認識の階層とC-RECOGNITRON

鈴木　昇一

A Hierarchy of Recognition and C-RECOGNITRON

Shoichi Suzuki

あらまし

SS理論と名付けられたパターン認識の数学的理論に登場するRECOGNITRONは，処理の対象とする問題の入力パターン $\varphi \in \Phi$ に対応し，

“axiom 1を満たすパターンモデル $T\varphi$ ”

を求め， $T\varphi$ を恰も， φ かのように扱う． Φ は，処理の対象とする問題のパターンの集合である．このとき，写像 $T : \Phi \to \Phi$ はパターンモデル構成作用素と呼ばれる．axiom 2，3を各々満たす類似度関数

$$SM : \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \le s \le 1\}$$

と，大分類関数

$$BSC : \Phi \times J \to \{0,1\}$$

を構成すれば，RECOGNITRONは，

“入力パターン φ に関する連想形認識方程式”

を解くことによって，

（1） φ から想起される代表パターン ω_j のモデル $T\omega_j$ を決定すること（連想）

（2） φ が帰属するカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ を求めること（認識）

の2つができる．ここに，連想形認識方程式を解くとき，パターン $\varphi \in \Phi$ は，カテゴリの部分集合

$$\mathfrak{C}(\gamma) \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid i \in \gamma \subseteq J\}$$

の1つ $\mathfrak{C}_j$（第 $j \in J$ 番目のカテゴリ）に帰属していると仮定される．この仮定は，カテゴリ帰属知識（categorical membership-knowledge）

$$< \varphi, \gamma >$$

で表される． J はすべてのカテゴリ番号 j からなる集合である． 2^J は，

$$2^J = \{\gamma \mid \gamma \subseteq J\}$$

と定義されており，カテゴリ番号 j からなる部分集合 $\gamma(\subseteq J)$ のすべての集合である．

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\}$$

は第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の持つ諸性質を典型的に反映しているという意味で，代表パターンと称される ω_j のすべての集合である． $\mathfrak{C}(J)$ は，全カテゴリの集合である．

$<\Phi,2^J>\equiv\{<\varphi,\gamma>|\varphi\in\Phi,\gamma\in 2^J\}$

は，認識システムRECOGNITRONの持つすべてのカテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$の集合であり，カテゴリ帰属知識空間（categorical membership-knowledge space）と呼ばれる．

本論文では，2種類の連想形認識システムを構成する：

（1＃） $\mu\in 2^J$ を助変数に持つ構造受精変換$TA(\mu)T$ の不動点方程式を終了条件とし，その求解過程の近似が，

カテゴリ帰属知識に関する連想形認識方程式の，半順序関係$\leq_\Delta^*$についての最小不動点（カテゴリ帰属知識）

$<\phi_t,\lambda_t>\in<\Phi,2^J>$

を次第に求めていく過程となる

ものを，エネルギー不等式（SSポテンシャルに関する不等式）が成立する形で生成・生成することによって，入力パターン$\varphi\in\Phi$を多段階認識するシステムRECOGNITRON.

（2＃）カテゴリ帰属知識 $<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J>$ を多段階認識するC-RECOGNITRON. □

その後，高階の認識システムは低階の認識システムより抽象度の高い情報を処理しているという想定の下で，RECOGNITRINがパターンを多段階連想処理するときの作業記憶状態（カテゴリ帰属知識）をパターンとみなし，認識処理するのが，認識システム C-RECOGNITRONであること，つまり，

（3＃）C-RECOGNITRONがRECOGNITRINより1つ上の認識階層を形成すること

が明らかにされる．

パターンと判明しているφの集合（基本領域）$\Phi_B(\subset\Phi)$が与えられたとしよう．

認識システム RECOGNITRONは4要素Φ_B,T,SM,BSCから定まるので，

$\text{RECOGNITRON}=<\Phi_B,T,SM,BSC>$

と表記できる．そうすると，本論文で構成される高階の認識システム C-RECOGNITRONは，

$\text{C-RECOGNITRON}=<<\Phi_B,\Gamma_B>,\mathfrak{T},CSM,CBSC>$

と表記できる．

認識の階層が存在することを明らかにされたことにより，S.Suzukiにより提案されたSS理論の，普遍妥当性が，RECOGNITRONの持つ認識の万能性とあいまって，固められたことになる．

キーワード

（1）パターン認識の数学的理論（SS理論）　（2）カテゴリ帰属知識の直交分解
（3）包含情報量　（4）多段階帰納推理　（5）表象付き連想形認識　（6）高階層の認識

Abstract

A associative recognizer RECOGNITRON appearing in a mathematical theory of recognizing patterns named SS-theory seeks from an input original pattern $\varphi\in\Phi$ in question to be recognized a corresponding pattern-model $T\varphi$ which must satisfy axiom 1 suggested by S. Suzuki, and treats $T\varphi$ as though model $T\varphi$ would be an original pattern φ. Φ is a set of patterns.

The mapping $T:\Phi\to\Phi$ is called a model-construction operator. Provided that a similarity-measure function

$SM:\Phi\times\Omega\to\{s\mid 0\le s\le 1\}$

and a rough classifier

$BSC:\Phi\times J\to\{0,1\}$

are constructed so as to respectively satisfy axiom 2 and axiom 3, RECOGNITRON can determine two following outputs（1）and（2）:

（1）（association）a pattern-model $T\omega_j$ recalled from the input pattern φ.

（2）（recognition）a category $\mathfrak{C}_j$ to which φ belongs. □

J is a whole set of category-numbers. A set

$\Omega\equiv\{\omega_j\mid j\in J\}$

is a whole set of ω_j called a representative pattern of the jth category $\mathfrak{C}_j$.

$2^J=\{\gamma\mid\gamma\subseteq J\}$

is a set of all subsets of J, which is called a power set.

$\mathfrak{C}(\gamma)\equiv\{\mathfrak{C}_j\mid i\in\gamma\subseteq J\}$

means a categorical subset which is defined by a subset γ of J. An ordered pair

$<\varphi,\gamma>$ of $\varphi\in\Phi$ and $\gamma\in 2^J$

named a categorical membership-knowledge represents an internal state of memory when RECOGNITRON has beforehand a knowledge that pattern $\varphi\in\Phi$ belongs to one of the category-subset $\mathfrak{C}(\gamma)$

A set

$<\Phi,2^J>\equiv\{<\varphi,\gamma>\mid\varphi\in\Phi,\gamma\in 2^J\}$

is called a categorical membership-knowledge space.

A least upper bound of $<\Psi,\Gamma>(\equiv\{<\phi,\gamma>\mid\phi\in\Psi,\gamma\in\Gamma\})\subseteq<\Phi,2^J>$ concerning a partial ordering $\le_\Delta^*$ suggested by S. Suzuki is represented by $\bigsqcup_\Delta^*<\Psi,\Gamma>$. An equivalence relation $<\phi,\lambda>=_\Delta<\eta,\mu>$ means $\phi=\eta\wedge\lambda=\mu$.

Let us assume that RECOGNITRON knows beforehand that it is very likely that $\varphi\in\Phi$ will belong to one category $\mathfrak{C}_j$ of a set $\mathfrak{C}(\gamma)$. In order to associatively recognize an input pattern $\varphi\in\Phi$, the system RECOGNITRON must approximately solve an associative equation

$<\phi,\lambda>=_\Delta<T\varphi,\gamma>\bigsqcup_\Delta^* TA(\mu)T\cdot<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J>$

of recognition whose initial condition is a categorical membershim-knowledge $<T\varphi,\gamma>$, and a termination condition is a fixed-point equation

$<\phi,\lambda>=_\Delta TA(\mu)T\cdot<\phi,\lambda>$

of a structural fertilization transformation

$TA(\mu)T:<\Phi,2^J>\to<\Phi,2^J>(\mu\subseteq\gamma\in 2^J)$.

Then a multi-stage recognition is assumed to be a solving process

$<\phi_0,\lambda_0>,<\phi_1,\lambda_1>,\cdots,<\phi_{t-1},\lambda_{t-1}>,<\phi_t,\lambda_t>\in<\Phi,2^J>$

of the above-mentioned associative equation

$<\phi_{s+1},\lambda_{s+1}>=_\Delta<T\varphi,\gamma>\bigsqcup_\Delta^* TA(\mu_s)T\cdot<\phi_s,\lambda_s>\in<\Phi,2^J>,s=0,1,2,\cdots,t-1$

such that for any integer $s\in\{0,1,2,\cdots,t-1\}$

$<\phi_{s+1},\lambda_{s+1}>=_\Delta TA(\mu_s)T\cdot<\phi_s,\lambda_s>$,

where an initial condition $<\phi_0,\lambda_0>=_\Delta<T\varphi,\gamma>$

holds for a list $\mu_s \in 2^J$ of a number of category-numbers discovered by induction reasoning. Three following relations must hold:

①(a termination condition) $<\phi_t, \lambda_t> =_\Delta TA(\mu_t)T \cdot <\phi_t, \lambda_t>$.

②(a list of inequalities of potential energies $E(\phi_s, \lambda_s)$ s of knowledges $<\phi_s, \lambda_s>$)

$E(\phi_s, \lambda_s) > E(\phi_{s+1}, \lambda_{s+1})$

③(a zero potential) $E(\phi_t, \lambda_t) = 0$. □

Notice that $<\phi_t, \lambda_t> \in <\Phi, 2^J>$ must be a least fixed-point solution concerning a partial ordering $\leq_\Delta{}^*$ in the sense that

$<\phi_s, \lambda_s> \leq_\Delta{}^* <\phi_{s+1}, \lambda_{s+1}>$, $s = 0,1,2,\cdots,t-1$.

holds.

We shall construct a model-construction operator

$\mathfrak{T}: <\Phi, 2^J> \to <\Phi, 2^J>$

, a similarity-measure function

$CSM : <\Phi, 2^J> \times <\Omega, J> \to \{s \mid 0 \leq s \leq 1\}$

and a rough classifier

$CBSC : <\Phi, 2^J> \times J \to \{0,1\}$

, and therefore can obtain a multi-stage associative recognizer C-RECOGNITRON that is high by one order because it can recognize a categorical membership-knowledge as an internal state of working memory of RECOGNITRON by which $\varphi \in \Phi$ is recognized.

C-RECOGNITRON have as an internal state of working memory a categorical membership-knowledge $<<\varphi, \gamma>, \gamma'> \in <\Phi, 2^J>, 2^J>$ of the categorical membership-knowledge $<\varphi, \gamma> \in <\Phi, 2^J>$.

In this way there exists some recognition of high order in SS theory.

It supposes that a set Φ_B (called a basic domain) whose element is known to be pattern φ is given. The above-mentioned recognition system RECOGNITRON can be constructed only by four elements Φ_B, T, SM, BSC , and therefore can be symbolized by

RECOGNITRON $= <\Phi_B, T, SM, BSC>$.

Then C-RECOGNITRON of high order of recognition can be symbolized by

C-RECOGNITRON $= < <\Phi_B, \Gamma_B>, \mathfrak{T}, CSM, CBSC>$.

It means that the universal validity of SS theory proposed by S. Suzuki has been hardened by having shown clearly that the hierarchy of recognition exists and by the universality of recognition which could be proved before.

Key words

(1) a mathematical theory of recognizing patterns (SS theory)
(2) orthogonal decomposition of any categorical membership-knowledge
(3) amount of information contained in pattern
(4) multi-stage induction reasoning
(5) associative recognition with representation
(6) recognition of high order

第1章　まえがき

1.1　パターンφの標準形$T\varphi$

情報の表現法として，大きく分けて，パターン(pattern)，記号(symbol)の2種類がある．

パターンは，記号と異なり，変形を受けているのが通常である．パターンには通常，次の4種類(1)～(4)の如き変形がある：

(1) その構造の1部分が他のパターンに隠されて欠落している．

(2) 変質して構造の1部が崩れている．

(3) 不規則な雑音が加わり変質している．

(4) 規則的，或いは，不規則な座標変換がなされている．　□

このような変形を受ける以前の状態に戻すことをパターン正規化(normalization)という．パターンφに対し正規化で得られたパターンをパターンモデル(pattern-model)といい，$T\varphi$で表す．モデル構成作用素(model-construction operator)と呼ばれる写像Tが少なくとも満たすべき4性質(イ)，(ロ)，(ハ)，(二)は，SS理論によれば，次の通りである：

(イ)(零パターンの不動点性) $\varphi=0$のとき$T\varphi=0$.

(ロ)(モデルの，正定数不変性) aを任意の正実定数として，任意のパターンφに対し，
$\eta=a\cdot\varphi$について，$T\eta=\varphi$.

(ハ)(モデル化の完結性)任意のパターンφに対し，$\eta=T\varphi$について，$T\eta=\eta$.

(二)(写像Tの非零性) $T\varphi\neq 0$を満たすパターンφが処理の対象とする問題のパターンの集合Φ内に存在する．　□

性質(イ)は，背景すら存在しない無のパターン$\varphi=0$のモデル$T\varphi$はやはり無であることを要請している．この性質(イ)は，パターンφに多少の雑音が加わっていても作用素Tにより除去出来ることになる．

性質(ロ)は，一様にその振幅が伸縮されたパターン$\eta=a\cdot\varphi$が伸縮されていないパターンφと同一のモデル$T\varphi$を持つことを保証する．知覚の大きさに依存しないパターン認識の働きが確保されることになる．

性質(ハ)は，モデル$T\varphi$のモデル$T(T\varphi)$は元のモデル$T\varphi$であること，つまり，1度モデル$T\varphi$を求めると，もうそれ以上モデル化を行う必要はないというモデル化

$$\varphi\to T\varphi \tag{1.1}$$

の完結性を要請している．φを知覚すると，モデル$T\varphi$が原パターンφの代りに知覚的に確保されるという想定からは，$T\varphi$とφとの間に同一知覚原理

$$T(T\varphi)=T\varphi \tag{1.2}$$

が成立することになる．

性質(二)は，パターンの集合Φ内のすべてのパターンφが背景すら存在しないパターン$\varphi=0$に変換されることを阻止する．

パターン認識の働きは，変形を受けているであろうパターンが帰属する正しいカテゴリを，変形に依存しないで決定することである．このためには，先ず，変形を受けているパターンηが変形を受けていないパターンφと，

$$T\eta=T\varphi \tag{1.3}$$

というように，同一のパターンモデルを持つことである．この結果，モデル$T\varphi$はφの標準形

(canonical form)と称されてよい.

1.2　万能性認識システムRECOGNITRONより1つ高階である認識システムC-RECOGNITRONを同一原理で構成するという本研究の目的

似た者同士を集め，形成された各々の集団にそれぞれ，区別し得る名前(カテゴリ名)を与えることを分類(classification)という．分類後，個々のパターンはカテゴリ名で呼ばれることになる.

分類の対象となる非言語の情報表現をパターン(pattern)といい，パターン φ を分類する機能を備えたシステムをパターン認識システム(recognizer)という.

ある認識システムが認識した結果，或いは認識システムが出力した結果をパターンと見なし，このパターンを認識するシステムは前者の認識システムより1つ高階であるという.

同じ記号でも，「山」，「川」などよりも，「美」，「心」などの方が抽象度が高いと考えられる．同じパターンでも，単なる「風景画」よりも「ピカソの絵」の方が抽象度が高い．最も抽象度が低いのは現実的な物理世界であり，非常に高い抽象空間は複雑な思考空間である［A14].

高階の認識システムは低階の認識システムより抽象度の高い情報を処理しており，「抽象度が低ければ物理世界に近く，高ければ情報世界に近い」という「脳内情報処理」に関する知見［A8］からは，この構成事実は興味深い.

既にS.Suzukiにより構成されている万能性認識システムRECOGNITRONより1つ高階である認識システムC-RECOGNITRONを同一原理で構成できることを示すのが，本研究の目的である.

同一原理で構成され得るということは，以下での公理axiom 1～4を各々，満たさなければならないモデル構成作用素 T，類似度関数 SM，大分類関数 BSC，カテゴリ選択関数 CSF による認識の働きが普遍妥当性を備えていることを示している.

1.3　多段階パターン変換過程を採用した多段階認識法が，最大類似度を決定し，単段階で認識する方法(最大類似度法)に対し持つ優位性

パターン集合 Φ の任意の元 φ をとる．$T\varphi$ を見たり聞いたりしたならば，パターン φ と同じに見えたり聞こえたりするパターンモデル $T\varphi\in\Phi$ を確保したあと(同一知覚原理)，axiom 2を満たすという意味で類似度関数(similarity-measure function)と呼ばれる関数

$$SM:\Phi\times\Omega\to\{s\mid 0\le s\le 1\} \tag{1.4}$$

を使い，全カテゴリ集合

$$\mathfrak{C}(J)\equiv\{\mathfrak{C}_j\mid j\in J\} \tag{1.5}$$

と1対1の対応関係にある代表パターン集合

$$\Omega\equiv\{\omega_j\mid j\in J\} \tag{1.6}$$

の中から歪み測度(distortion measure)

$$dtm(T\varphi,\omega)\equiv 1-SM(T\varphi,\omega) \tag{1.7}$$

を最小にする $\omega\in\Omega(\subset\Phi)$ のモデル $T\omega\in\Phi$ を $\varphi\in\Phi$ に対応させるのが自然である．$SM(T\varphi,\omega)$ はモデル $T\varphi\in\Phi$ が代表パターン ω と似ている程度を表す1より大きくない非負実数である.

SM がモデル構成作用素と呼ばれる写像 T に不変であること，つまり，

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall\omega\in\Omega,SM(T\varphi,\omega)=SM(\varphi,\omega) \tag{1.8}$$

が成り立っている様に，2つの写像 T,SM が構成されていることが，$T\varphi\in\Phi$ を見たり聞いたりしたならば $\varphi\in\Phi$ と同じに見えたり聞こえたりするという同一知覚原理を保証できる源泉を与えるために

必要である．

$$\arg\min_{k\in K} f(k) \tag{1.9}$$

$$\arg\max_{k\in K} f(k) \tag{1.10}$$

は，各々，変数 $k\in K$ の実数値関数 $f(k)$ の最小値，最大値を与える変数 k の内，最も小さい値を表すと約束する．

パターン $\varphi\in\Phi$ を分類し，認識するためには，

$$J \ni j \tag{1.11}$$

$$= \arg\min_{\omega\in\Omega} dtm(T\varphi,\omega) \tag{1.12}$$

$$= \arg\max_{\omega\in\Omega} SM(T\varphi,\omega) \tag{1.13}$$

が成立していることに注目した“最大類似法というパターン認識の働き”を説明しよう．

入力パターン $\varphi\in\Phi$ について

$$SM(T\varphi,\omega_i), i\in J \tag{1.14}$$

の最大値 $SM(T\varphi,\omega_k)$ を選び，このようなカテゴリ番号 $k\in J$ の内最も若いカテゴリ番号を

$$j = \arg\max_{i\in J} SM(T\varphi,\omega_i)\in J \tag{1.15}$$

と決め，

$\varphi\in\Phi$ を $T\omega_j$ に対応させる働き　(1.16)

が最大類似度(の選定に伴うパターン認識)法である．このとき，

$\varphi\in\Phi$ は $\omega_j\in\Omega$ をその典型的な表現事例とする第 $j\in J$ 番目のカテゴリ(category；類概念)

$\mathfrak{C}_j \in \mathfrak{C}(J)$ に認識される　(1.17)

という．この対応を与える写像

$RG:\Phi\to\Omega$，或いは，$RG:\Phi\to\mathfrak{C}(J)$　(1.18)

が認識システムであり，認識する側recognizerにおいては処理の対象であったパターン $\varphi\in\Phi$ は最終的に $T\omega_j$ であるように見える．

上述の最大類似度法は，単段階パターン変換

$$(\varphi\to)\phi_0 \equiv T\varphi \to \phi_1 \equiv T\omega_j \tag{1.19}$$

を行っていると考えることができる．このパターン変容

“$T\varphi\to T\omega_j$”　(1.20)

は，知の解明を内部的に明らかにしようとする認知科学の観点からは，あまりにも唐突である．但し，量子力学［B22］的観測では，混合状態にある物理量がある値(実測値)として観測された瞬間，その物理量に対応しているある自己共役作用素の，その実測値と等しい固有値に帰属する唯1つの固有ベクトル(純粋状態)に，観測以前の混合状態は突然変容するとされているが［B1］，［B5］，［B23］．そして，この量子力学的突然変容の是非については，多数の論争がある．

“$T\varphi$”から“$T\omega_j$”への変容が唐突でなくするためには単段階パターン変容“$T\varphi\to T\omega_j$”を，以下の式(1.23)の如く，多段階パターン変容

“$T\varphi\to\cdots\to T\omega_j$”　(1.21)

を成し遂げる多段階認識の働きに設定し直す必要がある．それのみならず，

単段階(で，突然的に生じる)パターン変容から，多段階(にわたり次第に変換されていく)パター

ン変容への変更 (1.22)

は，知の内部メカニズムを解明しようとする認知科学の観点，或いは，“少なくとも人間の知を下回らない知”の構成を目的とする人工知能学の観点からも，次の利点をもたらす：

最大類似度法では，認識の働きが誤ったとき，その原因を2つの写像T,SMの構造に求めることしか出来ない．誤認識をもたらす諸原因を詳細に検討でき，その結果，学習(learning)の働きが有効に働き，正認識へと改良できる調整の余地の機能を備えた認識の働きの1つは，入力パターン$\varphi\in\Phi$をある代表パターンω_jのモデル$T\omega_j$に帰納推理で多段階にわたって，変換する過程(多段階パターン変換過程)を採用して得られることである．多段階パターン変換過程を介し，認識の働きの内部メカニズムを明らかにできるかも知れないし，正しい認識結果を得る様に途中の多段階変換を操作できるかも知れないからである． □

1.4 RECOGNITRONは，T,SM,BSCを使い入力パターンを多段階にわたり変形しながら認識する

多段階帰納推理の働きによるパターン認識の働きを説明しよう．

帰納推理の働きで多段階パターン変換

$$\exists j\in J,(\varphi\to)\phi_0\equiv T\varphi\to\phi_1\to\phi_2\to\cdots\to\phi_{t-1}\to\phi_t\equiv T\omega_j \tag{1.23}$$

を行い，

①$\varphi\in\Phi$に$T\omega_j$に対応させ($\varphi\in\Phi$から$T\omega_j$を連想し)，

②入力パターン$\varphi\in\Phi$を第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に分類・認識する

という連想型認識処理を遂行する認識システムRECOGNITRON［B3］，［B4］が，S.Suzukiにより考案されている．

今少し詳しく説明しよう．$\mathfrak{H}$は内積，ノルムを各々，$(\varphi,\eta),\|\varphi\|\equiv\sqrt{(\varphi,\varphi)}$とするある可分なヒルベルト空間とする．

$\Phi(\ni 0)(\subset\mathfrak{H})$は処理の対象とする問題のパターン$\varphi$の集合(パターン集合) (1.24)

$2^J\equiv\{\gamma\,|\,\gamma\subseteq J\}$は(パターン$\varphi\in\Phi$の帰属するかも知れない)カテゴリ$\mathfrak{C}_j$の添え字(カテゴリ番号)を要素とするすべての部分集合(カテゴリ番号集合)の集合 (1.25)

とする．2^Jの元はリストとして表されることがある．

処理の対象とする問題のパターン$\varphi\in\Phi$について，φが有限個のカテゴリ$\mathfrak{C}_i,i\in\gamma(\subseteq J)$の何れか1つのカテゴリに帰属している可能性があるという事前知識 (1.26)

を認識システムRECOGNITRONが持っている場合，このカテゴリ事前知識を

$$<\varphi,\gamma> \tag{1.27}$$

と表している．$<\varphi,\gamma>$はRECOGNITRONがパターン$\varphi\in\Phi$について持つカテゴリ帰属知識(categorical membership-knowledge)と呼ばれる．すべての$<\varphi,\gamma>$の集まり

$$<\Phi,2^J>(\ni<\varphi,\gamma>) \tag{1.28}$$

はカテゴリ帰属知識空間(space of categorical membership-knowledges)と呼ばれており，その代数的･幾何学的･解析的な諸性質は既に明らかにされている［B3］，［B4］．

$<\Phi,2^J>$上の同値関係$=_\Delta$は

$$<\varphi,\gamma>=_\Delta<\eta,\mu>\Leftrightarrow\varphi=\eta\wedge\gamma=\mu \tag{1.29}$$

と定義される．$<\Phi,2^J>$上の半順序$\leq_\Delta^*$の定義は少し込み入っており，ここでは割愛される［B4］．

半順序$\leq_\Delta^*$に関するカテゴリ帰属知識の部分集合$<\Psi,\Gamma>(\subseteq<\Phi,2^J>)$の上限は

$$\bigsqcup_{\Delta}{}^{*} < \Psi, \Gamma > \tag{1.30}$$

と表される．$< \Psi, \Gamma >$ が2つの元 $\{\varphi, \gamma >, < \eta, \mu > \in < \Phi, 2^j >$ からなる集合のときの

$$\bigsqcup_{\Delta}{}^{*} \{< \varphi, \gamma >, < \eta, \mu >\} \tag{1.31}$$

は，

$$< \varphi, \gamma > \bigsqcup_{\Delta}{}^{*} < \eta, \mu > \tag{1.32}$$

と表されることがある．

カテゴリ番号リスト $\mu \in 2^J$ を助変数に持つ構造受精作用素（structural-fertilization operator）と呼ばれる写像

$$A(\mu): \Phi \to \Phi \tag{1.33}$$

が，2.6節において

$$\text{類似度関数 } SM: \Phi \times \Omega \to \{s | \le s \le 1\} \tag{1.34}$$

$$\text{大分類関数 } BSC: \Phi \times J \to \{0,1\} \tag{1.35}$$

を使って導入され，この $A(\mu)$ の両側にモデル構成作用素 T を配置した写像

$$TA(\mu)T: \Phi \to \Phi \tag{1.36}$$

を考えることができる．式(1.36)の写像 $TA(\mu)T$ は，その定義域，値域が Φ である写像であるが，類似度関数 SM ，大分類関数 BSC を使って定義されるカテゴリ選択関数（category-selection function）

$$CSF: \Phi \times 2^j \to 2^j \tag{1.37}$$

を導入し，定義域，値域が $< \Phi, 2^J >$ である写像

$$TA(\mu)T < \varphi, \gamma > \in < \Phi, 2^J > \tag{1.38}$$

に拡張できる．それには，

$$TA(\mu)T < \varphi, \gamma > =_{\Delta} < TA(\mu \cap \gamma)T\varphi, CSF(\varphi, \mu \cap \gamma) > \in < \Phi, 2^J > \tag{1.39}$$

と定義すればよくて，この結果，式(1.36)の構造受精写像 $TA(\mu)T: \Phi \to \Phi$ は，構造受精変換と呼ばれる写像

$$TA(\mu)T: < \Phi, 2^J > \to < \Phi, 2^J > \tag{1.40}$$

に拡張される．

以上の準備の下で，実は，カテゴリ番号リスト $\mu \in 2^J$ を帰納推理の働きで選んだ後，連想形認識方程式

$$< \phi, \lambda > =_{\Delta} < T\varphi, \gamma > \bigsqcup_{\Delta}{}^{*} TA(\mu)T \cdot < \phi, \lambda > \in < \Phi, 2^J > \tag{1.41}$$

を解く過程の典型的なものが，多段階帰納推理認識システムRECOGNITRON［B3］，［B4］が原パターン $\varphi \in \Phi$ を認識する過程

$$< \phi_0, \lambda_0 >, < \phi_2, \lambda_2 >, \cdots, < \phi_{t-1}, \lambda_{t-1} >, < \phi_t, \lambda_t > \tag{1.42}$$

where

$$< \phi_0, \lambda_0 > =_{\Delta} < T\varphi, \gamma > \in < \Phi, 2^J > \text{ (initial condition)} \tag{1.43}$$

$$TA(\mu) < \phi_{s-1}, \lambda_{s-1} > =_{\Delta} < \phi_s, \lambda_s >, s = 1, 2, \cdots, t-1, t \text{ (recursive process)} \tag{1.44}$$

である．終了条件（terminal condition）は，不動点方程式（fixed-point equation）

$$TA(\mu)T < \phi_t, \lambda_t > =_{\Delta} < \phi_t, \lambda_t > \tag{1.45}$$

の成立である．このとき，$< \varphi, \gamma >$ のエネルギー（SSポテンシャル；SS-potential）

$$E(\varphi, \gamma): \Phi \times 2^J \to R^+ \text{ (非負実数全体の集合)} \tag{1.46}$$

を定義すれば，類似度関数 SM に関する直交条件［B4］の下で，エネルギー不等式

$$E(\phi_{s-1}, \lambda_{s-1}) \ge E(\phi_s, \lambda_s), s = 1, 2, \cdots, t-1, t \tag{1.47}$$

が成立する．類似度関数 SM に関するミックスチュア条件［B4］の下で，

$$\exists j \in J, <\phi_t, \lambda_t> =_\Delta <T\omega_j, [j]> \tag{1.48}$$

が成立し，このとき，入力パターン $\varphi \in \Phi$ は

（1%） $T\omega_j$ として再生され（パターン連想），

（2%）第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に分類・認識される

ということになる．

1.5　RECOGNITRONでの包含情報量 $I(\varphi,\phi)$ と，$\mathfrak{T}$，$CSM, CBSC$ を使い高階認識をする認識システムC-RECOGNITRONでの包含情報量 $I(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)$

次に，パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ が今1つのパターン $\phi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ に含まれている程度をSS情報量（包含情報量）$I(\varphi,\phi)$ として計量する手法を説明しよう．

互いに直交する“ノルムが1の元 $\frac{\phi}{\|\phi\|}(\neq 0)$ の定数倍 $a \cdot \frac{\phi}{\|\phi\|}$ とパターン $\varphi_\perp$”の和に，パターン φ を

$$\varphi = a \cdot \frac{\phi}{\|\phi\|} + \varphi_\perp \tag{1.49}$$

$$\wedge (\phi, \varphi_\perp) = 0 \tag{1.50}$$

と分解する．ここに，a はある複素定数である．ノルム比 $\frac{\|\varphi\|}{\|\varphi_\perp\|}$ の自然対数として，$I(\varphi,\phi)$ を

$$I(\varphi,\phi)$$

$$\equiv \log_e \frac{\|\varphi\|}{\|\varphi_\perp\|} \tag{1.51}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \log_e \frac{\|\varphi\|^2}{\|\varphi_\perp\|^2}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \log_e \frac{\|\varphi_\perp\|^2}{\|\varphi\|^2} \tag{1.52}$$

と定義すればよい．ピタゴラスの定理

$$\|\varphi\|^2 = |a|^2 + \|\varphi_\perp\|^2 \tag{1.53}$$

が成立しているので，

$$I(\varphi,\phi) = \log_e [1 - \frac{|a|^2}{\|\varphi_\perp\|^2}] \tag{1.54}$$

と変形される．ここで，複素定数 a は，直交式（1.50）より，

$$(\varphi, \frac{\phi}{\|\phi\|}) = a \tag{1.55}$$

と求められるので，結局，包含情報量 $I(\varphi,\phi)$ は

$$I(\varphi,\phi)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \log_e [1 - |\frac{(\varphi,\phi)}{\|\varphi\| \cdot \|\phi\|}|^2] \tag{1.56}$$

と表される．式（1.56）の包含情報量 $I(\varphi,\phi)$ から暗示を受けて，式（3.41）の包含情報量

$$I(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>) \tag{1.57}$$

が提案される.

