B53] の定理 8.2)

系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ を1次独立な系に選ぶ。パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出された第 $\ell \in L$ 番目の特微量 $u(\varphi, \ell)$ として、式(H.20)を採用する。このとき、式(H.19)で定義される式(Q.3)のモデル構成作用素 $T: \Phi \rightarrow \Phi$ は1章の4性質①～④を満たす。□

H2.1節の4条件(1#)～(4#)を満たす関数 f として、H2.1節の [例1] ～ [例3] を選び、抽出される各特微量 $u(\varphi, \ell)$ が2値、3値、5値のモデル $T\varphi$ が定理H2を適用すれば得られる。

(付録G終わり)

付録I. 類似度関数 SM の構成

本章では、SS理論 [B3], [B4] でのaxiom 2を満たす式(R1.13)の類似度関数 SM を3種類、構成する。

11. SS理論でのaxiom 2と類似度関数 SM

本章で構成される式(R1.13)の類似度関数 SM は、SS理論でのaxiom 2を満たさなければならない。このaxiom 2を解説しておこう。

任意のパターン $\varphi \in \Phi$ が、記憶されている代表的なパターンからなる有限個の元からなる集合 Ω 内の任意の代表パターン ω_j とどの程度似ているか、違っているかを計量する手段を設定することが、認識の働きを確保するために必要とされる。類似性計量のための手段が式(R.13)の類似度関数 SM である。

“正常なパターン”(well-formed pattern)は、ある1つのカテゴリ(category) \mathfrak{C}_j (第 $j \in J$ 番目の類概念)のみに帰属しているものとし、このような \mathfrak{C}_j の集まり(有限集合)

$$\mathfrak{C}(J) = \{\mathfrak{C}_j | j \in J\} \tag{I.1}$$

を想定する。 \mathfrak{C}_j の備えている性質を典型的に持っている(第 $j \in J$ 番目の)代表パターン(prototypical pattern) $\omega_j (\neq 0)$ を1つ選定する。 \mathfrak{C}_j は、典型(prototype)としての代表パターン ω_j を中心とした緩やかな(第 $j \in J$ 番目の)カテゴリであることを仮定したことに注意しておく。ここに、 Φ を処理の対象とする問題のパターン φ の集合として、

$$\Omega \equiv \{\omega_j | j \in J\} \subset \Phi \tag{I.2}$$

が式(I.1)の全カテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J)$ に1対1に対応する代表パターンの集合である。式(I.2)の系 Ω は、

$$\text{複素定数 } a_j \text{ の組 } \{a_j | j \in J\} \text{ について } \sum_{j \in J} a_j \cdot \omega_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J, a_j = 0 \tag{I.3}$$

が成立しているという意味で、1次独立(linearly independent)でなければならない。 Ω を視察で決定できる場合があるが、訓練パターン系列から Ω を適応的に決定する方法については、文献 [B3] の付録Iで説明されている。

Axiom 1を満たす式(Q.3)のモデル構成作用素 T によって、式(I.2)の代表パターン集合 Ω が変換されて得られる系

$$T \cdot \Omega \equiv \{T\omega | \omega \in \Omega\} \tag{I.4}$$

も1次独立であると要請する．このとき，式(Q1.13)の類似度関数 SM を導入し，

$$SM(\varphi, \omega_j) = 1, 0 \text{ に従って, パターン } \varphi \in \Phi \text{ は各々, } \omega_j \text{ と確定的な類似度関係, 相違関係にあり,}$$

$$\text{また, } 0 < SM(\varphi, \omega_j) < 1 \text{ の場合は, あいまいな類似・相違関係にある} \quad (I.5)$$

と, SM を解釈しよう．

式(R1.13)の関数 SM は次のaxiom 2を満たすように構成されねばならない．Axiom 2の(i)では、クロネッカー(Kronecker)の δ 記号

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{if } i = j, = 0 \quad \text{if } i \neq j \quad (I.6)$$

が導入されているが、特にaxiom 2の(i)なるこの正規直交性は、候補カテゴリの分離・抽出が効果的に行われ、

$$\text{候補カテゴリの鋭利な削減(a sharp reduction)} \quad (I.7)$$

をもたらすために要請されている．

Axiom 2(類似度関数 SM の満たすべき公理)

(i) (正規直交性; orthonormality)

$$\forall i, \forall j, SM(\omega_i, \omega_j) = \delta_{ij}.$$

(ii) (規格化条件, 確率性, 正規性; probability condition, normalization)

$$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} SM(\varphi, \omega_j) = 1.$$

(iii) (写像 T の下での不変性; invariance under mapping T)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j). \quad \square$$

上述のaxiom 2の(i)～(iii)について簡単に説明しておこう．

SM の解釈式(I.5)の下で、(i)は、相異なるカテゴリの代表パターン同士は確定的な相違関係にあり、同一カテゴリの代表パターン同士は確定的な類似度関係にあることを要請している．(ii)は、任意のパターン φ について、すべてのカテゴリについての類似度の総和は1であることを要請している．つまり、パターン φ は少なくとも1つのカテゴリ \mathbb{C}_j に帰属していることを要請している．(iii)は、パターンモデル $T\varphi$ は原パターン φ と任意のカテゴリについて同一類似度を持つことを要請している．ということは、パターンモデル $T\varphi$ を見たり、聞いたりするならば、原パターン φ と同じように見えたり、聞こえたりすること(同一知覚原理)を要請していることになる．

尚、第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathbb{C}_j の生起確率である非負実数 $p(\mathbb{C}_j)$ を、2条件

$$[\forall j \in J, 0 < p(\mathbb{C}_j) < 1] \wedge [\sum_{j \in J} p(\mathbb{C}_j) = 1] \quad (I.8)$$

を満たすものとして導入しておく．

(付録I終わり)

付録J. 2つの3次元ベクトル \vec{a}, \vec{b} の間のラグランジュの恒等式

本付録Jでは、2つの3次元ベクトル \vec{a}, \vec{b} の間に成り立つラグランジュの恒等式 [A19] が説明される．

各 $a_i, b_i (i=1,2,3)$ を実数値として、

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (J.1)$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] \equiv a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \tag{J.2}$$

$$|\vec{a}|^2 \equiv \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \tag{J.3}$$

$$|\vec{b}|^2 \equiv \sqrt{(\vec{b}, \vec{b})} = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \tag{J.4}$$

として、成り立つラグランジュの恒等式(Lagrange's formula)

$$|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - [\vec{a}, \vec{b}]^2 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 \tag{J.5}$$

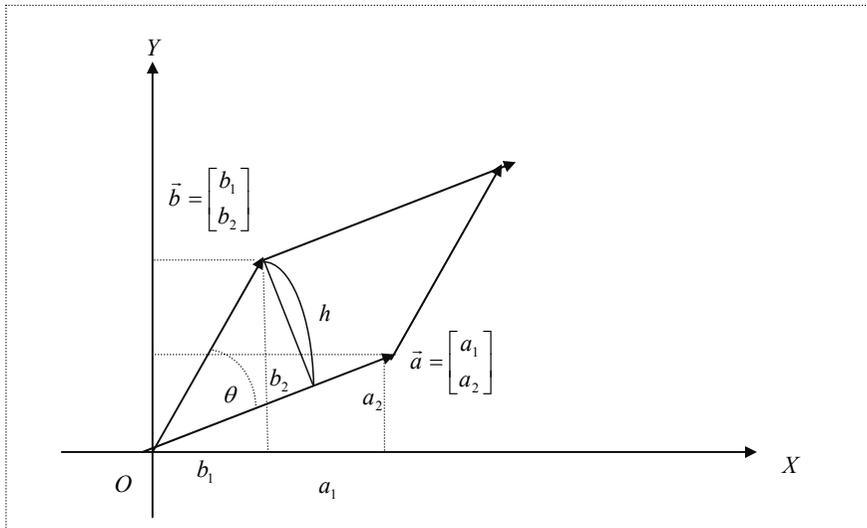
が成立する。この恒等式は左辺、右辺を各々、計算して、確かめられる。

(付I終わり)

付録K. 2つの2, 3次元ベクトル \vec{a}, \vec{b} で決まる平行四辺形の面積

本付録では、2つの2次元ベクトル \vec{a}, \vec{b} を2辺に持つ平行四辺形の面積がどのように表わされるかを説明する。併せて、ベクトル \vec{a}, \vec{b} が3次元になった場合をも、説明される。

[平行四辺形の面積]



図K.1 平行四辺形の面積

Fig.K.1 The area of the parallelogram

次の定理K1はよく知られており、2次元ベクトル \vec{a}, \vec{b} を2辺とする平行四辺形の面積 S の公式を与えている。

[定理K1] (2次元ベクトル \vec{a}, \vec{b} を2辺とする平行四辺形の面積 S)

O を原点とする直交座標系 $X-Y$ をとろう。

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (\text{K.1})$$

を2辺とする平行四辺形の面積 S は

$$S = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{の絶対値} \quad (\text{K.2})$$

と表わされる。

(証明) 2ベクトル \vec{a}, \vec{b} は原点 O を始点とするとしても，一般性は失われない． S は高さ h × 底辺の長さ $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ であるから，

$$S = h \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad (\text{K.3})$$

である．ベクトル \vec{a} からベクトル \vec{b} への，間の角を θ とすると，Fig.k.1から，

$$h = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cdot \sin \theta, \quad \text{where } 0 \leq \theta \leq \pi \quad (\text{K.4})$$

である．ここで，

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \sum_{i=1}^2 a_i \cdot b_i, \quad |\vec{a}| = \sqrt{[\vec{a}, \vec{a}]}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{[\vec{b}, \vec{b}]} \quad (\text{K.5})$$

とすると，

$$\cos \theta = \frac{[\vec{a}, \vec{b}]}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (\text{K.6})$$

であるから，

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{\sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \frac{[\vec{a}, \vec{b}]^2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|^2}} \\ &= \frac{\sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - [\vec{a}, \vec{b}]^2}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{\sqrt{a_1^2 \cdot b_2^2 + a_2^2 \cdot b_1^2 - 2a_1 \cdot b_1 \cdot a_2 \cdot b_2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \quad (\text{K.7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \\ &= \frac{|a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \quad (\text{K.8}) \end{aligned}$$

を代入すれば，

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cdot \frac{|a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ &= |a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1| \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{の絶対値} \tag{K.9}$$

を得、証明が終わる。□

上述の定理K1に関連して、次の3事項①, ②, ③に注意しておこう。

①(2次元空間で、 $a_2=0$ の特別の場合)ベクトル \vec{a} をX軸にとることにより、

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{K.10}$$

となるが、この時、 a_1, b_2 は各々、底辺の長さ、高さとなり、

$$S = a_1 \cdot b_2 \tag{K.11}$$

であるが、確かに、

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 \tag{K.12}$$

となっている。

②(3次元空間での平行四辺形の面積)

式(J.1)の3次元ベクトル \vec{a}, \vec{b} を2辺とする平行四辺形の面積 S を求めてみよう。

内積 $[\vec{a}, \vec{b}]$, ノルム $|\vec{a}|$ は各々、2式(J.2), (J.3)で定義されている。

ベクトル \vec{a} からベクトル \vec{b} への、間の角を $0 \leq \theta \leq \pi$ とすると、 $0 \leq \sin \theta \leq 1$ であり、 $|\vec{a}|, |\vec{b}| \cdot \sin \theta$ は各々、底辺の長さ、高さとなり、

$$S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta \tag{K.13}$$

である。

$$|\vec{b}| \cdot \sin \theta = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \tag{K.14}$$

$$\cos \theta = \frac{[\vec{a}, \vec{b}]}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \tag{K.15}$$

であるから、

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{(a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3)^2}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3)^2} \\ &= \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - [\vec{a}, \vec{b}]^2} \\ &= \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2} \end{aligned} \tag{K.16}$$

∴ 付録Jのラグランジュの恒等式

であることが分る。

ベクトル解析学 [A19] では、3次元ベクトル \vec{a}, \vec{b} の外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{K.17}$$

として、

$$\vec{a} \times \vec{b} \equiv \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad (\text{K.18})$$

と定義されているから、

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2} \quad (\text{K.19})$$

と計算され、結局、

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| \quad (\text{K.20})$$

と計算される。

③(3次元空間で、 $a_3 = b_3 = 0$ の特別の場合)

3次元ベクトル \vec{a}, \vec{b} を2辺とする平行四辺形の面上に X, Y 両軸をとれば、3次元ベクトル \vec{a}, \vec{b} は

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{K.21})$$

であるから、3次元ベクトル \vec{a}, \vec{b} を2辺とする平行四辺形の面積 S は式(K.2)の S である。

明らかに、この場合、

$$\begin{aligned} S &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{の絶対値} \\ &= \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2} = |\vec{a} \times \vec{b}| \quad \text{for } a_3 = b_3 = 0 \end{aligned} \quad (\text{K.22})$$

が成り立っていることが分る。

(付録K終わり)

付録L. 特定の代表パターンモデル $T\omega_i$ を想起する自己想起作用素 $A'_i (i \in \gamma)$

本付録Lでは、最も素朴な自己想起作用素(同種想起作用素) A'_i を検討する。モデル $T\varphi$ から $T\varphi$ 内に潜む代表パターンモデル

$$T\omega_i, \quad i \in \gamma \subseteq J \quad (\text{L.1})$$

の内、規格化内積 $\frac{(T\varphi, T\omega_i)}{(T\varphi, T\varphi)}$ の集まり $\frac{(T\varphi, T\omega_i)}{(T\varphi, T\varphi)}, i \in \gamma$ の内、内積 $\frac{(T\varphi, T\omega_j)}{(T\varphi, T\varphi)}$ の絶対値 $|\frac{(T\varphi, T\omega_j)}{(T\varphi, T\varphi)}|$ が最大となるという意味で最大相関をもつ特定の代表パターンモデル $T\omega_j$ を主要項として想起できる自己想起作用素

$$A'(\gamma) \equiv \sum_{i \in \gamma} A'_i \quad (\text{L.2})$$

ここに、各 $A'_i (i \in \gamma)$ は、

$$\forall \varphi, A'_i \varphi \equiv \frac{1}{(T\omega_i, T\omega_i)} \cdot (T\omega_i) \cdot (T\varphi, T\omega_i), i \in \gamma \quad (\text{L.3})$$

