

パターンの変形量を外積演算による情報量で捉えよう —情報容量の提案と、情報容量を用いた類似度関数 SM の構成—

鈴木 昇一

The Amount of Information Obtained by an Operation of an Exterior Product Can Catch the Grade of Distortion of a Pattern —A proposal of Information Capacity, and a Construction of a Similarity-Measure Function SM using the Information Capacity—

Shoichi Suzuki

あらまし

パターン情報処理の場面では、入力パターンが記憶しているパターンとどの程度、似ているかを類似度として計量しなければならないことがしばしば要求される。

今注目しているパターンが記憶している有限個のパターンの内のどの1つのパターンと最も似ているかを簡単に計量するには、

(1) パターン間の違いを測ってその逆数を規格化して類似度を求めるのがよい。この際、

(2) 原パターン φ の代わりに、原パターン φ と同じ感性を与えるそのパターンモデル $T\varphi$ を使って、このモデル $T\varphi$ と記憶しているパターン ω のモデル $T\omega$ との違いを測ることが重要である。

(3) 最大の変形量から実際に変形している量を差し引いて得られる量は、極限まで変形していない余裕量であると考えることができ、パターン間の違いとは、この極限まで変形していない余裕量である

と想定してみよう。この想定が本研究の最大の独創性である。そして、

(4) 有限個のパターンの外積を提案し、パターンのこの外積で変形量を定義するのも、本研究の独創性である。

(5) 極限まで変形していない余裕量は、シャノンの情報理論での通信容量(受信側で取り去られる平均的な不確定さの最大値)と対応して意味付けられるという指摘も、本研究の独創性である。

以上の5考え(1)～(5)の独創性で、

(6) 有限個のパターンが蓄えることの出来る最大の情報容量

が提案され、更に、S.Suzukiの提案したaxiom 2を満たすように、

(7) 画像認識・画像理解にその有効な適用例がある多段階帰納推理メカニズムを内蔵した万能性連想型認識システムRECONITRONを構成するのに必要な類似度関数 SM が提案される。

キーワード

- (1) モデル構成作用素 (2) 変形量 (3) 外積 (4) 類似度 (5) 通信容量
(6) 情報容量 (7) カテゴリ帰属知識 (8) 多段階帰納推理
(9) 認識システムRECOGNITRON

Abstract

It is often demanded that in the scene of the pattern information processing, it is necessary to measure as a similar measure how much the input pattern looks like the pattern that the recognizer memorizes.

To easily measure whether the pattern to which it pays attention now may look like best which one pattern in finite patterns memorized,

(1) a similarity-measure is a quantity obtained by normalizing the reciprocal of the differences between patterns

is a good way. In this case, it is important that

(2) after the pattern model by whom the same sensibility as an original pattern is given is determined instead of an original pattern, the difference between this model and the models of the patterns memorized is measured.

It can be thought that

(3) an amount obtained by subtracting amount that is actually distorted from the maximum amount of distortion is an amount of room not distorted to the utmost limit. The differences between patterns are this amounts of room not distorted to the utmost limit.

This assumption (3) is the maximum originality of this research. And,

(4) it is originality of this research to propose the exterior product of the finite patterns, and to define the amount of the distortion by this exterior product of the patterns.

(5) The above-mentioned amounts of room not distorted to the utmost limit can be defined corresponding to the channel capacity (maximum value of the average uncertainty removed on the reception side) in Shannon's information theory. This is also originality of this research of point.

In the originality of above-mentioned five ideas (1)~(5),

(6) The maximum information capacity in which the finite patterns can save is proposed here.

In addition,

(7) we shall propose a similarity-measure function SM necessary to compose associative association type recognition system RECONITRON with built-in multistep induction reasoning

mechanism where there are the effective application examples in the fields of the image recognition and the image understanding , and we shall prove that this SM can satisfy axiom 2 that S.Suzuki proposed.

Key words

- (1) model-construction operator
- (2) The amount of distortion
- (3) exterior product
- (4) similarity-measure
- (5) channel capacity
- (6) information capacity
- (7) categorical-membership knowledge
- (8) multi-stage induction reasoning
- (9) recognition system RECOGNITRON

第1章 まえがき

本論文の第一の目的は、パターンの変形量を計量できれば、2パターン間の似ている程度(類似度)が定義できることを示すことである。2つのパターンが直交していれば、一方のパターンが他方のパターンに最も大に変形していると考えることが、本研究の独創的な出発点である。

そのために、可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の元として表されるパターン φ とパターン η との外積 $\varphi \otimes \eta$ を独創的な考えで定義し、外積 $\varphi \otimes \eta$ のノルム $|\varphi \otimes \eta|$ の自乗 $|\varphi \otimes \eta|^2$ がパターン φ がパターン η に変形している程度であると解釈する。このような変形量の解釈は著者以外の他の研究論文では、全くされていない。実は、この変形量の自乗は

$$|\varphi \otimes \eta|^2 = |\varphi|^2 \cdot |\eta|^2 - |[\varphi, \eta]|^2 \quad (1.1)$$

であることが示される。ここに、 $[\varphi, \eta]$ は φ, η の内積であり、 $|\varphi| = \sqrt{[\varphi, \varphi]}$ は φ のノルムである。式(1.1)の変形量は $[\varphi, \eta] = 0$ が成立しているという意味で2パターン φ, η が直交していれば、最も大であることがわかる。

これまで各種のパターン認識理論 [A6], [A7], [A10], [A14], [A5], [A16], [A18], [A20] が研究されているが、それぞれに特色がある。パターンモデルの概念を提案し、パターン認識過程は或る連想形認識方程式の解を求める過程であることを示したのは、S.Suzukiの理論(SS理論) [B3], [B4] 以外にない。

情報を表現するには、(1)記号列による方法、(2)パターンによる方法がある。両者を混合して情報を表現するのがマルチメディア表現である。

視覚、聴覚などの感性の働きとなるのが、パターンである。

脳内のネットワークは「個々の」パターン(情報の脳内表現)に「完全に」適応するのではなく、入力パターンの集合の中に存在する「類似性」に最適に適合するといわれている(文献 [A9] の第一部基礎, 第2章学習, p.54)。パターンの集合の中の類似性を計量化する手段はパターン処理にとって基本的に必要とされることが理解できる。

このように、記号列ではなく、パターンの情報処理の場面では、入力パターンが記憶しているパターンとどの程度、似ているかを類似度として計量しなければならないことがしばしば要求される。

可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} を導入し、 (φ, η) は2つのパターン $\varphi, \eta \in \mathfrak{H}$ の内積であり、 $\|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ は $\varphi \in \mathfrak{H}$ のノルムであるとしよう。

今注目しているパターンが記憶している有限個のパターンの内のどの1つのパターンと最も似ているかかを簡単に計量するには、

(1) パターン間の違いを測ってその逆数を規格化して類似度を求める

のがよい。例えば、ノルム距離 $\|\varphi - \omega\|$ は2つのパターン $\varphi \in \Phi, \omega \in \Omega \subset \Phi$ 間の違いを計量しているが、その逆数を規格化した量

$$sm(\varphi, \omega) \equiv \frac{1}{\|\varphi - \omega\|} \Big/ \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{\|\varphi - \omega\|} \quad (1.2)$$

は、 $\varphi \in \Phi$ が $\omega \in \Omega \subset \Phi$ と似ている程度を与える類似度である。但し、 $\Omega \subset \Phi$ の元同士の非一致性

$$\forall \omega \in \Omega, \forall \omega' \in \Omega - \{\omega\}, \|\omega - \omega'\| \neq 0 \quad (1.3)$$

が成立していることが要求される。

この際、

(2) 原パターン $\varphi \in \Phi$ の代りに、原パターン φ と同じ感性与えるそのパターンモデル $T\varphi$ を使って、このモデル $T\varphi$ と記憶しているパターン $\omega \in \Omega$ のモデル $T\omega$ との違いを測る

ことが重要である。何故ならば、パターンモデル $T\varphi$ とは現実のパターン φ から個別的な変形を取り除き、 φ を可能な限りの単純さで、認識の働きが誤認識しないように写しとっているようなものであるからである。この考え(2)によれば、式(1.3)の類似度は、

$$SM(\varphi, \omega) \equiv \frac{1}{\|T\varphi - T\omega\|} \Big/ \sum_{T\omega \in T\Omega} \frac{1}{\|T\varphi - T\omega\|} \quad (1.4)$$

と改良されなければならない。但し、 $T \cdot \Omega \equiv \{T\omega \mid \omega \in \Omega\} \subset T \cdot \Phi$ の元同士の非一致性

$$\forall T\omega \in T\Omega, \forall T\omega' \in T \cdot \Omega - \{T\omega\}, \|T\omega - T\omega'\| \neq 0 \quad (1.5)$$

が成立していることが要求される。このとき、実は、式(1.4)の SM は式(A1.13)の如く表現されるが、この場合、SS理論 [B3], [B4] での axiom 2 を満たす。

(3) 最大の対数変形量

$$\begin{aligned} \log_e \sqrt{\|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2} &= \log_e \left\| \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right\| \\ &= \log_e \left\| \|\varphi\|, \|\eta\| \right\| \text{ を2辺の長さとする正方形の面積の対数} \end{aligned} \quad (1.6)$$

から実際に変形している対数

$$\begin{aligned} \log_e \sqrt{\|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2 - |(\varphi, \eta)|^2} \\ &= \log_e \left\| \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sqrt{1 - \frac{|(\varphi, \eta)|^2}{\|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2}} \right\| \\ &= \log_e \left\| \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \right\| \\ &= \log_e \left\| \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sin \theta \right\| \end{aligned}$$

$= \varphi, \eta$ 間の角度が θ であるときの, $\|\varphi\|, \|\eta\|$ を2辺の長さとする平行4変形の面積の対数 (1.7) を差し引いて得られる量

$$\log_e \sqrt{\|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2} - \log_e \sqrt{\|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2 - |(\varphi, \eta)|^2} \quad (1.8)$$

は, 極限まで変形していない余裕量であると考えることができ, パターン間の類似度とは, この極限まで変形していない余裕量(後述の情報容量)である

と想定してみよう. この想定が本研究の最大の独創性である. そして,

- (4) ヒルベルト空間 \mathcal{H} の元 ϕ_k からなる1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ を導入し, この系を基底とするような有限個のパターンの1次展開で有限個のパターンの外積を新しく提案し, この外積で変形量を定義する

のも, 本研究の独創性である.

- (5) 極限まで変形していない余裕量は, シヤノンの情報理論での通信容量(受信側で取り去られる平均的な不確定さの最大値) [A17] と対応して意味付けられる

という指摘も, 本研究の独創性である.

以上の5考え(1)~(5)の独創性で,

- (6) 有限個のパターンが蓄えることの出来る最大の情報容量

が提案され, 更に, S.Suzukiの提案したaxiom 2を満たすように,

- (7) 画像認識・画像理解にその有効な適用例 [B18], [B35], [B38], [B39] がある多段階帰納推理メカニズムを内蔵した万能性 [B3] 連想型認識システムRECONITRONを構成するのに必要な類似度関数 SM

が提案される.

以上により, 本研究の位置付け, 意義, 新規性, 有効性, 信頼性が説明された.

第2章 表象(パターンモデル)を想起しながら, 入力パターンを認識するシステムRECOGNITRON

認識のモデル(構築される認識システム)とは常に複雑な現実の認識の働きの単純化である. 単純化の程度は目的とする認識の働きが機能しなければならない状況に応じ, 様々である. 可能な限りの単純さで, 現実の認識の本質を最もよく写しとっているようなものでなければならない. 現実の認識の働きに比べ誤った認識結果が多くないという応用可能性で, その良否が決まる.

本章では, S.Suzukiが構築したパターン認識の数学的理論(SS理論 [B3], [B4])を適用して, 現実の個性性を無視して得られた認識システムのモデルRECOGNITRONが公理論的方法で説明される. 本研究内容は, このRECOGNITRONを構成する場面において, 並びに, RECOGNITRONの連想形認識機能を分析する場面において, 活用され得る.

2.1 パターン認識システムの帰納学習経験とは?

似た者同士を集め, 形成された各々の集団にそれぞれ, 区別し得る名前(カテゴリ名; category)を与えることを分類(classification)という. 分類後, 個々のパターンはカテゴリ名で呼ばれることになる. 有限次元のベクトル(パターンの一種)の分類に比較的に役立つのが, support vector machineであり, SS理論でのパターン認識システムRECOGNITRON内の構造要素である大分類関数の構成に応用できることが示されている [B32].

心理学では、認知されたものを再認する働きが認識である [B1] が。工学では、

(1) 正規化 → 特徴抽出 → 識別

というように、事前処理(正規化)を行い、事前処理結果から特徴の抽出を実行し、特徴抽出結果を記憶している内容と照合することによりカテゴリ名を決定すること(分類、識別)が認識の働きであるとされている。

認識の対象となる非言語の情報表現をパターン(pattern)といい、パターン φ を認識する機能を備えたシステムをパターン認識システム(recognizer)という [B1]。

S.Suzukiが構築したパターン認識システムRECOGNITRONにおいては、パターンからそれと関連ある今1つのパターンを連想するという想起の働きで入力パターンの帰属するカテゴリを決定するという認識の働きを達成する。このRECOGNITRONにおいては、S.Suzukiが考案した連想型認識方程式の解を求める多段階過程が入力パターン φ を認識する働きであり、この方程式の解が、

(2) 入力パターン φ から連想されるパターン $T\omega_j$ (或るカテゴリ \mathbb{C}_j の代表パターン ω_j のモデル)
(連想・想起の結果)

と、

(3) 入力パターン φ が帰属するカテゴリ名 \mathbb{C}_j の番号(カテゴリ番号) $j \in J$ (分類結果)

との順序対 $\langle T\omega_j, [j] \rangle$ であることが示されている。

認識システムはパターンを見たり聞いたりした場合、通常、

(4) このパターンのモデル

と、

(5) このパターンの帰属するカテゴリ名(の番号)の候補のリスト

とを予想する。このパターンのモデルと、このパターンのカテゴリ候補のリストとの順序対が認識システムがパターンに対し持つ知識であり、カテゴリ帰属知識と呼ばれる。順序対 $\langle T\omega_j, [j] \rangle$ はカテゴリ候補のリストの要素が唯1つの要素 $j \in J$ である場合のカテゴリ帰属知識の特別なものである。順序対 $\langle T\omega_j, [j] \rangle$ は、

(6) 認識システムRECOGNITRONが入力パターン φ に対し持つ事前知識である $\langle T\varphi, J \rangle$ が coarse to fine strategyにより精製されて得たカテゴリ帰属知識である

と解釈され、カテゴリ帰属知識の、多段階にわたる変換

(7) $\langle T\varphi, J \rangle \rightarrow \dots \rightarrow \langle T\omega_j, [j] \rangle$

が帰納推理の働きで得られたならば、認識システムRECOGNITRONは、

(8) 入力パターン φ は第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathbb{C}_j に帰属する(認識結果)

と、認識断定することができる。そのみならず、認識システムRECOGNITRONは、

(9) 入力パターン φ を整形した結果は $T\omega_j$ である(連想・想起の結果)

と、連想断定することができる。この(8)からは、認識システムRECOGNITRONは、

(10) 入力パターン φ に似ているパターンの集まりの表象は $T\omega_j$ である

という帰納学習経験をした、ということができる。

2.2 パターン連想型認識システムRECOGNITRON

S.Suzukiのパターン知能情報論においては、パターン認識システム(多段階連想型認識システム)

$$\text{RECOGNITRON} = \langle \Phi_B, T, SM, BSC \rangle \quad (2.1)$$

が構成されている。4要素 Φ_B, T, SM, BSC が与えられれば、認識のこのモデルRECOGNITRONは定ま

る。

もともと、パターンというものは画像、音声、匂いなどを関数、曲線、有限次元のベクトルなどで数理的に表現したものである。S.Suzukiが構築したパターン認識の数学的理論 [B3], [B4] は、RECOGNITRONが処理するパターン φ の集まり Φ を $\Phi_B(\subset \mathfrak{H})$ と T を使って以下の式(2.2)の如く、指定する。ここに、 \mathfrak{H} は選ばれた或る可分なヒルベルト空間である。パターンというものを数理的に定義するこの指定は、S.Suzukiの数学的理論以外の他のパターン認識理論がなし得なかったことである。

パターンと判明している φ の集合(基本領域; basic domain) $\Phi_B(\subset \Phi)$ が与えられたとしよう。処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ とモデル構成作用素(model-construction operator) T の順序対 $[\Phi, T]$ はSS理論のaxiom 1を満たさなければならない。集合 Φ は、

$$\Phi = R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B) \quad (2.2)$$

と表される。 $T\varphi \in \Phi$ はパターン $\varphi \in \Phi$ の代りとなるパターン(パターンモデル)であり、RECOGNITRONがモデル $T\varphi \in \Phi$ を見たり聞いたりしたならば、原パターン $\varphi \in \Phi$ と同じように見えたり聞こえたりするようなものである ($T\varphi \in \Phi$ と $\varphi \in \Phi$ との間の同一知覚原理)。モデル構成作用素と呼ばれる T は Φ の元 φ を Φ の唯一つの元 $T\varphi$ に対応させる写像であり、

$$T: \Phi \rightarrow \Phi \quad (2.3)$$

と表される。写像 T はパターン記述器(pattern descriptor)であり、モデル $T\varphi$ はパターン φ を認識システムRECOGNITRONの主観的観点から簡素に記述したものである。

パターン認識の数学的理論(SS理論) [B3], [B4] での公理axiom 2, 3を各々、満たさなければならない類似度関数 SM , 大分類関数 BSC が導入されている。 SM は、 Φ の元 φ が、代表パターン ω_j (第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j の持つ諸性質を典型的に代表しているパターン)の集合(1次独立な系)

$$\Omega = \{\omega_j | j \in J\} \quad (2.4)$$

内の任意の代表パターン ω_j と似ているか、或いは、 ω_j からどの程度異なっているかを計量する働きを備えており、また、 BSC は、パターンが所属している複数のカテゴリの候補を出力する働きを備えている。

SS理論での公理axiom 4を満たさなければならないカテゴリ選択関数 CSF は類似度関数 SM , 大分類関数 BSC を選定すれば、文献 [B3] の付録Eの定理E1により決まる。 CSF は、パターンが所属している複数のカテゴリの候補を更に絞り込む働きを備えている。

候補カテゴリの番号リスト $\mu \in 2^J$ を助変数に持つ構造受精作用素

$$A(\mu): \Phi \rightarrow \Phi, \text{ where } \mu \in 2^J \quad (2.5)$$

も用いられが、式(2.4)の代表パターンの集合 $\Omega = \{\omega_j | j \in J\}$ を式(1.3)のモデル構成作用素 T で変換して得られる代表パターンモデルの集合

$$T \cdot \Omega = \{T\omega_j | j \in J\} \quad (2.6)$$

と、類似度関数 SM , 大分類関数 BSC さえ与えられれば、写像 $A(\mu)$ も決まる(写像 $A(\mu)$ は、文献 [B3] の6.5節の2式(6.12), (6.13)で定義されている)。

式(2.6)の代表パターンモデルの集合 $T \cdot \Omega$ は1次独立な系であるように、式(2.3)のモデル構成作用素 T が選ばれていなければならない。

本研究では、原パターン η の持つ情報を反映した形で、観測にかかったパターン φ のモデル $T\varphi$ の形で復元する。モデル $T\varphi$ は観測後のパターン φ に存在している雑音、変形が除去されている可能性が大であるパターンといえよう。

もともと、刺激としてのパターンから今1つの記憶しているパターンを連想する機能は、刺激としてのパターン内にある雑音、変形が除去されている形でのパターン復元機能である。このモデル $T\varphi$ を使うパターン認識システム RECOGNITRON では、入力パターン φ が帰属するであろう候補カテゴリに関し多段階帰納推理を行い、表象付き連想形認識の働きで、或るカテゴリ \mathfrak{C}_j の代表パターン ω_j のモデル $T\omega_j$ として原パターン η を復元することになる。認識システム RECOGNITRON により正しく復元された場合、カテゴリ \mathfrak{C}_j は原パターン η が帰属するカテゴリとなっている。このように正しく復元された場合、原パターン η を観測し得られた入力パターン φ 内に存在している雑音、変形が完全に除去されているといえよう。

SS公理系(4axiom 1~4)を背景としたパターン復元機能を提案しており、本研究成果を取り入れこれまでの計算機シミュレーション [B35], [B38], [B39] をやり直すことができる(信頼性)。

Shannonの情報理論は、

送信側の持っている平均的な不確定さに関し、受信側で取り去られる平均的な不確定さ(平均相互情報量)(得られた平均的な情報量)を最大にすること

を考え、得られたこの最大値を通信路容量(channel capacity)と称えている。送信できる最大の平均情報量のことである。

以下では、有限個のパターン $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ の外積(vector product, exterior product)

$$\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n \quad (2.7)$$

を提案する。その後、パターン φ のモデル $T\varphi$ と、各 φ_k の代りにそのモデル $T\omega_k$ を採用して得られる外積 $T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes \dots \otimes T\omega_m$ との内積

$$[T\varphi, T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes \dots \otimes T\omega_m] \quad (2.8)$$

などを使って定義される量

$$-\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \frac{[T\varphi, T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes \dots \otimes T\omega_m]^2}{|T\varphi| \cdot |T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes \dots \otimes T\omega_m|} \right] \quad (2.9)$$

は、 $T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes \dots \otimes T\omega_m$ が $T\varphi$ に歪んでいるとき、 $T\varphi$ から取り去られた歪みの対数であり、通信(communication)における通信路容量に対応して、認識(recognition)における $T\varphi$, $T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes \dots \otimes T\omega_m$ の情報容量と(information capacity)定義されてよい量であることが示される。カテゴリ番号の有限集合 J は $J = \{1, 2, \dots, m\}$ であるとし、また、 $|T\varphi|$, $|T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes \dots \otimes T\omega_m|$ は $T\varphi$, $T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes \dots \otimes T\omega_m$ のノルムである。

第3章 歪みの対数余裕度は類似度である

本章では、パターン φ から反時計方向にパターン η まで測った時の角を θ としたとき、 η が φ に歪んでいるときの歪み歪みの対数余裕度が

$$\log_e \left| \frac{\|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{\|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sin \theta} \right| = \log_e \left\| \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right\| - \log_e \left\| \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sin \theta \right\| \quad (3.1)$$

で定義されてよいことが説明され、この量が、 φ, η 間に非直交関係 $(\varphi, \eta) \neq 0$ が成立する程度(類似性を反映している程度)を反映している情報量であるとみなされてよいことが結論される。

3.1 2つのパターン φ, η 間の、最大の歪み d_{\max} と実際の歪み d

2つのパターン φ, η を2辺とする長方形 (a rectangle) の面積は

$$\|\varphi\| \cdot \|\eta\| = \left\| \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right\| \quad (3.2)$$

であり、角度 θ を

$$\theta : \text{the angle between the two vectors when drawn from a common origin} \quad (3.3)$$

とすると、2つのパターン φ, η を2辺とする平行四辺形の面積 (the area of the parallelogram) は

$$\|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sin \theta \quad (3.4)$$

である。

η が φ に完全に歪んでいるときの歪み (最大歪み) d_{\max} は互いに直交している2辺のなす平行四辺形 (正方形) の面積であるとし、

$$d_{\max} \equiv \left\| \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right\| = \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \quad (3.5)$$

と定義できる。 $\log_e d_{\max}$ は実は、2つのパターン φ, η に蓄えられる情報量の最大値と解釈できる。

パターン η から反時計方向にパターン φ まで測った時の角を θ としたとき、

$$\cos \theta = \frac{(\varphi, \eta)}{\|\varphi\| \cdot \|\eta\|} \quad (3.6)$$

であるから、 η が φ へと実際に歪んでいると仮定したとき、2つのパターン φ, η 間の実際の歪み (an actual distortion) $d = d(\varphi, \eta)$ は、

$$d \equiv d(\varphi, \eta) \equiv \left\| \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sin \theta \right\| = \left\| \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sin \left(\cos^{-1} \frac{(\varphi, \eta)}{\|\varphi\| \cdot \|\eta\|} \right) \right\| \quad (3.7)$$

或いは、

$$d \equiv d(\varphi, \eta) \equiv \left\| \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \right\| \quad (3.8)$$

$$= \left\| \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sqrt{1 - \frac{(\varphi, \eta)^2}{\|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2}} \right\| \quad (3.9)$$

と表される。 $\log_e d$ は実は、パターン φ から反時計方向にパターン η まで測った時の角が θ であるような2つのパターン φ, η に蓄えられる情報量と解釈できる (図3.1)。

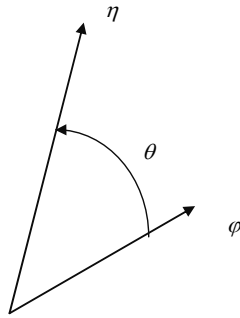


図3.1 φ から η への, 180度以内の右手系回転

Fig.3.1 the motion of a right-hand screw when φ is rotated into η (angle of rotation less than 180°)

3.2 歪みの対数

η が φ へと実際に歪んでいると仮定したときの歪みの対数(実際の対数歪み) $\log_e d$ は,

$$\begin{aligned} \log_e d &= \frac{1}{2} \cdot \log_e d^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \log_e [\|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2 - (\langle \varphi, \eta \rangle)^2] \end{aligned} \quad (3.10)$$

であるが, この $\log_e d$ は, φ, η が無相関でないときの情報量(実際に, η が φ と異なっているときの情報量)であると考えられる. また, η が φ へと最大限歪んでいると仮定したときの歪みの対数(最大対数歪み) $\log_e d_{\max}$ は,

$$\log_e d_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \log_e d_{\max}^2 = \frac{1}{2} \cdot \log_e [\|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2] \quad (3.11)$$

であり, この $\log_e d_{\max}$ は, φ, η が無相関であるときの情報量(φ が η と最も異なっているときの情報量)である.