1.6　RECOGNITRONよりも高階層にある認識システムC-RECOGNITRONの記号化C-RECOGNITRON $=<<\Phi_B,\Gamma_B>,\mathfrak{T},CSM,CBSC>$

本論文の研究目的は次のように述べられる：

式(1.56)の包含情報量 $I(\varphi,\phi)$ の形式を勘案し，カテゴリ帰属知識空間 $<\Phi,2^J>$ のある部分集合 $<\Psi,\Lambda>$ でのモデル構成作用素

$$\mathfrak{T}:<\Psi,\Lambda>\to:<\Psi,\Lambda> \tag{1.58}$$

と，類似度関数

$$CSM:<\Psi,\Lambda>\times<\Omega,\mathrm{J}>\to\{s\mid 0\le s\le 1\} \tag{1.59}$$

並びに，大分類関数

$$CBSC\ :<\Psi,\Lambda>\times J\to\{0,1\} \tag{1.60}$$

を構成することによって，

多段階パターン変換を帰納推理の働きで行い，ある代表パターンのモデルをこのパターン変換の不動点として，探索する“不動点探索形帰納推理多段階構造受精パターン変換認識システムRECOGNITRON”　(1.61)

の入力，記憶状態(多段階認識作業状態)，出力であるカテゴリ帰属知識

$$<\phi,\lambda>\in<\Psi,\Lambda> \tag{1.62}$$

をパターン入力とし，カテゴリ帰属知識のカテゴリ帰属知識

$$\langle<<\phi,\lambda>,\gamma>\in<<\Psi,\Lambda>,\Gamma> \tag{1.63}$$

を出力する1つだけ高階層の認識システムC-RECOGNITRON

(1.64)

を構成できる事実を示し，SS理論(パターン認識の数学的理論)によって，次第に抽象度の高い情報を処理しているという

“認識の働きの階層”　(1.65)

が構成され得ることが明らかにされる.　□

認識の階層が存在することを明らかにされたことにより，S.Suzukiにより提案されたSS理論の，普遍妥当性が，認識の万能性とあいまって，固められたことになる.

例えば，風景画像に関し計算機シュミレション済みの画像理解システム［B35］，［B38］，［B39］は，構成済みの万能性認識システムRECOGNITRON［B3］，［B4］の集合体からなる.

パターンと判明している φ の集合(基本領域；basic domain) $\Phi_B(\subset\Phi)$ が与えられたとしよう．このRECOGNITRONは4要素 Φ_B,T,SM,BSC から定まるので，

$$\text{RECOGNITRON}=<\Phi_B,T,SM,BSC> \tag{1.66}$$

と記号化されてよい．ならば，本論文で以下構成される高階の認識システムC-RECOGNITRONは，

$$\text{C-RECOGNITRON}=<<\Phi_B,\Gamma_B>,\ \mathfrak{T},\ CSM,\ CBSC> \tag{1.67}$$

と記号化される.

第2章　認識システムRECOGNITRON $=<\Phi_{\mathbf{B}}, T, SM, BSC>$

本章では，処理の対象とする問題の入力パターン $\varphi \in \Phi$ が帰属するであろう妥当なカテゴリ（類概念）$\mathfrak{C}_j$，並びに，φ から想起される妥当な表象としてのパターンモデル $T\omega_j$ を決定できるような方程式である

「認識システムRECOGNITRONが解かねばならない連想形認識方程式（SS方程式）」

に付随する事項が説明される．言い換えれば，

“RECOGNITRON $=<\Phi_B, T, SM, BSC>$ が入力パターン φ に対し持つカテゴリ事前帰属知識 $<T\varphi, J>$ を入力とすると，カテゴリ帰属知識 $<T\omega_j, [j]>$ を解に持つであろう連想形認識方程式（SS方程式）”　(2.1)

の構成に必要な4公理axiom 1～4と，それぞれの公理axiom 1～4を満たさなければならない対 $[\Phi, T]$，類似度関数 SM，大分類関数 BSC，カテゴリ選択関数 CSF とが説明され，連想形認識方程式の求解過程，求解結果に付随する事項が説明される．

2.1　認識システムRECOGNITRONの3構成要素 T, SM, BSC と，この3構成要素の2複合構成要素 $CSF, A(\mu)$，並びに，パターン認識過程としての「連想形認識方程式の求解過程」

先ず，S.Suzukiによって考案された認識システムRECOGNITRON $=<\Phi_B, T, SM, BSC>$ を考察の対象としよう．

2.1.1　認識システムRECOGNITRONの4構成要素 Φ_B， T, SM, BSC と，この3構成要素の2複合構成要素 $CSF, A(\mu)$

1つの集合

①パターンと判明している φ の集合なる基本領域（basic domain） Φ_B

と，3つの写像

②axiom 1の（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）の3後半，並びに，（ⅳ）を満たすモデル構成作用素（model-construction operator）

$$T : \Phi \to \Phi \tag{2.2}$$

③axiom 2を満たす類似度関数（similarity-measure function）

$$SM : \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \le s \le 1\} \tag{2.3}$$

④axiom 3を満たす大分類関数（binary-state func-tion，rough classifier）

$$BSC : \Phi \times J \to \{0,1\} \tag{2.4}$$

とが与えられれば，RECOGNITRONを構成できる．

RECOGNITRONの4構成要素 Φ_B, T, SM, BSC が構成されるならば，この3構成要素の2複合構成要素

⑤処理の対象とする問題のパターンの集合 Φ

⑥カテゴリ選択関数（category-selection function）

$$CSF : \Phi \times 2^J \to 2^J \tag{2.5}$$

⑦構造受精変換（transformation of structural-fertilization）

$$TA(\mu)T :< \Phi, 2^J > \to < \Phi, 2^J >, \text{where} \quad \mu \in 2^J \tag{2.6}$$

が定まる．

2.1.2　パターン認識過程としての「連想形認識方程式の求解過程」

認識システムRECOGNITRONが処理の対象とする問題のパターン（入力パターン）φ（のモデル $T\varphi$）がどのカテゴリに帰属するかについて，カテゴリ番号のリスト $\gamma(\in 2^J)$ 内の何れかの1つのカテゴリ番号 $i \in \gamma \in J$ を持つカテゴリ $\mathfrak{C}_i \in \mathfrak{C}(J)$ に帰属するという事前知識（カテゴリ帰属知識）を

$$<T\varphi,\gamma>$$

で表す．認識システムRECOGNITRONが φ に対しこのカテゴリ帰属知識 $<T\varphi,\gamma>$ を持っている場合，初期条件 $<\phi_0,\lambda_0>$ として，

$$<\phi_0,\lambda_0> =_\Delta <T\varphi,\gamma> \quad （つまり，\ \phi_0 \equiv T\varphi \wedge \lambda_0 \equiv \gamma） \tag{2.7}$$

を設定する．カテゴリ帰属知識のすべての集まりを $<\Phi,2^J>$ で表し，この集合 $<\Phi,2^J>$ にある半順序関係 $\leq_\Delta^*$ を考え，この半順序関係 $\leq_\Delta^*$ に関する集合 $<\Psi,\Lambda>(\subseteq <\Phi,2^J>)$ の上限（最小上界）を $\bigsqcup_\Delta^* <\Psi,\Lambda>(\in <\Phi,2^J>)$ で表す． 2^J はすべてのカテゴリ番号からなる集合 J の，すべての部分集合（をリストで表したもの）からなる集合である．

このとき，この初期条件式(2.7)を採用した連想形認識方程式

$$<\phi,\lambda> =_\Delta <T\varphi,\gamma> \bigsqcup_\Delta^* TA(\mu)T\cdot <\phi,\lambda> \tag{2.8}$$

を考えよう．解 $<\phi,\lambda> \in <\Phi,2^J>$ については，2性質

(1%) $TA(\mu)T\cdot <\phi,\lambda> \leq_\Delta^* <T\varphi,\gamma>$ ならば，$<\phi,\lambda> =_\Delta <T\varphi,\gamma>$

(2%) $<T\varphi,\gamma> \leq_\Delta^* TA(\mu)T\cdot <\phi,\lambda>$ ならば，$<\phi,\lambda> =_\Delta TA(\mu)T\cdot <\phi,\lambda>$

を要求したのが，連想形認識方程式(2.8)の意味である．

(1%)は， $TA(\mu)T$ を解 $<\phi,\lambda>$ に変換しても， $<T\varphi,\gamma>$ より簡潔に要約されない場合，解 $<\phi,\lambda>$ は初期値 $<T\varphi,\gamma>$ そのものであることを要求したものである．

(2%)は， $TA(\mu)T$ で $<T\phi,\gamma>$ を変換したら， $<T\varphi,\gamma>$ より一層簡潔に要約された $TA(\mu)T\cdot <T\phi,\gamma>$ が解 $<\phi,\lambda>$ であらねばならなくて，この操作を続けると，結局， $<\phi,\lambda>$ は変換 $TA(\mu)T$ によりもうこれ以上簡潔に要約されないような“変換 $TA(\mu)T$ の不動点”であらねばならないことを要求したものである．

この連想形認識方程式(2.8)の求解過程がRECOGNITRONによる入力パターン $\varphi \in \Phi$ の認識過程である．

通常，この求解過程の近似

$$\begin{aligned}&<\phi_0,\lambda_0>(=_\Delta <T\varphi,\gamma>) \to <\phi_1,\lambda_1> \to <\phi_2,\lambda_2> \to \cdots \to <\phi_s,\lambda_s> \to <\phi_{s+1},\lambda_{s+1}> \\ &\to \cdots \to <\phi_t,\lambda_t>\end{aligned} \tag{2.9}$$

が認識過程として採用され，入力パターン $\varphi \in \Phi$ が認識される．ここに，SSポテンシャル E の減少列

$$\begin{aligned}&E(\phi_0,\lambda_0) \geq E(\phi_1,\lambda_1) \geq E(\phi_2,\lambda_2) \geq \cdots \geq E(\phi_s,\lambda_s) \geq E(\phi_{s+1},\lambda_{s+1}) \\ &\geq \cdots \geq E(\phi_t,\lambda_t)\end{aligned} \tag{2.10}$$

が得られるように，帰納的推理の働きで候補カテゴリ番号の各リスト $\mu_s \in 2^J$ の列

$$\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_{s-1},\mu_s,\cdots,\mu_t \tag{2.11}$$

を選ぶ．特に，

$$\forall s \in \{0,1,2,\cdots,t\}, \mu_s = \gamma \tag{2.12}$$

と選定する場合が連想形認識方程式(2.8)の，典型的な求解過程である．また，RECOGNITRONが入力パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属に関し認識以前に全く無知（ignorance）である場合，

$$\gamma = J \tag{2.13}$$

と選ばざるを得ない．

さて，(2%)の場合，各カテゴリ帰属知識$<\phi_s,\lambda_s>$は

$$<\phi_{s+1},\lambda_{s+1}> =_\Delta TA(\mu_s)T\cdot<\phi_s,\lambda_s>,\quad s=0,1,2,\cdots,t \tag{2.14}$$

と定義され，然も，半順序関係$\le_\Delta^*$に関する連想形認識方程式(2.8)の最小不動点解を求める場合を採用すると，終了基準として，不動点方程式(fixed-point equation)

$$<\phi_t,\lambda_t> =_\Delta TA(\mu_t)T\cdot<\phi_t,\lambda_t> \tag{2.15}$$

の成立が採用される．

この結果，入力パターン$\varphi\in\Phi$は，

パターンϕ_tとして再生され(パターン想起の働き)，カテゴリ番号のリストλ_t内の何れかの1つのカテゴリ番号$j\in\lambda_t(\subseteq J)$を持つカテゴリ$\mathfrak{C}_j\in\mathfrak{C}(\lambda_t)$に分類される(パターン認識の働き)　(2.16)

ということになる．

全力カテゴリ集合$\mathfrak{C}(j)$の部分集合$\mathfrak{C}(\gamma)$，半順序関係$\le_\Delta^*$，同値関係$=_\Delta$，並びに，上限$\bigsqcup_\Delta^*$を含め，より詳細な事項等については，以下で説明される．

2.1.3　連想形認識過程の一般化

式(2.9)の連想形認識過程を一般化しよう．

処理の対象とする問題の入力パターン$\varphi\in\Phi$は，カテゴリ集合

$$\mathfrak{C}(\gamma)\equiv\{\mathfrak{C}_j \mid j\in\gamma\} \tag{2.17}$$

内の1つのカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属すると判明しているものとしよう．入力パターン$\varphi\in\Phi$の代りとなるパターンモデル$T\varphi\in\Phi$を求めた後，初期段階(第0認識段階)のパターン$\phi[0]$と，第0認識段階の候補カテゴリ番号リスト$\lambda[0]$とを

$$\phi[0]=T\varphi\in\Phi \tag{2.18}$$

$$\lambda[0]=\gamma\in 2^J \tag{2.19}$$

と設定する．

帰納推理による探索で各カテゴリ番号リスト$\mu_q[s]\in 2^J$を選び，この結果生じる各構造受精作用素$TA(\mu_q[s])T$の列

$$TA(\mu_q[s])T,\ q=1,2,\cdots,n_s \tag{2.20}$$

を用い，カテゴリ帰属知識$<\eta_q[s],\lambda_q[s]>$の列

$$<\eta_q[s],\lambda_q[s]>=_\Delta TA(\mu_q[s])T\cdot<\phi[s],\lambda[s]>\ ,q=1,2,\cdots,n_s \tag{2.21}$$

と派生させ，その内の1つ$<\eta_q[s],\lambda_q[s]>$を帰納推理の働きで選び，第$(s+1)$認識段階のカテゴリ帰属知識$<\phi[s+1],\lambda[s+1]>$を

$$<\phi[s+1],\lambda[s+1]> =_\Delta <\eta_q[s],\lambda_q[s]> \tag{2.22}$$

と，決定する．この決定に至る段階が第s認識段階から第$(s+1)$認識段階への，帰納推論による探索である．不動方程式

$$<\phi[t],\lambda[t]> =_\Delta TA(\mu_q[t])T\cdot<\phi[t],\lambda[t]> \tag{2.23}$$

が成立するなどの，探索のある終了規準を設定し，類似度最大条件

$$\exists j\in\lambda[t]\subseteq J,SM(\phi[t],\omega_j)=1 \tag{2.24}$$

を満たす第t段階(最終認識段階)のカテゴリ帰属知識$<\phi[t],\lambda[t]>$を含むようなカテゴリ帰属知識$<\phi[s],\lambda[s]>$の，半順序$\le_\Delta^*$に関する増大系列

$<\phi[0],\lambda[0]> \ \leq_{\Delta}{}^{*} <\phi[1],\lambda[1]> \leq_{\Delta}{}^{*} <\phi[2],\lambda[2]> \ \leq_{\Delta}{}^{*}\cdots$

$\cdots \leq_{\Delta}{}^{*} <\phi[s],\lambda[s]> \leq_{\Delta}{}^{*} <\phi[s+1],\lambda[s+1]> \leq_{\Delta}{}^{*}\cdots \ \cdots \leq_{\Delta}{}^{*} <\phi[t],\lambda[t]>$ (2.25)

を求めれば，帰納推論に基づいた“SS理論［B3]，[B4］での不動点多段階想起形認識”による2つの情報処理結果(イ)，(ロ)が得られる．大抵は，SS理論では，不動点方程式(2.23)から類似度最大条件式(2.24)が成立することが証明される：

（イ）(パターン認識)入力パターン$\varphi \in \Phi$は第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属する

（ロ）(パターン想起)入力パターン$\varphi \in \Phi$は$\phi[t]$として再生される

(2.26)

□

この想起形認識の働きを備えたのが認識システムRECOGNITRON $=<\Phi_B, T, SM, BSC>$ である．

2.2　axiom 1とパターンの基本領域Φ_B，パターン集合Φ，モデル構成作用素T，並びに，順序対$[\Phi,T]$

基本領域Φ_Bからパターン集合Φを得る方法を介して，パターン集合Φとモデル構成作用素Tとからなるaxiom 1を満たす順序対$[\Phi,T]$を確保しよう．

処理の対象とするパターンφの集合Φはある可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の，零元0を含むある部分集合であり，このΦ，並びに写像

$T:\Phi \to \Phi$ (2.27)

は次のaxiom 1を満たさなければならない．このとき，写像Tはモデル構成作用素(model-construction operator)と呼ばれ，$T\varphi \in \Phi$は$\varphi \in \Phi$の代りとなり得るという意味で，パターン$\varphi \in \Phi$のモデル(model)と呼ばれる．

<u>Axiom 1</u>（**パターン集合Φとモデル構成作用素Tとの対【Φ,T】の満たすべき公理**）

（ⅰ）(零元0のΦ-包含性と，零元0の$T-$不動点性；fixed-point property of zero element under mapping T)

$0 \in \Phi \wedge T0 = 0.$

（ⅱ）(Φの錐性，Tの正定数倍吸収性；cone property)

$\forall\varphi \in \Phi,\ \ a\cdot\varphi \in \Phi \wedge T(a\cdot\varphi) = T\varphi$

for any positive real number $a \in R^{++}$.

（ⅲ）(Φの埋込性(embeddedness)，Tのベキ等性(idempotency))

$\forall\varphi \in \Phi, T\varphi \in \Phi \wedge T(T\varphi) = T\varphi.$

（ⅳ）(写像Tの非零写像性；non-zero mapping property of T)

$\exists\varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0.$ □

パターンと判明しているφの集合(基本領域；basic domain) $\Phi_B(\ni 0)$と，すべての正実定数の集合R^{++}とを用意する．

次の定理2.1は，axiom 1を満たす順序対$[\Phi,T]$を決定している．

［定理2.1］(パターン集合Φとモデル構成作用素Tとの順序対【Φ,T】の基本構成定理)

式(2.27)の写像Tがaxiom 1の(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)の3後半，並びに，(ⅳ)を満たすとしよう．このとき，次の(イ)，(ロ)が成り立つ：

（イ）処理の対象とする問題のパターンの集合Φを，

$\Phi = R^{++}\cdot(\Phi_B \cup T\cdot\Phi_B) = R^{++}\cdot\Phi_B \cup R^{++}\cdot T\cdot\Phi_B$

,where $R^{++}\cdot\Phi_B \equiv \{r^{++}\cdot\varphi_B \mid r^{++}\in R^{++},\varphi_B\in\Phi_B\}$

$$R^{++}\cdot T\cdot\Phi_B \equiv \{r^{++}\cdot T\varphi_B \mid r^{++}\in R^{++},\varphi_B\in\Phi_B\} \tag{2.28}$$

の如く設定すれば,

$$\Phi_B \supset \{0\}\wedge$$
$$R^{++}\cdot\Phi=\Phi\wedge$$
$$T\cdot\Phi=T\cdot\Phi_B(\subset\Phi) \tag{2.29}$$

が成立し，axiom 1の（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）の3前半をΦは満たし，結局，順序対$[\Phi,T]$はaxiom 1を満たす.

（ロ）逆に，$\Phi_B(\ni 0)$を部分集合に持つΦがaxiom 1の（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）の3前半を満たすとすれば,

$$\Phi \supseteq \Phi_B\cup R^{++}\cdot\Phi\cup T\cdot\Phi$$

が成立するが，ここで，特に，等号が成立するような最小のΦを採用すれば，つまり，Φの集合論的再帰領域方程式（set-theoretic reflective domain equation）

$$\Phi = \Phi_B\cup R^{++}\cdot\Phi\cup T\cdot\Phi$$

の成立を仮定すれば，axiom 1を満たす対［Φ,T］のΦは式(2.28)のように表され，式(2.29)も成立する.

（証明）（イ）は文献［B4］，付録1の定理A1.1である.（ロ）は文献［B3］，pp.64-66（2.4節）で証明されている. □

2.3 axiom 2と類似度関数 *SM*

“正常なパターン”（well-formed pattern）は，ある1つのカテゴリ$\mathfrak{C}_j$（第$j\in J$番目の類概念）のみに帰属しているものとし，このような$\mathfrak{C}_j$のすべての集まり（有限集合）

$$\mathfrak{C}(J)\equiv\{\mathfrak{C}_j \mid j\in J\} \tag{2.30}$$

を想定する．$\mathfrak{C}_j$の備えている諸性質を典型的に備えている代表パターン（prototypical pattern）$\omega_j(\neq 0)$を1つ選定する．$\mathfrak{C}_j$は，典型（prototype）としての代表パターンω_jを中心とした緩やかなカテゴリであることを仮定したことに注意しておく．ここに,

$$\Omega\equiv\Omega(J)\equiv\{\omega_j \mid j\in J\}(\subseteq\Phi) \tag{2.31}$$

が式(2.30)の全カテゴリ集合$\mathfrak{C}(J)$に対応する代表パターンの集合である．式(2.31)の系Ωは,

複素定数a_jの組$\{a_j \mid j\in J\}$について

$$\sum_{j\in J} a_j\cdot\omega_j = 0 \Rightarrow \forall j\in J, a_j=0 \tag{2.32}$$

が成立しているという意味で，1次独立（linearly independent）でなければならない.

axiom 1を満たす式(2.27)のモデル構成作用素Tによって，式(2.31)の代表パターン集合Ωが変換されて得られる系

$$T\cdot\Omega\equiv T\cdot\Omega(J)\equiv\{T\omega \mid \omega\in\Omega\}(\subseteq T\cdot\Phi) \tag{2.33}$$

も1次独立であると要請する.

このとき，**類似度関数**（similarity-measure function）

$$SM:\Phi\times\Omega\to\{s \mid 0\le s\le 1\} \tag{2.34}$$

を導入し,

$SM(\varphi,\omega_j)=1,0$に従って，パターン$\varphi\in\Phi$は各々，ω_jと確定的な類似度関係，相違関係にあり，また，$0<SM(\varphi,\omega_j)<1$の場合は，あいまいな類似・相違関係にある (2.35)

と，SM を解釈しよう．

式(A3.5)の関数 SM は次のaxiom 2を満たすように構成されねばならない．Axiom 2の(ⅰ)では、クロネッカー(Kronecker)の δ 記号

$$\delta_{ij}=1 \quad if \quad i=j,=0 \quad if \quad i\neq j$$

が導入されているが、特にaxiom 2の(ⅰ)なるこの正規直交性は、候補カテゴリの分離・抽出が効果的に行われ，

候補カテゴリの**鋭利な削減**(a sharp reduction)

をもたらすために要請されている．

Axiom 2(類似度関数 SM の満たすべき公理)

(ⅰ)(正規直交性；orthonormality)

$$\forall i,\forall j, SM(\omega_i,\ \omega_j)=\delta_{ij}\ .$$

(ⅱ)(規格化条件，確率性，正規性；probability condition，normalization)

$$\forall\varphi\in\Phi,\sum_{j\in J}SM(\varphi,\omega_j)=1.$$

(ⅲ)(写像 T の下での不変性；invariance under mapping T)

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J, SM(T\varphi,\omega_j)=SM(\varphi,\omega_j).$$ □

次の定理2.2は，類似度関数 SM の出力 $SM(\varphi,\omega_j)$ がパターン変換 U に関し，不変に保たれるには，変換後のパターン $U\varphi$ が変換前のパターン φ と同一パターンモデル $T\varphi$ を持てばよいことを明らかにしている．．更に，SM がパターン $\varphi\in\Phi$ の正定数倍 $r^{++}\cdot\varphi\in\Phi$ に対し，元の類似度関数 SM の値を保存することを示している．

[定理2.2](類似度関数 SM の不変定理)

パターン変換

$$U:\Phi\to\Phi \tag{2.36}$$

について，$U-$不変性

$$T(U\varphi)=T\varphi \tag{2.37}$$

を満たすパターン $\varphi\in\Phi$ に対し，

$$\forall j\in J, SM(U\varphi,\omega_j)=SM(\varphi,\omega_j) \tag{2.38}$$

が成立し，また，

$$\forall r^{++}\in R^{++},\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J, SM(r^{++}\cdot\varphi,\omega_j)=SM(\varphi,\omega_j) \tag{2.39}$$

(証明) 不変式(2.39)を証明しよう．$U-$不変式(2.37)を満たすパターン $\varphi\in\Phi$ について，

$$\begin{aligned}&\forall j\in J, SM(U\varphi,\omega_j)\\&=SM(TU\varphi,\omega_j) \quad \because \quad \text{axiom 2の(ⅲ)}\\&=SM(T\varphi,\omega_j) \quad \because \quad U-\text{不変式(2.37)}\\&=SM(\varphi,\omega_j) \quad \because \quad \text{axiom 2の(ⅲ)}\end{aligned}$$

と，示された．不変式(2.39)も同様にして証明される． □

尚，第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の生起確率である非負実数 $p(\mathfrak{C}_j)$ を，2条件

$$[\forall j\in J, 0<p(\mathfrak{C}_j)<1]\wedge[\sum_{j\in J}p(\mathfrak{C}_j)=1]$$

を満たすものとして導入しておく．

2.4 axiom 3と大分類関数 BSC

大分類関数（rough classifier，binary-state classifier）と呼ばれる**2値関数**

$$BSC:\Phi\times J\to\{0,1\} \tag{2.40}$$

を，次のaxiom 3を満たすものとして導入し，解釈

パターン $\varphi\in\Phi$ の帰属する候補カテゴリの1つが第 $j\in J$ 番目の $\mathfrak{C}_j$ であるならば，

$$BSC(\varphi,j)=1 \text{ であることが望ましい} \tag{2.41}$$

を採用しよう．この際，注意すべきは，

$BSC(\varphi,j)=0$ であっても，パターン $\varphi\in\Phi$ の帰属する候補カテゴリの1つは，第 $j\in J$ 番目の $\mathfrak{C}_j$ でないとは限らない　（2.42）

としていることである．また，axiom 3の（ⅰ）からわかるように，**カテゴリ間の相互排除性**

（the mutual exclusion of the one category from the other categories）

$$\forall j\in J,\forall i\in J-\{j\},BSC(\omega_i,j)=0\,, \tag{2.43}$$

を公理として要請していない事実に注意しておこう．この事実を補うのが実は，式（2.34）の類似度関数 SM が満たさなければならないとしているaxiom 2の（ⅰ）（正規直交性）である．

<u>Axiom 3</u>（大分類関数 BSC の満たすべき公理）

（ⅰ）（**カテゴリ抽出能力**；category separability）

$\forall j\in J,BSC(\ \omega_j\,,\ j)=1.$

（ⅱ）（写像 T の下での不変性；invariance under mapping T）

$\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J,BSC(T\varphi,j)=BSC(\varphi,j).$ □

次の定理2.3は，axiom 3を満たす大分類関数 BSC の出力 $BSC(\varphi,j)$ がパターン変換 U に関し，不変に保たれるには，変換後のパターン $U\varphi$ が変換前のパターン φ と同一パターンモデル $T\varphi$ を持てばよいことを明らかにしている．更に，BSC がパターン $\varphi\in\Phi$ の正定数倍 $r^{++}\cdot\varphi\in\Phi$ に対し，元の大分類関数 BSC の値を保存することを示している．

［定理2.3］（大分類関数BSCの不変定理）

式（2.36）のパターン変換 U について，モデル構成作用素 T の $U-$ 不変式（2.37）が成立するような，パターン $\varphi\in\Phi$ に関し，

$$\forall j\in J,BSC(U\varphi,j)=BSC(\varphi,j) \tag{2.44}$$

が成立し，更に，

$$\forall r^{++}\in R^{++},\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J,BSC(r^{++}\cdot\varphi,j)=BSC(\varphi,j). \tag{2.45}$$