の機能がどのように表されるかが検討される。

先ず、 $T\varphi$ から $T\omega_j$ へ向かう $T\varphi, T\omega_j$ 間の角を $(0 \leq) \angle_j (\leq \pi)$ とすると、

$$(T\varphi, T\omega_j) = \|T\varphi\| \cdot \|T\omega_j\| \cdot \cos \angle_j \quad (\text{L.4})$$

が成り立つ. この式(L.4)を使えば,

$$\begin{aligned} \text{複素数値の変数 } a \text{ の非負実数値関数 } f(a) &\equiv \|T\varphi - a \cdot T\omega_j\|^2 \text{ が} \\ a &= \frac{(T\varphi, T\omega_j)}{(T\omega_j, T\omega_j)} \end{aligned} \quad (\text{L.5})$$

のとき, 最小値

$$\frac{\|T\varphi\|^2 \cdot \|T\omega_j\|^2 - |(T\varphi, T\omega_j)|^2}{\|T\omega_j\|^2} \quad (\text{L.6})$$

$$= \|T\varphi\|^2 \cdot \sin^2 \angle_j \quad \because \quad 1 - \cos^2 \angle_j = \sin^2 \angle_j \quad (\text{L.7})$$

を持つ

ことが, 付録Tの補助定理T1よりわかる. 次の①~⑤が成立する:

$$\begin{aligned} \text{① } \min_a \|T\varphi - a \cdot T\omega_j\|^2 \\ &= \|T\varphi - A'_j \varphi\|^2 \end{aligned} \quad (\text{L.8})$$

$$= \|T\varphi\|^2 \cdot \sin^2 \angle_j \quad \because \quad \text{式(L.7)} \quad (\text{L.9})$$

が成り立つ.

$$\text{② } \frac{1}{\|T\varphi\|} \cdot A'_j \varphi \equiv \frac{1}{\|T\varphi\|} \cdot \frac{1}{(T\omega_j, T\omega_j)} \cdot (T\omega_j) \cdot (T\varphi, T\omega_j) \quad \because \quad \text{式(L.3)} \quad (\text{L.10})$$

$$= \frac{T\omega_j}{\|T\omega_j\|} \cdot \cos \angle_j \quad \because \quad \text{式(L.4)} \quad (\text{L.11})$$

$$\text{③ } \frac{1}{\|T\varphi\|} \cdot A'(\gamma)\varphi \equiv \frac{1}{\|T\varphi\|} \cdot \sum_{j \in \gamma} A'_j \varphi \quad \because \quad \text{式(L.2)} \quad (\text{L.12})$$

$$= \sum_{j \in \gamma} \frac{T\omega_j}{\|T\omega_j\|} \cdot \cos \angle_j \quad \because \quad \text{②} \quad (\text{L.13})$$

が成り立つ.

$$\text{④ } \frac{1}{\|T\varphi\|} A'_j \varphi \text{ が } T\omega_j \text{ 成分を持っている程度を与える相関}$$

$$\left(\frac{1}{\|T\varphi\|} A'_j \varphi, T\omega_j \right) = \|T\omega_j\| \cdot \cos \angle_j \quad \because \quad \text{②} \quad (\text{L.14})$$

$$\left(\frac{1}{\|T\varphi\|} A'_j \varphi, T\omega_i \right) = \left(\frac{T\omega_j}{\|T\omega_j\|}, T\omega_i \right) \cdot \cos \angle_j \quad \because \quad \text{②} \quad (\text{L.15})$$

⑤ $T\omega_j$ から $T\omega_i$ へ向かう $T\omega_j, T\omega_i$ 間の角を \angle_{ji} とすると,

$$\left(\frac{1}{\|T\varphi\|} A'(\gamma)\varphi, \frac{1}{\|T\omega_i\|} T\omega_i \right) = \sum_{j \in \gamma} \cos \angle_{ji} \cdot \cos \angle_j \quad \because \quad \text{式(L.15)} \quad (\text{L.16})$$

□

付録M. パターンモデル $T\varphi$ と包含情報量 $I(\varphi:\eta), I(\varphi:\neg\eta)$ の応用

本付録Mでは、パターン φ がパターン η を含んでいる程度、或いは、含まれていない程度を表わす情報量

$$I(\varphi:\eta), I(\varphi:\neg\eta)$$

を用い、axiom 2を満たす類似度関数 SM が2種類、構成する。更に、2つのパターンモデル構成作用素 T_1, T_2 の、写実能力、表現能力が比較するために、情報量 $I(\varphi:\eta)$ が使用可能であることが示される。

M1. パターン φ がパターン η を含んでいる程度を表わす情報量 $I(\varphi:\eta)$ を用いた axiom 2を満たす類似度関数 SM の構成

$\varphi \in \mathfrak{S}$ から $\eta \in \mathfrak{S}$ へ向かう間の角を $(0 \leq) \theta (\leq \pi)$ とする。

パターン φ がパターン η を含んでいる程度を表わす情報量 $I(\varphi:\eta)$ が、

$$I(\varphi:\eta) \equiv \log_e \frac{\|\varphi\|}{\left\| \varphi - \frac{(\varphi, \eta)}{(\eta, \eta)} \cdot \eta \right\|} \quad \because \text{式(S.1)} \quad (M.1)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \frac{(\varphi, \eta)^2}{\|\varphi\| \cdot \|\eta\|} \right] \quad \because \text{式(S.8)} \quad (M.2)$$

$$= \log_e \frac{1}{\sin \theta} \quad \because \text{式(S.5)} \quad (M.3)$$

と、導入される。但し、

$$\frac{(\varphi, \eta)}{\|\varphi\| \cdot \|\eta\|} = 0 \quad \text{if} \quad \|\varphi\| \cdot \|\eta\| = 0 \quad (M.4)$$

を約束する。このとき、

$$\textcircled{1} \text{ 或る定数 } a(a \neq 0) \text{ に関し、 } \varphi = a\eta \text{ であれば、 } I(\varphi:\eta) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e 0 = +\infty \quad (M.5)$$

$$\textcircled{2} \theta = \frac{\pi}{2} \text{ で、 } (\varphi, \eta) = 0 \text{ であれば、 } I(\varphi:\eta) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e 1 = 0 \quad (M.6)$$

に注意しておく。

次の定理M1は、包含情報量 $I(\varphi:\eta)$ を使って、axiom 2を満たす式(R1.13)の類似度関数 SM を構成している。

[定理M1] (Axiom 2を満たす式(R1.13)の類似度関数 SM の、包含情報量 $I(\varphi:\eta)$ を使った構成定理)

パターンモデル $T\varphi$ が代表パターンモデル $T\omega_j$ に似ていない程度を表わす程度を表わす情報量

$$s_j(\varphi) \equiv I(T\varphi:T\omega_j) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \frac{(T\varphi, T\omega_j)^2}{\|T\varphi\| \cdot \|T\omega_j\|} \right] \quad (M.7)$$

を用いて、

$$SM(\varphi, \omega_j) \equiv$$

$$\begin{cases} \frac{s_j(\varphi)}{\sum_{i \in J} s_i(\varphi)} \cdots \sum_{i \in J} s_i(\varphi) > 0 \text{ のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \sum_{i \in J} s_i(\varphi) = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{M.8})$$

と定義される式(R1.13)の関数 SM は次の3性質 (i), (ii), (iii), つまり, 付録Iのaxiom 2を満たす:

$$(i) \text{ (正規直交性) } SM(\omega_i, \omega_j) = \begin{cases} 1 \cdots T\omega_i = T\omega_j \text{ のとき} \\ 0 \cdots T\omega_i \neq T\omega_j \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{M.9})$$

$$(ii) \text{ (規格化条件) } \forall \varphi \in \Phi, \sum_{i \in J} SM(\varphi, \omega_i) = 1 \quad (\text{M.10})$$

$$(iii) \text{ (} T \text{-不変性) } \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j) \quad (\text{M.11})$$

□

M2. パターン φ がパターン η を含まれていない程度を表わす情報量 $I(\varphi: \neg\eta)$ を用いたaxiom 2 を満たす類似度関数 SM の構成

2つのパターン φ, η に関し, パターン φ がパターン η 以外の成分を含む程度を情報量で表わそう $\varphi \in \mathfrak{S}$ から $\eta \in \mathfrak{S}$ へ向かう間の角を $(0 \leq) \theta (\leq \pi)$ とする.

パターン φ がパターン η を含んでいない含んでいる程度を表わす情報量 $I(\varphi: \neg\eta)$ が,

$$I(\varphi: \neg\eta) \equiv \log_e \frac{\|\varphi\|}{\left\| \frac{(\varphi, \eta)}{(\eta, \eta)} \cdot \eta \right\|} \quad \because \text{式(S.3)} \quad (\text{M.12})$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left| \frac{(\varphi, \eta)}{\|\varphi\| \cdot \|\eta\|} \right|^2 \quad \because \text{式(S.9)} \quad (\text{M.13})$$

$$= \log_e \frac{1}{|\cos \theta|} \quad \because \text{式(S.6)} \quad (\text{M.14})$$

と, 導入される. ただし, 式(M.4)を約束している.

2つのパターン $\varphi, \eta \in \mathfrak{S}$ に関し, 直交・直和分解

$$\exists \omega \in \mathfrak{S}, \quad \varphi = \frac{(\varphi, \eta)}{(\eta, \eta)} \cdot \eta + \omega \wedge (\eta, \omega) = 0 \quad (\text{M.15})$$

が成り立ち, 付録Tの定理T1の(1&)から,

$$\frac{(\varphi, \eta)}{(\eta, \eta)} \cdot \eta \text{ がパターン } \varphi \text{ 内の最大の成分である} \quad (\text{M.16})$$

ことになる.

パターン φ がパターン η 以外の成分 ω を含む程度を情報量 $I(\varphi: \neg\eta)$ で表わしたものは,

$$I(\varphi: \neg\eta) \equiv \log_e \frac{\|\varphi\|}{\|\varphi - \omega\|} \quad (\text{M.17})$$

である.このとき,

$$\textcircled{1} \text{ 或る定数 } a \text{ に関し, } \varphi = a\eta \text{ であれば, } I(\varphi: \neg\eta) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e 1 = 0 \quad (\text{M.18})$$

$$\textcircled{2} \theta = \frac{\pi}{2} \text{ で, } (\varphi, \eta) = 0 \text{ であれば, } I(\varphi: \neg\eta) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e 0 = +\infty \quad (\text{M.19})$$

に注意しておく.

Axiom 2 を満たす式 (R1.13) の類似度関数 SM が構成されたとしよう.

$\neg SM(\varphi, \neg\omega_j)$ を, パターン φ がパターン ω_j に似ていない程度を表わす相違度 (dissimilarity) とすると,

$$\neg SM(\varphi, \neg\omega_j) \equiv \frac{1 - SM(\varphi, \omega_j)}{\sum_{i \in J} [1 - SM(\varphi, \omega_i)]} \quad (\text{M.20})$$

が求めるものである. 次の定理 M2 は, 包含情報量 $I(\varphi: \neg\eta)$ を使って, axiom 2 を満たす式 (R1.13) の類似度関数 SM を構成している.

[定理 M2] (Axiom 2 を満たす式 (R1.13) の類似度関数 SM の, 包含情報量 $I(\varphi: \neg\eta)$ を使った構成定理)

逆に, 相違度関数

$$\neg SM: \Phi \times \neg\Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \quad (\text{M.21})$$

が与えられた時, axiom 2 を満たす式 (R1.13) の類似度関数 SM を構成してみよう.

パターンモデル $T\varphi$ が代表パターンモデル $T\omega_j$ に似ていない程度を表わす程度を表わす情報量

$$\neg s_j(\varphi) \equiv I(T\varphi: \neg(T\omega_j)) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left| \frac{(T\varphi, T\omega_j)}{\|T\varphi\| \cdot \|T\omega_j\|} \right|^2 \quad (\text{M.22})$$

を用いて,

$$\neg SM(\varphi, \neg\omega_j) \equiv \begin{cases} \frac{\neg s_j(\varphi)}{\sum_{i \in J} \neg s_i(\varphi)} \cdots \sum_{i \in J} \neg s_i(\varphi) > 0 \text{ のとき} \\ p(\mathbb{C}_j) \cdots \sum_{i \in J} \neg s_i(\varphi) = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{M.23})$$

と定義される式 (M.21) の関数 $\neg SM$ は次の3性質 (i), (ii), (iii) を満たす:

$$(i) \text{ (正規直交性) } \neg SM(\omega_i, \neg\omega_j) = \begin{cases} 1 \cdots (T\omega_i, T\omega_j) = 0 \text{ のとき} \\ 0 \cdots T\omega_i = T\omega_j \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{M.24})$$

$$(ii) \text{ (規格化条件) } \forall \varphi \in \Phi, \sum \neg SM(\varphi, \neg\omega_i) = 1 \quad (\text{M.25})$$

$$(iii) \text{ (} T \text{- 不変性) } \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \neg SM(T\varphi, \neg\omega_j) = \neg SM(\varphi, \neg\omega_j) \quad (\text{M.26})$$

□

この時,

$$SM(\varphi, \omega_j) \equiv \frac{1 - \neg SM(\varphi, \neg\omega_j)}{\sum_{i \in J} [1 - \neg SM(\varphi, \neg\omega_i)]} \quad (\text{M.27})$$

と定義される式 (R1.13) の関数 SM は axiom 2 を満たす. □

M3. 情報量 $I(\varphi:\eta)$ を用いた2つのパターンモデル構成作用素 T_1, T_2 の, 写実能力の比較

パターン $\varphi \in \Phi$ に対応するパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ には, 次の4解釈(一)~(四)が付与できる:

- (一) φ は $T\varphi$ の近似である.
- (二) φ は $T\varphi$ に要約される.
- (三) $T\varphi$ は φ の情報を含む.
- (四) $T\varphi$ は φ に変形されている. □

上記の解釈(一)によれば, $T\varphi$ は φ に対し, 写実的であるべきである. Axiom1を満たす2つの対 $[\Phi, T_k], k=1,2$ が得られている場合, どちらのモデル構成作用素 T_k が一層, 写実的か? を決定する手法が研究しよう.

