連想形認識方程式と，カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$での情報容量

鈴木　昇一

An Equation of Associative Recognition and, Information Capacity in Situation of Space of Categorical-Membership Knowledges $<\Phi,2^J>$

Shoichi Suzuki

あらまし

カテゴリ帰属知識の変容の程度（変形量）を定義する外積演算が提案されている．この外積演算を使って，

（1$）有限個のカテゴリ帰属知識に蓄えることのできる情報容量C

が，式(9.22)の形で提案される．この情報容量Cは，多段階連想形認識システムRECOGNITRONが生成する多段階帰納推理によってもたらされる認識過程が獲得する情報量を表現できる．

その後，シャノンの相互情報量と同じ意味を備えた情報量としての，

（2$）2つのカテゴリ帰属知識の相互情報量$MI$

が式(7.13)の形で提案される．言い換えれば，カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$内に今1つのカテゴリ帰属知識$<\eta,\mu>$が存在する程度，存在しない程度を各々，表わしている新しい2種類の情報量（相互情報量）

$$MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)\ ,\ MI(<\varphi,\gamma>:\neg<\eta,\mu>)$$

が2式(7.13)，(7.24)の形で提案されている．また，式(1.16)のカテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$でのモデル構成作用素［62］$\mathfrak{T}$に不変な式(7.13)の形式の情報容量

$$MI'(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)\equiv MI(\ \mathfrak{T}<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$$

を使って，類似度関数

$$\mathfrak{S}\mathfrak{M}\,(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)$$

が式(8.15)の形で構成される．

SS理論［3］，［4］では，入力パターン$\varphi\in\Phi$に関する知識であるカテゴリ帰属知識を多段階にわたり変容させながら，RECOGNITRONがS.Suzukiが提唱した連想形認識方程式(1.17)を近似的に解く過程は入力パターン$\varphi\in\Phi$を認識する過程である．**連想形認識方程式(1.17)を近似的に解く過程であるような，式(5.29)の多段階認識過程の情報容量**も計算され，この情報容量により多段階認識過程が特徴付けられることも示されている．初期条件として，式(5.30)を採用した式(5.29)の多段階帰納推理認識過程については，3式(9.30)～(9.32)の設定を採用したときの，式(7.13)の相互情報量MI，式(9.22)の情報容量Cが出来るだけ大きいことが望ましい．この考えを採用し，更に，RECOGNITRON

が連想形認識方程式(1.17)を近似的に解く場合，帰納推理の働きで選定される式(4.6)のカテゴリ番号のリストの列を探索する戦略の選び方へ，式(7.13)の情報容量MI，式(9.22)の情報容量Cを応用する．

キーワード

（1）外積　（2）パターンの基本領域　（3）モデル構成作用素　（4）類似度関数　（5）大分類関数　（6）カテゴリ選択関数　（7）認識システムRECOGNITRON　（8）情報容量　（9）相互情報量　（10）多段階帰納推理　（11）カテゴリ帰属知識

Abstract

An exterior product which defines the grade（the amount of modification）of a change of categorical-membership knowledges is presented here. Using this exterior product

（1$）information capacity C which can be stored in the finite categorical-membership knowledges

is proposed in the form of a formula（9.22）.This information capacity C can express the amount of information which the recognition process which multi-stage inductive inference which multi-stage associative recognition system RECOGNITRON generates brings about acquires.

Then,

（2$）an amount MI of mutual information of two categorical-membership knowledges equipped with the same meaning as the amount of mutual information proposed by Claude E.Shannon

are presented in the form of a formula（7.13）.

$MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$ and $MI(<\varphi,\gamma>:\neg<\eta,\mu>)$

which expresses respectively the grade to which one categorical-membership knowledge $<\eta,\mu>$ exists now in the categorical-membership knowledge $<\varphi,\gamma>$, and the grade not existing are proposed in two formulas（7.13）and（7.24）. Moreover, a similarity-measure function

$\mathfrak{SM}(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)$

is constituted in a form of a formula（8.15）using the information capacity

$MI'(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)\equiv MI(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$

of the form of a formula（7.13）which is invariant to the model-construction operator［62］$\mathfrak{T}$ defined in the categorical-membership knowledge space $<\Phi,2^J>$ of a formula（1.16）.

In SS theory［3］,［4］, a process in which RECOGNITRON solves approximately an equation（1.17）of associative recognition equation proposed by S.Suzuki while transfiguring throughout many stages the categorical-membership knowledges which are knowledges about the input pattern $\varphi\in\Phi$ is a process in which RECOGNITRON recognizes the input pattern $\varphi\in\Phi$.

The information capacity of the multi-stage recognition process（5.29）which is the process in which RECOGNITRON solves approximately an equation（1.17）of associative recognition is also calculated, and it is shown that the multi-stage recognition process is characterized by this information capacity. About the multi-stage inductive inference recognition process of the formula

（5.29）which adopted the formula（5.30）as an initial condition , it is desirable for the mutual information MI of a formula（7.13）and the information capacity C of a formula（9.22）to be large as much as possible when adopting a setup of three expressions（9.30）～（9.32）.When this idea is adopted and RECOGNITRON solves approximately an equation（1.17）of associative recognition further, to how to choose the strategy of searching for the sequence of the list of category numbers of the formula（4.6）selected by work of inductive inference, the information capacity MI of a formula（7.13）and the information capacity C of a formula（9.22）are applied.

Key words

（1）exterior product　（2）basic domain of patterns　（3）model-construction operator
（4）similarity-measure function　（5）rough classifier　（6）category-selection function
（7）recognition system RECOGNITRON　（8）amount of mutual information
（9）information capacity　（10）multi-stage induction reasoning
（11）categorical-membership knowledge

第1章　まえがき

認識システムRECOGNITRONが連想形認識方程式(1.17)を近似的に解く過程は入力パターン$\varphi\in\Phi$を認識する過程である．連想形認識方程式(1.17)を近似的に解く過程であるような，式(5.29)の多段階認識過程の情報容量が計算する方法が研究される(本論文の目的)．

幾何学が図形の性質を研究し，図形を分類する学問分科と位置づけられるのと同様に，狭義の情報学(informatics)とは，他の学問分科に役立つように，情報を分類する学問分科である．情報の色々な性質，働きを研究し，それを基に情報を分類する学問分科である．分類するのに最も有効な方法の1つとして，

S.Suzukiのパターン認識の数学的知能情報論(SS-theory)［3]，［4]
で展開されている情報間の類似性を使う方法がある．モデル構成作用素T，類似度関数SM，大分類関数BSC，カテゴリ選択関数CSFが各々，満たさなければならない4公理axiom 1～4以外の設定を排除しているSS理論は，パターンというものを再帰的に定義し，原パターンの代りとなるモデル，パターン間の類似度，パターンの帰属する複数の候補カテゴリを抽出する方法を公理論的に捉えたため，ありとあらゆる認識の働きをシミュレートできるようになった万能性認識システムRECOGNITRONを誕生させている．RECOGNITRONは「多カテゴリパターン認識のためのA coarse-to-fine strategy(A coarse-to-fine strategy for multicategory pattern recognition)」を採用して，パターンを認識する機能をもったシステムである．SS理論を適用して構築された式(1.1)の認識システムRECOGNITRONの思考状態と考えられるカテゴリ帰属知識をパターンと考えて，このパターンに対し認識の働きを発現できるC-RECOGNITRONをSS理論の枠組で構成できるという認識の階層［62]を浮き彫りにできることは，SS理論が普遍妥当性を備えている証拠である，と思える．

Although SS theory［3]，［4] is universal,it is not closed.Anything can be described by it,but something must remain unanalyzed.

情報学の1部門であるパターン認識学は，感性に訴える情報と考えられるパターンの性質，働きを

研究し，それを基にパターンを分類するシステム（パターン認識システム）の構成に関する学問分科である．数学的には，微分可能な多様体が解析学の立場からは，パターンであると思われる．この方向に沿ってSS理論を進歩させるためには，外積の情報学（更に，一般化して微分形式の情報学）を研究する必要がある．

S.Suzukiは以前，有限個のパターンの外積演算を2種類，提案したが［60］，［61］，外積の情報学の1部を研究している2文献［60］，［61］の続編である本論文では，認識システムRECOGNITRONがパターンに対し持つ有限個のカテゴリ帰属知識（パターンと，そのパターンが帰属するかもしれない複数の候補カテゴリの番号のリストとからなる順序対）の外積演算が式(9.17)の形で提案され，カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$の元$<\omega_j,[j]>$からなる式(6.18)の1次独立な系（完全正規直交系）$<\Omega,J>$を導入し，この系を基底とするような有限個のカテゴリ帰属知識の1次展開（SS展開；標準分解）（定理6.3）を利用し，有限個のカテゴリ帰属知識の外積を式(9.17)の形で新しく提案している．

Shannonのエントロピー（平均情報量）は確率系の乱雑さの度合い，無秩序の程度を計量するものであり，大きいエントロピーを持つ確率系ほど潜在的な多様性をより多く秘めているという意味で，表現能力が大きい．最も確からしい確率分布（most probable distribution）とは，エントロピーを最大にする分布のことであり，確率系の表現能力が最も高められた状態で実現されるものである．

パターン$\varphi\in\Phi$がパターン$\eta\in\Phi$に一致するまで変形しているとき，最大の変形量は$\varphi\in\Phi$が$\eta\in\Phi$と角度$\dfrac{\pi}{2}$をなしているときに得られると考え，2つのベクトル$\varphi,\eta\in\Phi$のなす長方形の面積の対数

$$\log_e\|\varphi\|\cdot\|\eta\|=-\frac{1}{2}\cdot\log_e\frac{1}{\|\varphi\|^2\cdot\|\eta\|^2}$$

が最大の変形量であると定義する．実際には，2つのベクトル$\varphi,\eta\in\Phi$が角度$(0\leq)\theta(\leq\pi)$をなしているときの変形量は，同様に考えて，2つのベクトル$\varphi,\eta\in\Phi$のなす平行四辺形の面積の対数

$$\log_e\|\varphi\|\cdot\|\eta\|\cdot\sin\theta=-\frac{1}{2}\cdot\log_e\frac{1}{\|\varphi\|^2\cdot\|\eta\|^2\cdot\sin^2\theta}$$

である．両者の差

$$\log_e\|\varphi\|\cdot\|\eta\|-\log_e\|\varphi\|\cdot\|\eta\|\cdot\sin\theta=\log_e\frac{1}{\sin\theta}$$

が，変形に余裕がある程度を表す情報量$MI(\varphi:\eta)$である．$MI(\varphi:\eta)$は受信側で取り去られる平均的な不確定さ（平均情報量）であるシャノンの相互情報量（amount of mutual information）に相当する．

2つのパターンの代りに，$<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>\in<\Phi,2^J>$を考えて，カテゴリ帰属知識の変容の余裕の程度（変形量）である相互情報量$MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$が定義される．

有限個のカテゴリ帰属知識の変容の余裕の程度（変形量）を定義するための基礎演算として，外積演算を定義する．この外積演算を使って，

（1$）有限個のカテゴリ帰属知識に蓄えることのできる情報容量C

が，式(9.22)の形で提案される．この情報容量Cは，RECOGNITRONが生成する多段階帰納推理がもたらす認識過程が獲得する情報量を表現できる．

その後，シャノンの相互情報量と同じ意味を備えた情報量としての，

（2$）2つのカテゴリ帰属知識の相互情報量$MI$

が式(7.13)の形で提案される．言い換えれば，カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$内に今1つのカテゴリ帰属知識$<\eta,\mu>$が存在する程度，存在しない程度を各々，表わしている新しい2種類の情報量（相互情報量）

$MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$, $MI(<\varphi,\gamma>:\neg<\eta,\mu>)$

が2式(7.13), (7.24)の形で提案されている．また，式(1.16)のカテゴリ帰属知識空間 $<\Phi,2^J>$ でのモデル構成作用素［62］$\mathfrak{T}$に不変な式(7.13)の形式の情報容量

$MI'(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)\equiv MI(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$

を使って，類似度関数

$\mathfrak{S}\mathfrak{M}(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)$

が式(8.15)の形で構成される．

SS理論では，入力パターン $\varphi\in\Phi$ に関する知識であるカテゴリ帰属知識を多段階にわたり変容させながら，RECOGNITRONが連想形認識方程式(1.17)を近似的に解く過程は入力パターン $\varphi\in\Phi$ を認識する過程である．式(5.29)の多段階認識過程の情報容量も計算され，多段階認識過程が特徴付けられることも示された．初期条件として，式(5.30)を採用した式(5.29)の多段階帰納推理認識過程については，3式(9.30)～(9.32)の設定を採用したときの，式(7.13)の相互情報量 MI ，式(9.22)の情報容量 C が出来るだけ大きいことが望ましい．この考えを採用し，更に，RECOGNITRONが連想形認識方程式(1.17)を近似的に解く場合，帰納推理の働きで選定される式(4.6)のカテゴリ番号のリストの列を探索する戦略の選び方へ，式(7.13)の情報容量 MI ，式(9.22)の情報容量 C を応用する．

1.1　カテゴリ帰属知識空間 $<\Phi,2^J>$ で動作する認識システムRECOGNITRON

S.Suzukiが構築した認識システム

$$\text{RECOGNITRON}=<\Phi_B,T,SM,BSC> \tag{1.1}$$

への入力，からの出力は，以下に説明されるカテゴリ帰属知識

$$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J> \tag{1.2}$$

である．ここに，

R^{++} :すべての正実数の集合　(1.3)

Φ_B :パターンと判明しているすべてのパターン φ の集合(基本領域；basic domain)　(1.4)

として，S.Suzukiの再帰領域方程式(reflective domain equation)

$$\Phi=\Phi_B\cup T\cdot\Phi\cup R^{++}\cdot\Phi \tag{1.5}$$

の解

$$\Phi=R^{++}\cdot(\Phi_B\cup T\cdot\Phi_B) \tag{1.6}$$

$$\equiv\{r^{++}\cdot\varphi\mid\varphi\in\Phi_B\}\cup\{r^{++}\cdot T\varphi\mid r^{++}\in R^{++},\varphi\in\Phi\} \tag{1.7}$$

はRECOGNITRONが処理の対象とするすべてのパターン φ の集合であり，また，

$$2^J\equiv\{\gamma\mid\gamma\subseteq J\} \tag{1.8}$$

は，カテゴリ番号 $j(\in J)$ の全集合 J のすべての部分集合 γ のなす集合(the set of all subsets of J)，つまり，全カテゴリ番号集合 J のべき集合(power set)を表す． J の部分集合

$$\gamma=\{j_1,j_2,\cdots,j_k\}(\subseteq J) \tag{1.9}$$

は，単射性(injection)

$$j_p=j_q\Rightarrow p=q \tag{1.10}$$

が成り立っている場合，リスト(list)

$$\gamma=[j_1,j_2,\cdots,j_k](\in 2^J) \tag{1.11}$$

として表現されることがある．

処理の対象とする問題のパターン $\varphi\in\Phi$ には，あるひとつの番号(カテゴリ番号) $j\in J$ が定まる場

合がある．このとき，パターン $\varphi\in\Phi$ は，全カテゴリ集合

$$\mathfrak{C}(J)\equiv\{\mathfrak{C}_i|i\in J\in 2^J\} \tag{1.12}$$

の内の，$\omega_j(\in\Omega\subset\Phi)$ を代表パターンとする第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属しているという．代表パターン集合 Ω，基本領域 Φ_B，パターン集合 Φ，内積 (φ,η)，ノルム $\|\varphi\|\equiv\sqrt{(\varphi,\varphi)}$ を持つ可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の4者間には，包含関係

$$\Omega\equiv\{\omega_j\mid j\in J\}\subset\Phi_B(\ni\{0\})\subset\Phi\subset\mathfrak{H} \tag{1.13}$$

が成立している．

画像認識・画像理解にその有効な適用例［36］，［39］，［40］がある多段階帰納推理メカニズムを内蔵した万能性連想型認識システムRECONITRONを構成するのに必要な4成分 Φ_B,T,SM,BSC については，式(1.4)，並びに，5.1節で説明されている．カテゴリ選択関数 CSF は定理5.1で示されるように，2成分 SM,BSC で構成される．

カテゴリ帰属知識について，説明しよう．処理の対象とする問題のパターン $\varphi\in\Phi$ について，

φ が，有限個のカテゴリ $\mathfrak{C}_i(i\in\gamma)$ からなる集合

$$\mathfrak{C}(\gamma)\equiv\{\mathfrak{C}_i|i\in\gamma\in 2^J\} \tag{1.14}$$

の内の何れか1つのカテゴリ $\mathfrak{C}_i$ に帰属している可能性があるというカテゴリ事前知識

を，式(1.1)の認識システムRECOGNITRONが持っている場合，このカテゴリ事前知識を式(1.2)の如く，表わす.

「認識システムが処理の対象とするパターンに対し持つカテゴリ事前知識」 (1.15)

という概念は，S.Suzukiのパターン認識の数学的理論［3］，［4］が初めて提出したものである．順序対（ordered pair）$<\varphi,\gamma>$ はRECOGNITRONがパターン $\varphi\in\Phi$ についての持つカテゴリ帰属知識（categorical membership-knowledge）と呼ばれる．パターン $\varphi\in\Phi$ とカテゴリ番号 $j\in J$ のリスト $\gamma\in 2^J$ とを変えて得られるすべての $<\varphi,\gamma>$ の集まり

$$<\Phi,2^J>(\ni<\varphi,\gamma>) \tag{1.16}$$

は，カテゴリ帰属知識空間（space of categorical membership-knowledges）と呼ばれており，その代数的･幾何学的･解析的な諸性質は既に明らかにされている［3］，［4］.

処理の対象とする問題のパターン $\varphi\in\Phi$ に対し，そのパターンモデル（標準形；canonical form）$T\varphi\in\Phi$ に次の五解釈（一）～（五）を与えることができる：

（一） $T\varphi\in\Phi$ は $\varphi\in\Phi$ の近似である．

（二） $T\varphi\in\Phi$ は $\varphi\in\Phi$ の要約である．

（三） $T\varphi\in\Phi$ の持つ情報は $\varphi\in\Phi$ の持つ情報の一部である．

（四） $T\varphi\in\Phi$ は $\varphi\in\Phi$ の整形化である．

（五） $T\varphi\in\Phi$ は恰も，$\varphi\in\Phi$ であるかのように錯覚される． □

式(1.16)のカテゴリ帰属知識空間 $<\Phi,2^J>$ には，或る半順序 $\leq_\Delta^*$ を導入でき，この半順序関係 $\leq_\Delta^*$ の上限 $\bigsqcup_\Delta^*$ が定まる（付録Cを参照）．このとき，入力パターン φ について式(1.2)のカテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$ を事前知識に持つRECOGNITRONは，S.Suzukiの連想形認識方程式

$$<\phi,\lambda>=_\Delta<T\varphi,\gamma>\bigsqcup_\Delta{}^* TA(\mu)T\cdot<\phi,\lambda>,\mu\subseteq\gamma \tag{1.17}$$

を多段階連想形近似過程で解いて，解

$$<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J> \tag{1.18}$$

を得，

(1#) 入力パターン φ はカテゴリ集合 $\mathfrak{C}(\lambda)$ の内の，どれか1つのカテゴリに帰属する

というように，(多段階)認識する．同時に，RECOGNITRONは，

(2#) 入力パターンφはパターンϕに再生させられる

というように，(多段階)連想する．

あまり変形していないような入力パターンφについては，通常，ある1つのカテゴリ番号$j \in J$が定まり，式(1.18)の解く$<\phi,\lambda>$内の2成分λ,ϕは，

$$\lambda = [j], \phi = T\omega_j \tag{1.19}$$

である．

1.2　記憶しているパターンωのモデル$T\omega$が入力パターンφのモデル$T\varphi$をどれ位含んでいるかを計量するには？

2つのパターンφ,ηに共通に蓄えられている情報の量としての情報容量(information capacity)とも考えられる相互情報量(amount of mutual information) $MI(\varphi:\eta)$と，パターンφに蓄えられているが，パターンηに蓄えられていない情報の量としての情報容量$MI(\varphi:\neg\eta)$について説明する．

パターンφの中に，パターンηが含まれている程度は，情報容量

$$MI(\varphi:\eta) \equiv \log_e \frac{\|\varphi\|}{\left\|\varphi - \frac{(\varphi,\eta)}{(\eta,\eta)}\cdot\eta\right\|} \tag{1.20}$$

$$\text{但し}\quad \|\varphi\|\cdot\|\eta\| = 0 \text{のとき，} \log_e \frac{\|\varphi\|}{\left\|\varphi - \frac{(\varphi,\eta)}{(\eta,\eta)}\cdot\eta\right\|} \equiv \infty \tag{1.21}$$

として，計量される.また，パターンφの中に，パターンηが含まれていない程度は，情報容量

$$MI(\varphi:\neg\eta) \equiv \log_e \frac{\|\varphi\|}{\left\|\frac{(\varphi,\eta)}{(\eta,\eta)}\cdot\eta\right\|} \tag{1.22}$$

$$\text{但し}\quad \|\varphi\|\cdot\|\eta\| = 0 \text{のとき，} \log_e \frac{\|\varphi\|}{\left\|\frac{(\varphi,\eta)}{(\eta,\eta)}\cdot\eta\right\|} \equiv 0 \tag{1.23}$$

として，計量される．

原パターンφの代りに，原パターンφと同じ感性を与えるそのパターンモデル$T\varphi$を使って，記憶しているパターンωのモデル$T\omega$が入力パターンφのモデル$T\varphi$をどれ位含んでいるか，含んでいないかを計量することが求められる．このためには，2式(1.20)，(1.22)の代りに，$\eta \equiv \omega$として，情報容量$MI(T\varphi:T\eta), MI(T\varphi:\neg T\eta)$を使えばよい．

実は，φからηへ向かう間の角を$(0 \le)\theta(\le \pi)$とすると，$MI(\varphi:\eta), MI(\varphi:\neg\eta)$は，

$$MI(\varphi:\eta) \equiv \log_e \frac{1}{\sin\theta} \tag{1.24}$$

$$MI(\varphi:\neg\eta) \equiv \log_e \frac{1}{|\cos\theta|} \tag{1.25}$$

というように，再表現される．更に，$MI(\varphi:\eta), MI(\varphi:\neg\eta)$の使いやすい表現は

$$MI(\varphi:\eta) = -\frac{1}{2}\cdot\log_e\left[1-\left|\frac{(\varphi,\eta)}{\|\varphi\|\cdot\|\eta\|}\right|^2\right] \quad (1.26)$$

$$MI(\varphi:\neg\eta) = -\frac{1}{2}\cdot\log_e\left|\frac{(\varphi,\eta)}{\|\varphi\|\cdot\|\eta\|}\right|^2 \quad (1.27)$$

であることも判明している.

1.3　有限個のパターンが蓄えることの出来るこれまでの情報容量

1.3.1　$|L|$ 次元ユークリッド空間 $R^{|L|}$ の内積 $[\varphi,\eta]$，ノルム $|\varphi|$

可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の実数値元 ϕ_k の系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ は実数値の1次独立な系とする．$\mathfrak{H}$ での内積，ノルムを各々，$(\varphi,\eta), \|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi,\varphi)}$ とする.

有限集合 L を

$$|L| \equiv n \geq 3,\ L = \{1,2,\cdots,n\} \quad (1.28)$$

とする．$\mathfrak{H}$ の元 φ は次のように1次展開できる：

$$\varphi = \sum_{k\in L} c_k\cdot\phi_k + \varphi_\perp, \quad (1.29)$$

where

$$\forall k\in L, (\varphi_\perp,\phi_k) = 0 \quad (1.30)$$

□

同様に，$\mathfrak{H}$ の元 η が

$$\eta = \sum_{k\in L} d_k\cdot\phi_k + \eta_\perp, \quad (1.31)$$

where

$$\forall k\in L, (\eta_\perp,\phi_k) = 0 \quad (1.32)$$

と展開されるとしよう.

2展開式に（1.29），（1.31）について，各 c_k, d_k は実定数であるとき，φ,η に対し，$|L|$ 次元ユークリッド空間 $R^{|L|}$ を導入し，その内積 $[\varphi,\eta]$，ノルム $|\varphi|$ を

内積（scalar product,inner product）$[\varphi,\eta] = \sum_{k\in L} c_k\cdot d_k$ （1.33）

ノルム（norm）$|\varphi| = \sqrt{[\varphi,\varphi]}$ （1.34）

と定義する．ここで，

$$\frac{[\varphi,\eta]}{|\varphi|\cdot|\eta|} = 0 \quad \text{if} \quad |\varphi|\cdot|\eta| = 0 \quad (1.35)$$

と約束する.

1.3.2　外積 $\varphi_2\otimes\varphi_3\otimes\cdots\otimes\varphi_n$

本項では，$n-1$ 個のパターン $\varphi_2,\varphi_3,\cdots,\varphi_n$ の外積（外積パターン）$\varphi_2\otimes\varphi_3\otimes\cdots\otimes\varphi_n$ を定義する［61］.