（証明）$\forall j\in J,BSC(U\varphi,j)$

$=BSC(T(U\varphi),j)$ 　$\because$ 　axiom 3，（ⅱ）

$=BSC(T\varphi,j)$ 　$\because$ 　$U-$ 不変式（2.37）

$=BSC(\varphi,j)$ 　$\because$ 　axiom 3，（ⅱ）

を得，$U-$ 不変式（2.44）の成立が示された．$U-$ 不変式（2.44）の成立も同様に示される． □

2.5 axiom 4と、カテゴリ選択関数CSFの構造形式

パターン $\varphi\in\Phi$ に対し，

「パターン $\varphi\in\Phi$ が、式（2.30）の全カテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J)$ の，式（2.17）の部分集合 $\mathfrak{C}(\gamma)$ 内の何れか1つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属する可能性がある」　（2.46）

という“パターン $\varphi\in\Phi$ の**カテゴリ帰属知識**（categorical membership-knowledge）”を認識システム

RECOGNITRONが持っているとする．RECOGNITRONが持っているこの知識を，

$$<\varphi,\ \gamma>\in<\Phi,2^J> \tag{2.47}$$

と表す．すべての$<\varphi,\gamma>$の集まり

$$<\Phi,2^J>\equiv\{<\varphi,\ \gamma>|\ \varphi\in\Phi,\ \gamma\in 2^J\} \tag{2.48}$$

は，**カテゴリ帰属知識空間**（categorical membership-knowledge space）と呼ばれ，パターン$\varphi\in\Phi$と，その要素がカテゴリ番号であるリスト$\gamma\in 2^J$のとのなす順序の付いた対リスト（an ordered pair list）$<\varphi,\ \gamma>$の，すべての集合である．ここに，2^Jは集合Jのすべての部分集合のなす集合，つまり，"すべてのカテゴリ番号の集合Jのべき集合（power set）"を表わしている．k個の要素$j_1,j_2,\cdots,j_k\in J$からなるリスト$\gamma\in 2^J$を

$$\gamma=[j_1\quad j_2\quad\cdots\quad j_k]\in 2^J \tag{2.49}$$

と表す．非重複性

$$「p\neq q\Rightarrow j_p\neq j_q」 \tag{2.50}$$

が成り立っている場合の$\gamma\in 2^J$は集合$\{j_1,j_2,\cdots,j_k\}$と同一視されることがある．特に，要素を1つも持たないリスト，つまり，空リスト$[\quad]\in 2^J$は空集合ϕで表されることがある．

カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$はパターン集合Φの意味領域である．その代数的･幾何学的･解析的構造は既に解明されている［B3］，［B4］．

カテゴリ選択関数（category-selection function）と呼ばれる写像

$$CSF:\Phi\times 2^J\to 2^J \tag{2.51}$$

は，包含関係（inclusion relation）

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall\gamma\in 2^J,\quad CSF(\varphi,\gamma))\subseteq\gamma\subseteq J\in 2^J \tag{2.52}$$

を満たし，然も，次のaxiom 4を満たすものとして，設定されるとしよう．

<u>Axiom 4</u>（カテゴリ選択関数CSFの満たすべき公理）

（ⅰ）$\varphi=0\vee\gamma=\phi$の場合

如何なるカテゴリ番号$k\in\gamma$も，$<\varphi,\ \gamma>$の有効な候補カテゴリの番号ではない．

（ⅱ）$\varphi\neq 0\wedge\gamma\neq\phi$であり，かつ，$SM(\varphi,\omega_k)=0\wedge BSC(\varphi,k)=0$の場合

カテゴリ番号$k\in\gamma$は，$<\varphi,\ \gamma>$の有効な候補カテゴリの番号ではない．

（ⅲ）$\varphi\neq 0\wedge\gamma\neq\phi$であり，かつ，$\sum_{k\in\gamma}BSC(\varphi,k)=0$の場合

$SM(\varphi,\omega_k)>0$であるようなカテゴリ番号$k\in\gamma$は，$<\varphi,\ \gamma>$の有効な候補カテゴリの番号である．

（ⅳ）$\varphi\neq 0\wedge\gamma\neq\phi$であり，かつ，$\sum_{k\in\gamma}BSC(\varphi,k)>0$の場合

（ⅳ-1）$BSC(\varphi,k)=0$なるカテゴリ番号$k\in\gamma$は，$<\varphi,\ \gamma>$の有効な候補カテゴリの番号ではない．

（ⅳ-2）$BSC(\varphi,k)=1$なるカテゴリ番号$k\in\gamma$は，$SM(\varphi,\omega_k)>0$であれば，$<\varphi,\ \gamma>$の有効な候補カテゴリの番号である．　□

次の定理A5では，式（2.35）の写像CSFは，式（2.22）の類似度関数SM，式（2.27）の大分類関数BSCを使用する形式で，

その定義域が$\Phi\times 2^J$であり，その値域が，パターン$\varphi\in\Phi$のカテゴリ帰属知識$<\varphi,\ \gamma>\in<\Phi,2^J>$の"有効な"候補カテゴリの番号からなるリスト（a list of significant category-numbers）の集合であ

るの如く，構成されている．

次の定理2.4は，axiom 4を満たすように，式(2.51)のカテゴリ選択関数 CSF の構造を決定したものである．以後，この定理2.4で求められたカテゴリ選択関数 CSF を用いる．

［定理2.4］（カテゴリ選択関数 CSF の構成定理）

次のように定義される式(2.51)の写像 CSF の1つは，包含式(2.52)と上述のaxiom 4を満たす：

（ｉ） $\varphi=0 \vee \gamma=\phi$ の場合

$$CSF(\varphi,\gamma)=\phi. \tag{2.53}$$

（ⅱ） $\varphi\neq 0 \wedge \gamma\neq\phi$ の場合

$$CSF(\varphi,\gamma)=$$

$$\begin{cases} \{k\in\gamma \mid SM(\varphi,\omega_k)>0\} \quad \text{if} \ \sum_{k\in\gamma} BSC(\varphi,k)=0 & (2.54) \\ \{k\in\gamma \mid SM(\varphi,\omega_k)>0 \wedge BSC(\varphi,k)=1\} \quad \text{if} \ \sum_{k\in\gamma} BSC(\varphi,k)>0 & (2.55) \end{cases}$$

（証明）文献［B3］の定理E1である． □

定理2.4のカテゴリ選択関数 CSF について，次のように解釈できる:

処理の対象とするパターン $\varphi\in\Phi$ がカテゴリ $\mathfrak{C}_j$，j∈ γ の何れか1つに帰属する可能性があると想定した場合，更に絞り込んで，その内のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$，j $\in CSF(\varphi,\gamma)\subseteq\gamma$ の何れか1つに帰属する可能性があると帰納推論(inductive reasoning)できる機能を備え，その出力 $CSF(\varphi,\gamma)$ はパターン $\varphi\in\Phi$ の有効な候補カテゴリの番号のリストを与えている． □

定理2.4で登場している写像CSFの機能の一部を，明らかにしよう．

次の定理A4は，axiom 4を満たすカテゴリ選択関数 CSF がパターン $\varphi\in\Phi$ の正定数倍 $r^{++}\cdot\varphi\in\Phi$ に対しても，更に，モデル構成作用素 T の作用の下でも，最後に座標変換 U の下でも，元の CSF の値を保存することを示している．

［定理2.5］（カテゴリ選択関数 CSF のモデル構成作用素 T の下での不変性，正定数不変性，$U-$不変性）

（1＄）（T の下での不変性）$\forall\varphi\in\Phi,\forall\gamma\in 2^J, CSF(T\varphi,\gamma)=CSF(\varphi,\gamma)$.

（2＄）（正定数倍不変性）$\forall r^{++}\in R^{++}, \forall\varphi\in\Phi,\forall\gamma\in 2^J, CSF(r^{++}\cdot\varphi,\gamma)=CSF(\varphi,\gamma)$.

（3＄）式(2.36)のパターン変換 U について，モデル構成作用素 T の $U-$不変式(2.37)が成立するような，パターン $\varphi\in\Phi$ に関し，

$$\forall\gamma\in 2^J, CSF(U\varphi,\gamma)=CSF(\varphi,\gamma).$$

（証明） 定理2.4から，axiom 4を満たすカテゴリ選択関数 CSF は，axiom 2，axiom 3を満たす式(2.34)，式(2.40)の類似度関数 SM，大分類関数 BSC のみから定まることがわかる．よって，(1＄)はaxiom 2の(ⅲ)，axiom 3の(ⅱ)から明らかである．

(2＄)，(3＄)は，2定理2.2，2.3から明らかである． □

次の定理2.6は，第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン ω_j については，唯1つのカテゴリ番号 $j\in J$ のみから成るリスト $[j]\in 2^J$ が選択される可能性を指摘している．

［定理2.6］（カテゴリ選択関数 $CSF(\varphi,\gamma)\in 2^J$ の代表パターン定理）

任意の $\gamma\in 2^J$ と任意の $j\in J$ について，

$$2^J \ni CSF(\omega_j,\gamma)=$$

$$\begin{cases} [j] & \text{if} \quad j \in \gamma \\ \phi & \text{if} \quad j \in J - \gamma . \end{cases}$$

（証明）　文献［B3］の定理3.1である．　□

次の定理2.7は，式(2.17)の候補カテゴリの集合$\mathfrak{C}(\gamma)$を持つカテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$から，その有効な候補カテゴリの集合

$$\mathfrak{C}(CSF(\varphi,\gamma)) = \{ \mathfrak{C}_j | \, j \in CSF(\varphi,\gamma)\}$$

のカテゴリ番号リスト$CSF(\varphi,\gamma)$を抽出することにより，

$$<\varphi,\gamma> \to <\varphi, CSF(\varphi,\gamma)> \tag{2.55}$$

というように，認識システムRECOGNITRONがパターンφに対し持つカテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$はそれより候補カテゴリが絞られたカテゴリ帰属知識$<\varphi,CSF(\varphi,\gamma)>$へと変容するものとすれば，得られたカテゴリ帰属知識$<\varphi,CSF(\varphi,\gamma)>$からその有効なカテゴリ番号リスト$CSF(\varphi,CSF(\varphi,\gamma))$を抽出しても，もうこれ以上，カテゴリ帰属知識は変容することはないという“完結性”を指摘している．

［定理2.7］（カテゴリ選択関数CSFのベキ等定理）

任意の$\varphi \in \Phi$と任意の$\gamma \in 2^J$について，

$$CSF(\varphi, CSF(\varphi,\gamma)) = CSF(\varphi,\gamma).$$

（証明）文献［B3］の定理3.2である．　□

2.6　構造受精作用素 $A(\mu):\Phi \to \Phi$ の形式

更新作用素（updating operator），或いは，構造受精作用素（structural-fertilization operator）と呼ばれる写像

$$A(\mu):\Phi \to \Phi\text{，ここに，} \mu \in 2^J \tag{2.56}$$

は，3節2.2～2.4で用意された3構成要素

①式(2.27)のモデル構成作用素T

②式(2.34)の類似度関数SM

③式(2.40)の大分類関数BSC

(2.57)

を使用する形式で，次のように定義される：

（ｉ）$\varphi = 0 \vee \mu = \phi$のとき

$$A(\mu)\varphi = 0. \tag{2.58}$$

（ⅱ）$\varphi \neq 0 \wedge \mu \neq \phi$のとき

（ⅱ-1）$\sum_{j\in\mu} BSC(\varphi, j) = 0$　のとき

$$A(\mu)\varphi = \sum_{j\in\mu} SM(\varphi,\omega_j) \cdot T\omega_j. \tag{2.59}$$

よって，

$\sum_{j\in\mu} SM(\varphi,\omega_j) = 0$のとき，$A(\mu)\varphi = 0$である．

（ⅱ-2）$\sum_{j\in\mu} BSC(\varphi, j) > 0$のとき

$$A(\mu)\varphi = \sum_{j\in\mu} SM(\varphi,\omega_j) \cdot BSC(\varphi, j) \cdot T\omega_j. \tag{2.60}$$

$$= \sum_{j\in\mu\wedge BSC(\varphi,j)=1} SM(\varphi,\omega_j)\cdot T\omega_j.$$

よって，

$\sum_{j\in\mu\wedge BSC(\varphi,j)=1} SM(\varphi,\omega_j)=0$ のとき， $A(\mu)\varphi=0$ である．

先ず，A（μ）・は，次の定理2.8に示す如く，3種類の不変性を備えている．

［**定理2.8**］（構造受精作用素 $A(\mu)$ の正定数不変性，モデル構成作用素 T の下での不変性， $U-$不変性）

（1＄）（T の下での不変性）$\forall\varphi\in\Phi,\forall\mu\in 2^J, A(\mu)T\varphi=A(\mu)\varphi.$

（2＄）（正定数倍不変性）$\forall r^{++}\in R^{++}, \forall\varphi\in\Phi,\forall\mu\in 2^J, A(\mu)(r^{++}\cdot\varphi)=A(\mu)\varphi.$

（3＄）式(2.36)のパターン変換 U は， $0-$不動点性

$$\varphi=0\Rightarrow U\varphi=0$$

を満たすとする．モデル構成作用素 T の $U-$不変式(2.37)が成立するような，パターン $\varphi\in\Phi$ に関し，

$$\forall\mu\in 2^J, A(\mu)(U\varphi)=A(\mu)\varphi..$$

（証明）（1＄）は文献［B4］，付録5の定理A5.1であるが，3事項（1＄），（2＄），（3＄）を改めて，証明しよう．

作用素 T は，axiom 1の（iii），（ii）の2後半，並びに，式(2.37)を仮定しているから， T の下での不変性，正定数不変性， $U-$不変性を満たす．同様に，関数 SM は，axiom 2の（iii），並びに，定理2.2から， T の下での不変性，正定数不変性， $U-$不変性を満たす．同様に，2値関数 BSC は，axiom 3の（ii），並びに，定理2.3から， T の下での不変性，正定数不変性， $U-$不変性を満たす．

よって，式(2.56)の作用素 $A(\mu)$ はその3定義式(2.58)～(2.60)からわかるように，式(2.57)の3要素 T,SM,BSC から定まるから， T の下での不変性，正定数不変性， $U-$不変性を満たすことになる．

特に， $\varphi=0$ のとき，式(2.58)から $A(\mu)\varphi=0$ であるが，このとき，axiom 1，（i）の後半， U の $0-$不動点性から， r^{++} を任意の正定数として，

$$T\varphi=0, r^{++}\cdot\varphi=0, U\varphi=0$$

を得，よって，

$$A(T\varphi)=A(r^{++}\cdot\varphi)=A(\mu)(U\varphi)=0$$

$$\therefore\quad A(\mu)(T\varphi)=A(\mu)\varphi,\quad A(\mu)(r^{++}\cdot\varphi)=A(\mu)\varphi\quad, A(\mu)(U\varphi)=A(\mu)\varphi$$

であることに注意しておく． □

次に， φ を $A(\mu)$ で変換されて得られる $A(\mu)\varphi$ は，定理2.4のカテゴリ選択関数 CSF を使用すれば，次の定理2.9のように簡単に表される．

［**定理2.9**］（構造受精作用素 $A(\mu)$ の表現定理）

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall\mu\in 2^J, A(\mu)\varphi=\sum_{k\in CSF(\varphi,\mu)} SM(\varphi,\omega_k)\cdot T\omega_k.$$

（証明）文献［B3］の定理G1である． □

最後に，次節2.7の，2つのカテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>,<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J>$ 間の等構造関係 $=$ を定義している定義2.2を導入して，カテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$ を一意的に特徴付ける表象は，パターン $\varphi\in\Phi$ を2式(2.59)，(2.60)で定義される構造受精作用素 $A(\mu)$ で変換して得られるパターン $A(\mu)\varphi$ であることを指摘している定理2.10に注目する．

［**定理2.10**］（カテゴリ帰属知識の表象定理）

代表パターンモデル $T\omega_j$ の系

$T\omega_j, j \in J$ は1次独立である （2.61）

とする．

$CSF(\varphi,\gamma) \cap CSF(\phi,\lambda) \neq \phi$ （2.62）

ならば，

〈 $<\varphi,\gamma>=<\phi,\lambda> \Leftrightarrow A(\gamma)\varphi = A(\lambda)\phi.$ （2.63）

（証明）文献［B3］の定理G2である． □

2.7　カテゴリ帰属知識空間 $<\Phi,2^J>$ 上の2つの2元関係である等形式関係 $=_\Delta$，等構造関係 $=$ の定義

2つのカテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>,<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J>$ 間の等形式関係 $=_\Delta$，等構造関係 $=$ の定義を与えよう．2つの2元関数，$=_\Delta$，$=$ は共に，反射律，対称律，推移律を満たし，$<\Phi,2^J>$ 上の同値関係である。

先ず，カテゴリ帰属知識間の，1つの2元関係（a binary relation on $<\Phi,2^J>$）としての，等形式関係（equi-form relation）$=_\Delta$ を，次の定義2.1で導入しよう．

［定義2.1］（カテゴリ帰属知識間の等形式関係 $=_\Delta$）

$<\varphi,\gamma>=_\Delta<\phi,\lambda>$（恒等的に等しい）

$\Leftrightarrow \varphi = \phi \wedge \gamma = \lambda.$ □

次に，今1つの2元関係としての等構造関係（a equi-structure relation）＝ を次の定義2.2で導入する．

［定義2.2］（カテゴリ帰属知識間の等構造関係＝）

$<\varphi,\gamma>=<\phi,\lambda>$ （2.64）

$\Leftrightarrow$【$CSF(\varphi,\gamma) = CSF(\phi,\lambda) \wedge$ （2.65）

$[\forall j \in CSF(\varphi,\gamma) \cap CSF(\phi,\lambda), SM(\varphi,\omega_j) = SM(\phi,\omega_j)]$ （2.66）

】 □

注意すべきことは，

$<\varphi,\gamma>=_\Delta<\phi,\lambda> \Rightarrow <\varphi,\gamma>=<\phi,\lambda>$ （2.67）

が成り立つが，

逆命題「$<\varphi,\gamma>=<\phi,\lambda> \Rightarrow <\varphi,\gamma>=_\Delta<\phi,\lambda>$」は必ずしも成り立たない （2.68）

という意味で，定義2.2が，定義2.1の等形式関係＝$_\Delta$ より弱い等構造関係＝を設定していることである．形式が同じであれば，構造も同じであるが，構造が同じだからいって，形式が同じとは限らない2つのカテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>,<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J>$ が存在する事実は，文献［B4］，付録9の3定理A9.1～A9.3，つまり，

$\forall <\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>, <T\varphi,\gamma>=<\varphi,\gamma>$

$\wedge <\varphi, CSF(\varphi,\gamma)>=<\varphi,\gamma>$

$\wedge <T\varphi, CSF(\varphi,\gamma)>=<\varphi,\gamma>$

から明らかである．

2.8　カテゴリ帰属知識空間 $<\Phi,2^J>$ 上の構造受精変換 $TA(\mu)T$ の定義

前節2.7で説明されている式（2.56）の構造受精作用素 $A(\mu)$ の両側に付録1のaxiom 1を満たすモデル構成作用素 T を配置して得られ，構造受精変換（structural-fertilization transformation）と呼ばれる写像

$TA(\mu)T :<\Phi,2^J>\to<\Phi,2^J>$，ここに，$\mu \in 2^J$ （2.69）

は，その定義域，値域がΦである場合の

$$TA(\mu)T : \Phi \to \Phi\text{，ここに，}\mu \in 2^J \quad (2.70)$$

を拡張して，以下のように定義される．

一般に，集合Pから集合Qへの写像$f : P \to Q$の全体を$[P \to Q]$で表す．

カテゴリ帰属知識空間$< \Phi, 2^J >$上の2変数状態遷移関数

$$after : [\Phi \to \Phi] \times < \Phi, 2^J > \to < \Phi, 2^J > \quad (2.71)$$

を，

$$< \phi, \lambda > =_{\Delta} after(A(\mu), < \varphi, \gamma >) \in < \Phi, 2^J > \quad (2.72)$$

と定義する．定義式(2.72)は，次のように読まれる：

記憶状態$< \phi, \lambda > =_{\Delta} after(A(\mu), < \varphi, \gamma >)$は，記憶状態$< \varphi, \gamma > \in < \Phi, 2^J >$において，operator $A(\mu) \in [\Phi \to \Phi]$を適用した後の記憶状態である．(2.73)

□

実は，式(2.72)の$< \phi, \lambda >$の2成分ϕ, λは，具体的に，

$$\phi = TA(\mu \cap \gamma)T\varphi \quad (2.74)$$

$$\lambda = CSF(\varphi, \mu \cap \gamma) \quad (2.75)$$

と設定され，

$$after(A(\mu), < \varphi, \gamma >) =_{\Delta} TA(\mu)T \cdot < \varphi, \gamma > \quad (2.76)$$

である．

つまり，カテゴリ帰属知識$< \varphi, \gamma > \in < \Phi, 2^J >$を，式(2.69)の構造受精変換$TA(\mu)T$で変換して得られるカテゴリ帰属知識$< \phi, \lambda > \in < \Phi, 2^J >$は，

$$\begin{aligned} < \phi, \lambda > &=_{\Delta} after(A(\mu), < \varphi, \gamma >) \\ &=_{\Delta} TA(\mu)T \cdot < \varphi, \gamma > \\ &=_{\Delta} < TA(\mu \cap \gamma)T\varphi,\ CSF(\varphi, \mu \cap \gamma) > \end{aligned} \quad (2.77)$$

と定義される．

このようにして，任意のカテゴリ番号リスト$\mu \in 2^J$を助変数に持つ式(2.69)の構造受精変換$TA(\mu)T$が式(2.77)で定義された．

2.9 カテゴリ帰属知識$< \varphi, \gamma > \in < \Phi, 2^J >$のポテンシャルエネルギー（SSポテンシャル）$E(\varphi, \gamma) \in R^+$

本節では，カテゴリ帰属知識$< \varphi, \gamma > \in < \Phi, 2^J >$がどの程度複雑な構造を備えているかの1つの指標として，SSポテンシャル(SS potential)と称されるポテンシャルエネルギー(potential energy) $E(\varphi, \gamma)$を与える関数

$$E : \Phi \times 2^J \to R^+\ \text{(非負実数全体の集合)} \quad (2.78)$$

が定義される．

［定義2.3］（カテゴリ帰属知識$< \varphi, \gamma >$のポテンシャルエネルギー$E(\varphi, \gamma)$）

カテゴリ帰属知識$< \varphi, \gamma > \in < \Phi, 2^J >$のポテンシャルエネルギー(energy) $E(\varphi, \gamma)$は次の様に定義される：

①$\varphi = 0$，あるいは$\gamma = \phi$（空集合）　のとき

$$E(\varphi, \gamma) = 0\,. \quad (2.79)$$

②$\varphi \neq 0$　かつ　$\gamma \neq \phi$（空集合）　のとき

$$E(\varphi,\gamma)=|\gamma|-\sum_{j\in\gamma}SM(\varphi,\omega_j)\ . \tag{2.80}$$

ここに，$|\gamma|$はγ内の要素の総数の意であって，$|\gamma|\geqq 1$

□

ポテンシャルエネルギー$E(\varphi,\gamma)$と，パターン$\varphi\in\Phi$の認識過程とのつながりについて次の意味がある：式(2.17)の候補カテゴリの集合$\mathfrak{C}(\gamma)$にわたる類似度$SM(\varphi,\omega_j)$の総和

$$\sum_{j\in\gamma}SM(\varphi,\omega_j) \tag{2.81}$$

が増加し，候補カテゴリの総数$|\gamma|$が減少すれば，$E(\varphi,\gamma)$が減少するから，不動点探索形構造受精に関する多段階変換帰納推論を使った連想形パターン認識過程がどの程度，収束しているかの指標が$E(\varphi,\gamma)$である．　□

帰属知識$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$の，構造受精変換$TA(\mu)T$による変換像である今1つの，式(2.77)のカテゴリ帰属知識$<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J>$について，エネルギー不等式

$$E(\varphi,\gamma)\ \geq\ E(\phi,\lambda) \tag{2.82}$$

が通常，成立するという意味で，式(2.77)に登場する変換$TA(\mu)T$は，帰属知識$<\varphi,\gamma>$の精密化作用素(refinement operator)とも称されることがある．

2.10　カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$上の同値関係$\sim_\Delta^*$，半順序関係$\leq_\Delta^*$と上限$\sqcup_\Delta^*$

本節では，カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$上の同値関係$\sim_\Delta^*$，半順序関係$\leq_\Delta^*$，並びに，上限$\sqcup_\Delta^*$が説明される．

2.10.1　単なる2元関係$\leq_\Delta$と，半順序を与える2元関係≦△*

先ず，カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$上の2元関係$\leq_\Delta$を次の定義2.4$_1$のように定義してみよう．

［定義2.4$_1$］（2元関係$\leq_\Delta$）

$$
\begin{aligned}
&<\varphi,\gamma>\leq_\Delta<\phi,\lambda>\\
&\Leftrightarrow【E(\varphi,\gamma)\geq E(\phi,\lambda)\\
&\quad\wedge[<\varphi,\gamma>=_\Delta<\phi\ ,\ \lambda>\\
&\qquad\vee\{\exists\mu\in 2^J,TA(\mu)T\cdot<\varphi,\gamma>=_\Delta<\phi,\lambda>\}\\
&\quad\ ]\\
&\quad】
\end{aligned}
$$

□

$$\forall<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>,E(T\varphi,\gamma)=E(\varphi,\gamma)$$

は成立するけれども，一般に，

$$<T\varphi,\gamma>=_\Delta<\varphi,\gamma>$$

は成立しない．また，

$$\exists\mu\in 2^J,TA(\mu)T\cdot<\varphi,\gamma>=_\Delta<T\varphi,\gamma>\}$$

も成立しない．それで，一般に，

$$<\varphi,\gamma>\leq_\Delta<T\varphi,\gamma>$$

は成立しない．半順序を与えない2元関係

$$<\varphi,\gamma>\leq_\Delta<\phi,\lambda>$$

については，次の(イ，(ロ)のいずれがいえる：

（イ） $E(\varphi,\gamma) \geq E(\phi,\lambda)$ ∧ $<\varphi,\gamma>=_{\Delta}<\phi$，$\lambda>$から，$<\phi,\lambda>$は$<\varphi,\gamma>$よりも構造的に複雑でない

（ロ） $E(\varphi,\gamma) \geq E(\phi,\lambda)$ ∧ $\{\exists\mu \in 2^{J}, TA(\mu)T\cdot<\varphi,\gamma>=_{\Delta}<\phi,\lambda>\}$の後者から，

$\{\exists\mu \in 2^{J}, \phi = TA(\mu\cap\gamma)T\varphi \wedge \lambda = CSF(\varphi,\mu\cap\gamma)$

が従う．よって，パターンφがϕへと変換された場合，パターンφが帰属する式(2.17)の候補カテゴリ集合$\mathfrak{C}(\gamma)$が，助変数$\mu \in 2^{J}$により

$\mathfrak{C}(\lambda)$ $(\subseteq \mathfrak{C}(\mu\cap\gamma) = \mathfrak{C}(\mu) \cap \mathfrak{C}(\gamma))$

へと絞られるような$<\phi,\lambda>$が$<\varphi,\gamma>$より得られる． □

2つのカテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>,<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^{J}>$が定義$2.4_{1}$の2元関係

$<\varphi,\gamma>\leq_{\Delta}<\phi,\lambda>$

にあれば，次の4解釈(一)～(四)が可能である：

（一） $<\varphi,\gamma>$は$<\phi,\lambda>$の近似である．

（二） $<\varphi,\gamma>$は$<\phi,\lambda>$に要約される．

（三） $<\phi,\lambda>$は$<\varphi,\gamma>$の情報を凝縮したものである．

（四） $<\phi,\lambda>$は$<\varphi,\gamma>$に変形されていたものである． □

更に，2元関係$\leq_{\Delta}$の有限な，式(2.85)の鎖(chain)を用い，次の定義2.4_{2}のように，カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^{J}>$上の2元関係$\leq_{\Delta}{}^{*}$を定義する．

［定義2.4_{2}］（2元関係$\leq_{\Delta}{}^{*}$）

$$<\varphi,\gamma> \leq_{\Delta}{}^{*} <\phi,\lambda> \tag{2.83}$$

$$\Leftrightarrow 【<\varphi,\gamma>\leq_{\Delta}<\phi,\lambda> \tag{2.84}$$

$$\vee[\exists n \in \{0,1,2,\cdots\},$$

$$\exists<\varphi_{1},\gamma_{1}>,\exists<\varphi_{2},\gamma_{2}>,\cdots,\exists<\varphi_{n-1},\gamma_{n-1}>\in<\Phi,2^{J}>,$$

$$<\varphi_{0},\gamma_{0}>$$

$$\leq_{\Delta}<\varphi_{1},\gamma_{1}>\leq_{\Delta}<\varphi_{2},\gamma_{2}>\leq_{\Delta}\cdots\leq_{\Delta}<\varphi_{n-1},\gamma_{n-1}>$$

$$\leq_{\Delta}<\varphi_{n},\gamma_{n}> \tag{2.85}$$

where

$$<\varphi_{0},\gamma_{0}>=_{\Delta}<\varphi,\gamma> \wedge <\varphi_{n},\gamma_{n}>=_{\Delta}<\phi,\lambda>$$

$$]$$

$$】 \tag{2.86}$$

□

次の定理2.11によれば，定義2.4_{2}の2元関係$\leq_{\Delta}{}^{*}$は実は，半順序関係である．然るに，文献［B4］の定理3.2によれば，定義2.4_{1}の2元関係$\leq_{\Delta}$は反射律，反対称律を満たすが，推移律を満たさなくて，半順序関係ではない．この事実が$\leq_{\Delta}$の代りに$\leq_{\Delta}{}^{*}$を以後，使われる理由である．

式(2.34)の類似度関数SMが直交性を満たすとは，

実定数a_{i}の組$\{a_{i} \mid i \in \mu\}$が正条件

$\forall i \in \mu, a_{i} > 0$

を満たすような任意の空でないカテゴリ番号リスト$\mu \in 2^{J}$について，直交条件

$$\forall j \in J-\mu, SM(\sum_{i\in\mu} a_{i}\cdot T\omega_{i}, \omega_{j}) = 0$$

が成立していることをいう［B4］．

［定理2.11］（2元関係$\leq_{\Delta}{}^{*}$の半順序定理）

上述の直交条件を満たしている類似度関数 SM を採用していれば(SM 直交仮定)，カテゴリ知識空間 $<\Phi,2^J>$ 上の2元関係 $\leq_{\Delta}^{*}$ は，次の3性質(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)を満たし，半順序関係である：

（ⅰ）（反射律；reflexive law）

$<\varphi,\gamma> \leq_{\Delta}^{*} <\varphi,\gamma>$.