パターンモデル $T\varphi$ が原パターン φ の情報を含んでいる程度を表わす情報量は

$$I(T\varphi:\varphi) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \frac{|(T\varphi, \varphi)|^2}{\|T\varphi\| \cdot \|\varphi\|} \right] \quad \because \text{式(M.2)} \tag{M.28}$$

であるから, この $I(T\varphi:\varphi)$ により, T による原パターン φ の写実度合いを評価すればよい.

不等式

$$I(T_1\varphi, \varphi) \geq I(T_2\varphi, \varphi) \tag{M.29}$$

が成立していれば, モデル構成作用素 T_1 は, パターン φ に関しモデル構成作用素 T_2 より写実的(true to nature)であるという.

上述は, 式(4.7)の $C_1(T\varphi:\varphi) \equiv \sum_{k=1}^n C_1((T\varphi) \langle k \rangle : \varphi \langle k \rangle)$ についても, 適用できる.

特に, $\varphi = \omega_j (j \in J)$ の場合が重要であり, 不等式

$$\forall j \in J, I(T_1\omega_j, \omega_j) \geq I(T_2\omega_j, \omega_j) \tag{M.30}$$

が成立していれば, モデル構成作用素 T_1 は, 式(Q.4)の代表パターン集合 Ω に関しモデル構成作用素 T_2 より写実的であるということになる.

尚, パターン φ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j に帰属していれば,

$$I(T\varphi:T\omega_j) \geq I(\varphi:\omega_j) \tag{M.31}$$

かつ,

$$\forall i \in J - \{j\}, I(T\varphi:T\omega_i) \leq I(\varphi:\omega_i) \tag{M.32}$$

であることが望ましい.

M4. 情報量 $I(\varphi:\eta)$ を用いた2つのパターンモデル構成作用素 T_1, T_2 の, 表現能力の比較

第 $j \in J$ 番目のカテゴリに帰属するパターンの集合

$$\Phi(J) \equiv \{\varphi_{(j)} \mid j \in J\} \tag{M.33}$$

について,

$$\sum_{j \in J} I(T_1\varphi_{(j)} : T_1\omega_j) \geq \sum_{j \in J} I(T_2\varphi_{(j)} : T_2\omega_j) \tag{M.34}$$

かつ

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in J - \{j\}} I(T_1\varphi_{(i)} : T_1\omega_j) \leq \sum_{j \in J} \sum_{i \in J - \{j\}} I(T_2\varphi_{(i)} : T_2\omega_j) \tag{M.35}$$

であれば,

$\Phi(J)$ 内のパターン φ が入力されたモデル構成作用素 T_1 は, モデル構成作用素 T_2 より式(Q.6)の ρ

ターンモデル集合 $T \cdot \Omega \equiv \{T\omega_j \mid j \in J\}$ に関し，表現能力が大であるという。

付録Rの多段階連想形認識システム $RECOGNITRON = \langle \Phi_B, T, SM, BSC \rangle$ 内の T, SM, BSC を適応的に構成するときに必要とされる訓練パターンの集合には， T を T_1 と固定した時，他の T_2 に対し表現能力が大であるような式(M.33)のパターン集合 $\Phi(J)$ を用いるべきである。(付録M終わり)

付録N. 3重の外積 $\eta \langle k \rangle \otimes (\varphi \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle)$ の表現

本付録Nでは，3重の外積 $\eta \langle k \rangle \otimes (\varphi \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle)$ が $\varphi \langle k \rangle, \omega \langle k \rangle$ の1次結合として表されることを指摘し，並びに，登場したその2つの1次結合係数が決定される。

次の定理N1は，3重の外積 $\eta \langle k \rangle \otimes (\varphi \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle)$ の構造を完全に決定したものである。

[定理N1] (3重の外積の表現定理)

任意の $\eta, \varphi, \omega \in \mathfrak{S}$ と任意の $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ とに対し，

$$\begin{aligned} & \eta \langle k \rangle \otimes (\varphi \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle) \\ &= [\omega \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle] \cdot \varphi \langle k \rangle - [\eta \langle k \rangle, \varphi \langle k \rangle] \cdot \omega \langle k \rangle \end{aligned} \quad (N.1)$$

(証明) $\psi \langle k \rangle$ を，

$$\psi \langle k \rangle \equiv \eta \langle k \rangle \otimes (\varphi \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle) \quad (N.2)$$

とおく． $\psi \langle k \rangle$ は $\varphi \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle$ に垂直であるから， $\psi \langle k \rangle$ は $\varphi \langle k \rangle, \omega \langle k \rangle$ の張る平面内にある．従って，2定数 u, v が存在して，

$$\psi \langle k \rangle = u \cdot \varphi \langle k \rangle + v \cdot \omega \langle k \rangle \quad (N.3)$$

と表現される．

然るに， $\psi \langle k \rangle$ は $\eta \langle k \rangle$ にも垂直であるから，

$$\begin{aligned} 0 &= [\eta \langle k \rangle, \psi \langle k \rangle] \\ &= u \cdot [\eta \langle k \rangle, \varphi \langle k \rangle] + v \cdot [\eta \langle k \rangle, \omega \langle k \rangle] \end{aligned} \quad (N.4)$$

が成り立つが，この方程式を解くと，

ある定数 q が存在して，

$$u = q \cdot [\eta \langle k \rangle, \omega \langle k \rangle] \quad (N.5)$$

$$v = -q \cdot [\eta \langle k \rangle, \varphi \langle k \rangle] \quad (N.6)$$

である．よって，

$$\psi \langle k \rangle = q \cdot ([\eta \langle k \rangle, \omega \langle k \rangle] \cdot \varphi \langle k \rangle - [\eta \langle k \rangle, \varphi \langle k \rangle] \cdot \omega \langle k \rangle) \quad (N.7)$$

である．実は，以下のように， $q = 1$ であり，証明が終わる．

定数 q を決めよう．特別な場合に，左辺 = 右辺から q を決めてよい．

$$\eta \langle k \rangle = a \cdot \phi_{3k-2} + 0 \cdot \phi_{3k-1} + 0 \cdot \phi_{3k} \quad (N.8)$$

$$\varphi \langle k \rangle = \sum_{\ell=3k-2}^{3k} c_\ell \cdot \phi_\ell \quad (N.9)$$

$$\omega \langle k \rangle = \sum_{\ell=3k-2}^{3k} e_\ell \cdot \phi_\ell \quad (N.10)$$

とおいてみよう．そうすると，

$$\begin{aligned} \text{左辺の } \phi_{3k} \text{ 成分} &= a \cdot (\varphi \langle k \rangle \otimes \omega \langle k \rangle \text{ の } \phi_{3k-1} \text{ 成分}) \\ &= a \cdot (c_{3k} \cdot e_{3k-2} - c_{3k-2} \cdot e_{3k}) \phi_{3k} \end{aligned} \quad (N.11)$$

$$\text{右辺の } \phi_{3k} \text{ 成分} = q \cdot (a \cdot e_{3k-2} \cdot c_{3k} \cdot \phi_{3k} - a \cdot c_{3k-2} \cdot e_{3k} \cdot \phi_{3k}) \quad (N.12)$$

であるから、 $q=1$ が得られる。

□

(付録M終わり)

付録O. パターン $\varphi \in \mathfrak{S}$ の第 $k(1,2,\dots,n)$ 番目の成分 $\varphi \langle k \rangle$ の、内積・外積を用いた直交・直和分解

本付録Oでは、パターン $\varphi \in \mathfrak{S}$ の第 $k(1,2,\dots,n)$ 番目の成分 $\varphi \langle k \rangle$ が2つの成分 $\varphi' \langle k \rangle, \varphi'' \langle k \rangle$ に直交・直和分解されること、並びに、この2成分 $\varphi' \langle k \rangle, \varphi'' \langle k \rangle$ が各々、の内積成分、外積成分であることが明らかにされる。

次の定理O1は、 $\varphi \langle k \rangle$ について、内積成分 $\varphi' \langle k \rangle$ 、外積成分 $\varphi'' \langle k \rangle$ を決定すると、この2成分 $\varphi' \langle k \rangle, \varphi'' \langle k \rangle$ への直和分解性

$$\varphi \langle k \rangle = \varphi' \langle k \rangle + \varphi'' \langle k \rangle \tag{O.1}$$

が成り立ち、然も、2直和成分 $\varphi' \langle k \rangle, \varphi'' \langle k \rangle$ 間に、直交性

$$[\varphi' \langle k \rangle, \varphi'' \langle k \rangle] = 0 \tag{O.2}$$

が成り立つことが示されている。

[定理O1] (パターン $\varphi \langle k \rangle$ の、内積・外積を用いた直交・直和分解定理1)

任意の $\varphi \in \mathfrak{S}$ と任意の $k \in \{1,2,\dots,n\}$ とに対し、

$$\varphi' \langle k \rangle = \frac{1}{[\eta \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle]} \cdot \eta \langle k \rangle \cdot [\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle] \tag{O.3}$$

$$\varphi'' \langle k \rangle = \frac{1}{[\eta \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle]} \cdot \eta \langle k \rangle \otimes \{\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle\} \tag{O.4}$$

とおけば、次の4性質①, ②, ③, ④が成り立つ：

①(直和分解性)

$$\varphi \langle k \rangle = \varphi' \langle k \rangle + \varphi'' \langle k \rangle \tag{O.5}$$

つまり、 $\varphi \langle k \rangle$ は、2つの直和成分 $\varphi' \langle k \rangle, \varphi'' \langle k \rangle$ に分解できる。

②($\eta \langle k \rangle$ に平行な成分の抽出)

$$[\varphi' \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle] = [\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle] \tag{O.6}$$

つまり、 $\varphi' \langle k \rangle$ の、 $\eta \langle k \rangle$ への射影は $\varphi \langle k \rangle$ の、 $\eta \langle k \rangle$ への射影に等しい。

言い換えれば、 $\eta \langle k \rangle$ に平行な、 $\varphi \langle k \rangle$ の成分が $\varphi' \langle k \rangle$ である。

③($\eta \langle k \rangle$ に垂直な成分の抽出)

$$[\varphi'' \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle] = 0 \tag{O.7}$$

つまり、 $\varphi'' \langle k \rangle$ は $\eta \langle k \rangle$ に直交する。

言い換えれば、 $\eta \langle k \rangle$ に垂直な、 $\varphi \langle k \rangle$ の成分が $\varphi'' \langle k \rangle$ である。

④(直交分解性)

$$[\varphi' \langle k \rangle, \varphi'' \langle k \rangle] = 0 \tag{O.8}$$

つまり、 $\varphi \langle k \rangle$ の直和成分 $\varphi' \langle k \rangle$ は $\varphi \langle k \rangle$ の直和成分 $\varphi'' \langle k \rangle$ に垂直である。

(証明) 付録Nの定理N1において、 $\omega \langle k \rangle$ を $\omega \langle k \rangle = \eta \langle k \rangle$ とおけば、

$$\begin{aligned} \eta \langle k \rangle \otimes \{\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle\} \\ = [\eta \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle] \cdot \varphi \langle k \rangle - [\eta \langle k \rangle, \varphi \langle k \rangle] \cdot \eta \langle k \rangle \end{aligned} \tag{O.9}$$

が成り立つから、この両辺を $[\eta \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle] \neq 0$ で割り、移項すれば、①が示される。

$[\varphi' \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle]$ を計算すれば，②は明らか．

$\varphi'' \langle k \rangle$ の表現式から， $\varphi'' \langle k \rangle$ は $\eta \langle k \rangle$ に直交すること，つまり，③は明らかである．

$\varphi' \langle k \rangle$ は $\eta \langle k \rangle$ の定数倍であるから，③を適用すれば，④は明らかである． \square

(付録O終わり)

付録P. 量子化器

本付録Pでは，想起作用素の成分の実数値振幅を有限個の振幅のいずれかで代表させるという操作としての離散化に必要な量子化器について説明される．その効用については，例えば，式(5.10)の $(T\varphi)' \langle k, j \rangle$ 内の係数の組

$$a(\varphi; j) \equiv \frac{[(T\varphi) \langle k \rangle, (T\omega_j) \langle k \rangle]}{[(T\omega_j) \langle k \rangle, (T\omega_j) \langle k \rangle]}, k=1 \sim n$$

を入力して得られた量子化器 Q からの出力を，この入力のに代りに用いることが考えられる．

量子化器(quantizer)

$$Q: \{x | -1 \leq x \leq +1\} \rightarrow \{y | -1 \leq y \leq +1\} \quad (\text{P.1})$$