任意のパターンを $\varphi\in\Phi$ とし，

$$\varphi \equiv \varphi_1 \quad (1.36)$$

とおく．有限個のパターンの集合

$$\varphi_j,\ j\in L = \{1,2,\cdots,n\} \quad (1.37)$$

は1次独立な系とする．このとき，各パターン $\varphi_j \in \mathfrak{H}$ を

$$\varphi_j = \sum_{k \in L} c_k(j) \cdot \phi_k + (\varphi_j)_{\perp} = \sum_{k=1}^{n} c_k(j) \cdot \phi_k + (\varphi_j)_{\perp} \tag{1.38}$$

ここに，$\forall k \in L = \{1,2,\cdots,n\}, ((\varphi_j)_{\perp}, \phi_k) = 0$　(1.39)

と1次展開する．

$\varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_n$ の外積（vector product,exterior product）$\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$ を次のように定義する：

$$\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n = \begin{vmatrix} \phi_1 & c_1(2) & c_1(3) & \cdots & c_1(n) \\ \phi_2 & c_2(2) & c_2(3) & \cdots & c_2(n) \\ \phi_3 & c_3(2) & c_3(3) & \cdots & c_3(n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_n & c_n(2) & c_n(3) & \cdots & c_n(n) \end{vmatrix} \tag{1.40}$$

□

1.3.2　有限個のパターン $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_n$ の情報容量 $C(\varphi_1 : \varphi_j, j = 2,3,\cdots,n)$

本項では，有限個のパターン $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_n$ に蓄えることの出来る情報の量としての，情報容量 $C(\varphi_1 : \varphi_j, j = 2,3,\cdots,n)$ を定義する．

式(1.36)のパターン $\varphi = \varphi_1$ と式(1.40)の外積パターン $\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$ との内積 $[\varphi, \varphi_2 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_n]$ は，n 個のパターン $\varphi, \varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_n$ の広がりの程度をもたらす［61］．

この広がりの程度 $[\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_n]$ を使って，式(1.37)の有限個のパターン $\varphi_j, j \in L = \{1,2,\cdots,n\}$ の情報容量(information capacity) $C(\varphi_1 : \varphi_j, j = 2,3,\cdots,n)$ を，

$$C(\varphi_1 : \varphi_j, j = 2,3,\cdots,n) \equiv C(\varphi_1 : \varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_n)$$
$$\equiv -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \left| \frac{[\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n]}{|\varphi_1| \cdot |\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n|} \right|^2 \right] \tag{1.41}$$

という具合に定義する．情報容量 $C(\varphi_1 : \varphi_j, j = 2,3,\cdots,n)$ は，式(1.40)の外積 $\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$ が $\varphi = \varphi_1$ に歪んで(変形して)いると想定したとき，$\varphi = \varphi_1$ からその歪みを取り去って得られる歪みの対数量である．或いは，$\varphi = \varphi_1$ が外積 $\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$ に歪んで(変形して)いると想定したとき，外積 $\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$ からその歪みを取り去って得られる歪みの対数量でもある．情報容量 $C(\varphi_1 : \varphi_j, j = 2,3,\cdots,n)$ はパターン $\varphi \equiv \varphi_1$ とパターン $\eta \equiv \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$ とが互いに似ている程度（$\varphi \equiv \varphi_1, \eta \equiv \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$ 間に非直交関係 $[(\varphi, \eta] \neq 0$ が成立する程度を反映した類似性の程度)を情報量として計量したものである．

簡単には，n 個のパターン $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_n$ に共通に蓄えることのできる情報の量が情報容量 $C(\varphi_1 : \varphi_j, j = 2,3,\cdots,n)$ であると，いってよい．

尚，任意のパターン $\varphi \equiv \varphi_1$ と外積 $\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$ との内積 $[\varphi, \varphi_2 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_n]$ の表現は，

$$\begin{aligned} &[\varphi, \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n] \\ &= [\varphi_1, \varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n] \\ &= c_k(j)(1 \le k \le n, 1 \le j \le n) \text{ を第 } k \text{ 行第 } j \text{ 列とする行列の行列式} \end{aligned} \tag{1.42}$$

$$
=\begin{vmatrix} c_1(1) & c_1(2) & c_1(3) & \cdots & c_1(n) \\ c_2(1) & c_2(2) & c_2(3) & \cdots & c_2(n) \\ c_3(1) & c_3(2) & c_3(3) & \cdots & c_3(n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n(1) & c_n(2) & c_n(3) & \cdots & c_n(n) \end{vmatrix} \tag{1.43}
$$

である．

1.4　有限個のカテゴリ帰属知識が蓄えることの出来る本研究の情報容量と，パターン情報処理の場面における，新規性，有効性，信頼性

本論文では，1.2節，1.3節で説明されているパターンに関する研究を式(1.2)のカテゴリ帰属知識に適用する．つまり，数理的な基礎を確立した後，式(1.16)のカテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$の，n個の元

$$<\varphi_1,\gamma_1>,<\varphi_2,\gamma_2>,<\varphi_3,\gamma_3>,\cdots,<\varphi_n,\gamma_n> \tag{1.44}$$

に蓄えられる新しいカテゴリ知識情報容量

$$C(<\varphi_1,\gamma_1>:<\varphi_2,\gamma_2>,<\varphi_3,\gamma_3>,\cdots,<\varphi_n,\gamma_n>) \tag{1.45}$$

を求める．本論文では，式(1.16)のカテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$の2元$<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>$について，カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$の中に，カテゴリ帰属知識$<\eta,\mu>$が含まれている程度$MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$，含まれていない程度$MI(<\varphi,\gamma>:\neg<\eta,\mu>)$の表現を求める．つまり，新しい2種類の情報量

$$MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>) \tag{1.46}$$

$$MI(<\varphi,\gamma>:\neg<\eta,\mu>) \tag{1.47}$$

を提案している．更に，類似度関数

$$\mathfrak{S}\mathfrak{M}(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>) \tag{1.48}$$

が，式(1.16)のカテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$でのモデル構成作用素［62］$\mathfrak{T}$に不変な情報容量

$$MI'(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)\equiv MI(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>) \tag{1.49}$$

を使って構成される．

画像内容の理解，言語音声の認識に関し，計算機シミュレーションを行い，その有効性を確かめなければならない．,

尚，パターンとは感性の対象となる情報であり，感性情報を分解することは感性の働きを分析し，その結果として，感性の働きを実現することは知能情報学において要求されていることである．この要求に応えるために必要な3種類の感性情報分解については，付録Aで説明されている．また，4付録B～Eを設け，本研究内容を理解しやすくしておいた．更に，付録Fにおいて，式(1.1)の万能性認識システムRECOGNITRONが陰に内蔵している帰納推理に基づく認識推論規則の健全性・完全性について説明し，RECOGNITRONの認識能力について理解を深めるのに助けとなるように配慮しておいた．

第2章　パターン集合Φの表現空間は可分なヒルベルト空間である

一般に，SS理論［3］,［4］では，処理の対象とする問題のパターンφの集合Φは或る可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の零元0を含む或る部分集合であるが，構成的集合として，式(1.6)の如く設定される.パターン集合Φの表現空間は可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の部分集合であり，式(1.6)で規定されている．Φは，包含不等式(1.13)を満たしていなければならない.

本章では，包含不等式(1.13)での可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$について説明し，典型的な1例として，$\mathfrak{H}=L_2(M,dm)$が説明される．次に，$\mathfrak{H}$の大部分の元がパターンとして意味のないものであることに意識し，意味のないものを式(1.1)のRECOGNITRONへの入力から排除できるという意味で,式(1.6)のパターン集合Φが何故RECOGNITRONへの入力集合として採用するかが，パターンの帰納的定義を使い，説明される.

2.1　加法＋が導入されている群としての線形ベクトル空間としての，可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$

位相空間(topological space) Xが稠密(dense)な可算部分集合を持つとき，Xを可分な空間(separable space)であるという.

$$\text{内積}(\varphi,\eta)\text{，ノルム}\|\varphi\|\equiv\sqrt{(\varphi,\varphi)} \tag{2.1}$$

が導入されている一般抽象ヒルベルト空間(加法＋が導入されている群としての線形ベクトル空間)$\mathfrak{H}$は距離

$$dis(\varphi,\eta)\equiv\|\varphi-\eta\| \tag{2.2}$$

が導入され得る距離空間であり，この距離で位相が定義された位相空間である．パターンφを内積(φ,η)，ノルム$\|\varphi\|\equiv\sqrt{(\varphi,\varphi)}$とする可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元としよう．$\mathfrak{H}$が可分(separable)とは，稠密な(dense)可算部分集合が$\mathfrak{H}$に存在することを指す.

完全な正規直交系が高々可算個からなっていれば、ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$は可分である．また，可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$には，高々可算個からなる完全な正規直交系を作ることができる　(2.3)

ことが証明されている．よって，一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$で高々可算個からなる完全な正規直交系が存在することと，一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$が可分なこととは同値であることに注意しておこう.

ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$とは内積が定義された無限次元であってよいベクトル空間(内積が定義され得る線形空間)のことであり，有限次元の場合を含む．4性質

(イ)　(φ，φ)≧0，かつ，「φ＝0⇔(φ，φ)=0」　(2.4)

(ロ)　(η，φ)は(φ,η)の共役複素数　(2.5)

(ハ)　($\varphi_1+\varphi_2$，η)＝(φ_1,η)＋(φ_2,η)　(2.6)

(ニ)　任意の複素定数aについて，

$$(a\cdot\varphi,\eta)=a\cdot(\varphi,\eta) \tag{2.7}$$

を満たすだけの，複素数値を与える内積(φ,η)というものが定義でき、高々可算個からなる完全な正規直交系が存在するというだけのヒルベルト空間$\mathfrak{H}$が可分な一般抽象という意味である.

2.2　可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}=L_2(M,dm)$

例えば，$\overline{\eta}$をηの複素共役として，

M ：q次元ユークリッド空間R^qの可測部分集合 (2.8)

$dm(x)$ ：正値ルベーグ・スティルチェス式測度 (2.9)

$x=<x_1,x_2,\cdots,x_q>\in M(\subseteq R^q)$ ：実数値q変数の直交座標系 (2.10)

を導入し，その内積(φ,η)，ノルム$\|\varphi\|$が，

$$(\varphi,\eta)=\int_M dm(x)\ \varphi(\mathrm{x})\cdot\overline{\eta}(\mathrm{x}) \tag{2.11}$$

$$\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi,\varphi)} \tag{2.12}$$

と与えられる線形空間（ベクトル空間）$\mathfrak{H}$が$\mathfrak{H}=L_2(M,dm)$である．

2.3　パターンの帰納的定義

情報学では，システムが扱う対象に領域（domain）を整合的に指定することを，型付け（type-assignment）という．パターン認識システムが扱う対象であるパターン集合にS.Suzukiの理論以外では，領域を指定するという型付けがなされていないのは，それらの理論が型付けが可能でないほど，何がしかの欠点を備えているからであろう．パターン集合Φの表現空間は可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$であるとすると，$\mathfrak{H}$の大部分の元がパターンとして意味のないものであるから，型付けが必須であることが明らかにも拘らず．

無限個の対象（例えば，処理の対象とする問題のパターンφの集合Φ）を定義する最も確実な方法の1つは，以下の帰納的定義，再帰的定義（recursive definition）である：

（1）先ず，最初に，具体的な対象を与える．

（2）次に，具体的な対象を使って，別の具体的な対象を定義する．

（3）以上の(1)，(2)で定義されたもののみが今定義しようとする対象である．□

S.Suzukiは，以下のパターンの帰納的定義に従い，式(1.5)の再帰的領域方程式を導き，その解を式(1.6)の如く求め，式(1.1)のRECOGNITRONに関し，パターン集合Φの型付けをパターン認識学の分野で初めて成し遂げた：

［パターンの帰納的定義］

$\mathfrak{H}$の零元0を含む基本領域（basic domain）$\Phi_B\subset\mathfrak{H}$を導入する．

①Φ_Bの元$\varphi\in\mathfrak{H}$はパターンである．

②φがパターンならば，$a\cdot\varphi,T\varphi$はパターンである．ここに，aは任意の正の実数である．

③以上の①，②により，パターンと判明するもののみがパターンである．□

2.4　パターンφのモデル$T\varphi$

前節のパターンの帰納的定義で登場しているパターンモデル$T\varphi$について説明しておこう．

式(1.1)のRECOGNITRONは，上首尾なパターン認識の働きを達成するため，パターンの形状における多少の違いを排除して，パターン$\varphi\in\Phi$のモデル$T\varphi\in\Phi$を確保する必要がある．

モデル$T\varphi\in\Phi$の典型的なものは，$\mathfrak{H}$の元ϕ_ℓからなる1次独立な系$\{\phi_\ell\}_{\ell\in L}$を導入して得られる1次形式

$$T\varphi=\sum_{\ell\in L}u(\varphi,\ell)\cdot\phi_\ell \tag{2.13}$$

である．ここに，$u(\varphi,\ell)$はパターン$\varphi\in\Phi$から抽出された第$\ell\in L$番目の特徴量である．このパター

ンモデル$T\varphi \in \Phi$内の各特徴量$u(\varphi, \ell)$に関し，
（1）抽出される特徴量からの，雑音の除去
（2）ユニタリ的な座標変換の下で不変な特徴量の抽出
（3）抽出された特徴量の離散化
が可能であり［3］，［4］，パターンの形状$\varphi \in \Phi$を整形した効果を$T\varphi \in \Phi$に取り入れることが出来る．

第3章　カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$とは？

S.Suzukiは，パターン$\varphi \in \Phi$の意味(を)濾過(する)領域(semantic filtering domain)として，式(1.16)のカテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$を考えた．カテゴリ帰属知識とは，認識システムが入力パターン$\varphi \in \Phi$に対し持つ知識であり，パターン$\varphi \in \Phi$と，このパターン$\varphi \in \Phi$が帰属するかも知れない複数の候補カテゴリからなる式(1.14)の集合$\mathfrak{C}(\gamma)$内のカテゴリ番号のリスト$\gamma \in 2^J$とのなす順序対$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$で表される．意味濾過領域，或いは簡単には意味領域と呼ばれてもよい$<\Phi,2^J>$に対し，パターン領域Φは構文(が)変形(した)領域(syntactic transformation domain)，或いは，簡単には，構文領域と呼ばれてよい．構文領域Φから，意味領域$<\Phi,2^J>$へ

$$\varphi \in \Phi \to <\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$$

と移し，意味領域$<\Phi,2^J>$上でなされる意味変換の多段階処理

$$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>\to\cdots\to<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J>\text{ such that }\gamma \supseteq \lambda$$

が，式(1.1)の認識システムRECOGNITRONが行う連想形認識処理であり，具体的には，RECOGNITRONが連想形認識方程式(1.17)(文献［3］の付録GのG2節を参照)を近似的に解く過程がこの連想形認識処理である．

意味(濾過)領域$<\Phi,2^J>$はその2元間に変形されていないこと(undeformedness)の度合いを表す半順序$\leq_\Delta^*$(付録Cの定義C2)を設けることの出来る集合である．任意のカテゴリ番号$j \in J$について，カテゴリ帰属知識$<T\omega_j,[j]>\in<\Phi,2^J>$は最も変形されていないものの1つである(式(6.18)の$<\Omega,J>$を参照)．

2つのカテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$，$<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J>$の間に成り立つ2元関係

$$<\varphi,\gamma>\leq_\Delta^*<\phi,\lambda> \tag{3.1}$$

について，次の4解釈(1#)～(2#)が可能である：
（1#）$<\varphi,\gamma>$は$<\phi,\lambda>$の近似である．
（2#）$<\varphi,\gamma>$は$<\phi,\lambda>$に要約される．
（3#）$<\phi,\lambda>$は$<\varphi,\gamma>$の情報を含む．
（4#）$<\phi,\lambda>$は$<\varphi,\gamma>$に変形されている．　□

カテゴリ帰属知識を変換する写像(意味変換写像)は，半順序$\leq_\Delta^*$を保存する意味で単調であり，しかも，増加列の極限を保存する意味で連続であるように設定される．

或るカテゴリ番号リスト$\mu \in 2^J$を見つけ，カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$上の，リスト$\mu \cap \lambda \in 2^J$を助変数に持つ連続関数(意味変換写像；semantic-conversion function)

$$TA(\mu \cap \lambda)T:<\Phi,2^J>\to<\Phi,2^J> \tag{3.2}$$

の最小不動点(least fixed point)を，連想形認識方程式(1.17)の解として求める働き(求解の手続き)がS.Suzukiの万能性連想型認識システムRECONITRONの連想形認識の働きであると解釈される．求めなければならない最小不動点は，通常，或るカテゴリ番号$j \in \lambda \subseteq J$が存在して，

$$<T\omega_j,[j]>\in<\Phi,2^J> \tag{3.3}$$

の形をしており，この求められた最小不動点が入力パターン$\varphi\in\Phi$の意味(表示的意味；denotative meaning)である.

第4章　各認識段階で表象(パターンモデル)を想起しながら，入力パターンを多段階認識する認識システムRECOGNITRON

認識のモデル(構築される認識システム)とは常に複雑な現実の認識の働きの単純化である．単純化の程度は目的とする認識の働きが機能しなければならない状況に応じ，様々である．可能な限りの単純さで，現実の認識の本質を最もよく写しとっているようなものでなければならない．認識の働き，過程を数理的に解明・説明でき，例えば，何故，誤認識が生じるのかを説明できる理論でなくてはならない．工学的には，現実の認識の働きに比べ誤った認識結果が多くないという応用可能性で，認識のモデルの良否が決まる.

本章では，S.Suzukiが構築したパターン認識の数学的理論(SS理論［3］,［4］)を適用して，現実の個別性を無視して得られた式(1.1)の認識システムのモデルRECOGNITRONが公理論的方法で説明される．カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$での情報容量を提案する本研究内容は，このRECOGNITRONを構成する場面において，並びに，RECOGNITRONの連想形認識機能を分析する場面において，活用され得る.

4.1　パターン認識システムの帰納学習経験とは？

似た者同士を集め，形成された各々の集団にそれぞれ，区別し得る名前(カテゴリ名；category)を与えることを分類(classification)という.分類後，個々のパターンはカテゴリ名で呼ばれることになる.有限次元のベクトル(パターンの一種)の分類に比較的役立つのが，support vector machineであり，SS理論でのパターン認識システムRECOGNITRON内の構造要素である大分類関数の構成に応用できることが示されている［33］.

心理学では，以前に学習され認知されたものを再認する働きが認識である［1］が．工学では,

(1#)　正規化$\longrightarrow$特徴抽出$\longrightarrow$識別　(4.1)

というように,

事前処理(正規化)を行い，事前処理結果から特徴の抽出を実行し，特徴抽出結果を記憶している内容と照合することによりカテゴリ名を決定すること(分類，識別)

が認識の働きであるとされている.

認識の対象となる非言語の情報表現をパターン(pattern)といい，パターンφを認識する機能を備えたシステムがパターン認識システム(recognizer)と呼ばれるものである［1］.S.Suzukiはパターンの集まりΦという概念を再帰領域方程式(1.5)の解で捕らえている．パターンφが属する領域Φを明示しながら展開する理論は，現在に至ってもS.Suzuki理論［3］,［4］以外に存在していない.

S.Suzukiが構築したパターン認識システムRECOGNITRONにおいては，パターンからそれと関連ある今1つのパターンを多段階に渉り連想するという想起の働きで，入力パターンの帰属するカテゴリを決定するという認識の働きを達成する．このRECOGNITRONにおいては，S.Suzukiが考案した連想型認識方程式(1.17)の解$<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J>$を求める多段階の帰納推理過程が入力パターン$\varphi\in\Phi$を認識する働きである．あまり形が崩れていない入力パターンφについては，この方程式(1.17)の

解

$$<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J> \tag{4.2}$$

は,

（2#） 入力パターン φ から連想されるパターン $\phi = T\omega_j$（或るカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン ω_j のモデル）（連想・想起の結果）

と,

（3#） 入力パターン φ が帰属するカテゴリ名 $\mathfrak{C}_j$ の番号（カテゴリ番号）$j\in J$ のただ1つの要素からなるリスト（単要素からなるリスト；singleton）$\lambda=[j]\in 2^J$（分類結果）

との，式（3.3）の順序対（ordered pair）

$$<\phi,\lambda>=_{\Delta}<T\omega_j,[j]>\ \in<\Phi,2^J> \tag{4.3}$$

であることが，S.Suzukiにより示された［4］．ここに，式（1.16）のカテゴリ帰属知識空間 $<\Phi,2^J>$ 上の2元関係 $=_{\Delta}$ は等形式関係と呼ばれるものであり,

$$<\varphi,\gamma>=_{\Delta}<\phi,\lambda>\Leftrightarrow[\varphi=\phi\wedge\gamma=\lambda] \tag{4.4}$$

という具合に定義されている［3］.

式（1.1）の認識システムRECOGNITRONは，パターン $\varphi\in\Phi$ を見たり聞いたりした場合，通常,

（4#） このパターンのモデル $T\varphi\in\Phi$

と,

（5#） このパターンの帰属するカテゴリ名の番号の候補のリスト $\gamma\in 2^J$

とを予想する．このパターンのモデル $T\varphi\in\Phi$ と，このパターンのカテゴリ候補番号のリスト $\gamma\in 2^J$ との順序対（ordered pair）$<T\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$ が認識システムがパターン φ に対し持つ知識であり，カテゴリ帰属知識と呼ばれる．式（1.1）のRECOGNITRONが連想形認識方程式（1.17）を解く過程で，この $<T\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$ が帰納推理の働きで多段階変換されて得られるであろう式（3.3）の順序対 $<T\omega_j,[j]>$ は，カテゴリ候補の番号リスト λ の要素が唯1つの要素 $j\in J$ である場合のカテゴリ帰属知識の特別なものである．順序対 $<T\omega_j,[j]>$ は,

（6#） 認識システムRECOGNITRONが入力パターン φ に対し持つ事前知識である $<T\varphi,J>$ がcorase to fine strategyにより精製されて得たカテゴリ帰属知識である

と解釈され,

（7#） カテゴリ帰属知識の，多段階にわたる変換（多段階の帰納推理過程；連想形認識方程式（1.17）の求解過程）

$$\begin{aligned}&<T\varphi,J>(=_{\Delta}<\phi_0,\lambda_0>)\to<\phi_1,\lambda_1>\to<\phi_2,\lambda_2>\to\cdots\\&\to<\phi_s,\lambda_s>\\&\{=_{\Delta}TA(\mu_{s-1})T\cdot<\phi_{s-1},\lambda_{s-1}>=_{\Delta}<TA(\mu_{s-1}\cap\lambda_{s-1})T\phi_{s-1},CSF(\phi_{s-1},\mu_{s-1}\cap\lambda_{s-1})>\}\to\cdots\\&\to<T\omega_j,[j]>(=_{\Delta}<\phi_t,\lambda_t>)\end{aligned} \tag{4.5}$$

が，各認識段階でカテゴリ番号リスト $\mu_{s-1}(0\le s-1\le t-1)\in 2^J$ を帰納推理の働きで見つけて得られる式（5.16）で定義される意味変換写像（構造受精変換）$TA(\mu_{s-1})T$ で得られたならば，多段階連想形認識システムRECOGNITRONは,

（8#） 入力パターン φ は第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属する（認識結果）

と，認識断定することができる．それのみならず，認識システムRECOGNITRONは,

（9#） 入力パターン φ を整形した結果は $T\omega_j$ である（連想・想起の結果）

と，連想断定することができる．この（8#）からは，認識システムRECOGNITRONは,

（10#）入力パターンφに似ているパターンの集まりの表象は$T\omega_j$である
という帰納学習経験をした，ということができる．式(1.1)のRECOGNITRONが連想形認識方程式(1.17)を解く過程においては，カテゴリ番号のリストの列

$$\mu_0,\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{s-1},\mu_s,\cdots,\mu_t\in 2^J \tag{4.6}$$

が帰納推理の働きで発見されねばならないことに注意しておく．

4.2　パターン連想型認識システムRECOGNITRON

S.Suzukiのパターン知能情報論においては，式(1.1)のパターン認識システム(多段階連想型認識システム)RECOGNITRON$=<\Phi_B,T,SM,BSC>$が構成されている．SS公理系(axiom 1～4)を満たす4要素Φ_B,T,SM,BSCが構成されれば，認識のこのモデルRECOGNITRONは定まり，1つの主観的認識の働きが確保されることになる．

もともと．パターンの，RECOGNITRON内の表現というものは画像，音声，匂いなどを関数，曲線，有限次元のベクトルなどで数理的に表現したものである．S.Suzukiが構築したパターン認識の数学的理論［3］，［4］は，RECOGNITRONが処理するパターンφの集まりΦを$\Phi_B(\subset\mathfrak{H})$と$T$とを使って以下の式(1.6)の如く，指定する．ここに，集合$\mathfrak{H}$は選ばれた或る可分なヒルベルト空間(可換加法群の無限次元完備化)である．再帰的領域方程式(1.5)の解であるΦの元としてパターンというものを数理的に定義することは，S.Suzukiの数学的理論［3］，［4］以外の他のパターン認識理論がなし得なかったことである．

パターンと判明しているφの集合(基本領域)$\Phi_B(\subset\Phi)$が与えられたとしよう．処理の対象とする問題のパターンφの集合Φとモデル構成作用素(model-construction operator)Tの順序対$[\Phi,T]$はSS理論［3］，［4］のaxiom 1を満たさなければならない．集合Φは，式(1.6)の$\Phi=R^{++}\cdot(\Phi_B\cup T\cdot\Phi_B)$の如く，表される．$T\varphi\in\Phi$はパターン$\varphi\in\Phi$の代りとなるパターン(パターンモデル)であり，RECOGNITRONがモデル$T\varphi\in\Phi$を見たり聞いたりしたならば，原パターン$\varphi\in\Phi$と同じように見えたり聞こえたりするようなものである($T\varphi\in\Phi$と$\varphi\in\Phi$との間の同一知覚原理)．モデル構成作用素と呼ばれる登場しているこの写像TはΦの元φをΦの唯1つの元$T\varphi$に対応させる写像であり，

$$T:\Phi\to\Phi \tag{4.7}$$

と表される．写像Tはパターン記述器(pattern descripter)であり，モデル$T\varphi$はパターンφを認識システムRECOGNITRONの主観的観点から簡素に記述しなおしたものである．

情報の表現法として，大きく分けて，パターン(pattern)，記号(symbol)の2種類がある．パターンは，記号と異なり，変形を受けているのが通常である．パターンは，

(1) その1部分が他のパターンに隠されて欠落していたり，
(2) 変形して構造が崩れていたり，
(3) 雑音が加わり変質していたり，
(4) 規則的，或いは，不規則な座標変換がなされていたり

する．このような変形を受ける以前の状態に戻すことをパターン正規化(normalization of patterns)という．パターンφに対し正規化で得られたパターンをパターンモデルといい，$T\varphi$で表す．モデル構成写像と呼ばれる写像Tの満たすべき4性質は，5.1.1項のaxiom 1の(ⅰ)の後半，(ⅱ)の後半，(ⅲ)の後半，並びに(ⅳ)である．

パターン認識の数学的理論(SS理論)［3］，［4］での公理axiom 2，3を各々，満たさなければならない類似度関数SM，大分類関数BSCが導入されている．SMは，Φの元φが，代表パターンω_j

(第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の持つ諸性質を典型的に代表しているパターン)の集合(1次独立な系)

$$\Omega = \{\omega_j \mid j \in J\} \tag{4.8}$$

内の任意の代表パターン ω_j と似ているか，或いは，ω_j からどの程度異なっているかを1より大きくない実数として計量する働きを備えており，また，BSC は，パターン φ が帰属しているかも知れないカテゴリの1つの候補とパターン φ が帰属していないかも知れない残りのカテゴリの複数の候補を各々，1,0 の形で識別し，この2値識別出力1,0 を作り出す働きを備えている．

SS理論での公理axiom 4を満たさなければならないカテゴリ選択関数 CSF は類似度関数 SM，大分類関数 BSC が選定されれば，文献［3］の付録Eの定理E1により決まる．CSF は，パターンが帰属している複数のカテゴリの候補を絞り込む働きを備えている．

候補カテゴリの番号を要素とするリスト $\mu \in 2^J$ を助変数に持つ構造受精作用素

$$A(\mu) : \Phi \to \Phi \text{ ,where } \mu \in 2^J \tag{4.9}$$

も用いられるが，式(4.8)の代表パターンの集合 $\Omega = \{\omega_j \mid j \in J\}$ を式(4.7)のモデル構成作用素 T で変換して得られる1次独立な代表パターンモデル $T\omega_j$ の集合

$$T \cdot \Omega = \{T\omega_j \mid j \in J\} \tag{4.10}$$

と，類似度関数 SM，大分類関数 BSC さえ与えられれば，写像 $A(\mu)$ も決まる(写像 $A(\mu)$ は，文献［3］の6.5節の2式(6.12)，(6.13)で定義されている)．

式(4.10)の代表パターンモデルの集合 $T \cdot \Omega$ は1次独立な系であるように，式(4.7)のモデル構成作用素 T が選ばれていなければならない．

式(4.7)のモデル構成作用素 T は，原パターン φ の持つ情報を反映した形で，φ のモデル $T\varphi$ の形で φ を復元する．モデル $T\varphi$ は観測後のパターン φ に存在している雑音とか，変形とか，座標変換とかが除去されている可能性が大であるパターンといえよう．

もともと，刺激としてのパターンから今1つの記憶しているパターンを連想する機能は，刺激としてのパターン内にある雑音とか，変形とか，座標変換とかが除去されている形でのパターン復元機能である．このモデル $T\varphi$ を使うパターン認識システムRECOGNITRONでは，入力パターン φ が帰属するであろ候補カテゴリに関し多段階帰納推理を行い，表象付き連想形認識の働きで，或るカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン ω_j のモデル $T\omega_j$ として原パターン η を復元することになる．認識システムRECOGNITRONにより正しく復元された場合，カテゴリ $\mathfrak{C}_j$ は原パターン η が帰属するカテゴリとなっている．このように正しく復元された場合，原パターン η を観測し得られた入力パターン φ 内に存在している雑音とか，変形とか，座標変換とかが完全に除去されているといえよう．

SS公理系(4axiom 1～4)を背景としたパターン復元機能を提案しており，本研究成果を取り入れこれまでの計算機シミュレーション［36］，［39］，［40］をやり直すことができる(信頼性)．

Shannonの情報理論は，

送信側の持っている平均的な不確定さに関し，受信側で取り去られる平均的な不確定さ(平均相互情報量)(得られた平均的な情報量)を最大にすること

を考え，得られたこの最大値を通信路容量(channel capacity)と称えている．送信できる最大の平均情報量のことである．

以下では，有限個のパターン $\varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_n$ の外積(vector product,exterior product)

$$\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \tag{4.11}$$

が提案されている［60］．その後，パターン φ のモデル $T\varphi$ と，各 φ_k の代りにそのモデル $T\omega_k$ を採用して得られる外積 $T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes \cdots \otimes T\omega_m$ との内積

$$[\ T\varphi\ ,\ T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes \cdots \otimes T\omega_m\ ] \tag{4.12}$$

などを使って定義される量

$$C(T\varphi : T\omega_j, j=1,2,\cdots,m) \equiv C(T\varphi : T\omega_1, T\omega_2, \cdots, T\omega_m)$$
$$\equiv -\frac{1}{2}\cdot \log_e\left[1-\left|\frac{[T\varphi, T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes \cdots \otimes T\omega_m]}{|T\varphi|\cdot|T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes \cdots \otimes T\omega_m|}\right|^2\right] \tag{4.13}$$

は，$T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes \cdots \otimes T\omega_m$ が $T\varphi$ に歪んでいるとき，$T\varphi$ から取り去られた歪みの対数であり，通信(communication)における通信路容量に対応して，認識(recognition)における $T\varphi$, $T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes \cdots \otimes T\omega_m$ の情報容量(information capacity)と定義されてよい量であることが示される．カテゴリ番号の有限集合 J は

$$J=\{1,2,\cdots,m\} \tag{4.14}$$

であるとし，また，$|T\varphi|$，$|T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes \cdots \otimes T\omega_m|$ は各々，$T\varphi$，$T\omega_1 \otimes T\omega_2 \otimes \cdots \otimes T\omega_m$ のノルムである．

第5章　多段階連想形認識システムRECOGNITRON $=<\Phi_B, T, SM, BSC>$ の動作概要

多段階帰納推理の働きによる表象付き連想形認識の働きはありとあらゆるパターン認識の働きを再現でき，万能である(RECOGNITRON as a universal machine)［3］．

本章では，カテゴリ番号リスト $\mu \in 2^J$ を助変数に持つ式(3.2)の写像 $TA(\mu)T$ を具体的に定義することにより，この万能性認識の働きが説明される．カテゴリ帰属知識を解に持つ式(1.17)の，S.Suzukiの発見したSS連想形認識方程式(SS equation of associative recognition)の求解過程が多段階パターン認識過程であり，その解が認識可能，認識不能，認識不定の3種類に分類されることなどが明らかにされる．式(1.1)の認識システムRECOGNITRONがどのような認識推論規則を内蔵しているかが説明される．

5.1　カテゴリ帰属知識を変換する認識システムRECOGNITRON

ある連想型認識方程式(1.17)を解いている過程は，S.Suzukiが提唱した式(1.1)の多段階連想形認識システムRECOGNITRON $=<\Phi_B, T, SM, BSC>$ が入力パターン $\varphi \in \Phi$ を認識する過程であることなどが説明される．

5.1.1　多段階パターン認識

パターン $T\varphi$ を原パターン φ の代りとなるモデル(パターンモデル)としよう．

パターンモデルを生成する式(4.7)の写像 $T:\Phi \to \Phi$ は次のaxiom 1［3］，［4］を満たさなければならない．式(1.5)の再帰領域方程式は，Φ がaxiom 1の(ⅱ)，(ⅲ)の2前半を満たす最小の集合であるとみれば，導かれることがわかる．実は，式(1.4)の基本領域 Φ_B を導入し，式(4.7)の写像 $T:\Phi \to \Phi$ がaxiom 1の(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)の3後半，並びに，(ⅳ)を満たすものとすれば，順序対(ordered pair) $[\Phi, T]$ はaxiom 1を満たすことが示される．

<u>Axiom 1</u>(パターン集合 Φ とモデル構成作用素 T との対【 Φ, T 】の満たすべき公理)

(ⅰ)(零元 0 の Φ -包含性と，零元 0 の $T-$ 不動点性；fixed-point property of zero element under mapping T)

$0 \in \Phi \wedge T0 = 0.$

（ⅱ）（Φ の錐性，Tの正定数倍吸収性；cone property）

$\forall \varphi \in \Phi, a \cdot \varphi \in \Phi \wedge T(a \cdot \varphi) = T\varphi$

for any positive real number $a \in R^{++}$.