3.3 歪みの対数余裕度は, 類似性を反映している程度を反映している情報量である

最大対数歪み $\log_e d_{\max}$ から実際の対数歪み $\log_e d$ を差し引いて得られる量

$$\log_e \frac{d_{\max}}{d} = \log_e d_{\max} - \log_e d \quad (3.12)$$

は, φ, η 間に非直交関係 ($\langle \varphi, \eta \rangle \neq 0$) が成立する程度(類似性を反映している程度)を反映している情報量である. この $\log_e \frac{d_{\max}}{d}$ は最大対数歪みから存在している実際の対数歪みを差し引いたものであるから, 最大対数歪みから取り去られた対数歪み量(余裕の対数歪み量)であり, 歪みの対数余裕度と称されてよい. この歪みの対数余裕度が, η が φ に歪んで(変形して)いると想定したとき, φ からその歪みを取り去って得られる歪みの対数量である. 同時に, φ が η に歪んで(変形して)いると想定したとき, η からその歪みを取り去って得られる歪みの対数量でもある.

φ, η が直交しているとき(最も異なっているとき), 零になるべきである. それで,

$$\begin{aligned} \|\varphi\| \cdot \|\eta\| &= 0 \text{ のとき,} \\ \log_e d_{\max} &= -\infty \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\log_e d = -\infty \quad (3.14)$$

であるから,

$$\log_e \frac{d_{\max}}{d} = \log_e d_{\max} - \log_e d = 0 \tag{3.15}$$

であると約束する. その後,

$$\begin{aligned} \text{歪みの対数余裕度 } \log_e \frac{d_{\max}}{d} &= \log_e d_{\max} - \log_e d \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \frac{|\langle \varphi, \eta \rangle|^2}{\|\varphi\| \cdot \|\eta\|} \right] \quad \because \text{2式(3.10), (3.11)} \end{aligned} \tag{3.16}$$

が定義される.

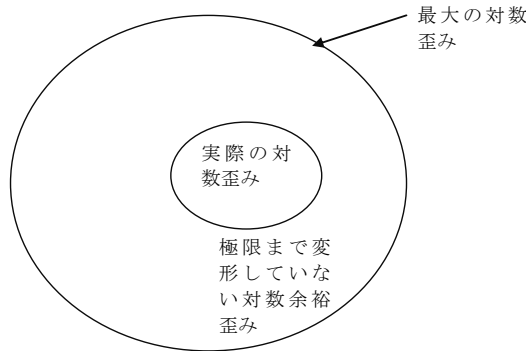


図3.2 極限まで変形していない対数余裕歪み量

Fig.3.2 Amount of logarithm room warp not transformed to the utmost limit

第4章 1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ による, 可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の元であるパターン φ の1次展開に基づく $|L|$ 次元ユークリッド空間での内積 $[\varphi, \eta]$, ノルム $|\varphi|$

本章では, 1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ により, 可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の元 φ が1次展開できる事実を指摘し, この事実に基づき, φ, η に関し, $|L|$ 次元ユークリッド空間での内積 $[\varphi, \eta]$, ノルム $|\varphi|$ を定義する.

可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の実数値元 ϕ_k の系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ は実数値の1次独立な系とする. \mathfrak{H} での内積, ノルムを各々, $(\varphi, \eta), \|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ とする.

有限集合 L を

$$|L| \equiv n \geq 3, L = \{1, 2, \dots, n\} \tag{4.1}$$

とする. \mathfrak{H} の元 φ は次のように1次展開できる:

$$\varphi = \sum_{k \in L} c_k \cdot \phi_k + \varphi_{\perp}, \tag{4.2}$$

where

$$\forall k \in L, (\varphi_{\perp}, \phi_k) = 0 \tag{4.3}$$

□

同様に, \mathfrak{H} の元 η が

$$\eta = \sum_{k \in L} d_k \cdot \phi_k + \eta_{\perp}, \quad (4.4)$$

where

$$\forall k \in L, (\eta_{\perp}, \phi_k) = 0 \quad (4.5)$$

と展開されるとしよう.

2展開式に(4.2), (4.4)について, 各 c_k, d_k は実定数であるとき, φ, η に対し, $|L|$ 次元ユークリッド空間 $R^{|L|}$ を導入し, その内積 $[\varphi, \eta]$, ノルム $|\varphi|$ を

$$\text{内積 (scalar product, inner product) } [\varphi, \eta] = \sum_{k \in L} c_k \cdot d_k \quad (4.6)$$

$$\text{ノルム (norm) } |\varphi| = \sqrt{[\varphi, \varphi]} \quad (4.7)$$

と定義する. ここで,

$$\frac{[\varphi, \eta]}{|\varphi| \cdot |\eta|} = 0 \quad \text{if } |\varphi| \cdot |\eta| = 0 \quad (4.8)$$

と約束する.

第5章 有限個のパターン $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ の外積 $\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n$

本章では, 有限個のパターン $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ の外積 $\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n$ を定義し, 内積 $[\varphi, \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n]$ の表現を確立する.

任意のパターンを $\varphi \in \Phi$ とし,

$$\varphi \equiv \varphi_1 \quad (5.1)$$

とおく. 有限個のパターンの集合

$$\varphi_j, j \in L = \{1, 2, \dots, n\} \quad (5.2)$$

は1次独立な系とする. このとき, 各パターン $\varphi_j \in \mathfrak{S}$ を

$$\varphi_j = \sum_{k \in L} c_k(j) \cdot \phi_k + (\varphi_j)_{\perp} = \sum_{k=1}^n c_k(j) \cdot \phi_k + (\varphi_j)_{\perp} \quad (5.3)$$

$$\text{ここに, } \forall k \in L = \{1, 2, \dots, n\}, ((\varphi_j)_{\perp}, \phi_k) = 0 \quad (5.4)$$

と1次展開する.

$\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ の外積 (vector product, exterior product) $\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned} & \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n \\ &= \begin{vmatrix} \phi_1 & c_1(2) & c_1(3) & \dots & c_1(n) \\ \phi_2 & c_2(2) & c_2(3) & \dots & c_2(n) \\ \phi_3 & c_3(2) & c_3(3) & \dots & c_3(n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_n & c_n(2) & c_n(3) & \dots & c_n(n) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (5.5)$$

□

次の定理5.1は, 内積 $[\varphi, \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n]$ を計算したものである.

[定理5.1] (パターン $\varphi \equiv \varphi_1$ と外積 $\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n$ との内積の表現定理)

任意のパターン $\varphi \equiv \varphi_1$ について,

$$\begin{aligned}
 & [\varphi, \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n] \\
 & = [\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n]
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
 & = c_k(j) (1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq n) \text{ を第 } k \text{ 行第 } j \text{ 列とする行列の行列式} \\
 & = \begin{vmatrix} c_1(1) & c_1(2) & c_1(3) & \cdots & c_1(n) \\ c_2(1) & c_2(2) & c_2(3) & \cdots & c_2(n) \\ c_3(1) & c_3(2) & c_3(3) & \cdots & c_3(n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n(1) & c_n(2) & c_n(3) & \cdots & c_n(n) \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

が成り立つ。

(証明) 第4章の内積 $[\varphi, \eta]$ の定義式(4.6)と、行列式の性質を使えば、容易に示される。 \square

次の例5.1のように、式(5.6)の $n=3$ の場合の $[\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_n]$ は計算される。

[例5.1] ($n=3$ の場合の内積 $[\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_n]$)

パターン φ_j の1次展開式(5.3), (5.4)は

$$\varphi_j = c_1(j) \cdot \phi_1 + c_2(j) \cdot \phi_2 + c_3(j) \cdot \phi_3 + (\varphi_j)_\perp, j=1,2,3 \tag{5.8}$$

$$\text{ここに, } ((\varphi_j)_\perp, \phi_1) = ((\varphi_j)_\perp, \phi_2) = ((\varphi_j)_\perp, \phi_3) = 0, j=1,2,3 \tag{5.9}$$

であり、まず、パターン φ_1 のノルム $|\varphi_1|$ は、式(4.7)から、

$$|\varphi_1| = \sqrt{c_1(1)^2 + c_2(1)^2 + c_3(1)^2} \tag{5.10}$$

である。次に、2つのパターン φ_2, φ_3 の、式(5.5)の外積 $\varphi_2 \otimes \varphi_3$ 、並びに、式(4.7)で定義されるそのノルム $|\varphi_2 \otimes \varphi_3|$ は

$$\begin{aligned}
 & \varphi_2 \otimes \varphi_3 \\
 & = \begin{vmatrix} \phi_1 & c_1(2) & c_1(3) \\ \phi_2 & c_2(2) & c_2(3) \\ \phi_3 & c_3(2) & c_3(3) \end{vmatrix} \\
 & = \phi_1 \cdot \begin{vmatrix} c_2(2) & c_2(3) \\ c_3(2) & c_3(3) \end{vmatrix} - \phi_2 \cdot \begin{vmatrix} c_1(2) & c_1(3) \\ c_3(2) & c_3(3) \end{vmatrix} + \phi_3 \cdot \begin{vmatrix} c_1(2) & c_1(3) \\ c_2(2) & c_2(3) \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}
 & |\varphi_2 \otimes \varphi_3| \\
 & = [|c_2(2) \cdot c_3(3) - c_2(3) \cdot c_3(2)|^2 + |c_1(2) \cdot c_3(3) - c_1(3) \cdot c_3(2)|^2 \\
 & \quad + |c_1(2) \cdot c_2(3) - c_1(3) \cdot c_2(2)|^2]^{1/2}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

最後に、パターン φ_1 と外積パターン $\varphi_2 \otimes \varphi_2$ との、式(5.6)の内積 $[\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_2]$ は

$$\begin{aligned}
 & [\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_2] \\
 & = c_1(1) \cdot \begin{vmatrix} c_2(2) & c_2(3) \\ c_3(2) & c_3(3) \end{vmatrix} - c_2(1) \cdot \begin{vmatrix} c_1(2) & c_1(3) \\ c_3(2) & c_3(3) \end{vmatrix} + c_3(1) \cdot \begin{vmatrix} c_1(2) & c_1(3) \\ c_2(2) & c_2(3) \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

である

例えば、

$$c_1(2) \neq 0, c_2(2) = 0, c_3(2) = 0$$

$$c_1(3) = 0, c_2(3) \neq 0, c_3(3) = 0$$

の場合、

$$\varphi_2 \otimes \varphi_3 = c_1(2) \cdot c_2(3) \cdot \phi_3$$

$$[\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_3] = c_1(2) \cdot c_2(3) \cdot c_3(1)$$

と計算される. □

次章のために, $|\varphi_1|$, $|\varphi_2 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_n|$ を求めておこう. 先ず,

$$|\varphi_1| = \sqrt{\sum_{k \in L} c_k(1)^2} \quad (5.14)$$

であり, 次に, 式(5.5)に注意して, $(n-1)$ 変数の関数 f を

$$f(\phi_2, \phi_3, \phi_4, \dots, \phi_n) \equiv \varphi_2 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \quad (5.15)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} & |\varphi_2 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_n| \\ &= [f(1,0,0, \dots, 0)^2 + f(0,1,0, \dots, 0)^2 + f(0,0,1, \dots, 0)^2 + f(0,0,0, \dots, 1)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (5.16)$$

と求められる. □

尚, 外積の定義式(5.5)から,

$$\begin{aligned} & \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_{i-1} \otimes \varphi_j \otimes \varphi_{i+1} \otimes \cdots \otimes \varphi_n \\ &= 0 \quad \text{for } j \in \{1, 2, \dots, n\} - \{i\} \end{aligned} \quad (5.17)$$

が成立し, また, 2つのパターンの交換で, 例えば,

$$\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n = -\varphi_3 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \quad (5.18)$$

というように, もとの値の符号を変えた値に変ることに注意しておく.

更に, 内積の表現式(5.7)から,

$$\begin{aligned} & [\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_{i-1} \otimes \varphi_j \otimes \varphi_{i+1} \otimes \cdots \otimes \varphi_n] \\ &= 0 \quad \text{for } j \in \{1, 2, \dots, n\} - \{i\} \end{aligned} \quad (5.19)$$

が成立し, また, 2つのパターンの交換で, 例えば,

$$[\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n] = -[\varphi_1, \varphi_3 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_n] \quad (5.18)$$

というように, もとの値の符号を変えた値に変ることに注意しておく.

第6章 有限個のパターン $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ の情報容量 $C(\varphi_1: \varphi_j, j=2, 3, \dots, n)$

本章では, 有限個のパターン $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ の情報容量 $C(\varphi_1: \varphi_j, j=2, 3, \dots, n)$ を定義し, その簡単な諸性質を調べる.

式(3.16)の歪みの対数余裕度 $\log_e \frac{d_{\max}}{d}$ の意味するところに基づき, 有限個のパターン

$$\varphi_j, j \in L = \{1, 2, \dots, n\} \quad (6.1)$$

の情報容量 (information capacity) $C(\varphi_1: \varphi_j, j=2, 3, \dots, n)$ を,

$$\begin{aligned} & C(\varphi_1: \varphi_j, j=2, 3, \dots, n) = C(\varphi_1: \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n) \\ & \equiv -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \frac{[\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n]^2}{|\varphi_1| \cdot |\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n|} \right] \end{aligned} \quad (6.2)$$

と定義する. 情報容量 $C(\varphi_1: \varphi_j, j=2, 3, \dots, n)$ は, 式(5.5)の外積 $\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$ が $\varphi = \varphi_1$ に歪んで(変形して)いると想定したとき, $\varphi = \varphi_1$ からその歪みを取り去って得られる歪みの対数量である. 或いは, $\varphi = \varphi_1$ が外積 $\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$ に歪んで(変形して)いると想定したとき, 外積 $\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$ からその歪みを取り去って得られる歪みの対数量でもある. 情報容量 $C(\varphi_1: \varphi_j, j=2, 3, \dots, n)$ はパターン

$\varphi \equiv \varphi_1$ とパターン $\eta \equiv \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n$ とが互いに似ている程度 ($\varphi \equiv \varphi_1$, $\eta \equiv \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n$ 間に非直交関係 $[\varphi, \eta] \neq 0$ が成立する程度を反映した類似性の程度) を情報量として計量したものである。

逆に、情報容量 $C(\varphi_1 : \varphi_j, j = 2, 3, \dots, n)$ が与えられると、 $\varphi \equiv \varphi_1$, $\eta \equiv \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n$ の規格化内積

$$\begin{aligned} \text{の絶対値} \quad \frac{|\langle \varphi, \eta \rangle|}{\|\varphi\| \cdot \|\eta\|} &= \frac{|\langle \varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n \rangle|}{\|\varphi_1\| \cdot \|\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n\|} \text{は,} \\ \frac{|\langle \varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n \rangle|}{\|\varphi_1\| \cdot \|\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n\|} &= \sqrt{1 - \exp[-2C(\varphi_1 : \varphi_j, j = 2, 3, \dots, n)]} \end{aligned} \quad (6.3)$$

と求まる。

シュワルツの不等式

$$|\langle \varphi, \eta \rangle| \leq \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \quad (6.4)$$

ここに、

$$|\langle \varphi, \eta \rangle| = \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \text{ (等号の成立) となるのは, } \varphi, \eta \text{ が互いに定数倍 (零倍を含む) の関係にあるときに限る} \quad (6.5)$$

を適用すれば、次の定理6.1が成り立つ。正に、情報容量 $C(\varphi_1 : \varphi_j, j = 2, 3, \dots, n)$ がパターン $\varphi \equiv \varphi_1$ がパターン $\eta \equiv \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n$ に似ている程度を反映している類似度の程度であることの一端であることを示している。但し、以後、

$$\frac{|\langle \varphi, \eta \rangle|}{\|\varphi\| \cdot \|\eta\|} = 0 \text{ if } \|\varphi\| \cdot \|\eta\| = 0 \quad (6.6)$$

を約束する。

【定理6.1】 (情報容量の非負・最小類似・最大類似定理)

$$(イ) \text{ (非負性)} \quad 0 \leq C(\varphi_1 : \varphi_j, j = 2, 3, \dots, n). \quad (6.7)$$

(ロ) (最小類似性；最大相違性)

$$[\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n] = 0 \quad (6.8)$$

が成り立つという意味で、 φ_1 が $\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n$ と直交するとき

$$0 = C(\varphi_1 : \varphi_j, j = 2, 3, \dots, n). \quad (6.9)$$

が成り立つ。

(ハ) (最大類似性；最小相違性)

$$\varphi_1 \neq 0 \text{ が } \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n \text{ の定数 (零を除く) 倍} \quad (6.10)$$

のとき

$$\infty = C(\varphi_1 : \varphi_j, j = 2, 3, \dots, n) \quad (6.11)$$

が成り立つ。

(証明) シュワルツの不等式を適用して得られる不等式

$$0 \leq \frac{|\langle \varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n \rangle|}{\|\varphi_1\| \cdot \|\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n\|} \leq 1 \quad (6.12)$$

より、(イ)が示される。

φ_1 が $\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n$ と直交するとき

$$\frac{|\langle \varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n \rangle|}{\|\varphi_1\| \cdot \|\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n\|} = 0 \quad (6.13)$$

を得，(ロ)が示される．

$\varphi_1 \neq 0$ が $\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$ の定数(零を除く)倍のとき

$$\frac{[\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n]}{|\varphi_1| \cdot |\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n|} = 1 \quad (6.14)$$

を得，(ハ)が示される． □

次の定理6.2は，情報容量 $C(\varphi_1 : \varphi_j, j = 2, 3, \dots, n)$ が $\frac{[\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n]}{|\varphi_1| \cdot |\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n|}$ の偶数積のみより決まることを明らかにしている．

[定理6.2] (情報容量の展開定理)

$$\begin{aligned} C(\varphi_1 : \varphi_j, j = 2, 3, \dots, n) \\ = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \left| \frac{[\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n]}{|\varphi_1| \cdot |\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n|} \right|^{2k} \end{aligned} \quad (6.15)$$

(定理6.2の証明) $C(\varphi_1 : \varphi_j, j = 2, 3, \dots, n)$ の定義式(6.2)に，実変数 x の実数値関数

$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e(1-x)$ についての展開式

$$-\frac{1}{2} \cdot \log_e(1-x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{for } |x| < 1 \quad (6.16)$$

を適用したものである． □

次の定理6.3は，情報容量 $C(\varphi_1 : \varphi_j, j = 2, 3, \dots, n)$ が式(5.3)の各パターン $\varphi_j (j = 1, 2, \dots, n)$ の1次展開式において，式(5.4)を満たす各直交雑音 $(\varphi_j)_\perp (1 \leq j \leq n)$ に無関係に決まる事実を明らかにしている．

[定理6.3] (情報容量の，各直交雑音 $(\varphi_j)_\perp (1 \leq j \leq n)$ の除去定理)

2式(5.3)，(5.4)の各 $\varphi_j (j = 1, 2, \dots, n)$ に対し，

$$\varphi_j' \equiv \sum_{k=1}^n c_k(j) \cdot \phi_k, j = 1, 2, \dots, n \quad (6.17)$$

について，

$$C(\varphi_1' : \varphi_j', j = 2, 3, \dots, n) = C(\varphi_1 : \varphi_j, j = 2, 3, \dots, n) \quad (6.18)$$

(証明) $\varphi_j (j = 1, 2, \dots, n)$ の各1次展開係数 $c_k(j) (k = 1, 2, \dots, n)$ が対応する φ_j' の各1次展開係数に一致するから，

$$|\varphi_1| = |\varphi_1'| \quad \because \text{2式(4.6), (4.7)} \quad (6.19)$$

$$|\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n| = |\varphi_2' \otimes \varphi_3' \otimes \cdots \otimes \varphi_n'| \quad (6.20)$$

$$[\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n] = [\varphi_1', \varphi_2' \otimes \varphi_3' \otimes \cdots \otimes \varphi_n'] \quad \because \text{定理5.1の式(5.7)} \quad (6.21)$$

が成り立ち，情報容量 $C(\varphi_1 : \varphi_j, j = 2, 3, \dots, n)$ の定義式(6.2)から明らかである． □

次の定理6.4は，式(5.5)の外積 $\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$ が $\varphi = \varphi_1$ に歪んで(変形して)いると想定したとき， $\varphi = \varphi_1$ からその歪みを取り去って得られる歪みの対数量である式(6.2)の情報容量 $C(\varphi_1 : \varphi_j, j = 2, 3, \dots, n)$ が，パターン $\varphi \equiv \varphi_1$ とパターン $\eta \equiv \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$ とが互いに似ている程度を表わしていることを解釈ならしめている．

[定理6.4] (零情報容量定理)

(1) 或る非零実定数 c が存在して，

$$\exists j, \exists i (i \neq j) \in L, \forall k \in L, c_k(j) = c \cdot c_k(i) \quad (6.22)$$

が成り立つか、或いは、一般化して、

(2) 列ベクトル $\vec{c}(k)$ の系

$$\vec{c}(k) = \text{col}(c_1(k) \ c_2(k) \ \cdots \ c_n(k)), k=1,2,\dots,n \quad (6.23)$$

が1次従属である

が成り立っていれば、

$$C(\varphi_1 : \varphi_j, j=2,3,\dots,n) = 0. \quad (6.24)$$

(証明) 与えられた条件(1), (2)の少なくとも、1つが成立していれば、式(5.7)の行列式 $[\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_n]$ の性質から、

$$[\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_n] = 0 \quad (6.25)$$

を得、情報容量 $C(\varphi_1 : \varphi_j, j=2,3,\dots,n)$ の定義式(6.2)に代入すれば、本定理6.4の成立は明らかである。