を考える．閾値の系

$$-1 < b(-1, i; k) < b(-0, i; k) < 0 < b(+0, i; k) < b(+1, i; k) < +1 \quad (\text{P.2})$$

を用意する．

$$\frac{a(\varphi; i)}{\sup_j |a(\varphi; j)|} = 0 \quad \text{if} \quad \sup_j |a(\varphi; j)| = 0 \quad (\text{P.3})$$

を約束する．その絶対値がより小さくないように規格化された各振幅

$$-1 \leq \frac{a(\varphi; i)}{\sup_j |a(\varphi; j)|} \leq +1 \quad (\text{P.4})$$

を，

$$a'(\varphi; i) \equiv Q\left(\frac{a(\varphi; i)}{\sup_j |a(\varphi; j)|}\right) \equiv \quad (\text{P.5})$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 +1 \cdots b(+1,i) \leq \frac{a(\varphi;i)}{\sup_j |a(\varphi;j)|} \leq +1 \text{ のとき} \\
 \frac{a(\varphi;i)}{\sup_j |a(\varphi;j)|} \cdots b(0,i) < \frac{a(\varphi;i)}{\sup_j |a(\varphi;j)|} < b(+1,i) \text{ のとき} \\
 0 \cdots 0 \leq \frac{a(\varphi;i)}{\sup_j |a(\varphi;j)|} \leq b(+0,i) \text{ のとき} \\
 0 \cdots b(-0,i) \leq \frac{a(\varphi;i)}{\sup_j |a(\varphi;j)|} < 0 \text{ のとき} \\
 \frac{a(\varphi;i)}{\sup_j |a(\varphi;j)|} \cdots b(-1,i) < \frac{a(\varphi;i)}{\sup_j |a(\varphi;j)|} < b(-0,i) \text{ のとき} \\
 -1 \cdots -1 \leq \frac{a(\varphi;i)}{\sup_j |a(\varphi;j)|} \leq b(-1,i) \text{ のとき}
 \end{array} \right. \tag{P.6}$$

と、量子化する。そうすれば、

$$\forall i, -1 \leq a'(\varphi;i) \equiv Q\left(\frac{a(\varphi;i)}{\sup_j |a(\varphi;j)|}\right) \leq +1 \tag{P.7}$$

$$\sup_k |a'(\varphi,k)| \in \{0,1\} \tag{P.8}$$

が成り立つ。よって、量子化器 Q のべき等性

$$\forall i, Q\left(\frac{a'(\varphi,i)}{\sup_k |a'(\varphi,k)|}\right) = Q(a'(\varphi,i)) = a'(\varphi,i) \tag{P.9}$$

$$\therefore \forall i, Q\left(Q\left(\frac{a(\varphi,i)}{\sup_k |a(\varphi,k)|}\right)\right) = Q\left(\frac{a(\varphi,i)}{\sup_j |a(\varphi;j)|}\right) \tag{P.10}$$

が成り立つ。

(付録P終わり)

付録Q. 表象(パターンモデル)を想起しながら、入力パターンを認識するシステム RECOGNITRON

認識のモデル(構築される認識システム)とは常に複雑な現実の認識の働きの単純化である。単純化の程度は目的とする認識の働きの機能しなければならない状況に応じ、様々である。可能な限りの単純さで、現実の認識の本質を最もよく写しとっているようなものでなければならない。現実の認識の働きに比べ誤った認識結果が多くないという応用可能性で、その良否が決まる。

本付録Qでは、S.Suzukiが構築したパターン認識の数学的理論(SS理論 [B3], [B4])を適用して、現実の個性性を無視して得られた認識システムのモデルRECOGNITRONが公理論的方法で説明される。本付録Qは、このRECOGNITRONを構成する場面において、並びに、RECOGNITRONの連想形認識機能を分析する場面において、活用され得る。

Q1. パターン認識システムの帰納学習経験とは？

似た者同士を集め、形成された各々の集団にそれぞれ、区別し得る名前(カテゴリ名;category)を与えることを分類(classification)という。分類後、個々のパターンはカテゴリ名で呼ばれることになる。有限次元のベクトル(パターンの一種)の分類に比較的に役立つのが、support vector machineであり、SS理論でのパターン認識システムRECOGNITRON内の構造要素である大分類関数 BSC の構成に応用できることが示されている [B32]。

心理学では、認知されたものを再認する働きが認識である [B1] が。工学では、

(1%) 正規化 → 特徴抽出 → 識別

というように、事前処理(正規化)を行い、事前処理結果から特徴の抽出を実行し、特徴抽出結果を記憶している内容と照合することによりカテゴリ名を決定すること(分類、識別)が認識の働きであるとされている [A8], [A12] [A14], [A16], [A17],.

認識の対象となる非言語の情報表現をパターン(pattern)といい、パターン φ を認識する機能を備えたシステムをパターン認識システム(recognizer)という [B1]。

S.Suzukiが構築したパターン認識システムRECOGNITRONにおいては、パターンからそれと関連ある今1つのパターンを連想するという想起の働きで入力パターンの帰属するカテゴリを決定するという認識の働きを達成する。このRECOGNITRONにおいては、S.Suzukiが考案した連想型認識方程式の解を求める多段階過程が入力パターン φ を認識する働きであり、この方程式の解が、

(2%) 入力パターン φ から連想されるパターン $T\omega_j$ (或るカテゴリ \mathcal{C}_j の代表パターン ω_j のモデル)
(連想・想起の結果)

と、

(3%) 入力パターン φ が帰属するカテゴリ名 \mathcal{C}_j の番号(カテゴリ番号) $j \in J$ (分類結果)

との順序対 $\langle T\omega_j, [j] \rangle$ であることが示されている。

認識システムはパターンを見たり聞いたりした場合、通常、

(4%) このパターンのモデル

と、

(5%) このパターンの帰属するカテゴリ名(の番号)の候補のリスト

とを予想する。このパターンのモデルと、このパターンのカテゴリ候補のリストとの順序対は認識システムがパターンに対し持つ知識であり、カテゴリ帰属知識と呼ばれる。順序対 $\langle T\omega_j, [j] \rangle$ はカテゴリ候補のリストの要素が唯1つの要素 $j \in J$ である場合のカテゴリ帰属知識の特別なものである。順序対 $\langle T\omega_j, [j] \rangle$ は、

(6%) 認識システムRECOGNITRONが入力パターン φ に対し持つ事前知識である $\langle T\varphi, J \rangle$ が coarse to fine strategyにより精製されて得たカテゴリ帰属知識である

と解釈され、カテゴリ帰属知識の、多段階にわたる変換

(7%) $\langle T\varphi, J \rangle \rightarrow \dots \rightarrow \langle T\omega_j, [j] \rangle$

が発想推理の働きで得られたならば、認識システムRECOGNITRONは、

(8%) 入力パターン φ は第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathcal{C}_j に帰属する(認識結果)

と、認識断定することができる。そのみならず、認識システムRECOGNITRONは、

(9%) 入力パターン φ を整形した結果は $T\omega_j$ である(連想・想起の結果)

と、連想断定することができる。この(8)からは、認識システムRECOGNITRONは、

(10%) 入力パターン φ に似ているパターンの集まりの表象は $T\omega_j$ である

という帰納学習経験をした、ということができる。

Q2. パターン連想型認識システムRECOGNITRON

S.Suzukiのパターン知能情報論においては、パターン認識システム(多段階連想型認識システム)

$$\text{RECOGNITRON} = \langle \Phi_B, T, SM, BSC \rangle \quad (\text{Q.1})$$

が構成されている。4要素 Φ_B, T, SM, BSC が与えられれば、認識のこのモデルRECOGNITRONは定まる。

もともと、パターンというものは画像、音声、匂いなどを関数、曲線、有限次元のベクトルなどで数理的に表現したものである。S.Suzukiが構築したパターン認識の数学的理論 [B3], [B4] は、RECOGNITRONが処理するパターン φ の集まり Φ を $\Phi_B (\subset \mathfrak{G})$ と T を使って以下の式(Q.2)の如く、指定する。ここに、 \mathfrak{G} は選ばれた或る可分なヒルベルト空間である。パターンというものを数理的に定義するこの指定は、S.Suzukiの数学的理論以外の他のパターン認識理論がなし得なかったことである。

パターンと判明している φ の集合(基本領域;basic domain) $\Phi_B (\subset \Phi)$ が与えられたとしよう。処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ とモデル構成作用素(model-construction operator) T の順序対 $[\Phi, T]$ はSS理論のaxiom 1を満たさなければならない。集合 Φ は、

$$\Phi = R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B) \quad (\text{Q.2})$$

と表される [B3], [B4]。 $T\varphi \in \Phi$ はパターン $\varphi \in \Phi$ の代りとなるパターン(パターンモデル)であり、RECOGNITRONがモデル $T\varphi \in \Phi$ を見たり聞いたりしたならば、原パターン $\varphi \in \Phi$ と同じように見えたり聞こえたりするようなものである ($T\varphi \in \Phi$ と $\varphi \in \Phi$ との間の同一知覚原理)。モデル構成作用素と呼ばれる T は Φ の元 φ を Φ の唯一つの元 $T\varphi$ に対応させる写像であり、

$$T: \Phi \rightarrow \Phi \quad (\text{Q.3})$$

と表される。写像 T はパターン記述器(pattern descriptor)であり、モデル $T\varphi$ はパターン φ を認識システムRECOGNITRONの主観的観点から簡素に記述したものである。

パターン認識の数学的理論(SS理論) [B3], [B4] での公理axiom 2, 3を各々、満たさなければならない類似度関数 SM , 大分類関数 BSC が導入されている。 SM は、 Φ の元 φ が、代表パターン ω_j (第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{E}_j の持つ諸性質を典型的に代表しているパターン)の集合(1次独立な系)

$$\Omega = \{\omega_j \mid j \in J\} \text{ (全代表パターンの集合)} \quad (\text{Q.4})$$

内の任意の代表パターン ω_j と似ているか、或いは、 ω_j からどの程度異なっているかを計量する働きを備えており、また、 BSC は、パターンが所属している複数のカテゴリの候補を出力する働きを備えている。

SS理論での公理axiom 4を満たさなければならないカテゴリ選択関数 CSF は類似度関数 SM , 大分類関数 BSC を選定すれば、文献 [B3] の付録Eの定理E1により決まる。 CSF は、パターンが所属している複数のカテゴリの候補を更に絞り込む働きを備えている。

候補カテゴリの番号リスト $\mu \in 2^J$ を助変数に持つ構造受精作用素

$$A(\mu): \Phi \rightarrow \Phi, \text{ where } \mu \in 2^J \quad (\text{Q.5})$$

も用いられが、式(Q.4)の代表パターンの集合 $\Omega = \{\omega_j \mid j \in J\}$ を式(Q.3)のモデル構成作用素 T で変換して得られる代表パターンモデルの集合

$$T \cdot \Omega = \{T\omega_j \mid j \in J\} \quad (\text{Q.6})$$

と、類似度関数 SM ，大分類関数 BSC さえ与えられれば，写像 $A(\mu)$ も決まる(写像 $A(\mu)$ は，文献 [B3] の6.5節の2式(6.12)，(6.13)で定義されている)。

式(Q.6)の代表パターンモデルの集合 $T \cdot \Omega$ は1次独立な系であるように，式(Q.3)のモデル構成作用素 T が選ばれていなければならない。

RECOGNITRONは，原パターン η の持つ情報を反映した形で， φ のモデル $T\varphi$ の形で復元する。モデル $T\varphi$ は観測後のパターン φ に存在している雑音，変形が除去されている可能性が大であるパターンといえよう。

もともと，刺激としてのパターンから今1つの記憶しているパターンを連想する機能は，刺激としてのパターン内にある雑音，変形が除去されている形でのパターン復元機能である。このモデル $T\varphi$ を使うパターン認識システムRECOGNITRONでは，入力パターン φ が帰属するであろう候補カテゴリに関し多段階発想推理を行い，表象付き連想形認識の働きで，或るカテゴリ \mathbb{C}_j の代表パターン ω_j のモデル $T\omega_j$ として原パターン η を復元することになる。認識システムRECOGNITRONにより正しく復元された場合，カテゴリ \mathbb{C}_j は原パターン η が帰属するカテゴリとなっている。このように正しく復元された場合，観測にかかったパターン φ 内に存在している雑音，変形が完全に除去されているといえよう。

SS公理系(4axiom 1~4)を背景としたパターン復元機能を提案しており，本研究成果を取り入れこれまでの計算機シミュレーション [B36]，[B39]，[B40] をやり直すことができる(信頼性)。

Shannonの情報理論 [A15]，[A21] は，

送信側の持っている平均的な不確定さに関し，受信側で取り去られる平均的な不確定さ(平均相互情報量)(得られた平均的な情報量)を最大にすること

を考え，得られたこの最大値を通信路容量(channel capacity)と称えている。送信できる最大の平均情報量のことである。このシャノン通信容量に対応するのが式(4.5)の C_1 である。

(付録Q終わり)

付録R. 多段階連想形認識システムRECOGNITRON $=\langle \Phi_B, T, SM, BSC \rangle$ の動作概要

多段階発想推理の働きによる表象付き連想形認識の働きはありとあらゆるパターン認識の働きを再現でき，万能である [B3]。

本付録Rでは，この万能性認識の働きを説明する。S.Suzukiの発見したカテゴリ帰属知識を解に持つ連想形認識方程式(SS equation of associative recognition)の求解過程が多段階パターン認識過程であることなどが明らかにされる。

R1. カテゴリ帰属知識を変換する認識システムRECOGNITRON

ある連想型認識方程式を解いている過程は，S.Suzukiが提唱した式(Q.1)の多段階連想形認識システムRECOGNITRON $=\langle \Phi_B, T, SM, BSC \rangle$ が入力パターン $\varphi \in \Phi$ を認識する過程であることなどが説明される。

R1.1 多段階パターン認識

帰納推理の働きで多段階パターン変換(多段階発想推理)

$$\exists j \in J, (\varphi \rightarrow) \phi_0 \equiv T\varphi \rightarrow \phi_1 \rightarrow \phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow \phi_{i-1} \rightarrow \phi_i \equiv T\omega_j \quad (R1.1)$$

を行い,

① $\varphi \in \Phi$ に $T\omega_j$ に対応させ ($\varphi \in \Phi$ から $T\omega_j$ を検索, 或いは, 連想し),

② 入力パターン $\varphi \in \Phi$ を第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathcal{C}_j に分類する ($\varphi \in \Phi$ を認識する)

という連想型認識処理(多段階パターン認識)を遂行する認識システム RECOGNITRON [B3], [B4] が, S.Suzukiにより考案されている.