（ⅱ）（反対称律；antisymmetric law）

$<\varphi,\gamma> \leq_{\Delta}^{*} <\phi,\lambda>$ かつ〈ϕ，λ〉$\leq_{\Delta}^{*} <\varphi,\gamma>$

ならば，$E(\varphi,\gamma) = E(\phi,\lambda) \wedge <\varphi,\gamma> =_{\Delta} <\phi,\lambda>$.

（ⅲ）（推移律；transitive law）

$<\varphi,\gamma> \leq_{\Delta}^{*} <\eta,\mu>$ かつ $<\eta,\mu> \leq_{\Delta}^{*} <\phi,\lambda>$

ならば，$<\varphi,\gamma> \leq_{\Delta}^{*} <\phi,\lambda>$.

（証明）文献［B4］の定理3.1である.　□

2.10.2　半順序 $\leq_{\Delta}^{*}$ を含む最小の同値関係 $\sim_{\Delta}^{*}$

半順序関係 $\leq_{\Delta}^{*}$ を含む最小の同値関係として，2元関係 $\sim_{\Delta}^{*}$ がカテゴリ帰属知識空間 $<\Phi,2^J>$ 上に導入できることが指摘される.

次の定義2.5で，カテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>$ の式(2.77)の構造受精変換 $TA(\mu)T$ による多段階変換先 $<\phi,\lambda>$ が同一のカテゴリ帰属知識になることで定義される2元関係 $\sim_{\Delta}^{*}$ を定義する.

［定義2.5］（2元関係 $\sim_{\Delta}^{*}$ の定義）

2つのカテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>,<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J>$ について，2元関係

$<\varphi,\gamma> \sim_{\Delta}^{*} <\phi,\lambda>$

が成り立つとは，次の(ⅰ)，(ⅱ)の何れかが成立することである：

（ⅰ）$<\varphi,\gamma> \leq_{\Delta}^{*} <\phi,\lambda>$.

（ⅱ）$\exists<\eta,\mu>\in<\Phi,2^J>$,

$<\varphi,\gamma> \leq_{\Delta}^{*} <\eta,\mu>$

$\wedge <\phi,\lambda> \leq_{\Delta}^{*} <\eta,\mu>$.　□

このとき，2元関係 $\sim_{\Delta}^{*}$ が半順序関係 $\leq_{\Delta}^{*}$ を含む最小の同値関係であることを指摘する次の定理2.12が成り立つ.

［定理2.12］（2元関係 $\sim_{\Delta}^{*}$ の最小同値関係定理）

2.10.1項の直交条件を満たしている類似度関数 SM を採用していれば(SM直交仮定)，カテゴリ知識空間 $<\Phi,2^J>$ 上の2元関係 $\sim_{\Delta}^{*}$ は，次の(1#)，(2#)，(3#)を満たし，同値関係(equivalence relation)であり，然も，

$$<\varphi,\gamma> \leq_{\Delta}^{*} <\phi,\lambda> \tag{2.87}$$

$$\Rightarrow <\varphi,\gamma> \mapsto <\phi,\lambda> \tag{2.88}$$

$$\Rightarrow <\varphi,\gamma> \sim_{\Delta}^{*} <\phi,\lambda> \tag{2.89}$$

を満たす“半順序関係|→”が1つも存在しないという意味で，$\leq_{\Delta}^{*}$ を含む“最小の”同値関係である：

(1#)(反射律；reflexive law) $<\varphi,\gamma> \sim_{\Delta}^{*} <\varphi,\gamma>$.

(2#)(対称律；symmetric law) $<\varphi,\gamma> \sim_{\Delta}^{*} <\eta,\mu>$

ならば，$<\eta,\mu> \sim_{\Delta}^{*} <\varphi,\gamma>$.

(3#)(推移律；transitive law) $<\varphi,\gamma> \sim_{\Delta}^{*} <\eta,\mu>$

かつ$<\eta,\mu>\sim_{\Delta}^{*}<\phi,\lambda>$ならば，$<\varphi,\gamma>\sim_{\Delta}^{*}<\phi,\lambda>$.

（証明）文献［B4］の定理3.3である．□

$<\Phi,2^{J}>$の任意の2元$<\varphi,\gamma>$，$<\eta,\mu>$の間に，同値関係$\sim_{\Delta}^{*}$が成立するかしないかを必ず決めることができ，この意味で，$<\varphi,\gamma>\sim_{\Delta}^{*}<\eta,\mu>$は，$<\varphi,\gamma>$が$<\eta,\mu>$と(ポテンシャルエネルギー&構造受精に関し)同値であると読まれる．

$<\varphi,\gamma>$と同値な$<\Phi,2^{J}>$の元全体を$<\varphi,\gamma>$を含む$<\Phi,2^{J}>$の同値類(the equivalence class containing $<\varphi,\gamma>$)といい，

$$［<\varphi,\gamma>］_{\Delta}^{*} \equiv \{<\eta,\mu>\in<\Phi,2^{J}> \mid <\varphi,\gamma>\sim_{\Delta}^{*}<\eta,\mu>\}\subset<\Phi,2^{J}> \tag{2.90}$$

と表す．任意にとった2つの同値類は，全く一致するか，または共通の元を1つも持たない．同値類［$<\varphi,\gamma>$］$_{\Delta}^{*}$の1つの要素を［$<\varphi,\gamma>$］$_{\Delta}^{*}$の代表元(representative)という．同値関係(equivalence relation)$\sim_{\Delta}^{*}$による$<\Phi,2^{J}>$の商集合(quotient set)$<\Phi,2^{J}>/\sim_{\Delta}^{*}$とは，$<\Phi,2^{J}>$の同値類全体の集合

$$<\Phi,2^{J}>/\sim_{\Delta}^{*} \equiv \{［<\varphi,\gamma>］_{\Delta}^{*} \mid <\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^{J}>\} \tag{2.91}$$

のことである．

2.10.3　半順序関係$\le_{\Delta}^{*}$から定まる知識集合$<\Psi,\Lambda>$上の上限$\bigsqcup_{\Delta}^{*}<\Psi,\Lambda>$

カテゴリ帰属知識集合$<\Phi,2^{J}>$上の同値関係$\sim_{\Delta}^{*}$と，半順序関係$\le_{\Delta}^{*}$とから定まる上限$\bigsqcup_{\Delta}^{*}$について，説明される．

処理の対象とする問題のカテゴリ帰属知識集合$<\Phi,2^{J}>$の部分集合$<\Psi,\Lambda>$を考える．この半順序関係$\le_{\Delta}^{*}$の下での，知識集合$<\Psi,\Lambda>$ $(<\Phi,2^{J}>)$の上限(supremum)，即ち，最小上界(least upper bound)$\bigsqcup_{\Delta}^{*}<\Psi,\Lambda>$は次の定義2.6で与えられる．

［定義2.6］（$<\Psi,\Lambda>$ $(<\Phi,2^{J}>)$）の最小上界$\bigsqcup_{\Delta}^{*}<\Psi,\Lambda>$の定義）

$<\Phi,2^{J}>$を半順序関係$\le_{\Delta}^{*}$の定義された半順序集合(partially ordered set)とみるとき，$<\Phi,2^{J}>$の部分集合$<\Psi,\Lambda>$の上限$<\phi,\lambda>$とは，次の2条件(ⅰ)，(ⅱ)を満たす$<\Phi,2^{J}>$の要素であり($<\Psi,\Lambda>$の要素とは限らない)，

$$<\phi,\lambda>\equiv\bigsqcup_{\Delta}^{*}<\Psi,\Lambda>\in<\Phi,2^{J}> \tag{2.92}$$

と書く：

(ⅰ)（上界性；$<\Psi,\Lambda>\le_{\Delta}^{*}<\phi,\lambda>$）

$\forall<\eta,\mu>\in<\Psi,\Lambda>$，$<\eta,\mu>\le_{\Delta}^{*}<\phi,\lambda>$.

(ⅱ)（最小性；$<\Psi,\Lambda>\le_{\Delta}^{*}<\phi',\lambda'>$ならば，$<\phi,\lambda>\le_{\Delta}^{*}<\phi',\lambda'>$）

$\exists<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^{J}>$，$\forall<\eta,\mu>\in<\Psi,\Lambda>$，$<\eta,\mu>\le_{\Delta}^{*}<\varphi,\gamma>$

ならば，

$<\phi,\lambda>\le_{\Delta}^{*}<\varphi,\gamma>$.　□

特に，$\bigsqcup_{\Delta}^{*}\{<\varphi_1,\gamma_1>,<\varphi_2,\gamma_2>\}$を，

$$<\varphi_1,\gamma_1>\bigsqcup_{\Delta}^{*}<\varphi_2,\gamma_2> \tag{2.93}$$

と表すことがある．式(2.93)の$<\varphi_1,\gamma_1>\bigsqcup_{\Delta}^{*}<\varphi_2,\gamma_2>$は$<\varphi_1,\gamma_1>$と$<\varphi_2,\gamma_2>$とを併合して得られたカテゴリ帰属知識($<\varphi_1,\gamma_1>$，$<\varphi_2,\gamma_2>$双方に共通な情報を備えているカテゴリ帰属知識)であるという．

次の命題2.1の成立は，半順序関係$<\varphi,\gamma>\le_{\Delta}^{*}<\eta,\mu>$を満たす$<\eta,\mu>$が2つの元からなる有限集合$\{<\varphi,\gamma>$，$<\eta,\mu>\}$に関する半順序関係$\le_{\Delta}^{*}$の上限であることから，明らかである．

［**命題2.1**］（上限の性質）

$$<\varphi,\gamma> \leq_{\Delta}^{*} <\eta,\mu>$$

$$\Leftrightarrow$$

$$<\varphi,\gamma> \bigsqcup_{\Delta}^{*} <\eta,\mu> =_{\Delta} <\eta,\mu>$$ □

2.11　不動点探索形構造受精多段階帰納推論に基づくパターン認識の働きの特徴付け

ある1つのカテゴリのみに帰属しているという意味で異常でない $\varphi \in \Phi$ についてのパターン認識の働きについて，

処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ についての，

$$\exists \mu_s \in 2^J,$$
$$TA(\mu_s)T \cdot <\phi_s, \lambda_s> =_{\Delta} <\phi_{s+1}, \lambda_{s+1}>$$
$$, s = 0,1,2,\cdots,, \text{where} \quad \phi_0 = T\varphi \wedge \lambda_0 = J \qquad (2.94)$$

で表される“不動点探索形構造受精多段階帰納推論に基づくパターン認識過程（認識計算）”に関し，先ず，最大認識段階番号 $t_{\max}$ が有限値で存在するという“認識過程の有限停止性”に注目しよう．

［認識過程の有限停止性（finite termination）］

$$\exists t_{\max} < \infty, \exists t \in \{0,1,2,\cdots,t_{\max}\},$$
$$\bigsqcup_{\Delta}^{*} <\Psi_0, \Lambda_0>_0 \leq_{\Delta}^{*} \bigsqcup_{\Delta}^{*} <\Psi_1, \Lambda_1>_1 \leq_{\Delta}^{*} \cdots$$
$$\leq_{\Delta}^{*} \bigsqcup_{\Delta}^{*} <\Psi_s, \Lambda_s>_s \leq_{\Delta}^{*} \cdots \leq_{\Delta}^{*} \bigsqcup_{\Delta}^{*} <\Psi_t, \Lambda_t>_t \qquad (2.95)$$

where

$$<\Psi_s, \Lambda_s>_s$$
$$\equiv \{<\phi_0,\lambda_0>, <\phi_1,\lambda_1>, \cdots, <\phi_{s-1},\lambda_{s-1}>, <\phi_s,\lambda_s>\} (0 \leq s \leq t) \qquad (2.96)$$

という具合に，上限 $\bigsqcup_{\Delta}^{*}$ を求める操作を介し，式(2.95)を満たす1つの $<T\omega_j,[j]> \in <\Psi_t,\Lambda_t>_t$ を探索することである． □

式(2.34)の類似度関数 SM について，次のミックスチュア条件を考えよう．

【類似度関数 SM に関するSM-ミックスチュア条件】

$$[\forall k \in \mu, 0 < b_k < 1] \wedge 0 < \sum_{k \in \mu} b_k \leq 1$$

を満たす実定数 b_k の組 $\{b_k \mid k \in \mu\}$ について，

$$\mu \supseteq \{\ell, m\} (\ell \neq m)$$

が成り立つような $\ell, m \in J$ が少なくとも存在する任意の $\mu \in 2^J$ に対し，

$$\exists j \in \mu, SM(\sum_{k \in \mu} b_k \cdot T\omega_k, \omega_j) \neq b_j.$$ □

このとき，次の定理2.13が成立し，式(2.94)の不動点多段階認識の働きが如何なる諸性質を備えているかが判明する．

［**定理2.13**］（不動点多段階認識の働きの特徴付け定理）

処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ についての，式(2.94)のパターン認識過程（認識計算）について，考えよう．

（ｉ）（不動点性と零ポテンシャルエネルギー性との同値定理）

上記のミックスチュア条件を満たす類似度関数 SM を採用していれば，

（ｉ－1）不動点方程式

$\exists t(\geq 0), TA(\mu_t)T \cdot <\phi_t, \lambda_t> =_\Delta <\phi_t, \lambda_t>$ (2.97)
が成立する
$\Rightarrow$
$[\exists j \in CSF(\phi_t, \mu_t \cap \lambda_t), \phi_t = T\omega_j \wedge \lambda_t = [j]]$ (2.98)
$\vee[\phi_t = 0 \wedge \lambda_t = \phi]$ (2.99)
$\Rightarrow E(\phi_t, \lambda_t) = 0.$ (2.100)
（ⅰ－2）
$E(\phi_{t-1}, \lambda_{t-1}) = 0 \wedge |\lambda_{t-1}| = 1$ (2.101)
$\Rightarrow$
$j \in \mu_{t-1} \cap \lambda_{t-1} \wedge j \in \mu_t$ (2.102)
が存在するならば，
不動点方程式(2.97)が成立し，
$<\phi_t, \lambda_t> =_\Delta <T\omega_j, [j]>$ (2.103)
が成立する．
（ⅱ）（SM-ミックスチュア条件の下での不動認識結果の分類定理）
不動点方程式(2.97)を満たす結果$<\phi_t, \lambda_t> \in <\Phi, 2^J>$について，
$\forall <\varphi, J> \in <\Phi, 2^J>,$
（ⅱ－1）（認識確定；認識処理可能）
$\exists j \in J, <T\varphi, J> \sim_\Delta^* <T\omega_j, [j]> (=_\Delta <\phi_t, \lambda_t>)$ (2.104)
（ⅱ－2）(認識処理不能)
$\exists <0, \phi> \in <\Phi, 2^J>, <T\varphi, J> \sim_\Delta^* <0, \phi> (=_\Delta <\phi_t, \lambda_t>)$ (2.105)
（ⅱ－3）(認識処理不定)
$\exists <\phi_t, \lambda_t> \in <\Phi, 2^J>, <T\varphi, J> \sim_\Delta^* <\phi_t, \lambda_t>$ such that $\phi_t \neq 0 \wedge |\lambda_t| \geq 2$ (2.106)
のいずれかが成り立つと分類表現されるが，ミックスチュア条件を満たす類似度関数SMを採用していれば，最後の（ⅱ－3）の場合は排除される．
（ⅲ）（SM-ミックスチュア・直交条件の下での不動認識の有限停止認識定理）
上記のミックスチュア条件，2.10.1項の直交条件を共に満たす類似度関数SMを採用しているとしよう．（ⅱ－2）が生じないような式(2.94)で表される認識過程では，式(2.101)が成立するような有限の認識段階番号$t-1$が存在し，よって，不動点方程式(2.97)が成立する有限の認識段階番号tが存在する．つまり，認識計算の有限停止性は保証され，然も，

$$E(\phi_0, \lambda_0) > E(\phi_1, \lambda_1) > \cdots > E(\phi_{t-1}, \lambda_{t-1}) = E(\phi_t, \lambda_t)$$
$$= 0 = \inf_{<\phi, \lambda> \in <\Phi, 2^J>} E(\phi, \lambda)$$

(エネルギー不等式) (2.107)
$\wedge$
$TA(\mu_{t+s})T \cdot <\phi_{t+s}, \lambda_{t+s}> =_\Delta <\phi_{t+s}, \lambda_{t+s}>$
,selecting μ_{t+s} according to $\mu_{t+s} = \lambda_t$ for any $s \in \{1, 2, \cdots\}$
(不動点方程式) (2.108)
が成立している．
［定理2.13の系1］（SM-ミックスチュアの下での不動点認識の，候補カテゴリ数の減少に伴う有限停止認識定理）

上記のミックスチュア条件を満たす類似度関数 SM を採用しているとき，認識計算式(2.94)で得た候補カテゴリ番号リストの列

$$(J \supset)\lambda_0 \supset \lambda_1 \supset \cdots \supset \lambda_{t-1} = \lambda_t \in 2^J$$

に関し，その候補カテゴリ数の減少性

$$|\lambda_0| > |\lambda_1| > \cdots > |\lambda_{t-1}| = |\lambda_t| = 1 \tag{2.109}$$

が成立していれば，（iii）が成立する．

（証明）文献［B4］の定理3.4と，その系1である．　□

次の定理2.14は定理2.13の焼き直しに過ぎないが，不動点帰納認識論理を説明しているともいえよう．

［定理2.14］（不動点多段階認識の働きによる商集合 $<\Phi,2^J>/\sim_\Delta{}^*$ の決定定理）

処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ についての，式(2.94)で表される“不動点探索形構造受精多段階帰納推論に基づくパターン認識過程(認識計算)”について，考えよう．

類似度関数 SM が，2.10.1項の直交条件，並びに，上記のミックスチュア条件を満たしていれば，式(2.91)の商集合 $<\Phi,2^J>/\sim_\Delta{}^*$ は，次のように各代表パターンモデル $T\omega_j$ のカテゴリ帰属知識 $<T\omega_j,[j]>$ を $j \in J$ にわたり寄せ集め，且つ，零パターン 0 のカテゴリ帰属知識 $<0,\phi>$ をも加えた要素からなる集合として，表される：

$$<\Phi,2^J>/\sim_\Delta{}^* = \{<T\omega_j,[j]> \mid j \in J\} \cup \{<0,\phi>\}. \tag{2.110}$$

（証明）文献［B4］の定理3.4である．　□

尚，認識計算式(2.94)で $\lambda_0 = j$ とおいているのは，認識システムRECOGNITRON $=<\Phi_B,T,SM,BSC>$ が処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ の帰属するカテゴリに関し全く無知(ignorance)のときであり，連想形認識方程式(2.8)において，$\gamma \in 2^J$ を

$$\gamma = J$$

とおいた場合である．

2.12　モデル構成作用素T，類似度関数SMのミックスチュア条件と，直交条件

上記の2.11節のミックスチュア条件，2.10.1項の直交条件を共に満たす式(2.34)の類似度関数 SM に関連して，本節では，式(2.27)のモデル構成作用素 T の対応する性質が説明される．

先ず，axiom 1を満たす式(2.27)のモデル構成作用素 T のミックスチュア(mixture)条件は，次のように述べられる．

【モデル構成作用素 T の T-ミックスチュア条件】]

$$[\forall k \in \mu, 0 < b_k < 1] \wedge 0 < \sum_{k\in\mu} b_k \le 1$$

を満たす実定数 b_k の組 $\{b_k \mid k \in \mu\}$ について，

$$\mu \supseteq \{\ell, m\}(\ell \ne m)$$

が成り立つような $\ell, m \in J$ が少なくとも存在する任意の $\mu \in 2^J$ に対し，

$$\forall j \in \mu, T(\sum_{k\in\mu} b_k \cdot T\omega_k) \ne T\omega_j.$$　□

次の定理2.15は，T,SM のミックスチュア条件の何れか1つが成り立てば，他は成り立たないことを指摘したものである．

［定理2.15］（T,SM のミックスチュア条件の対立定理）

式(2.27)のモデル構成作用素 T の T -ミックスチュア条件を満たさないとすれば，

$$\forall j \in \mu \supseteq \{\ell, m\}(\ell \neq m)$$

$$SM(\sum_{k\in\mu} b_k \cdot T\omega_k, \omega_j) \neq b_j \tag{2.119}$$

が成り立ち，式(2.34)の類似度関数 SM の SM -ミックスチュア条件が満足されている．

［定理2.15の系1］（ミックスチュア条件を満たすモデル構成作用素 T の無数存在定理）

式(2.34)の類似度関数 SM が SM -ミックスチュア条件を満足しないのなら，式(2.27)のモデル構成作用素 T は T -ミックスチュア条件を満たす．

（証明）文献［B4］の定理7.6，並びに，その系1である． □

2.13　連想形認識方程式の求解過程はパターン認識過程である

実は，式(1.18)において，パターン認識システムRGを

$$RG: \Phi \to \Omega \tag{2.120}$$

と考えた場合，RGはパターン連想器(associator)であり，

$$RG: \Phi \to \mathfrak{C}(J) \tag{2.121}$$

と考えた場合がパターン分類器(classifier)である．

不動点探索形構造受精帰納推理の働きによるカテゴリ帰属知識の多段階変換式(2.94)の働きを取り入れた認識システムがRECOGNITRON $=< \Phi_B, T, SM, BSC >$ である．認識システムRECOGNITRON $=< \Phi_B, T, SM, BSC >$ は，パターン連想器，パターン分類器の双方が合体・統合されたものである．

というのは，認識計算式(2.94)では，不動点方程式(2.97)の解 $< \phi_t, \lambda_t >$ が得られた場合，

（1&）入力パターン $\varphi \in \Phi$ は，パターン ϕ_t の如く再生される(パターン連想)

（2&）入力パターン $\varphi \in \Phi$ は，カテゴリ集合 $\mathfrak{C}(\lambda_t)$ 内の1つのカテゴリに帰属する(パターン分類)

というように，連想型認識処理をおこなうからである．

連想形認識方程式(2.8)を解く

ということは，

予め，式(2.17)のカテゴリ集合 $\mathfrak{C}(\gamma)$ 内の1つのカテゴリに帰属すると判明している入力パターン $\varphi \in \Phi$ について，カテゴリ帰属知識 $< \phi_s, \lambda_s >$ の列

$$< \phi_0, \lambda_0 >, < \phi_1, \lambda_1 >, \cdots, < \phi_s, \lambda_s >, \cdots, < \phi_{t-1}, \lambda_{t-1} >, < \phi_t, \lambda_t > \tag{2.122}$$

を式(2.94)の認識計算に従い，生成する

ことである．このカテゴリ帰属知識 $< \phi_s, \lambda_s >$ の列が連想型パターン認識過程である．そのために，多段階帰納推理の働きで，候補カテゴリの番号のリスト $\mu_s \in 2^J$ の列

$$\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_s, \cdots, \mu_{t-1}, \mu_t \tag{2.123}$$

を，定義2.4 $_2$ の半順序 $\leq_\Delta^*$ に関する増大列

$$< \phi_0, \lambda_0 > \leq_\Delta^* < \phi_1, \lambda_1 > \leq_\Delta^* \cdots \leq_\Delta^* < \phi_s, \lambda_s > \leq_\Delta^* \cdots \leq_\Delta^* < \phi_{t-1}, \lambda_{t-1} > \leq_\Delta^* < \phi_t, \lambda_t > \tag{2.124}$$

として，生成しなければならない．このように，連想形認識方程式(2.8)の求解過程はパターン認識過程である．

その結果，エネルギー不等式(2.82)，つまり，

$$E(\varphi, \gamma) \geq E(TA(\mu \cap \lambda)T\varphi, CSF(\varphi, \mu \cap \lambda)) \tag{2.125}$$

,where

$$< \phi, \lambda > =_\Delta TA(\mu)T \cdot < \varphi, \gamma > \tag{2.126}$$

が成立するような式(2.34)の類似度関数 SM を使った $TA(\mu)T$ なる構造受精変換式(2.77)を適用し，エネルギー不等式の列

$$E(\phi_0,\lambda_0)\ge E(\phi_1,\lambda_1)\ge\cdots\ge E(\phi_{t-1},\lambda_{t-1})\ge E(\phi_t,\lambda_t)=0 \tag{2.127}$$

が生成される．

不等式(2.127)において，最終認識段階(第 t 認識段階)において，零ポテンシャル $E(\phi_t,\lambda_t)=0$ の作業状態を生じさせるために，第 t 認識段階(最終認識段階)での作業状態であるカテゴリ帰属知識 $<\phi_s,\lambda_s>$ は，不動点方程式(2.97)を満たす形で，つまり，

$$TA(\mu_t\cap\lambda_t)T\,\phi_t=\phi_t \tag{2.128}$$

$$CSF(\phi_t,\mu_t\cap\lambda_t)=\lambda_t \tag{2.129}$$

を満たすもので規定される．

同一知覚原理を採用している条件の下で，不動点探索形構造受精多段階帰納推理の働きを採用した式(2.94)によるパターン認識計算においては，入力パターン $\varphi\in\Phi$ の帰属する可能性のある候補カテゴリを絞っていく各帰納段階を1.3節の最大類似度法で構成しているものと，みなされる．

というのは，各帰納段階 $s(0\le s\le t)$ である1つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン ω_j との類似度 $SM(\varphi_s,\omega_j)$ のみ大きくなるように，式(2.123)のリスト $\mu_s\in 2^J$ の列を選んでいると考えられるからである．

2.14　入力パターン $\varphi\in\Phi$ が事前処理を受けている場合の，2元関係 $\le_{\Delta}^{*}$ に関する上限 $\bigsqcup_{\Delta}^{*}<\Psi_s,\Lambda_s>_s$ を用いた多段階連想型認識過程

実は，不動点方程式(2.97)の解 $<\phi_t,\lambda_t>$ は，定義2.4 $_2$ の半順序関係 $\le_{\Delta}^{*}$ に関する連想形認識方程式(2.8)の最小不動点解(a solution as least fixed-point)であるように求める(文献［B3］の付録G，定理G5を参照)．連想形認識方程式(2.8)に登場する $\bigsqcup_{\Delta}^{*}$ は，2元関係 $\le_{\Delta}^{*}$ に関する上限記号である(定義2.6を参照)．

入力パターン $\varphi\in\Phi$ が事前処理を受け，パターン $\eta\in\Phi$ に　$\varphi\to\cdots\to\eta$　という具合に変換されているとしよう．更に，変換後のパターン $\eta\in\Phi$ は，カテゴリ集合 $\mathfrak{C}(\mu_0)$ 内の1つのカテゴリに帰属すると判明しているとしよう．

このとき，入力パターン $\varphi\in\Phi$ を連想型認識処理するためには，連想形認識方程式(2.8)の代りに，連想形認識方程式

$$<\phi,\lambda>=_{\Delta}<T\eta,\mu_0>\bigsqcup_{\Delta}^{*}TA(\mu)T\cdot<\phi,\lambda> \tag{2.130}$$

，where

(1)　$\varphi\to\cdots\to\eta$　(2.131)

(2)　η belongs at least to one of category-set $\mathfrak{C}(\mu_0)$　(2.132)

を採用すればよい．

多段階連想型認識過程を設定するには，RECOGNITRON $=<\Phi_B,T,SM,BSC>$ が処理の対象とする問題のパターン $\varphi\in\Phi$ に対し持つ式(2.47)のカテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$ に注目し，

$$\phi_0=T\eta\wedge\lambda_0=\mu_0 \tag{2.133}$$

とおき，式(2.94)の形式を持つカテゴリ帰属知識変換列を2式(2.95)，(2.96)の如く帰納的推理の働きで創出し，不動点方程式(2.97)の成立の代りに，不動点方程式

$$\exists t(\ge 0),TA(\mu_t)T\cdot\bigsqcup_{\Delta}^{*}<\Psi_t,\Lambda_t>_t=_{\Delta}\bigsqcup_{\Delta}^{*}<\Psi_t,\Lambda_t>_t \tag{2.134}$$

の成立を終了条件とすればよい．

2.15 multi-stage associative inductive reasoning process of recognition

Let us suppose that an input pattern $\varphi \in \Phi$ in question may belong to one of a category set $\mathfrak{C}(\gamma)$ in advance.Then This situation is expressed with a fact of that RECOGNITRON $=< \Phi_B, T, SM, BSC >$ has a categorical membership-knowledge $< \varphi, \gamma >$.

$< \varphi, \gamma > =_\Delta < \eta, \mu >$ is defined by $\varphi = \eta \wedge \gamma = \mu$.