□

第7章 情報容量 $C(T\varphi : T\omega_j, j=2,3,\dots,m)$

第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathbb{C}_j の諸性質を典型的に代表するパターンは式(2.4)の Ω 内の ω_j であるが、このパターンモデル $T\omega_j$ の、式(2.6)の系 $T \cdot \Omega$ と、処理の対象とする問題のパターン φ のモデル $T\varphi$ とに注目し、本章では、 $T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes \cdots \otimes T\omega_m$ が $T\varphi$ へ歪んだ時の情報容量 $C(T\varphi : T\omega_j, j=2,3,\dots,m)$ を計算しよう。

$$J = \{1,2,\dots,m\}, L = \{1,2,\dots,m,m+1\} \quad (7.1)$$

とし、 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ は1次独立な系とする。先ず、 $T\omega_j$ は

$$T\omega_j = \sum_{k \in L} a_k(j) \cdot \phi_k + (T\omega_j)_\perp \quad (7.2)$$

$$\text{ここに、} \forall k \in L, ((T\omega_j)_\perp, \phi_k) = 0 \quad (7.3)$$

と1次展開される。

次に、 $\{T\omega_j\}_{j \in J}$ は1次独立な系であるから、 $T\varphi$ は

$$T\varphi = \sum_{j \in J} d_j(T\varphi) \cdot T\omega_j + (T\varphi)_\perp \quad (7.4)$$

$$\text{ここに、} \forall j \in J, ((T\varphi)_\perp, T\omega_j) = 0 \quad (7.5)$$

と1次展開される。式(7.4)の剰余項 $(T\varphi)_\perp$ は

$$(T\varphi)_\perp = \sum_{k \in L} e_k \cdot \phi_k + ((T\varphi)_\perp)_\perp \quad (7.6)$$

$$\text{ここに、} \forall k \in L, (((T\varphi)_\perp)_\perp, \phi_k) = 0 \quad (7.7)$$

と1次展開される。

このとき、

$$T\varphi = \sum_{j \in J} d_j(T\varphi) \cdot T\omega_j + (T\varphi)_\perp \quad \because \text{式(7.4)}$$

$$= \sum_{j \in J} d_j(T\varphi) \cdot [\sum_{k \in L} a_k(j) \cdot \phi_k + (T\omega_j)_\perp] + (T\varphi)_\perp \quad \because \text{式(7.2)}$$

$$= \sum_{k \in L} [\sum_{j \in J} d_j(T\varphi) \cdot a_k(j)] \cdot \phi_k + \sum_{j \in J} d_j(T\varphi) \cdot (T\omega_j)_\perp + \sum_{k \in L} e_k \cdot \phi_k + ((T\varphi)_\perp)_\perp$$

\because 総和順序の交換と、式(7.6)

鈴木昇一：パターンの変形量を外積演算による情報量で捉えよう

$$= \sum_{k \in L} [\sum_{j \in J} d_j(T\varphi) \cdot a_k(j) + e_k] \cdot \phi_k + \sum_{j \in J} d_j(T\varphi) \cdot (T\omega_j)_\perp + ((T\varphi)_\perp)_\perp \quad (7.8)$$

であるから, $q_k(T\varphi)$ を

$$q_k(T\varphi) = \sum_{j \in J} d_j(T\varphi) \cdot a_k(j) + e_k, k \in L \quad (7.9)$$

とおくと, $T\varphi$ は,

$$T\varphi = \sum_{k \in L} q_k(T\varphi) \cdot \phi_k + \sum_{j \in J} d_j(T\varphi) \cdot (T\omega_j)_\perp + ((T\varphi)_\perp)_\perp \quad (7.10)$$

ここに,

$$\forall k \in L, (\sum_{j \in J} d_j(T\varphi) \cdot (T\omega_j)_\perp + ((T\varphi)_\perp)_\perp, \phi_k) = 0 \quad \because \text{2式(7.3), (7.7)} \quad (7.11)$$

と表示される. 式(7.1)の J, L に注意して,

$$\begin{aligned} & [T\varphi, T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes \cdots \otimes T\omega_m] \\ &= \begin{vmatrix} q_1(T\varphi) & a_1(1) & a_1(2) & \cdots & a_1(m) \\ q_2(T\varphi) & a_2(1) & a_2(2) & \cdots & a_2(m) \\ q_3(T\varphi) & a_3(1) & a_3(2) & \cdots & a_3(m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{m+1}(T\varphi) & a_{m+1}(1) & a_{m+1}(2) & \cdots & a_{m+1}(m) \end{vmatrix} \\ & \quad \because \text{2式(7.2), (7.3)} \\ &= \sum_{j \in J} d_j(T\varphi) \cdot \begin{vmatrix} a_1(j) & a_1(1) & a_1(2) & \cdots & a_1(m) \\ a_2(j) & a_2(1) & a_2(2) & \cdots & a_2(m) \\ a_3(j) & a_3(1) & a_3(2) & \cdots & a_3(m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m+1}(j) & a_{m+1}(1) & a_{m+1}(2) & \cdots & a_{m+1}(m) \end{vmatrix} \\ & \quad + \begin{vmatrix} e_1 & a_1(1) & a_1(2) & \cdots & a_1(m) \\ e_2 & a_2(1) & a_2(2) & \cdots & a_2(m) \\ e_3 & a_3(1) & a_3(2) & \cdots & a_3(m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{m+1} & a_{m+1}(1) & a_{m+1}(2) & \cdots & a_{m+1}(m) \end{vmatrix} \\ & \quad (7.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} e_1 & a_1(1) & a_1(2) & \cdots & a_1(m) \\ e_2 & a_2(1) & a_2(2) & \cdots & a_2(m) \\ e_3 & a_3(1) & a_3(2) & \cdots & a_3(m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{m+1} & a_{m+1}(1) & a_{m+1}(2) & \cdots & a_{m+1}(m) \end{vmatrix} \\ & \quad \because \text{式(7.1)} \\ & \quad (7.13) \end{aligned}$$

と計算される.

2つのノルム $|T\varphi|$, $|T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes \cdots \otimes T\omega_m|$ を求めておこう. 先ず,

$$|T\varphi| = \sqrt{\sum_{k \in L} q_k(T\varphi)^2} \quad \because \text{式(4.7)} \quad (7.14)$$

であり、次に、式(5.5)の外積の定義に注意して、 $(m+1)$ 変数の関数 g を

$$g(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_{m+1}) \equiv T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes \dots \otimes T\omega_m =$$

$$\begin{vmatrix} \phi_1 & a_1(1) & a_1(2) & \dots & a_1(m) \\ \phi_2 & a_2(1) & a_2(2) & \dots & a_2(m) \\ \phi_3 & a_3(1) & a_3(2) & \dots & a_3(m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{m+1} & a_{m+1}(1) & a_{m+1}(2) & \dots & a_{m+1}(m) \end{vmatrix}$$

$$(7.15)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} &|T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes \dots \otimes T\omega_m| \\ &= [g(1,0,0,\dots,0)^2 + g(0,1,0,\dots,0)^2 + g(0,0,1,\dots,0)^2 + g(0,0,0,\dots,1)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (7.16)$$

と求められる。

3式(7.13), (7.14), (7.16)が得られたから、式(6.2)により、 $T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes \dots \otimes T\omega_m$ が $T\varphi$ へ歪んだ時の情報容量

$$\begin{aligned} C(T\varphi: T\omega_j, j=1,2,3,\dots,m) &= C(T\varphi: T\omega_1, T\omega_2, T\omega_3, \dots, T\omega_m) \\ &\equiv -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \frac{|[T\varphi, T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes T\omega_3 \otimes \dots \otimes T\omega_m]|^2}{|T\varphi| \cdot |T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes T\omega_3 \otimes \dots \otimes T\omega_m|} \right] \end{aligned} \quad (7.17)$$

が求められる。

第8章 情報容量 $C_i(T\varphi) \equiv C(T\omega_1, T\omega_2, T\omega_3, \dots, T\omega_{i-1}, T\varphi, T\omega_{i+1}, \dots, T\omega_m)$ の応用

本章では、カテゴリ番号集合 J , 1次独立な系の元の添え字の集合 L を、式(7.1)と異なり、

$$J = \{1, 2, \dots, m\}, L = \{1, 2, \dots, m\} \quad (8.1)$$

と設定して、この設定式(8.1)の下で、2つの情報容量

$$C_i(T\varphi) \equiv C(T\omega_1, T\omega_2, T\omega_3, \dots, T\omega_{i-1}, T\varphi, T\omega_{i+1}, \dots, T\omega_m) \quad (8.2)$$

$$C(T \cdot \Omega) \equiv C(T\omega_1, T\omega_2, T\omega_3, \dots, T\omega_{i-1}, T\omega_i, T\omega_{i+1}, \dots, T\omega_m) \quad (8.3)$$

を定義して、その2つの応用を提案する。

式(6.2)で定義されている情報容量 $C(\varphi_1: \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n)$ の代りに、 $\varphi_k (1 \leq k \leq i-1)$ の代りに $T\omega_k$ を、更に $\varphi_k (i+1 \leq k \leq m)$ の代りに $T\omega_k$ を、最後に、 φ_i の代りに処理の対象とする問題のパターン φ のモデル $T\varphi$ を採用して、式(8.2)の情報容量 $C_i(T\varphi)$ を考える。

公式

$$C \equiv -\frac{1}{2} \cdot \log_e [1 - |x|^2] \Leftrightarrow |x| = \sqrt{1 - \exp[-2 \cdot C]} \quad (8.3)$$

を適用すれば、情報容量の $C(\varphi_1: \varphi_j, j=2,3,\dots,n)$ の定義式(6.2)より、

$$\begin{aligned} D_i(T\varphi) &\equiv \\ \sqrt{1 - \exp[-2 \cdot C_i(T\varphi)]} &= \frac{|[T\omega_1, T\omega_2 \otimes T\omega_2 \otimes \dots \otimes T\omega_{i-1} \otimes T\varphi \otimes T\omega_{i+1} \otimes \dots \otimes T\omega_m]|}{|T\omega_1| \cdot |T\omega_2 \otimes T\omega_2 \otimes \dots \otimes T\omega_{i-1} \otimes T\varphi \otimes T\omega_{i+1} \otimes \dots \otimes T\omega_m|} \end{aligned} \quad (8.5)$$

が成り立つ.

式(8.2)の情報容量 $C_i(T\varphi)$ の応用として, 次の2つの使用法1, 2を提案できよう.

[使用法1]

$$\max_{i=1-m} D_i(T\varphi) = D_{i_{\max}}(T\varphi) \quad (8.6)$$

つまり,

$$\max_{i=1-m} \sqrt{1 - \exp[-2 \cdot C_i(T\varphi)]} = \sqrt{1 - \exp[-2 \cdot C_{i_{\max}}(T\varphi)]} \quad (8.7)$$

と,

$$\min_{i=1-m} D_i(T\varphi) = D_{i_{\min}}(T\varphi) \quad (8.8)$$

つまり,

$$\min_{i=1-m} \sqrt{1 - \exp[-2 \cdot C_i(T\varphi)]} = \sqrt{1 - \exp[-2 \cdot C_{i_{\min}}(T\varphi)]} \quad (8.9)$$

であれば,

$$T\varphi \text{ は } T\omega_1, T\omega_2, T\omega_3, \dots, T\omega_{i-1}, T\omega_i, T\omega_{i+1}, \dots, T\omega_m \text{ の内, } T\omega_{i_{\max}} \text{ と最も似ていない} \quad (8.10)$$

といえ,

$$T\varphi \text{ は } T\omega_1, T\omega_2, T\omega_3, \dots, T\omega_{i-1}, T\omega_i, T\omega_{i+1}, \dots, T\omega_m \text{ の内, } T\omega_{i_{\min}} \text{ と最も似ている} \quad (8.11)$$

といえる. \square

式(8.3)の情報容量 $C(T \cdot \Omega)$ をも導入すると, 次の使用法2が提案される.

[使用法2]

$$\begin{aligned} \arg \min_{i=1-m} |C_i(T\varphi) - C(T \cdot \Omega)| \\ = j \in J \end{aligned} \quad (8.12)$$

のとき,

RECOGNITRON = $\langle \Phi_b, T, SM, BSC \rangle$ による入力パターン φ の認識結果が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathbb{C}_j であること (8.13)

が望ましい. 何故ならば, 処理の対象とする問題のパターン φ のモデル $T\varphi$ は, 式(2.6)の, すべての代表パターンモデルを並べた元

$$T\omega_1, T\omega_2, T\omega_3, \dots, T\omega_{j-1}, T\omega_j, T\omega_{j+1}, \dots, T\omega_m \quad (8.14)$$

の中で, 第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathbb{C}_j の代表パターン ω_j のモデル $T\omega_j$ と最も従属性が強いと考えられるからである. \square

第9章 類似度関数 SM の構成

本章では, 式(6.2)の情報容量 $C(\varphi_1 : \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n)$ は, φ_1 が外積で定義されているパターン $\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n$ と似ている程度であることを考慮して, SS理論 [B3], [B4] でのaxiom 2を満たす式(A1.13)の類似度関数 SM を3種類, 構成する.

9.1 SS理論でのaxiom 2と類似度関数 SM

本章で構成される式(A1.13)の類似度関数 SM は, SS理論でのaxiom 2を満たさなければならない. このaxiom 2を解説しておこう.

任意のパターン $\varphi \in \Phi$ が, 記憶されている代表的なパターンからなる有限個の元からなる集合 Ω

内の任意の代表パターン ω_j とどの程度似ているか、違っているかを計量する手段を設定することが、認識の働きを確保するために必要とされる。類似性計量のための手段が式(A1.13)の類似度関数 SM である。

“正常なパターン” (well-formed pattern) は、ある1つのカテゴリ (category) \mathfrak{C}_j (第 $j \in J$ 番目の類概念) のみに帰属しているものとし、このような \mathfrak{C}_j の集まり (有限集合)

$$\mathfrak{C}(J) = \{\mathfrak{C}_j | j \in J\} \tag{9.1}$$

を想定する。 \mathfrak{C}_j の備えている性質を典型的に持っている (第 $j \in J$ 番目の) 代表パターン (prototypical pattern) ω_j ($\neq 0$) を1つ選定する。 \mathfrak{C}_j は、典型 (prototype) としての代表パターン ω_j を中心とした緩やかな (第 $j \in J$ 番目の) カテゴリであることを仮定したことに注意しておく。ここに、式(2.4)の $\Omega \equiv \{\omega_j | j \in J\} \subset \Phi$ が式(9.3)の全カテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J)$ に1対1に対応する代表パターンの集合である。式(2.4)の系 Ω は、

$$\text{複素定数 } a_j \text{ の組 } \{a_j | j \in J\} \text{ について } \sum_{j \in J} a_j \cdot \omega_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J, a_j = 0 \tag{9.2}$$

が成立しているという意味で、1次独立 (linearly independent) でなければならない。 Ω を視察で決定できる場合があるが、訓練パターン系列から Ω を適応的に決定する方法については、文献 [B3] の付録Iで説明されている。

Axiom 1を満たす式(2.3)のモデル構成作用素 T によって、式(2.4)の代表パターン集合 Ω が変換されて得られる式(2.6)の系 $T \cdot \Omega \equiv \{T\omega | \omega \in \Omega\}$ も1次独立であると要請する。このとき、式(A1.13)の類似度関数 SM を導入し、

$$SM(\varphi, \omega_j) = 1, 0 \text{ に従って、パターン } \varphi \in \Phi \text{ は各々、 } \omega_j \text{ と確定的な類似度関係、相違関係にあり、また、 } 0 < SM(\varphi, \omega_j) < 1 \text{ の場合は、あいまいな類似・相違関係にある} \tag{9.3}$$

と、 SM を解釈しよう。

式(A1.13)の関数 SM は次のaxiom 2を満たすように構成されねばならない。Axiom 2の(i)では、クロネッカー (Kronecker) の δ 記号

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{if} \quad i = j, = 0 \quad \text{if} \quad i \neq j \tag{9.4}$$

が導入されているが、特にaxiom 2の(i)なるこの正規直交性は、候補カテゴリの分離・抽出が効果的に行われ、

$$\text{候補カテゴリの鋭利な削減 (a sharp reduction)} \tag{9.5}$$

をもたらすために要請されている。

Axiom 2 (類似度関数 SM の満たすべき公理)

(i) (正規直交性 ; orthonormality)

$$\forall i, \forall j, SM(\omega_i, \omega_j) = \delta_{ij} .$$

(ii) (規格化条件, 確率性, 正規性 ; probability condition, normalization)

$$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} SM(\varphi, \omega_j) = 1 .$$

(iii) (写像 T の下での不変性 ; invariance under mapping T)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j) . \quad \square$$

上述のaxiom 2の(i)~(iii)について簡単に説明しておこう。

SM の解釈式(9.3)の下で、(i)は、相異なるカテゴリの代表パターン同士は確定的な相違関係にあり、同一カテゴリの代表パターン同士は確定的な類似度関係にあることを要請している。(ii)は、

任意のパターン φ について、すべてのカテゴリについての類似度の総和は1であることを要請している。つまり、パターン φ は少なくとも1つのカテゴリ \mathfrak{C}_j に所属していることを要請している。(iii) は、パターンモデル $T\varphi$ は原パターン φ と任意のカテゴリについて同一類似度を持つことを要請している。ということは、パターンモデル $T\varphi$ を見たり、聞いたりするならば、原パターン φ と同じように見えたり、聞こえたりすること(同一知覚原理)を要請していることになる。

尚、第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j の生起確率である非負実数 $p(\mathfrak{C}_j)$ を、2条件

$$[\forall j \in J, 0 < p(\mathfrak{C}_j) < 1] \wedge [\sum_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) = 1] \quad (9.6)$$

を満たすものとして導入しておく。

9.2 式(8.2)の $C_i(T\varphi)$ 、式(8.3)の情報容量 $C(T \cdot \Omega)$ 、式(8.5)の $D_i(T\varphi)$ の導入

第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j の代表パターン ω_j のモデル $T\omega_j$ の1次展開式(7.2)から得られる列ベクトル $\bar{a}(k)$ の系

$$\bar{a}(k) = \text{col}(a_1(k) \ a_2(k) \ \cdots \ a_m(k)), k \in J \equiv \{1, 2, \dots, m\} \quad (9.7)$$

が1次独立であるとしよう。この時、内積 $[\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n]$ の表示式(5.7)と、情報容量 $C(\varphi_1 : \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n)$ の定義式(6.2)とから、式(8.3)の情報容量 $C(T \cdot \Omega)$ につき、

仮定(の正仮定) $L = J = \{1, 2, \dots, m\}$ のとき、

$$C(T \cdot \Omega) \equiv C(T\omega_1, T\omega_2, T\omega_3, \dots, T\omega_{i-1}, T\omega_i, T\omega_{i+1}, \dots, T\omega_m) > 0 \quad (9.8)$$

が成り立つことがわかる。

式(8.2)の $C_i(T\varphi)$ を導入し、式(8.5)の $D_i(T\varphi) \equiv \sqrt{1 - \exp[-2C_i(T\varphi)]}$ をも定義する。

以後、特に断らない限り、カテゴリ番号集合 J 、1次独立な系の元の添え字の集合 L の設定式(8.1)の下で、考えよう。

9.3 種類1の類似度関数 SM

$$D_i(T\omega_j) = \sqrt{1 - \exp[-2C_i(T\omega_j)]} \quad \begin{cases} > 0 & \text{if } j = i \\ = 0 & \text{if } j \neq i \end{cases} \quad (9.9)$$

に注意すると、次の定理9.1のように、axiom 2を満たす付録Aの式(A.1.13)の類似度関数 SM が構成される。

[定理9.1] (外積によるaxiom 2を満たす類似度関数 SM の構成定理1)

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} \frac{D_j(T\varphi)^2}{\sum_{i \in J} D_i(T\varphi)^2} \cdots \sum_{i \in J} D_i(T\varphi)^2 > 0 \text{ のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j) (\mathfrak{C}_j \text{ の生起確率}) \cdots \sum_{i \in J} D_i(T\varphi)^2 = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (9.10)$$

と定義される類似度関数 SM はSS理論におけるaxiom 2 [B3], [B4] を満たす。

(証明) axiom 2の(i)(正規直交性)、(ii)(規格化条件)、(iii)(T -不変性)の成立を確かめればよい。(i)の成立は、 $D_i(T\omega_j)$ の、式(9.9)の上述の性質から明らか。(ii)の成立は、の定義から明らか。

か. (iii)の成立は, SS理論 [B3], [B4] のaxiom 1, (iii)の後半 $T \cdot T = T$ より明らか. □

9.4 種類2の類似度関数 SM

$$E_j(\varphi) \equiv \max_{i \in J - \{j\}} D_i(T\varphi)^2 \tag{9.11}$$

と定義される $E_j(\varphi)$ について,

$$E_j(\omega_k) = \begin{cases} \max_{i \in J - \{k\}} D_i(T\omega_k)^2 = 0 & \text{if } j = k \\ \max_{i \in J - \{j\}} D_i(T\omega_k)^2 = D_k(T\omega_k)^2 > 0 & \text{if } j \neq k \end{cases} \tag{9.12}$$

が成り立つ.

このとき, 次の定理9.2のように, axiom 2を満たす付録Aの式(2.39)の類似度関数 SM が構成される.

[定理9.2] (外積によるaxiom 2を満たす類似度関数 SM の構成定理2)

$$SM(\varphi, \omega_j) = \frac{\frac{1}{E_j(\varphi)}}{\sum_{i \in J} \frac{1}{E_i(\varphi)}} \tag{9.13}$$

と定義される類似度関数 SM はSS理論 [B3], [B4] におけるaxiom 2を満たす.