今少し詳しく説明しよう.

R1.2 カテゴリ帰属知識空間 $\langle \Phi, 2^J \rangle$

代数構造として加法演算が導入された集合 \mathfrak{H} は内積, ノルムを各々, $(\varphi, \eta), \|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ とするある可分なヒルベルト空間としよう. 2つの集合 $\Phi, 2^J$ は,

(一) $\Phi(\ni 0) \subset \mathfrak{H}$: 処理の対象とする問題のパターン φ の集合 (パターン集合) (R1.2)

(二) $2^J \equiv \{\gamma | \gamma \subseteq J\}$: (パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属するかも知れない) カテゴリ \mathcal{C}_j の添え字 (カテゴリ番号) を要素とするすべての部分集合 (カテゴリ番号集合) の集合 (R1.3)

としよう. 集合 2^J の元は順序の付いた要素の並びとして, 集合の今1つの表現であるリスト (list) として表されることがある.

処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ について,

φ が, 有限個のカテゴリ $\mathcal{C}_i (i \in \gamma)$ からなる集合

$$\mathcal{C}(\gamma) \equiv \{\mathcal{C}_i | i \in \gamma \in 2^J\} \quad (R1.4)$$

の内の何れか1つのカテゴリに帰属している可能性があるというカテゴリ事前知識

$$(R1.5)$$

を認識システム RECOGNITRON が持っている場合, このカテゴリ事前知識を

$$\langle \varphi, \gamma \rangle \quad (R1.6)$$

と表わす. 「認識システムが処理の対象とするパターンに対し持つカテゴリ事前知識」という概念は S.Suzuki のパターン認識の数学的理論 [B1] ~ [B4] が初めて提出したものである. 順序対 $\langle \varphi, \gamma \rangle$ は RECOGNITRON がパターン $\varphi \in \Phi$ についての持つカテゴリ帰属知識 (categorical membership-knowledge) と呼ばれる. すべての $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の集まり

$$\langle \Phi, 2^J \rangle (\ni \langle \varphi, \gamma \rangle) \quad (R1.7)$$

はカテゴリ帰属知識空間 (space of categorical membership-knowledges) と呼ばれており, その代数的・幾何学的・解析的な諸性質は既に明らかにされている [B3], [B4].

R1.3 カテゴリ帰属知識空間 $\langle \Phi, 2^J \rangle$ 上の同値関係 \equiv_{Δ} , 半順序関係 \leq_{Δ}^* , 上限 \sqcup_{Δ}^*

$\langle \Phi, 2^J \rangle$ 上の同値関係 \equiv_{Δ} は

$$\langle \varphi, \gamma \rangle \equiv_{\Delta} \langle \eta, \mu \rangle \Leftrightarrow \varphi = \eta \wedge \gamma = \mu \quad (R1.8)$$

と定義される. $\langle \Phi, 2^J \rangle$ 上の半順序 \leq_{Δ}^* の定義 [B4] は少し込み入っているので, 割愛される.

半順序 \leq_{Δ}^* に関するカテゴリ帰属知識の部分集合 $\langle \Psi, \Gamma \rangle (\subseteq \langle \Phi, 2^J \rangle)$ の上限 (supremum), 或いは, 最小上界 (least upper bound) は

$$\sqcup_{\Delta}^* \langle \Psi, \Gamma \rangle \quad (R1.9)$$

と表される. $\langle \Psi, \Gamma \rangle$ が2つの元 $\{\varphi, \gamma\}, \{\eta, \mu\} \in \langle \Phi, 2^J \rangle$ からなる集合のときの

$$\sqcup_{\Delta}^* \{\langle \varphi, \gamma \rangle, \langle \eta, \mu \rangle\} \quad (R1.10)$$

は,

$$\langle \varphi, \gamma \rangle \sqsubseteq_{\Delta}^* \langle \eta, \mu \rangle \quad (\text{R1.11})$$

と表されることがある．

R1.4 構造受精変換と呼ばれる写像 $TA(\mu)T : \langle \Phi, 2^j \rangle \rightarrow \langle \Phi, 2^j \rangle$

カテゴリ番号リスト $\mu \in 2^j$ を助変数に持つ構造受精作用素 (structural-fertilization operator) と呼ばれる写像

$$A(\mu) : \Phi \rightarrow \Phi \quad (\text{R1.12})$$

が，式(Q.6)の，1次独立な代表パターンモデル集合 $T \cdot \Omega$ ，並びに，

$$\text{類似度関数 } SM : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid s \leq 1\} \quad (\text{R1.13})$$

$$\text{大分類関数 } BSC : \Phi \times J \rightarrow \{0, 1\} \quad (\text{R1.14})$$

を使って導入され，この $A(\mu)$ の両側に axiom 1 を満たす式(Q.3)のモデル構成作用素 T を配置した写像

$$TA(\mu)T : \Phi \rightarrow \Phi \quad (\text{R1.15})$$

を考えることができる．式(R1.15)の写像 $TA(\mu)T$ は，その定義域，値域が Φ である写像であるが，類似度関数 SM ，大分類関数 BSC を使って定義されるカテゴリ選択関数 (category-selection function)

$$CSF : \Phi \times 2^j \rightarrow 2^j \quad (\text{R1.16})$$

を導入し，定義域，値域がパターン空間 Φ ではなく，カテゴリ帰属知識空間 $\langle \Phi, 2^j \rangle$ である写像

$$TA(\mu)T \langle \varphi, \gamma \rangle =_{\Delta} \langle \phi, \lambda \rangle \in \langle \Phi, 2^j \rangle \text{ for } \langle \varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^j \rangle \quad (\text{R1.17})$$

に拡張できる．それには，

$$TA(\mu)T \langle \varphi, \gamma \rangle =_{\Delta} \langle TA(\mu \cap \gamma)T\varphi, CSF(\varphi, \mu \cap \gamma) \rangle \in \langle \Phi, 2^j \rangle$$

， where

$$\phi = TA(\mu \cap \gamma)T\varphi$$

$$\lambda = CSF(\varphi, \mu \cap \gamma)$$

$$(\text{R1.18})$$

と定義すればよくて，この結果，式(R1.15)の構造受精写像 $TA(\mu)T : \Phi \rightarrow \Phi$ は，構造受精変換と呼ばれる写像

$$TA(\mu)T : \langle \Phi, 2^j \rangle \rightarrow \langle \Phi, 2^j \rangle \quad (\text{R1.19})$$

に拡張される．式(R1.15)の写像 $TA(\mu)T$ はパターンをパターンへ変換するが，拡張された式(R1.19)の写像 $TA(\mu)T$ はカテゴリ帰属知識をカテゴリ帰属知識へ変換することに留意しておく．

R1.5 連想形認識結果の3分類

第1階述語論理導出原理 (resolution principle) による人工知能的問題解決 [A10] は，結論を否定して矛盾を導き出すという後ろ向き推論 (backward reasoning) を採用した「定理の証明過程」である．S.Suzukiのパターン認識の数学的理論は，カテゴリ帰属知識を解に持つ連想形認識方程式を提案し，パターンを認識する過程はこの連想形認識方程式の解 (最小不動点解) を求める過程である．最小不動点解を求める過程 (求解過程) は定理の，上述の第1階述語論理による証明過程に対応する．

認識システム RECOGNITRON は，連想形認識方程式の最小不動点解を求める形式で，初期状態のカテゴリ帰属知識 $\langle T\varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^j \rangle$ を多段階にわたり次第に変換して行き，通常の場合，最終的に $\langle T\omega_j, [j] \rangle \in \langle \Phi, 2^j \rangle$ に到達したとき，入力パターン $\varphi \in \Phi$ の連想形認識 (多段階帰納推理によるパターン認識) が終了する．この通常の場合，RECOGNITRON は，

入力パターン $\varphi \in \Phi$ は $T\omega_j \in \Phi$ に再生され、第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathcal{C}_j に帰属する (R1.20) という連想形認識結果を出力することになる。この場合は、

(1#) (認識可能)入力パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属する候補カテゴリは唯1つの \mathcal{C}_j である事態をもたらしている。この認識可能事態の他に、次のR2.5節に説明されているように、(2#)認識不能事態、(3#)認識不定事態の2つの事態が存在する。

(1#), (2#), (3#)が連想形認識結果を分類して得られたものである。

R2. 連想形認識方程式の求解過程としての多段階パターン認識過程

多段階パターン認識(Q1.1節)はカテゴリ帰属知識を多段階にわたり変換して行くカテゴリ帰属知識の後半で実現される。多段階にわたり変換されるカテゴリ帰属知識の前半では、入力パターンから連想されるパターンモデルの系列が得られる。そして、連想形認識方程式の解を求めて行く求解過程がカテゴリ帰属知識を多段階にわたり変換して行く過程である。

この求解過程を説明しよう。

R2.1 連想形認識方程式の多段階求解過程における初期作業記憶の設定

処理の対象とする問題のパターン(入力パターン) $\varphi \in \Phi$ に関し、

$$T\varphi \text{ belongs at least to one category } \mathcal{C}_j \text{ of category-set } \mathcal{C}(\gamma) \equiv \{\mathcal{C}_j | j \in \gamma\} \quad (\text{R2.1})$$

と、認識システムRECOGNITRONは知っているものとしよう。入力パターン $\varphi \in \Phi$ は同一知覚原理に従い、そのモデル

$$T\varphi \in \Phi = R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B) \quad (\text{R2.2})$$

に置き換えられている(式(Q.2)を参照)。それで、RECOGNITRONの持っているこのカテゴリ帰属知識は、

$$\langle T\varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle \quad (\text{R2.3})$$

と表される。この $\langle T\varphi, \gamma \rangle$ をRECOGNITRONが行う認識作業(不動点を求める認識計算)での、最初の作業記憶状態(初期条件)として採用しよう。 $\gamma \in 2^J$ をとすることは、RECOGNITRONが入力パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属するかもしれない候補カテゴリにつき全く無知であることを意味している。

R2.2 連想形認識方程式の多段階求解過程と、その終了条件

以上の準備の下で、実は、カテゴリ番号リスト $\mu \in 2^J$ を帰納推理の働きで選んだ後、連想形認識方程式

$$\langle \phi, \lambda \rangle =_{\Delta} \langle T\varphi, \gamma \rangle \sqcup_{\Delta}^* TA(\mu)T \cdot \langle \phi, \lambda \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle \quad (\text{R2.4})$$

を解く過程の典型的なものが、多段階発想推理認識システムRECOGNITRON [B3], [B4] が原パターン $\varphi \in \Phi$ を認識する過程(カテゴリ帰属知識の多段階にわたる変換過程)

$$\langle \phi_0, \lambda_0 \rangle, \langle \phi_1, \lambda_1 \rangle, \langle \phi_2, \lambda_2 \rangle, \dots, \langle \phi_{t-1}, \lambda_{t-1} \rangle, \langle \phi_t, \lambda_t \rangle \quad (\text{R2.5})$$

where

$$\langle \phi_0, \lambda_0 \rangle =_{\Delta} \langle T\varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle \text{ (initial condition)} \quad (\text{R2.6})$$

$$TA(\mu) \langle \phi_{s-1}, \lambda_{s-1} \rangle =_{\Delta} \langle \phi_s, \lambda_s \rangle, s = 1, 2, \dots, t-1, t \text{ (recursive process)} \quad (\text{R2.7})$$

である。カテゴリ帰属知識の多段階にわたる変換過程での終了条件(terminal condition)は、不動点方程式(fixed-point equation)

$$TA(\mu)T \langle \phi_t, \lambda_t \rangle =_{\Delta} \langle \phi_t, \lambda_t \rangle \quad (\text{R2.8})$$

の成立であり、このカテゴリ帰属知識 $\langle \phi_i, \lambda_i \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$ が連想形認識方程式 (R2.4) の、半順序関係 \leq_{Δ}^* に関し最小の不動点 (least fixed-point) としての解である。

R2.3 類似度関数 SM に関する直交条件の下で、エネルギー不等式の成立

このとき、 $\langle \varphi, \gamma \rangle$ のエネルギー (SSポテンシャル; SS-potential)

$$E(\varphi, \gamma) : \Phi \times 2^J \rightarrow R^+ \text{ (非負実数全体の集合)} \quad (R2.9)$$

を定義すれば、類似度関数 SM に関する直交条件 [B4] の下で、エネルギー不等式

$$E(\phi_{s-1}, \lambda_{s-1}) \geq E(\phi_s, \lambda_s), s = 1, 2, \dots, t-1, t \quad (R2.10)$$