The pattern $\varphi \in \Phi$ can be reproduced as a pattern model ϕ_t and can be determined to belong to one of category-set $\mathfrak{C}(\lambda_t)$ with a multi-stage inductive reasoning process

$< \phi_0, \lambda_0 >, < \phi_1, \lambda_1 >, \cdots, < \phi_s, \lambda_s >, \cdots, < \phi_{t-1}, \lambda_{t-1} >, < \phi_t, \lambda_t >$

,where

(1) (an initial condition) $\phi_0 = T\varphi$ (a corresponding model of pattern φ)

$\wedge\ \lambda_0 = \gamma \subseteq J$ (the whole set of categories)

(2) (a termination criterion) a fixed-point equation $TA(\mu_t)T \cdot < \phi_t, \lambda_t > =_\Delta < \phi_t, \lambda_t >$

of recognition carried out by RECOGNITRON (see theorem 2.13 and the corollary 1). The former is a associative result and the latter is a recognition result.

By using an induction reasoning, we select a sequence

$\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_s, \cdots, \mu_{t-1}, \mu_t$

of lists of category-numbers. From sth categorical membership-knowledge $< \phi_s, \lambda_s >$ RECOGNITRON can obtain the (s+1) th categorical membership-knowledge $< \phi_{s+1}, \lambda_{s+1} >$ defined by

$< \phi_{s+1}, \lambda_{s+1} > =_\Delta TA(\mu_s)T \cdot < \phi_s, \lambda_s >$ ($s = 0,1,2,\cdots,t-1$).

It is desirable for a sequence of a SS-potentials

$E(\phi_0, \lambda_0)$, $E(\phi_1, \lambda_1)$, $\cdots, E(\phi_s, \lambda_s), \cdots,$ $E(\phi_{t-1}, \lambda_{t-1}),$ $E(\phi_t, \lambda_t)$

to fulfill the decreasing sequence

$E(\phi_0, \lambda_0) \geq E(\phi_1, \lambda_1) \geq \cdots \geq E(\phi_s, \lambda_s) \geq \cdots \geq E(\phi_{t-1}, \lambda_{t-1}) \geq E(\phi_t, \lambda_t)$.

In this way , the SS method of recognizing a pattern $\varphi \in \Phi$ in question is to find some recursive procedure which yields a sequence of categorical-membership knowledges (multi-stage recognition-process)

$< \phi_0, \lambda_0 >, < \phi_1, \lambda_1 >, \cdots, < \phi_s, \lambda_s >, \cdots, < \phi_{t-1}, \lambda_{t-1} >, < \phi_t, \lambda_t >$

which approximates a categorical-membership knowledge $< \phi_t, \lambda_t >$ as a fixed-point of an equation

〈 $TA(\mu_t)T \cdot < \phi_t, \lambda_t > =_\Delta < \phi_t, \lambda_t >$

of an associative recognition, searching a sequence

$\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_s, \cdots, \mu_{t-1}, \mu_t$

of lists of category-numbers, and a sequence of a SS-potentials

$E(\phi_0, \lambda_0)$, $E(\phi_1, \lambda_1)$, $\cdots, E(\phi_s, \lambda_s), \cdots,$ $E(\phi_{t-1}, \lambda_{t-1}),$ $E(\phi_t, \lambda_t)$

which satisfies an enequality

$E(\phi_0, \lambda_0) \geq E(\phi_1, \lambda_1) \geq \cdots \geq E(\phi_s, \lambda_s) \geq \cdots \geq E(\phi_{t-1}, \lambda_{t-1}) \geq E(\phi_t, \lambda_t)$.

第3章　カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$と，カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$のSS分解，並びに，カテゴリ帰属知識間の包含情報量$I(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)$

本章では，Shannonの情報理論での通信容量に対応して，式(1.56)の情報量$I(\varphi,\phi)$が考えられることを説明しながら，カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$の元であるカテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$が直交分解されるという直交展開式(SS展開)の諸性質を説明する．その後，1つのカテゴリ帰属知識$<\phi,\lambda>$に含まれる今1つのカテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$の程度を与えるカテゴリ帰属知識間情報量$I(<\varphi,\gamma>,<\phi,\lambda>)$を，パターン間情報量$I(\varphi,\phi)$の観点から定義する．$\varphi=\omega_j$である場合のカテゴリ選択関数$CSF(\varphi,\gamma)$についての性質などを説明される(代表パターン定理)．

3.1　axiom 1を満たす順序対$[\Phi,T]$と，カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$

本節では，カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$について説明される．

$\Phi_B(\ni 0)$はパターンと判明しているφの集合(基本領域；basic domain)を導入する．通常，基本領域$\Phi_B(\ni 0)$は，ある可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の，零元を含む部分集合である．処理の対象とする問題のパターンφの集合Φは，式(2.27)のモデル構成作用素Tの導入下で，パターンモデル$T\varphi$が原パターンφと同じように知覚されるという“同一知覚原理”を想定すれば，式(2.28)のように表示される．

このようにして，“axiom 1を満たす順序対$[\Phi,T]$”が得られる(定理2.1)．

認識システムRECOGNITRON$=<\Phi_B,T,SM,BSC>$が，パターン$\varphi\in\Phi$に関し，

「パターン$\varphi\in\Phi$が，式(2.30)の全カテゴリ集合$\mathfrak{C}(J)$の，式(2.17)の部分集合$\mathfrak{C}(\gamma)$内の何れか1つのカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属する可能性がある」　(3.1)

を持っているとする．RECOGNITRONが持つこの“パターン$\varphi\in\Phi$のカテゴリ帰属知識”を

2式(1.27)，(2.47)の$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$

で表す．

式(2.48)の$<\Phi,2^J>$は，カテゴリ帰属知識空間と呼ばれているものである．

カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$上の2つの同値関係$=_\Delta,=$は，2.7節の2定義2.1，2.2で説明されている．$=_\Delta$はカテゴリ帰属知識間の等形式関係であり，$=$は等構造関係である．

3.2　カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$の直交分解(SS分解)

本節では，カテゴリ帰属知識の線形1次結合の間に，内積を定義し，任意のカテゴリ帰属知識を標準分解(SS分解)する方法(直交分解法)が説明される．

3.2.1　カテゴリ帰属知識の線形1次結合間の内積

等構造関係＝に関するカテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$の直交分解(orthogonal decomposition；SS分解)［B3］について，説明する．

2カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$，$<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J>$間の内積(inner product)($<\varphi,\gamma>$，$<\phi,\lambda>$)を，

$$(<\varphi,\gamma>,<\phi,\lambda>)\equiv\sum_{j\in CSF(\varphi,\gamma)\cap CSF(\phi,\lambda)}\sqrt{SM(\varphi,\omega_j)}\cdot\sqrt{SM(\phi,\omega_j)} \tag{3.2}$$

と定義し，そのノルム(norm)$\|<\varphi,\gamma>\|$を，

$$\|<\varphi,\gamma>\|\equiv\sqrt{(<\varphi,\gamma>,<\varphi,\gamma>)}$$

$$= \sum_{j \in CSF(\varphi,\gamma)} SM(\varphi, \omega_j) \tag{3.3}$$

と定義する．

さて，n 個のカテゴリ帰属知識

$$< \varphi_k, \gamma_k > \in < \Phi, 2^J >, k \in K \equiv \{1, 2, \cdots, n\} \tag{3.4}$$

と，非負条件

$$\forall k \in K, 0 \le c_k \tag{3.5}$$

を満たす実数値 c_k の組 $\{c_k \mid k \in K\}$ とを用いて定義される各カテゴリ帰属知識 $MK \equiv < \varphi_k, \gamma_k >$ の1次結合（a linear combination of MK's ）

$$\sum_{k \in K} c_k \cdot < \varphi_k, \gamma_k > \tag{3.6}$$

は，カテゴリ帰属知識空間 $< \Phi, 2^J >$ の元であるとは限らない．

各1次結合係数 c_k が式(3.5)の非負条件を満たすような式(3.6)の1次結合が $< \Phi, 2^J >$ の元であるためには，式(3.6)の各成分 $< \varphi_k, \gamma_k >$ が，

［条件C］

$$0 \le s \equiv \sum_{k \in K} \sum_{\ell \in K} c_k \cdot c_\ell \sum_{j \in CSF(\varphi_k,\gamma_k) \cap CSF(\varphi_\ell,\gamma_\ell)} \sqrt{SM(\varphi_k, \omega_j)} \cdot \sqrt{SM(\varphi_\ell, \omega_j)}$$

$$\le 1 \text{（非負・単位非超過条件）} \tag{3.7}$$

を満たすとしなければならない．

2要素 $\phi \in \Phi, \lambda \in 2^J$ を用い，2，7節の定義2.2の等構造関係＝の意味で，1次結合式(3.6)を

$$< \phi, \lambda > = \sum_{k \in K} c_k \cdot < \varphi_k, \gamma_k > \tag{3.8}$$

と表記する．

次の定義3.1に従えば，不等式条件(3.7)は，

$$0 \le \| < \phi, \lambda > \|^2 \le 1 \tag{3.9}$$

と書き直される．

このとき，カテゴリ帰属知識間の，式(3.2)で定義されている内積(　,　)の定義を次のように拡張する．

［定義3.1］（カテゴリ帰属知識の線形1次結合間の内積）

2つの線形1次結合

$$\sum_{k \in K} c_k \cdot < \varphi_k, \gamma_k >, \quad \sum_{\ell \in L} d_\ell \cdot < \phi_\ell, \lambda_\ell > \tag{3.10}$$

は共に，$< \Phi, 2^J >$ の元であるとして，4要素

$$\eta_1, \eta_2 \in \Phi, \mu_1, \mu_2 \in 2^J$$

を用い，等構造関係＝の意味で，

$$< \eta_1, \mu_1 > = \sum_{k \in K} c_k \cdot < \varphi_k, \gamma_k > \tag{3.11}$$

$$< \eta_2, \mu_2 > = \sum_{\ell \in L} d_\ell \cdot < \phi_\ell, \lambda_\ell > \tag{3.12}$$

と書かれる2元 $< \eta_1, \mu_1 >$，$< \eta_2, \mu_2 > \in < \Phi, 2^J >$ の内積 $(< \eta_1, \mu_1 >,, < \eta_2, \mu_2 >)$ は次のように定義される：

$$(<\eta_1,\mu_1>,\ ,\ <\eta_2,\mu_2>)$$
$$\equiv (\ \sum_{k\in K} c_k \cdot <\varphi_k,\gamma_k>\ ,\ \ \sum_{\ell\in L} d_\ell \cdot <\phi_\ell,\lambda_\ell>\ )$$
$$\equiv \sum_{k\in K}\sum_{\ell\in L}\ c_k\cdot d_\ell \cdot (<\varphi_k,\gamma_k>\ ,<\phi_\ell,\lambda_\ell>)\ )$$

(3.13)

□

3.2.2　カテゴリ帰属知識のSS分解（標準分解）

カテゴリ帰属知識間の等構造関係＝について，カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$の直交直和分解を与える次の定理3.1が成り立つ．パターン$\varphi\in\Phi$のカテゴリ依存構造を明らかにするこのSS分解は，

$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$の標準分解（canonical decomposition）　(3.14)

とも呼ばれ，S.Suzukiが発見した分解である．

［定理3.1］（カテゴリ帰属知識の直交直和分解（標準分解）定理）［D3］

（ｉ）（$<\Phi,2^J>$の基底$<\Omega,J>$の存在）

$$(<\omega_i,[i]>,<\omega_j,[j]>)=$$
$$\begin{cases} 1 & \text{if} \quad i=j \\ 0 & \text{if} \quad i\neq j \end{cases}$$

(3.15)

などが成り立ち，

$$<\Omega,J>\equiv\{<\omega_j,[j]>\mid j\in J\} \tag{3.16}$$

は，カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$の完全正規直交系（complete orthonormal system）である．

（ⅱ）（直交展開係数$(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)$の決定）

$$(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)=$$
$$\begin{cases} \sqrt{SM(\varphi,\omega_j)} & \text{if} \quad j\in CSF(\varphi,\gamma) \\ 0 & \text{if} \quad j\notin CSF(\varphi,\gamma) \end{cases}$$

(3.17)

（ⅲ）（直交展開式；SS展開）

このとき，3式（2.34），（2.40），（2.51）の3写像SM,BSC,CSFについて，全射性が成立するという仮定の下で，

$$\forall\ <\varphi,\gamma>\ \in<\Phi,2^J>\ ,\ \ <\varphi,\gamma>$$
$$=\sum_{j\in J}\ (<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)\cdot<\omega_j,[j]> \tag{3.18}$$
$$=\sum_{j\in CSF(\varphi,\gamma)}\sqrt{SM(\varphi,\omega_j)}\cdot<\omega_j,[j]> \tag{3.19}$$

（ⅳ）（ノルム$\|<\varphi,\gamma>\|$の表現）

$$\forall\ <\varphi,\gamma>\ \in<\Phi,2^J>\ ,\ \ \|<\varphi,\gamma>\|$$
$$=\sqrt{\sum_{j\in J}\ |(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)|^2} \tag{3.20}$$
$$=\sqrt{\sum_{j\in CSF(\varphi,\gamma)} SM(\varphi,\omega_j)}\leq 1 \tag{3.21}$$

が成り立つ．　□

3.3　カテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>$ がその成分 $<\omega_j,[j]>$ に含まれる程度を表す情報量

本節では，Shannonの情報理論での通信容量に対応して，式(1.56)の情報量 $I(\varphi,\phi)$ が考えられることを説明し，その後，1つのカテゴリ帰属知識 $<\phi,\lambda> =_\Delta <\omega_j,[j]>$ に含まれる今1つのカテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>$ の程度を与える情報量 $I(<\varphi,\gamma>,<\phi,\lambda>)$ が，式(1.56)の情報量 $I(\varphi,\phi)$ の意味から式(3.40)のように定義される．$<\phi,\lambda>$ が $<\omega_j,[j]>$ でない場合の $I(<\varphi,\gamma>,<\phi,\lambda>)$ も容易に定義されるが，割愛される．

3.3.1　シャノンの通信容量とパターン間の包含情報量 $I(\varphi,\phi)$ との類似

式(1.56)の情報量 $I(\varphi,\phi)$ の意味をシャノンの通信容量の立場から説明しよう．

瞬時振幅の確率分布が正規分布に従うような雑音をガウス雑音といい，その電力スペクトル密度が問題とする周波数範囲で一定であるような雑音を白い雑音であるという．周波数帯域と電力とが与えられた情報源において最大エントロピー(平均情報量)を与えるのは，白いガウス雑音(white Gaussian noise)であることが知られている．

雑音 n が送信信号 x と独立に加わる通信路を介し，x を送信した場合の受信信号 y は，

$$y = x + n \tag{3.22}$$

である．Shannonの情報理論では，送信信号 x の電力 S が一定とした場合の，通信容量(通信路を通して，送り得る1秒あたりの平均情報量；channel capacity) C は，周波数帯域幅 $-W \sim +W$ の通信路に加わる“各標本値が独立な白いガウス雑音の分散(雑音電力) N ”を導入して，

$$\frac{C}{2W} = \frac{1}{2}\cdot\log_e\frac{S+N}{N} = \frac{1}{2}\cdot\log_e(\frac{S}{N}+1) \tag{3.23}$$

つまり，

$$\frac{C}{2W} = \frac{1}{2}\cdot\log_e\frac{\text{受信信号}y = x+n\text{のエネルギー}S+N}{\text{雑音}n\text{のエネルギー}N} \tag{3.24}$$

と表される［A17］．このように，C はその周波数帯域幅 $-W \sim +W$ と，信号対雑音電力比 $\dfrac{S}{N}$ の関数である．

2式(1.12)，(1.16)の，パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ の直交分解(3式(1.49)，(1.50)，(1.55))

$$\varphi = (\varphi, \frac{\phi}{\|\phi\|})\cdot\frac{\phi}{\|\phi\|} + \varphi_\perp \tag{3.25}$$

$$\wedge(\phi,\varphi_\perp) = 0 \tag{3.26}$$

を考えよう．

2式(3.25)，(3.26)の意味は次のように説明される：

φ を $\dfrac{\phi}{\|\phi\|}$ の定数 $(=a)$ 倍 $a\cdot\dfrac{\phi}{\|\phi\|}$ で近似するときの誤差 $\varphi - a\cdot\dfrac{\phi}{\|\phi\|}$ のノルムの自乗

$$\left\|\varphi - a\cdot\frac{\phi}{\|\phi\|}\right\|^2$$

を最小にする定数 a は，最小二乗法を適用すれば，式(1.55)の a であることがわかる．その結果，$\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ が2式(3.25)，(3.26)のように表現されることになる．□

このとき，パターン ϕ に含まれているパターン φ の程度のもたらす式(1.56)の包含情報量 $I(\varphi,\phi)$ は，式(1.51)から

$$I(\varphi,\phi)=\frac{1}{2}\cdot\log_e\frac{\left\|(\varphi,\frac{\phi}{\|\phi\|})\cdot\frac{\phi}{\|\phi\|}+\varphi_\perp\right\|^2}{\|\varphi_\perp\|^2}$$

と表される（式(3.24)を参照）．ここで，

$(\varphi,\frac{\phi}{\|\phi\|})\cdot\frac{\phi}{\|\phi\|}$ に直交雑音 $\varphi_\perp$ が加わったときのエネルギーが

$$\left\|(\varphi,\frac{\phi}{\|\phi\|})\cdot\frac{\phi}{\|\phi\|}+\varphi_\perp\right\|^2$$

であり，また，直交雑音 $\varphi_\perp$ のエネルギーが $\|\varphi_\perp\|^2$ であることに注意する．直交式(3.26)より，エネルギーの加法性

$$\left\|(\varphi,\frac{\phi}{\|\phi\|})\cdot\frac{\phi}{\|\phi\|}+\varphi_\perp\right\|^2=\left\|(\varphi,\frac{\phi}{\|\phi\|})\cdot\frac{\phi}{\|\phi\|}\right\|^2+\|\varphi_\perp\|^2 \tag{3.27}$$

が成立している．よつて，2式(3.22)，(3.25)の間に，対応

$$y\leftrightarrow\varphi \tag{3.28}$$

$$x\leftrightarrow(\varphi,\frac{\phi}{\|\phi\|})\cdot\frac{\phi}{\|\phi\|} \tag{3.29}$$

$$n\leftrightarrow\varphi_\perp \tag{3.30}$$

があり，よって，対応

$$S\leftrightarrow\left\|(\varphi,\frac{\phi}{\|\phi\|})\cdot\frac{\phi}{\|\phi\|}\right\|^2 \tag{3.31}$$

$$N\leftrightarrow\|\varphi_\perp\|^2 \tag{3.32}$$

を持っていると考えることが出来る．

3.3.3　カテゴリ帰属知識間包含情報量 $I(<\varphi,\gamma>,<\varphi,\gamma>(\{j\}))$

一般に，認識システムRECOGNITRONが処理の対象とする問題のパターン $\varphi\in\Phi$ に関しカテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$ を抱いている条件の下で，連想形認識仮説

Pattern φ is associated with the i th recalled pattern $T\omega_i$, and gets classified
into the i th category $\mathfrak{C}_i$ (3.33)

が成立する確率を，

$$prob(\frac{<\omega_i,[i]>}{<\varphi,\gamma>})$$

で表すと，この確率は，

$$prob(\frac{<\omega_i,[i]>}{<\varphi,\gamma>})\equiv$$

$$\begin{cases} \dfrac{|(<\varphi,\gamma>,<\omega_i,[i]>)|^2}{\sum_{k\in J}|(<\varphi,\gamma>,<\omega_k,[k]>)|^2} \cdots \exists k\in J,(<\varphi,\gamma>,<\omega_k,[k]>)\neq 0 \text{ のとき} \\ 0\cdots \forall k\in J,(<\varphi,\gamma>,<\omega_k,[k]>)=0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.34}$$

と定義されてよい．この確率は，定理3.1の（ⅱ）を適用すれば，式(3.4)の類似度関数 $SM(\varphi,\omega_k)$ と，定理2.4でのカテゴリ選択関数 $CSF(\varphi,\gamma)$ とを用い，

$$prob\left(\frac{<\omega_i,[i]>}{<\varphi,\gamma>}\right)=$$

$$\begin{cases} \dfrac{SM(\varphi,\omega_i)}{\sum_{k\in CSF(\varphi,\gamma)}SM(\varphi,\omega_k)} \cdots i\in CSF(\varphi,\gamma) \text{ のとき} \\ 0\cdots i\notin CSF(\varphi,\gamma) \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.35}$$

と再表現される．

カテゴリ番号集合 J の任意の部分集合 $K(\subseteq J)$ について，$<\varphi,\gamma>(K)\in<\Phi,2^J>$ を，

$$<\varphi,\gamma>(K)$$

$$\equiv\sum_{j\in K}(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)\cdot<\omega_j,[j]> \tag{3.36}$$

と定義する．SS展開式(3.18)を書き直すと，

$$<\varphi,\gamma>=<\varphi,\gamma>(\{j\})+<\varphi,\gamma>(J-\{j\}) \tag{3.37}$$

となるが，基底〈Ω，J〉の正規直交式(3.15)を適用すれば，直交性

$$(<\varphi,\gamma>(\{j\}),<\varphi,\gamma>(J-\{j\}))=0 \quad \because \quad \text{定義3.1} \tag{3.38}$$

が成り立っていることがわかり，式(3.3)のノルムの自乗 $\|<\varphi,\gamma>\|^2$ の和分解式

$$\|<\varphi,\gamma>\|^2$$

$$=\|<\varphi,\gamma>(\{j\})\|^2+\|<\varphi,\gamma>(J-\{j\})\|^2 \tag{3.39}$$

が成立する．式(3.37)は，パターンの直交分解式(3.25)に対応して得られたカテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>$ の直交分解である．式(3.38)は式(3.26)に対応する．

よって，

$$<\varphi,\gamma>(\{j\})=(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)\cdot<\omega_j,[j]>$$

内の，代表パターン ω_j のカテゴリ帰属知識 $<\omega_j,[j]>$ に，カテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>$ が含まれている程度を包含情報量 $I(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)$ で表すと，式(1.52)の包含情報量 $I(\varphi,\phi)$ との対応から，

$$I(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)$$

$$\equiv-\frac{1}{2}\cdot\log_e\frac{\|<\varphi,\gamma>(J-\{j\})\|^2}{\|<\varphi,\gamma>\|^2} \tag{3.40}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\log_e[1-\frac{\|<\varphi,\gamma>(\{j\})\|^2}{\|<\varphi,\gamma>\|^2}] \quad \because \quad \text{式(3.39)} \tag{3.41}$$

ということになる．

次の定理3.2は，カテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>$ にカテゴリ帰属知識 $<\omega_j,[j]>$ が含まれている程度を情報量として表したとも考えられる包含情報量 $I(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)$ をaxiom 2を満たす式(2.34)の類似

度関数 SM とaxiom 4を満たす定理2.4のカテゴリ選択関数 CSF とを使って表現したものである．

［定理3.2］（カテゴリ帰属知識間包含情報量定理）

式(3.41)の包含情報量 $I(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)$ について，表現

$$I(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\log_e[1-prob(\frac{<\omega_j,[j]>}{<\varphi,\gamma>})] \quad (3.42)$$

$$=$$

$$\begin{cases} \log_e\sqrt{\dfrac{\sum_{k\in CSF(\varphi,\gamma)}SM(\varphi,\omega_k)}{\sum_{k\in CSF(\varphi,\gamma)-\{j\}}SM(\varphi,\omega_k)}} \cdots j\in CSF(\varphi,\gamma)\text{ の場合} & (3.43)\\ 0 \qquad\qquad \cdots j\notin CSF(\varphi,\gamma)\text{ の場合} & (3.44)\end{cases}$$

が成り立つ．

（証明）先ず，定義式(3.36)によれば，

$$<\varphi,\gamma)>(\{j\})=(<\varphi,\gamma)>,<\omega_j,[j]>)\cdot<\omega_j,[j]> \quad (3.45)$$

であるから，

$$\|<\varphi,\gamma>(\{j\})\|^2$$

$$=(<\varphi,\gamma>(\{j\}),<\varphi,\gamma>(\{j\}))$$

$$=(<\varphi,\gamma)>,<\omega_j,[j]>)^2\cdot(<\omega_j,[j]>,<\omega_j,[j]>) \quad \because\ \text{定義3.1}$$

$$=|(<\varphi,\gamma)>,<\omega_j,[j]>)|^2 \quad \because\ \text{式(3.15)} \quad (3.46)$$

を得，よって，この式(3.20)を考慮すると，式(3.34)の $prob(\frac{<\omega_i,[i]>}{<\varphi,\gamma>})$ は，

$$prob(\frac{<\omega_i,[i]>}{<\varphi,\gamma>})=$$

$$\begin{cases} \dfrac{\|<\varphi,\gamma>(\{j\})\|^2}{\|<\varphi,\gamma>\|^2} \cdots \exists k\in J,<\varphi,\gamma>(\{k\})\neq 0\text{ のとき}\\ 0\cdots\forall k\in J,<\varphi,\gamma>(\{k\})=0\text{ とき}\end{cases} \quad (3.47)$$

と書き直され，この式(3.47)を式(3.41)に代入すれば，所要の式(3.42)が得られる．

式(3.42)に式(3.35)を代入すると，

$$I(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)=$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\cdot\log_e[1-\dfrac{SM(\varphi,\omega_j)}{\sum_{k\in CSF(\varphi,\gamma)}SM(\varphi,\omega_k)}]\cdots j\in CSF(\varphi,\gamma)\text{ のとき}\\ 0\cdots j\notin CSF(\varphi,\gamma)\text{ のとき}\end{cases} \quad (3.48)$$

を得，この式(3.48)を変形したものが，2式(3.43)，(3.44)である．　□

3.4　カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$での零元$<0,\phi>$の諸性質

先ず，2.7節の定義2.1の等形式関係$=_\Delta$，定義2.2の等構造関係＝は共に同値関係であることに注意しておく．

本節では，式(2.48)のカテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$の零元を決定する．

先ず，2.5節の定理2.6は，

（イ）$<\omega_j,[j]>$

（ロ）$j\in\gamma$が成立している場合の$<\omega_j,\gamma>$

の2者は，2.7節の定義2.2の等構造関係＝に関しては，区別をつける必要がないことを指摘していること，つまり，等式

$$<\omega_j,[j]> = <\omega_j,\gamma> \quad \text{if} \quad j\in\gamma \tag{3.49$_1$}$$

の成立に注意する．更に，

$$<\omega_j,[j]> = <\varphi,\gamma> \quad \text{if} \quad CSF(\varphi,\gamma)=[j]\wedge SM(\varphi,\omega_j)=1 \tag{3.49$_2$}$$

が成り立つ．式(2.53)より，

$$CSF(\varphi,\phi)=\phi \quad \text{for any} \quad \varphi\in\Phi \tag{3.49$_3$}$$

$$CSF(0,\gamma)=\phi \quad \text{for any} \quad \gamma\in 2^J \tag{3.49$_4$}$$

に注意する．よって

$$<\varphi,\gamma>=<0,\phi> \quad \text{if} \quad \varphi=0 \tag{3.49$_5$}$$

$$<\varphi,\gamma>=<0,\phi> \quad \text{if} \quad CSF(\varphi,\gamma)=\phi \tag{3.49$_6$}$$

も成立する．更に，

$$<\varphi,\gamma>=<\eta,\mu> \quad \text{if} \quad CSF(\varphi,\gamma)=CSF(\eta,\mu)=\phi \tag{3.49$_7$}$$

も成立する．

次の定理3.3は，カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$では，$<0,\phi>$は零元として振る舞うことを指摘している．

［定理3.3］（カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$での零元定理）

（ｉ）$\|<\varphi,\gamma>\|=0 \Leftrightarrow CSF(\varphi,\gamma)=\phi.$ (3.50)

（ⅱ）$(<\varphi,\gamma>,<\phi,\lambda>)=0 \Leftrightarrow CSF(\varphi,\gamma)\cap CSF(\phi,\lambda)=\phi.$ (3.51)

（ⅲ）$\forall<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>, <\varphi,\gamma>=<\varphi,\gamma>+<0,\phi>.$ (3.52)

（証明）（ｉ）を示そう．

$$\|<\varphi,\gamma>\|=0 \Leftarrow CSF(\varphi,\gamma)=\phi \tag{3.53}$$

は式(3.3)から明らかである．また，2.5節の定理2.4の（ｉ）より，

$\varphi=0\vee\gamma=\phi$ の場合，

$$\|<\varphi,\gamma>\|=0 \Rightarrow CSF(\varphi,\gamma)=\phi \tag{3.54}$$

が成り立つ．また，

$\varphi\neq 0\wedge\gamma\neq\phi$ の場合，対偶

$$\begin{aligned}&CSF(\varphi,\gamma)\neq\phi\Rightarrow\\&\forall j\in CSF(\varphi,\gamma), SM(\varphi,\omega_j)>0 \quad \because \ \text{定理2.4の（ⅱ）}\\&\Rightarrow\|<\varphi,\gamma>\|>0 \quad \because \ \text{式(3.21)}\end{aligned} \tag{3.55}$$

を得，証明が終わった．

次に，（ⅱ）を証明しよう．

$$(<\varphi,\gamma>,<\phi,\lambda>)=0 \Leftarrow CSF(\varphi,\gamma)\cap CSF(\phi,\lambda)=\phi \tag{3.56}$$

の成立は，内積の定義式(3.2)から明らかである．

⇒の成立は，対偶で示す．

$$CSF(\varphi,\gamma)\cap CSF(\phi,\lambda)\neq\phi$$

$$\Rightarrow$$

$$[\forall j\in CSF(\varphi,\gamma)\neq\phi, SM(\varphi,\omega_j)>0]\ \wedge\ [\forall j\in CSF(\phi,\lambda)\neq\phi, SM(\phi,\omega_j)>0]$$