（ⅲ）（Φ の埋込性(embeddedness)と，T のベキ等性(idempotency)）

$\forall \varphi \in \Phi, T\varphi \in \Phi \wedge T(T\varphi) = T\varphi.$

（ⅳ）（写像Tの非零写像性；non-zero mapping property of T）

$\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0.$ □

上述のaxiom 1を満たす順序対$[\Phi, T]$を考え，$\varphi \in \Phi$ のモデル$T\varphi \in \Phi$（$\varphi \in \Phi$ の標準形）は，次の5性質(!#)～(5#)を満たすように構成できる：

(1#)（雑音の除去）パターン$\varphi \in \Phi$ から，$\varphi \in \Phi$ の帰属するカテゴリの代表パターン$\omega \in \Phi$ に比べ形状を崩れさせている雑音を取り除く.

(2#)（座標変換の除去）パターン$\varphi \in \Phi$ に作用している座標変換を取り除く.

(3#)（欠落情報の補充と冗長な情報の除去）パターン$\varphi \in \Phi$ に欠けている情報を補ったり，余分に含まれている情報を取り除く.

(4#)（簡単化）パターン$\varphi \in \Phi$ を，簡単な構造を備えた形式に直す.

(5#)（同一形式化）同じ意味内容を表すのに見かけ上異なる幾つかの形状を同一の形式（標準形）に直す. □

帰納推理の働きで多段階パターン変換（多段階帰納推理；連想形認識方程式(1.17)の求解過程式(4.5)において，各認識段階でのカテゴリ帰属知識$<\phi_s, \lambda_s>$の前半ϕ_sのみを考えた過程）

$$\exists j \in J, (\varphi \to)\phi_0 \equiv T\varphi \to \phi_1 \to \phi_2 \to \cdots \to \phi_{t-1} \to \phi_t \equiv T\omega_j \tag{5.1}$$

を行い，

①（連想）$\varphi \in \Phi$ に$T\omega_j$ に対応させ（$\varphi \in \Phi$ から式(4.10)の，記憶している代表パターンモデル集合$T \cdot \Omega$ 内の或る元$T\omega_j$ を検索，或いは，連想し，

②（認識）$\omega_j (\in \Omega \subset \Phi)$ を代表パターンとする第$j \in J$ 番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$ に，入力パターン$\varphi \in \Phi$ を分類する（$\varphi \in \Phi$ を認識する）

という連想型認識処理（多段階パターン認識）を遂行する認識システムRECOGNITRON［3］，［4］が，S.Suzukiにより考案されている.

今，RECOGNITRONがパターンに対し持つカテゴリ帰属知識を使って，少し詳しく説明しよう．認識とはカテゴリ帰属知識の変換機能であって，式(4.5)の求解過程からわかるように，式(3.3)の$<T\omega_j, [j]>$の形のカテゴリ帰属知識に最終認識段階で変換することだと説明される．最終認識段階のカテゴリ帰属知識$<\phi, \lambda>$は通常，その後半のカテゴリ番号リスト$\lambda \in 2^J$ は唯1つの要素からなるリスト(singleton)である.

5.1.2　カテゴリ帰属知識空間$<\Phi, 2^J>$

代数構造として加法演算が導入された集合$\mathfrak{H}$は内積，ノルムを各々，$(\varphi, \eta), \|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ とするある可分なヒルベルト空間としよう．2つの集合$\Phi, 2^J$は，

（一）　$\Phi (\ni 0)(\subset \mathfrak{H})$ ：処理の対象とする問題のパターンφ の集合（パターン集合）　(5.2)

（二）　$2^J \equiv \{\gamma \mid \gamma \subseteq J\}$ ：（パターン$\varphi \in \Phi$ の帰属するかも知れない）カテゴリ$\mathfrak{C}_j$ の添え字（カテゴリ番号）を要素とするすべての部分集合（カテゴリ番号集合）（或いは，この部分集合の

リストによる表現）の集合 (5.3)

としよう．集合2^Jの元は順序の付いた要素の並びとして，集合の今1つの表現であるリストとして表されることがある．

認識システムRECOGNITRONが，処理の対象とする問題のパターン$\varphi \in \Phi$について，

φが，有限個のカテゴリ$\mathfrak{C}_i (i \in \gamma)$からなる式(1.14)の集合$\mathfrak{C}(\gamma)$の内の何れか1つのカテゴリに帰属している可能性があるというカテゴリ事前知識 (5.4)

を持っている場合，このカテゴリ事前知識を式(1.2)の如く表す．パターンφを連想形認識処理し終えたRECOGNITRONは式(1.2)のカテゴリ事前知識$<\varphi,\gamma>$をカテゴリ事後知識$<\phi,\lambda>$に最終認識段階で変換している．$<\phi,\lambda>$は通常，式(3.3)の$<T\omega_j,[j]>$の形をしている．連想形認識方程式(1.17)の求解過程式(4.5)において，最終の認識段階（第t段階）の$<\phi,\lambda> =_\Delta <\phi_t,\lambda_t>$が$<T\omega_j,[j]>$の形をするとき，パターン$\varphi$は第$j \in \gamma \subset J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に認識可能であるという．そして，パターン$\varphi$は$T\omega_j$に再生される（$\varphi$から$T\omega_j$が連想・想起される）という．

この種のカテゴリ知識$<\varphi,\gamma>$のすべての集合がカテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$である．

5.1.3 カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$上の同値関係$=_\Delta$，半順序関係$\le_\Delta^*$，半順序関係$\le_\Delta^*$を含む最小の同値関係$\sim_\Delta^*$，半順序関係$\le_\Delta^*$に関する上限$\bigsqcup_\Delta^*$

$<\Phi,2^J>$上の同値関係$=_\Delta$は，式(4.4)で定義されている．

$<\Phi,2^J>$上の半順序$\le_\Delta^*$の定義［4］は少し込み入っているが，付録Cで説明されている．

先ず，カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$の構造的複雑度の程度を与えるSSポテンシャル$E(\varphi,\gamma)$が付録Bの定義B1で説明されている．このSSポテンシャルなどを使い，$<\Phi,2^J>$上の2元関係$\le_\Delta$が定義C1で定義される．その後，2元関係$\le_\Delta$は反射律，反対称律を満たすが，推移律を満たさないという欠点を克服するために，反射律，反対称律，推移律を満たす，$<\Phi,2^J>$上の2元関係としての半順序関係$\le_\Delta^*$が定義C2で定義される．更に，$<\Phi,2^J>$上の2元関係$\sim_\Delta^*$は定義C3で定義される．$\sim_\Delta^*$は同値関係であり，$\le_\Delta^*$を含む最小の同値関係であることが，定理C2で明らかにされている．最後に，カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$上の半順序関係$\le_\Delta^*$に関する上限$\bigsqcup_\Delta^*$が定義C4で定義されている．

5.1.4 構造受精変換と呼ばれる式(3.2)の写像$TA(\mu)T :< \Phi,2^J > \to < \Phi,2^J >$

カテゴリ番号リスト$\mu \in 2^J$を助変数に持つ構造受精作用素（structural-fertilization operator）と呼ばれる式(4.9)の写像$A(\mu):\Phi \to \Phi$が，

式(4.10)の，1次独立な代表パターンモデル集合$T \cdot \Omega$，並びに，

類似度関数$SM : \Phi \times \Omega \to \{s \,|\le s \le 1\}$ (5.5)

大分類関数$BSC : \Phi \times J \to \{0,1\}$ (5.6)

を使って，次のように定義される：

（ⅰ）$\varphi = 0 \vee \mu = \phi$のとき

$$A(\mu)\varphi = 0. \tag{5.7}$$

（ⅱ）$\varphi \ne 0 \wedge \mu \ne \phi$のとき

（ⅱ-1）$\sum_{j \in \mu} BSC(\varphi, j) = 0$のとき

$$A(\mu)\varphi = \sum_{j \in \mu} SM(\varphi,\omega_j) \cdot T\omega_j. \tag{5.8}$$

よって，

$$\sum_{j\in\mu} SM(\varphi,\omega_j)=0 \text{ のとき，} \quad A(\mu)\varphi=0 \text{ である．} \tag{5.9}$$

（ⅱ-2） $\sum_{j\in\mu} BSC(\varphi,j)>0$ のとき

$$A(\mu)\varphi=\sum_{j\in\mu} SM(\varphi,\omega_j)\cdot BSC(\varphi,j)\cdot T\omega_j. \tag{5.10}$$

$$=\sum_{j\in\mu\wedge BSC(\varphi,j)=1} SM(\varphi,\omega_j)\cdot T\omega_j. \tag{5.11}$$

よって，

$$\sum_{j\in\mu\wedge BSC(\varphi,j)=1} SM(\varphi,\omega_j)=0 \text{ のとき，} \quad A(\mu)\varphi=0 \text{ である．} \tag{5.12}$$

□

式（4.9）の構造受精作用素 $A(\mu)$ の，上述の定義に登場している2式（5.5），（5.6）の2つの関数 SM,BSC は各々，次のaxiom 2，axiom 3を満たさなければならない．

Axiom 2（類似度関数 SM の満たすべき公理）

（ｉ）（正規直交性；orthonormality）

$$\forall i,\forall j, SM(\omega_i,\omega_j)=\delta_{ij}(=1 \quad if \quad i=j,=0 \quad if \quad i\neq j).$$

（ⅱ）（規格化条件，確率性，正規性；probability condition,normalization）

$$\forall\varphi\in\Phi,\sum_{j\in J} SM(\varphi,\omega_j)=1.$$

（ⅲ）（写像 T の下での不変性；invariance under mapping T ）

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J, SM(T\varphi,\omega_j)=SM(\varphi,\omega_j).$$ □

Axiom 3（大分類関数 BSC の満たすべき公理）

（ｉ）（カテゴリ抽出能力；category separability）

$$\forall j\in J, BSC(\ \omega_j\ ,\mathrm{j})=1.$$

（ⅱ）（写像 T の下での不変性；invariance under mapping T ）

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J, BSC(T\varphi,j)=BSC(\varphi,j).$$ □

この $A(\mu)$ の両側にaxiom 1を満たす式（4.7）のモデル構成作用素 T を配置した写像

$$TA(\mu)T:\Phi\to\Phi \tag{5.13}$$

を考えることができる．式（5.13）の写像 $TA(\mu)T$ は，その定義域，値域が Φ である写像であるが，類似度関数 SM ，大分類関数 BSC を使って定義されるカテゴリ選択関数（category-selection function）

$$CSF:\Phi\times 2^J\to 2^J \tag{5.14}$$

を導入し，定義域，値域が共にパターン空間 Φ ではなく，カテゴリ帰属知識空間 $<\Phi,2^J>$ である写像

$$TA(\mu)T<\varphi,\gamma>=_\Delta<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J> \quad \text{for} <\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J> \tag{5.15}$$

に拡張できる．それには，カテゴリ番号リスト $\mu\in 2^J$ を助変数に持つ式（3.2）の写像 $TA(\mu)T$ を

$$TA(\mu)T<\varphi,\gamma>=_\Delta<TA(\mu\cap\gamma)T\varphi, CSF(\varphi,\mu\cap\gamma)>\in<\Phi,2^J> \tag{5.16}$$

,where

$$\phi=TA(\mu\cap\gamma)T\varphi \tag{5.17}$$

$$\lambda=CSF(\varphi,\mu\cap\gamma) \tag{5.18}$$

と定義すればよくて，この結果，式(5.13)の構造受精写像$TA(\mu)T:\Phi\to\Phi$は，構造受精変換と呼ばれる式(3.2)の写像$TA(\mu)T:<\Phi,2^J>\to<\Phi,2^J>$に拡張される．式(5.13)の写像$TA(\mu)T$はパターンをパターンへ変換するのみであるが，拡張された式(3.2)の写像$TA(\mu)T$はカテゴリ帰属知識をカテゴリ帰属知識へ変換することに留意しておく．

2式(5.16)，(5.18)に登場している式(5.14)のカテゴリ選択関数$CSF:\Phi\times 2^J\to 2^J$は，包含関係(inclusion relation)

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall\gamma\in 2^J,CSF(\varphi,\gamma))\subseteq\gamma\subseteq J\in 2^J \tag{5.19}$$

を満たし，然も，次のaxiom 4を満たすものとして，設定されなければならない．

<u>Axiom 4</u>(カテゴリ選択関数CSFの満たすべき公理)

(ｉ) $\varphi=0\vee\gamma=\phi$の場合

如何なるカテゴリ番号$k\in\gamma$も，$<\varphi,\gamma>$の有効な候補カテゴリの番号ではない．

(ⅱ) $\varphi\neq 0\wedge\gamma\neq\phi$であり，かつ，$SM(\varphi,\omega_k)=0\wedge BSC(\varphi,k)=0$の場合

カテゴリ番号$k\in\gamma$は，$<\varphi,\gamma>$の有効な候補カテゴリの番号ではない．

(ⅲ) $\varphi\neq 0\wedge\gamma\neq\phi$であり，かつ，$\sum_{k\in\gamma}BSC(\varphi,k)=0$の場合

$SM(\varphi,\omega_k)>0$であるようなカテゴリ番号$k\in\gamma$は，$<\varphi,\gamma>$の有効な候補カテゴリの番号である．

(ⅳ) $\varphi\neq 0\wedge\gamma\neq\phi$であり，かつ，$\sum_{k\in\gamma}BSC(\varphi,k)>0$の場合

(ⅳ-1) $BSC(\varphi,k)=0$なるカテゴリ番号$k\in\gamma$は，$<\varphi,\gamma>$の有効な候補カテゴリの番号ではない．

(ⅳ-2) $BSC(\varphi,k)=1$なるカテゴリ番号$k\in\gamma$は，$SM(\varphi,\omega_k)>0$であれば，$<\varphi,\gamma>$の有効な候補カテゴリの番号である．□

上述のaxiom 4を満たすカテゴリ選択関数CSFは，次の定理5.1で決定される．

［定理5.1］(カテゴリ選択関数CSFの構成定理)

次のように定義される式(5.14)の1つの写像CSFは式(5.19)と上述のaxiom 4を満たす：

(ｉ) $\varphi=0\vee\gamma=\phi$の場合

$$CSF(\varphi,\gamma)=\phi. \tag{5.20}$$

(ⅱ) $\varphi\neq 0\wedge\gamma\neq\phi$の場合

$$CSF(\varphi,\gamma)=$$

$$\begin{cases}\{k\in\gamma\mid SM(\varphi,\omega_k)>0\} & \text{if } \sum_{k\in\gamma}BSC(\varphi,k)=0 \qquad (5.21)\\ \{k\in\gamma\mid SM(\varphi,\omega_k)>0\wedge BSC(\varphi,k)=1\} & \text{if } \sum_{k\in\gamma}BSC(\varphi,k)>0 \qquad (5.22)\end{cases}$$

(証明) 文献［3］の定理E1である．□

5.1.5　連想形認識結果の3分類

第1階述語論理導出原理(resolution principle)による人工知能的問題解決法は，結論を否定して矛盾を導き出すという後ろ向き推論(backward reasoning)を採用した「定理の証明過程」である．S.Suzukiのパターン認識の数学的理論［3］，［4］は，カテゴリ帰属知識を解に持つ連想形認識方程式(1.17)を提案し，パターン$\varphi\in\Phi$を認識する過程はこの連想形認識方程式の解(最小不動点解；least fixed-point solution)を求めるような

$$\gamma=J\in 2^J \tag{5.23}$$

を採用した過程式(4.5)である．最小不動点解を求める過程(求解過程)は与えられた定理の第1階述

語論理による証明過程に対応する．

認識システムRECOGNITRONは，初期状態として，カテゴリ帰属知識

$$< T\varphi, \gamma > \in < \Phi, 2^J > \tag{5.24}$$

を採用した連想形認識方程式(1.17)の最小不動点解を求める形式で，初期状態のカテゴリ帰属知識 $< T\varphi, \gamma > \in < \Phi, 2^J >$ を多段階にわたり次第に変換して行き，通常の場合，最終的に式(3.3)の $< T\omega_j, [j] > \in < \Phi, 2^J >$ に到達したとき，入力パターン $\varphi \in \Phi$ の連想形認識(多段階帰納推理によるパターン認識)が終了する．この通常の場合，RECOGNITRONは，

入力パターン $\varphi \in \Phi$ は $T\omega_j \in \Phi$ に再生され，第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属する　(5.25)

という連想形認識結果を出力することになる．この場合は，

(1♯)（認識可能）入力パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属するする候補カテゴリは唯1つの $\mathfrak{C}_j$ である事態　(5.26)

をもたらしている．この認識可能事態の他に，次の5.2.5項に説明されているように，(2♯)認識不能事態，(3♯)認識不定事態の2つの事態が存在する．

(1♯)，(2♯)，(3♯)が連想形認識結果(連想形認識方程式(1.17)の解 $< \phi, \lambda >$)を分類して得られたものである．

5.2　連想形認識方程式の求解過程としての多段階パターン認識過程

多段階パターン認識(5.1.1項)はカテゴリ帰属知識を多段階にわたり変換して行くカテゴリ帰属知識の後半で実現される．多段階にわたり変換されるカテゴリ帰属知識の前半では，多段階パターン連想が行なわれており，入力パターンから連想されるパターンモデルの系列が得られる．そして，連想形認識方程式の解を求めて行く求解過程がカテゴリ帰属知識を多段階にわたり変換して行く過程である．

この求解過程を説明しよう．

5.2.1　連想形認識方程式の多段階求解過程における初期作業記憶の設定

処理の対象とする問題のパターン(入力パターン) $\varphi \in \Phi$ に関し，

$T\varphi$　belongs at least to one category $\mathfrak{C}_j$　of category-set $\mathfrak{C}(\gamma) \equiv \{ \mathfrak{C}_j | j \in \gamma \}$　(5.27)

と，認識システムRECOGNITRONは知っているものとしよう．入力パターン $\varphi \in \Phi$ は同一知覚原理に従い，そのモデル

$$T\varphi \in \Phi = R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B) \tag{5.28}$$

に置き換えられている(式(1.6)を参照)．それで，式(1.1)の $\mathrm{RECOGNITRON} = < \Phi_B, T, SM, BSC >$ の持っているこのカテゴリ帰属知識は，式(1.17)内の $< T\varphi, \gamma > \in < \Phi, 2^J >$ で表される．この $< T\varphi, \gamma >$ をRECOGNITRONが行う認識作業(不動点を求める認識計算)での，最初の作業記憶状態(初期条件)として採用しよう．式(5.23)の如く，$\gamma = J \in 2^J$ をとすることは，RECOGNITRONが入力パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属するかもしれない候補カテゴリにつき全く無知であることを意味している．

5.2.2　連想形認識方程式の多段階求解過程と，その終了条件

以上の準備の下で，実は，カテゴリ番号リスト $\mu \in 2^J$ を帰納推理の働きで選んだ後，連想形認識方程式(1.17)を解く過程の典型的なものが，多段階帰納推理認識システムRECOGNITRON［3］，［4］が原パターン $\varphi \in \Phi$ を認識する過程(式(4.5)のカテゴリ帰属知識の多段階にわたる変換過程)

$$<\phi_0,\lambda_0>,<\phi_1,\lambda_1>,<\phi_2,\lambda_2>,\cdots,<\phi_{t-1},\lambda_{t-1}>,<\phi_t,\lambda_t> \tag{5.29}$$

where

$$<\phi_0,\lambda_0>=_\Delta<T\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J> \text{ (initial condition)} \tag{5.30}$$

$$TA(\mu)<\phi_{s-1},\lambda_{s-1}>=_\Delta<\phi_s,\lambda_s>, s=1,2,\cdots,t-1,t \text{ (recursive process)} \tag{5.31}$$

である．カテゴリ帰属知識の多段階にわたる変換過程での終了条件（terminal condition）は，不動点方程式（fixed-point equation）

$$TA(\mu)T<\phi_t,\lambda_t>=_\Delta<\phi_t,\lambda_t> \tag{5.32}$$

の成立であり，このカテゴリ帰属知識$<\phi_t,\lambda_t>\in<\Phi,2^J>$が連想形認識方程式（1.17）の，半順序関係$\leq_\Delta^*$に関し最小の不動点（least fixed-point）としての解である．

5.2.3　類似度関数 SM に関する直交条件の下で，エネルギー不等式の成立

このとき，$<\varphi,\gamma>$のエネルギー（SSポテンシャル；SS-potential）を与える式（B.1）の関数$E:\Phi\times 2^J\to R^+$（非負実数全体の集合）を定義すれば，類似度関数SMに関する直交条件［4］の下で，エネルギー不等式

$$E(\phi_{s-1},\lambda_{s-1})\geq E(\phi_s,\lambda_s), s=1,2,\cdots,t-1,t \tag{5.33}$$

が成立する．尚，SMの直交性は付録Dで説明されている．

5.2.4　類似度関数 SM に関するミックスチュア条件の下で，エネルギー不等式の成立

類似度関数SMに関するミックスチュア条件［4］の下で，

$$\exists j\in J,<\phi_t,\lambda_t>=_\Delta<T\omega_j,[j]> \tag{5.34}$$

が成立し（認識可能事態），このとき，RECOGNITRONにより，入力パターン$\varphi\in\Phi$は

（1%）$T\omega_j$として再生され（パターン連想），

（2%）第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に分類・認識される

ということになる．尚，SMのミックスチュア性は付録Eで解説されている．

5.2.5　直交条件，ミックスチュア条件の一つが成立している類似度関数 SM を採用している場合の多段階認識

直交条件が成立していない類似度関数SMを採用しているRECOGNITRON $=<\Phi_B,T,SM,BSC>$においては，入力パターン$\varphi\in\Phi$の多段階連想形認識過程が有限の段階で終了するとは限らない．直交条件が成立していれば，多段階連想形認識過程が有限の段階で終了する．また，ミックスチュア条件が成立していない類似度関数SMを採用している$=<\Phi_B,T,SM,BSC>$においては，入力パターン$\varphi\in\Phi$の多段階連想形認識過程が有限の段階で終了した場合でも，

（2＃）（認識不能）

$$\exists j\in J,<\phi_t,\lambda_t>=_\Delta<0,\phi> \tag{5.35}$$

が成立している事態，つまり，

入力パターン$\varphi\in\Phi$の帰属するする候補カテゴリは唯1つも存在しない事態

（3＃）（認識不定）

$$\exists j_1,j_2,\cdots,j_p\in J(p\geq 2),<\phi_t,\lambda_t>=_\Delta<\phi_t,[j_1\quad j_2\quad\cdots\quad j_p]> \tag{5.36}$$

が成立している事態，つまり，

入力パターン$\varphi\in\Phi$の帰属するする候補カテゴリは複数個存在する事態

のいずれかが生じることがある.

5.2.6 直交条件，ミックスチュア条件が共に成立していない類似度関数 SM を採用している場合の多段階認識では振動過程，或いは周期2以上の循環過程になることがある

類似度関数 SM がaxiom 2を満たしていても，式(1.1)のRECOGNITRON $=<\Phi_B, T, SM, BSC>$ は，不動点方程式(5.32)が成立する認識段階番号 $t(=0,1,2,\cdots)$ が存在しなくて，式(5.30)の認識過程の代りに，

$$<\phi_0,\lambda_0>,<\phi_1,\lambda_1>,<\phi_2,\lambda_2>,\cdots,<\phi_{t-1},\lambda_{t-1}>,<\phi_t,\lambda_t>,<\phi_{t+1},\lambda_{t+1}>,<\phi_{t+2},\lambda_{t+2}>,\cdots \tag{5.37}$$

というように，有限の段階では不動点方程式(5.32)が成立しない振動過程，或いは

$$<\phi_0,\lambda_0>,<\phi_1,\lambda_1>,<\phi_2,\lambda_2>,\cdots,<\phi_{t-1},\lambda_{t-1}>,<\phi_t,\lambda_t>,<\phi_{t+1},\lambda_{t+1}>,<\phi_{t+2},\lambda_{t+2}>,\cdots$$

ここに,

$$<\phi_t,\lambda_t>=_{\Delta}<\phi_{t+n},\lambda_{t+n}>(n=2,4,6,\cdots) \tag{5.38}$$

というように，周期2の循環過程(cyclic process)，更に周期4以上の循環過程となることがある［39］.axiom 2を満たしている類似度関数 SM が直交条件，ミックスチュア条件を共に満たしていなくて，入力パターン $\varphi\in\Phi$ のモデル $T\varphi\in\Phi$ が式(4.10)の代表パターンモデル集合 $T\cdot\Omega$ 内のいずれの代表パターンモデル $T\omega_j\in T\cdot\Omega$ からも大きく変形している場合である.