が成立する。

R2.4 類似度関数 SM に関するミックスチュア条件の下で、エネルギー不等式の成立

類似度関数 SM に関するミックスチュア条件 [B4] の下で、

$$\exists j \in J, \langle \phi_j, \lambda_j \rangle =_{\Delta} \langle T\omega_j, [j] \rangle \quad (R2.11)$$

が成立し (認識可能事態)、このとき、RECOGNITRONにより、入力パターン $\varphi \in \Phi$ は

(1%) $T\omega_j$ として再生され (パターン連想)、

(2%) 第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathbb{C}_j に分類・認識される

ということになる。

R2.5 直交条件、ミックスチュア条件の一つが成立している類似度関数 SM を採用している場合の多段階認識

直交条件が成立していない類似度関数 SM を採用している $\langle \Phi_B, T, SM, BSC \rangle$ においては、入力パターン $\varphi \in \Phi$ の多段階連想形認識過程が有限の段階で終了するとは限らない。直交条件が成立していれば、多段階連想形認識過程が有限の段階で終了する。また、ミックスチュア条件が成立していない類似度関数 SM を採用している $\langle \Phi_B, T, SM, BSC \rangle$ においては、入力パターン $\varphi \in \Phi$ の多段階連想形認識過程が循環過程になることがあり、有限の段階で終了した場合でさえ、

(2#) (認識不能)

$$\exists j \in J, \langle \phi_j, \lambda_j \rangle =_{\Delta} \langle 0, \phi \rangle \quad (R2.12)$$

が成立している事態、つまり、

入力パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属する候補カテゴリは唯1つも存在しない事態

(3#) (認識不定)

$$\exists j_1, j_2, \dots, j_p \in J (p \geq 2), \langle \phi_i, \lambda_i \rangle =_{\Delta} \langle \phi_i, [j_1 \ j_2 \ \dots \ j_p] \rangle \quad (R2.13)$$

が成立している事態、つまり、

入力パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属する候補カテゴリは複数個存在する事態

のいずれかが生じることがある。

R2.6 直交条件、ミックスチュア条件が共に成立していない類似度関数 SM を採用している場合の多段階認識では振動過程、或いは周期2以上の循環過程になることがある

類似度関数 SM が axiom 2 を満たしていても、式 (Q.1) の RECOGNITRON $\langle \Phi_B, T, SM, BSC \rangle$ は、不動点方程式 (R2.8) が成立する認識段階番号 $t (= 0, 1, 2, \dots)$ が存在しなくて、式 (R2.5) の認識過程の代りに、

$$\langle \phi_0, \lambda_0 \rangle, \langle \phi_1, \lambda_1 \rangle, \langle \phi_2, \lambda_2 \rangle, \dots, \langle \phi_{t-1}, \lambda_{t-1} \rangle, \langle \phi_t, \lambda_t \rangle, \langle \phi_{t+1}, \lambda_{t+1} \rangle, \langle \phi_{t+2}, \lambda_{t+2} \rangle, \dots \quad (R2.14)$$

というように、振動過程、或いは周期2(以上)の循環過程となることがある [B40]. axiom 2を満たしている類似度関数 SM が直交条件、ミックスチュア条件を共に満たしていなくて、入力パターン $\varphi \in \Phi$ のモデル $T\varphi \in \Phi$ が式(Q.6)の代表パターンモデル集合 $T \cdot \Omega$ 内のいずれの代表パターンモデル $T\omega_j \in T \cdot \Omega$ から大きく変形している場合である。

R2.7 多段階発想推理の働きによる表象付き連想形認識(多段階パターン認識)

以上、RECOGNITRONが、 T, SM, BSC を使い、入力パターン $\varphi \in \Phi$ のモデル $T\varphi \in \Phi$ と、 $\varphi \in \Phi$ が帰属する候補カテゴリのリスト $\gamma \in 2^J$ (式(R2.3)を参照)を多段階にわたり変形しながら(式(R2.5)を参照)、入力パターン $\varphi \in \Phi$ を認識することが説明された。

連想型認識システムRECOGNITRONに内蔵されている多段階発想推理の働きによる表象付き連想形認識(多段階パターン認識)の働きが簡単に説明された。ここで、表象(representation)とは、多段階帰納推理の各段階で得られるカテゴリ帰属知識の前半で示されているパターンモデルのことであった。この表象(パターンモデル) $\phi_s \in \Phi (0 \leq s \leq t)$ の列(式(R2.5)を参照)

$$\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{t-1}, \phi_t \in \Phi \quad (R2.15)$$

を、各表象 $\phi_s \in \Phi (0 \leq s \leq t)$ が帰属する候補カテゴリ $\lambda_s \in 2^J (0 \leq s \leq t)$ の列(式(R2.5)を参照)

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{t-1}, \lambda_t \in 2^J \quad (R2.16)$$

に関連させて、分析することで、例えば、誤認識に至る諸原因を検討する余地が生まれる。

(付録R終わり)

付録S. 2つの情報容量 $C'(\varphi:\eta), C''(\varphi:\eta)$ の再表現

本付録Sでは、 $\varphi \in \mathfrak{S}$ から $\eta \in \mathfrak{S}$ へ向かう間の角を $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とすると、2つの情報容量 $C'(\varphi:\eta), C''(\varphi:\eta)$ が各々、 $C'(\varphi:\eta) = \log_e \frac{1}{\sin \theta}$, $C''(\varphi:\eta) = \log_e \frac{1}{|\cos \theta|}$ と表現されることなどが証明される。

パターン φ の中に、パターン η が含まれている程度は、情報容量

$$C'(\varphi:\eta) \equiv \log_e \frac{\|\varphi\|}{\left\| \varphi - \frac{(\varphi, \eta)}{(\eta, \eta)} \cdot \eta \right\|} \quad (S.1)$$

$$\text{但し } \|\varphi\| \cdot \|\eta\| = 0 \text{ のとき, } \log_e \frac{\|\varphi\|}{\left\| \varphi - \frac{(\varphi, \eta)}{(\eta, \eta)} \cdot \eta \right\|} \equiv \infty \quad (S.2)$$

として、計量される。また、パターン φ の中に、パターン η が含まれていない程度は、情報容量

$$C''(\varphi:\eta) \equiv \log_e \frac{\|\varphi\|}{\left\| \frac{(\varphi, \eta)}{(\eta, \eta)} \cdot \eta \right\|} \quad (S.3)$$

$$\text{但し } \|\varphi\| \cdot \|\eta\| = 0 \text{ のとき, } \log_e \frac{\|\varphi\|}{\left\| \frac{(\varphi, \eta)}{(\eta, \eta)} \cdot \eta \right\|} \equiv 0 \quad (S.4)$$

として，計量される。

次の定理S1は，2つの情報容量 $C'(\varphi:\eta), C''(\varphi:\eta)$ が関数として表わされることを明らかにしたものである。

[定理S1] (2つの情報容量 $C'(\varphi:\eta), C''(\varphi:\eta)$ の再表現定理1)

$\varphi \in \mathfrak{H}$ から $\eta \in \mathfrak{H}$ へ向かう間の角を $(0 \leq) \theta (\leq \pi)$ とすると，

$$(1^*) \quad C'(\varphi:\eta) = \log_e \frac{1}{\sin \theta} \quad (\text{S.5})$$

$$(2^*) \quad C''(\varphi:\eta) = \log_e \frac{1}{|\cos \theta|} \quad (\text{S.6})$$

[定理S1の系1] (2つの情報容量 $C'(\varphi:\eta), C''(\varphi:\eta)$ の拘束定理)

$$\forall \varphi, \forall \eta \in \Phi, \quad \exp[-2 \cdot C'(\varphi:\eta)] + \exp[-2 \cdot C''(\varphi:\eta)] = 1. \quad (\text{S.7})$$

[定理S1の系2] (2つの情報容量 $C'(\varphi:\eta), C''(\varphi:\eta)$ の再表現定理2)

$$(1^{**}) \quad C'(\varphi:\eta) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \frac{(\varphi, \eta)^2}{\|\varphi\| \cdot \|\eta\|} \right] \quad (\text{S.8})$$

$$(2^{**}) \quad C''(\varphi:\eta) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left| \frac{(\varphi, \eta)}{\|\varphi\| \cdot \|\eta\|} \right|^2 \quad (\text{S.9})$$

(証明) (1*) の証明： $\|\varphi\| \cdot \|\eta\| = 0$ のとき， $\theta = 0$ であるから， $\sin \theta = 0$ である。よって，

$$\log_e \frac{1}{\sin \theta} = \infty = C'(\varphi:\eta) \quad (\text{S.10})$$

である。以後， $\|\varphi\| \cdot \|\eta\| > 0$ としよう。 c を複素定数として，また， $\text{Re}[\dots]$ を…の実部の意として，

$$\|\varphi - c \cdot \eta\|^2 = \|\varphi\|^2 + |c|^2 \cdot \|\eta\|^2 - 2 \cdot \text{Re}[c \cdot (\eta, \varphi)] \quad (\text{S.11})$$

が成り立つから，

$$c = \frac{(\varphi, \eta)}{(\eta, \eta)} \quad (\text{S.12})$$

とおくと，

$$\left\| \varphi - \frac{(\varphi, \eta)}{(\eta, \eta)} \cdot \eta \right\|^2 = \|\varphi\|^2 - \frac{(\varphi, \eta)^2}{\|\eta\|^2} \quad (\text{S.13})$$

が成り立つことがわかる。 $0 \leq \sin \theta \leq 1$ であるから，

$$C'(\varphi:\eta) = \frac{1}{2} \cdot \log_e \frac{\|\varphi\|^2}{\left\| \varphi - \frac{(\varphi, \eta)}{(\eta, \eta)} \cdot \eta \right\|^2} \quad \because \text{式(S.1)}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \log_e \frac{\|\varphi\|^2 - \frac{(\varphi, \eta)^2}{\|\eta\|^2}}{\|\varphi\|^2} \quad \because \text{式(S.13)} \quad (\text{S.14})$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \frac{(\varphi, \eta)^2}{\|\varphi\| \cdot \|\eta\|} \right] \quad (\text{S.15})$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \log_e [1 - |\cos \theta|^2]$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \log_e \sin^2 \theta$$

$$= \log_e \frac{1}{\sin \theta}$$

(2*)の証明： $\|\varphi\| \cdot \|\eta\| = 0$ のとき， $\theta = 0$ であるから， $\cos \theta = 1$ である．よって，

$$\log_e \frac{1}{|\cos \theta|} = 0 = C''(\varphi : \eta) \tag{S.16}$$

である．以後， $\|\varphi\| \cdot \|\eta\| > 0$ としよう． $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ であるから，

$$C''(\varphi : \eta) = \log_e \frac{1}{\frac{1}{\|\varphi\|} \cdot \frac{\|(\varphi, \eta)\| \cdot \eta}{\|(\eta, \eta)\|}} \quad \because \text{式(S.3)}$$

$$= \log_e \frac{1}{\frac{\|(\varphi, \eta)\|}{\|(\eta, \eta)\|} \cdot \frac{1}{\|\varphi\|} \|\eta\|} \tag{S.17}$$

$$= \log_e \frac{1}{\frac{\|(\varphi, \eta)\|}{\|\varphi\| \cdot \|\eta\|}} \tag{S.18}$$

$$= \log_e \frac{1}{|\cos \theta|}$$

(定理S1の系1の証明) 2式(S.5)，(S.6)より，

$$\sin \theta = \exp[-C'(\varphi : \eta)] \tag{S.19}$$

$$|\cos \theta| = \exp[-C''(\varphi : \eta)] \tag{S.20}$$

を得，この2式(S.17)，(S.18)を $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ に代入すれば，式(S.7)が得られる．

(定理S1の系2の証明)

式(S.8)は式(S.15)より明らか．

式(S.9)は式(S.18)を変形したものである．

□

(付録S終わり)

付録T. パターン $\varphi(\neq 0) \in \mathfrak{S}$ の内に含まれる最大のパターン $\eta(\neq 0) \in \mathfrak{S}$ 成分とは？

本付録Tでは，パターン $\varphi(\neq 0) \in \mathfrak{S}$ の内に含まれる最大のパターン $\eta(\neq 0) \in \mathfrak{S}$ 成分について検討する．

2つのパターン $\varphi, \eta(\neq 0)$ について，ノルム距離 $\|\varphi - a \cdot \eta\|$ の自乗

$$\|\varphi - a \cdot \eta\|^2 \geq 0 \tag{T.1}$$

が最小となる複素定数 a が求められたとき， $a \cdot \eta$ は φ に最も近いパターンであるといえる．このとき， $\varphi(\neq 0) \in \mathfrak{S}$ の内に含まれる最大のパターン $\eta(\neq 0) \in \mathfrak{S}$ 成分であるといわれる．

最大のパターン成分 $a \cdot \eta$ を決定するために，まず，次の補助定理T1を証明しよう．

[補助定理T1] (ノルム距離の自乗 $\|\varphi - a \cdot \eta\|^2$ の，複素パラメータ a の2次関数による表現定理)