$\because$　定理2.4の（ⅱ）　(3.57)

$$\Rightarrow \forall j\in CSF(\varphi,\gamma)\cap CSF(\phi,\lambda)\neq\phi, \sqrt{SM(\varphi,\omega_j)}\cdot\sqrt{SM(\phi,\omega_j)}>0 \tag{3.58}$$

$$\Rightarrow (<\varphi,\gamma>,<\phi,\lambda>)>0 \quad \because\ \text{式(3.2)} \tag{3.59}$$

を得，証明が終わった．

最後に，（ⅲ）を証明しよう．

$$\forall j\in J,(<0,\phi>,<\omega_j,[j]>)$$

$$=\sum_{i\in CSF(0,\phi)\cap CSF(\omega_j,[j])}\sqrt{SM(0,\omega_i)}\cdot\sqrt{SM(\omega_j,\omega_i)} \quad \because\ \text{式(3.2)}$$

$$=0 \quad \because\ \text{式(2.53)} \tag{3.60}$$

であるから，

$$\forall j\in J,(<\varphi,\gamma>+<0,\phi>,<\omega_j,[j]>)$$

$$=(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)+(<0,\phi>,<\omega_j,[j]>) \quad \because\ \text{定義3.1}$$

$$=(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>) \tag{3.61}$$

が成立し，このことをSS展開式(3.18)を考慮すれば，かつ，2.7節の定義2.2の等構造関係＝は同値関係であることに考慮すれば，

$$<\varphi,\gamma>$$

$$=\sum_{j\in J}(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)\cdot<\omega_j,[j]> \tag{3.62}$$

$$=\sum_{j\in J}(<\varphi,\gamma>+<0,\phi>,<\omega_j,[j]>)\cdot<\omega_j,[j]> \tag{3.63}$$

$$=<\varphi,\gamma>+<0,\phi>$$

を得，（ⅲ）が証明されたことがわかる．　□

第4章　RECOGNITRONより1つだけ高階のC-RECOGNITRON

本章では，第2，3章において説明された認識システムRECOGNITRON $=<\Phi_B,T,SM,BSC>$ の出力をパターン認識するシステムC-RECOGNITRON $=<<\Phi_B,\Gamma_B>$，$\mathfrak{T}$，CSM，$CBSC>$ を構成するための基礎が研究される．具体的には，3定理4.1，4.2，4.3で，カテゴリ帰属知識空間のある部分集合 $<\Psi,\Lambda>(\subseteq<\Phi,2^J>)$ でのモデル構成作用素$\mathfrak{T}$，類似度関数 CSM，大分類関数 $CBSC$ が構成される．

C-RECOGNITRONはRECOGNITRONと同じ原理で構成されるので，2.1節で指摘されているように，3基本構成要素$\mathfrak{T}$，CSM，$CBSC$ によって，C-RECOGNITRONが構成されたことになる．RECOGNITRONの内部状態，或いは出力であるカテゴリ帰属知識 $<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J>$ をパターンと見なすC-RECOGNITRONの内部状態，或いは出力とは，カテゴリ帰属知識のカテゴリ帰属知識，つまり，$<<\phi,\lambda>,\lambda'>\in<<\Phi,2^J>,2^J>$ であることに，注意しておく．

4.1　順序対 $<<\Psi,\Lambda>,\mathfrak{T}>$ の構成

本節では，C-RECOGNITRONが処理の対象とする問題のパターン集合 $<\Psi,\Lambda>$ と，パターンモデル $\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>$ が恰も原パターン $<\varphi,\gamma>$ と同じように知覚されるという“同一知覚原理”を想定できるようなモデル構成作用素 $\mathfrak{T}$ の順序対 $<<\Psi,\Lambda>,\mathfrak{T}>$ が構成される．

4.1.1　カテゴリ帰属知識のモデル構成写像 $\mathfrak{T}$

積集合 $<\Phi,2^J>\times J$ から非負単位区間への写像

$$p:<\Phi,2^J>\times J\rightarrow\{s\mid 0\le s\le 1\} \tag{4.1}$$

を，式(3.34)の $prob(\frac{<\omega_i,[i]>}{<\varphi,\gamma>})$ を使って，

$$p(<\varphi,\gamma>,i)\equiv prob(\frac{<\omega_i,[i]>}{<\varphi,\gamma>}) \tag{4.2}$$

と定義する［B3］．確率性

$$\forall<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>,$$
$$[\forall j\in J,0\le p(<\varphi,\gamma>,j)\le 1]\wedge\sum_{j\in J}p(<\varphi,\gamma>,j)\in\{0,1\} \tag{4.3}$$

が成立していることに注意する．

$$\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>\equiv\sum_{j\in J}\sqrt{p(<\varphi,\gamma>,j)}\cdot<\omega_j,[j]> \tag{4.4}$$

と定義される写像

$$\mathfrak{T}:<\Phi,2^J>\rightarrow<\Phi,2^J> \tag{4.5}$$

につき，

$$\forall j\in J,(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>,\ <\omega_j,[j]>)=\sqrt{p(<\varphi,\gamma>,j)}$$
$$\because\ \ 2式(3.13),(3.15) \tag{4.6}$$

を得る．式(3.36)に従い，

$$\therefore\ \ \mathfrak{T}<\varphi,\gamma>(\{j\})$$
$$=(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>,\ <\omega_j,[j]>)\cdot<\omega_j,[j]>$$
$$=\sqrt{p(<\varphi,\gamma>,j)}\cdot<\omega_j,[j]> \tag{4.7}$$

が成り立つ．式(3.46)の導き方と同様にして，

$$\|\ \mathfrak{T}<\varphi,\gamma>(\{j\})\ \|^2$$
$$=p(<\varphi,\gamma>,j) \tag{4.8}$$

が得られる．式(3.34)を考慮すれば，総和規格性(単位ノルム性)

$$\|\ \mathfrak{T}<\varphi,\gamma>\ \|^2$$
$$=\sum_{j\in J}|(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>,\ <\omega_j,[j]>)|^2\in\{0,1\} \tag{4.9}$$

もわかる．

そうすると，2式(3.40)，(3.41)の $I(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)$ において，$<\varphi,\gamma>$ の代りに・$\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>$ を代入して得られる包含情報量

$$I(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot\log_e\ [\|\ \mathfrak{T}<\varphi,\gamma>(J-\{j\})\ \|^2/\|\ \mathfrak{T}<\varphi,\gamma>(\{j\})\ \|^2] \tag{4.10}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\log_e[1-\| \ \mathfrak{T}<\varphi,\gamma>(\{j\}) \ \|^2] \quad \because \ 式(4.9) \tag{4.11}$$

が得られる．

ここで，$p(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>,j)$ を計算してみると，

$$\forall<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>,\forall j\in J,$$

$$p(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>,j)$$

$$=prob(<\omega_j,[j]>/\ \ \mathfrak{T}<\varphi,\gamma>)$$

$$\because \ prob(\frac{<\omega_i,[i]>}{<\varphi,\gamma>})\ の定義式(4.2) \tag{4.12}$$

$$=$$

$$\begin{cases} |(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)|^2 \ / \ \sum_{k\in J}|(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>,<\omega_k,[k]>)|^2 \\ \qquad\qquad \cdots \exists k\in J,(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>,<\omega_k,[k]>)\neq 0\ のとき \\ 0\cdots\forall k\in J,(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>,<\omega_k,[k]>)=0\ のとき \end{cases}$$

$$\because \ prob(\frac{<\omega_i,[i]>}{<\varphi,\gamma>})\ の定義式(3.34) \tag{4.13}$$

$$=$$

$$\begin{cases} \dfrac{p(<\varphi,\gamma>,j)}{\sum_{k\in J}p(<\varphi,\gamma>,k)}\cdots\exists k\in J,p(<\varphi,\gamma>,k)\neq 0\ のとき \\ 0\cdots\forall k\in J,p(<\varphi,\gamma>,k)=0\ のとき \end{cases}$$

$$\because \ (\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>,<\omega_i,[i]>)\ の計算式(4.6) \tag{4.14}$$

$$=p(<\varphi,\gamma>,j) \quad \because \ 式(4.3) \tag{4.15}$$

であることがわかり，結局，

$$\forall<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>,\forall j\in J,$$

$$p(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>,j)=p(<\varphi,\gamma>,j) \tag{4.16}$$

が成立する．よって，$\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>$ の定義式(4.4)を考慮すれば，写像$\mathfrak{T}$のベキ等性

$$\forall<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>,\mathfrak{T}(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>)=\mathfrak{T}<\varphi,\gamma> \tag{4.17}$$

の成立もわかる［B3］.

式(4.4)で定義される式(4.5)の写像$\mathfrak{T}$は，カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$のモデル$\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>$を出力すると称してよいことは，定理2.1に対応する次の4.1.2項の定理4.1が証明できるからである．

4.1.2　$<\Psi,\Lambda>(\subseteq<\Phi,2^J>)$ の構成

さて，べき等式(4.17)などの以上の準備の下に，カテゴリ帰属知識の集合$<\Psi,\Lambda>\subset<\Phi,2^J>$の構成を論じよう．カテゴリ帰属知識の集合$<\Psi,\Lambda>(\subseteq<\Phi,2^J>)$とモデル構成作用素$\mathfrak{T}$の順序対$[<\Psi,\Lambda>,\mathfrak{T}]$を構成する，つまり，定理2.1に対応する定理4.1を導く．

処理の対象とする問題のカテゴリ帰属知識空間$<\Psi,\Lambda>(\subseteq<\Phi,2^J>)$は，カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$の，零元$<0,\phi>$（定理3.3）を含む部分集合であり，

$$<\Phi_B,\Gamma_B>\cup\mathfrak{T}\cdot<\Phi_B,\Gamma_B>\rangle \tag{4.18}$$

where

$$\mathfrak{T}\cdot<\Phi_B,\Gamma_B>\equiv\{\mathfrak{T}\cdot<\varphi_B,\gamma_B>|<\varphi_B,\gamma_B>\in<\Phi_B,\Gamma_B>\} \tag{4.19}$$

を含む制限された錐(cone)

$$
\begin{aligned}
&<\Psi,\Lambda> \\
&\equiv\{r^{++}\cdot<\varphi_B,\gamma_B>|\,0\le r^{++}\cdot r^{++}\le\frac{1}{\|<\varphi_B,\gamma_B>\|^2},<\varphi_B,\gamma_B>\in<\Phi_B,\Gamma_B>,CSF(\varphi_B,\gamma_B)\ne\phi\} \\
&\cup\ \{r^{++}\cdot\mathfrak{T}\cdot<\varphi_B,\gamma_B>|\,0\le r^{++}\cdot r^{++}\le\frac{1}{\|<\varphi_B,\gamma_B>\|^2},\ <\varphi_B,\gamma_B>\in<\Phi_B,\Gamma_B>, \\
&CSF(\varphi_B,\gamma_B)\ne\phi\}\ \cup\{<0,\phi>\}
\end{aligned}
\qquad (4.20)_1
$$

と表される順序の付いた順序対$[<\Psi,\Lambda>,\mathfrak{T}]$を想定しよう．ここに，不等式

$$
\begin{aligned}
&\forall<\varphi_B,\gamma_B>\in<\Phi_B,\Gamma_B>\ \text{such that}\ \ CSF(\varphi_B,\gamma_B)\ne\phi, \\
&1\le\frac{1}{\|<\varphi_B,\gamma_B>\|^2}<\infty \qquad \because\quad 2\text{式}(3.21),(3.50)
\end{aligned}
\qquad (4.20)_2
$$

が成立しており，また，カテゴリ帰属知識の集合$<\Phi_B,\Gamma_B>$は，3条件

①$<0,\phi>\in<\Phi_B,\Gamma_B>$

②$<\Omega,J>\equiv\{<\omega_j,[j]>|\,j\in J\}\subseteq<\Phi_B,\Gamma_B>$

③パターン$\varphi_B\in\Phi_B$についてあるカテゴリ番号$j\in\gamma_B\in 2^J$が存在して，パターンφ_Bは第j番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属しているという“RECOGNITRONの持っている知識”
$<\varphi_B,[j]>$は真である

が共に満たされるようなカテゴリ帰属知識$<\varphi_B,\gamma_B>$の集合（基本領域；basic domain）である．

そうすると，式(4.17)のベキ等性$\mathfrak{T}\mathfrak{T}=\mathfrak{T}$の成立などから，順序対$[<\Psi,\Lambda>,\mathfrak{T}]$が少なくとも持たなければならない諸性質を指摘するのが，次の定理4.1である．

［定理4.1］（カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$でのカテゴリ帰属知識の集合$<\Psi,\Lambda>(\subseteq<\Phi,2^J>)$とモデル構成作用素$\mathfrak{T}$の順序対$[<\Psi,\Lambda>,\mathfrak{T}]$の定理）

（ｉ）（零元の不動点性；fixed-point property of zero element $<0,\phi>$ under mapping $\mathfrak{T}$）

$$<0,\phi>\ \in<\Psi,\Lambda>\wedge\mathfrak{T}<0,\phi>=<0,\phi>.$$

（ii）（錐性，正定数倍不変性；cone property）

$$
\begin{aligned}
&\forall<\varphi,\gamma>\in<\Psi,\Lambda>, \\
&r^{++}\cdot<\varphi,\gamma>\in<\Psi,\Lambda>\wedge\mathfrak{T}(r^{++}\cdot<\varphi,\gamma>)=\mathfrak{T}<\varphi,\gamma> \\
&\qquad\text{for any positive number}\ \ r^{++}\ \ \text{such that} \\
&\qquad\qquad r^{++}\cdot r^{++}\le\frac{1}{\|<\varphi,\gamma>\|^2}.
\end{aligned}
$$

（iii）（ベキ等性，埋込性；idempotency，embeddedness）

$$\forall<\varphi,\gamma>\in<\Psi,\Lambda>,\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>)\in<\Psi,\Lambda>\wedge\mathfrak{T}(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>)=\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>.$$

（iv）（写像$\mathfrak{T}$の非零写像性）

$$\exists<\varphi,\gamma>\in<\Psi,\Lambda>,\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>\ne<0,\phi>.$$

（定理4.1の証明）

（ｉ）の証明：$<0,\phi>\in<\Phi_B,\Gamma_B>\subset<\Psi,\Lambda>$は①で仮定されている．

$$\forall k\in J,(<0,\phi>,<\omega_k,[k]>)=0 \qquad (4.21)$$

$$\because\quad CSF(0,\phi)=\phi\wedge\text{内積の定義式}(3.2)$$

を得，定理3.1の（iii）の式(3.18)より，SS展開

$$<0,\phi>=\sum_{j\in J}0\cdot<\omega_j,[j]> \qquad (4.22)$$

であることがわかる．ここで，式(4.21)より，

$$\forall k \in J, p(<0,\phi>,k)=0 \tag{4.23}$$

∵　2式(4.2)，(3.34)

を得，式(4.4)より，

$$\mathfrak{T}<0,\phi>=\sum_{j\in J}0\cdot<\omega_j,[j]> \qquad (4.24)_1$$

と計算される．従って，2.7節の定義2.2の等構造関係＝は同値関係であることを思い起こすと，2式(4.22)，(4.24)より，

$$\mathfrak{T}<0,\phi>=\sum_{j\in J}0\cdot<\omega_j,[j]>=<0,\phi> \qquad (4.24)_2$$

が示された．

（ⅱ）の証明：先ず，

$$r^{++}\cdot<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$$

を仮定すると，

$$1\geq\left\|r^{++}\cdot<\varphi,\gamma>\right\| \quad \because \quad \text{式(3.21)}$$

であらねばならない．また，

$$\begin{aligned}
&<\Phi,2^J>\ni r^{++}\cdot<\varphi,\gamma> \\
&=\sum_{j\in J}(r^{++}\cdot<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)\cdot<\omega_j,[j]> \quad \because \quad \text{SS展開式(3.18)} \\
&=\sum_{j\in J}r^{++}\cdot(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)\cdot<\omega_j,[j]> \quad \because \quad \text{式(3.13)} \\
&=\sum_{j\in CSF(\varphi,\gamma)}r^{++}\cdot\sqrt{SM(\varphi,\omega_j)}\cdot<\omega_j,[j]> \because \quad \text{式(3.17)}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

が成立する．よって，不等式･等式

$$\begin{aligned}
&1\geq\left\|r^{++}\cdot<\varphi,\gamma>\right\|^2 \\
&=\sum_{j\in CSF(\varphi,\gamma)}r^{++}\cdot r^{++}\cdot SM(\varphi,\omega_j) \quad \because \quad \text{2式(3.13)，(3.15)} \\
&=(r^{++})^2\cdot\sum_{j\in CSF(\varphi,\gamma)}SM(\varphi,\omega_j) \\
&=(r^{++})^2\cdot\left\|<\varphi,\gamma>\right\|^2 \\
&\therefore \quad r^{++}\cdot r^{++}\leq\frac{1}{\left\|<\varphi,\gamma>\right\|^2}
\end{aligned}$$

を得，

$$r^{++}\cdot<\varphi,\gamma>\in<\Psi,\Lambda> \quad \because \quad \text{式}(4.20)_1$$

が示された．

また，

$$\begin{aligned}
&\forall j\in J,(r^{++}\cdot<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>) \\
&=r^{++}\cdot(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)= \quad \because \quad \text{式(3.13)} \\
&\begin{cases} r^{++}\cdot\sqrt{SM(\varphi,\omega_j)}\cdots j\in CSF(\varphi,\gamma)\text{のとき} \\ r^{++}\cdot 0=0\ \cdots j\notin CSF(\varphi,\gamma)\text{jのとき} \end{cases} \\
&\qquad\qquad \because \quad \text{式(3.17)}
\end{aligned}$$

を得,

$CSF(\varphi,\gamma)=\phi,\neq\phi$

の2つの場合に分けて考えれば,

$\forall j\in J, p(r^{++}\cdot<\varphi,\gamma>,j)=p(<\varphi,\gamma>,j))$ ∵ 2式(4.2), (3.34) (4.26)

であることがわかり,

$\mathfrak{T}(r^{++}\cdot<\varphi,\gamma>)=\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>$ ∵ 式(4.4)

が成り立つことがわかる.

(ⅲ)の証明:

$\forall<\varphi,\gamma>\in<\Psi,\Lambda>, \mathfrak{T}<\varphi,\gamma>\in<\Psi,\Lambda>\rangle$ (4.27)

であることは, 次の(イ), (ロ)よりわかる.

(イ) $\|<\varphi,\gamma>\|=0$ のとき

この条件(イ)は, 式(3.50)より, $CSF(\varphi,\gamma)=\phi$ と同等である. よって,

$\forall k\in J,(<\varphi,\gamma>,<\omega_k,[k]>)=0$

が式(3.17)よりわかり, 2式(4.2), (3.34)より,

$\forall k\in J, p(<\varphi,\gamma>,k)=0$

が成り立つ. それで,

$\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>=\sum_{j\in J}0\cdot<\omega_j,[j]>=<0,\phi>$ ∵ 式(4.22)

がいえ,

$\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>\in<\Psi,\Lambda>$. ∵ 本定理の(ⅰ)

(ロ) $\|<\varphi,\gamma>\|>0$ のとき

この条件(ロ)は, 式(3.50)より, $CSF(\varphi,\gamma)\neq\phi$ と同等である. よって, 式(3.17)より,

$\exists k\in CSF(\varphi,\gamma)\subset J,(<\varphi,\gamma>,<\omega_k,[k]>)>0$ ∵ 式(3.17)

が成り立つ.

$$r^{++}\leq\frac{1}{\|<\varphi,\gamma>\|}$$

と選んだ場合,

$\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>$

$=\sum_{j\in J}\frac{(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)}{\sqrt{\sum_{k\in J}|(<\varphi,\gamma>,<\omega_k,[k]>)|^2}}\cdot<\omega_j,[j]>$ ∵ 3式(4.4), (4.2), (3.34)

$=\frac{1}{\|<\varphi,\gamma>\|}\cdot\sum_{j\in J}(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)\cdot<\omega_j,[j]>$ ∵ 2式(3.17), (3.3)) (4.28)$_1$

$=\frac{1}{\|<\varphi,\gamma>\|}\cdot<\varphi,\gamma>$ ∵ SS展開式(3.18)

が成立し, 本定理4.1の(ⅱ)より, 式(4.27)の成立がわかる.

本定理4.1の(ⅲ)の後半は, 式(4.17)で既に示されている.

(ⅳ)の証明: 本定理4.1の系2の②で示されている. □

尚, 式(3.2)の内積 $(<\varphi,\gamma>,<\phi,\lambda>)$ は,

$(<\varphi,\gamma>,<\phi,\lambda>)=\sum_{k\in J}(<\varphi,\gamma>,<\omega_k,[k]>)\cdot(<\phi,\lambda>,<\omega_k,[k]>)$ (4.28)$_2$

と表され，更に，式(3.3)のノルム$\|<\varphi,\gamma>\|$は

$$\|<\varphi,\gamma>\| = \sqrt{\sum_{k\in J}|(<\varphi,\gamma>,<\omega_k,[k]>)|^2} \tag{4.28$_3$}$$

と表される．この2式の成立は，式(3.17)から容易に示される．式(4.28)$_3$は式(4.28)$_1$に登場している．

上述の定理4.1が成り立つ意味で，式(4.4)のように定義される式(4.5)の写像$\mathfrak{T}$をカテゴリ帰属知識の集合$<\Psi,\Lambda>(\subseteq<\Phi,2^J>)$のモデル構成作用素(model-construction operator)という．

次の定理4.1の系1は，式(4.4)で定義される式(4.5)の写像$\mathfrak{T}$が，$CSF(\varphi,\gamma)\neq\phi$のとき$<\varphi,\gamma>$をノルム1の$\frac{1}{\|<\varphi,\gamma>\|}<\varphi,\gamma>$.に写すことを指摘している．

［定理4.1の系1］（写像$\mathfrak{T}$の決定定理）

$$CSF(\varphi,\gamma)\neq\phi \text{のとき}\quad \mathfrak{T}<\varphi,\gamma>=\frac{1}{\|<\varphi,\gamma>\|}<\varphi,\gamma>.$$

（証明）定理4.1の(ⅲ)の証明の(ロ)で示されている．　□

定理4.1の次の系2の①は，カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$でのモデル構成作用素$\mathfrak{T}$により，零点$<0,\phi>$.に写像されるカテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>\in<\Psi,\Lambda>(\subseteq<\Phi,2^J>)$が$<0,\phi>$以外に複数個存在することを明らかにし，定理4.1の次の系2の②は，定理4.1の(ｉ)と併せると，式(4.4)のように定義される式(4.5)の写像$\mathfrak{T}$が，不動点の集合

$$\{<0,\phi>\}\cup\{<\omega_j,[j]>|\, j\in J\}$$

を持っていることを明らかにしている．

［定理4.1の系2］（カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$でのモデル構成作用素$\mathfrak{T}$の不動点定理）

① $CSF(\varphi,\gamma)=\phi$のとき　$\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>=<0,\phi>$.

② $\forall j\in J, \mathfrak{T}<\omega_j,[j]>=_\Delta<\omega_j,[j]>$.

（証明）　①は定理4.1の(ⅲ)の証明の(イ)で示されている．

$$p(<\omega_i,[i]>,j)= \begin{cases} 1\cdots i=j \text{ のとき} \\ 0\cdots i\neq j \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.29}$$

であることが式(3.15)からわかり，$\mathfrak{T}$の定義式(4.4)に代入すれば，②の成立が知れる．

□

4.2　カテゴリ帰属知識間の類似度 CSM

本節では，C-RECOGNITRON内の構成要素である類似度関数CSMを構成する．

次の定理4.2は，2つのカテゴリ帰属知識$<\phi,\lambda>$，$<\omega_j,[j]>$間の類似度(similarity measure between categorical membership-knowledges)と称されてよい2式(4.30)，(4.31)で定義されている量

$$CSM(<\phi,\lambda>,<\omega_j,[i]>)$$

が，

認識システムRECOGNITRON$=<\Phi_B,T,SM,BSC>$が抱く仮説としてのカテゴリ帰属知識$<\phi,\lambda>$内にω_jが第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属しているという真の知識$<\omega_j,[j]>$を見いだす確率

を与えることを指摘している．

式(4.10)，(4.11)の報量$I(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)$を用いて，

$$CSM(<\phi,\lambda>,<\omega_j,[j]>) \equiv$$
$$\begin{cases} I(\mathfrak{T}<\phi,\lambda>,<\omega_j,[j]>) \,/ \sum_{i\in J} I(\mathfrak{T}<\phi,\lambda>,<\omega_i,[i]>) > 0 \\ \cdots \sum_{k\in J} I(\mathfrak{T}<\phi,\lambda>,<\omega_k,[k]>) > 0 \text{のとき} & (4.30) \\ -\frac{1}{2}\cdot\log_e[1-p(\mathfrak{C}_j)] \\ \cdots \sum_{k\in J} I(\mathfrak{T}<\phi,\lambda>,<\omega_k,[k]>) = 0 \text{のとき} & (4.31) \end{cases}$$

と定義される関数

$$CSM :< \Psi,\Lambda > \times < \Omega, J > \rightarrow \{s \mid 0 \le s \le 1\} \tag{4.32}$$

を考えよう．

［**定理4.2**］（包含情報量 I に基づくカテゴリ帰属知識間の類似度関数 CSM の構成定理1）

2式(4.30)，(4.31)の如く定義される式(4.32)の関数について，次の(ｉ)，(ⅱ)，(ⅲ)が成り立つ：

(ｉ)（直交条件）

$$CSM(<\omega_i,[i]>,<\omega_j,[i]>) =$$
$$\begin{cases} 1\cdots i=j \text{ のとき} \\ 0\cdots i\neq j\,. \end{cases}$$

(ⅱ)（確率条件）

$$\forall <\phi,\lambda>\in<\Psi,\Lambda>,$$
$$[\forall j\in J, 0\le CSM(<\phi,\lambda>,<\omega_j,[j]>)\le 1]$$
$$\wedge \sum_{j\in J} CSM(<\phi,\lambda>,<\omega_j,[j]>) = 1.$$

(ⅲ)（写像$\mathfrak{T}$の下での不変性）

$$\forall <\phi,\lambda>\in<\Psi,\Lambda>,\ \forall j\in J,$$
$$CSM(\mathfrak{T}<\phi,\lambda>,<\omega_j,[j]>) = CSM(<\phi,\lambda>,<\omega_j,[j]>)\,.$$

（証明）(ｉ)の成立は，次のようにしてわかる．

SS展開式(3.18)を適用すれば，

$$\forall <\varphi,\gamma>, 0\cdot<\varphi,\gamma> = \sum_{k\in J}(0\cdot<\varphi,\gamma>,<\omega_k,[k]>)\cdot<\omega_k,[k]>$$
$$= \sum_{k\in J} 0\cdot(<\varphi,\gamma>,<\omega_k,[k]>)\cdot<\omega_k,[k]> \quad \because \text{ 式(3.13)}$$
$$= \sum_{k\in J} 0\cdot<\omega_k,[k]>$$
$$=<0,\phi> \quad \because \text{ 式(4.22)}$$

つまり，

$$\forall <\varphi,\gamma>, 0\cdot<\varphi,\gamma> = <0,\phi> \tag{4.33$_1$}$$

を得，特に，

$$\forall j\in J, 0\cdot<\omega_j,[j]> = <0,\phi> \tag{4.33$_2$}$$

が成り立つ．よって，

$$<\omega_j,[j]>(\{i\})$$
$$=(<\omega_j,[j]>,<\omega_i,[i]>)\cdot<\omega_i,[i]> \quad \because \text{ 式(3.36)}$$

$$=\begin{cases} <\omega_j,[j]>\cdots i=j\text{のとき} \\ <0,\phi>\cdots i\neq j\text{のとき} \end{cases}$$

$\because$　式(3.15)　(4.33)$_3$

を得，よって，

$$\forall j,i\in J, \mathfrak{T}<\omega_j,[j]>(\{i\}) = \begin{cases} <\omega_j,[j]>\cdots i=j\text{のとき} \\ <0,\phi>\cdots i\neq j\text{のとき} \end{cases}$$

$\because$　定理4.1の系2　(4.33)$_4$

が成り立つ．それで，

$$\forall j,i\in J, \| \mathfrak{T}<\omega_j,[j]>(\{i\}) \|^2 = \begin{cases} 1\cdots i=j\text{のとき} \\ 0\cdots i\neq j\text{のとき} \end{cases}$$

$\because$　3式(3.15),(3.60),(4.28)$_3$　(4.34)

である．

$<\varphi,\gamma>=_\Delta<\omega_j,[j]>$のとき

$$I(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>) = -\frac{1}{2}\cdot\log_e[1-\| \mathfrak{T}<\varphi,\gamma>(\{j\}) \|^2] \quad \because \text{式(4.11)}$$

$$\begin{cases} \infty\cdots i=j\text{のとき} \\ 0\cdots i\neq j\text{のとき} \end{cases}$$

(4.35)

が従い，この式(4.34)を使えば，(ｉ)の直交条件が成立することが容易に示される．

(ⅱ)の成立は，*CSM* の定義2式(4.30)，(4.31)から明らか．

(ⅲ)定理4.1の(ⅲ)の後半から明らかである．□

尚，本論文では，上記の定理4.2での *CSM* を採用するが，次の定理4.3は，定理4.2での *CSM* と全く同様に，3性質(ｉ)，(ⅱ)，(ⅲ)を備えた式(4.32)の写像 *CSM* を与えている．

