文教大学情報学部『情報研究』第35号　2006年７月

多段階連想形認識システムRECOGNITRONの
再帰性と分解性・合成性

鈴木　昇一

Recursive Structure, Resolvability and Synthesis of Multi-Stage Associative Recognition System RECOGNITRON

Shoichi Suzuki

あらまし

これまでの，S.Suzuki以外のパターン認識研究と異なり，決定性認識システム

$RECOGNITRON = RECOGNITRON\ (\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) =< \Phi_B, T, SM, BSC >$

には，処理できるパターン φ の基本集合が Φ_B というように明示され続けていることである．

本論文では，認識システム $RECOGNITRON$ の，多様な構成法が示されている．

留意すべきは，モデル構成作用素Tを変えることにより，式（A1.4）の入力パターン集合Φ，式（A2.5）の類似度関数SM，式（A3.1）の大分類関数BSC，式（A4.5）のカテゴリ選択関数CSFが変ってくることである．

本論文では，先ず，認識システム $RECOGNITRON$ を分解し，複数個のカテゴリが1つの大カテゴリとして扱える非決定性認識 $RECOGNITRON'$ システムを構築する．その結果，音声認識では，個人差などに対応でき，文字認識では，個人差のみならず，同じ意味を表す大文字，小文字を１つの大カテゴリとして採用できる認識システムが得られる．画像認識では，見る方向により異なった形状になる状況に対応できる認識システムが得られることになった．

その次に，本論文では，有限個の認識システム $RECOGNITRON$ からそのいずれの認識システムより認識能力の大きな $RECOGNITRON'$ を構築する方法が研究される．この構築方法を確立するため，本論文では，決定性 $RECOGNITRON$ の各構成要素T, SM, BSCを1つずつ変化させたが（単独変化構成法），勿論，同時に変化させること（複数変化構成法）も可能である．同時変化させなかったのは，得られる認識システム $RECOGNITRON'$ の能力を元の認識システム $RECOGNITRON$ の能力と比較するのが容易になるからであり，同時変化させたときの能力を検討することが将来の研究として残されている．

この単独変化構成法から得られる効用は次の通りである：周波数領域で動作する認識システムは，ユニタリ作用素Uとしてフーリェ変換を採用すると，時間領域で動作する認識システム $RECOGNITRON$ のユニタリ共変なシステム $U^{-1}\cdot RECOGNITRON\cdot U$ で得られる．また，パターンの位置ずれを無視できる認識システムは，この位置ずれを表現できるユニタリ座標変換Uを考えると，元の認識システム $RECOGNITRON$ のユニタリ不変なシステム $RECOGNITRON\cdot U$ で得ら

れる．

各構成要素T, SM, BSC内の助変数を適応的に学習（batch modeではなく，incremental mode（on-line mode）での学習[42]）で変化させれば，*RECOGNITRON* の能力を向上させることが可能である．このようなincremental modeでの学習の働きに基づく構造変化ではなく，認識システムを設計しようとする人間が各構成要素T, SM, BSCそのものを経験的・発見的（heuristic）に変えていく構造変化が本論文では研究されている．

キーワード

(1)SS公理系　(2)パターンの基本領域　(3)モデル構成作用素　(4)類似度関数　(5)大分類関数
(6)連想形認識システムRECOGNITRON　(7)再帰性　(8)分解性　(9)合成性

Abstract

Differing from the old pattern-recognition research of those other than S.Suzuki, a basic set of the patterns which can be processed by the deterministic recognition system

$RECOGNITRON = RECOGNITRON\ (\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) =< \Phi_B, T, SM, BSC >$

has been shown clearly as Φ_B .

The various construction of the recognition system *RECOGNITRON* A is presented here.

What should be minded is the input pattern set Φ_B of an expression (A1.4), the similarity-measure function *SM* of an expression (A2.5), the rough classifier *BSC* of an expression (A3.1) and the category-selection function *CSF* of an expression (A4.5) change very much by changing the model-construction T.

In this paper, first, the recognition system *RECOGNITRON* is disassembled and the non-deterministic recognition system *RECOGNITRON* by which two or more categories can be treated as one large category is built. Consequently, in the case of speech recognition, $RECOGNITRON'$ can recognize a speech disregarding individual difference.In the case of character recognition, $RECOGNITRON'$ not only which can adopt a small letter and the capital letter which has the same meaning as one large category but also which can disregard individual difference is obtained .In image recognition, the recognition system which can respond to the situation which becomes the form which changed with directions to see will be obtained.

In this paper, the method of building one recognition system $RECOGNITRON'$ with the greater recognition capability than any recognition system *RECOGNITRON* of them from the finite set of recognition systems is studied further. Although each one composition element of every $T, SM,$ and BSC of a deterministic system *RECOGNITRON* was changed in this paper in order to establish this construction method (independent change construction), other than this, it is possible to also make them change simultaneously (two or more change construction). Simultaneous change was not carried out because it became easy to measure the capability of the recognition system $RECOGNITRON'$ obtained with the capability of the original recognition system *RECOGNITRON* . To examine the capability when carrying out simultaneous change is left behind as research of the future.