(証明) axiom 2の (i) (正規直交性), (ii) (規格化条件), (iii) (T -不変性)の成立を確かめればよい. (i)の成立は, $E_j(\omega_k)$ の, 式(9.12)の上述の性質から明らか. (ii)の成立は, の定義から明らか. (iii)の成立は, SS理論 [B3], [B4] のaxiom 1, (iii)の後半 $T \cdot T = T$ より明らか. □

9.5 種類3の類似度関数 SM

条件

$$\forall k \in L = J, \phi_k \equiv T\omega_k \tag{9.14}$$

の下で考える.

$$T\omega_j = \sum_{k \in J} c_k(j) \cdot T\omega_k + (T\omega_j)_\perp \tag{9.15}$$

$$\text{ここに, } \forall k \in L, ((T\omega_j)_\perp, T\omega_k) = 0 \tag{9.16}$$

であるとき,

$$\forall j \in J = L, (T\omega_j)_\perp = 0 \tag{9.17}$$

$$c_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = i \\ 0 & \text{if } j \neq i \end{cases} \tag{9.18}$$

が成り立つ. よって,

$$|T\omega_1| = 1 \tag{9.19}$$

$$[T\omega_1, T\omega_2 \otimes T\omega_3 \otimes \dots \otimes T\omega_{i-1} \otimes T\omega_j \otimes T\omega_{i+1} \otimes \dots \otimes T\omega_n] =$$

$$\begin{cases} 1 & \text{if } j=i \\ 0 & \text{if } j \neq i \end{cases} \quad (9.20)$$

が成り立つ。更に,

$$T\omega_2 \otimes T\omega_3 \otimes \cdots \otimes T\omega_{i-1} \otimes T\omega_j \otimes T\omega_{i+1} \otimes \cdots \otimes T\omega_n = 0 \quad \text{if } j \in J - \{1\} - \{i\} \quad (9.21)$$

がわかり,

$$\begin{aligned} & T\omega_2 \otimes T\omega_3 \otimes \cdots \otimes T\omega_{i-1} \otimes T\omega_i \otimes T\omega_{i+1} \otimes \cdots \otimes T\omega_n = \\ & = \begin{vmatrix} T\omega_1 & c_1(2) & c_1(3) & \cdots & c_1(m) \\ T\omega_2 & c_2(2) & c_2(3) & \cdots & c_2(m) \\ T\omega_3 & c_3(2) & c_3(3) & \cdots & c_3(m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T\omega_m & c_m(2) & c_m(3) & \cdots & c_m(m) \end{vmatrix} \\ & = T\omega_1 \end{aligned} \quad (9.22)$$

と計算され,

$$|T\omega_2 \otimes T\omega_3 \otimes \cdots \otimes T\omega_{i-1} \otimes T\omega_i \otimes T\omega_{i+1} \otimes \cdots \otimes T\omega_n| = |T\omega_1| = 1 \quad (9.23)$$

もわかる。よって, 約束式(4.8)を考慮し, $j \in J - \{1\}$ と, $j \in \{1\}$ とに分けて考えれば,

$$\begin{aligned} & \frac{|T\omega_1, T\omega_2 \otimes T\omega_3 \otimes \cdots \otimes T\omega_{i-1} \otimes T\omega_j \otimes T\omega_{i+1} \otimes \cdots \otimes T\omega_n|}{|T\omega_1| \cdot |T\omega_2 \otimes T\omega_3 \otimes \cdots \otimes T\omega_{i-1} \otimes T\omega_j \otimes T\omega_{i+1} \otimes \cdots \otimes T\omega_n|} = \\ & \begin{cases} 1 & \text{if } j=i \\ 0 & \text{if } j \neq i \end{cases} \end{aligned} \quad (9.24)$$

が成立し, それ故,

$$\begin{aligned} & C_i(T\omega_j) = \\ & \begin{cases} -\frac{1}{2} \cdot \log_e[1-|1|^2] = \infty & \text{if } j=i \\ -\frac{1}{2} \cdot \log_e[1-|0|^2] = 0 & \text{if } j \neq i \end{cases} \end{aligned} \quad (9.25)$$

が成立することがわかる。

よって, 次の定理9.3のように, axiom 2を満たす付録Aの式(A1.13)の類似度関数 SM が構成される。

[定理9.3] (情報容量による axiom 2を満たす類似度関数 SM の構成定理)

$$\begin{aligned} & SM(\varphi, \omega_j) = \\ & \begin{cases} \frac{C_j(T\varphi)}{\sum_{i \in J} C_i(T\varphi)} \cdots \sum_{i \in J} C_i(T\varphi) > 0 \text{ のとき} \\ p(\mathbb{C}_j) (\mathbb{C}_j \text{ の生起確率}) \cdots \sum_{i \in J} C_i(T\varphi) = 0 \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned} \quad (9.26)$$

と定義される類似度関数 SM はSS理論における axiom 2 [B3], [B4] を満たす。

(証明) axiom 2の (i) (正規直交性), (ii) (規格化条件), (iii) (T -不変性)の成立を確かめればよい。(i)の成立は, $C_i(T\omega_j)$ の, 式(9.25)の上述の性質から明らか。(ii)の成立は, SM の定義式

(9.26)から明らか. (iii)の成立は, SS理論 [B3], [B4] のaxiom 1, (iii)の後半 $T \cdot T = T$ より明らか. □

第10章 むすび

S.Suzukiは, パターン $\varphi \in \Phi$ の意味領域としてカテゴリ帰属知識空間 $\langle \Phi, 2^J \rangle$ を考えた. カテゴリ帰属知識とは, 認識システムが入力パターン $\varphi \in \Phi$ に対し持つ知識であり, パターン $\varphi \in \Phi$ と, このパターンが帰属する複数の候補カテゴリ

$$\mathfrak{C}(\lambda) \equiv \{ \mathfrak{C}_j \mid j \in \lambda \subseteq J \} \tag{10.1}$$

の番号のリスト $\lambda \in 2^J$ とのなす順序対 $\langle \varphi, \lambda \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$ で表される.

意味領域 $\langle \Phi, 2^J \rangle$ は変形されていないこと (undeformedness) の度合いを表す半順序 [B4] \leq_{Δ}^* が与えられた集合である. 任意のカテゴリ番号 $j \in J$ について, カテゴリ帰属知識 $\langle T\omega_j, [j] \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$ は最も変形されていないものの1つである.

カテゴリ帰属知識を変換する写像 (意味変換写像) は, 半順序 \leq_{Δ}^* を保存する意味で単調であり, しかも, 増加列の極限を保存する意味で連続であるように設定される.

カテゴリ帰属知識空間 $\langle \Phi, 2^J \rangle$ 上の連続関数 (意味変換写像) の最小不動点を求める働きがS.Suzukiの万能性連想型認識システムRECONITRONの連想形認識の働きであると解釈される. 求められた最小不動点が入力パターン $\varphi \in \Phi$ の意味 (表式的意味) である.

上述のS.Suzukiの理論 (SS理論) [B3], [B4] で, 会話音声をあつかうのには, これまでのパターン $\varphi(t)$ の代りに,

$$\varphi(t; s) + \frac{dt}{ds} \cdot \frac{\partial \varphi(t; s)}{\partial t}, \text{ ここに, } t, s \text{ は各々, 実時刻変数, 仮想時刻変数} \tag{10.2}$$

を扱えばよい. また, 動画像を扱うのには, これまでのパターン $\varphi(x_1, x_2)$ の代りに,

$$\varphi(x_1, x_2; t) + \frac{dx_1}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi(x_1, x_2; t)}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi(x_1, x_2; t)}{\partial x_2}, \text{ ここに, } t \text{ は時刻変数} \tag{10.3}$$

を扱えばよい. この配慮の下で, SS理論は, 会話音声, 動画像をも扱うことが可能となる. この種の研究を推し進めなければならない.

パターン φ からパターン η への間の角を θ とすると, $\cos \theta, \sin \theta$ は各々, パターン φ がパターン η に似ている程度, パターン φ がパターン η から異なっている程度を反映した規格化された量である.

よって, パターン φ をパターン η, φ を含む超平面に垂直な単位ベクトルとすれば,

$$\varphi * \eta \equiv [\varphi, \eta] \cdot \varphi = |\varphi| \cdot |\eta| \cdot \cos \theta \cdot \varphi \tag{10.4}$$

$$\varphi \times \eta \equiv |\varphi| \cdot |\eta| \cdot \sin \theta \cdot \varphi = \sqrt{|\varphi|^2 \cdot |\eta|^2 - [[\varphi, \eta]]^2} \cdot \varphi \tag{10.5}$$

は, 各々, パターン φ がパターン η に似ている程度, パターン φ がパターン η から異なっている程度を反映した規格化された量である. 内積パターン $\varphi * \eta$, 外積パターン $\varphi \times \eta$ には, 類似性 (1次従属性の程度), 相違性 (1次独立性の程度) というこのような意味が付与されてよい.

更に,

$$C(\varphi : \eta) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e |\sin^2 \theta| \tag{10.6}$$

と表現できる (本論文で提案された外積で定義された) 情報容量には, 次のような情報論的解釈が可能である:

パターン φ の中にパターン η を蓄えることのできる情報の量はパターン φ の中にパターン η が存在する程度を表わす情報量(パターン φ がパターン η に似ている程度を表わす情報量)であろう. この量は, 式(K.6)の情報容量

$$C(\varphi:\eta) \equiv -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \sqrt{\frac{[\varphi, \eta]^2}{|\varphi| \cdot |\eta|}} \right] \quad (10.7)$$

である. パターン φ の中にパターン φ を蓄えることのできる情報の量は

$$C(\varphi:\varphi) = \infty \quad \because \quad \frac{[\varphi, \varphi]}{|\varphi| \cdot |\varphi|} = 1 \quad \text{if } |\varphi| \neq 0 \quad (10.8)$$

であることがわかり, この解釈が妥当である理由の一端が理解できる.

パターン φ_1 が $(n-1)(\geq 2)$ 個のパターン

$$\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n \quad (10.9)$$

の中に蓄えることのできる情報の量はパターン φ の中に式(5.5)の外積パターン $\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n$ が存在する程度を表わす情報量(パターン φ が外積パターン $\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n$ に似ている程度を表わす情報量)であろう. この量は, 式(6.2)の情報容量の情報容量 $C(\varphi_1:\varphi_j, j=2,3,\dots,n)$ である. \square

更に, パターンモデル $T\varphi$ は, モデル $T\varphi$ を見たり聞いたりしたならば, 原パターン φ と同じように見えたり聞こえたりするような性質を持ったパターンであるから(同一知覚原理),

- (イ) $C(\varphi:\varphi) = \infty$ は $C(T\varphi:T\varphi) = \infty$ に置き換えられ,
- (ロ) $C(T\varphi:T\eta)$ は $C(T\varphi:T\eta)$ に置き換えられ,
- (ハ) $C(\varphi_1:\varphi_j, j=2,3,\dots,n)$ は $C(T\varphi_1:T\varphi_j, j=2,3,\dots,n)$ に置き換えられる

ことになる. そうすると,

$$C(T\varphi:\varphi) \approx \infty \quad (10.10)$$

が成立するパターン φ が多く存在するような1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ と式(2.3)のモデル構成作用素 T とが選ばれていなければならない.

パターン情報処理の場面では, 入力パターンが記憶しているパターンとどの程度, 似ているかを類似度として計量しなければならないことがしばしば要求される.

今注目しているパターンが記憶している有限個のパターンの内のどの1つのパターンと最も似ているかかを簡単に計量するには,

- (1) パターン間の違いを測ってその逆数を規格化して類似度を求めるのがよいことを指摘した. この際,
 - (2) 原パターン φ の代りに, 原パターン φ と同じ感性を与えるそのパターンモデル $T\varphi$ を使って, このモデル $T\varphi$ と記憶しているパターン ω のモデル $T\omega$ との違いを測ることが重要であった.
 - (3) 最大の変形量から実際に変形している量を差し引いて得られる量は, 極限まで変形していない余裕量であると考えることができ, パターン間の違いとは, この極限まで変形していない余裕量である
- と想定したことが本研究の最大の独創性であった. そして,
- (4) 有限個のパターンの外積を提案し, パターンのこの外積で変形量を定義するもの, 本研究の独創性であった.
 - (5) 極限まで変形していない余裕量は, シヤノンの情報理論での通信容量(受信側で取り去られる

平均的な不確定さの最大値)と対応して意味付けられるという指摘も、本研究の独創性であった。

以上の5つの考え(1)～(5)の独創性で、

(6) 有限個のパターンが蓄えることの出来る最大の情報容量が提案され、更に、S.Suzukiの提案したaxiom 2を満たすように、

(7) 画像認識・画像理解にその有効な適用例がある多段階帰納推理メカニズムを内蔵した万能性連想型認識システムRECONITRONを構成するのに必要な類似度関数 SM が提案された。

今注目しているパターンが記憶している有限個のパターンの内のどの1つのパターンと最も似ているかかを簡単に計量するには、パターン間の違いを測ってその逆数を規格化するのがよい。この際、原パターン ϕ の代りに、原パターン ϕ と同じ感性を与えるそのパターンモデル $T\phi$ を使って、違いを測ることが重要である。

パターン間の違いとは、最大の変形量から実際に変形している量を差し引いて得られる量で、実際に取り去られる変形量(極限まで変形していない余裕量)と考えてみよう。この想定が本研究の最大の独創性であった。そして、変形量をパターンの外積で定義するのも、本研究の独創性であった。

実際に取り去られる変形量は、シャノンの情報理論での通信容量(受信側で取り去られる平均的な不確定さの最大値)から意味付けられるという指摘も、本研究の独創性であった。

以上の考えで、有限個のパターンが蓄えることの出来る情報容量を提案し、S.Suzukiの提案し、画像理解にその有効な適用例がある万能性連想型認識システムRECONITRONを構成するのに必要な類似度関数 SM が、情報容量を使用し、定理9.3で提案された。

文 献 A

- [A 1] 吉田耕作, 河田敬義, 岩村つらね: 位相解析の基礎, 岩波書店, May 1963
- [A 2] 青木利夫, 高橋渉: 集合・位相空間要論, 培風館, Sept.1979
- [A 3] Angus E.Taylor, David C.Lay: Introduction to function analysis, John Wiley & Sons, Inc., 1980
- [A 4] Gilbert G.Walter: Wavelets and other orthogonal systems with applications, CRC Press, Inc., 1994
- [A 5] Andrzej Cichocki, Rolf Unbehauen: Neural networks for optimization and signal processing, John Wiley & Sons, Mar.1994
- [A 6] Abhijit S.Pandya and Robert B.Macy: Pattern recognition with neural networks in C++, A CRC Book Published in Cooperation with IEEE, 1996
- [A 7] Luc Devroye, Lászlo Györfi and Gábor Lugosi: A probabilistic theory of pattern recognition, Springer-Verlag New York.Inc., 1996
- [A 8] E.クライツィグ: 数値解析(原著第8版), 田村義保訳, 近藤次郎・堀素夫監訳, 培風館, Dec.2003
- [A 9] M.シュピッツァー: 脳回路網のなかの精神 ニューラルネットが描く精神, 村井俊哉・山岸洋共訳, 株式会社 新曜社, Nov.2001
- [A10] 鳥脇純一郎: 認識工学(一パターン認識とその応用一), コロナ社(テレビジョン学会教科書シリーズ9), コロナ社, Mar.1993
- [A10] 酒井幸市: デジタル画像処理入門, コロナ社, Aug.1998

- [A11] 太原育夫：人工知能の基礎知識(コンピュータサイエンス大学講座)，近代科学社，Sept.1988
- [A12] 公文俊平：情報学がわかる.AREA Mook Asahi Shimbun Extra Report&Analysis Number 42)，ASAHI SHIMBUN, 1998
- [A13] 美濃導彦，西田正吾：情報メディア工学(新世代工学シリーズ)，オーム社，June 1999
- [A14] 安西祐一郎：認識と学習(岩波講座ソフトウェア科学 16)，岩波書店，Dec.2000
- [A15] 安居院猛，長尾智晴：画像の処理と認識，昭晃堂，April.2000
- [A16] 今井聖：音声認識(情報・電子入門シリーズ⑩)，共立出版，Nov.1995
- [A17] 瀧保夫；通信方式(電気通信講座19)，コロナ社，電気通信学会編，June 1964
- [A18] 安西祐一郎：認知科学と人工知能(計算機科学/ソフトウェア技術講座17)，共立出版，p.17, Nov.1987
- [A19] Shai Avidan：Support Vector Tracking, IEEE Trans.on pattern analysis and machine intelligence, vol.26, no.8, pp.1064-1072, Aug.2004
- [A20] 石井健一郎，上田修功，前田英作，村瀬洋：わかりやすいパターン認識，オーム社，2000
- [A21] 吉田耕作：近代解析，共立出版，Dec.1963
- [A22] Da0-Qiang Zhang, Song-Can Chen：A comment on alternative c-means clustering algorithms, Pattern Recognition, vol.37, pp.173-174, 2004
- [A23] スミルノフ：高等数学教程⑩ v 巻第2分冊，福原満洲雄訳者代表，共立出版，Mar.1966
- [A24] C.K.Chow and S.S.M.Wang：Sequential classification of patient recovery patterns after coronary artery bypass graft surgery, Computers and Biomedical Research, vol.12, pp.589-613, 1979
- [A25] 福村晃夫：情報理論(情報工学講座3)，コロナ社，Jun.1970

文 献 B

- [B 1] 鈴木昇一：認識工学，柏書房，Feb.1975
- [B 2] 鈴木昇一：ニューラルネットの新数理，近代文芸社，Sept.1996
- [B 3] 鈴木昇一：パターン認識問題の数理的一般解決，近代文芸社，June 1997
- [B 4] 鈴木昇一：認識知能情報論の新展開，近代文芸社，Aug.1998
- [B 5] 鈴木昇一：パターンのエントロピーモデル，電子情報通信学会論文誌(D-II)，vol.J77-D-II, no.10, pp.2220-2238, Nov.1994
- [B 6] 鈴木昇一：手書き漢字の側抑制効果的の分解とその計算機シミュレーション，情報処理学会誌，vol.15, no.12, pp.927-934, Dec.1974
- [B 7] 鈴木昇一：画像情報量とその手書き漢字への応用，画像電子学会誌，vol.4, no.1, pp.4-12, Apr.1975
- [B 8] 鈴木昇一：抽出された特徴による手書き漢字構造の再生，情報処理学会誌，vol.18, no.11, pp.1115-1122, Nov.1977
- [B 9] 鈴木昇一：回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シミュレーション，情報研究(文教大学・情報学部)，no.4, pp.36-56, Dec.1983
- [B10] 鈴木昇一：連想形記憶器MEMOTRONと日本語単独母音系列の再生に関する計算機シミュレーション，情報研究(文教大学・情報学部)，no.7, pp.14-29, Dec.1986

- [B11] 鈴木昇一：多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション，情報研究(文教大学・情報学部)，no.10, pp.35-49, Dec.1989
- [B12] 鈴木昇一：帰属係数法に基づく類似度，帰属関係あいまい度，認識情報量の計算機シミュレーション，情報研究(文教大学・情報学部)，no.11, pp.51-68, Dec.1990
- [B13] 鈴木昇一：構造受精法と日本語単独母音の認識，情報研究(文教大学・情報学部)no.18, pp.17-51, Dec.1998
- [B14] 鈴木昇一，前田英明：有声破裂音の代表パターンの学習的決定と，その計算機シミュレーション，情報研究(文教大学・情報学部)，no.20, pp.77-95, Dec.1998
- [B15] 鈴木昇一，前田英明：変動エントロピーによる有声破裂音の順序付けと，その計算機シミュレーション，情報研究(文教大学・情報学部)，no.21, pp.51-78, Mar.1999
- [B16] 鈴木昇一：平均顔を用いた顔画像の2値化，並びに，目・鼻・口の抽出と，その計算機シミュレーション，情報研究(文教大学・情報学部)，no.22, pp.65-150, Dec.1999
- [B17] 鈴木昇一：界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の，顔画像処理に関する計算機シミュレーション，情報研究(文教大学・情報学部)，no.23, pp.109-182, Mar.2000
- [B18] 鈴木昇一：風景画から知識を抽出し，解釈するシステムの，ファジィ推論ニューラルネットによる構成，情報研究(文教大学・情報学部)，no.23, pp.183-265, Mar.2000
- [B19] 鈴木昇一：各個人の感性を反映した認識システムRECOGNITRON，情報研究(文教大学・情報学部)，no.24, pp.185-257, Dec.2000
- [B20] 鈴木昇一：プロダクション・システムとしてのファジィ・マルチメディア・コンピュータと，空間多重パターンファジィ推論系，情報研究(文教大学・情報学部)，no.24, pp.105-183, Dec.2000
- [B21] 鈴木昇一：SS大分類関数BSCの適応的構成への，計算論的学習理論の適用，情報研究(文教大学・情報学部)，no.25, pp.185-236, Mar.2001
- [B22] 鈴木昇一：量子力学の諸原理，多段階量子認識系と，心理状態を取り入れた想起に基づく部分空間認識法，情報研究(文教大学・情報学部)，no.25, pp.237-282, Mar.2001
- [B23] 鈴木昇一：測度的不変量検出形認識系の構成理論，電子通信学会論文誌(D)，vol.55-D, No.8, pp.513-538, Aug.1972
- [B24] 鈴木昇一，斉藤静昭，奥野治雄，太田芳雄：画像の復元とその計算機シミュレーション，工学院大学研究報告，no.39, pp.198-206, Jan.1976
- [B25] 鈴木昇一，佐久間拓也，前田英明：数理形態学における諸演算とモデル構成作用素，情報研究(文教大学・情報学部)，no.17, pp.133-170, Dec.1996
- [B26] 鈴木昇一：Radial-Basis Function Networks, Wavelet-Based Networksを用いたモデル構成作用素の構成法，情報研究(文教大学・情報学部)，no.17, pp.71-132, Dec.1996
- [B27] 鈴木昇一：類似度関数を用いた確率的緩和法，情報研究(文教大学・情報学部)，no.20, pp.23-75, Dec.1998
- [B29] 鈴木昇一：直交系によるパターンモデルの構成，情報研究(文教大学・情報学部)，no.21, pp.23-49, Mar.1999
- [B30] 鈴木昇一：認識行為に向けての，効用最大化原理，情報研究(文教大学・情報学部)，no.22, pp.151-210, Dec.1999
- [B31] 鈴木昇一：高次認知機能における論理表現の要素，情報研究(文教大学・情報学部)，no.19,

- pp.29-82, Mar.1998
- [B32] 鈴木昇一：Support Vector Machineを利用した大分類関数の構成，情報研究(文教大学・情報学部)，no.26, pp.1-62, Dec.2001
- [B33] 鈴木昇一：2カテゴリ分類困難度の情報理論，情報研究(文教大学・情報学部)，no.26, pp.63-160, Dec.2001
- [B34] 鈴木昇一：一般化類似度関数を用いた導出原理による第1階述語推論，情報研究(文教大学・情報学部)，no.27, pp.27-71, Mar.2002
- [B35] 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：風景画の理解に関するJAVA言語によるRECOGNITRONの計算機シミュレーション，情報研究(文教大学・情報学部)，no.27, pp.73-109, Mar.2002
- [B36] 鈴木昇一：遺伝的アルゴリズムにおける適合度比例選択戦略を利用した進化方程式の，パターン多段階変換に基づく認識への応用，情報研究(文教大学・情報学部)，no.28, pp.37-67, Dec.2002
- [B37] 鈴木昇一：近傍を利用した音素認識のためのモデル構成作用素T，類似度関数SM，大分類関数BSCの諸構成と，SS不動点探索型多段階想起認識，情報研究(文教大学・情報学部)，no.28, pp.69-141, Dec.2002
- [B38] 鈴木昇一：JAVA言語で実装化された画像理解システムIUSの動作概要と，その稼動方法，情報研究(文教大学・情報学部)，no.28, pp.143-165, Dec.2002
- [B39] 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：JAVA言語による計算機シミュレーションで生じた風景画像の理解場面での多段階連想形認識過程の異常現象，情報研究(文教大学・情報学部)，no.29, pp.123-166, July 2003
- [B40] 鈴木昇一：パターン情報処理(モデル構成作用素，誤差逆伝播学習2層ニューラルネット)と，論理的含意とによる非単調的知識推論，情報研究(文教大学・情報学部)，no.29, pp.75-121, July 2003
- [B41] 鈴木昇一：可分な一般抽象ヒルベルト空間でのK-L直交系の理論，情報研究(文教大学・情報学部)，no.29, pp.41-73, July 2003
- [B42] 鈴木昇一：パターン系列(動画像，会話音声)の，dynamical systemによる連想理論と，連想器SPATEMTRON，情報研究(文教大学・情報学部)，no.30, pp.139-186, Jan.2004
- [B43] 鈴木昇一：入出力例の系列を用いた“対連想問題・その擬逆問題”の一般解，情報研究(文教大学・情報学部)，no.30, pp.81-137, Jan.2004
- [B44] 鈴木昇一：共役勾配法の一般解における直交系の応用(画像復元，パターンモデルの構成，パターン集合の情報理論的次元)，情報研究(文教大学・情報学部)，no.30, pp.27-79, Jan.2004
- [B45] 鈴木昇一：2つのパターンモデル構成作用素の， λ 言語論理による構成法，情報研究(文教大学・情報学部)，no.31, pp.43-66, July 2004
- [B46] 鈴木昇一：会話音声・動画像処理への，万能性類似度関数の採用によるSS多段階認識の改良，情報研究(文教大学・情報学部)，no.31, pp.67-110, July 2004
- [B47] 鈴木昇一：数理形態学の新しい2つのパターン変換作用素を用いた多段階想起認識，情報研究(文教大学・情報学部)，no.31, pp.111-141, July 2004
- [B48] 鈴木昇一，太田芳雄，斎藤静昭，奥野治雄：感覚空間回路の設計と作用素に対するラプラス変換法，工学院大学研究報告，no.40, June 1976

- [B49] 鈴木昇一：1パラメータLie座標変換群とそのパターン正規化への応用，情報研究(文教大学・情報学部)，no.32, pp.21-74, Jan.2005
- [B50] 鈴木昇一：曖昧さに関する半順序 α を単調に保つモデル構成作用素 T ，情報研究(文教大学・情報学部)，no.32, pp.75-126, Jan.2005
- [B51] 鈴木昇一：パターン φ から抽出された特徴量 $u(\varphi, \ell)$ のfuzzy単調変換，情報研究(文教大学・情報学部)，no.32, pp.127-168, Jan.2005
- [B52] 鈴木昇一：パターンモデル(パターンの標準形)の一般形，情報研究(文教大学・情報学部)，no.32, pp.169-218, Jan.2005
- [B53] 鈴木昇一：類似度関数の密度を用いた，画素毎のパターン認識処理(パターン理解処理)の方法，情報研究(文教大学・情報学部)，no.32, pp.219-285, Jan.2005