［定理4.3］（*CSM* の構成定理2）

次の2式(イ)，(ロ)で定義される式(4.32)の写像 *CSM* もまた，定理4.2の(ｉ(直交条件)，(ⅱ)(確率条件)，(ⅲ)(写像$\mathfrak{T}$の下での不変性)を満たす類似度関数である：

(イ)　$CSM(<\phi,\lambda>,<\omega_j,[j]>)\equiv$

$$\begin{cases} (\mathfrak{T}<\phi,\lambda>,<\omega_j,[j]>) \,/\sum_{i\in J} (\mathfrak{T}<\phi,\lambda>,<\omega_i,[i]>) >0 \\ \cdots\sum_{k\in J} (\mathfrak{T}<\phi,\lambda>,<\omega_k,[k]>) >0\text{のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j) \qquad \cdots\sum_{k\in J} (\mathfrak{T}<\phi,\lambda>,<\omega_k,[k]>) =0\text{のとき} \end{cases}$$

(4.36)

(ロ)　非負量

$$q_j(<\phi,\lambda>) = \| \mathfrak{T}<\phi,\lambda> \|^2\cdot\| \mathfrak{T}<\omega_j,[j]> \|^2 - |(\mathfrak{T}<\phi,\lambda>,\mathfrak{T}<\omega_j,[j]>)|^2$$

を導入して，

$$CSM(<\phi,\lambda>,<\omega_j,[j]>) \equiv \frac{\dfrac{1}{q_j(<\phi,\lambda>)}}{\displaystyle\sum_{i\in J}\dfrac{1}{q_i(<\phi,\lambda>)}} \tag{4.37}$$

（証明）性質(ⅱ)，(ⅲ)を満たすことは，定理4.2の証明に倣って示される．

性質(ⅰ)の成立について，論じよう．

(イ)については，

$<\phi,\lambda>=_\Delta<\omega_i,[i]>)$ のとき，

$(\mathfrak{T}<\phi,\lambda>,<\omega_j,[j]>)$

$=\sqrt{p(<\phi,\lambda>,i)}$　　$\because$　3式(4.4)，(3.13)，(3.15)

$=$

$\begin{cases} 1\cdots i=j \text{ のとき} \\ 0\cdots i\neq j \text{ のとき} \end{cases}$

$\because$　3式(4.2)，(3.34)，(3.15)　(4.38)$_1$

から，性質(ⅰ)の成立が示される．

(ロ)については，Schwarzの不等式［B3］の特別な場合として，

$\| \mathfrak{T}<\phi,\lambda> \|^2\cdot\| \mathfrak{T}<\omega_j,[j]> \|^2-|(\mathfrak{T}<\phi,\lambda>,\mathfrak{T}<\omega_j,[j]>)|^2\geq 0$

が成立していることと，

$q_j(<\phi,\lambda>)=\| \mathfrak{T}<\phi,\lambda> \|^2\cdot\| <\omega_j,[j]> \|^2-|(\mathfrak{T}<\phi,\lambda>,<\omega_j,[j]>)|^2$

$\because$　定理4.1の系2の②　(4.38)$_2$

ことを考慮すれば，

$<\phi,\lambda>=_\Delta<\omega_i,[i]>)$ のとき，

$\mathfrak{T}<\phi,\lambda>=_\Delta<\phi,\lambda>$　$\because$　定理4.1の系2の②

が成立しているから，

$q_j(<\phi,\lambda>)=$

$\begin{cases} 0\cdots i=j \text{ のとき} \\ 1\cdots i\neq j \text{ のとき} \end{cases}$

$\because$　式(3.15)　(4.38)$_3$

がいえ，これから，性質(ⅰ)の成立が示される．　□

4.3　大分類関数 *CBSC* の構成

本節では，C-RECOGNITRON $=<<\Phi_B,\Gamma_B>$，$\mathfrak{T}$，CSM，$CBSC>$内の構成要素である大分類関数 $CBSC$ を構成する．

$u(<\phi,\lambda>,k)\in R$（実数値全体の集合）はカテゴリ帰属知識 $<\phi,\lambda>\in<\Psi,\Lambda>$ から抽出された第 $\ell\in L$ 番目の実数値特徴量である　(4.39)

と解釈されるような特徴抽出写像

$u:<\Psi,\Lambda>\times L\to R$（実数全体の集合）　(4.40)

を定義する．例えば，特徴抽出写像 u の軸番号集合 L をカテゴリ番号集合 J に

$L=J$　(4.41)

と選定し，2式(4.10)，(4.11)の情報量 $I(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)$ を用い，

$$u(<\phi,\lambda>,k)=I(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)\in R^+ \text{（非負実数全体の集合）} \tag{4.42}$$

と，選べばよい．

以下の定理4.4の（ｉ），（ⅱ）を満たす式(4.46)で定義された式(4.47)の写像 $CBSC$ はカテゴリ帰属知識の集合 $<\Psi,\Lambda>(\subseteq<\Phi,2^J>)$ 上の大分類関数(rough classifier，binary-state classifier)と称せられる．

分離条件

$$\forall j\in J,$$

$$①\sum_{k\in L}\sum_{\ell\in L}W(j,k,\ell)\cdot u(\mathfrak{T}<\omega_j,[j]>,k)\cdot u(\mathfrak{T}<\omega_j,[j]>,\ell)\geq h(j) \tag{4.43}$$

$$②\ \forall i\in J-\{j\},$$

$$\sum_{k\in L}\sum_{\ell\in L}W(j,k,\ell)\cdot u(\mathfrak{T}<\omega_i,[i]>,k)\cdot u(\mathfrak{T}<\omega_i,[i]>,\ell)<h(j) \tag{4.44}$$

を満たすように，

$$\text{重み}\ W(j,k,\ell)\ \text{の組}\ \{W(j,k,\ell)\mid j\in J,k\in L,\ell\in L\}$$
$$\text{閾値}\ h(j)\ \text{の組}\ \{h(j)\mid j\in J\} \tag{4.45}$$

が決定されるとしよう．最急降下学習法(learning method of steepest descent)［B2］を用いれば，この分離条件を満たすように，重み $W(j,k,\ell)$ の組 $W(j,k,\ell),j\in J,k\in L,\ell\in L$ と，閾値 $h(j)$ の組 $h(j),j\in J$ を容易に求めることができる．

$$CBSC(<\phi,\lambda>,j)\equiv$$
$$\begin{cases}1\cdots\sum_{k\in L}\sum_{\ell\in L}W(j,k,\ell)\cdot u(\mathfrak{T}<\phi,\lambda>,k)\cdot u(\mathfrak{T}<\phi,\lambda>,\ell)\geq h(j)\ \text{のとき}\\ 0\cdots\sum_{k\in L}\sum_{\ell\in L}W(j,k,\ell)\cdot u(\mathfrak{T}<\phi,\lambda>,k)\cdot u(\mathfrak{T}<\phi,\lambda>,\ell)<h(j)\ \text{のとき}\end{cases} \tag{4.46}$$

と定義される写像

$$CBSC:<\Psi,\Lambda>\times J\rightarrow\{0,1\} \tag{4.47}$$

を用意すれば，次の定理4.4が成り立つ：

［定理4.4］（大分類関数 $CBSC$ の構成定理）

式(4.46)のように定義される式(4.47)の関数 $CBSC$ は，次の（ｉ），（ⅱ）を満たす：

（ｉ）（カテゴリ抽出能力；category separability）

$$\forall j\in J,\ CBSC(<\omega_j,[j]>,j)=1.$$

（ⅱ）（写像 $\mathfrak{T}$ の下での不変性；invariance under mapping $\mathfrak{T}$）

$$\forall<\phi,\lambda>\in<\Psi,\Lambda>,\ \forall j\in J,$$
$$CBSC(\mathfrak{T}<\phi,\lambda>,j)=CBSC(<\phi,\lambda>,j).$$

（証明）（ｉ）の成立は，2式(4.43)，(4.46)から明らかであり，また，（ⅱ）の成立は，定理4.1，(ⅲ)の後半から明らかである．□

カテゴリ間の相互排除性(the mutual exclusion of the one category from the other categories)

$$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},CBSC(<\omega_i,[i]>,j)=0 \tag{4.48}$$

も，2式(4.44)，(4.46)から成り立っていることに注意しておく．

第5章　認識の階層

本章では，任意の階層にある認識システムRECOGNITRON $=<\Phi_B, T, SM, BSC>$ より1つだけ高階層にある認識システムC-RECOGNITRON $=<<\Phi_B,\Gamma_B>$，$\mathfrak{T}$，CSM，$CBSC>$ を構成できることを示し，認識の階層が存在することを明らかにする．

以上の3定理4.1，4.2，4.4で，カテゴリ帰属知識空間 $<\Phi,2^J>$ のある部分集合 $<\Psi,\Lambda>$ と，$<\Psi,\Lambda>$ で定義されたモデル構成作用素 $\mathfrak{T}$ との順序対 $<<\Psi,\Lambda>,\mathfrak{T}>$，類似度関数 CSM，大分類関数 $CBSC$ が構成されたが，この構成に伴い，不動点探索形の構造受精多段階帰納推理を採用するパターン認識の働きを備えた認識システムC-RECOGNITRONの構成に必要な残りのシステム3構成要素

（一）カテゴリ選択関数

$$CCSF:<\Psi,\Lambda>\times 2^J \to 2^J \tag{5.1}$$

（二）構造受精作用素

$$CA(\mu):<\Psi,\Lambda>\to<\Psi,\Lambda>, \text{ where } \mu\in 2^J \tag{5.2}$$

（三）構造受精変換

$$\mathfrak{T}\,CA(\mu)\,\mathfrak{T}:<<\Psi,\Lambda>,2^J>\to<<\Psi,\Lambda>,2^J>, \text{ where } \mu\in 2^J \tag{5.3}$$

は，$<\Omega,J>$, $\mathfrak{T}$，CSM，CBSCを使って構成され得ることが示されている［B3］（定理2.4，3式(2.58)，(2.59)，(2.60)，式(2.77)を参照）．

念のために，3式(5.1)，(5.2)，(5.3)の3構成要素 $CCSF$，$CA(\mu)$，$\mathfrak{T}\,CA(\mu)\,\mathfrak{T}$ の定義を以下に述べておこう：

①式(5.1)のカテゴリ選択関数 $CCSF$ は，定理2.4によれば，次のようになる．

（ｉ）$<\varphi,\gamma>=_\Delta<0,\phi>\vee\gamma'=\phi$ の場合

$$CCSF(<\varphi,\gamma>,\gamma'>=\phi. \tag{5.4}$$

（ⅱ）$<\varphi,\gamma>\neq_\Delta<0,\phi>\wedge\gamma'\neq\phi$ の場合

$$CCSF(<\varphi,\gamma>,\gamma'>=$$

$$\begin{cases}\{k\in\gamma' \mid CSM(<\varphi,\gamma>,<\omega_k,[k]>)>0\} & \text{if } \sum_{k\in\gamma'} CBSC(<\varphi,\gamma>,k)=0 \quad (5.5)\\ \{k\in\gamma' \mid CSM(<\varphi,\gamma>,<\omega_k,[k]>)>0\}\wedge CBSC(<\varphi,\gamma>,k)=1\} & \text{if } \sum_{k\in\gamma'} CBSC(<\varphi,\gamma>,k)>0 \quad (5.6)\end{cases}$$

②式(5.2)の構造受精作用素 $CA(\mu)$ は，3式(2.58)，(2.59)，(2.60)によれば，次のようになる．

（ｉ）$<\varphi,\gamma>=_\Delta<0,\phi>\vee\mu=\phi$ のとき

$$CA(\mu)<\varphi,\gamma>\equiv<0,\phi>. \tag{5.7}$$

（ⅱ）$<\varphi,\gamma>\neq_\Delta<0,\phi>\wedge\mu\neq\phi$ のとき

（ⅱ-1）$\sum_{j\in\mu} CBSC(<\varphi,\gamma>,j)=0$ のとき

$$CA(\mu)<\varphi,\gamma>\equiv\sum_{j\in\mu} CSM(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)\cdot\mathfrak{T}<\omega_j,[j]>. \tag{5.8}$$

（ⅱ-2）$\sum_{j\in\mu} CBSC(<\varphi,\gamma>,j)>0$ のとき

$$CA(\mu)<\varphi,\gamma>\equiv\sum_{j\in\mu}CSM(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)\cdot CBSC(<\varphi,\gamma>,j)\cdot\mathfrak{T}<\omega_j,[j]>. \tag{5.9}$$

③式(5.3)の構造受精変換$\mathfrak{T}\,CA(\mu)\,\mathfrak{T}$は，式(2.77)によれば，次のようになる．

$$<<\phi,\lambda>,\lambda'>=_{\Delta} after(CA(\mu),<<\varphi,\gamma>,\gamma'>)$$
$$=_{\Delta}\mathfrak{T}\,CA(\mu)\cdot<<\varphi,\gamma>,\gamma'>$$
$$=_{\Delta}<\mathfrak{T}\,CA(\mu\cap\gamma')\,\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>,\ CSF(<\varphi,\gamma>,\mu\cap\gamma)>$$

□

可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元$\phi\in\Phi(\subset\mathfrak{H})$をパターンとみなし，カテゴリ帰属知識$<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J>$を入力，記憶状態，出力として採用する認識システムRECOGNITRON$=<\Phi_B,T,SM,BSC>$に倣って，認識システム

$$\text{C-RECOGNITRON}=<<\Phi_B,\Gamma_B>,\mathfrak{T},CSM,CBSC>$$

が，2文献［B3］，［B4］での，構造受精多段階帰納推理が採用された認識の働きを実現する構成手法を適用して構成され得ることになる．これすなわち，“認識の階層”が存在することを明らかにしている．

認識システムC-RECOGNITRONでは，
カテゴリ帰属知識$<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J>$をパターンとみなし，$<\phi,\lambda>\in<\Psi,\Lambda>\subset<\Phi,2^J>$のカテゴリ帰属知識

$$<<\phi,\lambda>,\lambda'>\in<<\Psi,\Lambda>,\Lambda'>\subset<<\Phi,2^J>,2^J>$$

が入力，記憶状態，出力として　採用されている故に，認識システムC-RECOGNITRONは，RECOGNITRONより1つだけ高階層のシステムであると考えられるからである．

認識システムRECOGNITRONは，パターン$\varphi\in\Phi$を連想形処理するのに，カテゴリ帰属知識$<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J>$を短期記憶の作業状態として使う．式(2.94)の探索過程でいえば，

①探索に取りかかる短期記憶の作業開始状態

$$=_{\Delta}<T\varphi,J>\ \in<\Phi,2^J>$$

②探索が終了したときの短期記憶の作業終了状態

$=_{\Delta}$ 不動点方程式(2.97)を満たす$<\phi_t,\lambda_t>\in<\Phi,2^J>$

としている．RECOGNITRONより1つだけ高階層にある認識システムC-RECOGNITRONでは，カテゴリ帰属知識$<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J>$を連想形処理するのに，カテゴリ帰属知識のカテゴリ帰属知識$<<\phi,\lambda>,\lambda'>\in<<\Psi,\Lambda>,\Lambda'>\subset<<\Phi,2^J>,2^J>$を短期記憶の作業状態として使うことになる．

第6章　むすび

マルチメディア時代においては，ネットワークで結合された複数の計算機の伝送･計算の両速度の高速性と，大容量記憶の読み出し･書き込みの両速度の高速性とを使い，大量データ処理をおこなうことにより，多種多様な情報表現の生成（generation）･変換（transformation）･理解（understanding）を実行しなければならない．認識システムRECOGNITRONによる学習･認識の両働きの実現は，パターンφをある可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元として再表現するという“パターンモデル$T\varphi$の計量的表現（metric representation）”を生成しする時の計算機の，高速性に支えられるといってよい．

認識システムRECOGNITRONの認識は次のように説明される：

The method of recognizing a pattern φ in question is to find some recursive procedure which sequentially yields or approximates a categorical-membership knowledge $<\phi,\lambda>$ as a fixed-point solution of an equation

$$<\phi,\lambda> =_{\Delta} <T\varphi, J> \bigsqcup{}_{\Delta}^{*}\ TA(\mu)T\cdot <\phi,\lambda>$$

of an associative recognition which minimizes a potential $E(\phi,\lambda)$. □

認識システムRECOGNITRONに備わっている認識の働きは，表象なき知能（intelligence without representation）ではなくして，その出力が何故得られたのかを説明できる式(2.14)の表象の列（カテゴリ帰属知識の列）を認識過程として表示していると言う意味で，表象付き知能をもたらしている．

本論文では，カテゴリ帰属知識に関する，式(2.69)の構造受精変換$TA(\mu)T$の不動点方程式(2.97)を終了条件とし，その求解過程の近似が式(2.94)で与えられるする連想形認識方程式(2.8)の，定義2.4$_2$の半順序関係$\leq_{\Delta}^{*}$に関する最小不動点解（カテゴリ帰属知識）$<\phi_t,\lambda_t> \in <\Phi, 2^J>$を，

“不動点探索形構造受精多段階帰納推論に基づく式(2.94)のパターン認識過程（認識計算）”に関し，最大認識段階番号$t_{\max}$が有限値で存在するという“認識過程の有限停止性”を基盤にして，

エネルギー不等式(2.107)が成立する形で求める

ことによって，パターン$\varphi \in \Phi = R^{++}\cdot\Phi_B \cup R^{++}\cdot T\cdot\Phi_B$（式(2.28)を参照）を多段階にわたり想起的に認識するシステムRECOGNITRINが第2，3章で説明された．RECOGNITRON $=<\Phi_B, T, SM, BSC>$の構成･諸機能などを詳細に説明したのは，C-RECOGNITRON $=<<\Phi_B,\Gamma_B>$，$\mathfrak{T}$，CSM，$CBSC>$を直接構成し，論が錯綜とする事態を避けたかったからであり，RECOGNITRONの機能・動作からC-RECOGNITRONの機能・動作を推察できるようにしたかったからである．

Shannon相互情報量に相当する式(1.56)の包含情報量（パターンφがパターンϕに含まれる程度を，或いは，パターンϕがパターンφに含まれる程度を，情報量として計量化したもの）$I(\varphi,\phi)$の形式を勘案し，カテゴリ帰属知識空間のある部分集合$<\Psi,\Lambda>$ $(\subseteq <\Phi,2^J>)$でのモデル構成作用素$\mathfrak{T}$，類似度関数CSM，大分類関数$CBSC$を構成することによって，

認識システムRECOGNITRONの入力，記憶状態，出力であるカテゴリ帰属知識$<\phi,\lambda> \in <\Psi,\Lambda>$をパターン入力とし，カテゴリ帰属知識のカテゴリ帰属知識$<<\phi,\lambda>,\lambda'> \in <<\Psi,\Lambda>,\Lambda'>$を入力する1つだけ高階層の認識システムC-RECOGNITRON

は，RECOGNITRINの，入力，内部記憶状態，連想形認識出力としてのカテゴリ帰属知識$<\phi,\lambda> \in <\Psi,\Lambda>$を多段階にわたり想起的に認識するのであり，この意味で，C-RECOGNITRONがRECOGNITRINより1つ上の認識階層を形成しているのである．RECONITRONの入力，内部記憶状態，連想形認識出力を連想形認識するC-RECOGNITRONとRECONITRONとは，SS理論の連想形認識システムの同一構成原理に従っていることが肝要である．

C-RECOGNITRON $=<<\Phi_B,\Gamma_B>$, $\mathfrak{T}$, CSM, $CBSC>$ は

$$\text{RECOGNITRON} =< \Phi_B, T, SM, BSC >$$

と同じ原理で構成されることは，3定理4.1，4.2，4.4がRECOGNITRONの構成原理を与える3公理axiom 1，2，3に対応していることから理解でき，SS理論が理論構成上優秀な階層構造を備えていることを示している．

尚，C-RECOGNITRONの頭文字Cはcategoricalを意味しているが，定理4.3で2式(4.30)，(4.31)の類似度関数 CSM とは異なる CSM を構成したように，式(4.4)のモデル構成作用素 $\mathfrak{T}$，式(4.46)の大分類関数 $CBSC$ とは異なるものを多種多様に構成することにより，多種多様な C-RECOGNITRON を構成し，1つだけ高階層にある認識の働きと，低階層にある認識の働きとの関係を詳細に検討することが残された研究である．

文　献 A

［A 1］ 吉田耕作，河田敬義，岩村つらね：位相解析の基礎，岩波書店，May 1963

［A 2］ 青木利夫，高橋渉：集合・位相空間要論，培風館，Sept.1979

［A 3］ Angus E.Taylor, David C.Lay：Introduction to function analysis， John Wiley & Sons， Inc.， 1980

［A 4］ Gilbert G.Walter：Wavelets and other orthogonal systems with applications, CRC Press, Inc., 1994

［A 5］ Andrzej Cichocki, Rolf Unbehauen：Neural networks for optimization and signal processing, John Wiley & Sons, Mar.1994

［A 6］ Abhijit S.Pandya and Robert B.Macy：Pattern recognition with neural networks in C++, A CRC Book Published in Cooperation with IEEE, 1996

［A 7］ Luc Devroye, L・szlo Gy・rfi and G・bor Lugosi：A probabilistic theory of pattern recognition, Springer-Verlag New York.Inc., 1996

［A 8］ 苫米地英人，：深層脳内情報処理から学ぶもの －機能脳科学の観点から－，人工知能学会誌，vol. 16, no, 2, pp.267-277, Mar.2001

［A 9］ Cheng-Lin Liu, Masaki Nakagawa：Evaluation of prototype learning algorithms for nearest-neighbor classifier in application to hand-written character recognition, Pattern Recognition，vol.34, pp.601-615, 2001

［A10］ 鳥脇純一郎：認識工学(－パターン認識とその応用－)，コロナ社(テレビジョン学会教科書シリーズ　9)，コロナ社，Mar.1993

［A11］ 福村晃夫：情報学(絵とき読本)，オーム社，Mar.1996

［A12］ 公文俊平：情報学がわかる．AREA Mook Asahi　Shimbun Extra Report&Analysis Number 42)，ASAHI SHIMBUN, 1998

［A13］ 美濃導彦，西田正吾：情報メディア工学(新世代工学シリーズ)，オーム社，June 1999

［A14］ 安西祐一郎：認識と学習(岩波講座ソフトウェア科学 16)，岩波書店，Dec.2000

［A15］ 安居院猛，長尾智晴：画像の処理と認識，昭晃堂，April.2000

［A16］ 今井聖：音声認識(情報・電子入門シリーズ⑯)，共立出版，Nov.1995

［A17］ 瀧保夫；通信方式(電気通信講座19)，コロナ社，電気通信学会編，June 1964

［A18］ 安西祐一郎：認知科学と人工知能(計算機科学/ソフトウェア技術講座17)，共立出版，p.17, Nov.1987

［A19］ 須藤昇：学習･再認に関する記憶表象生成モデルの実験的検証，The Japanese Journal of Psychology, vol.65, no.3, pp.206-214, 1994
［A20］ 石井健一郎，上田修功，前田英作，村瀬洋：わかりやすいパターン認識，オーム社(2000)
［A21］ 吉田耕作：近代解析，共立出版，Dec.1963

文　献 B

［B 1］ 鈴木昇一：認識工学，柏書房，Feb.1975
［B 2］ 鈴木昇一：ニューラルネットの新数理，近代文芸社，Sept.1996
［B 3］ 鈴木昇一：パターン認識問題の数理的一般解決 ，近代文芸社，June 1997
［B 4］ 鈴木昇一：認識知能情報論の新展開，近代文芸社，Aug.1998
［B 5］ 鈴木昇一：パターンのエントロピーモデル，電子情報通信学会論文誌(D-Ⅱ)，vol.J77-D-Ⅱ, no.10，pp.2220-2238，Nov.1994
［B 6］ 鈴木昇一：手書き漢字の側抑制効果的分解とその計算機シミュレーション，情報処理学会誌，vol.15，no.12，pp.927-934，Dec.1974
［B 7］ 鈴木昇一：画像情報量とその手書き漢字への応用，画像電子学会誌，vol.4，no.1，pp.4-12, Apr.1975
［B 8］ 鈴木昇一：抽出された特徴による手書き漢字構造の再生，情報処理学会誌，vol.18，no.11, pp.1115- 1122, Nov.1977
［B 9］ 鈴木昇一：回転群と画像の分解･強調･構造化再 構成に関する計算機シミュレーション，情報研究(文教大学･情報学部)，no.4, pp.36-56, Dec.1983
［B10］ 鈴木昇一：連想形記憶器MEMOTRONと日本語単独母音系列の再生に関する計算機シミュレーション，情報研究(文教大学･情報学部)，no.7, pp.14-29, Dec.1986
［B11］ 鈴木昇一：多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション，情報研究(文教大学･情報学部)，no.10，pp.35-49，Dec.1989
［B12］ 鈴木昇一：帰属係数法に基づく類似度，帰属関係あいまい度，認識情報量の計算機シミュレーション，情報研究(文教大学･情報学部)，no.11，pp.51- 68, Dec.1990
［B13］ 鈴木昇一：構造受精法と日本語単独母音の認識，情報研究(文教大学･情報学部)no.18, pp.17-51, Dec.1998
［B14］ 鈴木昇一，前田英明：有声破裂音の代表パターンの学習的決定と，その計算機シミュレーション，情報研究(文教大学･情報学部)，no.20, pp.77－95, Dec.1998
［B15］ 鈴木昇一，前田英明：変動エントロピーによる有声破裂音の順序付けと，その計算機シミュレーション，情報研究(文教大学･情報学部)，no.21, pp.51－78, Mar.1999
［B16］ 鈴木昇一：平均顔を用いた顔画像の2値化，並びに，目･鼻･口の抽出と，その計算機シミュレーション，情報研究(文教大学･情報学部)，no.22, pp.65－150, Dec.1999
［B17］ 鈴木昇一：界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の，顔画像処理に関する計算機シミュレーション，情報研究(文教大学･情報学部)，no.23, pp.109－182, Mar.2000
［B18］ 鈴木昇一：風景画から知識を抽出し，解釈するシステムの，ファジィ推論ニューラルネットによる構成，情報研究(文教大学･情報学部)，no.23, pp.183 -265, Mar.2000
［B19］ 鈴木昇一：各個人の感性を反映した認識システムRECOGNITRON，情報研究(文教大学･情

報学部），no.24, pp.185－257, Dec.2000
［B20］ 鈴木昇一：プロダクション・システムとしてのファジィ・マルチメディア・コンピュータと，空間多重パターンファジィ推論系，情報研究（文教大学・情報学部），no.24, pp.105－183, Dec.2000
［B21］ 鈴木昇一：SS大分類関数BSCの適応的構成への，計算論的学習理論の適用，情報研究（文教大学・情報学部），no.25, pp.185－236, Mar.2001
［B22］ 鈴木昇一：量子力学の諸原理，多段階量子認識系と，心理状態を取り入れた想起に基づく部分空間認識法，情報研究（文教大学・情報学部），no.25, pp.237－282, Mar.2001
［B23］ 鈴木昇一：測度的不変量検出形認識系の構成理論，電子通信学会論文誌（D），vol.55-D, no.8, pp.513-538, Aug.1972
［B24］ 鈴木昇一，斉藤静昭，奥野治雄，太田芳雄：画像の復元とその計算機シュミレーション，工学院大学研究報告，no.39, pp.198-206, Jan.1976
［B25］ 鈴木昇一，佐久間拓也，前田英明：数理形態学における諸演算とモデル構成作用素，情報研究（文教大学・情報学部），no.17, pp.133-170, Dec.1996
［B26］ 鈴木昇一：Radial-Basis Function Networks, Wavelet-Based Networksを用いたモデル構成作用素の構成法，情報研究（文教大学・情報学部），no.17, pp.71-132, Dec.1996
［B27］ 鈴木昇一：類似度関数を用いた確率的緩和法，情報研究（文教大学・情報学部），no.20, pp.23－75, Dec.1998
［B29］ 鈴木昇一：直交系によるパターモデルの構成，情報研究（文教大学・情報学部），no.21, pp.23-49, Mar.1999
［B30］ 鈴木昇一：認識行為に向けての，効用最大化原理，情報研究（文教大学・情報学部），no.22, pp.151-210, Dec.1999
［B31］ 鈴木昇一：高次認知機能における論理表現の要素，情報研究（文教大学・情報学部），no.19, pp.29-82, Mar.1998
［B32］ 鈴木昇一：Support Vector Machineを利用した大分類関数の構成，情報研究（文教大学・情報学部），no.26, pp.1－62, Dec.2001
［B33］ 鈴木昇一：2カテゴリ分類困難度の情報理論，情報研究（文教大学・情報学部），no.26, pp.63－160, Dec.2001
［B34］ 鈴木昇一：一般化類似度関数を用いた“導出原理による第1階述語推論，情報研究（文教大学・情報学部），no.27, pp.27－71, Mar.2002
［B35］ 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：風景画の理解に関するJAVA言語によるRECOGNITRONの計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.27, pp.73－109, Mar.2002
［B36］ 鈴木昇一：遺伝的アルゴリズムにおける適合度比例選択戦略を利用した進化方程式の，パターン多段階変換に基づく認識への応用，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.37－67, Dec.2002
［B37］ 鈴木昇一：近傍を利用した音素認識のためのモデル構成作用素T，類似度関数SM，大分類関数BSCの諸構成と，SS不動点探索型多段階想起認識，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.69－141, Dec.2002
［B38］ 鈴木昇一：JAVA言語で実装化された画像理解システムIUSの動作概要と，その稼動方法，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.143－165, Dec.2002

[B39] 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：JAVA言語による計算機シミュレーションで生じた風景画像の理解場面での多段階連想形認識過程の異常現象，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.123－166, July 2003

[B40] 鈴木昇一：パターン情報処理（モデル構成作用素，誤差逆伝播学習2層ニューラルネット）と，論理的含意とによる非単調的知識推論，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.75－121, July 2003

[B41] 鈴木昇一：可分な一般抽象ヒルベルト空間でのK-L直交系の理論，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.41－73, July 2003

[B42] 鈴木昇一：パターン系列（動画像，会話音声）の，dynamical systemによる連想理論と，連想器SPATEMTRON，情報研究（文教大学・情報学部），no.30, pp.139－186, Jan.2004

[B43] 鈴木昇一：入出力例の系列を用いた“対連想問題・その擬逆問題”の一般解，情報研究（文教大学・情報学部），no.30, pp.81－137, Jan.2004

[B44] 鈴木昇一：共役勾配法の一般解における直交系の応用（画像復元，パターンモデルの構成，パターン集合の情報理論的次元），情報研究（文教大学・情報学部），no.30, pp.27－79, Jan.2004

[B45] 鈴木昇一：2つのパターンモデル構成作用素の，λ言語論理による構成法，情報研究（文教大学・情報学部），no.31, pp.43－66, July 2004

[B46] 鈴木昇一：会話音声・動画像処理への，万能性類似度関数の採用によるSS多段階認識の改良，情報研究（文教大学・情報学部），no.31, pp.67－110, July 2004

[B47] 鈴木昇一：数理形態学の新しい2つのパターン変換作用素を用いた多段階想起認識，情報研究（文教大学・情報学部），no.31, pp.111－141, July 2004

[B48] 鈴木昇一：1パラメータLie座標変換群とそのパターン正規化への応用，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.21－74, Jan.2005

[B49] 鈴木昇一：曖昧さに関する半順序$\propto$を単調に保つモデル構成作用素T，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.75－126, Jan.2005

[B50] 鈴木昇一：パターンφから抽出された特徴量$u(\varphi,\ell)$のfuzzy単調変換，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.127－168, Jan.2005

[B51] 鈴木昇一：パターンモデル（パターンの標準形）の一般形，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.169－218, Jan.2005

[B52] 鈴木昇一：類似度関数の密度を用いた，画素毎のパターン認識処理（パターン理解処理）の方法，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.219－285, Jan.2005

[B53] 鈴木昇一：パターン（画像，音声）から感性情報を計量できる一般的な方法（視野を考慮して構成された類似度関数SMの応用），情報研究（文教大学・情報学部），no.33, pp.261－316, 2005

[B54] 鈴木昇一：知識工学におけるcertainty factorによる多段階認識過程の評価，情報研究（文教大学・情報学部），no.33, pp.199-260, Jul.2005

[B55] 鈴木昇一：線形方程式の制約条件下での，残差法によるパターンモデル，情報研究（文教大学・情報学部），no.33, pp.149-197, Jul.2005

[B56] 鈴木昇一：正規直交性を満たす類似度関数SMに積分核が存在するか？，情報研究（文教大学・情報学部），no.33, pp.111-147, Jul.2005

[B57] 鈴木昇一：原パターンを近似できるという拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの，

会話音声・動画像処理への応用，情報研究(文教大学・情報学部)，no.33, pp.43-110, Jul. 2005

付録A. パターン認識論と人工知能論との合体としての認識知能情報論［B3]，［B4]

パターン認識論と人工知能論とを合体させる必要性が叫ばれて久しい［A18].