2つの任意のパターン $\varphi, \eta(\neq 0)$ と任意の複素定数 a について，

$$0 \leq \|\varphi - a \cdot \eta\|^2 = \|\eta\|^2 \cdot \left| a - \frac{(\varphi, \eta)}{\|\eta\|^2} \right|^2 - \frac{|(\varphi, \eta)|^2 - \|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2}{\|\eta\|^2} \quad (\text{T.2})$$

$$\begin{aligned} (\text{証明}) \quad & \|\eta\|^2 \cdot \left| a - \frac{(\varphi, \eta)}{\|\eta\|^2} \right|^2 - \frac{|(\varphi, \eta)|^2 - \|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2}{\|\eta\|^2} \\ &= \|\eta\|^2 \cdot \left[a - \frac{(\varphi, \eta)}{\|\eta\|^2} \right] \cdot \left[\bar{a} - \frac{(\eta, \varphi)}{\|\eta\|^2} \right] - \frac{|(\varphi, \eta)|^2 - \|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2}{\|\eta\|^2} \quad \because (\eta, \varphi) = \overline{(\varphi, \eta)} \quad (\text{T.3}) \\ &= \|\eta\|^2 \cdot \left[|a|^2 - a \cdot \frac{(\eta, \varphi)}{\|\eta\|^2} - \bar{a} \cdot \frac{(\varphi, \eta)}{\|\eta\|^2} + \frac{|(\varphi, \eta)|^2}{\|\eta\|^4} \right] - \frac{|(\varphi, \eta)|^2 - \|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2}{\|\eta\|^2} \\ &= \|\eta\|^2 \cdot |a|^2 - a \cdot (\eta, \varphi) - \bar{a} \cdot (\varphi, \eta) + \frac{|(\varphi, \eta)|^2}{\|\eta\|^2} - \frac{|(\varphi, \eta)|^2 - \|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2}{\|\eta\|^2} \\ &= \|\varphi\|^2 - a \cdot (\eta, \varphi) - \bar{a} \cdot (\varphi, \eta) + |a|^2 \cdot \|\eta\|^2 \\ &= (\varphi - a \cdot \eta, \varphi - a \cdot \eta) \\ &= \|\varphi - a \cdot \eta\|^2 \geq 0 \quad \square \end{aligned}$$

次の定理T1は，パターン φ に含まれる最大のパターン成分 φ' により，パターン φ を直交・直和分解したものである。

【定理T1】 (パターン φ に含まれる最大のパターン成分 φ' による直交・直和分解定理)

(1&) パターン

$$\varphi' \equiv \frac{(\varphi, \eta)}{(\eta, \eta)} \cdot \eta \quad (\text{T.4})$$

が， $\varphi (\neq 0) \in \mathfrak{S}$ の内に含まれる最大のパターン $\eta (\neq 0) \in \mathfrak{S}$ 成分である。

(2&) $\varphi (\neq 0) \in \mathfrak{S}$ からこの最大成分 φ' を取り去って得られるパターン

$$\varphi'' \equiv \varphi - \varphi' = \varphi - \frac{(\varphi, \eta)}{(\eta, \eta)} \cdot \eta \in \mathfrak{S} \quad (\text{T.5})$$

は，

$$(\varphi'', \eta) = 0 \quad \therefore (\varphi'', \varphi') = 0 \quad (\text{T.6})$$

が成り立つ意味で， $\eta (\neq 0) \in \mathfrak{S}$ に直交している。つまり，パターン φ の直交・直和分解

$$\varphi = \varphi' + \varphi'' \quad \wedge (\varphi', \varphi'') = 0 \quad (\text{T.7})$$

が成り立つ。

$$(3&) \quad \|\varphi'\| \leq \|\varphi\| \quad \wedge \quad \|\varphi''\| \leq \|\varphi\| \quad (\text{T.8})$$

(証明) (1&) の証明： φ から η へ向かう φ, η 間の角を $(0 \leq) \theta (\leq \pi)$ とする。

$$\cos \theta = \frac{(\varphi, \eta)}{\|\varphi\| \cdot \|\eta\|} \quad (\text{T.9})$$

であるから，

$$\begin{aligned} \sqrt{\|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2 - |(\varphi, \eta)|^2} &= \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sqrt{1 - |\cos \theta|^2} \\ &= \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sin \theta \quad \because \quad 0 \leq \sin \theta \leq 1 \end{aligned} \quad (\text{T.10})$$

であり，

a を複素定数として， $\|\varphi - a \cdot \eta\|^2$ が

$$a = \frac{(\varphi, \eta)}{\|\eta\|^2} = \frac{(\varphi, \eta)}{(\eta, \eta)} \tag{T.11}$$

の時, 最小値

$$-\frac{\|(\varphi, \eta)\|^2 - \|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2}{\|\eta\|^2} = \|\varphi\|^2 \cdot \sin^2 \theta \tag{T.12}$$

を持つ

ことが補助定理T1の等式から, 明らかとなり, よって, (1&)が成り立つことがわかる.

$$(2\&)の証明: (\varphi'', \eta) = (\varphi - \frac{(\varphi, \eta)}{(\eta, \eta)} \cdot \eta, \eta) = (\varphi, \eta) - \frac{(\varphi, \eta)}{(\eta, \eta)} \cdot (\eta, \eta) = 0 \tag{T.13}$$

を得る. よって,

$$(\varphi', \varphi'') = (\frac{(\varphi, \eta)}{(\eta, \eta)} \cdot \eta, \varphi'') = \frac{(\varphi, \eta)}{(\eta, \eta)} \cdot (\eta, \varphi'') = 0 \tag{T.14}$$

も得られる.

(3&)の証明:

$$(\varphi'', \varphi') = 0 \Rightarrow \|\varphi''\| \leq \|\varphi\| \wedge \|\varphi''\| \leq \|\varphi\| \tag{T.15}$$

を示そう.

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\varphi\|^2 &= (\varphi' + \varphi'', \varphi' + \varphi'') = (\varphi', \varphi') + (\varphi'', \varphi'') \\ &\leq \|\varphi'\|^2 + \|\varphi''\|^2 \geq \max\{\|\varphi'\|^2, \|\varphi''\|^2\} \end{aligned} \tag{T.16}$$

を得, これから明らか. □

(付録T終わり)

付録U. Shannonの相互情報量から眺めた包含情報量 $I(T\varphi, T\psi)$

本付録Uでは, 式(S.8)の情報容量 $C'(\varphi:\eta)$ に注目し, 本論文の包含情報量 $I_0(T\varphi, c \cdot T\psi) \equiv C'(T\varphi, c \cdot T\psi)$ を考えてみよう. 非零定数 $c(\neq 0)$ を導入し, $I_0(T\varphi, c \cdot T\psi)$ がパターンモデル $T\varphi$ の, $T\psi$ の非零定数 ($=c \neq 0$) 倍成分 $c \cdot T\psi$ を持つ直交分解から導かれる. $c \cdot T\psi$ を, $T\varphi$ 内に含まれている最大の $T\psi$ 成分に選ぶと, $I_0(T\varphi, c \cdot T\psi)$ は, Shannon相互情報量 $I(X, Y)$ と同じ意味合いを備えている $I(T\varphi, T\psi)$ となる事実が指摘される. パターン認識の数学的理論としてのSS理論 [B3], [B4] が, 通信の数学的理論であるShannon情報理論と対応をもってくる枠組の一端が露呈することになる.

U1. 包含情報量 $I_0(T\varphi, c \cdot T\psi)$ の導出

ある1つの非零定数 $c(\neq 0)$ を導入して, 包含情報量 $I_0(T\varphi, c \cdot T\psi)$ の公式を, パターンモデル $T\varphi$ の, $T\psi$ の非零定数 ($=c \neq 0$) 倍成分 $c \cdot T\psi$ を持つ直交分解から導いてみよう.

パターンモデル $T\varphi$ を, ある1つの非零定数 $c(\neq 0)$ を導入し, 2条件]

$$T\varphi = c \cdot T\psi + \eta \tag{U.1}$$

$$(T\psi, \eta) = 0 \tag{U.2}$$

を満たすように, 2成分 $c \cdot T\psi, \eta \in \mathfrak{H}$ に直交分解する. 直交式(U.2)が満たされるためには, 非零定数 $c(\neq 0)$ は特別な値でなければならない. 以下, この事態を説明しながら, 包含情報量 $I_0(T\varphi, c \cdot T\psi)$ の公式を, 導く.

$T\varphi$ を式(U.1)の如く表現する時、誤差は η である。この誤差 η のノルム $\|\eta\|$ の自乗 $\|\eta\|^2$ を最小にすることを考えよう。この解答は次の定理U1で与えられる。

[定理U1] (パターンモデル $T\varphi$ の直交分解定理)

2式(U.1), (U.2)によるパターンモデル $T\varphi$ の直交分解表現における誤差 η のノルムの自乗 $\|\eta\|^2$ を最小ならしめる非零定数 $c(\neq 0)$ は、

$$c = \frac{(T\varphi, T\phi)}{(T\phi, T\phi)} \quad (\text{U.3})$$

と与えられ、この時の誤差 η を η_{\min} と表現すれば、2式(U.1), (U.2)の再表現として、パターンモデル $T\varphi$ の直交分解

$$T\varphi = \frac{(T\varphi, T\phi)}{(T\phi, T\phi)} \cdot T\phi + \eta_{\min} \wedge (T\phi, \eta_{\min}) = 0 \quad (\text{U.4})$$

が成立する。

$$(\text{証明}) \quad \|\eta\|^2 = \|T\varphi - c \cdot T\phi\|^2 = (T\varphi - c \cdot T\phi, T\varphi - c \cdot T\phi) \quad (\text{U.5})$$

が最小になるとすれば、 \bar{c} を c の複素共役として、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \|\eta\|^2}{\partial c} = \left(\frac{\partial [T\varphi - c \cdot T\phi]}{\partial c}, T\varphi - c \cdot T\phi \right) + (T\varphi - c \cdot T\phi, \frac{\partial [T\varphi - c \cdot T\phi]}{\partial \bar{c}}) \\ &= \left(\frac{\partial [T\varphi - c \cdot T\phi]}{\partial c}, T\varphi - c \cdot T\phi \right) \quad \because \quad \frac{\partial c}{\partial \bar{c}} = 0 \\ &= (T\phi, T\varphi - c \cdot T\phi) \end{aligned} \quad (\text{U.6})$$

$$\therefore 0 = (T\varphi - c \cdot T\phi, T\phi) = (T\varphi, T\phi) - c \cdot (T\phi, T\phi)$$

を得、式(U.3)が成立することがわかる。よって、この式(U.3)を式(U.1)に代入すれば、式(U.4)の前半が得られ、式(U.4)の前半から得られる最小誤差

$$\eta_{\min} = T\varphi - c \cdot T\phi, \quad \text{where } c = \frac{(T\varphi, T\phi)}{(T\phi, T\phi)} \quad (\text{U.7})$$

を式(U.6)に代入すれば、式(U.4)の後半である直交式が得られる。 □

ここで、パターンモデル $T\varphi$ のノルム $\|T\varphi\|$ と最小誤差 η_{\min} のノルム $\|\eta_{\min}\|$ とのノルム比 $\frac{\|T\varphi\|}{\|\eta_{\min}\|}$ の自然対数

$$\log_e \frac{\|T\varphi\|}{\|\eta_{\min}\|} \quad (\text{U.8})$$

を $T\varphi$ 内に $\frac{(T\varphi, T\phi)}{(T\phi, T\phi)} \cdot T\phi$ が含まれる程度を表わす情報量であるといい、式(U.4)を考慮して、

$$I(T\varphi, T\phi) \equiv I_0(T\varphi, \frac{(T\varphi, T\phi)}{(T\phi, T\phi)} \cdot T\phi) \equiv \log_e \frac{\|T\varphi\|}{\|\eta_{\min}\|} = \log_e \frac{\|T\varphi\|}{\left\| T\varphi - \frac{(T\varphi, T\phi)}{(T\phi, T\phi)} \cdot T\phi \right\|} \quad (\text{U.9})$$

と表わす。改めて、

$$I(T\varphi, T\phi) \text{ は } T\varphi \text{ 内に } T\phi \text{ が含まれる程度を表わす情報量である} \quad (\text{U.10})$$

と、解釈し直す。

このとき、包含情報量 $I(T\varphi, T\phi)$ は次の定理U2で式(U.11)の如く具体的に表わされる。

[定理U2] (包含情報量 $I(T\varphi, T\phi)$ の表現定理)

$$I(T\varphi, T\phi) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \frac{|(T\varphi, T\phi)|^2}{\|T\varphi\| \cdot \|T\phi\|} \right] \tag{U.11}$$

(証明) 先ず,

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_3 \wedge (\varphi_2, \varphi_3) = 0 \tag{U.12}$$

の時,

$$\|\varphi_1\|^2 = \|\varphi_2\|^2 + \|\varphi_3\|^2 \tag{U.13}$$

が成立することを, 2式(U.3), (U.4)に適用すれば,

$$\|T\varphi\|^2 = \|c \cdot T\phi\|^2 + \|\eta_{\min}\|^2, \text{ where } c = \frac{(T\varphi, T\phi)}{\|T\phi, T\phi\|} \tag{U.14}$$

が得られる. よって,

$$\begin{aligned} \|\eta_{\min}\|^2 &= \|T\varphi\|^2 - \|c \cdot T\phi\|^2 \\ &= \|T\varphi\|^2 - |c|^2 \cdot \|T\phi\|^2 \\ \therefore \frac{\|\eta_{\min}\|^2}{\|T\varphi\|^2} &= 1 - |c|^2 \cdot \frac{\|T\phi\|^2}{\|T\varphi\|^2} \\ &= 1 - \frac{|(T\varphi, T\phi)|^2}{\|T\phi\|^4} \cdot \frac{\|T\phi\|^2}{\|T\varphi\|^2} \\ &= 1 - \frac{|(T\varphi, T\phi)|^2}{\|T\varphi\| \cdot \|T\phi\|} \end{aligned} \tag{U.15}$$

が成立し, この式(U.15)を包含情報量 $I(T\varphi, T\phi)$ の定義式(U.9)から得られる公式

$$I(T\varphi, T\phi) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e \frac{\|\eta_{\min}\|^2}{\|T\varphi\|^2} \tag{U.16}$$

に代入すれば, 所要の式(U.11)が得られる. □

U2. Shannonの相互情報量 $I(X, Y)$ との対応

Shannonの情報理論{A15}, [A21]では,

(平均的な)不確定さを表す情報量=事象の生起確率の逆数の対数の平均値
という設定の下で, (平均的な)相互情報量 $I(X, Y)$ が考えられており, この $I(X, Y)$ には.