付録A. 多段階連想形認識システムRECOGNITRON $=\langle \Phi, T, SM, BSC \rangle$ の動作概要

多段階帰納推理の働きによる表象付き連想形認識の働きはS.Suzukiにより研究されていて [B3]，ありとあらゆるパターン認識の働きを再現でき，万能である [B3]。

本付録Aでは，この万能性認識の働きを説明する．S.Suzukiの発見したカテゴリ帰属知識を解に持つ連想形認識方程式(SS equation of associative recognition)の求解過程が多段階パターン認識過程であることなどが明らかにされる。

A1 カテゴリ帰属知識を変換する認識システムRECOGNITRON

ある連想型認識方程式を解いている過程は，S.Suzukiが提唱した多段階連想形認識システムRECOGNITRON $=\langle \Phi, T, SM, BSC \rangle$ が入力パターン $\varphi \in \Phi$ を認識する過程であることなどが説明される。

A1.1 多段階パターン認識

帰納推理の働きで多段階パターン変換(多段階帰納推理)

$$\exists j \in J, (\varphi \rightarrow) \phi_0 \equiv T\varphi \rightarrow \phi_1 \rightarrow \phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow \phi_{i-1} \rightarrow \phi_i \equiv T\omega_j \tag{A1.1}$$

を行い，

- ① $\varphi \in \Phi$ に $T\omega_j$ に対応させ ($\varphi \in \Phi$ から $T\omega_j$ を検索，或いは，連想し)，
- ② 入力パターン $\varphi \in \Phi$ を第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathbb{C}_j に分類する ($\varphi \in \Phi$ を認識する)

という連想型認識処理(多段階パターン認識)を遂行する認識システムRECOGNITRON [B3]，[B4]が，S.Suzukiにより考案されている。

今少し詳しく説明しよう。

A1.2 カテゴリ帰属知識空間 $\langle \Phi, 2^J \rangle$

代数構造として加法演算が導入された集合 \mathfrak{H} は内積，ノルムを各々， $(\varphi, \eta), \|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ とするある可分なヒルベルト空間としよう。2つの集合 $\Phi, 2^J$ は，

(一) $\Phi(\ni 0)(\subset \mathfrak{H})$: 処理の対象とする問題のパターン φ の集合(パターン集合) (A1.2)

(二) $2^J \equiv \{\gamma | \gamma \subseteq J\}$: (パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属するかも知れない)カテゴリ \mathbb{C}_j の添え字(カテゴリ番号)を要素とするすべての部分集合(カテゴリ番号集合)の集合 (A1.3)

としよう．集合 2^J の元は順序の付いた要素の並びとして，集合の今1つの表現であるリスト (list) として表されることがある．

処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ について，

φ が，有限個のカテゴリ $\mathfrak{C}_i (i \in \gamma)$ からなる集合

$$\mathfrak{C}(\gamma) \equiv \{ \mathfrak{C}_i | i \in \gamma \in 2^J \} \quad (\text{A1.4})$$

の内の何れか1つのカテゴリに帰属している可能性があるというカテゴリ事前知識 (A1.5)

を認識システム RECOGNITRON が持っている場合，このカテゴリ事前知識を

$$\langle \varphi, \gamma \rangle \quad (\text{A1.6})$$

と表わす．「認識システムが処理の対象とするパターンに対し持つカテゴリ事前知識」という概念は S.Suzuki のパターン認識の数学的理論が初めて提出したものである．順序対 $\langle \varphi, \gamma \rangle$ は RECOGNITRON がパターン $\varphi \in \Phi$ についての持つカテゴリ帰属知識 (categorical membership-knowledge) と呼ばれる．すべての $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の集まり

$$\langle \Phi, 2^J \rangle (\exists \langle \varphi, \gamma \rangle) \quad (\text{A1.7})$$

はカテゴリ帰属知識空間 (space of categorical membership-knowledges) と呼ばれており，その代数的・幾何学的・解析的な諸性質は既に明らかにされている [B3]，[B4]．

A1.3 カテゴリ帰属知識空間 $\langle \Phi, 2^J \rangle$ 上の同値関係 $=_{\Delta}$ ，半順序関係 \leq_{Δ}^* ，上限 \sqcup_{Δ}^*

$\langle \Phi, 2^J \rangle$ 上の同値関係 $=_{\Delta}$ は

$$\langle \varphi, \gamma \rangle =_{\Delta} \langle \eta, \mu \rangle \Leftrightarrow \varphi = \eta \wedge \gamma = \mu \quad (\text{A1.8})$$

と定義される． $\langle \Phi, 2^J \rangle$ 上の半順序 \leq_{Δ}^* の定義 [B4] は少し込み入っているのですが，割愛される．

半順序 \leq_{Δ}^* に関するカテゴリ帰属知識の部分集合 $\langle \Psi, \Gamma \rangle (\subseteq \langle \Phi, 2^J \rangle)$ の上限 (supremum)，或いは，最小上界 (least upper bound) は

$$\sqcup_{\Delta}^* \langle \Psi, \Gamma \rangle \quad (\text{A1.9})$$

と表される． $\langle \Psi, \Gamma \rangle$ が2つの元 $\langle \varphi, \gamma \rangle, \langle \eta, \mu \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$ からなる集合のときの

$$\sqcup_{\Delta}^* \{ \langle \varphi, \gamma \rangle, \langle \eta, \mu \rangle \} \quad (\text{A1.10})$$

は，

$$\langle \varphi, \gamma \rangle \sqcup_{\Delta}^* \langle \eta, \mu \rangle \quad (\text{A1.11})$$

と表されることがある．

A1.4 構造受精変換と呼ばれる写像 $TA(\mu)T : \langle \Phi, 2^J \rangle \rightarrow \langle \Phi, 2^J \rangle$

カテゴリ番号リスト $\mu \in 2^J$ を助変数に持つ構造受精作用素 (structural-fertilization operator) と呼ばれる写像

$$A(\mu) : \Phi \rightarrow \Phi \quad (\text{A1.12})$$

が，式 (2.6) の，1次独立な代表パターンモデル集合 $T \cdot \Omega$ ，並びに，

$$\text{類似度関数 } SM : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s | 0 \leq s \leq 1\} \quad (\text{A1.13})$$

$$\text{大分類関数 } BSC : \Phi \times J \rightarrow \{0, 1\} \quad (\text{A1.14})$$

を使って導入され，この $A(\mu)$ の両側に axiom 1 を満たす式 (2.3) のモデル構成作用素 T を配置した写像

$$TA(\mu)T : \Phi \rightarrow \Phi \quad (\text{A1.15})$$

を考えることができる．式 (A1.15) の写像 $TA(\mu)T$ は，その定義域，値域が Φ である写像であるが，

類似度関数 SM , 大分類関数 BSC を使って定義されるカテゴリ選択関数 (category-selection function)

$$CSF : \Phi \times 2^j \rightarrow 2^j \quad (A1.16)$$

を導入し, 定義域, 値域がパターン空間 Φ ではなく, カテゴリ帰属知識空間 $\langle \Phi, 2^j \rangle$ である写像

$$TA(\mu)T \langle \varphi, \gamma \rangle =_{\Delta} \langle \phi, \lambda \rangle \in \langle \Phi, 2^j \rangle \quad \text{for } \langle \varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^j \rangle \quad (A1.17)$$

に拡張できる. それには,

$$TA(\mu)T \langle \varphi, \gamma \rangle =_{\Delta} \langle TA(\mu \cap \gamma)T\varphi, CSF(\varphi, \mu \cap \gamma) \rangle \in \langle \Phi, 2^j \rangle$$

, where

$$\phi = TA(\mu \cap \gamma)T\varphi$$

$$\lambda = CSF(\varphi, \mu \cap \gamma)$$

(A1.18)

と定義すればよくて, この結果, 式(A1.15)の構造受精写像 $TA(\mu)T : \Phi \rightarrow \Phi$ は, 構造受精変換と呼ばれる写像

$$TA(\mu)T : \langle \Phi, 2^j \rangle \rightarrow \langle \Phi, 2^j \rangle \quad (A1.19)$$

に拡張される. 式(A1.15)の写像 $TA(\mu)T$ はパターンをパターンへ変換するのみであるが, 拡張された式(A1.19)の写像 $TA(\mu)T$ はカテゴリ帰属知識をカテゴリ帰属知識へ変換することに留意しておく.

A1.5 連想形認識結果の3分類

第1階述語論理導出原理 (resolution principle) による人工知能的問題解決 [A11] は, 結論を否定して矛盾を導き出すという後ろ向き推論 (backward reasoning) を採用した「定理の証明過程」である. S.Suzukiのパターン認識の数学的理論は, カテゴリ帰属知識を解に持つ連想形認識方程式を提案し, パターンを認識する過程はこの連想形認識方程式の解 (最小不動点解) を求める過程である. 最小不動点解を求める過程 (求解過程) は定理の上述の第1階述語論理による証明過程に対応する.

認識システム RECOGNITRON は, 連想形認識方程式の最小不動点解を求める形式で, 初期状態のカテゴリ帰属知識 $\langle T\varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^j \rangle$ を多段階にわたり次第に変換して行き, 通常の場合, 最終的にある $\langle T\omega_j, [j] \rangle \in \langle \Phi, 2^j \rangle$ に到達したとき, 入力パターン $\varphi \in \Phi$ の連想形認識 (多段階帰納推理によるパターン認識) が終了する. この通常の場合, RECOGNITRON は,

入力パターン $\varphi \in \Phi$ は $T\omega_j \in \Phi$ に再生され, 第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathcal{C}_j に帰属する (A1.20) という連想形認識結果を出力することになる. この場合は,

(1#) (認識可能) 入力パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属する候補カテゴリは唯1つの \mathcal{C}_j である事態をもたらしている. この認識可能事態の他に, 次のA2.5節に説明されているように, (2#) 認識不能事態, (3#) 認識不定事態の2つの事態が存在する.

(1#), (2#), (3#) が連想形認識結果を分類して得られたものである.

A2 連想形認識方程式の求解過程としての多段階パターン認識過程

多段階パターン認識 (A1.1節) はカテゴリ帰属知識を多段階にわたり変換して行くカテゴリ帰属知識の後半で実現される. 多段階にわたり変換されるカテゴリ帰属知識の前半では, 入力パターンから連想されるパターンモデルの系列が得られる. そして, 連想形認識方程式の解を求めて行く求解過程がカテゴリ帰属知識を多段階にわたり変換して行く過程である.

この求解過程を説明しよう.

A2.1 連想形認識方程式の多段階求解過程における初期作業記憶の設定

処理の対象とする問題のパターン(入力パターン) $\varphi \in \Phi$ に関し、

$$T\varphi \text{ belongs at least to one category } \mathcal{C}_j \text{ of category-set } \mathcal{C}(\gamma) \equiv \{\mathcal{C}_j | j \in \gamma\} \quad (\text{A2.1})$$

と、認識システム RECOGNITRON は知っているものとしよう。入力パターン $\varphi \in \Phi$ は同一知覚原理に従い、そのモデル

$$T\varphi \in \Phi = R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B) \quad (\text{A2.2})$$

に置き換えられている(式(2.2)を参照)。それで、RECOGNITRON の持っているこのカテゴリ帰属知識は、

$$\langle T\varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle \quad (\text{A2.3})$$

と表される。この $\langle T\varphi, \gamma \rangle$ を RECOGNITRON が行う認識作業(不動点を求める認識計算)での、最初の作業記憶状態(初期条件)として採用しよう。 $\gamma = J$ をとすることは、RECOGNITRON が入力パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属するかもしれない候補カテゴリに関し全く無知であることを意味している。

A2.2 連想形認識方程式の多段階求解過程と、その終了条件

以上の準備の下で、実は、カテゴリ番号リスト $\mu \in 2^J$ を帰納推理の働きで選んだ後、連想形認識方程式

$$\langle \phi, \lambda \rangle =_{\Delta} \langle T\varphi, \gamma \rangle \sqcup_{\Delta}^* TA(\mu)T \cdot \langle \phi, \lambda \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle \quad (\text{A2.4})$$

を解く過程の典型的なものが、多段階帰納推理認識システム RECOGNITRON [B3], [B4] が原パターン $\varphi \in \Phi$ を認識する過程(カテゴリ帰属知識の多段階にわたる変換過程)

$$\langle \phi_0, \lambda_0 \rangle, \langle \phi_1, \lambda_1 \rangle, \langle \phi_2, \lambda_2 \rangle, \dots, \langle \phi_{t-1}, \lambda_{t-1} \rangle, \langle \phi_t, \lambda_t \rangle \quad (\text{A2.5})$$

where

$$\langle \phi_0, \lambda_0 \rangle =_{\Delta} \langle T\varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle \text{ (initial condition)} \quad (\text{A2.6})$$

$$TA(\mu) \langle \phi_{s-1}, \lambda_{s-1} \rangle =_{\Delta} \langle \phi_s, \lambda_s \rangle, s = 1, 2, \dots, t-1, t \text{ (recursive process)} \quad (\text{A2.7})$$

である。カテゴリ帰属知識の多段階にわたる変換過程での終了条件(terminal condition)は、不動点方程式(fixed-point equation)

$$TA(\mu)T \langle \phi_t, \lambda_t \rangle =_{\Delta} \langle \phi_t, \lambda_t \rangle \quad (\text{A2.8})$$

の成立であり、このカテゴリ帰属知識 $\langle \phi_t, \lambda_t \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$ が連想形認識方程式(A2.4)の、半順序関係 \leq_{Δ}^* に関し最小の不動点(least fixed-point)としての解である。

A2.3 類似度関数 SM に関する直交条件の下で、エネルギー不等式の成立

このとき、 $\langle \varphi, \gamma \rangle$ のエネルギー(SSポテンシャル; SS-potential) $E(\varphi, \gamma)$ を与える関数

$$E: \Phi \times 2^J \rightarrow R^+ \text{ (非負実数全体の集合)} \quad (\text{A2.9})$$

を定義すれば、類似度関数 SM に関する直交条件 [B4] の下で、エネルギー不等式

$$E(\phi_{s-1}, \lambda_{s-1}) \geq E(\phi_s, \lambda_s), s = 1, 2, \dots, t-1, t \quad (\text{A2.10})$$

が成立する。

A2.4 類似度関数 SM に関するミックスチュア条件の下で、エネルギー不等式の成立

類似度関数 SM に関するミックスチュア条件 [B4] の下で、

$$\exists j \in J, \langle \phi_j, \lambda_j \rangle =_{\Delta} \langle T\omega_j, [j] \rangle \quad (\text{A2.11})$$

が成立し(認識可能事態), このとき, RECOGNITRONにより, 入力パターン $\varphi \in \Phi$ は

- (1%) $T\omega_j$ として再生され(パターン連想),
- (2%) 第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathbb{C}_j に分類・認識される

ということになる.

A2.5 直交条件, ミックスチュア条件の一つが成立している類似度関数 SM を採用している場合の多段階認識

直交条件が成立していない類似度関数 SM を採用している $\langle \Phi, T, SM, BSC \rangle$ においては, 入力パターン $\varphi \in \Phi$ の多段階連想形認識過程が有限の段階で終了するとは限らない. 直交条件が成立していれば, 多段階連想形認識過程が有限の段階で終了する. また, ミックスチュア条件が成立していない類似度関数 SM を採用している $\langle \Phi, T, SM, BSC \rangle$ においては, 入力パターン $\varphi \in \Phi$ の多段階連想形認識過程が有限の段階で終了した場合でも,

(2#) (認識不能)

$$\exists j \in J, \langle \phi_j, \lambda_j \rangle =_{\Delta} \langle 0, \phi \rangle \quad (\text{A2.12})$$

が成立している事態, つまり,

入力パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属する候補カテゴリは唯1つも存在しない事態

(3#) (認識不定)

$$\exists j_1, j_2, \dots, j_p \in J (p \geq 2), \langle \phi_j, \lambda_j \rangle =_{\Delta} \langle \phi_j, [j_1 \ j_2 \ \dots \ j_p] \rangle \quad (\text{A2.13})$$

が成立している事態, つまり,

入力パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属する候補カテゴリは複数個存在する事態のいずれかが生じることがある.

A2.6 直交条件, ミックスチュア条件が共に成立していない類似度関数 SM を採用している場合の多段階認識では振動過程, 或いは周期2以上の循環過程になることがある

類似度関数 SM が axiom 2 を満たしていても, 式(2.1)のRECOGNITRON $\langle \Phi, T, SM, BSC \rangle$ は, 不動点方程式(A2.8)が成立する認識段階番号 $t (= 0, 1, 2, \dots)$ が存在しなくて, 式(A2.5)の認識過程の代りに,

$$\langle \phi_0, \lambda_0 \rangle, \langle \phi_1, \lambda_1 \rangle, \langle \phi_2, \lambda_2 \rangle, \dots, \langle \phi_{t-1}, \lambda_{t-1} \rangle, \langle \phi_t, \lambda_t \rangle, \langle \phi_{t+1}, \lambda_{t+1} \rangle, \langle \phi_{t+2}, \lambda_{t+2} \rangle, \dots \quad (\text{A2.14})$$

というように, 有限の段階では不動点方程式(A2.8)が成立しない振動過程, 或いは

$$\langle \phi_0, \lambda_0 \rangle, \langle \phi_1, \lambda_1 \rangle, \langle \phi_2, \lambda_2 \rangle, \dots, \langle \phi_{t-1}, \lambda_{t-1} \rangle, \langle \phi_t, \lambda_t \rangle, \langle \phi_{t+1}, \lambda_{t+1} \rangle, \langle \phi_{t+2}, \lambda_{t+2} \rangle, \dots$$

ここに,

$$\langle \phi_t, \lambda_t \rangle =_{\Delta} \langle \phi_{t+n}, \lambda_{t+n} \rangle (n = 2, 4, 6, 8, \dots) \quad (\text{A2.15})$$

というように, 周期2の循環過程(cyclic process), 或いは, 周期2より大きい周期の循環過程となることがある [B39]. axiom 2 を満たしている類似度関数 SM が直交条件, ミックスチュア条件を共に満たしていないくて, 入力パターン $\varphi \in \Phi$ のモデル $T\varphi \in \Phi$ が式(2.6)の代表パターンモデル集合 $T \cdot \Omega$ のいずれの代表パターンモデル $T\omega_j \in T \cdot \Omega$ から大きく変形している場合である.

A2.7 多段階帰納推理の働きによる表象付き連想形認識(多段階パターン認識)

以上、RECOGNITRONが、 T, SM, BSC を使い、入力パターン $\varphi \in \Phi$ のモデル $T\varphi \in \Phi$ と、 $\varphi \in \Phi$ が帰属する候補カテゴリのリスト $\gamma \in 2^J$ (式(A2.3)を参照)を多段階にわたり絞りながら(式(A2.5)を参照)、入力パターン $\varphi \in \Phi$ を認識することが説明された。

連想型認識システムRECOGNITRONに内蔵されている多段階帰納推理の働きによる表象付き連想形認識(多段階パターン認識)の働きが簡単に説明された。ここで、表象(presentation)とは、多段階帰納推理の各段階で得られるカテゴリ帰属知識の前半で示されているパターンモデルのことであった。この表象(パターンモデル) $\phi_s \in \Phi(0 \leq s \leq t)$ の列(式(A2.5)を参照)

$$\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{t-1}, \phi_t \in \Phi \quad (\text{A2.16})$$

を、各表象 $\phi_s \in \Phi(0 \leq s \leq t)$ が帰属する候補カテゴリ $\lambda_s \in 2^J(0 \leq s \leq t)$ の列(式(A2.5)を参照)

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{t-1}, \lambda_t \in 2^J \quad (\text{A2.17})$$

に関連させて、分析することで、例えば、誤認識に至る諸原因を検討する余地が生まれる。

(付録A終わり)

付録B. 可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M, dm)$

本付録Bでは、可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の、典型的な1例として、 $\mathfrak{H} = L_2(M, dm)$ が説明される。

位相空間(topological space) X が稠密(dense)な可算部分集合を持つとき、 X を可分な空間(separable space)であるという[A2].

$$\text{内積}(\varphi, \eta), \quad \text{ノルム} \|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)} \quad (\text{B.1})$$

が導入されている一般抽象ヒルベルト空間(加法+が導入されている群としての線形ベクトル空間) \mathfrak{H} は距離

$$\text{dis}(\varphi, \eta) \equiv \|\varphi - \eta\| \quad (\text{B.2})$$

が導入され得る距離空間であり、この距離で位相が定義された位相空間である。パターン φ を内積 (φ, η) 、ノルム $\|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ とする可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の元としよう。 \mathfrak{H} が可分(separable)とは、稠密な(dense)可算部分集合が \mathfrak{H} に存在することを指す[A2].

完全な正規直交系が高々可算個からなっていれば、ヒルベルト空間 \mathfrak{H} は可分である。また、文献[A21]の5.1節(p.25)の定理5.2では、

$$\text{可分な一般抽象ヒルベルト空間}\mathfrak{H}\text{には、高々可算個からなる完全な正規直交系を作ることができる} \quad (\text{B.3})$$

ことが証明されている。よって、一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} で高々可算個からなる完全な正規直交系が存在することと、一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} が可分なことは同値であることに注意しておこう。

ヒルベルト空間 \mathfrak{H} とは内積が定義された無限次元であってよいベクトル空間(内積が定義され得る線形空間)のことであり、有限次元の場合を含む。4性質

$$(イ) (\varphi, \varphi) \geq 0, \text{ かつ, } \lceil \varphi = 0 \Leftrightarrow (\varphi, \varphi) = 0 \rceil \quad (\text{B.4})$$

$$(ロ) (\eta, \varphi) \text{ は } (\varphi, \eta) \text{ の共役複素数} \quad (\text{B.5})$$

$$(ハ) (\varphi_1 + \varphi_2, \eta) = (\varphi_1, \eta) + (\varphi_2, \eta) \quad (\text{B.6})$$

(ニ) 任意の複素定数 a について、

$$(a \cdot \varphi, \eta) = a \cdot (\varphi, \eta) \tag{B.7}$$

を満たすだけの(文献 [A21] のpp.1-2の4式(1.9)~(1.12))、複素数値を与える内積 (φ, η) というものが定義でき、高々可算個からなる完全な正規直交系が存在するというだけのヒルベルト空間 \mathfrak{H} が可分な一般抽象という意味である。

例えば、 $\bar{\eta}$ を η の複素共役として、

$$M : q \text{次元ユークリッド空間 } R^q \text{ の可測部分集合} \tag{B.8}$$

$$dm(x) : \text{ 正值ルベーグ・スティルチェス式測度} \tag{B.9}$$

$$x = \langle x_1, x_2, \dots, x_q \rangle \in M (\subseteq R^q) : \text{ 実数値 } q \text{ 変数の直交座標系} \tag{B.10}$$

を導入し、その内積 (φ, η) 、ノルム $\|\varphi\|$ が、

$$(\varphi, \eta) = \int_M dm(x) \varphi(x) \cdot \bar{\eta}(x) \tag{B.11}$$

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \tag{B.12}$$

と与えられる線形空間(ベクトル空間) \mathfrak{H} が、 $\mathfrak{H} = L_2(M, dm)$ である。

一般に、SS理論 [B3], [B4] では、処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ は或る可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の零元0を含む或る部分集合であるが、構成的集合として、式(2.2)の如く設定される。

(付録B終わり)

付録C. 各カテゴリに複数個の代表パターンを用意する場合の、axiom 2を満たす類似度関数 SM の構成

入力パターン $\varphi \in \Phi$ の、その帰属するカテゴリを逸脱しない範囲での多様な変形に耐えるためには、各カテゴリに複数個の代表パターンを用意すればよい。本付録Cでは、各カテゴリに複数個の代表パターンを用意する場合、類似度関数 SM をaxiom 2を満たすように構成する。

そのために、先ず、各代表パターンモデル $T\omega_j (j \in J)$ に付き、非一致条件

$$(1\#) \forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, T\omega_i \neq T\omega_j \tag{C.1}$$

を設け、式(2.6)の代表パターンモデル集合 $T \cdot \Omega$ は1次独立な系とする。

第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j に帰属すると判明しているパターン $\varphi_{(j)k}$ の集合

$$\Phi_j = \{\varphi_{(j)k} \mid k \in K_j\} \tag{C.2}$$

を用意し、2条件

$$(2\#) \text{ (包含条件) } \forall j \in J, \omega_j \in \Phi_j \tag{C.3}$$

$$(3\#) \text{ (非交差条件) } \forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \Phi_i \cap \Phi_j = \emptyset (i \neq j) \tag{C.4}$$

が満たされているとしよう。

C1 第1種類似度関数 SM

シュワルツの不等式

$$|\langle \varphi, \eta \rangle| \leq \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \tag{C.5}$$

ここに、

$$|\langle \varphi, \eta \rangle| = (\varphi, \eta) \text{ が成り立つのは、 } \varphi \text{ が } \eta \text{ の定数倍 (零倍を含む) か、或いは、 } \eta \text{ が } \varphi \text{ の定数倍 (零倍を含む) の時に限る} \tag{C.6}$$

が成り立っていることに注意する。

各非負数 $d_j(\varphi)$ を,

$$d_j(\varphi) \equiv \min_{k \in K_j} [\|T\varphi\|^2 \cdot \|T\varphi_{(j),k}\|^2 - \|(T\varphi, T\varphi_{(j),k})\|^2] \geq 0 \quad (\text{C.7})$$

とおく. そうすると,

$$d_j(\omega_i) \begin{cases} = 0 & \text{if } i = j \\ > 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

が成り立つ.