The use acquired from this independent change construction is as follows :

If Fourier conversion is adopted as an unitary operator U, the recognition system which operates in a frequency domain will be obtained with a unitary-covariant system $U^{-1} \cdot RECOGNITRON \cdot U$ of a recognition system $RECOGNITRON$ which operates in a time domain. Moreover, considering the unitary coordinate-transformation U which can express a position gap the recognition system which can disregard this position gap of a pattern is obtained with an unitary-invariant system $RECOGNITRON \cdot U$ of the original recognition system $RECOGNITRON$.

If the assistant variable in each composition element of $T, SM,$ and BSC is changed by an adaptive learning(an learning by not batch mode but incremental mode[42](on-line mode)), it is possible to raise the recognition-capability of a system $RECOGNITRON$. Not the structural change based on learning in such the on-line mode but the structural change which is by human being who is going to design a recognition system changed each composition element itself of $T, SM,$ and BSC using an experiential and discovery method(an heuristic method) is studied in this paper.

Key words

(1) axiomatic SS-system　(2)basic domain of patterns
(3)model-construction operator　(4)similarity-measure function
(5)rough classifier　(6) recognition system RECOGNITRON
(7)recursion　(8)resolvability　(9)synthesis

第１章　まえがき

１．１　本研究の正統性

パターン(画像，音声)で伝えられるのは，それらで表わされる意味である．見かけ上，或いは，聞き分け上異なるパターン同士が同じ意味を持つことがある．この事態をパターン間の同値性と呼ぶ．パターン間の同値性を説明でき，実現できる理論は存在するのであろうか？

S.Suzukiは人によるrecognizing a patternの諸現象から数学モデルを抽出し，その上での理論展開で有限な記憶容量と有限な計算時間のもとで行われる複雑な認識の働きを説明し，実現しようと，これまで努めてきた[1]〜[4]．本論文はその続編であり，パターンの認識過程を有限な半順序関係で近似表現しようとするS.Suzuki理論(SS理論)の普遍妥当性，正当性，正統性が益々，強まるように，書かれた．

１．２　本研究の，認知科学，知能工学への貢献

SS理論では，万能性認識システム

$$RECOGNITRON \equiv RECOGNITRON\ (\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) \equiv \langle \Phi_B, T, SM, BSC \rangle \qquad (1.1)$$

が構成されている．

視点を変更した時，変更前の認識システム $RECOGNITRON$ は消え，代りに，新しい認識システム $RECOGNITRON'$ が呼び出されると考えたら，どうであろうか？本研究では，視点を変更した認

識システム $RECOGNITRON'$ はユニタリ作用素として平行移動変換を採用すると，変更以前の認識システム $RECOGNITRON$ をユニタリ共変すれば得られることを示す．

音声を聞き取る時，明らかに，人の聴覚機構は周波数分析している．このとき，時間領域で動作する認識システム $RECOGNITRON$ は消え，代りに，周波数領域領域で動作する認識システム $RECOGNITRON'$ が呼び出されると考えたら，どうであろうか？本研究では，周波数領域領域で動作する認識システム $RECOGNITRON'$ は，ユニタリ作用素としてフーリェ変換を採用すると，時間領域で動作する認識システム $RECOGNITRON$ をユニタリ共変すれば得られることを示す．

位置ずれ，回転，縮小・拡大したパターンが元のパターンと同一視され得るのは，これらの座標変換に不変な認識システム $RECOGNITRON$ が呼び出されるからと考えたら，どうであろうか？本研究では，ユニタリ作用素として各々，平行移動変換，回転変換，縮小・拡大変換を採用すると，位置ずれ，回転，縮小・拡大のユニタリ表現に不変なように，パターンを処理する認識システム（ユニタリ不変な認識システム）を構成できることを示す．

複数個の認識システム $RECOGNITRON$ から或いは1個の $RECOGNITRON$ から，認識能力の大きな $RECOGNITRON'$ を作る方法（再帰性）を研究する．場当たり的でもなく，あらかじめ認識構造を用意しておいてその認識構造内の助変数を逐次学習して行く方法でもなく，認識能力の大きな $RECOGNITRON$ を組織的に作れる方法が確立されたことは，パターン認識技術を飛躍的に発展させるだろう．

更に，親 $RECOGNITRON$ を分解して，有限個の子 $RECOGNITRON$ を作る方法(分解性)を研究する．近接性の強いカテゴリを複数個集めて１つの大カテゴリとし，このような大カテゴリの集まりを処理できるような認識システムが作れるのが，本研究の，親 $RECOGNITRON$ の分解性である．

このような再帰性・分解性を研究するのは，人の認識の働きの持つ多様性・潜在能力を理解するのに役立てるためでもあり（認知科学への応用），この多様性・潜在能力をロボットの目，耳として実現するためである（知能工学への応用）．