$I(X, Y)$

= [送信側で送信信号の集合 X に存在する(平均的な)不確定さを表す情報量]

— [受信側で受信信号の集合 Y を受け取っても, X に存在する(平均的な)不確定さを表す情報量]

=受信側で受信信号の集合 Y を受け取ることにより, 送信信号の集合 X から取り去られた(平均的な)不確定さを表す情報量]

という意味がある.

$T\varphi$ が $T\phi$ に最大限歪んでいる場合とは, $T\varphi$ が $T\phi$ に直交していることをいう.

S_0 ≡ 最大の歪 =

$$T\varphi \text{ が } T\phi \text{ に最大限歪んでいる場合の, } \|T\varphi\|, \|T\phi\| \text{ を2辺とする平行四辺形の面積 } \|T\varphi\| \cdot \|T\phi\| \tag{U.1}$$

$T\phi$ から $T\psi$ へ向かう $T\phi, T\psi$ 間の角を $(0 \leq \tau \leq \pi)$ とすると,

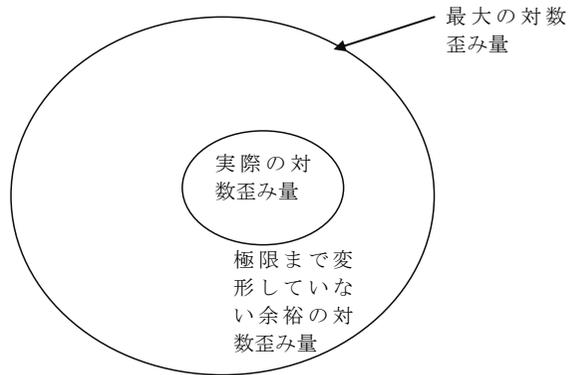
$$S \equiv \text{実際に起こっている歪} = \|T\phi\|, \|T\psi\| \text{を2辺とする平行四辺形の面積} \|T\phi\| \cdot \|T\psi\| \cdot \sin \tau \quad (\text{U.2})$$

$$I \equiv \log_e S_0 - \log_e S = \log_e \frac{S_0}{S} = \log_e \frac{1}{\sin \tau} \quad (\text{U.3})$$

は、 $T\phi$ が $T\psi$ に全く歪んでいない場合に至らない迄の、余裕の対数歪み(極限まで変形していない余裕の対数歪み量)を表わしていることがわかる。 I は、正に、Shannon相互情報量 $I(X, Y)$ と同じ意味合いを備えていることになる。この I は、 $T\phi$ が $T\psi$ を含んでいる程度を表す情報量(包含情報量; amount of information of $T\psi$ contained in $T\phi$)

$$I(T\phi, T\psi) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \frac{|(T\phi, T\psi)|^2}{\|T\phi\| \cdot \|T\psi\|} \right]$$

に一致することがわかる。



図U.1 極限まで変形していない余裕の対数歪み量

Fig.U.1 Amount of logarithm room warp not transformed to the utmost limit

(付録U終わり)

付録V. 3重外積の、剰余による表現

付録Oの定理O1の式(O.5)から明らかであるが、念のため、直接、証明してみよう。

式(3.5)の添え字集合 $L_k (k=1, 2, \dots, n)$ に注意しておく。次の定理V1は付録Oの式(O.4)の右辺を具体的に計算したものである。

[定理V1] (3重外積の、剰余による表現定理)

$$\varphi'' < k > \equiv \frac{1}{[\eta < k >, \eta < k >]} \cdot \eta < k > \otimes (\varphi < k > \otimes \eta < k >) \quad (\text{V.1})$$

について,

$$\varphi'' < k > \equiv \varphi < k > - \frac{1}{[\eta < k >, \eta < k >]} \cdot \eta < k > \cdot [\varphi < k >, \eta < k >] \quad (\text{V.2})$$

[定理の系1] (3重外積の, 成分表現定理)

$$\varphi \langle k \rangle = \sum_{\ell \in L_k} c_\ell \cdot \phi_\ell \tag{V.3}$$

$$\eta \langle k \rangle = \sum_{\ell \in L_k} d_\ell \cdot \phi_\ell \tag{V.4}$$

とすると,

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \varphi \langle k \rangle &= \frac{1}{[\eta \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle]} \cdot \eta \langle k \rangle \cdot [\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle] \\ &= \frac{1}{\sum_{\ell \in L_k} d_\ell^2} \cdot \sum_{\ell \in L_k} f_\ell \cdot \phi_\ell \end{aligned} \tag{V.5}$$

ここに,

$$f_\ell \equiv \sum_{q \in L_k} d_q \cdot \begin{vmatrix} c_\ell & d_\ell \\ c_q & d_q \end{vmatrix} \tag{V.6}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \varphi'' \langle k \rangle &\equiv \frac{1}{[\eta \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle]} \cdot \eta \langle k \rangle \otimes (\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle) \\ &= \frac{1}{\sum_{\ell \in L_k} d_\ell^2} \cdot \\ &\quad \left[\phi_{3k-2} \cdot \begin{vmatrix} d_{3k-1} & -u_{3k-1} \\ d_{3k} & u_{3k} \end{vmatrix} - \phi_{3k-1} \cdot \begin{vmatrix} d_{3k-2} & u_{3k-2} \\ d_{3k} & u_{3k} \end{vmatrix} + \phi_{3k} \cdot \begin{vmatrix} d_{3k-2} & u_{3k-2} \\ d_{3k-1} & -u_{3k-1} \end{vmatrix} \right] \end{aligned} \tag{V.7}$$

, where

$$u_{3k-2} \equiv \begin{vmatrix} c_{3k-1} & d_{3k-1} \\ c_{3k} & d_{3k} \end{vmatrix} \tag{V.8}$$

$$u_{3k-1} \equiv \begin{vmatrix} c_{3k-2} & d_{3k-2} \\ c_{3k} & d_{3k} \end{vmatrix} \tag{V.9}$$

$$u_{3k} \equiv \begin{vmatrix} c_{3k-2} & d_{3k-2} \\ c_{3k-1} & d_{3k-1} \end{vmatrix} \tag{V.10}$$

(定理V1, 並びに, その系1の証明) 先ず, 系1を証明する. (i)については,

$$\begin{aligned} \varphi \langle k \rangle &= \frac{1}{[\eta \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle]} \cdot \eta \langle k \rangle \cdot [\varphi \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle] \\ &= \sum_{\ell \in L_k} c_\ell \cdot \phi_\ell - \frac{\sum_{p \in L_k} c_p \cdot d_p}{\sum_{q \in L_k} d_q^2} \cdot \sum_{\ell \in L_k} d_\ell \cdot \phi_\ell \\ &= \sum_{\ell \in L_k} \left[c_\ell - \frac{\sum_{p \in L_k} c_p \cdot d_p}{\sum_{q \in L_k} d_q^2} \cdot d_\ell \right] \cdot \phi_\ell \\ &= \frac{1}{\sum_{q \in L_k} d_q^2} \sum_{\ell \in L_k} \left[c_\ell \cdot \sum_{q \in L_k} d_q^2 - (\sum_{p \in L_k} c_p \cdot d_p) \cdot d_\ell \right] \cdot \phi_\ell \end{aligned} \tag{V.11}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sum_{q \in L_k} d_q^2} \sum_{\ell \in L_k} [c_\ell \cdot \sum_{q \in L_k} d_q^2 - (\sum_{q \in L_k} c_q \cdot d_q) \cdot d_\ell] \cdot \phi_\ell \\
 &= \frac{1}{\sum_{q \in L_k} d_q^2} \sum_{\ell \in L_k} [\sum_{q \in L_k} (c_\ell \cdot d_q - c_q \cdot d_\ell) \cdot d_q] \cdot \phi_\ell \\
 &= \frac{1}{\sum_{q \in L_k} d_q^2} \sum_{\ell \in L_k} f_\ell \cdot \phi_\ell
 \end{aligned} \tag{V.12}$$

と，示された．次に，(ii)については，

$$\begin{aligned}
 &\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle \\
 &= \begin{vmatrix} \phi_{3k-2} & c_{3k-2} & d_{3k-2} \\ \phi_{3k-1} & c_{3k-1} & d_{3k-1} \\ \phi_{3k} & c_{3k} & d_{3k} \end{vmatrix} \\
 &= \phi_{3k-2} \cdot u_{3k-2} - \phi_{3k-1} \cdot u_{3k-1} + \phi_{3k} \cdot u_{3k}
 \end{aligned} \tag{V.13}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
 \varphi'' \langle k \rangle &\equiv \frac{1}{[\eta \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle]} \cdot \eta \langle k \rangle \otimes (\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle) \\
 &= \frac{1}{\sum_{\ell \in L_k} d_\ell^2} \cdot \begin{vmatrix} \phi_{3k-2} & d_{3k-2} & u_{3k-2} \\ \phi_{3k-1} & d_{3k-1} & -u_{3k-1} \\ \phi_{3k} & d_{3k} & u_{3k} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sum_{\ell \in L_k} d_\ell^2} \cdot \\
 &[\phi_{3k-2} \cdot \begin{vmatrix} d_{3k-1} & -u_{3k-1} \\ d_{3k} & u_{3k} \end{vmatrix} - \phi_{3k-1} \cdot \begin{vmatrix} d_{3k-2} & u_{3k-2} \\ d_{3k} & u_{3k} \end{vmatrix} + \phi_{3k} \cdot \begin{vmatrix} d_{3k-2} & u_{3k-2} \\ d_{3k-1} & -u_{3k-1} \end{vmatrix}]
 \end{aligned} \tag{V.14}$$

を得，示された．

本定理を証明しよう．

$$\begin{aligned}
 &[\eta \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle] \cdot [\varphi \langle k \rangle - \frac{1}{[\eta \langle k \rangle, \eta \langle k \rangle]} \cdot \eta \langle k \rangle \otimes (\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle)] \\
 &= \eta \langle k \rangle \otimes (\varphi \langle k \rangle \otimes \eta \langle k \rangle)
 \end{aligned} \tag{V.15}$$

を示せばよい．つまり，系1の2表現(i)，(ii)を使い，左辺，右辺の $\phi_{3k-2}, \phi_{3k-1}, \phi_{3k}$ の係数が一致することを示せばよい．

(1#) 左辺，右辺の ϕ_{3k-2} の係数が一致することを示す．

左辺の ϕ_{3k-2} の係数 f_{3k-2}

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{q \in L_k} d_q \cdot \begin{vmatrix} c_{3k-2} & d_{3k-2} \\ c_q & d_q \end{vmatrix} \\
 &= d_{3k-1} \cdot \begin{vmatrix} c_{3k-2} & d_{3k-2} \\ c_{3k-1} & d_{3k-1} \end{vmatrix} + d_{3k} \cdot \begin{vmatrix} c_{3k-2} & d_{3k-2} \\ c_{3k} & d_{3k} \end{vmatrix} \\
 &= d_{3k-1} \cdot u_{3k} + d_{3k} \cdot u_{3k-1} \\
 &= \begin{vmatrix} d_{3k-1} & -u_{3k-1} \\ d_{3k} & u_{3k} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

= 右辺の ϕ_{3k-2} の係数 (V.16)

(2#) 左辺, 右辺の ϕ_{3k-1} の係数が一致することを示す.

左辺の ϕ_{3k-1} の係数 f_{3k-1}

$$\begin{aligned} &= \sum_{q \in I_k} d_q \cdot \begin{vmatrix} c_{3k-1} & d_{3k-1} \\ c_q & d_q \end{vmatrix} \\ &= d_{3k-2} \cdot \begin{vmatrix} c_{3k-1} & d_{3k-1} \\ c_{3k-2} & d_{3k-2} \end{vmatrix} + d_{3k} \cdot \begin{vmatrix} c_{3k-1} & d_{3k-1} \\ c_{3k} & d_{3k} \end{vmatrix} \\ &= d_{3k-2} \cdot (-u_{3k}) + d_{3k} \cdot u_{3k-2} \\ &= - \begin{vmatrix} d_{3k-2} & u_{3k-2} \\ d_{3k} & u_{3k} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

= 右辺の ϕ_{3k-1} の係数 (V.17)

(3#) 左辺, 右辺の ϕ_{3k} の係数が一致することを示す.

左辺の ϕ_{3k} の係数 f_{3k}

$$\begin{aligned} &= \sum_{q \in I_k} d_q \cdot \begin{vmatrix} c_{3k} & d_{3k} \\ c_q & d_q \end{vmatrix} \\ &= d_{3k-2} \cdot \begin{vmatrix} c_{3k} & d_{3k} \\ c_{3k-2} & d_{3k-2} \end{vmatrix} + d_{3k-1} \cdot \begin{vmatrix} c_{3k} & d_{3k} \\ c_{3k-1} & d_{3k-1} \end{vmatrix} \\ &= d_{3k-2} \cdot (-u_{3k-1}) + d_{3k-1} \cdot (-u_{3k-2}) \\ &= - \begin{vmatrix} d_{3k-2} & u_{3k-2} \\ d_{3k-1} & -u_{3k-1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

= 右辺の ϕ_{3k} の係数 (V.18)

□

(付録V終わり)

(著者 鈴木昇一, 論文題目 新しいパターン外積演算と, 発想推論に役立つ異種想起の働き, 文教大学情報学部情報研究no. 投稿論文, 投稿年月日 2007年3月28日(水))