このとき, 次の定理C.1のように, axiom 2を満たす式(A1.13) (付録A)の類似度関数 SM が構成される.

[定理C.1] (axiom 2を満たす類似度関数 SM の構成定理1)

$$SM(\varphi, \omega_j) = \frac{1}{d_j(\varphi)} \sum_{i \in J} \frac{1}{d_i(\varphi)} \quad (\text{C.9})$$

と定義される類似度関数 SM はSS理論におけるaxiom 2を満たす.

(証明) axiom 2の (i) (正規直交性), (ii) (規格化条件), (iii) (T -不変性)の成立を確かめればよい. (i)の成立は, $d_j(\omega_i)$ の, 上述の性質から明らか. (ii)の成立は, SM の定義から明らか. (iii)の成立は, axiom 1, (iii)の後半 $T \cdot T = T$ より明らか. \square

C2 第2種類似度関数 SM

各 $d_{\min,(j)}(\varphi) (j \in J)$ を

$$d_{\min,(j)}(\varphi) \equiv \min_{i \in J - \{j\}} d_i(\varphi) \quad (\text{C.10})$$

と定義すると,

$$d_{\min,(j)}(\omega_k) = \begin{cases} \min_{i \in J - \{k\}} d_i(\omega_k) > 0 & \text{if } j = k \\ \min_{i \in J - \{j\}} d_i(\omega_k) = 0 & \text{if } j \neq k \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

が成り立つ.

このとき, 次の定理C.2のように, axiom 2を満たす式(A1.13) (付録A)の類似度関数 SM が構成される.

[定理C.2] (axiom 2を満たす類似度関数 SM の構成定理1)

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} \frac{d_{\min,(j)}(T\varphi)}{\sum_{i \in J} d_{\min,(i)}(T\varphi)} \cdots \sum_{i \in J} d_{\min,(i)}(\varphi) > 0 \text{ のとき} \\ p(\mathbb{C}_j) (\mathbb{C}_j \text{ の生起確率}) \cdots \sum_{i \in J} d_{\min,(i)}(\varphi) = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$(C.12)$$

と定義される類似度関数 SM はSS理論におけるaxiom 2を満たす。

(証明) axiom 2の(i)(正規直交性), (ii)(規格化条件), (iii)(T -不変性)の成立を確かめればよい。(i)の成立は, $d_{\min(i)}(\omega_k)$ の, 式(C.11)の性質から明らか。(ii)の成立は, SM の定義から明らか。(iii)の成立は, axiom 1, (iii)の後半 $T \cdot T = T$ より明らか。□

C.3 第3種類似度関数 SM

各 $s_j(\varphi)(j \in J)$ を

$$s_j(\varphi) \equiv -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \max_{k \in K_j} \left| \frac{(T\varphi, T\varphi_{(j),k})}{\|T\varphi\| \cdot \|T\varphi_{(j),k}\|} \right|^2 \right] \quad (C.13)$$

と定義すると,

$$s_j(\omega_i) \begin{cases} = +\infty & \text{if } i = j \\ \geq 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (C.14)$$

が成り立つ。ここに, $s_j(\omega_i)$ は $i \neq j$ ならば, 有限の正数である。

このとき, 次の定理C.3のように, axiom 2を満たす式(A1.13)(付録A)の類似度関数 SM が構成される。

【定理C.3】(axiom 2を満たす類似度関数 SM の構成定理1)

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} \frac{s_j(\varphi)}{\sum_{i \in J} s_i(\varphi)} \cdots \sum_{i \in J} s_i(\varphi) > 0 \text{ のとき} \\ p(\mathfrak{E}_j) (\mathfrak{E}_j \text{ の生起確率}) \cdots \sum_{i \in J} s_i(\varphi) = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (C.15)$$

と定義される類似度関数 SM はSS理論におけるaxiom 2を満たす。

(証明) axiom 2の(i)(正規直交性), (ii)(規格化条件), (iii)(T -不変性)の成立を確かめればよい。(i)の成立は, $s_j(\omega_i)$ の, 式(C.14)の性質から明らか。(ii)の成立は, SM の定義から明らか。(iii)の成立は, axiom 1, (iii)の後半 $T \cdot T = T$ より明らか。□

(付録C終わり)

付録D. 1次元パターン(音声関数) φ , 2次元パターン(画像関数) φ の類似度関数 SM の構成

本付録Dでは, パターン φ が音声関数, 画像関数の場合, axiom 2を満たす類似度関数 SM が特徴の違いの総合的評価を基に構成される。

$$dm(x), x \in M \quad (D.1)$$

は可測集合 M 上のルベーク・スチルチェス式正值測度としよう。

D1 音声関数 φ の場合

可測集合 $M \subseteq R^1$ (1次元直線)上の1次元パターン(音声関数)

$$\varphi = \{\varphi(x) | x \in M\} \quad (\text{D.2})$$

を考える．座標点 $x \in M$ での，正值重み関数

$$\forall x \in M, p_q(x) \geq 0, q = 0 \sim 8 \quad (\text{D.3})$$

を，確率条件

$$\forall x \in M, \sum_{q=0}^8 p_q(x) = 1 \quad (\text{D.4})$$

の下で導入する．

パターンモデル $T\varphi$ ，代表パターンモデル $T\omega_j$ 間の，座標点 $x \in M$ での特徴の違いを以下のように9種類，導入する：

$$v_0(\varphi, \omega_j)(x) \equiv |(T\varphi)(x) - (T\omega_j)(x)| \quad (\text{D.5})$$

$$v_1(\varphi, \omega_j)(x) \equiv \left| \begin{array}{cc} (T\varphi)(x) & \frac{d(T\varphi)(x)}{dx} \\ (T\omega_j)(x) & \frac{d(T\omega_j)(x)}{dx} \end{array} \right| \quad (\text{D.6})$$

$$v_2(\varphi, \omega_j)(x) \equiv \left| \begin{array}{cc} \frac{d(T\varphi)(x)}{dx} & (T\varphi)(x) \\ \frac{d(T\omega_j)(x)}{dx} & (T\omega_j)(x) \end{array} \right| \quad (\text{D.7})$$

$$v_3(\varphi, \omega_j)(x) \equiv \left| \begin{array}{cc} \frac{d(T\varphi)(x)}{dx} & \frac{d(T\varphi)(x)}{dx} \\ \frac{d(T\omega_j)(x)}{dx} & \frac{d(T\omega_j)(x)}{dx} \end{array} \right| \quad (\text{D.8})$$

$$v_4(\varphi, \omega_j)(x) \equiv \left| \begin{array}{cc} (T\varphi)(x) & \frac{d^2(T\varphi)(x)}{dx^2} \\ (T\omega_j)(x) & \frac{d^2(T\omega_j)(x)}{dx^2} \end{array} \right| \quad (\text{D.9})$$

$$v_5(\varphi, \omega_j)(x_1, x_2) \equiv \left| \begin{array}{cc} \frac{d^2(T\varphi)(x)}{dx^2} & (T\varphi)(x) \\ \frac{d^2(T\omega_j)(x)}{dx^2} & (T\omega_j)(x) \end{array} \right| \quad (\text{D.10})$$

$$v_6(\varphi, \omega_j)(x) \equiv \left| \begin{array}{cc} \frac{d(T\varphi)(x)}{dx} & \frac{d^2(T\varphi)(x)}{dx^2} \\ \frac{d(T\omega_j)(x)}{dx} & \frac{d^2(T\omega_j)(x)}{dx^2} \end{array} \right| \quad (\text{D.11})$$

$$v_7(\varphi, \omega_j)(x) \equiv \left| \begin{array}{cc} \frac{d^2(T\varphi)(x)}{dx^2} & \frac{d(T\varphi)(x)}{dx} \\ \frac{d^2(T\omega_j)(x)}{dx^2} & \frac{d(T\omega_j)(x)}{dx} \end{array} \right| \quad (\text{D.12})$$

$$v_8(\varphi, \omega_j)(x) \equiv \left| \begin{array}{cc} \frac{d^2(T\varphi)(x)}{dx^2} & \frac{d^2(T\varphi)(x)}{dx^2} \\ \frac{d^2(T\omega_j)(x)}{dx^2} & \frac{\partial^2(T\omega_j)(x_1, x_2)}{dx^2} \end{array} \right| \quad (D.13)$$

□

そうすると、特徴の違いの総合的評価

$$\text{diff}(\varphi, \omega_j) \equiv \int_M dm(x) \sum_{q=0}^8 p_q(x) \cdot [v_q(\varphi, \omega_j)(x)]^2 \geq 0 \quad (D.14)$$

を定義でき、2等式

$$(1\#) \text{ (一致性)} \quad \forall j \in J, \text{diff}(\omega_j, \omega_j) = 0 \quad (D.15)$$

$$(2\#) \text{ (} T \text{-不変性)} \quad \forall \varphi \in \Phi, \text{diff}(T\varphi, \omega_j) = \text{diff}(\varphi, \omega_j) \quad (D.16)$$

が成り立つ。

このとき、次の定理D.1のように、axiom 2を満たす式(A1.13) (付録A)の類似度関数 SM が構成される。

[定理D.1] (外積によるaxiom 2を満たす類似度関数 SM の構成定理)

非一致性

$$\forall j \in J, \forall k \in J - \{j\}, \text{diff}(\omega_k, \omega_j) > 0 \quad (D.17)$$

を仮定する。

$$SM(\varphi, \omega_j) = \frac{1}{\text{diff}(\varphi, \omega_j)} \sum_{i \in J} \frac{1}{\text{diff}(\varphi, \omega_i)} \quad (D.18)$$

と定義される類似度関数 SM はSS理論におけるaxiom 2を満たす。

(証明) axiom 2の(i) (正規直交性), (ii) (規格化条件), (iii) (T -不変性)の成立を確かめればよい。(i)の成立は、 $\text{diff}(\omega_k, \omega_j)$ の、2式(D.15), (D.16)の性質から明らか。(ii)の成立は、 SM の定義から明らか。(iii)の成立は、axiom 1, (iii)の後半 $T \cdot T = T$ より明らか。□

尚、整数値座標系では、

$$(1\$) \frac{d(T\varphi)(x_1, x_2)}{dx} = \varphi(x+1) - \varphi(x) \quad (D.19)$$

$$(2\$) \frac{d^2(T\varphi)(x_1, x_2)}{dx^2} = \varphi(x+1) - \varphi(x) - [\varphi(x) - \varphi(x-1)] \\ = \varphi(x+1) - 2 \cdot \varphi(x) + \varphi(x-1) \quad (D.20)$$

と近似できる。

また、

$$p_q(x) = p_{q+1}(x) = 2^{-1} \cdot p_q(x), q = 1, 4, 6$$

とおくのがよい。

D2 画像関数 φ の場合

可測集合 $M \subseteq R^2$ (2次元平面)上の2次元パターン(画像関数)

$$\varphi = \{\varphi(x_1, x_2) \mid x = \langle x_1, x_2 \rangle \in M\} \quad (D.21)$$

を考える。座標点 $x \in M$ での、正值重み関数

$$\forall x = \langle x_1, x_2 \rangle \in M, p_q(x) = p_q(x_1, x_2) \geq 0, q = 0 \sim 8 \quad (\text{D.22})$$

を，確率条件

$$\forall x = \langle x_1, x_2 \rangle \in M, \sum_{q=0}^8 p_q(x) = \sum_{q=0}^8 p_q(x_1, x_2) = 1 \quad (\text{D.23})$$

の下で導入する．

パターンモデル $T\varphi$ ，代表パターンモデル $T\omega_j$ 間の，座標点 $x \in M$ での特徴の違いを以下のように 9 種類，導入する：

$$v_0(\varphi, \omega_j)(x_1, x_2) \equiv |(T\varphi)(x_1, x_2) - (T\omega_j)(x_1, x_2)| \quad (\text{D.24})$$

$$v_1(\varphi, \omega_j)(x_1, x_2) \equiv \left| \begin{array}{c} (T\varphi)(x_1, x_2) \quad \frac{\partial(T\varphi)(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ (T\omega_j)(x_1, x_2) \quad \frac{\partial(T\omega_j)(x_1, x_2)}{\partial x_1} \end{array} \right| \quad (\text{D.25})$$

$$v_2(\varphi, \omega_j)(x_1, x_2) \equiv \left| \begin{array}{c} (T\varphi)(x_1, x_2) \quad \frac{\partial(T\varphi)(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ (T\omega_j)(x_1, x_2) \quad \frac{\partial(T\omega_j)(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{array} \right| \quad (\text{D.26})$$

$$v_3(\varphi, \omega_j)(x_1, x_2) \equiv \left| \begin{array}{c} \frac{\partial(T\varphi)(x_1, x_2)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial(T\varphi)(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(T\omega_j)(x_1, x_2)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial(T\omega_j)(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{array} \right| \quad (\text{D.27})$$

$$v_4(\varphi, \omega_j)(x_1, x_2) \equiv \left| \begin{array}{c} (T\varphi)(x_1, x_2) \quad \frac{\partial^2(T\varphi)(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \\ (T\omega_j)(x_1, x_2) \quad \frac{\partial^2(T\omega_j)(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \end{array} \right| \quad (\text{D.28})$$

$$v_5(\varphi, \omega_j)(x_1, x_2) \equiv \left| \begin{array}{c} (T\varphi)(x_1, x_2) \quad \frac{\partial^2(T\varphi)(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \\ (T\omega_j)(x_1, x_2) \quad \frac{\partial^2(T\omega_j)(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \end{array} \right| \quad (\text{D.29})$$

$$v_6(\varphi, \omega_j)(x_1, x_2) \equiv \left| \begin{array}{c} \frac{\partial^2(T\varphi)(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \quad \frac{\partial^2(T\varphi)(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2(T\omega_j)(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \quad \frac{\partial^2(T\omega_j)(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \end{array} \right| \quad (\text{D.30})$$

$$v_7(\varphi, \omega_j)(x_1, x_2) \equiv \left| \begin{array}{c} \frac{\partial^2(T\varphi)(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \quad \frac{\partial^2(T\varphi)(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2(T\omega_j)(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \quad \frac{\partial^2(T\omega_j)(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \end{array} \right| \quad (\text{D.31})$$

$$v_8(\varphi, \omega_j)(x_1, x_2) \equiv \left| \frac{\frac{\partial^2(T\varphi)(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}}{\frac{\partial^2(T\omega_j)(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}} - \frac{\frac{\partial^2(T\varphi)(x_1, x_2)}{\partial x_2^2}}{\frac{\partial^2(T\omega_j)(x_1, x_2)}{\partial x_2^2}} \right| \quad (D.32)$$

□

そうすると、特徴の違いの総合的評価

$$\begin{aligned} \text{diff}(\varphi, \omega_j) &\equiv \int_M dm(x) \sum_{q=0}^8 p_q(x) \cdot [v_q(\varphi, \omega_j)(x)]^2 \\ &= \int_M dm(x_1, x_2) \sum_{q=0}^8 p_q(x_1, x_2) \cdot [v_q(\varphi, \omega_j)(x_1, x_2)]^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (D.33)$$

を定義でき、2等式(D1.15)、(D.16)が成り立つ。

このとき、次の定理D.2のように、axiom 2を満たす式(A1.13) (付録A)の類似度関数 SM が構成される。

[定理D.2] (外積によるaxiom 2を満たす類似度関数 SM の構成定理)

非一貫性

$$\forall j \in J, \forall k \in J - \{j\}, \text{diff}(\omega_k, \omega_j) > 0 \quad (D.34)$$

を仮定する。

$$SM(\varphi, \omega_j) = \frac{1}{\text{diff}(\varphi, \omega_j)} \sum_{i \in J} \frac{1}{\text{diff}(\varphi, \omega_i)} \quad (D.35)$$

と定義される類似度関数 SM はSS理論におけるaxiom 2を満たす。

(証明) axiom 2の(i) (正規直交性)、(ii) (規格化条件)、(iii) (T -不変性)の成立を確かめればよい。(i)の成立は、 $\text{diff}(\omega_k, \omega_j)$ の、2式(D1.15)、(D1.16)の性質から明らか。(ii)の成立は、 SM の定義から明らか。(iii)の成立は、axiom 1、(iii)の後半 $T \cdot T = T$ より明らか。□

尚、整数値座標系では、

$$(1\$) \frac{\partial(T\varphi)(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \varphi(x_1 + 1, x_2) - \varphi(x_1, x_2) \quad (D.36)$$

$$(2\$) \frac{\partial(T\varphi)(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \varphi(x_1, x_2 + 1) - \varphi(x_1, x_2) \quad (D.37)$$

$$\begin{aligned} (3\$) \frac{\partial^2(T\varphi)(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} &= \varphi(x_1 + 1, x_2) - \varphi(x_1, x_2) - [\varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1 - 1, x_2)] \\ &= \varphi(x_1 + 1, x_2) - 2 \cdot \varphi(x_1, x_2) + \varphi(x_1 - 1, x_2) \end{aligned} \quad (D.38)$$

$$\begin{aligned} (4\$) \frac{\partial^2(T\varphi)(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2(T\varphi)(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} = \varphi(x_1 + 1, x_2 + 1) - \varphi(x_1 + 1, x_2) - [\varphi(x_1, x_2 + 1) - \varphi(x_1, x_2)] \\ &= \varphi(x_1 + 1, x_2 + 1) - \varphi(x_1 + 1, x_2) - \varphi(x_1, x_2 + 1) + \varphi(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (D.39)$$

$$(5\$) \frac{\partial^2(T\varphi)(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = \varphi(x_1, x_2 + 1) - \varphi(x_1, x_2) - [\varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2 - 1)]$$

$$= \varphi(x_1, x_2 + 1) - 2 \cdot \varphi(x_1, x_2) + \varphi(x_1, x_2 - 1) \quad (\text{D.40})$$

と近似できる.

(付録D終わり)

付録E. 特別な距離関数を用いたaxiom 2を満たす類似度関数 SM の構成

本付録Eでは, axiom 2を満たす類似度関数 SM が, 文献 [A22] での距離関数の一般形など $dis(\varphi, \eta)$ を使って, 構成される.

E1 距離の公理

2変数の関数

$$dis: \Phi \times \Phi \rightarrow R^+ \text{ (非負実数全体の集合)} \quad (\text{E.1})$$

が, 距離の公理

$$(一) \text{ (同値性)} \quad dis(\varphi, \eta) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \eta \quad (\text{E.2})$$

$$(二) \text{ (対称性)} \quad \forall \varphi, \forall \eta, dis(\varphi, \eta) = dis(\eta, \varphi) \quad (\text{E.3})$$

$$(三) \text{ (三角不等式)} \quad \forall \varphi, \forall \eta, \forall \phi, dis(\varphi, \eta) \leq dis(\varphi, \phi) + dis(\phi, \eta) \quad (\text{E.4})$$

を満たすとき, この dis は距離関数であるといわれる.

E2 類似度関数 SM の構成

このとき, 次の定理E.1のように, axiom 2を満たす式(A1.13) (付録A)の類似度関数 SM が構成される.

[定理E.1] (距離によるaxiom 2を満たす類似度関数 SM の構成定理)

式(E.1)の関数 $dis: \Phi \times \Phi \rightarrow R^+$ は, 距離の公理を満たすとは限らないが, 唯, 3性質

$$(イ) \quad \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, dis(T\varphi, T\omega_j) \geq 0 \quad (\text{E.5})$$

$$(ロ) \quad \forall j \in J, dis(T\omega_j, T\omega_j) = 0 \quad (\text{E.6})$$

$$(ハ) \quad \forall j \in J, \forall k \in J - \{j\}, dis(T\omega_k, T\omega_j) > 0 \quad (\text{E.7})$$

のみを仮定する.

このとき,

$$SM(\varphi, \omega_j) = \frac{1}{\sum_{i \in J} \frac{1}{dis(T\varphi, T\omega_i)}} \quad (\text{E.8})$$

と定義される類似度関数 SM はSS理論におけるaxiom 2を満たす.

尚, 距離の公理を満たせば, 3性質(イ), (ロ), (ハ)を満たす.

(証明) axiom 2の (i) (正規直交性), (ii) (規格化条件), (iii) (T -不変性)の成立を確かめればよい. (i)の成立は, $diff(T\omega_k, T\omega_j)$ の, (ロ), (ハ)から成り立つ性質

$$dis(T\omega_k, T\omega_j) \begin{cases} = 0 \cdots k = j \text{ のとき} \\ > 0 \cdots k > j \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{E.9})$$

から明らか. (ii)の成立は, SM の定義から明らか. (iii)の成立は, axiom 1, (iii)の後半 $T \cdot T = T$

より明らか. □

E3 2つの関数 dis

$$dis(\varphi, \eta) \equiv 1 - \exp(-a \cdot \|\varphi - \eta\|^2), a > 0 \quad (E.10)$$

は距離の公理の内(一), (二)を満たすが [A22], (三)を満たさない. 然しながら, 定理E.1の3性質(イ), (ロ), (ハ)を満たし, 定理E.1より, axiom 2を満たす類似度関数 SM を構成できる.

$$dis(\varphi, \eta) \equiv \sqrt{1 - \exp(-a \cdot \|\varphi - \eta\|^2)}, a > 0 \quad (E.11)$$

は距離の公理(一), (二), (三)を満たし [A22], 定理E.1より, axiom 2を満たす類似度関数 SM を構成できる.

E4 可測集合 M の上で可測な関数 $\varphi(x)$ 全体の空間での距離 $dis(\varphi, \eta)$

文献 [A23] の第4章, 87によれば,

$$dis(\varphi, \eta) \equiv \int_M dm(x) \frac{|\varphi(x) - \eta(x)|}{1 + |\varphi(x) - \eta(x)|} \quad (E.12)$$

は,

$$\int_M dm(x) < \infty \quad (\text{測度有限})$$

ならば, 距離の公理を満たすことが知れる. よって, 定理E.1より, axiom 2を満たす類似度関数 SM を構成できる.