5.2.7 多段階帰納推理の働きによる表象付き連想形認識(多段階パターン認識)

以上，RECOGNITRONが，T,SM,BSC を使い，入力パターン $\varphi\in\Phi$ のモデル $T\varphi\in\Phi$ と，$\varphi\in\Phi$ が帰属する候補カテゴリのリスト $\gamma\in 2^J$（式(5.23)を参照)を多段階にわたり絞りながら(式(5.30)を参照)，入力パターン $\varphi\in\Phi$ を認識することが説明された.

連想型認識システムRECOGNITRONに内蔵されている多段階帰納推理の働きによる表象付き連想形認識(多段階パターン認識)の働きが簡単に説明された.ここで，表象(representation)とは，多段階帰納推理の各段階で得られるカテゴリ帰属知識の前半で示されているパターンモデルのことであった．この表象(パターンモデル) $\phi_s\in\Phi(0\le s\le t)$ の列(式(A2.5)を参照)

$$\phi_0,\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_{t-1},\phi_t\in\Phi \tag{5.39}$$

を，各表象 $\phi_s\in\Phi(0\le s\le t)$ が帰属する候補カテゴリの集合 $\mathfrak{C}(\lambda_s)$ 内の各カテゴリ番号からなるリスト $\lambda_s\in 2^J(0\le s\le t)$ の列(式(A2.5)を参照)

$$\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{t-1},\lambda_t\in 2^J \tag{5.40}$$

に関連させて，分析することで，例えば，誤認識に至る諸原因を検討する余地が生まれる.

5.3 認識システムRECOGNITRONが内蔵する認識推論規則

認識システムRECOGNITRONが連想形認識方程式(1.17)を解いて，式(1.18)の解 $<\phi,\lambda>$ を得た場合，不動点認識推論規則(fixed-point inference-rule about associative recognition)の集合

$$if <T\omega_j,[j]> \text{ then } <T\omega_j,[j]>(TA(\mu_j)T\cdot<T\omega_j,[j]>=_{\Delta}<T\omega_j,[j]>,\text{where } j\in\mu_j),j\in J \tag{5.41}$$

なる公理系の下で，正しいとは限らない認識推論規則

$$if <T\varphi,\gamma> \quad \text{then } \langle\phi,\lambda\rangle \tag{5.42}$$

を内蔵していることになる．そして,

2命題 A,B について，含意命題 $A\to B=\neg A\vee B$ を導入すると,

$$\{A\wedge[A\to B]\}\to B$$

$=\neg\{A\wedge[A\to B]\}\vee B\ (=\neg B\to\{\neg A\vee\neg[A\to B]\})$ (5.43)

$=\neg\{A\wedge[\neg A\vee B]\}\vee B$ (5.44)

$=\neg\{[A\wedge\neg A]\vee[A\wedge B]\}\vee B$

$=\neg[A\wedge B]\vee B$

$=[\neg A\vee\neg B]\vee B$

$=tauto\log y$ (5.45)

であるから，3段論法（modus ponendo ponens）

$<T\varphi,\gamma>$が真であり，かつ，[$if <T\varphi,\gamma>$ then $\langle\phi,\lambda\rangle$]が真であれば，

$\langle\phi,\lambda\rangle$は真である　∵　式(5.43) (5.46)

或いは，

$\langle\phi,\lambda\rangle$が偽であれば，

$<T\varphi,\gamma>$が偽であるか，或いは，[$if <T\varphi,\gamma>$ then $\langle\phi,\lambda\rangle$]が偽である

∵　式(5.44) (5.47)

が実行されたことになる．この実行は，「入力パターン$\varphi\in\Phi$の帰属するカテゴリは？」という質問に関し，「一を聞いて十を知る」といった類の，正しいとは限らないカテゴリ帰属知識の変換

Find $\mu\in 2^J$ for $<\phi',\lambda'>\in<\Phi,2^J>$ in an appropriate manner

such that $TA(\mu)T\cdot<\phi',\lambda'>=_\Delta<\phi'',\lambda''>$ (if $<\phi',\lambda'>$ then $<\phi'',\lambda''>$) (5.48)

の複数回の適用でなされたとみなすことができる．

教師或いは外界から与えられた各カテゴリの，正解付き諸例，正解無し諸例，正解付き諸反例，正解無し諸反例を基盤として一般化を行うことにより，将来与えられるであろうカテゴリの例を正しく処理できるように，知識を獲得することは，機械（による）学習（machine learning）の分野では，帰納学習（inductive learning）といわれるが，式(5.42)の認識推論規則は正解付き事例，正解付き諸反例に基づくこのような帰納学習（inductive learning based on positive instances）を介し獲得される．

第6章　カテゴリ帰属知識の標準分解（SS分解）

本章では，カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$での情報容量を考察する準備として，$<\Phi,2^J>$の完全な基底が存在することを明らかにし，この基底$<\Omega,J>$を使って，1つのカテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$が分解されること（SS分解；標準分解）が説明される．

6.1　カテゴリ帰属知識間の内積，ノルム

2つのカテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>\in<\Phi,2^J>$の内積$(<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>)$を，式(5.5)の類似度関数$SM$と式(5.14)のカテゴリ選択関数$CSF$とを使って，

$$(<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>)\equiv\sum_{j\in CSF(\varphi,\gamma)\cap CSF(\eta,\mu)}\sqrt{SM(\varphi,\omega_j)}\sqrt{SM(\eta,\omega_j)} \quad (6.1)$$

という具合に定義する．カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$のノルム$\|<\varphi,\gamma>\|$を

$$\|<\varphi,\gamma>\|\equiv\sqrt{(<\varphi,\gamma>,<\varphi,\gamma>)} \quad (6.2)$$

という具合に定義する．

2式(6.1)，(6.2)の定義から，次の2式(6.5)，(6.6)が成り立つことがわかる．

パターンφからパターンηへ向かう2パターンφ,η間の角を$(0\le)\theta(\le\pi)$とすれば，2公式

$$\left|\|\varphi\|\cdot\|\eta\|\cdot\cos\theta\right|^2=\left|(\varphi,\eta)\right|^2 \tag{6.3}$$

$$\left|\|\varphi\|\cdot\|\eta\|\cdot\sin\theta\right|^2=\|\varphi\|^2\cdot\|\eta\|^2-\left|(\varphi,\eta)\right|^2 \tag{6.4}$$

が成り立つ．この2公式(6.1)，(6.2)が成り立つように，式(1.16)のカテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$での内積，ノルムが設けられる．つまり，カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$からカテゴリ帰属知識$<\eta,\mu>$へ向かう2カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$，$<\eta,\mu>$間の角を$(0\le)\theta(\le\pi)$とすれば，対応する2公式

$$\left|\|<\varphi,\gamma>\|\cdot\|<\eta,\mu>\|\cdot\cos\theta\right|^2=\left|(<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>)\right|^2 \tag{6.5}$$

$$\left|\|<\varphi,\gamma>\|\cdot\|<\eta,\mu>\|\cdot\sin\theta\right|^2=\|<\varphi,\gamma>\|^2\cdot\|<\eta,\mu>\|^2-\left|(<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>)\right|^2 \tag{6.6}$$

が成り立つ．

明らかに，式(5.5)の類似度関数SMが満たさなければならないaxiom 2の(ⅱ)，並びに，カテゴリ選択関数CSFの包含式(5.19)から

$$\forall<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>,0\le\|<\varphi,\gamma>\|\le 1 \tag{6.7}$$

が成立し，シュワルツの不等式

$$\forall<\varphi,\gamma>,\forall<\eta,\mu>\in<\Phi,2^J>,(<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>)\le\|<\varphi,\gamma>\|\cdot\|<\eta,\mu>\| \tag{6.8}$$

も成立する(文献［3］の定理5.1)．

6.2　カテゴリ帰属知識間の等構造関係＝

式(4.4)の等形式関係$=_\Delta$で，2つのカテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>\in<\Phi,2^J>$の間に2元関係を持ち込むことはもう既になされている．今1つの2元関係＝を，文献［3］の定義3.2に従って，次の定義6.1の如く，持ち込む．

［定義6.1］(カテゴリ帰属知識間の等構造定理)

$$<\varphi,\gamma>=<\eta,\mu> \tag{6.9}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$CSF(\varphi,\gamma)=CSF(\eta,\mu)\wedge \tag{6.10}$$

$$[\forall j\in CSF(\varphi,\gamma)\cap CSF(\eta,\mu),SM(\varphi,\omega_j)=SM(\eta,\omega_j)]. \tag{6.11}$$

□

2元関係$=_\Delta$は$<\Phi,2^J>$上の同値関係である．

$$<\varphi,\gamma>=_\Delta<\eta,\mu>\ \Rightarrow\ <\varphi,\gamma>=<\eta,\mu> \tag{6.12}$$

を満たすが，この逆の関係は成立しない2元関係＝は

反射律$<\varphi,\gamma>=<\varphi,\gamma>$　(6.13)

対称律$<\varphi,\gamma>=<\eta,\mu>\ \Rightarrow\ <\eta,\mu>=<\varphi,\gamma>$　(6.14)

推移律$<\varphi,\gamma>=<\eta,\mu>\ \wedge\ <\eta,\mu>=<\phi,\lambda>\ \Rightarrow\ <\varphi,\gamma>=<\phi,\lambda>$　(6.15)

を満たし，同様に，$<\Phi,2^J>$上の同値関係である．等号

$$(<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>)=\|<\varphi,\gamma>\|\cdot\|<\eta,\mu>\| \tag{6.16}$$

の成立は

$$<\varphi,\gamma>=<\eta,\mu>) \tag{6.17}$$

のときに限る(文献［3］の定理5.1).

6.3　射影係数$(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)$の値

式(4.8)の代表パターン集合Ωと式(1.12)の全カテゴリ集合$\mathfrak{C}(J)$に登場する全カテゴリ番号集合Jとを使って得られるカテゴリ帰属知識の部分集合

$$<\Omega,J>\equiv\{<\omega,[j]>|\,\omega\in\Omega,j\in J\} \tag{6.18}$$

は，式(1.16)のカテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$の基底(正規直交系)であることを示そう．$<\Omega,J>$の完全性は次節(6.4節)で示される．

$<\varphi,\gamma>$を$<\omega_j,[j]>$へ射影すれば，射影成分

$$(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)\cdot<\omega_j,[j]> \tag{6.19}$$

が得られる．登場している射影係数(projection coefficient)

$$(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>) \tag{6.20}$$

の値は次の定理6.1で決定される．

［定理6.1］(射影定理；projection theorem)

$$\forall<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>,\forall<\omega_j,[j]>\in<\Omega,J>,$$

$$(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)=\begin{cases}\sqrt{SM(\varphi,\omega_j)} & \text{if}\quad j\in CSF(\varphi,\gamma)\\ 0 \quad \text{if} \quad j\in J-CSF(\varphi,\gamma)\end{cases} \tag{6.21}$$

(証明) 文献［3］の命題5.1である．□

式(6.18)の$<\Omega,J>$が正規直交系であることは，定理6.1を適用して得られる次の定理6.2で示される．

［定理6.2］($<\Omega,J>$の正規直交定理；orthonormality theorem)

式(6.18)の$<\Omega,J>$の正規直交性

$$(<\omega_i,[i]>,<\omega_j,[j]>)=\begin{cases}1\cdots i=j\text{のとき}\\ 0\cdots i\neq j\text{のとき}\end{cases} \tag{6.22}$$

(証明) 文献［3］の命題5.2である．□

6.4　カテゴリ帰属知識の標準分解(SS分解)

$$SM(\Phi,\Omega)\equiv\{SM(\varphi,\omega)\,|\,\varphi\in\Phi,\omega\in\Omega\} \tag{6.23}$$

として，

$$SM(\Phi,\Omega)=\{s\,|\,0\leq s\leq 1\} \tag{6.24}$$

が成り立つとする(式(5.5)の写像SMの全射性；surjection)．更に，

$$BSC(\Phi,J)\equiv\{BSC(\varphi,j)\,|\,\varphi\in\Phi,j\in J\} \tag{6.25}$$

として，

$$BSC(\Phi,J)=\{0,1\} \tag{6.26}$$

が成り立つとする(式(5.6)の写像BSCの全射性；surjection)．

このとき，S.suzukiが発見した次の定理6.3は，カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$が式(6.19)の射影成分$(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)\cdot<\omega_j,[j]>$の，カテゴリ番号$j\in J$にわたる和として表され得ることを指摘したものであり，SS理論［3］,［4］の核心をなすものである．

［定理6.3］（カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$の標準分解定理；canonical decomposition theorem of categorical-membership knowledge）

2写像SM,BSCの全射性の下で，

$$\forall<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>,$$

$$<\varphi,\gamma>=\sum_{j\in J}(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)\cdot<\omega_j,[j]>. \tag{6.27}$$

（証明）文献［3］の定理7.1である．□

S.Suzukiが発見した上記の標準分解定理は，カテゴリ帰属知識のSS分解定理とも呼ばれる．

次の定理6.4は，カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$のノルム定義式(6.2)に従い，定理6.3を使って計算すれば，直ちに得られる．

［定理6.4］（パーシバァル(Parseval)の等式）

2写像SM,BSCの全射性の下で，

$$\forall<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>,$$

$$\|<\varphi,\gamma>\|^2=\sum_{j\in J}\left|(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)\right|^2. \tag{6.28}$$

□

上述の6.3節の射影定理(定理6.1)を適用して，定理6.3を書き換えれば，次の定理6.5が得られる．

［定理6.5］（カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$の標準分解定理2)

2写像SM,BSCの全射性の下で，

$$\forall<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>,$$

$$<\varphi,\gamma>=\sum_{j\in CSF(\varphi,\gamma)}\sqrt{SM(\varphi,\omega_j)}\cdot<\omega_j,[j]>. \tag{6.29}$$

□

2式(6.1)，(6.2)の定義に従って，定理6.5を使って$\|<\varphi,\gamma>\|^2$を計算すれば，次のパーシバァルの等式が成り立つ．しかしながら，この定理の結論は，2式(6.1)，(6.2)の定義のみから得られることがわかり，2写像SM,BSCが共に全射であるという仮定は必要ないことがわかる．

［定理6.6］（パーシバァルの等式)

2写像SM,BSCの全射性の下で，

$$\forall<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>,$$

$$\|<\varphi,\gamma>\|^2=\sum_{j\in CSF(\varphi,\gamma)}SM(\varphi,\omega_j). \tag{6.30}$$

□

最後に，式(6.18)の$<\Omega,J>$の完全性は次の定理6.7で指摘される．

［定理6.7］（$<\Omega,J>$の完全性定理；completeness theorem)

$$\forall j\in J,(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)=0 \tag{6.31}$$

$$\Rightarrow\|<\varphi,\gamma>\|=0 \tag{6.32}$$

が成り立つ．

（証明）式(6.31)が成り立っているとする．射影定理(定理6.1)を適用すれば，

$$\forall j \in CSF(\varphi,\gamma)\,,\, SM(\varphi,\omega_j)=0 \tag{6.33}$$

を得るが，採用しているカテゴリ選択関数CSF（定理5.1）の3式(5.20)～(5.22)から成立する性質

$$CSF(\varphi,\gamma)=\phi \tag{6.34}$$

$$\vee[CSF(\varphi,\gamma)\neq\phi \Rightarrow\ \forall j \in CSF(\varphi,\gamma)\,,\, SM(\varphi,\omega_j)>0] \tag{6.35}$$

を考慮すれば，

$$CSF(\varphi,\gamma)=\phi \tag{6.36}$$

でなければない． $CSF(\varphi,\gamma)\neq\phi$とすれば，式(6.33)は式(6.35)に矛盾するからである．

よって，2写像SM,BSCが共に全射であるという仮定は必要なくて，2式(6.1)，(6.2)の定義のみから得られるカテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$のノルム$\|<\varphi,\gamma>\|$の表現式(6.30)に，得られた式(6.36)を考慮すれば，所要の式(6.32)が得られる． □

第7章　1つのカテゴリ帰属知識内に存在するカテゴリ帰属知識の程度を計量するには？

本章では，本章では，カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$での情報容量を考察する準備として，1つのカテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$内に存在するカテゴリ帰属知識$<\eta,\mu>\in<\Phi,2^J>$の程度を計量する方法を考えよう．

7.1　カテゴリ帰属知識から取り去ることの出来る対数歪み（獲得した最大の情報量としての情報容量）

2つのカテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$，$<\eta,\mu>$が直交していれば，一方のカテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$が他方のカテゴリ帰属知識$<\eta,\mu>$に最も大に変形していると考えよう．この変形についての考え方が，本研究の独創的な出発点である．不確定さの程度を出現確率の逆数の対数で測るシャノンの情報理論（information theory proposed by Claude E. Shannon）では，

獲得される最大の情報量＝最大限解消された不確定さの程度　(7.1)

と想定しているが，本論文では，変形の余裕の程度を一致する程度の逆数の対数で測り，

獲得された最大の情報量
＝一方のカテゴリ帰属知識が他方のカテゴリ帰属知識に一致する迄最大限変形するまでの変形の余裕の程度　(7.2)

と想定している．

カテゴリ帰属知識$<\eta,\mu>\ \in<\Phi,2^J>$が$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$に歪んでいるとき，取り去られた対数歪み（最大限変形するまでの余裕の程度の対数）とは，

$\|<\varphi,\gamma>\|,\|<\eta,\mu>\|$を2辺の長さとする長方形の面積の自然対数

$$Deformation(\frac{\pi}{2})\equiv \log_e\|<\varphi,\gamma>\|\cdot\|<\eta,\mu>\|\cdot\sin\frac{\pi}{2} \tag{7.3}$$

から，$<\varphi,\gamma>$から$<\eta,\mu>$へ向かう$<\varphi,\gamma>$，$<\eta,\mu>$間の角を$(0\leq)\theta(\leq\pi)$とするような$\|<\varphi,\gamma>\|,\|<\eta,\mu>\|$を2辺の長さとする2辺$<\varphi,\gamma>$，$<\eta,\mu>$から決まる平行四辺形の面積の自然対数

$$Deformation(\theta)\equiv \log_e\|<\varphi,\gamma>\|\cdot\|<\eta,\mu>\|\cdot\sin\theta \tag{7.4}$$

を差し引いた量として定義され，

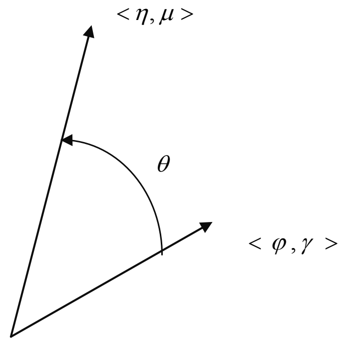


図7.1　$<\varphi,\gamma>$から$<\eta,\mu>$への，180度以内の右手系回転

Fig.7.1　the motion of a right-hand screw when $<\varphi,\gamma>$ is rotated into $<\eta,\mu>$ （angle of rotation less than 180˚）

$$MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>) \equiv Deformation(\frac{\pi}{2}) - Deformation(\theta)$$

$$= \log_e \| <\varphi,\gamma> \| \cdot \| <\eta,\mu> \| \cdot \sin\frac{\pi}{2}$$

$$-\log_e \| <\varphi,\gamma> \| \cdot \| <\eta,\mu> \| \cdot \sin\theta \qquad (7.5)$$

$$= \log_e \frac{1}{\sin\theta} \qquad (7.6)$$

と表わされる． MI はシャノンの相互情報量(amount of mutual information)に対応しての意味である．

$MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$は，$<\varphi,\gamma>$が$<\eta,\mu>$に最大限，変形している時の，$<\varphi,\gamma>$，$<\eta,\mu>$により蓄えられる量(面積)の対数$Deformation(\frac{\pi}{2})$から，$<\varphi,\gamma>$が$<\eta,\mu>$に実際に，変形している時の，$<\varphi,\gamma>$，$<\eta,\mu>$により蓄えられる量(面積)の対数$Deformation(\theta)$を差し引いた量として定義され，

　最大限に，一方が他方に一致する迄変形するまでの変形の余裕量(amount of room of deformation)　(7.7)

を表わしていると解釈できよう．極限まで変形していないときに残っている変形余裕量は，

　獲得される最大情報量としてのシャノンの情報理論での通信容量(受信側で取り去られる平均的な不確定さの最大値)　(7.8)

と対応して意味付けられよう．

対称性

$$MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>) = MI(<\eta,\mu>:<\varphi,\gamma>) \qquad (7.9)$$

が成立しているから，$MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$は2つのカテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>$に両立する情報(一方が他方に変形できるまでの最大の余裕の程度を与える情報)の程度と考えられ，一方のカテゴリ帰属知識が他方のカテゴリ帰属知識に蓄えられる情報量と考えられ，式(7.6)の$MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$は2つのカテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>$に共通に蓄えられる情報容量(information capacity；最大の余裕の程度を獲得するとすれば，このとき獲得される情報量の最大値)といわれてもよい．

7.2　情報容量の等価な表現1

カテゴリ帰属知識$<\eta,\mu>\in<\Phi,2^J>$が$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$に歪んでいるとき，取り去られた対数歪みとしての，式(7.5)の$MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$を変形しよう．式(6.6)を使えば，容易に，

$$
\begin{aligned}
&MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)\\
&=\frac{1}{2}\cdot\log_e\|<\varphi,\gamma>\|^2\cdot\|<\eta,\mu>\|^2\\
&-\frac{1}{2}\cdot\log_e【\|<\varphi,\gamma>\|^2\cdot\|<\eta,\mu>\|^2-|(<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>)|^2】
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

という具合に変形される．式(7.10)の$MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$は，

$$
\begin{aligned}
&MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)=\log_e\|<\varphi,\gamma>\|+\log_e\|<\eta,\mu>\|\\
&-\log_e【\|<\varphi,\gamma>\|^2\cdot\|<\eta,\mu>\|^2-|(<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>)|^2】^{1/2}
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

と変形すれば，式(5.5)の類似度関数SMと式(5.14)のカテゴリ選択関数CSFとを使って，2定義式(6.1)，(6.2)を考慮すれば，

$$
\begin{aligned}
&MI(<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>)\\
&=\log_e\sqrt{\sum_{j\in CSF(\varphi,\gamma)}SM(\varphi,\omega_j)}+\log_e\sqrt{\sum_{j\in CSF(\eta,\mu)}SM(\eta,\omega_j)}\\
&-\log_e【[\sum_{j\in CSF(\varphi,\gamma)}SM(\varphi,\omega_j)]\cdot[\sum_{j\in CSF(\eta,\mu)}SM(\eta,\omega_j)]\\
&-[\sum_{j\in CSF(\varphi,\gamma)\cap CSF(\eta,\mu)}\sqrt{SM(\varphi,\omega_j)}\sqrt{SM(\eta,\omega_j)}]^2】^{1/2}
\end{aligned}
\tag{7.12}
$$

□

と，表現される．

7.3　情報容量の等価な表現2

カテゴリ帰属知識$<\eta,\mu>\in<\Phi,2^J>$，$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$間の相互情報量というように，式(7.5)の$MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$を言い直すことにしよう．式(7.10)の$MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$を変形すれば，表現式

$$
MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)=-\frac{1}{2}\cdot\log_e[1-\left|\frac{(<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>)}{\|<\varphi,\gamma>\|\cdot\|<\eta,\mu>\|}\right|^2]
\tag{7.13}
$$

が得られる．

式(7.4)で使われているように，$<\varphi,\gamma>$から$<\eta,\mu>$へ向かう$<\varphi,\gamma>$，$<\eta,\mu>$間の角を$(0\le)\theta(\le\pi)$とすれば，

$$
-1\le\cos\theta=\frac{(<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>)}{\|<\varphi,\gamma>\|\cdot\|<\eta,\mu>\|}\le+1
\tag{7.14}
$$

であるから，

$$
MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)=-\frac{1}{2}\cdot\log_e[1-\cos^2\theta]
\tag{7.15}
$$

$$
\begin{aligned}
&MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)=-\frac{1}{2}\cdot\log_e\sin^2\theta=\log_e\frac{1}{\sin\theta}\\
&\because\quad 0\le\sin\theta\le1
\end{aligned}
\tag{7.16}
$$

とも表わされることがわかる．式(7.16)は当然ながら，式(7.6)と一致している．

3計量式

（1#）　$\theta = 0, \pi$ のとき，$MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>) = \infty$ （7.17）

（2#）　$\theta = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}$ のとき，$MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>) = \dfrac{1}{2}\cdot\log_e 2$ （7.18）

（3#）　$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>) = 0$ （7.19）

からわかるように，$MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$ は $<\varphi,\gamma>$ が $<\eta,\mu>$ と似ている程度（類似量），或いは，$<\varphi,\gamma>$ 内に $<\eta,\mu>$ が存在する程度を表わしている．類似性のこの解釈から，$<\varphi,\gamma>$ が $<\eta,\mu>$ と異なっている程度（相違量）或いは，$<\varphi,\gamma>$ 内に $<\eta,\mu>$ が存在しない程度 $MI(<\varphi,\gamma>:\neg<\eta,\mu>)$ は，

$$MI(<\varphi,\gamma>:\neg<\eta,\mu>) = -\frac{1}{2}\cdot\log_e\cos^2\theta = \log_e\frac{1}{|\cos\theta|} \tag{7.20}$$

と表わされると考えられる．3計量式

（1#）　$\theta = 0, \pi$ のとき，$MI(<\varphi,\gamma>:\neg<\eta,\mu>) = 0$ （7.21）

（2#）　$\theta = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}$ のとき，$MI(<\varphi,\gamma>:\neg<\eta,\mu>) = \dfrac{1}{2}\cdot\log_e 2$ （7.22）

（3#）　$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$MI(<\varphi,\gamma>:\neg<\eta,\mu>) = \infty$ （7.23）

が成り立つ．式(7.14)を使えば，式(7.13)の $MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$ に対応して，表現

$$MI(<\varphi,\gamma>:\neg<\eta,\mu>) = -\frac{1}{2}\cdot\log_e\left|\frac{(<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>)}{\|<\varphi,\gamma>\|\cdot\|<\eta,\mu>\|}\right|^2 \tag{7.24}$$

が成り立つ．

最後に，式(7.13)の $MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$ は，式(5.5)の類似度関数 SM と式(5.14)のカテゴリ選択関数 CSF とを使って，2定義式(6.1)，(6.2)を考慮すれば，

$$\begin{aligned} &MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>) \\ &= -\frac{1}{2}\log_e[1-\left|\frac{(\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>)}{\|(\varphi,\gamma>\|\cdot\|<\eta,\mu>\|}\right|^2] \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\log_e[1-\left|\frac{\sum_{j\in CSF(\varphi,\gamma)\cap CSF(\eta,\mu)}\sqrt{SM(\varphi,\omega_j)}\sqrt{SM(\eta,\omega_j)}]}{\sqrt{\sum_{j\in CSF(\varphi,\gamma)}SM(\varphi,\omega_j)}\cdot\sqrt{\sum_{j\in CSF(\eta,\mu)}SM(\eta,\omega_j)}}\right|^2] \end{aligned} \tag{7.25}$$

という具合に，表現される．

第8章　カテゴリ帰属知識空間上の類似度関数$\mathfrak{SM}$の構成

本章では，S.Suzukiの提案した5.1.4項のaxiom 2を満たすように，

画像認識・画像理解にその有効な適用例［20］，［36］，［39］，［40］がある多段階帰納推理メカニズムを内蔵した，式(1.1)の万能性［3］連想型認識システムRECONITRONを構成するのに必要な式(5.5)の類似度関数 $SM(\varphi,\omega_j)$ （8.1）

と同様なC-RECOGNITRON［62］の内臓する類似度関数

$\mathfrak{SM}(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)$ （8.2）

が，式(1.16)のカテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$でのモデル構成作用素［62］$\mathfrak{T}$に不変な情報容量

$$MI'(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)\equiv MI(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>) \tag{8.3}$$

を使って構成される．ここに，$<\varphi,\gamma>$が$<\eta,\mu>$と似ている程度(類似量)，或いは，$<\varphi,\gamma>$内に$<\eta,\mu>$が存在する程度$MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$は式(7.13)に登場している．