当初は人工知能学の1部門と考えられていたパターン認識学が記号列による情報表現体系での推論を論じる古典的人工知能学から袂を分ち，独自の道を歩んだが，S.Suzukiによって認識知能情報論(SS理論［B3]，［B4])が提出されたことにより，構成論的な新しい方法で再び，パターン認識学が，マルチメディア人工知能学において前面に躍り出ることになった様相が本付録Aでは，説明される.

A1. パターン情報処理の働きの，根本的変革

ニューラルネットの理論はパターン認識論でのパーセプトロン(パターン分類器の1種)の研究の延長上から誕生したが，認知科学，人工知能学，非線形多変量解析学，数理計画法(最適化の理論)，言語学，数理制御学などに適用・応用されていることは，よく知られているとおりである.

ニューラルネットの理論，ファジィ理論，遺伝的アルゴリズムの理論，人工生命の理論などがパターン認識学における問題解決に基本的に使われるようになっている事実は，基本的には独自の道を歩んできたパターン認識論が記号による推論の限界を感じ始めた人工知能学と融合していることを示している．にも拘らず，パターン認識学と人工知能学とが合体していると思われないのは，方法論の多様性が深まっただけで，パターン情報処理の働きを根本的に変革していないからである.

S.Suzukiにより，ある半順序に関する最小上界(上限)を求める半順序情報処理原理に従い，パターン認識の働きを多段階にわたる推論過程(最小不動点を計算する過程)として捉えられたことがパターン情報処理の働きを根本的に変革したのである．多段階にわたる推論過程はニューラルネットの理論を適用して容易に得られるけれども，半順序情報処理原理が陽に導入されたことが，ニューラルネットの理論によるパターン認識の働きの捉えかたを超えて，パターン情報処理の働きを根本的に変革したのである.

①“パターンの帰納的定義”

②“認識システムRECOGNITRONが認識対象に対し持つカテゴリ帰属知識”を未知変数とする連想形認識方程式の導出

をS.Suzukiは，成し遂げ，

③任意の“認識の働きをシミュレート可能な原理”

を明らかにし，

④この認識の働きが如何なる場合に認識可能，認識不能，認識不定となるかを解析した

ことなどは，他の研究者がこれまで全く挑戦さえしていなかったのである.

この連想形認識方程式の最小不動点解は，

⑤認識対象としてのパターンの，最終的な表象（パターンモデル）と，帰属する可能性のあるカテゴリ番号のリストとの順序対（認識システムが得たカテゴリ帰属知識）

を表しているのであり，パターン想起結果とパターン分類結果とを表している．このように，連想形不動点認識の知能の帰納法則を，4axiom 1〜4からなる公理系(SS公理系)に基づいて，カテゴリ帰属知識のポテンシャル減少性と関連付けて，解明し，

⑥連想形認識方程式の，ある半順序関係に関する最小不動点を探索する求解過程がパターン認識

過程になる

ことを示した［B3］，［B4］．この状況は，

「第一階述語論理における導出原理」による探索が，記号列による定理の証明過程こそは論理的な問題の解を推論する過程であることを示しながら，問題解決過程を組み合わせ計算論的に根本的に変革した」

のと同様に，パターン認識の働きを根本的に変革している．

A2. 人工知能論での，問題解決法

知覚(perception)，記憶(memory)，表象(representation)，推論(inference)，学習(learning)の働き(知の働き)を解明するのが，知の働きを機械によって実現することを目的とする人工知能学(intelligence informatics)の基礎としての認知科学(cognitive science)である．

記号列による推論に基ずく“人工知能論における問題解決(problem-solving)”とは，解決しなければならない問題 P が与えられた場合，先ず，

(1) 状態空間(a set of states) S

(2) オペレータ集合(a set of operators) A

(3) 状態遷移関数(state-transition function)

$f: S \times A \to S$($S \times A$ から S の中への部分関数(parti al function))

(4) 初期状態(initial state) s_i

(5) 目標状態(goal state) s_g

(A.1)

を適切に選定する．つまり，この問題 P の諸性質を過剰でもなく，不足でもなく，反映するように，5つ組 $< S, A, f, s_i, s_g >$ が

$$P = < S, A, f, s_i, s_g > \tag{A.2}$$

というように，P と見なせるようにする．特に，各状態 $s \in S$ は問題 P に適切な情報構造を持つように，P に応じた表現を備えていることが必要とされる．このとき，問題 P を解く知能機械が用意されたことになる。

さて，

$$s' = f(s, a) \tag{A.3}$$

は，状態 $s \in S$ においてオペレータ $a \in A$ が作用すると，状態 $s' \in S$ が得られることを表しているが，初期状態 s_i から出発し，目標状態

$$s_g = f(f(\cdots f(f(s_i, a_1), a_2), \cdots, a_{n-1}), a_n) \tag{A.4}$$

に遷移させることのできるような，A の元の順序の付いた列

$$a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n \tag{A.5}$$

を求めることが，問題 P を解決すると考える．通常，初期状態 s_i から出発し，目標状態 s_g に遷移させることの出来るこの式(A.5)のオペレータ系列が解かねばならない問題 P の解である．

S の元の順序の付いた列

$$s_1(= s_i), s_2, \cdots, s_{n-1}, s_n, s_{n+1}(= s_g) \tag{A.6}$$

の中に，求めたい情報としての解が含まれているような問題 P が与えられる場合がある．また，複数の目標状態 s_g が設定され，その内のどれか1つに遷移させるようなこの式(A.5)のオペレータ列を

決定すればよいような問題Pが与えられる場合もある．

更に，複数の目標状態s_gを設定しなくて，得られた状態がある評価基準を満たせば，例えば，不動点方程式

$$s = f(s, a_{n+1}) \tag{A.7}$$

ここに，

$$s = f(f(\cdots f(f(s_i, a_1), a_2), \cdots, a_{n-1}), a_n) \tag{A.8}$$

を満たせば，この不動点状態$s \in S$が目標状態と解釈され，このsの中に求めたい情報(解)が含まれているような問題Pが与えられる場合がある．

A3. S.Suzukiによるパターン認識の数学的理論（SS理論）

SS理論と名付けられたパターン認識の数学的理論に登場する認識システムRECOGNITRONは，処理の対象とする問題の入力パターンφに対応し，“axiom 1を満たすパターンモデル”$T\varphi$を求め，モデル$T\varphi$を恰も，原パターンφかのように扱う．このとき，写像Tはパターンモデル構成作用素と呼ばれる．順序対$[\Phi, T]$はaxiom 1を満たさなければならない．axiom 2，3を各々満たす類似度関数SM，大分類関数BSCを構成すれば，RECOGNITRONは$T\varphi$に関する連想形認識方程式を解くことによって，φから連想されるパターンと，φの帰属するカテゴリを求めることができる．

本論文では，

（1）カテゴリ帰属知識に関する，式(2.77)の構造受精変換$TA(\mu)T$の不動点方程式(2.97)を終了条件とし，その求解過程の近似が式(2.94)で与えられるする連想形認識方程式(2.8)の，定義2.4 $_2$の半順序関係$\leq_\Delta^*$に関する最小不動点解(カテゴリ帰属知識)$< \phi_t, \lambda_t > \in < \Phi, 2^J >$を，エネルギー不等式(2.107)が成立する形で求めることによって，パターン$\varphi \in \Phi$を多段階にわたり想起的に認識するシステムRECOGNITRIN

と，

（2）RECOGNITRINの入力，中間的な作業状態，連想形認識出力としてのカテゴリ帰属知識$< \phi, \lambda > \in < \Phi, 2^J >$を多段階認識するC-RECOGNITRON

とを構成し，C-RECOGNITRONがRECOGNITRINより1つ上の認識階層を形成することが明らかにされている．

A4. SS理論はパターン認識の働きを人工知能論に合体している

S.Suzukiの認識知能情報論は，4システム

パターン認識システムRECOGNITRON［B3］，［B4］

パターン系列連想システムMEMOTRON［［B2］，［B10］

パターンプロダクションシステムFUZZITRON［B20］

入力パターンを予測し，現在の時刻のパターンを認識する力学系SPATEMTRON［B42］

を構成したが，

処理の対象とする問題のパターン(入力パターン)$\varphi \in \Phi$のモデル$T\varphi \in \Phi$に関する連想形認識方程式の求解過程が問題のパターン$\varphi \in \Phi$の認識過程であり，この求解過程が“カテゴリ帰属知識の構造受精変換に基づく帰納推理の働き”で望ましく得られているどうかの判定に，カテゴリ帰属知識の，2式(2.79)，(2.80)のSSポテンシャルエネルギーEが有効に使われてよい根拠も，研究されているし，SS-potntial energy updating schemeとして，RECOGNITRONの多段階認識過程が考えられること

を明らかにしている．

次の対応が指摘できる：

式(A.1)については，対応

$$S \leftrightarrow < \Phi, 2^J >$$
$$A = \{a_k \mid k \in K\} \leftrightarrow \{A(\mu) \mid \mu \in 2^J\}$$
$$f : S \times A \to S$$
$$\leftrightarrow \{TA(\mu)T :< \Phi, 2^J > \to < \Phi, 2^J > \mid \mu \in 2^J\}$$
$$\because \quad 2式(2.69),(2.77)$$
$$s_i \leftrightarrow < T\varphi, J >$$
$$s_g \leftrightarrow < T\Omega, J > = \{< T\omega_j, [j] > \mid j \in J\} \text{ 内の1つの元 } < T\omega_j, [j] > \tag{A.9}$$

が成立し，式(A.2)については，対応

$$P = < S, A, f, s_i, s_g >$$
$$\leftrightarrow 「処理の対象とする問題のパターン\ \varphi \in \Phi\ を認識せよ」$$
$$= << \Phi, 2^J >, \{A(\mu) \mid \mu \in 2^J\}, \{TA(\mu)T \mid \mu \in 2^J\}, < T\varphi, J >, < T\omega_j, [j] >> \tag{A.10}$$

が成立し，式(A.3)については，対応

$$s' = f(s, a)$$
$$\leftrightarrow < \phi, \lambda > =_{\Delta} after(A(\mu), < \varphi, \gamma >)$$
$$=_{\Delta} TA(\mu)T \cdot < \varphi, \gamma >$$
$$=_{\Delta} < TA(\mu \cap \gamma)T\varphi,\ CSF(\varphi, \mu \cap \gamma) >$$
$$\because \quad 式(2.77) \tag{A.11}$$

が成立し，2式(A.4)，(A.5)については，対応

$$\text{find} \quad a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n \in A$$
$$\text{such that} \quad s_g = f(f(\cdots f(f(s_i, a_1), a_2), \cdots, a_{n-1}), a_n)$$
$$\leftrightarrow \text{find} \quad \mu_0, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s, \cdots, \mu_t \in 2^J$$
$$\text{such that} \quad TA(\mu_s)T \cdot < \phi_s, \lambda_s > =_{\Delta} < \phi_{s+1}, \lambda_{s+1} >$$
$$, s = 0, 1, 2, \cdots, t\ ,\ , \quad \text{where} \quad \phi_0 = T\varphi \wedge \lambda_0 = J$$
$$\because \quad 式(2.94) \tag{A.12}$$

が成立し，式(A.5)については，対応

$$a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$$
$$\leftrightarrow A(\mu_0), A(\mu_1), A(\mu_2), \cdots, A(\mu_s), \cdots, A(\mu_t) \tag{A.13}$$

が成立している．

パターンを認識する場面においては，通常，式(A.10)において，目標状態 $< T\omega_j, [j] > \in < T\Omega, J >$ が指定されていないことに注意する．

RECOGNITRONでは，複数の目標状態とは

$$\langle < T\omega_j, [j] >, j \in J \tag{A.14}$$

のことである．初期状態・$<\phi_0,\lambda_0>=_\Delta<T\varphi,J>$について，最も確からしい単一の目標状態$<T\omega_j,[j]>$を，終了のための評価条件として採用された不動点方程式

$$\exists t(\geq 0), TA(\mu_t)T\cdot<\phi_t,\lambda_t>=_\Delta<\phi_t,\lambda_t>$$
$$\because \quad 式(2.97) \tag{A.15}$$

から，求めることが要求されている．

得られた単一の目標状態$<T\omega_j,[j]>$が，

「処理の対象とする問題の入力パターン$\varphi\in\Phi$を認識せよ」という問題P

の解である．

システムRECOGNITRONが入力パターン$\varphi\in\Phi$の帰属候補カテゴリを絞り，RECOGNOTRONが$\varphi\in\Phi$に対し持つ短期記憶知識としてのカテゴリ帰属知識$<\phi_s,\lambda_s>$を生成･変換しながら，構造受精変換$TA(\mu_s)T:<\Phi,2^J>\to<\Phi,2^J>$の不動点としてのカテゴリ帰属知識$<T\omega_j,[j]>\in<\Phi,2^J>$を探索する形式で，入力パターン$\varphi\in\Phi$をパターン連想的に，認識している有様が理解できよう．RECOGNITRONは入力パターン$\varphi\in\Phi$の情報表現$<T\varphi,J>\in<\Phi,2^J>$を先ず，生成し（generation），このカテゴリ帰属知識$<T\varphi,J>\in<\Phi,2^J>$を候補カテゴリ番号リスト$\mu_s\in 2^J$を助変数に持つ構造受精変換$TA(\mu_s)T:<\Phi,2^J>\to<\Phi,2^J>$の列で次第に$<T\omega_j,[j]>\in<\Phi,2^J>$へと，精密的に変換（“coarse to fine” transformation）しながら認識している．

付録B.　カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$を構造受精変換$TA(\mu)T$で等構造関係$=$を保存して操作できることについて

本付録Bでは，2つのカテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>,<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J>$間に，2.7節の定義2.2の等構造関係$<\varphi,\gamma>=<\phi,\lambda>$が成り立っているとき，式（2.77）で定義される構造受精変換$TA(\mu)T:<\Phi,2^J>\to<\Phi,2^J>$を作用させても等構造関係が保存されるか，つまり，

$$<\varphi,\gamma>=<\phi,\lambda> \ \Rightarrow\ TA(\mu)T\cdot<\varphi,\gamma>=TA(\mu)T\cdot<\phi,\lambda> \tag{B.1}$$

が成立するかどうかを研究する．勿論，無条件では成立しない．文献［B3］の付録L（カテゴリ帰属知識の操作定理）にこの詳細な研究があるが，ここでは，式（B.1）が成立するための，簡単な諸条件が明らかにされる．

先ず，2つのカテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>,<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J>$間に，2.7節の定義2.2の等構造関係$<\varphi,\gamma>=<\phi,\lambda>$が成り立つための十分な条件が，3式（2.58），（2.59），（2.60）で定義された式（2.56）の構造受精作用素$A(\mu):\Phi\to\Phi$を用いると，その各々の出力$A(\gamma)\varphi, A(\lambda)\phi$が等しいこと，つまり，

$$A(\gamma)\varphi=A(\lambda)\phi \tag{B.2}$$

の成立であることが，次の定理B.1で明らかにされる．

［定理B.1］（構造受精作用素によるカテゴリ帰属知識間の等構造性の判定定理）

$$T\omega_j, j\in J \text{ は1次独立な系である} \tag{B.3}$$

としよう．$CSF(\varphi,\gamma)\neq\phi\wedge CSF(\phi,\lambda)\neq\phi$としよう．

$$A(\gamma)\varphi=A(\lambda)\phi\Rightarrow<\varphi,\gamma>=<\phi,\lambda>.$$

（証明）対偶を示す.

3式（2.64），（2.65），（2.66）によれば，

$$<\varphi,\gamma>\neq<\phi,\lambda> \tag{B.4}$$

$\Leftrightarrow$【$CSF(\varphi,\gamma)\neq CSF(\phi,\lambda)\vee$ (B.5)

$[\exists j\in CSF(\varphi,\gamma)\cap CSF(\phi,\lambda), SM(\varphi,\omega_j)\neq SM(\phi,\omega_j)]$ (B.6)

】

である．定理2.9を適用すれば，

$$A(\gamma)\varphi-A(\lambda)\phi=\sum_{k\in CSF(\varphi,\gamma)}SM(\varphi,\omega_k)\cdot T\omega_k-\sum_{\ell\in CSF(\phi,\lambda)}SM(\phi,\omega_\ell)\cdot T\omega_\ell$$

$$=\sum_{k\in CSF(\varphi,\gamma)\cap CSF(\phi,\lambda)}[SM(\varphi,\omega_k)-SM(\phi,\omega_k)]\cdot T\omega_k$$

$$+\sum_{k\in CSF(\varphi,\gamma)-CFS(\varphi,\gamma)\cap CSF(\phi,\lambda)}[SM(\varphi,\omega_k)]\cdot T\omega_k$$

$$+\sum_{k\in CSF(\phi,\lambda)-CSF(\varphi,\gamma)\cap CSF(\phi,\lambda)}[-SM(\phi,\omega_k)]\cdot T\omega_k \tag{B.7}$$

であることに注意する．

ここで，式(B.3)，並びに，3式(2.53)，(2.54)，(2.55)から得られる正性

$$[\forall j\in CSF(\varphi,\gamma), SM(\varphi,\omega_j)>0]\wedge[\forall j\in CSF(\phi,\lambda), SM(\phi,\omega_j)>0] \tag{B.8}$$

に注意すれば，次の(イ)，(ロ)，(ハ)が成立し，証明が終わる：

（イ）例えば，$CSF(\varphi,\gamma)=\phi\wedge CSF(\phi,\lambda)\neq\phi$ のとき

$A(\gamma)\varphi=0\neq A(\lambda)\phi$ ∵ 定理2.9

を得るから，以後

$CSF(\varphi,\gamma)\neq\phi\wedge CSF(\phi,\lambda)\neq\phi$

とする．

（ロ） $CSF(\varphi,\gamma)\cap CSF(\phi,\lambda)=\phi$ のとき

式(B.5)，式(B.6)の2つの場合に分けて考えれば，式(B.7)から明らかに， $A(\gamma)\varphi-A(\lambda)\phi\neq 0.$

（ハ） $CSF(\varphi,\gamma)\cap CSF(\phi,\lambda)\neq\phi$ のとき

（ハ－1） $CSF(\varphi,\gamma)\neq CSF(\phi,\lambda)$ のとき， $A(\gamma)\varphi-A(\lambda)\phi\neq 0.$

（ハ－2） $\exists j\in CSF(\varphi,\gamma)\cap CSF(\phi,\lambda), SM(\varphi,\omega_j)\neq SM(\phi,\omega_j)$ のとき，

$A(\gamma)\varphi-A(\lambda)\phi\neq 0.$ □

次の定理B.1の系1は，2.7節の定義2.2の等構造関係＝に関し，カテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$ を一意的に特徴づけるパターン(表象)は $A(\gamma)\in\Phi(\subset\mathfrak{H})$ であることを指摘している．

［定理B.1の系1］（構造受精作用素によるカテゴリ帰属知識の表象定理）

式(B.3)を仮定し， $CSF(\varphi,\gamma)\neq\phi\wedge CSF(\phi,\lambda)\neq\phi$ としよう．

$A(\gamma)\varphi=A(\lambda)\phi\Leftrightarrow<\varphi,\gamma>=<\phi,\lambda>.$

（証明）本定理B.1で$\Rightarrow$ は示されている．よって

$A(\gamma)\varphi=A(\lambda)\phi\Leftarrow<\varphi,\gamma>=<\phi,\lambda>.$

を示せばよいが，これは，次のように容易に示される：

$<\varphi,\gamma>=<\phi,\lambda>\Leftrightarrow$ 2式(2.65)，(2.66)の成立

$\Rightarrow A(\gamma)\varphi=A(\lambda)\phi$ ∵ 定理2.9

□

次に，

$$<\varphi,\gamma>=<\phi,\lambda> \tag{B.9}$$

が成立していれば，包含条件

$$\mu \supseteq \gamma \in 2^J \wedge \mu \supseteq \lambda \in 2^J \quad \text{(B.10)}$$

を満たす任意の候補カテゴリ番号リスト $\mu \in 2^J$ について,

$$TA(\mu)T \cdot <\varphi,\gamma> = TA(\mu)T \cdot <\phi,\lambda> \quad \text{(B.11)}$$

が成立することが，次の定理B.2で指摘される.

［定理B.2］（包含性候補カテゴリによるカテゴリ帰属知識の操作定理）

$$<\varphi,\gamma> =_{\Delta} <\phi,\lambda> \quad \text{(B.12)}$$

$$\Rightarrow <\varphi,\gamma> = <\phi,\lambda> \quad \text{(B.13)}$$

$$\Rightarrow \forall\mu(\supseteq \gamma \cup \lambda) \in 2^J, TA(\mu)T \cdot <\varphi,\gamma> =_{\Delta} TA(\mu)T \cdot <\phi,\lambda> \quad \text{(B.14)}$$

$$\Rightarrow \forall\mu(\supseteq \gamma \cup \lambda) \in 2^J, TA(\mu)T \cdot <\varphi,\gamma> = TA(\mu)T \cdot <\phi,\lambda>. \quad \text{(B.15)}$$

（証明） 式(B.12)から式(B.13)が従うこと，並びに，式(B.14)から式(B.15)が従うことは，式(2.67)から明らかである.

残りは，式(B.13)から式(B.14)が従うことを示すことである.

先ず,

$$\mu \cap \gamma = \gamma, \mu \cap \lambda = \lambda \quad \because \quad \text{式(B.14)の } \mu \supset \gamma \cup \lambda \quad \text{(B.16)}$$

であるから，3式(2.64)，(2.65)，(2.66)によれば,

$$CSF(\varphi, \mu \cap \gamma) = CSF(\varphi,\gamma) \quad \because \quad \text{式(B.16)}$$

$$= CSF(\phi,\lambda) \quad \because \quad \text{式(B.13)，定義2.2}$$

$$= CSF(\phi, \mu \cap \lambda) \quad \because \quad \text{式(B.16)} \quad \text{(B.17)}$$

が成り立つ.

後は,

$$<TA(\mu \cap \gamma)T\varphi,\ CSF(\varphi, \mu \cap \gamma)>$$

$$=_{\Delta} TA(\mu)T \cdot <\varphi,\gamma> \quad \because \quad \text{式(2.77)}$$

$$=_{\Delta} TA(\mu)T \cdot <\phi,\lambda>$$

$$=_{\Delta} <TA(\mu \cap \lambda)T\phi,\ CSF(\phi, \mu \cap \lambda)> \quad \because \quad \text{式(2.77)} \quad \text{(B.18)}$$

を考えると,

$$TA(\mu \cap \gamma)T\varphi = TA(\mu \cap \lambda)T\phi \quad \text{(B.19)}$$

を示せば，式(B.14)が成り立つことになる.

式(B.13)

$$\Rightarrow A(\gamma)\varphi = A(\lambda)\phi \quad \because \quad \text{3式(2.64)，(2.65)，(2.66)かつ定理B.1の系1}$$

$$\Rightarrow A(\gamma)T\varphi = A(\lambda)T\phi \quad \because \quad \text{定理2.8の(1\$)}$$

$$\Rightarrow A(\mu \cap \gamma)T\varphi = A(\mu \cap \lambda)T\phi \quad \because \quad \text{式(B.16)}$$

$$\Rightarrow TA(\mu \cap \gamma)T\varphi = TA(\mu \cap \lambda)T\phi$$

と示された. □

最後に,

$$<\varphi, \mu \cap \gamma> = <\phi, \mu \cap \lambda> \quad \text{(B.20)}$$

が成立していれば,

$$TA(\mu)T \cdot <\varphi,\gamma> =_{\Delta} TA(\mu)T \cdot <\phi,\lambda> \quad \text{(B.21)}$$

が成立することを次の定理B.3で示す.

［定理B.3］（カテゴリ帰属知識の簡易化操作定理）

$$<\varphi, \mu \cap \gamma> =_{\Delta} <\phi, \mu \cap \lambda> \quad \text{(B.22)}$$

$\Rightarrow < \varphi, \mu \cap \gamma > = < \phi, \mu \cap \lambda >$ （B.23）

$\Rightarrow TA(\mu)T \cdot < \varphi, \gamma > =_{\Delta} TA(\mu)T \cdot < \phi, \lambda >$ （B.24）

$\Rightarrow TA(\mu)T \cdot < \varphi, \gamma > = TA(\mu)T \cdot < \phi, \lambda >$. （B.25）

（証明） 式（B.22）から式（B.23）が従うこと，並びに，式（B.24）から式（B.25）が従うことは，式（2.67）から明らかである．

残りは，式（B.23）から式（B.24）つまり，式（B.18）が従うことを示すことである．

3式（2.64），（2.65），（2.66）から，

式（B.23）の $< \varphi, \mu \cap \gamma > = < \phi, \mu \cap \lambda >$

$\Leftrightarrow$ 【$CSF(\varphi, \mu \cap \gamma) = CSF(\phi, \mu \cap \lambda) \wedge$ （B.26）

$[\forall j \in CSF(\varphi, \mu \cap \gamma) \cap CSF(\phi, \mu \cap \lambda), SM(\varphi, \omega_j) = SM(\phi, \omega_j)]$ （B.27）

】

を得る．式（B.26）は，式（B.18）の後半が成立していることを意味する．

以下のように式（B.18）の前半も成立していることを示され，式（B.24）が成立する．

$A(\mu \cap \gamma)T\varphi$

$= A(\mu \cap \gamma)\varphi$ ∵ 定理2.8の（1$）

$= \sum_{k \in CSF(\varphi, \mu \cap \gamma)} SM(\varphi, \omega_k) \cdot T\omega_k$ ∵ 定理2.9

$= \sum_{k \in CSF(\phi, \mu \cap \lambda)} SM(\varphi, \omega_k) \cdot T\omega_k$ ∵ 式（B.26）

$= \sum_{k \in CSF(\phi, \mu \cap \lambda)} SM(\phi, \omega_k) \cdot T\omega_k$ ∵ 2式（B.26），（B.27）

$= A(\mu \cap \lambda)\phi$ ∵ 定理2.9

$= A(\mu \cap \lambda)T\phi$ ∵ 定理2.8の（1$）

を得，よって，式（B.18）の前半

$TA(\mu \cap \gamma)T\varphi = TA(\mu \cap \lambda)T\phi$

が成立した． □

（著者　鈴木昇一，論文題目　認識の階層と，C-RECOGNITRON，文教大学情報学部情報研究no.36投稿論文，投稿年月日　2006年9月28日（木））