(付録E終わり)

付録F. パターンの事前変換 S

本付録Fでは, 処理の対象とするパターン(入力パターン) $\varphi \in \Phi$ を認識処理する前に $S\varphi \in \Phi$ に変換しておくこと, 処理がたやすくなる, 或いは, 正しく認識される程度が増大するように, 事前変換

$$S: \Phi \rightarrow \Phi \quad (F.1)$$

を考案しよう. パターン $\varphi \in \Phi$ を入力して得られるパターン出力 $S\varphi \in \Phi$ は $\varphi \in \Phi$ の事前変換パターンと呼ばれる. 変換過程

$$\varphi \rightarrow S\varphi \rightarrow T(S\varphi) \quad (F.2)$$

を考え, 入力パターン $\varphi \in \Phi$ の代わりにそのモデル $T\varphi \in \Phi$ を採用することを,

$$\text{入力パターン } \varphi \in \Phi \text{ の代わりに } T(S\varphi) \in \Phi \text{ を採用すること} \quad (F.3)$$

に変更することになる.

F1 平均化パターン ξ との相違を強調したパターン $S\varphi$

平均化パターン

$$\xi \equiv \sum_{j \in J} p(\mathcal{C}_j) \cdot \omega_j \quad (F.4)$$

を導入して,

$$S\varphi \equiv C \cdot (T\varphi - T\xi) + T\xi \quad (F.5)$$

を定義する. そうすると,

$$S\varphi - C \cdot T\varphi = [1 - C] \cdot T\xi \quad (\text{F.6})$$

が成り立ち、

$$C = 1 \text{ ならば } S\varphi = T\varphi \quad (\text{F.7})$$

である。

認識システムでは、入力パターン $\varphi \in \Phi$ のみならず、各代表パターン $\omega_j (j \in J)$ を

$$S\omega_j = C \cdot (T\omega_j - T\xi) + T\xi (j \in J) \quad (\text{F.8})$$

へと変換しておくことが必要とされる。

F2 各代表パターン $\omega_j (j \in J)$ の、式(2.6)のモデル集合 $T \cdot \Omega$ を利用した補間パターン $S\varphi$

Lagrange's interpolation formula (ラグランジュの補間公式) からヒントを得、

$$S\varphi \equiv \sum_{j \in J} \frac{\ell_j(\varphi)}{\ell_j(\omega_j)} \cdot T\omega_j \quad (\text{F.9})$$

と定義される式(F.1)の写像 S を考えよう。

この変換 S は退化変換 (degenerate transformation) である。

条件

$$i \neq j \in J \Rightarrow \|T\omega_i - T\omega_j\| > 0 \quad (\text{F.10})$$

の下で、

$$\forall j \in J \Rightarrow \ell_j(T\omega_j) > 0 \quad (\text{F.11})$$

$$i \neq j \in J \Rightarrow \ell_j(T\omega_i) = 0 \quad (\text{F.12})$$

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \ell_j(T\varphi) = \ell_j(\varphi) \quad (\text{F.13})$$

が成り立つ各関数

$$\ell_j : \Phi \rightarrow R \quad (\text{F.14})$$

を選ばなければならない。

式(F.12)から、不動点方程式

$$\forall j \in J, ST\omega_j = T\omega_j \quad (\text{F.15})$$

が成り立つ。

式(F.14)の写像 $\ell_j : \Phi \rightarrow R$ の構成6例①～⑥を以下に、示す。

$$\textcircled{1} (\text{ノルム距離法}) \ell_j(\varphi) \equiv \prod_{k \in J - \{j\}} \|T\varphi - T\omega_k\| \quad (\text{F.16})$$

ここに、

$$\forall j \in J \Rightarrow \ell_j(T\omega_j) > 0 \quad (\text{F.17})$$

$$i \neq j \in J \Rightarrow \ell_j(T\omega_i) = 0 \quad (\text{F.18})$$

が成り立つ。

② (ノルム距離の変換法) 2性質

$$f(0) = 0 \quad (\text{F.19})$$

$$\forall u > 0, f(u) \neq 0 \quad (\text{F.20})$$

を満たす関数

$$f : R^+ \rightarrow R^+, \text{ ここに, } R^+ \text{ は非負実数全体の集合} \quad (\text{F.21})$$

を導入して、

$$\ell_j(\varphi) \equiv \prod_{k \in J - \{j\}} f(\|T\varphi - T\omega_k\|) \tag{F.22}$$

ここに,

$$\forall j \in J \Rightarrow \ell_j(T\omega_j) > 0 \tag{F.23}$$

$$i \neq j \in J \Rightarrow \ell_j(T\omega_i) = 0 \tag{F.24}$$

が成り立つ.

$$\textcircled{3} \text{ (内積法) } \ell_j(\varphi) = \prod_{k \in J - \{j\}} [\|T\varphi\|^2 \cdot \|T\omega_k\|^2 - |(T\varphi, T\omega_k)|^2] \tag{F.25}$$

④(内積の変換法) 2性質式(F.19), (F.20)を満たす式(F.21)の関数 f を導入して,

$$\ell_j(\varphi) \equiv f\left(\prod_{k \in J - \{j\}} [\|T\varphi\|^2 \cdot \|T\omega_k\|^2 - |(T\varphi, T\omega_k)|^2]\right) \tag{F.26}$$

ここに,

$$\forall j \in J \Rightarrow \ell_j(T\omega_j) > 0 \tag{F.27}$$

$$i \neq j \in J \Rightarrow \ell_j(T\omega_i) = 0 \tag{F.28}$$

が成り立つ.

⑤(類似度関数法)

axiom 2を満たす類似度関数 $SM(\varphi, \omega_j)$ を使って,

$$\ell_j(\varphi) \equiv \prod_{k \in J - \{j\}} [1 - SM(\varphi, \omega_k)] \tag{F.29}$$

ここに,

$$\forall j \in J \Rightarrow \ell_j(T\omega_j) = \ell_j(\omega_j) = 1 \tag{F.30}$$

$$i \neq j \in J \Rightarrow \ell_j(T\omega_i) = \ell_j(\omega_i) = 0 \tag{F.31}$$

が成り立つ.

⑥(相違度関数法)

2性質

$$\forall \varphi \in \Phi, 0 \leq DSM(\varphi, \omega_j) \leq 1 \tag{F.32}$$

$$DSM(\varphi, \omega_j) =$$

$$\begin{cases} 0 \cdots \varphi = \omega_j \text{ のとき} \\ 1 \cdots \varphi = \omega_i (i \in J - \{j\}) \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\tag{F.33}$$

を満たす相違度関数 (dissimilarity-measure function) $DSM(\varphi, \omega_j)$, 例えば,

$$DSM(\varphi, \omega_j) = 1 - \exp\left[-\frac{1}{d_j} \cdot \frac{1 - SM(\varphi, \omega_j)}{SM(\varphi, \omega_j)}\right] \tag{F.34}$$

を考えて,

$$\ell_j(\varphi) \equiv \prod_{k \in J - \{j\}} DSM(\varphi, \omega_k) \tag{F.35}$$

ここに,

$$\forall j \in J \Rightarrow \ell_j(T\omega_j) = \ell_j(\omega_j) = 1 \tag{F.36}$$

$$i \neq j \in J \Rightarrow \ell_j(T\omega_i) = \ell_j(\omega_i) = 0 \tag{F.37}$$

が成り立つ. □

(付録F終わり)

付録G. 類似度関数 SM の構成

パターンが他のカテゴリを表していればいるほど、そのパターンが自分のカテゴリを表していると想定するのは、axiom 2を満たす類似度関数 SM の構成がたやすくなり、魅力的である。

本付録Gでは、パターン $\varphi \in \Phi$ が他のカテゴリ $\mathfrak{C}_i, i \in J - \{j\}$ を表していなければならないほど、着目しているカテゴリ \mathfrak{C}_j を表している程度が大きくなる量 $\ell_j(\varphi)$ を使って、axiom 2を満たす式(A1.13)の類似度関数 SM の1例が構成される。

G1 パターン $\varphi \in \Phi$ が他のカテゴリ $\mathfrak{C}_i, i \in J - \{j\}$ を表していなければならないほど、着目しているカテゴリ \mathfrak{C}_j を表している程度が大きくなる量 $\ell_j(\varphi)$

着目しているカテゴリ番号 $j \in J$ を固定すると、 $\ell_j(\varphi)$ は他のすべてのカテゴリ $\mathfrak{C}_i, i \in J - \{j\}$ との相違性の程度の最小値を表しており、この相違の程度の最小値が、処理の対象とするパターン $\varphi \in \Phi$ が着目しているカテゴリ \mathfrak{C}_j に帰属している程度と想定していることになる。他のカテゴリを表していなければならないほど、着目しているカテゴリを表している程度が大きくなると考えているわけである。

各 $\ell_j(\varphi)(j \in J)$ を次の I ~ V の如く、5種類定義する。

I. ノルム距離による分離条件

$$i \neq j \in J \Rightarrow \|T\omega_i - T\omega_j\| > 0 \quad (\text{G.1})$$

の下で、

$$\ell_j(\varphi) = \min_{k \in J - \{j\}} \|T\varphi - T\omega_k\|^2 \quad (\text{G.2})$$

II. ノルム距離分離条件式(G.1)の下で、

$$\ell_j(\varphi) = \min_{k \in J - \{j\}} \frac{\|T\varphi - T\omega_k\|^2}{\max_{\ell \in J - \{j\}} \|T\varphi - T\omega_\ell\|^2} \quad (\text{G.3})$$

III. 内積相関による分離条件条件

$$i \neq j \in J \Rightarrow (T\omega_i, T\omega_j) < \|T\omega_i\| \cdot \|T\omega_j\| \quad (\text{G.4})$$

の下で、

$$\ell_j(\varphi) = \min_{k \in J - \{j\}} [\|T\varphi\|^2 \cdot \|T\omega_k\|^2 - |(T\varphi, T\omega_k)|^2] \quad (\text{G.5})$$

IV. 内積相関分離条件条件式(G.4)の下で、

$$\ell_j(\varphi) = \min_{k \in J - \{j\}} \frac{[\|T\varphi\|^2 \cdot \|T\omega_k\|^2 - |(T\varphi, T\omega_k)|^2]}{\max_{\ell \in J - \{j\}} [\|T\varphi\|^2 \cdot \|T\omega_\ell\|^2 - |(T\varphi, T\omega_\ell)|^2]} \quad (\text{G.6})$$

V. 内積相関分離条件条件式(G.4)の下で、

$$\ell_j(\varphi) = \min_{k \in J - \{j\}} \left[1 - \frac{(T\varphi, T\omega_k)}{\|T\varphi\| \cdot \|T\omega_k\|} \right]^2 \quad (\text{G.7})$$

$$\text{但し, } \frac{(T\varphi, T\omega_k)}{\|T\varphi\| \cdot \|T\omega_k\|} \equiv 0 \text{ if } \|T\varphi\| \cdot \|T\omega_k\| = 0 \quad (\text{G.8})$$

□

G2 $\ell_j(\varphi)(j \in J)$ による axiom 2 を満たす類似度関数 SM の構成

このとき,

$$\forall j \in J, \ell_j(\omega_j) > 0 \tag{G.9}$$

$$i \neq j \in J \Rightarrow \ell_j(\omega_i) = 0 \tag{G.10}$$

が成立する. 各 $s_j(\varphi)(j \in J)$ を,

$$s_j(\varphi) \equiv \frac{\ell_j(\varphi)}{\ell_j(\omega_j)} \tag{G.11}$$

と定義する.

このとき, 次の定理G.1が成立し, axiom 2 を満たす式(A1.13)の類似度関数 SM が構成されたことがわかる.

[定理G.1] (類似度関数 SM の構成定理)

$$SM(\varphi, \omega_j) \equiv \begin{cases} \frac{s_j(\varphi)}{\sum_{k \in J} s_k(\varphi)} \cdots \sum_{k \in J} s_k(\varphi) > 0 \text{ のとき} \\ p(\mathfrak{E}_j) \cdots \sum_{k \in J} s_k(\varphi) = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{G.12}$$

と定義される式(A1.13)の関数 SM は axiom 2 を満たす.

(証明) axiom 2, (i) の成立: 式(G.11)の $s_j(\varphi)(j \in J)$ は, 2式(G.9), (G.10)から,

$$s_j(\omega_i) = \begin{cases} 1 \cdots i = j \text{ のとき} \\ 0 \cdots i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

が成り立ち, これから明らか.

axiom 2, (ii) の成立: SM の定義式(G.12)から明らか.

axiom 2, (iii) の成立: axiom 1, (iii)の後半 $T \cdot T = T$ より,

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \ell_j(T\varphi) = \ell_j(\varphi)$$

が成立すことから, 明らか. □

(付録G終わり)

付録H. 3次元ベクトル \vec{a}, \vec{b} の外積 $\vec{a} \times \vec{b}$

付録Hでは, 有限個のパターン $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ の外積 $\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n$ の定義を理解しやすくするために, 3次元ベクトル \vec{a}, \vec{b} の外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ と内積 $\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$ が説明される.

H1 3次元ユークリッド空間での外積 $\vec{a} \times \vec{b}$

3正規直交ベクトル(縦ベクトル)

$$\vec{e}_1 = \text{col}(1 \ 0 \ 0), \vec{e}_2 = \text{col}(0 \ 1 \ 0), \vec{e}_3 = \text{col}(0 \ 0 \ 1) \tag{H.1}$$

は, 3次元ユークリッド空間の基底の1つである. 3次元ユークリッド空間の2ベクトル \vec{a}, \vec{b} を3個の基底で表現したベクトル

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \cdot \vec{e}_i \quad (\text{H.2})$$

$$\vec{b} = \sum_{i=1}^3 b_i \cdot \vec{e}_i \quad (\text{H.3})$$

間の外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad (\text{H.4})$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 \quad (\text{H.5})$$

と定義される.

H2 2ベクトル \vec{a}, \vec{b} の外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ の別表現

Given any two nonparallel vectors \vec{a} and \vec{b} , we may construct a third vector \vec{c} as follows :

When translated so that they have a common origin, the two vectors \vec{a} , \vec{b} form two sides of a parallelogram. We choose that normal \vec{u} obtained by the motion of a right-hand screw when \vec{a} is rotated into \vec{b} (angle θ of rotation less than 180°) when drawn from a common origin. That is to say, let θ to be the angle between the two vectors.

We define

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \equiv \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sin \theta \cdot \vec{u} \quad (\text{H.6})$$

to be perpendicular to the plane of this parallelogram with magnitude $\|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sin \theta$ equal to the area of the parallelogram.

H3 1つのベクトル \vec{a} と外積 $\vec{b} \times \vec{c}$ との内積 $\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$

$$\text{内積 } \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^3 a_i \cdot b_i \quad (\text{H.7})$$

$$\text{ノルム } |\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \quad (\text{H.8})$$

を導入する.

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ は \vec{a} と \vec{b} を2辺とする平行四辺形の面積に等しい.

今1つのベクトル

$$\vec{c} = \sum_{i=1}^3 c_i \cdot \vec{e}_i \quad (\text{H.9})$$

を導入する. \vec{a} と $\vec{b} \times \vec{c}$ との内積 $\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$ は,

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (\text{H.10})$$

であることが示される.

$\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$ は a, \vec{b}, \vec{c} を3辺とする平行六面体の(符号を含めた)体積に等しい.

$$a, \bar{b}, \bar{c} \text{ が右手系をなしていれば,} \\ \langle \bar{a}, \bar{b} \times \bar{c} \rangle \geq 0 \tag{H.11}$$

であり,

$$a, \bar{b}, \bar{c} \text{ が左手系をなしていれば,} \\ \langle \bar{a}, \bar{b} \times \bar{c} \rangle \leq 0 \tag{H.12}$$

である.

(付録H終わり)

付録I. 誤差を伴ったパターン復元

本付録Iでは、変形を取り除き単純化した形を取り戻すパターン復元が、Shannonの情報量との対応の観点から説明される。パターン $\eta \in \mathfrak{S}$ がパターン $\varphi \in \mathfrak{S}$ に比べ、どの程度歪んでいるか、その変形の程度をShannonの情報量との対応の観点から捉えよう。

I.1 パターン復元と情報量

第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j の代表パターン $\omega_j \in \Phi$ からパターン $\varphi \in \Phi$ を生成・復元できるということは、 $\omega_j \in \Phi$ の方が $\varphi \in \Phi$ よりも変形していない。この意味で、逆に、変形しているパターン $\varphi \in \Phi$ から変形していないパターン $\omega_j \in \Phi$ を通常、正確に復元できないとみてよい。変形しているパターン $\varphi \in \Phi$ から変形していないパターン $\omega_j \in \Phi$ を復元しようという働きは、間違うかも知れない連想を伴った認識の働きである。

パターン $\varphi \in \Phi$ からパターン $\eta \in \Phi$ を正確に復元できるということは、 $\varphi \in \Phi$ の方が $\eta \in \Phi$ よりも変形していない。パターンモデル $T\varphi \in \Phi$ が、パターン $\varphi \in \Phi$ から変形を取り除き単純化したものであることは、 $\varphi \in \Phi$ の方が $T\varphi \in \Phi$ よりもより多くの変形を含んでいる。

I.2 Shannonの情報量との対応

ある通信路を介し、離散集合 X 内の任意の元 $x \in X$ を送信し、離散集合 Y 内のある元 $y \in Y$ を受信する事態を考えよう。

4種類の確率

$$q(x): x \in X \text{ の生起確率} \\ r(y): y \in Y \text{ の生起確率} \\ s(x/y): y \in Y \text{ が生起する条件下での, } x \in X \text{ の生起条件付き確率} \\ p(x,y): x \in X, y \in Y \text{ の生起同時確率 (結合確率)} \tag{I.1}$$

を導入すれば、4種類の確率分布

$$q(x), r(y), s(x/y), p(x,y) (x \in X, y \in Y) \tag{I.2}$$

の間には、3個の等式

$$\forall x \in X, \sum_{y \in Y} p(x,y) = q(x) \tag{I.3}$$

$$\forall y \in Y, \sum_{x \in X} p(x,y) = r(y) \tag{I.4}$$

$$\forall x \in X, \forall y \in Y, p(x, y) = r(y) \cdot s(x/y) \quad (I.5)$$

が成り立つ。

送信する前に離散集合 X が持っていた平均的な不確定さ

$$H(X) \equiv -\sum_{x \in X} q(x) \cdot \log_e q(x) \quad (I.6)$$

が、離散集合 Y を受け取っても、 X の、残っている平均的な不確定さ

$$H(X/Y) \equiv -\sum_{y \in Y} r(y) \cdot \sum_{x \in X} s(x/y) \cdot \log_e s(x/y) \quad (I.7)$$

へと減少し、その結果、受信者は、取り去られた平均的な不確定さ

$$H(X) - H(X/Y) \geq 0 \quad (I.8)$$

を受け取る。この量が受信者が受け取る平均的な情報量である。

2種類の平均情報量

$$\text{平均結合情報量 } H(X, Y) \equiv -\sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} p(x, y) \cdot \log_e p(x, y) \quad (I.9)$$

平均相互情報量 (average amount of mutual information)

$$AMI(X, Y) \equiv \sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} p(x, y) \cdot \log_e \frac{p(x, y)}{q(x) \cdot r(y)} \quad (I.10)$$

$$= \sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} p(x, y) \cdot [-\log_e q(x) - \{-\log_e s(x/y)\}] \quad (I.11)$$

を導入すれば、2公式

$$AMI(X, Y) = H(X) - H(X/Y) \quad (I.12)$$

$$AMI(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (I.13)$$

が成り立っている。式(I.11)の平均相互情報量 $AMI(X, Y)$ は、2式(I.8), (I.12)から、

$$AMI(X, Y): \text{受信信号集合 } Y \text{ (の任意の元 } y) \text{ を受信したとき、送信信号集合 } X \text{ から取り去られた平均的な不確定さ} \quad (I.14)$$

と解釈される。

このとき、

$$\log_e \|\phi\| + \log_e \|\eta\| - \log_e \sqrt{\|\phi\|^2 \cdot \|\eta\|^2 - |(\phi, \eta)|^2} = 0 \quad \text{if } \|\phi\| \cdot \|\eta\| = 0 \quad (I.15)$$

$$\frac{(\phi, \eta)}{\|\phi\| \cdot \|\eta\|} = 0 \quad \text{if } \|\phi\| \cdot \|\eta\| = 0 \quad (I.16)$$

を約束すると、対応

$$H(X) \leftrightarrow \log_e \|\phi\| \quad (I.17)$$

$$H(Y) \leftrightarrow \log_e \|\eta\| \quad (I.18)$$

$$H(X, Y) \leftrightarrow \log_e \sqrt{\|\phi\|^2 \cdot \|\eta\|^2 - |(\phi, \eta)|^2} \quad (I.19)$$

の下で、式(I.13)の平均相互情報量 $AMI(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$ に対応する量

$$\log_e \|\phi\| + \log_e \|\eta\| - \log_e \sqrt{\|\phi\|^2 \cdot \|\eta\|^2 - |(\phi, \eta)|^2} \quad (I.20)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \left| \frac{(\phi, \eta)}{\|\phi\| \cdot \|\eta\|} \right|^2 \right] \quad (I.21)$$

がパターン η を受信して、受信パターン η 内に送信パターン φ が存在する程度(受信パターン η が送信パターン φ に似ている程度)であると解釈されよう。

ここで、実変数 x の関数 $-\frac{1}{2} \cdot \log_e(1-x)$ についての展開式

$$-\frac{1}{2} \cdot \log_e(1-x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{for } |x| < 1 \quad (1.22)$$

を適用すれば、

$$\begin{aligned} & \log_e \sqrt{\|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2} - \log_e \sqrt{\|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2 - |(\varphi, \eta)|^2} \\ &= \log_e \|\varphi\| + \log_e \|\eta\| - \log_e \sqrt{\|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2 - |(\varphi, \eta)|^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left| \frac{(\varphi, \eta)}{\|\varphi\| \cdot \|\eta\|} \right|^{2n} \end{aligned} \quad (1.23)$$

が成り立つ。

受信パターン η が送信パターン φ に似ている程度 (1.24)

$$\begin{aligned} &= \log_e \|\varphi\| + \log_e \|\eta\| - \log_e \sqrt{\|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2 - |(\varphi, \eta)|^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot [\log_e [\|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2] - \log_e [\|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2 - |(\varphi, \eta)|^2]] \end{aligned} \quad (1.25)$$

= [パターン φ がパターン η に最大に変形している程度対数の対数から、パターン φ がパターン η に実際に変形している程度対数の対数を差し引いて得られた量] の半分 (1.26)

= [パターン φ がパターン η に変形していない程度を表しているところの残存している程度対数量] の半分 (1.27)

そして、

$$\|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sin \theta = \sqrt{\|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2 - |(\varphi, \eta)|^2} \quad (1.28)$$

は、パターン φ がパターン η に変形している程度を表している。ここに、 θ は η から φ へ向かう右手系で測った η 、 φ 間の角度である。

その理由は次の通りである：

$$\cos \theta = \frac{(\varphi, \eta)}{\|\varphi\| \cdot \|\eta\|} \quad (1.29)$$

であり、

$$\text{パターン } \varphi \text{ とパターン } \eta \text{ との外積} = \phi \cdot [\|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sin \theta] \quad (1.30)$$

である。ここに、 ϕ は2つのパターン φ 、 η の双方を含む平面の法線上にある単位ベクトルである。

そうすると、

パターン φ とパターン η との外積のノルムの自乗

$$\begin{aligned} &= (\phi \cdot [\|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sin \theta], \phi \cdot [\|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sin \theta]) \\ &= [\|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sin \theta]^2 \cdot (\phi, \phi) \\ &= [\|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sin \theta]^2 \\ &= \|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2 \cdot \sin^2 \theta = \|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2 [1 - \cos^2 \theta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2 \cdot \left[1 - \frac{|\langle \varphi, \eta \rangle|^2}{\|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2}\right] \\
 &= \|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2 - |\langle \varphi, \eta \rangle|^2
 \end{aligned} \tag{I.31}$$

□

(付録I終わり)

付録J. Shannonの相互情報量と、本論文の包含情報量

本付録Jでは、本論文の包含情報量 $I(T\varphi, c \cdot T\phi)$ が非零定数 $c(\neq 0)$ を導入すれば、Shannonの相互情報量 $I(X, Y)$ と如何なる対応をもってくるかを説明し、あわせて、 $I_0(T\varphi, c \cdot T\phi)$ をパターンモデル $T\varphi$ の、 $T\phi$ の非零定数 ($=c \neq 0$) 倍成分 $c \cdot T\phi$ を持つ直交分解から導く。

J1. $T\varphi$ 内に $T\phi$ の非零定数 ($=c \neq 0$) 倍 $c \cdot T\phi$ が含まれている程度を表わす情報量 $I_0(T\varphi, c \cdot T\phi)$

一般に、2つの確率変数 X, Y 間のシャノン相互情報量 (mutual information between X and Y) $I(X, Y)$ とは、

- (1#) X の持つ不確定さから、 Y を観測してもまだ X に残存している不確定さを差し引いたもの (Y を観測して、 X に関し解消された不確定さ)

であり、この量 $I(X, Y)$ は

- (2#) Y を観測することにより X に関し獲得された情報量である

と考えている。対称性

$$I(X, Y) = I(Y, X) \tag{J.1}$$

が成立することが知られている [A25].