8.1　式(1.1)のRECOGNITRONに内臓される式(5.5)の類似度関数SM

パターンφが代表パターンω_jとどの程度似ているか，違っているかを計量する手段を設定することが，認識の働きを確保するために必要とされる.類似性計量のための手段が式(5.5)の類似度関数SMである．

“正常なパターン”(well-formed pattern)は，ある1つのカテゴリ(category)$\mathfrak{C}_j$(第$j\in J$番目の類概念)のみに帰属しているものとし，このような$\mathfrak{C}_j$の集まり(有限集合)

$$\mathfrak{C}(J)=\{\mathfrak{C}_j|\mathrm{j}\in\mathrm{J}\} \tag{8.4}$$

を想定する.$\mathfrak{C}_j$の備えている性質を典型的に持っている(第$j\in J$番目の)代表パターン(prototypical pattern)ω_j($\neq 0$)を1つ選定する.$\mathfrak{C}_j$は，典型(prototype)としての代表パターンω_jを中心とした緩やかな(第$j\in J$番目の)カテゴリであることを仮定したことに注意しておく.ここに，式(4.8)の$\Omega\equiv\{\omega_j\mid \mathrm{j}\in J\}\subset\Phi$が式(1.12)の全カテゴリ集合$\mathfrak{C}(J)$に1対1に対応する代表パターンの集合である.式(4.8)の系Ωは,

$$\text{複素定数}\ a_j\ \text{の組}\{a_j\mid j\in J\}\text{について}\sum_{j\in J}a_j\cdot\omega_j=0\Rightarrow\forall j\in J,a_j=0 \tag{8.5}$$

が成立しているという意味で，1次独立(linearly independent)でなければならない.Ωを視察で決定できる場合があるが，訓練パターン系列からΩを適応的に決定する方法については，文献［3］の付録Iで説明されている．

5.1.1項のaxiom 1を満たす式(4.7)のモデル構成作用素Tによって，式(4.8)の代表パターン集合Ωが変換されて得られる式(4.10)の系$T\cdot\Omega\equiv\{T\omega\mid\omega\in\Omega\}$も1次独立であると要請する．このとき，式(5.5)の類似度関数SMを導入し，

$SM(\varphi,\omega_j)=1,0$に従って，パターン$\varphi\in\Phi$は各々，ω_jと確定的な類似度関係，相違関係にあり，また，$0<SM(\varphi,\omega_j)<1$の場合は，あいまいな類似・相違関係にある　(8.6)

と，SMを解釈しよう．

式(5.5)の関数SMはaxiom 2を満たすように構成されねばならない．Axiom 2の(ⅰ)では，クロネッカー(Kronecker)のδ記号

$$\delta_{ij}=1\quad if\quad i=j,=0\quad if\quad i\neq j \tag{8.7}$$

が導入されているが、特にaxiom 2の(ⅰ)なるこの正規直交性は、候補カテゴリの分離・抽出が効果的に行われ,

候補カテゴリの鋭利な削減(a sharp reduction)　(8.8)

をもたらすために要請されている．

5.1.4項のaxiom 2の(ⅰ)～(ⅲ)について簡単に説明しておこう．

SMの解釈式(8.6)の下で，(ⅰ)は，相異なカテゴリの代表パターン同士は確定的な相違関係にあり，同一カテゴリの代表パターン同士は確定的な類似度関係にあることを要請している．(ⅱ)は、任意のパターンφについて，すべてのカテゴリについての類似度の総和は1であることを要請している．つまり，パターンφは少なくとも1つのカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属していることを要請している．(ⅲ)

は，パターンモデル $T\varphi$ は原パターン φ と任意のカテゴリについて同一類似度を持つことを要請している．ということは，パターンモデル $T\varphi$ を見たり，聞いたりするならば，原パターン φ と同じように見えたり、聞こえたりすること（同一知覚原理）を要請していることになる．

尚，第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の生起確率である非負実数 $p(\mathfrak{C}_j)$ を，2条件

$$[\forall j\in J, 0< p(\mathfrak{C}_j)<1] \wedge [\sum_{j\in J} p(\mathfrak{C}_j)=1] \tag{8.9}$$

を満たすものとして導入しておく．

8.2　カテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>$ が記憶しているカテゴリ帰属知識 $<\eta,\mu>$ とどの程度，似ているかを類似度として計量しなければならない

式（1.2）のカテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>$ は，式（1.1）の認識システムRECOGNITRONがパターン φ について持っている知識である．カテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>$ はカテゴリ帰属知識 $<T\varphi,\gamma>$ に置き換えられて，カテゴリ帰属知識 $<T\varphi,\gamma>$ を初期条件とする連想形認識方程式（1.17）を解くのが，RECOGNITRONのパターン認識機能である．この方程式（1.17）の求解過程がパターン認識過程である．$\gamma\in 2^J$ として，$\gamma=J$ を採用した連想形認識方程式（1.17）を解く過程式（4.5）で生じる各カテゴリ帰属知識 $<\phi_s,\lambda_s>(0\le s\le t)$ は，RECOGNITRONがパターン φ を認識するときに発生する作業記憶（working memory）の状態であって，認識的思考の有様を反映している状態（RECOGNITRONの外にある情報の脳内短期的記憶表現）である．

このように，原パターン $\varphi\in\Phi$ の代りに，原パターン φ と同じ感性を与えるそのパターンモデル $T\varphi$ を用いることが，少なくとも，上首尾な認識の働きを達成するのに必要である．つまり，

原パターン $\varphi\in\Phi$ の代りに，原パターン φ と同じ感性を与えるそのパターンモデル $T\varphi$ を使って，このモデル $T\varphi$ と記憶しているパターン $\omega\in\Omega$ のモデル $T\omega$ との違いを測る　(8.10)

ことが必要である（原パターン φ と，その対応するパターンモデル $T\varphi$ との同一知覚原理）．何故ならば，パターンモデル $T\varphi$ とは現実のパターン φ から個別的な変形を取り除き，φ を可能な限りの単純さで，認識の働きが誤認識しないように写しとっているようなものであるからである．

脳内のネットワークは「個々の」カテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>$（情報の脳内短期的記憶表現）がカテゴリ帰属知識 $<\eta,\mu>$（情報の脳内長期的記憶表現）に「完全に」適応するのでなく，カテゴリ帰属知識の集合の中に存在する「類似性」に最適に適合すると想定してみよう．カテゴリ帰属知識の集合の中の類似性を計量化する手段（類似度関数の構成）はパターン・知識処理にとって基本的に必要とされることが理解できる．

このように，パターンの情報処理の場面，或いは，記号列をパターンで表した情報処理の場面では，カテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>$ が記憶しているカテゴリ帰属知識 $<\eta,\mu>$ とどの程度，似ているかを類似度として計量しなければならないことが，しばしば要求される．

8.3　axiom $\mathfrak{T}$2を満たす類似度関数 $\mathfrak{S}\mathfrak{M}$

カテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>$ が記憶しているカテゴリ帰属知識 $<\eta,\mu>$ とどの程度，似ているかを類似度として計量できる式（8.2）の類似度関数

$$\mathfrak{S}\mathfrak{M}: <\Phi,2^J>\times<\Omega,J>\to\{s\mid 0\le s\le 1\} \tag{8.11}$$

を構成しよう．

先ず，

$$\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>\equiv$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\|\langle\varphi,\gamma\rangle\|}\cdot\langle\varphi,\gamma\rangle\cdots CSF(\varphi,\gamma)\neq\phi \text{ のとき} \\ \langle 0,\phi\rangle\cdots CSF(\varphi,\gamma)=\phi \text{ のとき} \end{cases}$$

(8.12)

と定義されるモデル構成作用素

$$\mathfrak{T}:<\Phi,2^J>\to<\Phi,2^J> \tag{8.13}$$

を導入する［62］．その後，式(7.13)の相互情報量 $MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$ を使い，

$$MI'(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)\equiv MI(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\cdot\log_e[1-|(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>,\dfrac{<\eta,\mu>}{\|<\eta,\mu>\|}|^2]\cdots CSF(\varphi,\gamma)\neq\phi \text{ のとき} \\ 0\cdots CSF(\varphi,\gamma)=\phi \text{ のとき} \end{cases}$$

(8.14)

を定義し，式(8.10)の類似度関数 $\mathfrak{SM}$ を

$$\mathfrak{SM}(<\varphi,\gamma>:<\omega_j,[j]>)=$$

$$\begin{cases} \dfrac{MI'(<\varphi,\gamma>:<\omega_j,[j]>)}{\sum_{i\in J}MI'(<\varphi,\gamma>:<\omega_i,[i]>)}\cdots\sum_{i\in J}MI'(<\varphi,\gamma>:<\omega_i,[i]>)>0 \text{ のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j)\cdots\sum_{i\in J}MI'(<\varphi,\gamma>:<\omega_i,[i]>)=0 \text{ のとき} \end{cases}$$

(8.15)

という具合に，定義する．

$<\varphi,\gamma>$ から $<\eta,\mu>$ へ向かう $<\varphi,\gamma>$，$<\eta,\mu>$ 間の角を $(0\le)\theta(\le\pi)$ とする．式(5.5)の類似度関数が5.1.4項でのaxiom 2を満たすのと同様に，次のaxiom $\mathfrak{SM}2$を，式(8.15)の如く定義される式(8.11)の類似度関数 $\mathfrak{SM}$ が満たすことが，以下のように示される．

<u>Axiom $\mathfrak{SM}2$</u>（類似度関数 $\mathfrak{SM}$ の満たすべき公理）

（ⅰ）（正規直交性；orthonormality）

$$\forall i,\forall j,,\ \mathfrak{SM}(<\omega_i,[i]>,<\omega_j,[j]>)=\delta_{ij}(=1\quad if\quad i=j,=0\quad if\quad i\neq j).$$

（ⅱ）（規格化条件，確率性，正規性；probability condition,normalization）

$$\forall\varphi\in\Phi,\sum_{j\in J}\ \mathfrak{SM}(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)=1.$$

（ⅲ）（写像 T の下での不変性；invariance under mapping T）

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J,\ \mathfrak{SM}(\ \mathfrak{T}<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)=\ \mathfrak{SM}(\ <\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>).$$

□

Axiom $\mathfrak{SM}2$，（ⅰ）の成立は，式(8.12)の如く定義される式(8.13)のモデル構成作用素 $\mathfrak{T}$ の不動点性［62］

$$\forall j\in J,\mathfrak{T}<\omega_j,[j]>=_{\Delta}<\omega_j,[j]> \tag{8.16}$$

から容易に確かめることができる．

Axiom $\mathfrak{SM}2$，（ⅱ）の成立は $\mathfrak{SM}$ の定義式(8.15)から明らかである．

Axiom $\mathfrak{SM}2$，（ⅲ）の成立は，式(8.12)の如く定義される式(8.13)のモデル構成作用素 $\mathfrak{T}$ のべき等性［62］

$$\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{T}=\mathfrak{T} \tag{8.17}$$

から

$$\forall<\varphi,\gamma>,\forall<\eta,\mu>,$$

$$MI(\mathfrak{T}\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)=MI(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>) \tag{8.18}$$

が成り立ち，このことを$\mathfrak{S}\mathfrak{M}$の定義式(8.15)に考慮すれば，明らかである．

第9章　有限個のカテゴリ帰属知識に蓄えられる情報容量（カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$での情報容量）

可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元ϕ_kからなる1次独立な系$\{\phi_k\}_{k\in L}$を導入し，この系を基底とするような有限個のパターンの1次展開で有限個のパターンの外積を新しく提案し，この外積で変形量を定義する　(9.1)

という考えの独創性で，

有限個のパターンが蓄えることの出来る最大の情報容量　(9.2)

が提案されている［60］．この考えを踏襲して，有限個のカテゴリ帰属知識に蓄えられる情報容量

$$C(<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>:<\varphi_k,\gamma_k>,k\in K-\{j_1\}) \tag{9.3}$$

を提案し，併せて，式(5.29)の多段階認識過程の情報容量を計算しよう．更に，連想形認識方程式(1.17)を近似的に解く場合，帰納推理の働きで選定される式(4.6)のカテゴリ番号のリストの列の探索戦略の選び方へ，式(9.3)の情報容量Cを応用することも考えよう．

式(7.13)の$MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$は$<\varphi,\gamma>$の中に$<\eta,\mu>$を蓄えることの出来る程度を表わす情報容量であると考えられる．そして，式(7.24)の$MI(<\varphi,\gamma>:\neg<\eta,\mu>)$は$<\varphi,\gamma>$の中に$<\eta,\mu>$を蓄えることの出来ない程度を表わす情報容量であると考えられる．この内，前者の情報容量$MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$と同様なものが，式(9.3)の情報容量$C$である．

2つのカテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>\in<\Phi,2^J>$の内積

$$\begin{aligned}[<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>)]&\equiv\sum_{k\in K}(<\varphi,\gamma>,<\omega_k,[k]>)\cdot(<\eta,\mu>,<\omega_k,[k]>)\\&=\sum_{j\in CSF(\varphi,\gamma)\cap CSF(\eta,\mu)}\sqrt{SM(\varphi,\omega_j)}\sqrt{SM(\eta,\omega_j)}\quad\because\ \text{定理6.1}\end{aligned} \tag{9.4}$$

を導入し，カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$のノルム

$$\begin{aligned}|<\varphi,\gamma>|&\equiv\sqrt{(<\varphi,\gamma>,<\varphi,\gamma>)}\\&=\sqrt{\sum_{j\in CSF(\varphi,\gamma)}SM(\varphi,\omega_j)}\end{aligned} \tag{9.5}$$

も定義する．2式(9.4)，(9.5)の$[<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>],|<\varphi,\gamma>|$は，各々，2式(6.1)，(6.2)の$(<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>),\|<\varphi,\gamma>\|$と一致することがわかる．式(7.13)の$MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$は2式(6.1)，(6.2)の$(<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>),\|<\varphi,\gamma>\|$を使って定義されるが，式(9.3)の情報容量$C$は2式(9.4)，(9.5)の$[<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>],|<\varphi,\gamma>|$を使って定義される．可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$とは異なり，2式(9.4)，(9.5)は2式(6.1)，(6.2)とたまたま，一致するのである．

2式(9.4)，(9.5)について，シュワルツの不等式

$$|[<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>]|\le|<\varphi,\gamma>|\cdot|<\eta,\mu>| \tag{9.6}$$

が成り立っていることを考慮して，零性

$$\frac{[<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>]}{\left|<\varphi,\gamma>\right|\cdot\left|<\eta,\mu>\right|}=0 \quad \text{if} \quad \left|<\varphi,\gamma>\right|\cdot\left|<\eta,\mu>\right|=0 \tag{9.7}$$

を約束する．

9.1　有限個のカテゴリ帰属知識の直交展開係数 $c_k(\ell)$ $(k\in K, j_\ell\in K)$

カテゴリ番号 $j_\ell(1\le\ell\le n)$ を要素とする部分集合

$$K=\{j_1,j_2,\cdots,j_n\}\subseteq J, n\ge 3 \tag{9.8}$$

を導入する．この K から定まる有限個のカテゴリ帰属知識

$$<\varphi_k,\gamma_k>\in<\Phi,2^J>, k\in K \tag{9.9}$$

が与えられたとしよう．このとき，第 $\ell(=1\sim n)$ 番目のカテゴリ帰属知識 $<\varphi_{j_\ell},r_{j_\ell}>$ の直交分解

$$\begin{aligned}&\exists<\varphi_{j_\ell},\gamma_{j_\ell}>_\perp\in<\Phi,2^J>,\\&<\varphi_{j_\ell},r_{j_\ell}>=\sum_{k\in K}c_k(j_\ell)\cdot<\omega_k,[k]>+<\varphi_{j_\ell},r_{j_\ell}>_\perp\in<\Phi,2^J>\\&\quad,\text{where}\ \ \forall k\in K,(<\varphi_{j_\ell},\gamma_{j_\ell}>_\perp,<\omega_k,[k]>)=0\end{aligned} \tag{9.10}$$

が成立する．実は，6.4節のカテゴリ帰属知識の標準分解定理（SS分解定理；定理6.3）より，

$$\begin{aligned}&<\varphi_{j_\ell},\gamma_{j_\ell}>\\&=\sum_{k\in J}(<\varphi_{j_\ell},\gamma_{j_\ell}>,<\omega_k,[k]>)\cdot<\omega_k,[k]>\in<\Phi,2^J>\end{aligned} \tag{9.11}$$

が成り立っているから，$<\varphi_{j_\ell},r_{j_\ell}>_\perp$ は，

$$<\varphi_{j_\ell},r_{j_\ell}>_\perp=\sum_{k\in J-K}(<\varphi_{j_\ell},\gamma_{j_\ell}>,<\omega_k,[k]>)\cdot<\omega_k,[k]>\in<\Phi,2^J> \tag{9.12}$$

と求まる．

従って，カテゴリ帰属知識 $<\varphi_{j_\ell},\gamma_{j_\ell}>$ の直交展開係数

$c_k(\ell)$ $(k\in K, j_\ell\in K)$ は，

$$c_k(j_\ell)=(<\varphi_{j_\ell},\gamma_{j_\ell}>,<\omega_k,[k]>) \quad \because \quad \text{定理6.3} \tag{9.13}$$

$$\begin{aligned}&=\\&\begin{cases}\sqrt{SM(\varphi_{j_\ell},\omega_k)}\cdots\ k\in CSF(\varphi_{j_\ell},\gamma_{j_\ell})\ \text{のとき}\\0\cdots\ k\in J-CSF(\varphi_{j_\ell},\gamma_{j_\ell})\ \text{のとき}\end{cases}\\&\qquad\because\quad\text{定理6.1}\end{aligned} \tag{9.14}$$

と求められる．

9.2　有限個のカテゴリ帰属知識の外積 $<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>\otimes\cdots\otimes<\varphi_{j_n},\gamma_{j_n}>$ の定義

2式（9.13），（9.14）のカテゴリ帰属知識 $<\varphi_{j_\ell},\gamma_{j_\ell}>$ の直交展開係数 $c_k(\ell)$ $(k\in K, j_\ell\in K)$ を使って，有限個のカテゴリ帰属知識

$$<\varphi_{j_\ell},\gamma_{j_\ell}>\in<\Phi,2^J>, \ell=2\sim n \tag{9.15}$$

の外積

$$<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>\otimes\cdots\otimes<\varphi_{j_n},\gamma_{j_n}> \tag{9.16}$$

が，次のように定義される：

$$<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>\otimes\cdots\otimes<\varphi_{j_n},\gamma_{j_n}>$$

$$=\begin{vmatrix} <\omega_{j_1},[j_1]> & c_{j_1}(j_2) & c_{j_1}(j_3) & \cdots & c_{j_1}(j_n) \\ <\omega_{j_2},[j_2]> & c_{j_2}(j_2) & c_{j_2}(j_3) & \cdots & c_{j_2}(j_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ <\omega_{j_n},[j_n]> & c_{j_n}(j_2) & c_{j_n}(j_3) & \vdots & c_{j_n}(j_n) \end{vmatrix}$$

(9.17)

という具合に，定義する．

$$d_\ell \equiv \left(<\eta,\mu>,<\omega_{j_\ell},[j_\ell]>\right), \ell=1\sim n \tag{9.18}$$

を考えれば，

$$[<\eta,\mu>,<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>\otimes\cdots\otimes<\varphi_{j_n},\gamma_{j_n}>]$$

$$=\begin{vmatrix} d_1 & c_{j_1}(j_2) & c_{j_1}(j_3) & \cdots & c_{j_1}(j_n) \\ d_2 & c_{j_2}(j_2) & c_{j_2}(j_3) & \cdots & c_{j_2}(j_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_n & c_{j_n}(j_2) & c_{j_n}(j_3) & \vdots & c_{j_n}(j_n) \end{vmatrix}$$

(9.19)

が成立しているから，明らかに，直交性

$$[<\varphi_{j_\ell},\gamma_{j_\ell}>,<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>\otimes\cdots\otimes<\varphi_{j_n},\gamma_{j_n}>]$$

$$=0, \ell=2\sim n \tag{9.20}$$

が成立している．

9.3　情報容量 $C(<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>:<\varphi_k,\gamma_k>,k\in K-\{j_1\})$ の定義

式(7.13)の $MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$ は $<\varphi,\gamma>$ の中に $<\eta,\mu>$ を蓄えることのできる程度を表す情報容量であると考えられるが，これとは異なり，有限個のカテゴリ帰属知識に蓄えられる情報容量 $C(<\varphi_k,\gamma_k>,k\in K)$ を定義しよう．

$$<\varphi_{j_\ell},\gamma_{j_\ell}>\in<\Phi,2^J>, \ell=1\sim n \tag{9.21}$$

が蓄えることの出来る式(9.3)の情報容量 $C(<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>:<\varphi_k,\gamma_k>,k\in K-\{j_1\})$ としては，

$$C(<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>:<\varphi_k,\gamma_k>,k\in K-\{j_1\})$$

$$\equiv -\frac{1}{2}\cdot\log_e[1-$$

$$\left|\frac{[<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>,<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes\cdots\otimes<\varphi_{j_n},\gamma_{j_n}>]}{\left|<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>\right|\cdot\left|<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes\cdots\otimes<\varphi_{j_n},\gamma_{j_n}>\right|}\right|^2]$$

(9.22)

が考えられる．ここに，式(9.19)の特別の場合として，

$$[<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>,<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>\otimes\cdots\otimes<\varphi_{j_n},\gamma_{j_n}>]$$

$$=\begin{vmatrix} c_{j_1}(j_1) & c_{j_1}(j_2) & c_{j_1}(j_3) & \cdots & c_{j_1}(j_n) \\ c_{j_2}(j_1) & c_{j_2}(j_2) & c_{j_2}(j_3) & \cdots & c_{j_2}(j_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{j_n}(j_1) & c_{j_n}(j_2) & c_{j_n}(j_3) & \vdots & c_{j_n}(j_n) \end{vmatrix}$$

(9.23)

であることに注意する．

$$\left|<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>\right| = \sqrt{\sum_{k\in CSF(\varphi_{j_1},\gamma_{j_1})} SM(\varphi_{j_1},\omega_k)} \tag{9.24}$$

であるが，行列式(9.17)の第$\ell(=1\sim n)$第1列の余因数を$a_{\ell 1}$とすれば，

$$a_{\ell 1} = (-1)^{1+\ell}\cdot b_{\ell 1} \tag{9.25}$$

Where

$$b_{\ell 1} = \begin{vmatrix} c_{j_1}(j_2) & c_{j_1}(j_3) & \cdots & c_{j_1}(j_n) \\ c_{j_2}(j_2) & c_{j_2}(j_3) & \cdots & c_{j_2}(j_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{j_{\ell-1}}(j_2) & c_{j_{\ell-1}}(j_3) & \cdots & c_{j_{\ell-1}}(j_n) \\ c_{j_{\ell+1}}(j_2) & c_{j_{\ell+1}}(j_3) & \cdots & c_{j_{\ell+1}}(j_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{j_n}(j_2) & c_{j_n}(j_3) & \cdots & c_{j_n}(j_n) \end{vmatrix} \tag{9.26}$$

であり，

$$\left|<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes\cdots\otimes<\varphi_{j_n},\gamma_{j_n}>\right| = \sqrt{\sum_{\ell=1}^{n}(b_{\ell 1})^2} \tag{9.27}$$

尚，式(9.22)の情報容量$C\equiv C(<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>:<\varphi_k,\gamma_k>,k\in K-\{j_1\})$を使って，式(9.9)のカテゴリ帰属知識集合の性質を計量するには，式(9.8)のカテゴリ番号部分集合Kを

$$K = J \tag{9.28}$$

と，取るのが良い．

9.4　3段階で終了するときの式(5.29)の多段階認識過程の情報容量

9.4.1　認識不能で終了するときの情報容量Cは零であること

不等式

$$3\le t = n-1\le |J|-1 \tag{9.29}$$

を満たす式(5.29)の多段階認識過程の情報容量Cを計算するには，

$$<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}> =_{\Delta} <\phi_0,\lambda_0> \quad \text{(第0認識段階)} \tag{9.30}$$

$$<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}> =_{\Delta} <\phi_1,\lambda_1> \quad \text{(第1認識段階)} \tag{9.31}$$

$\vdots$

$$<\varphi_{j_n},\gamma_{j_n}> =_{\Delta} <\phi_t,\lambda_t> \quad \text{(第}t\text{認識段階)} \tag{9.32}$$

とおいて，式(9.22)の情報容量$C\equiv C(<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>:<\varphi_k,\gamma_k>,k\in K-\{j_1\})$を計算するのが良い．

次の定理9.1での得られた情報容量の下限$C=0$は，5.2.5項の(2＃)認識不能が結論される場合の，式(5.29)の多段階認識過程を特性付けている．

［定理9.1］（式(5.29)の多段階認識過程において，認識不能が結論される場合の情報容量定理）

初期条件式(5.30)を採用する式(5.29)の多段階認識過程では，設定式(9.30)～(9.32)において，原

パターン $\varphi \in \Phi$ が認識不能であると結論される場合，式(9.22)の情報容量

$$C \equiv C(<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>:<\varphi_k,\gamma_k>, k \in K-\{j_1\}) \tag{9.33}$$

は，

$$C = 0. \tag{9.34}$$

（証明）5.2.5項の(2＃)認識不能が結論される場合，式(5.35)が成り立ち，設定式(9.32)から，式(9.33)が成り立つ．よって，式(9.14)を適用して，

$$\forall \ell (=1 \sim n), c_{j_\ell}(j_n) = 0 \tag{9.35}$$

が成り立つ．よって，

$$\text{式}(9.23) = 0 \wedge [\forall \ell (=1 \sim n), b_{\ell 1} = 0] \tag{9.36}$$

を得，式(9.36)の後半から，

$$\text{式}(9.27) = 0 \tag{9.37}$$

も成り立つ．式(9.36)の前半，並びに，式(9.37)を式(9.22)に代入すれば，式(9.7)を考慮して，式(9.34)が成り立つ．□

9.4.2　3段階で終了するときの式(5.29)の多段階認識過程の情報容量 C の計算例

$$n = 3 \wedge K = \{j_1, j_2, j_3\} \subseteq J \tag{9.38}$$

とおいて，原パターン $\varphi \in \Phi$ についての式(5.29)の多段階認識過程が，第2段階で終了した場合

$$<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}> (=_\Delta <\phi_0,\lambda_0>), <\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}> (=_\Delta <\phi_1,\lambda_1>), <\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}> (=_\Delta <\phi_2,\lambda_2>) \tag{9.39}$$

ということになるが，この時の式(9.22)，(9.33)の情報容量

$$C = C(<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>:<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>, <\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>) \tag{9.40}$$

を，計算してみよう．3つの場合(1＃)，(2＃)，(3＃)に分けて計算しよう．

（1＃）認識可能で終了した場合

$$CSF(\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}) = [j_1 \quad j_2 \quad j_3] \tag{9.41}$$

$$CSF(\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}) = [j_2 \quad j_3] \tag{9.42}$$

$$CSF(\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}) = [j_3], \text{where} \quad SM(\varphi_{j_3},\omega_{j_3}) = 1 \tag{9.43}$$

の場合，式(9.40)の情報容量 C を計算してみよう．式(9.43)の条件 $SM(\varphi_{j_3},\omega_{j_3}) = 1$ は，原パターン $\varphi \in \Phi$ が5.1.5項の(1＃)の認識可能という状態で式(5.29)の多段階認識過程が，第2段階で終了した場合成立する．

計算結果は，

$$\begin{aligned} C &\equiv C(<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>:<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}> \otimes <\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 + \frac{SM(\varphi_{j_1},\omega_{j_1})}{\sum_{\ell=2}^{3} SM(\varphi_{j_1},\omega_{j_\ell})} \right] \end{aligned} \tag{9.44}$$

である．その理由は以下の通りである．

先ず，式(9.5)を適用して，

$$\left| <\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}> \right| = \sqrt{\sum_{\ell=1}^{3} SM(\varphi_{j_1},\omega_{j_\ell})} \tag{9.45}$$

がわかる．次に，式(9.14)を適用して，

$$c_{j_1}(j_1) = \sqrt{SM(\varphi_{j_1},\omega_{j_1})} \qquad c_{j_1}(j_2) = 0 \qquad\qquad c_{j_1}(j_3) = 0$$

$$c_{j_2}(j_1)=\sqrt{SM(\varphi_{j_1},\omega_{j_2})}\quad c_{j_2}(j_2)=\sqrt{SM(\varphi_{j_2},\omega_{j_2})}\quad c_{j_2}(j_3)=0$$
$$c_{j_3}(j_1)=\sqrt{SM(\varphi_{j_1},\omega_{j_3})}\quad c_{j_3}(j_2)=\sqrt{SM(\varphi_{j_2},\omega_{j_3})}\quad c_{j_3}(j_3)=\sqrt{SM(\varphi_{j_3},\omega_{j_3})} \tag{9.46}$$

が得られる．式(9.23)を適用して，

$$[<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>,<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>]$$
$$=\sqrt{SM(\varphi_{j_1},\omega_{j_1})}\cdot\sqrt{SM(\varphi_{j_2},\omega_{j_2})}\cdot\sqrt{SM(\varphi_{j_3},\omega_{j_3})} \tag{9.47}$$

と，計算される．式(9.27)を適用して，

$$\left|<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>\right|$$
$$=c_{j_2}(j_2)\cdot c_{j_3}(j_3)=\sqrt{SM(\varphi_{j_2},\omega_{j_2})}\cdot\sqrt{SM(\varphi_{j_3},\omega_{j_3})} \tag{9.48}$$

と，求まる．3式(9.45)，(9.47)，(9.48)を式(9.22)に代入すれば，式(9.40)の情報容量Cは，

$$C=-\frac{1}{2}\cdot\log_e\left[1-\left|\frac{\sqrt{SM(\varphi_{j_1},\omega_{j_1})}\cdot\sqrt{SM(\varphi_{j_2},\omega_{j_2})}\cdot\sqrt{SM(\varphi_{j_3},\omega_{j_3})}}{\sqrt{\sum_{\ell=1}^{3}SM(\varphi_{j_1},\omega_{j_\ell})}\cdot\sqrt{SM(\varphi_{j_2},\omega_{j_2})}\cdot\sqrt{SM(\varphi_{j_3},\omega_{j_3})}}\right|^2\right] \tag{9.49}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\log_e\left[1-\frac{SM(\varphi_{j_1},\omega_{j_1})}{\sum_{\ell=1}^{3}SM(\varphi_{j_1},\omega_{j_\ell})}\right] \tag{9.50}$$

と，求まり，式(9.44)が得られることがわかる．式(9.43)の条件$SM(\varphi_{j_3},\omega_{j_3})=1$は，式(9.33)の情報容量$C$の最終表現式(9.44)には反映されないことに注意する．

第0認識段階から第1認識段階へ遷移するとき(設定式(9.30)～(9.32)を参照)捨てられるカテゴリ$\mathfrak{C}_{j_1}$に関する類似度$SM(\varphi_{j_1},\omega_{j_1})$が大きいほど，そして，それ以外のカテゴリ$\mathfrak{C}_{j_2},\mathfrak{C}_{j_3}$に関する類似度の総和$\sum_{\ell=2}^{3}SM(\varphi_{j_1},\omega_{j_\ell})$が小さいほど，式(9.50)の情報容量$C$が大きくなることがわかる．この事実は，情報容量$C$が式(1.1)のRECOGNITRONが式(9.40)の多段階認識過程での情報を処理するときの，カテゴリ帰属に関するあいまいさを解消する程度を測る量(情報処理量)であることの一端を露呈している．

(2＃) 認識不能で終了した場合

3式(9.41)，(9.42)，(9.43)の代りに，

$$CSF(\varphi_{j_1},\gamma_{j_1})=[j_1\quad j_2\quad j_3] \tag{9.51}$$
$$CSF(\varphi_{j_2},\gamma_{j_2})=[j_2\quad j_3] \tag{9.52}$$
$$CSF(\varphi_{j_3},\gamma_{j_3})=\phi \tag{9.53}$$

としてみよう．5.2.5項の(2＃)の式(5.35)から，式(9.53)が成立していることになる．

定理9.1を適用して，式(9.40)の情報容量Cは，式(9.34)で与えられるが，念のため，式(9.34)の成立を確かめてみよう．

式(9.53)に式(9.14)を適用して，

$$c_{j_\ell}(j_3)=0,\ell=1\sim3 \tag{9.54}$$

を得，式(9.23)の値は，

$$[<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>,<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>]=0 \tag{9.55}$$

であることがわかり，更に，式(9.26)の値は，

$$b_{\ell 1}=0, \ell=1\sim 3 \tag{9.56}$$

であることが分る．この式(9.56)から，式(9.27)の値は，

$$\left|<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>\right|=0 \tag{9.57}$$

であることがわかる．式(9.7)を適用すると，3式(9.45)，(9.57)，(9.55)から，

$$\frac{[<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>,<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>]}{\left|<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>\right|\cdot\left|<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>\right|}=0 \tag{9.58}$$

がわかる．この式(9.58)から，式(9.40)の情報容量Cは，式(9.34)で与えられることになる．

（3＃）認識不定で終了した場合

3式(9.41)，(9.42)，(9.43)の代りに，

$$CSF(\varphi_{j_1},\gamma_{j_1})=\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3\end{bmatrix} \tag{9.59}$$

$$CSF(\varphi_{j_2},\gamma_{j_2})=\begin{bmatrix} j_2 & j_3\end{bmatrix} \tag{9.60}$$

$$CSF(\varphi_{j_3},\gamma_{j_3})=\begin{bmatrix} j_2 & j_3\end{bmatrix},\text{where }\ 0<SM(\varphi_{j_3},\omega_{j_2})<1\ \wedge\ 0<SM(\varphi_{j_3},\omega_{j_3})<1 \tag{9.61}$$

の場合で考えてみよう．式(9.46)とは異なり，式(9.14)を適用して，

$$\begin{array}{lll} c_{j_1}(j_1)=\sqrt{SM(\varphi_{j_1},\omega_{j_1})} & c_{j_1}(j_2)=0 & c_{j_1}(j_3)=0 \\ c_{j_2}(j_1)=\sqrt{SM(\varphi_{j_1},\omega_{j_2})} & c_{j_2}(j_2)=\sqrt{SM(\varphi_{j_2},\omega_{j_2})} & c_{j_2}(j_3)=\sqrt{SM(\varphi_{j_3},\omega_{j_2})} \\ c_{j_3}(j_1)=\sqrt{SM(\varphi_{j_1},\omega_{j_3})} & c_{j_3}(j_2)=\sqrt{SM(\varphi_{j_2},\omega_{j_3})} & c_{j_3}(j_3)=\sqrt{SM(\varphi_{j_3},\omega_{j_3})} \end{array} \tag{9.62}$$

となる．式(9.45)の値$\left|<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>\right|$はそのまま，生きている．

式(9.23)の値は，

$$\begin{aligned}&[<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>,<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>]\\ &=c_{j_1}(j_1)\cdot\begin{vmatrix} c_{j_2}(j_2) & c_{j_2}(j_3)\\ c_{j_3}(j_2) & c_{j_3}(j_3)\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{9.63}$$

となり，式(9.27)の値は，

$$\begin{aligned}&\left|<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>\right|\\ &=\begin{vmatrix} c_{j_2}(j_2) & c_{j_2}(j_3)\\ c_{j_3}(j_2) & c_{j_3}(j_3)\end{vmatrix}\text{の絶対値}\end{aligned} \tag{9.64}$$

であることがわかる．3式(9.45)，(9.64)，(9.63)から，

$$\begin{aligned}&\left|\frac{[<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>,<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>]}{\left|<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>\right|\cdot\left|<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>\right|}\right|^2\\ &=\left|\frac{c_{j_1}(j_1)}{\sqrt{\sum_{\ell=1}^{3}SM(\varphi_{j_1},\omega_{j_\ell})}}\right|^2\\ &=\frac{SM(\varphi_{j_1},\omega_{j_1})}{\sum_{\ell=1}^{3}SM(\varphi_{j_1},\omega_{j_\ell})}\end{aligned} \tag{9.65}$$

がわかる．この式(9.65)から，式(9.40)の情報容量Cは，式(9.50)で与えられ，式(9.44)が得られることがわかる．

認識可能，認識不定の場合の，式(9.40)の情報容量Cは一致することになったこと，並びに，原

パターンφのモデル$\varphi_{j_1}=T\varphi$のみに依存して，式(9.40)の情報容量Cが求まったこと(初期条件式(5.30)，並びに，設定式(9.30)を参照)が，注目に値する．

9.5　式(9.40)の情報容量Cの，別な計算例

以後，9.4.2項と同じ設定で考えよう．つまり，3式(9.38)～(9.40)を採用しよう．以後，簡単のために，式(9.14)を適用して定まる展開式(9.10)の9個の係数を，

$$\begin{array}{lll} c_{j_1}(j_1)=a & c_{j_1}(j_2)=b & c_{j_1}(j_3)=c \\ c_{j_2}(j_1)=d & c_{j_2}(j_2)=e & c_{j_2}(j_3)=f \\ c_{j_3}(j_1)=g & c_{j_3}(j_2)=h & c_{j_3}(j_3)=i \end{array} \tag{9.66}$$

とおく．

9.5.1　認識不定で終了する場合

3式(9.59)，(9.60)，(9.61)の代りに，

$$CSF(\varphi_{j_1},\gamma_{j_1})=[j_1 \quad j_2 \quad j_3] \tag{9.67}$$

$$CSF(\varphi_{j_2},\gamma_{j_2})=[j_2 \quad j_3] \tag{9.68}$$

$$CSF(\varphi_{j_3},\gamma_{j_3})=[j_1 \quad j_3],\text{where } 0<SM(\varphi_{j_3},\omega_{j_1})<1 \wedge 0<SM(\varphi_{j_3},\omega_{j_3})<1 \tag{9.69}$$

という認識不定の場合を考えてみよう．この場合，

$$b=0 \quad f=0 \tag{9.70}$$

である．式(9.23)の値は，

$$\begin{aligned} &\text{式(9.23)の値}=[<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>,<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>] \\ &=\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ d & e & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix}=a\cdot e\cdot i+c\cdot\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{9.71}$$

である．式(9.45)の値$|<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>|$はそのまま，生きており，

$$|<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>|=\sqrt{a^2+d^2+g^2} \tag{9.72}$$

である．式(9.27)の値は，

$$\begin{aligned} &\text{式(9.27)の値}=|<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>| \\ &=\sqrt{(e\cdot i)^2+(c\cdot h)^2+(e\cdot c)^2} \end{aligned} \tag{9.73}$$

であることがわかる．3式(9.71)，(9.72)，(9.73)から，

$$\begin{aligned} &\left|\frac{[<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>,<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>]}{|<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>|\cdot|<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>|}\right|^2 \\ &=\frac{\{a\cdot e\cdot i+c\cdot\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}\}^2}{(a^2+d^2+g^2)\cdot\{(e\cdot i)^2+(c\cdot h)^2+(e\cdot c)^2\}} \end{aligned} \tag{9.73}$$

がわかる．この式(9.73)から，式(9.22)の特別の場合の，式(9.40)の情報容量Cが求まる．

9.5.2　認識可能で終了する場合

3式(9.41)，(9.42)，(9.43)の代りに，

$$CSF(\varphi_{j_1},\gamma_{j_1})=\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \end{bmatrix} \tag{9.74}$$
$$CSF(\varphi_{j_2},\gamma_{j_2})=\begin{bmatrix} j_2 & j_3 \end{bmatrix} \tag{9.75}$$
$$CSF(\varphi_{j_3},\gamma_{j_3})=\begin{bmatrix} j_1 \end{bmatrix},\text{where } SM(\varphi_{j_3},\omega_{j_1})=1 \tag{9.76}$$

という認識可能の場合を考えてみよう．この場合，

$$b=0 \quad f=0 \quad i=0 \tag{9.77}$$

である．式(9.23)の値は，

$$\begin{aligned} &\text{式(9.23)の値}=[<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>,<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>] \\ &=\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{vmatrix}=c\cdot\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{9.78}$$

である．式(9.45)の値$\left|<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>\right|$はそのまま，生きており，式(9.72)の如く計算される．

式(9.27)の値は，

$$\begin{aligned} &\text{式(9.27)の値}=\left|<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>\right| \\ &=\sqrt{(c\cdot h)^2+(c\cdot e)^2}=c\cdot\sqrt{h^2+e^2} \end{aligned} \tag{9.79}$$

であることがわかる．3式(9.78)，(9.72)，(9.79)から，

$$\begin{aligned} &\left|\frac{[<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>,<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>]}{\left|<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>\right|\cdot\left|<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>\right|}\right|^2 \\ &=\frac{\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}^2}{(a^2+d^2+g^2)\cdot\{h^2+e^2\}} \end{aligned} \tag{9.80}$$

がわかる．この式(9.80)から，式(9.22)の特別の場合の，式(9.40)の情報容量Cが求まる．

9.5.3 認識可能で終了する場合

3式(9.41)，(9.42)，(9.43)の代りに，

$$CSF(\varphi_{j_1},\gamma_{j_1})=\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \end{bmatrix} \tag{9.81}$$
$$CSF(\varphi_{j_2},\gamma_{j_2})=\begin{bmatrix} j_2 & j_3 \end{bmatrix} \tag{9.82}$$
$$CSF(\varphi_{j_3},\gamma_{j_3})=\begin{bmatrix} j_2 \end{bmatrix},\text{where } SM(\varphi_{j_3},\omega_{j_2})=1 \tag{9.83}$$

という認識可能の場合を考えてみよう．この場合，

$$b=0 \quad c=0 \quad i=0 \tag{9.84}$$

である．式(9.23)の値は，

$$\begin{aligned} &\text{式(9.23)の値}=[<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>,<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>] \\ &=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & 0 \end{vmatrix}=-a\cdot f\cdot h \end{aligned} \tag{9.85}$$

である．式(9.45)の値$\left|<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>\right|$はそのまま，生きており，式(9.72)の如く計算される．

式(9.27)の値は，

$$\begin{aligned} &\text{式(9.27)の値}=\left|<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>\right| \\ &=\sqrt{(-f\cdot h)^2}=f\cdot h \end{aligned} \tag{9.86}$$

であることがわかる．3式(9.85)，(9.72)，(9.86)から，

$$\left|\frac{[<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>,<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>]}{\left|<\varphi_{j_1},\gamma_{j_1}>\right|\cdot\left|<\varphi_{j_2},\gamma_{j_2}>\otimes<\varphi_{j_3},\gamma_{j_3}>\right|}\right|^2$$

$$=\frac{a^2}{(a^2+d^2+g^2)} \tag{9.87}$$

$$\therefore \quad \text{式(9.40)の情報容量} \quad C=\frac{1}{2}\cdot\log_e\left[1+\frac{a^2}{d^2+g^2}\right] \tag{9.88}$$

がわかる．この式(9.88)の情報容量Cは，式(9.44)の値と一致することがわかる．

9.6　連想形認識方程式(1.17)の近似的な解き方への，式(9.22)の情報容量Cの応用

連想形認識方程式(1.17)の厳密な解き方では，式(4.6)のカテゴリ番号リストの列の各リスト$\mu_s(0\le s\le t)$は，連想形認識方程式(1.17)に登場するカテゴリ番号リストμに固定されていなければならない．つまり，

$$\forall s\in\{0,1,\cdots,t\},\mu_s=\mu \tag{9.89}$$

でなければならない．

実は，式(4.6)のカテゴリ番号リストの列を帰納推理の働きで発見しながら，式(4.5)のカテゴリ帰属知識の列を生成することは，連想形認識方程式(1.17)の近似的な解き方である．この近似的な解き方において，

$$C_s\equiv C(<\phi_0,\lambda_0>:<\phi_1,\lambda_1>,<\phi_2,\lambda_2>,\cdots,<\phi_{s-1},\lambda_{s-1}>,<\phi_s,\lambda_s>) \tag{9.90}$$

$$\ge C'_s\equiv C(<\phi_0,\lambda_0>:<\phi_1,\lambda_1>,<\phi_2,\lambda_2>,\cdots,<\phi_{s-1},\lambda_{s-1}>,<\phi'_s,\lambda'_s>) \tag{9.91}$$

であれば，第$s(0\le s\le t)$認識段階のカテゴリ帰属知識$<\phi'_s,\lambda'_s>$より，$<\phi_s,\lambda_s>$の方を選ぶことが望ましい．つまり，式(4.5)に登場しているカテゴリ番号リスト$\mu_{s-1}\cap\lambda_{s-1}\in 2^J$を

$$\mu_{s-1}\cap\lambda_{s-1}=\mu_s\cup\mu'_s,\mu_s\cap\mu'_s=\phi \tag{9.92}$$

という具合に2分割できたとすれば(例えば，奇数番目の要素からなるリストμ_sと，偶数番目の要素からなるリストμ'_sに2分割すればよい)，式(4.6)のカテゴリ番号リストの代りにカテゴリ番号の部分リスト

$$\mu_0,\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{s-1},\mu'_s\in 2^J \tag{9.93}$$

を採用した順路(path)

$$<\phi_0,\lambda_0>,<\phi_1,\lambda_1>,<\phi_2,\lambda_2>,\cdots,<\phi_{s-1},\lambda_{s-1}>,<\phi'_s,\lambda'_s> \tag{9.94}$$

より，式(4.6)のカテゴリ番号リストの部分リスト

$$\mu_0,\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{s-1},\mu_s\in 2^J \tag{9.95}$$

を採用した順路

$$<\phi_0,\lambda_0>,<\phi_1,\lambda_1>,<\phi_2,\lambda_2>,\cdots,<\phi_{s-1},\lambda_{s-1}>,<\phi_s,\lambda_s> \tag{9.96}$$

の方が望ましい．何故ならば，第1段階以降のカテゴリ帰属知識の外積

$$<\phi_1,\lambda_1>\otimes<\phi_2,\lambda_2>\otimes\cdots\otimes<\phi_{s-1},\lambda_{s-1}>\otimes<\phi'_s,\lambda'_s> \tag{9.97}$$

より，今1つの第1段階以降のカテゴリ帰属知識の外積

$$<\phi_1,\lambda_1>\otimes<\phi_2,\lambda_2>\otimes\cdots\otimes<\phi_{s-1},\lambda_{s-1}>\otimes<\phi_s,\lambda_s> \tag{9.98}$$

の方が，認識の対象となる問題の原パターン$\varphi\in\Phi$を認識使用とする場合，初期値のカテゴリ帰属知識

$$<\phi_0,\lambda_0>=_\Delta<T\varphi,J> \tag{9.99}$$

と，式(9.4)の内積に関し相関が大きいからである．各認識段階$s(0\le s\le t)$において，以上の探索戦

略をとって，$\gamma = J$ の場合の連想形認識方程式(1.17)を式(4.5)の如く，近似的に解けばよい.

9.7　連想形認識方程式(1.17)の近似的な解き方への，式(7.13)の情報容量 MI の応用

式(7.13)の情報容量(相互情報量) $MI(<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>)$ を使って，$\gamma = J$ の場合の連想形認識方程式(1.17)を式(4.5)の如く，近似的に解くことを考えよう.

各認識段階 $s(0 \le s \le t)$ において，もし，不等式

$$MI(<\phi_0,\lambda_0>:<\phi_s,\lambda_s>) \\ \ge MI(<\phi_0,\lambda_0>:<\phi'_s,\lambda'_s>) \tag{9.100}$$

が成り立てば，式(9.93)の順路より，式(9.95)の順路を選ぶ探索戦略が考えられる.

第10章　結び

10.1　認識の過程を自然に写すSS理論

計算(Computing)，認識(recognizing)の諸現象には，自然現象に比肩する深さの構造が潜んでいる. このため，計算の過程，認識の過程は束の理論での半順序による近似の過程として捉えることが必要とされる.

ラムダ言語を使った計算の理論(プログラムの意味論，特に不動点に基づく意味論)が，実用的に耐えられるプログラムの構築理論を提供しながら，同時に，計算過程を自然に写し(特に，その任意の部分集合が上限を持つ半順序構造を備えた完備束の上の，Dana Scottによる，計算理論がそうである)，計算とかプログラムとかというものの性質を浮き彫りにしている. 同じ効果を持つプログラムが必ずしも同一の形態をしているわけではないから，スコットの不動点意味論は，例えば，構文をみてどんな条件の下に停止するかしないかの数学的議論を可能にする意味記述を導入した理論となっている.

同様に，SS理論が，実用的に耐えられるパターン認識システムの構成理論を提供しながら，同時に，認識の過程を自然に写し，パターン認識というものの性質を数理的に，例えば，9.4，9.5節での，式(5.29)の多段階帰納推理認識過程の情報容量 C を計算して，説明しようとしている. 同じ感性を与えるパターンが必ずしも同一の形態をしているわけでもないから，S.Suzuki理論［3］，［4］は，例えば，どんな条件の下に同じ感性をもたらすかもたらさないかの数学的議論を可能にする意味記述を導入した理論となっている.

尚，認識の過程は結局の所，計算の過程に還元されるけれども，計算の過程よりはるかにマクロな認識の過程を特に，独立に論ずることは意味のないことではない. それは，Java言語で書かれたマルチメディア・プログラムのマクロな働きを計算機内部の各ハードウェア素子内電子集団のミクロな働きに還元することが通常，意味のないことであると想定すれば理解できるであろうから.

10.2　現実のパターン認識の働きを反映する同値関係 $\sim_{\Delta}^{*}$

数学では，〜を集合 X 上の同値関係とするとき，$x \in X$ を含む同値類(equlvalence class)

$$[x] \equiv \{y \mid y \in X \wedge y \sim x\} \tag{10.1}$$

が定義される. $z \in [x]$ の時，z を $[x]$ の代表元(representative)という.

集合 X の分割

$$\{[x] \mid x \in X\} \tag{10.2}$$

を〜による集合 X の類別(classification)，或いは，商(quotient)といい， $X/\sim$ と表わす.

集合 X からその分割 $X/\sim$ の上への写像

$$f: X \to X/\sim \tag{10.3}$$

は，類別

$$x \to [x],\, x \in X \tag{10.4}$$

という役割を持つが，この写像を標準写像(canonical mapping)という. □

上述の写像 f がパターン認識システムに相当する.

問題は，現実のパターン認識の働きを反映する同値関係〜を設定する方法である．S.Suzukiはパターン認識の数学的理論［3]，［4］を構築したが，このSS理論では，上述の同値関係〜を同値関係 $\sim_\Delta^*$ と，捕らえている．この事態を説明すると，以下のようになる：

集合 $<\Phi,2^J>$ の分割である式(C.36)の商集合

$$<\Phi,2^J> \;/\; \sim_\Delta^* \tag{10.5}$$

は，同値関係 $\sim_\Delta^*$ による $<\Phi,2^J>$ の類別ということになる．この類別は式(1.1)の認識システムRECOGNITRONが連想形認識方程式(1.17)の解

$$<\phi,\lambda> \in [<T\varphi,\gamma>]_\Delta^* \in <\Phi,2^J> \;/\; \sim_\Delta^* \tag{10.6}$$

を求める多段階帰納推理の働きで実現されている.

$$f :< \Phi,2^J > \to \;<\Phi,2^J> \;/\; \sim_\Delta^* \tag{10.7}$$

という，集合 $<\Phi,2^J>$ からその分割 $<\Phi,2^J> \;/\; \sim_\Delta^*$ の上への写像 f は標準写像(canonical mapping)といわれるが，類別

$$<\varphi,\gamma> \to [<\varphi,\gamma>]_\Delta^*,\, <\varphi,\gamma> \in <\Phi,2^J> \tag{10.8}$$

の役割を持つこの標準写像 f を式(1.1)の認識システムRECOGNITRONが実現している(付録Cの定理C3を参照). □

SS理論を適用して構築された式(1.1)の認識システムRECOGNITRONの思考状態と考えられるカテゴリ帰属知識をパターンと考えて，このパターンに対し認識の働きを発現できるC-RECOGNITRONをSS理論の枠組で構成できるという認識の階層［62］を浮き彫りにできることは，SS理論が普遍妥当性を備えている証拠である，と思える.

10.3 $<\varphi,\gamma>$ の中に $<\eta,\mu>$ を蓄えることの出来る程度を表わす情報容量 $MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$

カテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>$ 内に今1つのカテゴリ帰属知識 $<\eta,\mu>$ が存在する程度，存在しない程度を各々，表わしている新しい2種類の情報量 $MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$， $MI(<\varphi,\gamma>:\neg<\eta,\mu>)$ が2式(1.46)，(1.47)の形で提案されている．更に，式(1.48)の類似度関数 $\mathfrak{S}\mathfrak{M}(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)$ が，式(1.16)のカテゴリ帰属知識空間 $<\Phi,2^J>$ でのモデル構成作用素［62］$\mathfrak{T}$ に不変な式(1.49)の情報容量

$$MI'(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>) \equiv MI(\mathfrak{T}<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$$

を使って構成される.

つまり， $<\varphi,\gamma>$ の中に $<\eta,\mu>$ を蓄えることの出来る程度を表わす情報容量であると考えられる式(7.13)の $MI(<\varphi,\gamma>:<\eta,\mu>)$ と， $<\varphi,\gamma>$ の中に $<\eta,\mu>$ を蓄えることの出来ない程度を表わす情報容量であると考えられる式(7.24)の $MI(<\varphi,\gamma>:\neg<\eta,\mu>)$ が提案された.