正規分布に従う2つの確率変数 X, Y 間の相互情報量 $I(X, Y)$ は、計算により、その相関係数 (correlation coefficient between X and Y) を $\rho(X, Y)$ とすると、

$$I(X, Y) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e [1 - \rho(X, Y)^2] \tag{J.2}$$

と表わされることが知られている [A24]. 2つのパターン φ, ϕ の各々のモデル $T\varphi, T\phi$ と、ある1つの非零定数 $c(\neq 0)$ を導入して、3つの、複素ヒルベルト空間 \mathfrak{H} での対応

$$X \leftrightarrow T\varphi, Y \leftrightarrow c \cdot T\phi \tag{J.3}$$

$$\rho(X, Y) \leftrightarrow \frac{|(T\varphi, T\phi)|}{\|T\varphi\| \cdot \|T\phi\|} \tag{J.4}$$

を考えると、非負量

$$I_0(T\varphi, c \cdot T\phi) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \frac{|(T\varphi, T\phi)|^2}{\|T\varphi\|^2 \cdot \|T\phi\|^2} \right] \tag{J.5}$$

は、

- (3#) $T\varphi$ の持つ不確定さから、 $T\phi$ を観測してもまだ $T\varphi$ に残存している不確定さを差し引いたもの ($T\phi$ を観測して、 $T\varphi$ に関し解消された不確定さ)

- (4#) $T\phi$ を観測することにより $T\varphi$ に関し獲得された情報量である

と解釈される。本研究では、

(5#) $T\varphi$ の持つ不確定さは $T\varphi$ の持つ形状の複雑さである
 の想定の下で,

(6#) $I_0(T\varphi, c \cdot T\psi)$ は, $T\varphi$ 内に $T\psi$ の非零定数 ($=c \neq 0$) 倍 $c \cdot T\psi$ が含まれている程度を表わす情報量である
 と考える訳である. この解釈(6#)の下では, $I_0(T\varphi, c \cdot T\psi)$ は包含情報量 (amount of information of $c \cdot T\psi$ contained in $T\varphi$) と呼ばれる.

尚, 実ヒルベルト空間 \mathfrak{H} では,

$$\left| \frac{(T\varphi, T\psi)}{\|T\varphi\| \cdot \|T\psi\|} \right|^2 = \left[\frac{(T\varphi, T\psi)}{\|T\varphi\| \cdot \|T\psi\|} \right]^2 \quad (J.6)$$

であるから, 式(J.4)の対応は,

$$\rho(X, Y) \leftrightarrow \frac{(T\varphi, T\psi)}{\|T\varphi\| \cdot \|T\psi\|} \quad (J.7)$$

となる.

J2. 包含情報量 $I_0(T\varphi, c \cdot T\psi)$ の公式(J.5)の導出

ある1つの非零定数 $c(\neq 0)$ を導入して, 包含情報量 $I_0(T\varphi, c \cdot T\psi)$ の公式(J.5)を, パターンモデル $T\varphi$ の, $T\psi$ の非零定数 ($=c \neq 0$) 倍成分 $c \cdot T\psi$ を持つ直交分解から導いてみよう.

パターンモデル $T\varphi$ を, ある1つの非零定数 $c(\neq 0)$ を導入し, 2条件]

$$T\varphi = c \cdot T\psi + \eta \quad (J.8)$$

$$(T\psi, \eta) = 0 \quad (J.9)$$

を満たすように, 2成分 $c \cdot T\psi, \eta \in \mathfrak{H}$ に直交分解する. 直交(J.9)が満たされるためには, 非零定数 $c(\neq 0)$ は特別の値でなければならない. 以下, この事態を説明しながら, 包含情報量 $I_0(T\varphi, c \cdot T\psi)$ の公式(J.5)を, 導く.

$T\varphi$ を式(J.8)の如く表現する時, 誤差は η である. この誤差 η のノルム $\|\eta\|$ の自乗 $\|\eta\|^2$ を最小にすることを考えよう. この解答は次の定理J1で与えられる.

【定理J1】 (パターンモデル $T\varphi$ の直交分解定理)

2式(J.8), (J.9)によるパターンモデル $T\varphi$ の直交分解表現における誤差 η のノルムの自乗 $\|\eta\|^2$ を最小ならしめる非零定数 $c(\neq 0)$ は,

$$c = \frac{(T\varphi, T\psi)}{(T\psi, T\psi)} \quad (J.10)$$

と与えられ, この時の誤差 η を η_{\min} と表現すれば, 2式(J.8), (J.9)の再表現として, パターンモデル $T\varphi$ の直交分解

$$T\varphi = \frac{(T\varphi, T\psi)}{(T\psi, T\psi)} \cdot T\psi + \eta_{\min} \wedge (T\psi, \eta_{\min}) = 0 \quad (J.11)$$

が成立する.

(証明) $\|\eta\|^2 = \|T\varphi - c \cdot T\psi\|^2 = (T\varphi - c \cdot T\psi, T\varphi - c \cdot T\psi)$ (J.12)
 が最小になるとすれば, \bar{c} を c の複素共役として,

$$0 = \frac{\partial \|\eta\|^2}{\partial c} = \left(\frac{\partial [T\varphi - c \cdot T\psi]}{\partial c}, T\varphi - c \cdot T\psi \right) + (T\varphi - c \cdot T\psi, \frac{\partial [T\varphi - c \cdot T\psi]}{\partial \bar{c}})$$

$$= \left(\frac{\partial [T\varphi - c \cdot T\phi]}{\partial c}, T\varphi - c \cdot T\phi \right) \quad \because \quad \frac{\partial c}{\partial c} = 0$$

$$= (T\phi, T\varphi - c \cdot T\phi) \quad (J.13)$$

$$\therefore 0 = (T\varphi - c \cdot T\phi, T\phi) = (T\varphi, T\phi) - c \cdot (T\phi, T\phi)$$

を得，式(J.10)が成立することがわかる．よって，この式(J.10)を式(J.8)に代入すれば，式(J.11)の前半が得られ，式(J.11)の前半から得られる最小誤差

$$\eta_{\min} = T\varphi - c \cdot T\phi, \text{ where } c = \frac{(T\varphi, T\phi)}{(T\phi, T\phi)} \quad (J.14)$$

を式(J.13)に代入すれば，式(J.11)の後半である直交式が得られる． \square

ここで，パターンモデル $T\varphi$ のノルム $\|T\varphi\|$ と最小誤差 η_{\min} のノルム $\|\eta_{\min}\|$ とのノルム比 $\frac{\|T\varphi\|}{\|\eta_{\min}\|}$ の自然対数

$$\log_e \frac{\|T\varphi\|}{\|\eta_{\min}\|} \quad (J.15)$$

を $T\varphi$ 内に $\frac{(T\varphi, T\phi)}{(T\phi, T\phi)} \cdot T\phi$ が含まれる程度を表わす情報量であるといい，式(J.11)を考慮して，

$$I(T\varphi, T\phi) \equiv I_0(T\varphi, \frac{(T\varphi, T\phi)}{(T\phi, T\phi)} \cdot T\phi) \equiv \log_e \frac{\|T\varphi\|}{\|\eta_{\min}\|} = \log_e \frac{\|T\varphi\|}{\left\| T\varphi - \frac{(T\varphi, T\phi)}{(T\phi, T\phi)} \cdot T\phi \right\|} \quad (J.16)$$

と表わす．改めて，

$$I(T\varphi, T\phi) \text{ は } T\varphi \text{ 内に } T\phi \text{ が含まれる程度を表わす情報量である} \quad (J.17)$$

と，解釈し直す．

このとき，包含情報量 $I(T\varphi, T\phi)$ は次の定理J2で具体的に表わされ，公式(J.5)が導かれた．

[定理J2] (包含情報量 $I(T\varphi, T\phi)$ の表現定理)

$$I(T\varphi, T\phi) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \frac{(T\varphi, T\phi)^2}{\|T\varphi\| \cdot \|T\phi\|} \right] \quad (J.18)$$

(証明) 先ず，

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_3 \wedge (\varphi_2, \varphi_3) = 0 \quad (J.19)$$

の時，

$$\|\varphi_1\|^2 = \|\varphi_2\|^2 + \|\varphi_3\|^2 \quad (J.20)$$

が成立することを，2式(J.10)，(J.11)に適用すれば，

$$\|T\varphi\|^2 = \|c \cdot T\phi\|^2 + \|\eta_{\min}\|^2, \text{ where } c = \frac{(T\varphi, T\phi)}{(T\phi, T\phi)} \quad (J.21)$$

が得られる．よって，

$$\begin{aligned} \|\eta_{\min}\|^2 &= \|T\varphi\|^2 - \|c \cdot T\phi\|^2 \\ &= \|T\varphi\|^2 - |c|^2 \cdot \|T\phi\|^2 \\ \therefore \frac{\|\eta_{\min}\|^2}{\|T\varphi\|^2} &= 1 - |c|^2 \cdot \frac{\|T\phi\|^2}{\|T\varphi\|^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \frac{|(T\varphi, T\psi)|^2}{\|T\psi\|^4} \cdot \frac{\|T\psi\|^2}{\|T\varphi\|^2} \\
 &= 1 - \frac{|(T\varphi, T\psi)|^2}{\|T\varphi\| \cdot \|T\psi\|} \tag{J.22}
 \end{aligned}$$

が成立し、この式(J.22)を包含情報量 $I(T\varphi, T\psi)$ の定義式(J.16)から得られる公式

$$I(T\varphi, T\psi) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e \frac{\|\eta_{\min}\|^2}{\|T\varphi\|^2} \tag{J.23}$$

に代入すれば、所要の式(J.18)が得られる。 □

(付録J終わり)

付録K. 情報容量 $C(\varphi:\eta)$ と $C(\varphi_1:\varphi_j, j=2,3,\dots,n)$ との説明

本付録Kでは、情報容量 $C(\varphi:\eta)$ と、情報容量 $C(\varphi_1:\varphi_j, j=2,3,\dots,n)$ とが、直観的に説明される。

K1. 情報容量 $C(\varphi:\eta)$ の説明

直交している2つのパターン φ, η が3次元ユークリッド空間 R^3 内のベクトルと考えた場合、 φ, η が蓄えることの出来る情報の量は、

$$|\varphi \cdot \eta| = |\varphi| \cdot |\eta| \cdot \sin \frac{\pi}{2} \tag{K.1}$$

の対数

$$\frac{1}{2} \cdot \log_e [|\varphi|^2 \cdot |\eta|^2] = \log_e [|\varphi \cdot \eta|] = \log_e [|\varphi| \cdot |\eta| \cdot \sin \frac{\pi}{2}] \tag{K.2}$$

であると想定した。 $|\varphi| \cdot |\eta|$ を2辺とする長方形の面積の対数が、直交している2つのパターン φ, η が蓄えることの出来る情報の最大の量であることになる。実際に、 η が φ となす角が θ の場合、付録Hの式(H.6)から、外積 $\varphi \times \eta$ の大きさ $|\varphi \times \eta|$ は、 $|\varphi| \cdot |\eta|$ を2辺とする平行四辺形の面積

$$|\varphi \times \eta| = \|\varphi \cdot \eta\| \cdot \sin \theta = |\varphi| \cdot |\eta| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = |\varphi| \cdot |\eta| \cdot \sqrt{1 - \frac{[\varphi, \eta]^2}{|\varphi|^2 \cdot |\eta|^2}} \tag{K.3}$$

の対数

$$\log_e |\varphi \times \eta| = \log_e \|\varphi \cdot \eta\| \cdot \sin \theta \tag{K.4}$$

が、 θ の角をなしている2つのパターン φ, η が蓄えることの出来る情報の量であるから、「直角をなしている2つのパターン φ, η が蓄えることの出来る情報の量と θ の角をなしている2つのパターン φ, η が蓄えることの出来る情報の量の差」

$$\log_e [|\varphi \cdot \eta|] - \log_e \|\varphi \cdot \eta\| \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot \log_e [|\varphi|^2 \cdot |\eta|^2] - \frac{1}{2} \cdot \log_e \|\varphi \cdot \eta\| \cdot \sin \theta^2 \tag{K.5}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \cdot \log_e \frac{\|\varphi \cdot \eta\| \cdot \sin \theta^2}{|\varphi|^2 \cdot |\eta|^2} \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \frac{[\varphi, \eta]^2}{|\varphi|^2 \cdot |\eta|^2} \right] \tag{K.6}
 \end{aligned}$$

が、2つのパターン φ, η が蓄えることの出来る情報の余裕の量、つまり、情報容量 $C(\varphi: \eta)$ であることになる。

K2. 情報容量 $C(\varphi_1: \varphi_j, j=2,3,\dots,n)$ の説明

ユークリッド空間の一般化は可分なヒルベルト空間 \mathfrak{H} であり、式(6.1)の有限個の、 \mathfrak{H} の元であるパターン $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ が蓄えることの出来る情報の余裕の量は、式(6.2)の情報容量 $C(\varphi_1: \varphi_j, j=2,3,\dots,n)$ であると定義したのは、この直観的思考を規格化する形で式(3.14)の歪みの対数余裕度 $\log_e \frac{d^{\max}}{d}$ の意味するところに基づき、捨象した結果である。何故ならば、式(6.23)の列ベクトル $\bar{c}(k)$ の系のなす超立方体の体積が $|\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_n|$ であり、この体積が式(5.7)の行列式の値であり、

$$\begin{aligned} C(\varphi_1: \varphi_j, j=2,3,\dots,n) &= \frac{1}{2} \cdot \log_e [|\varphi_1|^2 \cdot |\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n|^2] \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \log_e [|\varphi_1|^2 \cdot |\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n|^2 - |[\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \dots \otimes \varphi_n]|^2] \end{aligned} \quad (\text{K.7})$$

と表わされるからである。

(付録K終わり)

付録L. パターンの各1次結合係数 c_k の求め方と、1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ の例

(付録L終わり)

本付録Kでは、パターンの各1次結合係数 c_k の求める方法と、1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ の例を説明する。直交系は1次独立であるから、1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ を正規直交系として構成する。

L1. パターンの各1次結合係数 c_k の求める方法

可分なヒルベルト空間 \mathfrak{H} の元 φ を、1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ を用いて、

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H}, \varphi = \sum_{k \in L} c_k \cdot \psi_k + \varphi_\perp \text{ such that } \forall k \in L, (\varphi_\perp, \psi_k) = 0 \quad (\text{L.1})$$

と1次展開された時、各1次展開係数 c_k は、最小自乗法を適用して、誤差 $\varphi_\perp = \varphi - \sum_{k \in L} c_k \cdot \psi_k$ のノルム $\|\varphi_\perp\|$ の自乗 $\|\varphi_\perp\|^2$ を最小にすることを求めることができる。結果は次の通りである：

各1次展開係数 c_k は、連立1次方程式

$$\sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot (\psi_\ell, \psi_k) = (\varphi, \psi_k), k \in L \quad (\text{L.2})$$

の解として求まる。系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ は1次独立であるから、

$$a_{k\ell} = (\psi_\ell, \psi_k) \quad (\text{L.3})$$

を第 $k \in L$ 行第 $\ell \in L$ 列の要素とする行列 $A = (a_{k\ell})_{k,\ell \in L}$ の行列式の値 $\det(A)$ は非零であるから、連立1次方程式(L.2)の解 $\{c_k\}_{k \in L}$ は必ず、求まる。

もし、1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ が

$$(\phi_k, \phi_\ell) = 0 \quad \text{if } k \neq \ell \tag{L.4}$$

を満たすという意味で、直交系であるなら、各1次展開係数 $c_k, k \in L$ は、連立1次方程式(L.2)の解として、

$$c_k = \frac{(\varphi, \phi_k)}{(\phi_k, \phi_k)}, k \in L \tag{L.5}$$

と求まる。 □

L2. 線分上の1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ の例

正定数 $a > 0$ を選ぶ。線分 $M = \{x | -a < x < +a\}$ 上のパターン φ は

$$\varphi = \{\varphi(x) | -a < x < +a\} \tag{L.6}$$

と表わされる。

可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dx)$ を導入する。 $\bar{\eta}$ は η の複素共役であるとして、内積 (φ, η) 、ノルム $\|\varphi\|$ は

$$\text{内積 } (\varphi, \eta) = \int_{-a}^{+a} dx \varphi(x) \cdot \bar{\eta}(x) \tag{L.7}$$

$$\text{ノルム } \|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \tag{L.8}$$

である。

ここで、 b は1より小さくない正整数であるとして、1次独立な系である正規直交系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ の添え字の集合 L を

$$L = \{1, 2, \dots, 2b, 2b+1\} \tag{L.9}$$

としよう。各 $\phi_k (k \in L)$ を

$$\phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

$$\phi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \cos \frac{\pi x}{a}$$

$$\phi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$\phi_4(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \cos \frac{2\pi x}{a}$$

$$\phi_5(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sin \frac{2\pi x}{a}$$

⋮

$$\phi_{2k}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \cos \frac{k\pi x}{a}$$

$$\phi_{2k+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sin \frac{k\pi x}{a}$$

⋮

$$\phi_{2b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \cos \frac{b\pi x}{a}$$

$$\phi_{2b+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sin \frac{b\pi x}{a}$$

(L.10)

と設定する．ここに，正規直交性

$$(\phi_k, \phi_\ell) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = \ell \\ 0 & \text{if } k \neq \ell \end{cases}$$

(L.11)

が成立しており， $\{\phi_k\}_{k \in L} = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{2b}, \phi_{2b+1}\}$ は正規直交系である．

1次展開式(L.1)は，直交展開

$$\forall \varphi \in L_2(M; dx), \varphi(x) = \sum_{k \in L} c_k \cdot \phi_k(x) + \varphi_\perp(x), x \in M \quad (\text{L.12})$$

$$\text{such that } \forall k \in L, (\varphi_\perp, \phi_k) = 0 \quad (\text{L.13})$$

となる．式(L.5)を適用して，各1次展開係数 c_k は，

$$c_k = (\varphi, \phi_k), k \in L \quad (\text{L.14})$$

と求められる．1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k=1,2,3,\dots}$ は完全であるから，

$$b \rightarrow \infty \text{ のとき, } \|\varphi_\perp\| \rightarrow 0 \quad (\text{L.15})$$

が成り立つ．

L3. 長方形上の1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ の例

2つの正定数 $a_1, a_2 > 0$ を選ぶ．長方形 $M = \{x = \langle x_1, x_2 \rangle \mid -a_j < x_j < +a_j, j=1,2\}$ 上のパターン φ は

$$\varphi = \{\varphi(x_1, x_2) \mid -a_1 < x_1 < +a_1, -a_2 < x_2 < +a_2\} \quad (\text{L.16})$$

と表わされる．

可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dx_1 dx_2)$ を導入する． $\bar{\eta}$ は η の複素共役であるとして，内積 (φ, η) は

$$\text{内積 } (\varphi, \eta) = \int_{-a_1}^{+a_1} dx_1 \int_{-a_2}^{+a_2} dx_2 \varphi(x_1, x_2) \cdot \bar{\eta}(x_1, x_2) \quad (\text{L.17})$$

である．ノルム $\|\varphi\|$ は，式(L.8)で定義される．

さて， $k, k_1, k_2 = 1, 2, 3, \dots$ として，対 $\langle k_1, k_2 \rangle$ と1対1対応の関係にある k は，

$$k = \frac{(k_1 + k_2 - 2) \cdot (k_1 + k_2 - 1)}{2} + k_2 \quad (\text{L.18})$$

である．その理由は次のように説明される：

$$\langle k_1, k_2 \rangle = \langle 1, 1 \rangle \leftrightarrow k = 1$$

$$\langle k_1, k_2 \rangle = \langle 2, 1 \rangle \leftrightarrow k = 2$$

$$\langle k_1, k_2 \rangle = \langle 1, 2 \rangle \leftrightarrow k = 3$$

$$\langle k_1, k_2 \rangle = \langle 3, 1 \rangle \leftrightarrow k = 4$$

$$\langle k_1, k_2 \rangle = \langle 2, 2 \rangle \leftrightarrow k = 5$$

$$\langle k_1, k_2 \rangle = \langle 1, 3 \rangle \leftrightarrow k = 6$$

$$\langle k_1, k_2 \rangle = \langle 4, 1 \rangle \leftrightarrow k = 7$$

$$\langle k_1, k_2 \rangle = \langle 3, 2 \rangle \leftrightarrow k = 8$$

$$\langle k_1, k_2 \rangle = \langle 2, 3 \rangle \leftrightarrow k = 9$$

$$\langle k_1, k_2 \rangle = \langle 1, 4 \rangle \leftrightarrow k = 10$$

$$\begin{aligned} \langle k_1, k_2 \rangle &= \langle 5, 1 \rangle \leftrightarrow k = 11 \\ &\vdots \end{aligned}$$

(L.19)

などと対応付けるとしよう.

$$k_1 + k_2 = 2, 3, 4, \dots$$

であつて, $k_1 + k_2 = q$ を満たす対 $\langle k_1, k_2 \rangle$ は $(q-1)$ 個あるから,

$$k = [1 + 2 + \dots + (k_1 + k_2 - 2)] + k_2 = \frac{(k_1 + k_2 - 2) \cdot (k_1 + k_2 - 1)}{2} + k_2 \quad (\text{L.20})$$

と求められる. □

ここで, b_1, b_2 は共に, 1 より小さくない正整数であるとして, $k_j (j=1, 2)$ を

$$k_j = 1, 2, \dots, 2b_j + 1, j = 1, 2 \quad (\text{L.21})$$

としよう.

このとき, 添え字の集合 L を

$$k \in L = \{1, 2, \dots, n\} \quad (\text{L.22})$$

として,

第 $k \in L$ 番目の三角関数 $\phi_k(x) = \phi_k(x_1, x_2)$ を

$$\phi_k(x) = \phi_k(x_1, x_2) = \phi_{k_1}(x_1) \phi_{k_2}(x_2) \quad (\text{L.23})$$

と定義する. ここに, $\phi_{k_1}(x_1), \phi_{k_2}(x_2)$ はL1章で定義されている三角関数である.

そうすると, 式(L.11)の正規直交性が成立しており, $\{\phi_k\}_{k \in L}$ は正規直交系である.

1次展開式(L.1)は, 直交展開

$$\forall \varphi \in L_2(M; dx_1 dx_2), \varphi(x_1, x_2) = \sum_{k \in L} c_k \cdot \phi_k(x_1, x_2) + \varphi_{\perp}(x_1, x_2), x = \langle x_1, x_2 \rangle \in M \quad (\text{L.24})$$

$$\text{such that } \forall k \in L, (\varphi_{\perp}, \phi_k) = 0 \quad (\text{L.25})$$

となる. 式(L.5)を適用して, 各1次展開係数 c_k は, 式(L.14)の如く求められる.

1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ は完全であるから,

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき, } \|\varphi_{\perp}\| \rightarrow 0 \quad (\text{L.26})$$

が成り立つ.

(付録L終わり)

(著者 鈴木昇一, 論文題目 パターンの変形量を外積演算による情報量で捉えよう, 文教大学情報学部情報研究no.36投稿論文, 投稿年月日 2006年9月28日(木))