10.4 有限個のカテゴリ帰属知識の外積と，有限個のカテゴリ帰属知識が蓄えることの出来る最大の情報容量C

カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$の元$<\omega_j,[j]>$からなる式(6.18)の1次独立な系(完全正規直交系)$<\Omega,J>$を導入し，この系を基底とするような有限個のカテゴリ帰属知識の1次展開(SS展開；標準分解)(定理6.3)を利用し，有限個のカテゴリ帰属知識の外積を式(9.17)の形で新しく提案し，この外積でカテゴリ帰属知識の変容の程度(変形量)を定義する
のも，本研究の独創性である．

有限個のカテゴリ帰属知識が蓄えることの出来る最大の情報容量C
が式(9.22)で提案された．

式(5.29)の多段階認識過程の情報容量も計算され，多段階認識過程が特徴付けられることも示された．更に，連想形認識方程式(1.17)を近似的に解く場合，帰納推理の働きで選定される式(4.6)のカテゴリ番号のリストの列の探索戦略の選び方へ，式(9.3)の情報容量Cを応用することも考えた．

初期条件として，式(5.30)を採用した式(5.29)の多段階帰納推理認識過程については，3式(9.30)～(9.32)の設定を採用したときの，式(9.22)の情報容量Cが出来るだけ大きいことが望ましい．

つまり，初期のカテゴリ帰属知識

$$<\phi_0,\lambda_0> \tag{10.9}$$

が，その後続のカテゴリ帰属知識の列

$$<\phi_1,\lambda_1>,<\phi_2,\lambda_2>,\cdots,<\phi_t,\lambda_t> \tag{10.10}$$

の作る外積帰属知識

$$<\phi_1,\lambda_1>\otimes<\phi_2,\lambda_2>\otimes\cdots\otimes<\phi_t,\lambda_t> \tag{10.11}$$

と，出来るだけ直交しないように，

$$<\phi_0,\lambda_0> = <\phi_1,\lambda_1>\otimes<\phi_2,\lambda_2>\otimes\cdots\otimes<\phi_t,\lambda_t> \tag{10.12}$$

が実現するように，より精確にいえば，

$$\frac{[<\phi_0,\lambda_0>,<\phi_1,\lambda_1>\otimes<\phi_2,\lambda_2>\otimes\cdots\otimes<\phi_t,\lambda_t>]}{\left|<\phi_0,\lambda_0>\right|\cdot\left|<\phi_1,\lambda_1>\otimes<\phi_2,\lambda_2>\otimes\cdots\otimes<\phi_t,\lambda_t>\right|}\to 1 \tag{10.13}$$

が成立するように，ある戦略で式(10.10)の後続のカテゴリ帰属知識列が選ばれていれば，式(9.22)の情報容量Cが$C\to\infty$となることが直ちにわかる．

このような戦略を研究することが残されている．

文　献

［1］　鈴木昇一：認識工学，柏書房，Feb.1975

［2］　鈴木昇一：ニューラルネットの新数理，近代文芸社，Sept.1996

［3］　鈴木昇一：パターン認識問題の数理的一般解決，近代文芸社，June 1997

［4］　鈴木昇一：認識知能情報論の新展開，近代文芸社，Aug.1998

［5］　鈴木昇一：パターンのエントロピーモデル，電子情報通信学会論文誌(D-Ⅱ)，vol.J77-D-Ⅱ, no.10, pp.2220-2238, Nov.1994

［6］　鈴木昇一：手書き漢字の側抑制効果的分解とその計算機シミュレーション，情報処理学会誌，vol.15, no.12, pp.927-934, Dec.1974

［7］　鈴木昇一：画像情報量とその手書き漢字への応用，画像電子学会誌，vol.4，no.1，pp.4-12,

Apr.1975
［8］ 鈴木昇一：抽出された特徴による手書き漢字構造の再生，情報処理学会誌，vol.18, no.11, pp.1115-1122, Nov.1977
［9］ 鈴木昇一：回転群と画像の分解･強調･構造化再構成に関する計算機シミュレーション，情報研究（文教大学･情報学部），no.4, pp.36-56, Dec.1983
［10］ 鈴木昇一：連想形記憶器MEMOTRONと日本語単独母音系列の再生に関する計算機シミュレーション，情報研究（文教大学･情報学部），no.7, pp.14-29, Dec.1986
［11］ 鈴木昇一，中村三郎：知識情報処理における帰納的推論，情報研究（文教大学･情報学部），no.9, pp.173-196, Dec.1988
［12］ 鈴木昇一：多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション，情報研究（文教大学･情報学部），no.10, pp.35-49, Dec.1989
［13］ 鈴木昇一：帰属係数法に基づく類似度，帰属関係あいまい度，認識情報量の計算機シミュレーション，情報研究（文教大学･情報学部），no.11, pp.51-68, Dec.1990
［14］ 鈴木昇一：Radial-Basis Function Networks, Wavelet-Based Networks を用いたモデル構成作用素の構成法，情報研究（文教大学･情報学部）no.17, pp.71-131, Dec.1996
［15］ 鈴木昇一：構造受精法と日本語単独母音の認識，情報研究（文教大学･情報学部）no.18, pp.17-51, Dec.1998
［16］ 鈴木昇一，前田英明：有声破裂音の代表パターンの学習的決定と，その計算機シミュレーション，情報研究（文教大学･情報学部），no.20, pp.77－95, Dec.1998
［17］ 鈴木昇一，前田英明：変動エントロピーによる有声破裂音の順序付けと，その計算機シミュレーション，情報研究（文教大学･情報学部），no.21, pp.51－77, Mar.1999
［18］ 鈴木昇一，柴山秀雄，大本修：コヒーレント心理状態での認識対象の表現とその応用，芝浦工業大学研究報告理工系編，vol.24, no.1, pp.139-146, Mar.1980
［19］ 鈴木昇一：界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の，顔画像処理に関する計算機シミュレーション，情報研究（文教大学･情報学部），no.23, pp.109－182, Mar.2000
［20］ 鈴木昇一：風景画から知識を抽出し，解釈するシステムの，ファジィ推論ニューラルネットによる構成，情報研究（文教大学･情報学部）, no.23, pp.183-265, Mar.2000
［21］ 鈴木昇一：各個人の感性を反映した認識システムRECOGNITRON，情報研究（文教大学･情報学部），no.24, pp.185－257, Dec.2000
［22］ 鈴木昇一：プロダクション･システムとしてのファジィ･マルチメディア･コンピュータと，空間多重パターンファジィ推論系，情報研究（文教大学･情報学部），no.24, pp.105－183, Dec.2000
［23］ 鈴木昇一：SS大分類関数BSCの適応的構成への，計算論的学習理論の適用，情報研究（文教大学･情報学部），no.25, pp.185－236, Mar.2001
［24］ 鈴木昇一：量子力学の諸原理，多段階量子認識系と，心理状態を取り入れた想起に基づく部分空間認識法，情報研究（文教大学･情報学部），no.25, pp.237－282, Mar.2001
［25］ 鈴木昇一：測度的不変量検出形認識系の構成理論，電子通信学会論文誌（D），vol.55-D，no.8, pp.513-538, Aug.1972
［26］ 鈴木昇一，斉藤静昭，奥野治雄，太田芳雄：画像の復元とその計算機シュミレーション，工学院大学研究報告，no.39, pp.198-206, Jan.1976

［27］ 鈴木昇一，佐久間拓也，前田英明：数理形態学における諸演算とモデル構成作用素，情報研究(文教大学･情報学部)，no.17, pp.133-170, Dec.1996

［28］ 重野純：感情を表現した音声の認知と音響的性質，心理学研究，no.74, no.6, pp.540-546, 2004

［29］ 鈴木昇一：類似度関数を用いた確率的緩和法，情報研究(文教大学･情報学部)，no.20, pp.23－75, Dec.1998

［30］ 鈴木昇一：直交系によるパターモデルの構成，情報研究(文教大学･情報学部)，no.21, pp.23-49, Mar.1999

［31］ 鈴木昇一：認識行為に向けての，効用最大化原理，情報研究(文教大学･情報学部)，no.22, pp.151-210, Dec.1999

［32］ 鈴木昇一：高次認知機能における論理表現の要素，情報研究(文教大学･情報学部)，no.19, pp.29-82, Mar.1998

［33］ 鈴木昇一：Support Vector Machineを利用した大分類関数の構成，情報研究(文教大学･情報学部)，no.26, pp.1－62, Dec.2001

［34］ 鈴木昇一：2カテゴリ分類困難度の情報理論，情報研究(文教大学･情報学部)，no.26, pp.63－160, Dec.2001

［35］ 鈴木昇一：一般化類似度関数を用いた“導出原理による第1階述語推論，情報研究(文教大学･情報学部)，no.27, pp.27－71, Mar.2002

［36］ 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：風景画の理解に関するJAVA言語によるRECOGNITRONの計算機シミュレーション，情報研究(文教大学･情報学部)，no.27, pp.73－109, Mar.2002

［37］ 鈴木昇一：遺伝的アルゴリズムにおける適合度比例選択戦略を利用した進化方程式の，パターン多段階変換に基づく認識への応用，情報研究(文教大学･情報学部)，no.28, pp.37－67, Dec.2002

［38］ 鈴木昇一：近傍を利用した音素認識のためのモデル構成作用素T，類似度関数SM，大分類関数BSCの諸構成と，SS不動点探索型多段階想起認識，情報研究(文教大学･情報学部)，no.28, pp.69－141, Dec.2002

［39］ 鈴木昇一：JAVA言語で実装化された画像理解システムIUSの動作概要と，その稼動方法，情報研究(文教大学･情報学部)，no.28, pp.143－165, Dec.2002

［40］ 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：JAVA言語による計算機シミュレーションで生じた風景画像の理解場面での多段階連想形認識過程の異常現象，情報研究(文教大学･情報学部)，no.29, pp.123－166, July 2003

［41］ 鈴木昇一：パターン情報処理(モデル構成作用素，誤差逆伝播学習2層ニューラルネット)と，論理的含意とによる非単調的知識推論，情報研究(文教大学･情報学部)，no.29, pp.75－121, July 2003

［42］ 鈴木昇一：可分な一般抽象ヒルベルト空間でのK-L直交系の理論，情報研究(文教大学･情報学部)，no.29, pp.41－73, July 2003

［43］ 鈴木昇一：パターン系列(動画像，会話音声)の，dynamical systemによる連想理論と，連想器SPATEMTRON，情報研究(文教大学･情報学部)，no.30, pp.139－186, Jan.2004

［44］ 鈴木昇一：入出力例の系列を用いた“対連想問題･その擬逆問題”の一般解，情報研究(文教大学･情報学部)，no.30, pp.81－137, Jan.2004

［45］ 鈴木昇一：共役勾配法の一般解における直交系の応用(画像復元，パターンモデルの構成，

パターン集合の情報理論的次元)，情報研究(文教大学･情報学部), no.30, pp.27－79, Jan.2004
[46] 鈴木昇一：2つのパターンモデル構成作用素の，λ言語論理による構成法，情報研究(文教大学･情報学部)，no.31, pp.43－66, July 2004
[47] 鈴木昇一：会話音声・動画像処理への，万能性類似度関数の採用によるSS多段階認識の改良，情報研究(文教大学･情報学部)，no.31, pp.67－110, July 2004
[48] 鈴木昇一：数理形態学の新しい2つのパターン変換作用素を用いた多段階想起認識，情報研究(文教大学･情報学部)，no.31, pp.111－141, July 2004
[49] 鈴木昇一，太田芳雄，斉藤静昭，奥野治雄：感覚空間回路の設計と作用素に対するラプラス変換法，工学院大学研究報告，no.40.June 1976
[50] 鈴木昇一：1パラメータLie座標変換群とそのパターン正規化への応用，情報研究(文教大学･情報学部)，no.32, pp.21－74, Jan.2005
[51] 鈴木昇一：曖昧さに関する半順序$\propto$を単調に保つモデル構成作用素T，情報研究(文教大学･情報学部)，no.32, pp.75－126, Jan.2005
[52] 鈴木昇一：パターンφから抽出された特徴量$u(\varphi,\ell)$のfuzzy単調変換，情報研究(文教大学･情報学部)，no.32, pp.127－168, Jan.2005
[53] 鈴木昇一：パターンモデル(パターンの標準形)の一般形，情報研究(文教大学･情報学部)，no.32, pp.169－218, Jan.2005
[54] 鈴木昇一：類似度関数の密度を用いた，画素毎のパターン認識処理(パターン理解処理)の方法，情報研究(文教大学･情報学部)，no.32, pp.219－285, Jan.2005
[55] 鈴木昇一：パターン(画像，音声)から感性情報を計量できる一般的な方法(視野を考慮して構成された類似度関数SMの応用)，情報研究(文教大学･情報学部)，no.33, pp.216-316, Jul. 2005
[56] 鈴木昇一：知識工学におけるcertainty factorによる多段階認識過程の評価，情報研究(文教大学･情報学部)，no.33, pp.199-260, Jul.2005
[57] 鈴木昇一：線形方程式の制約条件下での，残差法によるパターンモデル，情報研究(文教大学･情報学部)，no.33, pp.149-197, Jul.2005
[58] 鈴木昇一：正規直交性を満たす類似度関数SMに積分核が存在するか？，情報研究(文教大学･情報学部)，no.33, pp.111-147, Jul.2005
[59] 鈴木昇一：原パターンを近似できるという拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの，会話音声・動画像処理への応用，情報研究(文教大学･情報学部)，no.33, pp.43-110, Jul.2005
[60] 鈴木昇一：パターンの変形量を外積演算による情報量で捉えよう-情報容量の提案と，情報容量を用いた類似度関数SMの構成-，情報研究(文教大学･情報学部)，本号
[61] 鈴木昇一：新しいパターン外積演算と，発想推論に役立つ異種想起の働き，情報研究(文教大学･情報学部)，to be published
[62] 鈴木昇一：認識の階層とC-RECOGNITRON，情報研究(文教大学･情報学部)，本号
[63] 金澤靖，金谷健一：コンピュータビジョンのための画像の特徴点の抽出，電子情報通信学会会誌，vol.87, no.12, pp.1043-1048, Dec.2004
[64] Yali Amit, Donald Geman, Xiaodong Fan：A coarse-to-Fine Strategy for Multiclass ShapeDetection, IEEE Transactions on pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.26, no.12, pp.1606-1621, Dec.2004

付録A.　感性情報（パターン，カテゴリ帰属知識）の3分解

S.Suzukiは，式(1.1)の認識システムRECOGNITRONの構成理論を展開中，以下のSS分解1，SS分解2を発見している．

本付録Aでは，先ず，パターンφを分解するよく知られている最小自乗展開が先ず，説明され，その次に，S.Suzukiの考案によるパターン外積を用いたパターンφの直交分解法（SS分解1）が説明され，最後に，カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$を直交分解する方法（SS分解2）が説明される．

A1.　種類Ⅰ（パターン（可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元）φの最小自乗展開）[3]，[4]

(φ,η)を内積とし，ノルムを$\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi,\varphi)}$とする可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の任意の元$\varphi\in\mathfrak{H}$は，1次独立な系$\{\phi_k\}_{k\in L}$を用いて，

$$\forall\varphi\in\mathfrak{H},\varphi=\sum_{k\in L}c_k\cdot\phi_k+\varphi_\perp \text{ such that } \forall k\in L,(\varphi_\perp,\phi_k)=0 \tag{A.1}$$

と分解され得る.各1次展開係数$c_k(k\in L)$は，近似誤差

$$\varphi-\sum_{k\in L}c_k\cdot\phi_k \tag{A.2}$$

のノルム$\left\|\varphi-\sum_{k\in L}c_k\cdot\phi_k\right\|$の自乗

$$\left\|\varphi-\sum_{k\in L}c_k\cdot\phi_k\right\|^2 \tag{A.3}$$

を最小とするように，決めることが出来る.

各1次展開係数c_kは，連立1次方程式

$$\sum_{\ell\in L}c_\ell\cdot(\phi_\ell,\phi_k)=(\varphi,\phi_k),k\in L \tag{A.4}$$

の解として求まる．系$\{\phi_k\}_{k\in L}$は1次独立であるから，

$$a_{k\ell}=(\phi_\ell,\phi_k) \tag{A.5}$$

を第$k\in L$行第$\ell\in L$列の要素とする行列$A=(a_{k\ell})_{k,\ell\in L}$の行列式の値$\det(A)$は非零であり，それ故，連立1次方程式(A.4)の解$\{c_k\}_{k\in L}$は必ず，求まる.

もし，1次独立な系$\{\phi_k\}_{k\in L}$が

$$(\phi_k,\phi_\ell)=0 \quad \text{if} \quad k\neq\ell \tag{A.6}$$

を満たすという意味で，直交系であるなら，各1次展開係数$c_k,k\in L$は，連立1次方程式(A.4)の解として，

$$c_k=\frac{(\varphi,\phi_k)}{(\phi_k,\phi_k)},k\in L \tag{A.7}$$

と求まる．更に，1次独立な系$\{\phi_k\}_{k\in L}$が，式(A.6)を満たし，然も

$$\forall k\in L,\|\phi_k\|=1 \tag{A.8}$$

が成立するという意味で，正規直交系であるなら

$$c_k=(\varphi,\phi_k),k\in L \tag{A.9}$$

と求まる.

以上が，可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元φの，よく知られた最小自乗展開である.

A2. 種類Ⅱ（外積による展開；SS展開1）［61］

A2.1 直交分解

可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の任意の2元（2パターン）$\varphi,\eta\in\mathfrak{H}$の，1次独立な系（基底）$\{\phi_k\}_{k\in L}$を用いての1次展開形式

$$\varphi=\sum_{\ell\in L} c_\ell\cdot\phi_\ell+\varphi_\perp \qquad \text{such that } \forall\ell\in L,(\varphi_\perp,\phi_\ell)=0 \tag{A.10}$$

$$\eta=\sum_{\ell\in L} d_\ell\cdot\phi_\ell+\eta_\perp \qquad \text{such that } \forall\ell\in L,(\eta_\perp,\phi_\ell)=0 \tag{A.11}$$

内の各1次結合係数$c_k(k\in L)$，$d_k(k\in L)$の求め方は，A1節（種類Ⅰ）に説明されている．

以後，各1次結合係数$c_k(k\in L)$，$d_k(k\in L)$を実数値とする.更に，添え字ℓの集合Lは,

$$L=\{1,2,\cdots,3n-2,2n-1,3n\}=\{L_1,L_2,L_3,L_4,\cdots,L_n\} \tag{A.12}$$

$$L_k=\{3k-2,3k-1,3k\},k=1,2,\cdots,n \tag{A.13}$$

とする.

A2.2 外積$\varphi\otimes\eta$

1次独立な系（基底）$\{\phi_k\}_{k\in L}=\{\phi_\ell\}_{\ell=1,2,\cdots,3n}$を用いて，2つのパターン$\varphi,\eta$の外積パターン

$$\phi\equiv\varphi\otimes\eta \tag{A.14}$$

は,

$$\varphi\otimes\eta\equiv\sum_{k=1}^{n}\varphi<k>\otimes\eta<k> \tag{A.15}$$

と定義される．ここに，2つの第$k(=1,2,\cdots,n)$番目のパターン$\varphi<k>,\eta<k>$の成分外積$\varphi<k>\otimes\eta<k>$を,

$$\varphi<k>\otimes\eta<k>\equiv\sum_{\ell\in L_k}\begin{vmatrix}\phi_{3k-2} & c_{3k-2} & d_{3k-2}\\ \phi_{3k-1} & c_{3k-1} & d_{3k-1}\\ \phi_{3k} & c_{3k} & d_{3k}\end{vmatrix} \tag{A.16}$$

と定義する.

そうすれば，2つのパターンφ,ηの再表現

$$\varphi=\sum_{k=1}^{n}\varphi<k>+\varphi_\perp \quad ,\ \varphi<k>=\sum_{\ell\in L_k}c_\ell\cdot\phi_\ell \tag{A.17}$$

$$\eta=\sum_{k=1}^{n}\eta<k>+\eta_\perp \quad ,\ \eta<k>=\sum_{\ell\in L_k}d_\ell\cdot\phi_\ell \tag{A.18}$$

が成り立つ.ここに，内積$[\varphi<k>,\eta<k>]$，ノルム$|\varphi<k>|$は各々,

$$[\varphi<k>,\eta<k>]\equiv\sum_{\ell\in L_k}c_\ell\cdot d_\ell \tag{A.19}$$

$$|\varphi<k>|\equiv\sqrt{[\varphi<k>,\varphi<k>]} \tag{A.20}$$

と定義される．また,

$$[\varphi,\eta]\equiv\sum_{k=1}^{n}[\varphi<k>,\eta<k>] \tag{A.21}$$

$$|\varphi|\equiv\sqrt{[\varphi,\varphi]} \tag{A.22}$$

と定義される.

A2.3　外積$\otimes$，内積$[,]$による直交分解

任意の$\varphi \in \mathfrak{H}$と任意の$k \in \{1,2,\cdots,n\}$とに対し，

$$\varphi' < k > \equiv \frac{1}{[\eta < k >, \eta < k >]} \cdot \eta < k > \cdot [\varphi < k >, \eta < k >] \tag{A.23}$$

$$\varphi'' < k > \equiv \frac{1}{[\eta < k >, \eta < k >]} \cdot \eta < k > \otimes (\varphi < k > \otimes \eta < k >) \tag{A.24}$$

とおけば，直和分解性

$$\varphi < k > = \varphi' < k > + \varphi'' < k > \tag{A.25}$$

が成り立つ．ここに，直交分解性

$$[\varphi' < k >, \varphi'' < k >] = 0 \tag{A.26}$$

が成立している．

そうすると，SS分解1（SS展開1）

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi' < k > + \sum_{k=1}^{n} \varphi'' < k > + \varphi_{\perp} \tag{A.27}$$

が成り立つ．

A3.　種類Ⅲ（カテゴリ帰属知識の直交分解；SS展開2）［3］

認識システム

$$\text{RECOGNITRON} = < \Phi_B, T, SM, BSC > \tag{A.28}$$

を導入し，この認識システムRECOGNITRONが処理の対象とするパターンφの集合Φは，可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の部分集合であり，

$$\Phi = R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B) \tag{A.29}$$

であるとしよう．SM, BSCの両者で定義される定理5.1のカテゴリ選択関数（文献［3］の付録Eでの定理E1で求められている関数）CSFを導入しておく．

A3.1　カテゴリ帰属知識空間$< \Phi, 2^J >$

処理の対象とする問題のパターン$\varphi \in \Phi$について，

φが，有限個のカテゴリ$\mathfrak{C}_i (i \in \gamma)$からなる集合

$$\mathfrak{C}(\gamma) \equiv \{ \mathfrak{C}_i | i \in \gamma \in 2^J \} \tag{A.30}$$

の内の何れか1つのカテゴリに帰属している可能性があるというカテゴリ事前知識

（A.31）

を認識システムRECOGNITRON $= < \Phi_B, T, SM, BSC >$が持っている場合，このカテゴリ事前知識を

$$< \varphi, \gamma > \tag{A.32}$$

と表わす．「認識システムが処理の対象とするパターンに対し持つカテゴリ事前知識」という概念は，S.Suzukiのパターン認識の数学的理論（a mathematical theory of recognizing patterns）［3］，［4］が初めて提出したものである．順序対$< \varphi, \gamma >$はRECOGNITRONがパターン$\varphi \in \Phi$についての持つカテゴリ帰属知識（categorical membership-knowledge）と呼ばれる．すべての$< \varphi, \gamma >$の集まり

$$< \Phi, 2^J > (\ni < \varphi, \gamma >) \tag{A.33}$$

はカテゴリ帰属知識空間（space of categorical membership-knowledges）と呼ばれており，その代数的・幾何学的・解析的な諸性質は既に明らかにされている［3］，［4］．

A3.2　カテゴリ帰属知識間の内積，ノルム

カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>.<\eta,\mu>$間の内積$(<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>)$，カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$のノルム$\|<\varphi,\gamma>\|$は，カテゴリ選択関数$CSF$を用いて，各々，次のように定義される：

$$(<\varphi,\gamma>,<\eta,\mu>)$$

$$\equiv \sum_{j\in CSF(\varphi,\gamma)\cap CSF(\eta,\mu)} \sqrt{SM(\varphi,\omega_j)}\sqrt{SM(\eta,\omega_j)}] \tag{A.34}$$

$$\|<\varphi,\gamma>\| \equiv \sqrt{(<\varphi,\gamma>,<\varphi,\gamma>)} \tag{A.35}$$

□

A3.3　カテゴリ帰属知識間の等構造

カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>.<\eta,\mu>$間の等構造関係（文献［3］の定義3.2）$<\varphi,\gamma>=<\eta,\mu>$は，次のように定義される：

$$<\varphi,\gamma>=<\eta,\mu> \tag{A.36}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$CSF(\varphi,\gamma)=CSF(\eta,\mu)\wedge \tag{A.37}$$

$$[\forall j\in CSF(\varphi,\gamma)\cap CSF(\eta,\mu), SM(\varphi,\omega_j)=SM(\eta,\omega_j)]\,. \tag{A.38}$$

□

A3.4　射影係数$(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)$

$$(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)\cdot<\omega_j,[j]> \tag{A.39}$$

は，$<\varphi,\gamma>$を$<\Phi,2^J>$の第$j\in J$番目の基底$<\omega_j,[j]>$へと射影して得られるカテゴリ帰属知識成分である．登場している展開係数$(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)$は射影係数と呼ばれ，次のように求められる：

$$\forall <\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>, \forall<\omega_j,[j]>\in<\Omega,J>,$$

$$(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)=$$

$$\begin{cases} \sqrt{SM(\varphi,\omega_j)} & \text{if} \quad j\in CSF(\varphi,\gamma) \\ 0 \quad \text{if} \quad j\in J-CSF(\varphi,\gamma) \end{cases} \tag{A.40}$$

が成り立つ（文献［B3］の命題5.1；射影係数の値）．　□

A3.5　カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$の標準分解

2写像SM,BSCが共に全射性を備えているとの仮定の下で，SS展開2

$$\forall <\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>,$$

$$<\varphi,\gamma>=\sum_{j\in J}(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)\cdot<\omega_j,[j]>\,. \tag{A.41}$$

が成り立つ（文献［3］の定理7.1（カテゴリ帰属知識のSS標準分解定理；SS展開2）．

よって，

$$\forall <\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>,$$

$$\|<\varphi,\gamma>\|^2=\sum_{j\in J}\left|(<\varphi,\gamma>,<\omega_j,[j]>)\right|^2\,. \tag{A.42}$$

も成り立つ（文献［3］の定理7.1の系1；パーシバァルの等式）．

付録B.　カテゴリ帰属知識のポテンシャル・エネルギー

本付録Bでは，カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$がどの程度複雑な構造を備えているかの1つの指標として，SSポテンシャル（SS potential）と称されるポテンシャルエネルギー（potential energy）$E(\varphi,\gamma)$を与える関数

$$E:\Phi\times 2^J\to R^+ \text{（非負実数全体の集合）} \tag{B.1}$$

が定義される.ポテンシャル・エネルギー$E(\varphi,\gamma)\in R^+$は2元関係$\leq_\Delta$の定義などに用いられる.

［定義B1］（カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>$のポテンシャルエネルギー$E(\varphi,\gamma)$）

カテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$のポテンシャルエネルギー（energy）$E(\varphi,\gamma)$は次の様に定義される：

①$\varphi=0$，あるいは$\gamma=\phi$（空集合）　のとき

$$E(\varphi,\gamma)=0\,. \tag{B.2}$$

②$\varphi\neq 0$　かつ　$\gamma\neq\phi$（空集合）　のとき

$$E(\varphi,\gamma)=|\gamma|-\sum_{j\in\gamma}SM(\varphi,\omega_j)\,. \tag{B.2}$$

ここに，$|\gamma|$はγ内の要素の総数の意であって，$|\gamma|\geqq 1$

□

ポテンシャルエネルギー$E(\varphi,\gamma)$と，パターン$\varphi\in\Phi$の認識過程とのつながりについて次の意味がある：式（1.14）或いは式（A.30）の候補カテゴリの集合$\mathfrak{C}(\gamma)$のすべての要素$j\in\gamma$にわたる類似度$SM(\varphi,\omega_j)$の総和

$$\sum_{j\in\gamma}SM(\varphi,\omega_j) \tag{B.3}$$

が増加し，候補カテゴリの総数$|\gamma|$が減少すれば，$E(\varphi,\gamma)$が減少するから，不動点探索形構造受精に関する多段階変換帰納推論を使った連想形パターン認識過程がどの程度，収束しているかの指標が$E(\varphi,\gamma)$である.　□

帰属知識$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$の，構造受精変換$TA(\mu)T$による変換像である今1つの，式（5.16）のカテゴリ帰属知識$<\phi,\lambda>=_\Delta TA(\mu)T\cdot<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$について，エネルギー不等式

$$E(\varphi,\gamma)\ \geq\ E(\phi,\lambda) \tag{B.4}$$

が通常，成立するという意味で，式（3.2）に登場する変換$TA(\mu)T$は，帰属知識$<\varphi,\gamma>$の精密化作用素（refinement operator）とも称されることがある.

付録C.　カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$での同値関係$\sim_\Delta^*$，半順序関係$\leq_\Delta^*$と上限$\bigsqcup_\Delta^*$

本付録Cでは，カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$上に，カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$上の同値関係$\sim_\Delta^*$，半順序関係$\leq_\Delta^*$，並びに，上限$\bigsqcup_\Delta^*$が定義され得ることなどが説明される.

C1　単なる2元関係$\leq_\Delta$と，半順序を与える2元関係$\leq_\Delta^*$

先ず，カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$上の2元関係$\leq_\Delta$を次の定義C1のように定義してみよう.

［定義C1］（2元関係$\leq_\Delta$）

$<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$が$<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J>$と2元関係$\leq_\Delta$にあることを，$<\varphi,\gamma>\leq_\Delta<\phi,\lambda>$と表すと，こ

の2元関係$\leq_\Delta$は

$<\varphi,\gamma>\leq_\Delta<\phi,\lambda>$ （C.1）

$\Leftrightarrow$【$E(\varphi,\gamma)\geq E(\phi,\lambda)$

$\wedge[<\varphi,\gamma>=_\Delta<\phi,\lambda>$ （C.2）

$\vee\{\exists\mu\in 2^J,TA(\mu)T\cdot<\varphi,\gamma>=_\Delta<\phi,\lambda>\}$ （C.3）

]

】

と定義される． □

付録Bで定義されているSS－ポテンシャル$E(\varphi,\gamma)$について，

$\forall<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>,E(T\varphi,\gamma)=E(\varphi,\gamma)$ （C.4）

は成立するけれども，一般に，

$<T\varphi,\gamma>=_\Delta<\varphi,\gamma>$ （C.5）

は成立しない．また，

$\exists\mu\in 2^J,TA(\mu)T\cdot<\varphi,\gamma>=_\Delta<T\varphi,\gamma>$ （C.6）

も一般に，成立しない．それで，一般に，

$<\varphi,\gamma>\leq_\Delta<T\varphi,\gamma>$ （C.7）

は成立しない．半順序を与えない2元関係

$<\varphi,\gamma>\leq_\Delta<\phi,\lambda>$ （C.8）

については，次の(イ，(ロ)のいずれがいえる：

（イ） $E(\varphi,\gamma)\geq E(\phi,\lambda)\ \wedge\ <\varphi,\gamma>=_\Delta<\phi,\lambda>$ （C.9）

から，$<\phi,\lambda>$は$<\varphi,\gamma>$よりも構造的に複雑でない．

（ロ） $E(\varphi,\gamma)\geq E(\phi,\lambda)\ \wedge\ \{\exists\mu\in 2^J,TA(\mu)T\cdot<\varphi,\gamma>=_\Delta<\phi,\lambda>\}$ （C.10）

の後者から，

$\{\exists\mu\in 2^J,\phi=TA(\mu\cap\gamma)T\varphi\wedge\lambda=CSF(\varphi,\mu\cap\gamma)$ $\because$ 式(5.16) （C.11）

が従う．よって，パターンφがϕへと変換された場合，パターンφが帰属する式(1.14)の候補カテゴリ集合$\mathfrak{C}(\gamma)$が，助変数$\mu\in 2^J$により

$\mathfrak{C}(\lambda)\ (\subseteq\mathfrak{C}(\mu\cap\gamma)=\mathfrak{C}(\mu)\cap\mathfrak{C}(\gamma))$ （C.12）

へと絞られるような$<\phi,\lambda>$が$<\varphi,\gamma>$より得られる． □

2つのカテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>,<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J>$が式(C.1)の2元関係にあれば，次の4解釈(一)～(四)が可能である：

（一） $<\varphi,\gamma>$は$<\phi,\lambda>$の近似である．

（二） $<\varphi,\gamma>$は$<\phi,\lambda>$に要約される．

（三） $<\phi,\lambda>$は$<\varphi,\gamma>$の情報を凝縮したものである．

（四） $<\phi,\lambda>$は$<\varphi,\gamma>$に変形されていたものである． □

更に，2元関係$\leq_\Delta$の有限な，式(C.15)の鎖(chain)を用い，次の定義C2のように，カテゴリ帰属知識空間$<\Phi,2^J>$上の2元関係$\leq_\Delta{}^*$を定義する．

［定義C2］（2元関係$\leq_\Delta{}^*$）

$<\varphi,\gamma>\leq_\Delta{}^*<\phi,\lambda>$ （C.13）

$\Leftrightarrow$【$<\varphi,\gamma>\leq_\Delta<\phi,\lambda>$ （C.14）

$\vee$ ［$\exists n\in\{1,2,\cdots\}$，

$$\exists <\varphi_1,\gamma_1>, \exists <\varphi_2,\gamma_2>, \cdots, \exists <\varphi_{n-1},\gamma_{n-1}> \in <\Phi, 2^J>,$$

$$<\varphi_0,\gamma_0>$$
$$\leq_\Delta <\varphi_1,\gamma_1> \leq_\Delta <\varphi_2,\gamma_2> \leq_\Delta \cdots \leq_\Delta <\varphi_{n-1},\gamma_{n-1}>$$
$$\leq_\Delta <\varphi_n,\gamma_n> \qquad \text{(C.15)}$$

where

$$<\varphi_0,\gamma_0> =_\Delta <\varphi,\gamma> \wedge <\varphi_n,\gamma_n> =_\Delta <\phi,\lambda>$$

］

】　(C.16)

□

次の定理C1によれば，定義C2の2元関係 $\leq_\Delta^*$ は実は，ある条件の下で半順序関係である.然るに，文献［4］の定理3.2によれば，定義C1の2元関係 $\leq_\Delta$ は反射律，反対称律を満たすが，推移律を満たさなくて，半順序関係ではない．この事実が $\leq_\Delta$ の代りに $\leq_\Delta^*$ を以後，使われる理由である.

付録Dで定義されている式(5.5)の直交性類似度関数 SM に注目する.

［定理C1］（2元関係 $\leq_\Delta^*$ の半順序定理）

直交条件を満たしている類似度関数(直交性類似度関数) SM を採用していれば(SM 直交仮定)，カテゴリ知識空間 $<\Phi,2^J>$ 上の2元関係 $\leq_\Delta^*$ は，次の3性質(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)を満たし，半順序関係(partial-order relation)である：

（ⅰ）(反射律；reflexive law)

$$<\varphi,\gamma> \leq_\Delta^* <\varphi,\gamma>. \qquad \text{(C.17)}$$

（ⅱ）(反対称律；anti-symmetric law)

$$<\varphi,\gamma> \leq_\Delta^* <\phi,\lambda> \text{かつ} <\phi,\lambda> \leq_\Delta^* <\varphi,\gamma> \qquad \text{(C.18)}$$

ならば,

$$E(\varphi,\gamma) = E(\phi,\lambda) \wedge <\varphi,\gamma> =_\Delta <\phi,\lambda>. \qquad \text{(C.19)}$$

（ⅲ）(推移律；transitive law)

$$<\varphi,\gamma> \leq_\Delta^* <\eta,\mu> \text{かつ} <\eta,\mu> \leq_\Delta^* <\phi,\lambda> \qquad \text{(C.20)}$$

ならば， $<\varphi,\gamma> \leq_\Delta^* <\phi,\lambda>$.

(証明）文献［4］の定理3.1である.　□

上述の定理C1により，カテゴリ帰属知識空間 $<\Phi,2^J>$ は半順序関係 $\leq_\Delta^*$ の下で，半順序集合(partially ordered set)と呼ばれるものとなる.

C2　半順序 $\leq_\Delta^*$ を含む最小の同値関係 $\sim_\Delta^*$

半順序関係 $\leq_\Delta^*$ を含む最小の同値関係として，2元関係 $\sim_\Delta^*$ がカテゴリ帰属知識空間 $<\Phi,2^J>$ 上に導入できることが指摘される.

次の定義C3で，カテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>$ の式(5.16)の構造受精変換 $TA(\mu)T$ による多段階変換先 $<\phi,\lambda>$ が同一のカテゴリ帰属知識になることで定義される2元関係 $\sim_\Delta^*$ を定義する.

［定義C3］（2元関係 $\sim_\Delta^*$ の定義）

2つのカテゴリ帰属知識 $<\varphi,\gamma>, <\phi,\lambda> \in <\Phi,2^J>$ について，2元関係

$$<\varphi,\gamma> \sim_\Delta^* <\phi,\lambda> \qquad \text{(C.21)}$$

が成り立つとは，次の(ⅰ)，(ⅱ)の何れかが成立することである：

（ⅰ） $<\varphi,\gamma> \leq_\Delta^* <\phi,\lambda>$.　(C.22)

（ⅱ） $\exists<\eta,\mu>\in<\Phi,2^J>$，（C.23）

$<\varphi,\gamma>\ \leq_{\Delta}^{*}\ <\eta,\mu>$（C.24）

$\wedge\ <\phi,\lambda>\ \leq_{\Delta}^{*}\ <\eta,\mu>$.（C.25）

□

このとき，2元関係$\sim_{\Delta}^{*}$が半順序関係$\leq_{\Delta}^{*}$を含む最小の同値関係であることを指摘する次の定理C2が成り立つ.

［定理C2］（2元関係$\sim_{\Delta}^{*}$の最小同値関係定理）

付録Dの直交条件を満たしている類似度関数SMを採用していれば（SM直交仮定），カテゴリ知識空間$<\Phi,2^J>$上の2元関係$\sim_{\Delta}^{*}$は，次の（1#），（2#），（3#）を満たし，同値関係（equivalence relation）であり，然も，

$<\varphi,\gamma>\ \leq_{\Delta}^{*}\ <\phi,\lambda>$（C.26）

$\Rightarrow<\varphi,\gamma>|\!\!\rightarrow<\phi,\lambda>$（C.27）

$\Rightarrow<\varphi,\gamma>\ \sim_{\Delta}^{*}\ <\phi,\lambda>$（C.28）

を満たす“半順序関係|→”が1つも存在しないという意味で，$\leq_{\Delta}^{*}$を含む“最小の”同値関係である：

（1#）（反射律；reflexive law）

$<\varphi,\gamma>\ \sim_{\Delta}^{*}\ <\varphi,\gamma>$.（C.29）

（2#）（対称律；symmetric law）

$<\varphi,\gamma>\ \sim_{\Delta}^{*}\ <\eta,\mu>$（C.30）

ならば，

$<\eta,\mu>\ \sim_{\Delta}^{*}\ <\varphi,\gamma>$.（C.31）

（3#）（推移律；transitive law）

$<\varphi,\gamma>\ \sim_{\Delta}^{*}\ <\eta,\mu>$（C.32）

かつ$<\eta,\mu>\ \sim_{\Delta}^{*}\ <\phi,\lambda>$（C.33）

ならば，

$<\varphi,\gamma>\ \sim_{\Delta}^{*}\ <\phi,\lambda>$.（C.34）

（証明）文献［4］の定理3.3である. □

$<\Phi,2^J>$の任意の2元$<\varphi,\gamma>$，$<\phi,\lambda>$の間に，同値関係$\sim_{\Delta}^{*}$が成立するかしないかを必ず決めることができ，この意味で，式（C.21）が成り立つ$<\varphi,\gamma>$，$<\phi,\lambda>$は，$<\varphi,\gamma>$が$<\phi,\lambda>$と（ポテンシャルエネルギー＆構造受精に関し）同値であると読まれる.

$<\varphi,\gamma>$と同値な$<\Phi,2^J>$の元全体を$<\varphi,\gamma>$を含む$<\Phi,2^J>$の同値類（the equivalence class containing$<\varphi,\gamma>$）といい，

$$［<\varphi,\gamma>］_{\Delta}^{*}$$

$$\equiv\{<\eta,\mu>\in<\Phi,2^J>|<\varphi,\gamma>\ \sim_{\Delta}^{*}\ <\eta,\mu>\}\subset<\Phi,2^J> \quad (C.35)$$

と表す.任意にとった2つの同値類は，全く一致するか，または共通の元を1つも持たない.同値類［$<\varphi,\gamma>$］$_{\Delta}^{*}$の1つの要素を［$<\varphi,\gamma>$］$_{\Delta}^{*}$の代表元（representative）という.同値関係（equivalence relation）$\sim_{\Delta}^{*}$による$<\Phi,2^J>$の商集合（quotient set）$<\Phi,2^J>/\sim_{\Delta}^{*}$とは，$<\Phi,2^J>$の同値類全体の集合

$$<\Phi,2^J>/\sim_{\Delta}^{*}\ \equiv\{［<\varphi,\gamma>］_{\Delta}^{*}|<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>\} \quad (C.36)$$

のことである.

次の定理C3が成り立ち，式（C.36）の商集合$<\Phi,2^J>/\sim_{\Delta}^{*}$が決定されうることがわかる.

［**定理C3**］（商集合$<\Phi,2^J>/\sim_\Delta^*$の，多段階帰納推理の働きによる決定定理）［4］

式(5.5)の類似度関数SMが付録Dの直交条件，付録Eのミックスチュア条件を共に満たしていれば，連想形認識方程式(1.17)を解く多段階帰納推理の働きにより，

$$<\Phi,2^J>/\sim_\Delta^* = \{[<T\omega_j,[j]>]_\Delta^* \mid j\in J\}\cup\{[<0,\phi>]_\Delta^*\}. \qquad \square$$

C3　半順序関係$\leq_\Delta^*$から定まる知識集合$<\Psi,\Lambda>$上の上限　$\bigsqcup_\Delta^* <\Psi,\Lambda>$

カテゴリ帰属知識集合$<\Phi,2^J>$上の同値関係$\sim_\Delta^*$と，半順序関係$\leq_\Delta^*$とから定まる上限$\bigsqcup_\Delta^*$について，説明される.

処理の対象とする問題のカテゴリ帰属知識集合$<\Phi,2^J>$の部分集合$<\Psi,\Lambda>$を考える.この半順序関係$\leq_\Delta^*$の下での，知識集合$<\Psi,\Lambda>$ $(<\Phi,2^J>)$の上限(supremum)，即ち，最小上界(least upper bound) $\bigsqcup_\Delta^* <\Psi,\Lambda>$は次の定義C4で与えられる.

［**定義C4**］（$<\Psi,\Lambda>$ $(<\Phi,2^J>)$）の最小上界$\bigsqcup_\Delta^* <\Psi,\Lambda>$の定義）

$<\Phi,2^J>$を半順序関係$\leq_\Delta^*$の定義された半順序集合(partially ordered set)とするとき，$<\Phi,2^J>$の部分集合$<\Psi,\Lambda>$の上限$<\phi,\lambda>$とは，次の2条件（ｉ），（ⅱ）を満たす$<\Phi,2^J>$の要素であり（$<\Psi,\Lambda>$の要素とは限らない），

$$<\phi,\lambda>\equiv \bigsqcup_\Delta^* <\Psi,\Lambda>\in<\Phi,2^J> \tag{C.38}$$

と書く：

（ｉ）（上界性；$<\Psi,\Lambda>\leq_\Delta^* <\phi,\lambda>$）

$$\forall<\eta,\mu>\in<\Psi,\Lambda>,\ <\eta,\mu>\leq_\Delta^* <\phi,\lambda>. \tag{C.39}$$

（ⅱ）（最小性；$<\Psi,\Lambda>\leq_\Delta^* <\phi',\lambda'>$ならば，$<\phi,\lambda>\leq_\Delta^* <\phi',\lambda'>$）

$$\exists<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>, \forall<\eta,\mu>\in<\Psi,\Lambda>, <\eta,\mu>\leq_\Delta^* <\varphi,\gamma> \tag{C.40}$$

ならば，

$$<\phi,\lambda>\leq_\Delta^* <\varphi,\gamma>. \tag{C.41}$$

□

特に，

$$\bigsqcup_\Delta^* \{<\varphi_1,\gamma_1>,<\varphi_2,\gamma_2>\} \tag{C.42}$$

を，

$$<\varphi_1,\gamma_1> \bigsqcup_\Delta^* <\varphi_2,\gamma_2> \tag{C.43}$$

と表すことがある.式(C.42)の$<\varphi_1,\gamma_1> \bigsqcup_\Delta^* <\varphi_2,\gamma_2>$は$<\varphi_1,\gamma_1>$と$<\varphi_2,\gamma_2>$とを併合して得られたカテゴリ帰属知識($<\varphi_1,\gamma_1>$，$<\varphi_2,\gamma_2>$双方に共通な情報を備えているカテゴリ帰属知識)であるという.

次の命題C1の成立は，半順序関係$<\varphi,\gamma>\leq_\Delta^* <\eta,\mu>$を満たす$<\eta,\mu>$が2つの元からなる有限集合$\{<\varphi,\gamma>,\ <\eta,\mu>\}$に関する半順序関係$\leq_\Delta^*$の上限であることから，明らかである.

［**命題C1**］（上限の性質）

$$<\varphi,\gamma>\leq_\Delta^* <\eta,\mu> \tag{C.44}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$<\varphi,\gamma> \bigsqcup_\Delta^* <\eta,\mu> =_\Delta <\eta,\mu> \tag{C.45}$$

□

付録D.　SM の直交性

式(5.5)の類似度関数SM が直交性を満たす(SM が直交性類似度関数である)とは，
実定数a_iの組$\{a_i \mid i \in \mu\}$が正条件

$$\forall i \in \mu, a_i > 0 \tag{D.1}$$

を満たすような任意の空でないカテゴリ番号リスト$\mu \in 2^J$について，直交条件

$$\forall j \in J - \mu, SM(\sum_{i \in \mu} a_i \cdot T\omega_i, \omega_j) = 0 \tag{D.2}$$

が成立していることをいう［4］.

付録E.　SM のミックスチュア性

式(5.5)の類似度関数SM について，次のミックスチュア(mixture)条件を考えよう．ミックスチュア条件を満たすSM はミックスチュア性類似度関数であるといわれる.
【類似度関数SM に関するSM-ミックスチュア条件】

$$[\forall k \in \mu, 0 < b_k < 1] \wedge 0 < \sum_{k \in \mu} b_k \leq 1 \tag{E.1}$$

を満たす実定数b_k の組$\{b_k \mid k \in \mu\}$について，

$$\mu \supseteq \{\ell, m\} (\ell \neq m) \tag{E.2}$$

が成り立つような$\ell, m \in J$ が少なくとも存在する任意の$\mu \in 2^J$に対し，

$$\exists j \in \mu, SM(\sum_{k \in \mu} b_k \cdot T\omega_k, \omega_j) \neq b_j. \tag{E.3}$$

付録F.　式(1.1)の認識システムRECOGNITRONが内臓している認識推論規則の健全性・完全性

一般に，論理学では，論理式が恒真式(tautology)であれば，この論理式が公理系と推論規則とから導き出されるという意味で，定理(theorem)であるとき，推論規則は完全性(completeness)を備えているという．逆に，論理の体系によって生成される論理式(定理であると主張する論理式)が恒真式であるとき，推論規則は健全性(soundness)を備えているという.

式(1.1)の認識システムRECOGNITRONが処理の対象とする問題のパターン$\varphi \in \Phi$を認識処理して，$\varphi \in \Phi$の帰属するカテゴリを決定できるのは，RECOGNITRONには，式(4.7)のモデル構成作用素T，式(5.5)の類似度関数SM，式(5.6)の大分類関数BSCで陰に認識推論規則が形成されているからである．本付録Fでは，内蔵されている式(5.42)の如き認識推論規則の健全性(soundness)，完全性(completeness)につき，研究する.

F1.　付録Cの定義C3での，同値関係$\sim_{\Delta}^{*}$による認識推論規則の健全性・完全性

先ず，2つのパターン$\varphi, \eta \in \Phi$が同じ意味を持つとは，という疑問に答える次の定義F1を設ける.
［**定義F1**］(2つのパターン$\varphi, \eta \in \Phi$の同一意味性)
2つのパターン$\varphi, \eta \in \Phi$は，式(1.12)のカテゴリ集合$\mathfrak{C}(J)$内の同一のカテゴリに帰属するとき，同

じ意味を持つ(be similar in the sense)という.　□

次に，式(1.1)の認識システムRECOGNITRONにより，ただ1つのカテゴリに帰属すると決定されるパターン(5.1.5項の(1＃)での認識可能なパターン)を，正常なパターンと呼ぶ次の定義F2が導入される.

［定義F2］(カテゴリ帰属知識の正則性，パターンの正常性)

連想形認識方程式(1.17)において，特に，$\gamma = \mu = J$ として得られる方程式

$$<\phi,\lambda> =_{\Delta} <T\varphi, J> \quad \bigsqcup_{\Delta}{}^{*} TA(J)T \cdot <\phi,\lambda> \tag{F.1}$$

の解 $<\phi,\lambda> \in <\Phi, 2^{J}>$ が存在し，かつ，この $<\phi,\lambda>$ が

$$\exists j \in J, <\phi,\lambda> =_{\Delta} <T\omega_{j}, [j]> \tag{F.2}$$

と表されるとき，$<\varphi, J> \in <\Phi, 2^{J}>$ は正則(normal)であるという．カテゴリ帰属知識 $<\varphi, J>$ が正則のとき，パターン $\varphi \in \Phi$ は正常(well-formed)であるという.　□

［定理F1］(パターンとパターンモデルとの正常性)

パターン $\varphi \in \Phi$ が正常であれば，そのパターンモデルは正常である.

(証明) 式(F.1)は，5.1.1項のaxiom 1，(iii)，後半のべき等性 $T \cdot T$ を適用すれば，

$$<\phi,\lambda> =_{\Delta} <T(T\varphi), J> \bigsqcup_{\Delta}{}^{*} TA(J)T \cdot <\phi,\lambda> \tag{F.3}$$

と書き直されることより，明らか.　□

先ず，個々のパターン $\varphi \in \Phi$ に関し，論じよう.

RECOGNITRONによってパターン $\varphi \in \Phi$ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_{j}$ に帰属すると認識されるならば，パターン生成システム(pattern-generator) GENERATORにより，このパターン $\varphi \in \Phi$ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_{j}$ に帰属するように生成されていた場合，このパターン $\varphi \in \Phi$ に関し，RECOGNITRONの認識推論規則は健全であるという．同様に，パターン生成システムGENERATORにより，パターン $\varphi \in \Phi$ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_{j}$ に帰属するように生成されているならば，RECOGNITRONによってパターン $\varphi \in \Phi$ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_{j}$ に帰属すると認識された場合，このパターン $\varphi \in \Phi$ に関し，RECOGNITRONの認識推論規則は完全であるという.

以上の，個々のパターン $\varphi \in \Phi$ の健全性，完全性が，2つのパターン集合 Ψ_{sound}，$\Psi_{complete}$ を定義する形で，次のように一般化される．RECOGNITRONの内蔵する認識推論規則については，5.3節で説明されていることに注意しておく.

例えば，式(1.1)のRECOGNITRONでは，GENERATORにより，式(1.13)の代表パターン $\omega_{j} \in \Phi$ は第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_{j}$ に帰属するように生成されていると想定している．この想定に注意して，

GENERATORが，パターン $\eta \in \Phi$ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_{j}$ に帰属するように生成したとき，

「$<\varphi, J> \sim_{\Delta}{}^{*} <\eta, J>$ ならば，2つのパターン $\varphi, \eta \in \Phi$ は同じ意味を持つ」

(RECOGNITRONの内蔵する認識推論規則の健全性)　(F.4)

が真であるようなパターン $\varphi \in \Phi$ の，$\eta \in \Phi$ を変えて得られる集合を，$\Psi_{sound}(j)(\subseteq \Phi)$ で表そう．Ψ_{sound} を，

$$\Psi_{sound} \equiv \cup_{j \in J} \Psi_{sound}(j)(\subseteq \Phi) \tag{F.5}$$

と定義する.

同様に，GENERATORが，パターン $\eta \in \Phi$ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_{j}$ に帰属するように生成したとき，

「2つのパターン $\varphi, \eta \in \Phi$ は同じ意味を持つならば，$<\varphi, J> \sim_{\Delta}{}^{*} <\eta, J>$ である」

（RECOGNITRONの内蔵する認識推論規則の完全性） (F.6)

が真であるようなパターン $\varphi\in\Phi$ の， $\eta\in\Phi$ を変えて得られる集合を， $\Psi_{complete}(j)(\subseteq\Phi)$ で表そう．$\Psi_{complete}$ を，

$$\Psi_{complete}\equiv\cup_{j\in J}\Psi_{complete}(j)(\subseteq\Phi) \tag{F.7}$$

と定義する．

$\Psi_{complete}(\subseteq\Phi)$ の，高々可算部分集合 $\Psi'_{complete}(\subseteq\Phi)$ を訓練パターンの系列に選びRECOGNITRONを適応的学習させた後，RECOGNITRONにより， $\varphi\in\Psi-\Psi_{complete}$ が正しく認識された場合，つまり， $\varphi\in\Psi_{sound}$ の場合，RECOGNITRONに備えさせた帰納推論はこの入力パターン $\varphi\in\Psi-\Psi_{complete}$ について適切に確保されているという．

適切に確保されるパターン $\varphi\in\Psi-\Psi_{complete}$ が多くなるように，

$$\Psi-\Psi_{complete}\subseteq\Psi_{sound} \tag{F.8}$$

が成立すように，高々可算部分集合 $\Psi'_{complete}(\subseteq\Phi)$ が出来るだけ小さく， $\Psi_{complete}(\subseteq\Phi)$ が出来るだけ大きくなるように，高々可算部分集合 $\Psi'_{complete}(\subseteq\Phi)$ を決定するアルゴリズムが必要とされるといえよう．

F2. 付録Cの定義C2での，半順序関係 $\leq_\Delta^*$ による多段階認識過程の合流性

付録Cの定理C1で，定義C2の2元関係 $\leq_\Delta^*$ が，式(5.5)の類似度関数 SM が付録Dの直交性を備えていれば，半順序関係であることが明らかにされていることに注意する．

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{<\eta_1,\mu_1>} \arrow[dr, "\leq_\Delta^*"] & \\
\boxed{<\varphi,\gamma>} \arrow[ur, "\leq_\Delta^*"] \arrow[dr, "\leq_\Delta^*"'] & & \boxed{<\phi,\lambda>} \\
 & \boxed{<\eta_2,\mu_2>} \arrow[ur, "\leq_\Delta^*"'] &
\end{tikzcd}$$

図F.1　2つの多段階認識過程の，半順序関係 $\leq_\Delta^*$ を保存する合流性

Fig. F.1　confluence preserving partial order $\leq_\Delta^*$ of two multi-stage recognition processes

図F.1の如く， $<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J>$ がの2つの $<\eta_1,\mu_1>,<\eta_2,\mu_2>\in<\Phi,2^J>$ に分流するけれども，その直後， $<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^J>$ に合流すれば，半順序関係，同値関係が保存することを指摘する次の定理F2に注目しよう．

［定理F2］（多段階認識過程の合流定理）

付録Dの直交性を備えている式(5.5)の類似度関数 SM を式(1.1)の認識システムRECOGNITRONが採用しているものとしよう．このとき，

$$<\varphi,\gamma>,<\eta_1,\mu_1>,<\eta_2,\mu_2>\in<\Phi,2^J> \tag{F.9}$$

について,

$$<\varphi,\gamma>\leq_{\Delta}^{*}<\eta_1,\mu_1> \quad \text{かつ,} \quad <\varphi,\gamma>\leq_{\Delta}^{*}<\eta_2,\mu_2> \tag{F.10}$$

ならば，適当な$<\phi,\lambda>\in<\Phi,2^{J}>$が存在して,

$$<\eta_1,\mu_1>\leq_{\Delta}^{*}<\phi,\lambda> \quad \text{かつ,} \quad <\eta_2,\mu_2>\leq_{\Delta}^{*}<\phi,\lambda> \quad \text{(合流性)} \tag{F.11}$$

が成り立てば,

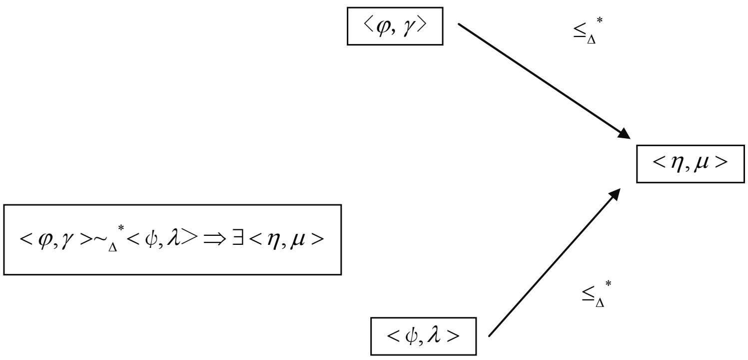
$$<\varphi,\gamma>\leq_{\Delta}^{*}<\phi,\lambda> \tag{F.12}$$

であり，かつ,

$$<\varphi,\gamma>\sim_{\Delta}^{*}<\phi,\lambda> \tag{F.13}$$

（証明）付録Cの定理C1からわかるように，直交性類似度関数*SM* を採用していれば，2元関係$\leq_{\Delta}^{*}$は半順序関係であり，定理C2の(3＃)の推移律を適用すれば，式(F.12)が従う．式(F.12)から，式(F.13)が従うことは，定義C3の2式(C.21)，(C.22)から明らかである．□

尚，式(F.13)が成り立てば，定義C3の(ⅱ)が成り立つだけで，この有様は図F.2のように表される．



図F.2　同値関係$\sim_{\Delta}^{*}$の表示

Fig.F.2　functional capability of equivalence　$\sim_{\Delta}^{*}$

(著者　鈴木昇一，論文題目　連想形認識方程式と，カテゴリ帰属知識空間での情報容量，文教大学情報学部情報研究no.36 投稿論文，投稿年月日　2006年9月28日(木))