１．３　連想形認識システムRECOGNITRON, RECOGNITRON'の等形式関係$=_\triangle$，等構造関係$=$

異なる２つの連想形認識システム $RECOGNITRON, RECOGNITRON'$ が同じ入力パターン $\varphi \in \Phi$ に対し常に同じ連想出力（カテゴリ帰属知識）をもたらすことがある．この場合， $RECOGNITRON, RECOGNITRON'$ 同士は構造的に等しい（等構造関係にある）という．精密に定義すると．以下の様になる：

axiom 1～3を各々，満たすモデル構成作用素T，類似度関数SM，大分類関数BSCを使って構成された式（１.１）の $RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))$ が,axiom１～３を各々，満たすモデル構成作用素T'，類似度関数SM'，大分類関数BSC'とを使って，今１つ構成された連想形認識システム

$$RECOGNITRON' \equiv RECOGNITRON'(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) \equiv <\Phi'_B, T', SM', BSC'> \qquad (１.２)$$

と形式的に等しい(equi-form relation)ことを，

$$RECOGNITRON(\mathrm{C}(J):\Omega(J)) =_\Delta RECOGNITRON'(\mathrm{C}(J):\Omega(J)) \qquad (１.３)$$

と表すが，この等形式関係$=_\triangle$を

$$RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) =_\Delta RECOGNITRON'(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))$$
$$\Leftrightarrow \Phi'_B = \Phi_B \wedge T' = T \wedge SM' = SM \wedge BSC' = BSC \qquad (１.４)$$

と定義する．

また， $RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))$ が，式１.２）の今１つの認識システム $RECOGNITRON'$ $(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))$ と構造的に等しい（equi-structure relation）ことを，

$$RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) = RECOGNITRON'(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) \tag{1.5}$$

と表すが，この等構造関係を

① $\Phi_B = \Phi'_B$ （1.6）

② $\forall\varphi \in \Phi_B, T'\varphi = T\varphi$ （1.7）

③ $\forall\varphi \in \Phi_B, \forall j \in J, SM'(\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j)$ （1.8）

④ $\forall\varphi \in \Phi_B, \forall j \in J, BSC'(\varphi, j) = BSC(\varphi, j)$ （1.9）

が成り立つことだと定義する．

この際，明らかに，形式が同じならば，構造も同じであること，つまり，

$$RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) =_{\Delta} RECOGNITRON'(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))$$

$$\Rightarrow RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) = RECOGNITRON'(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) \tag{1.10}$$

が成り立つが，逆は必ずしも成り立たないことに注意しておく．

本研究では，旧認識システム $RECOGNITRON$ から式(1.5)の等構造関係にある新認識システム $RECOGNITRON'$ を主として，構成する．

１．４　パターン集合 Φ の表現空間は可分なヒルベルト空間である

１．４．１　パターン集合 Φ は構成的集合である

一般に,SS理論[3]，[4]では，処理の対象とする問題のパターンの集合 Φ は或る可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の零元０を含む或る部分集合である．パターンと判明している集合（基本領域;basic domain） $\Phi_B(\ni 0)$ 並びに，すべての正実数の集合 R^{++} を導入すれば，構成的集合（constructible set）として，この集合 Φ は付録Aの式（Ａ１.４）の如く設定される．パターン集合 Φ の表現空間は可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の部分集合であり，付録A，A1章のaxiom 1で規定されている． Φ は，包含不等式

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} \subset \Phi_B(\ni \{0\}) \subset \Phi \subset \mathfrak{H} \tag{1.11}$$

を満たしていなければならない．ここに， ω_j は第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の諸性質を典型的に備えている代表パターンであり，式（Ａ２.２）の集合 Ω は式（Ａ２.１）の全カテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J)$ と１対１の対応がある代表パターン集合である．

尚， $\mathfrak{H}$ の大部分の元がパターンとして意味のないものであることに意識し，意味のないものを式（１.１）の $RECOGNITRON$ への入力から排除できるという意味で，式（Ａ１.４）のパターン集合 Φ を何故式（１.１）の $RECOGNITRON$ への入力集合として採用するかが，パターンの帰納的定義を使い，説明されている[3]，[4].

１．４．２　加法が導入されている群としての線形ベクトル空間としての，可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$

位相空間（topological space）Xが稠密（dense）な可算部分集合を持つとき，Xを可分な空間（separable space）であるという．また，加法+が導入されている群（加法群）としての線形ベクトル空間Yとは，

任意の２つの複素定数a, bについて，

$$a \cdot \varphi + b \cdot \eta \in Y \quad \text{for any} \quad \varphi, \eta \in Y \tag{1.12}$$

が成り立つような集合である.

$$\text{内積}(\varphi, \eta),\ \text{ノルム}\|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)} \tag{1.13}$$

が導入されている一般抽象ヒルベルト空間(Hilbert space)$\mathfrak{H}$ は，線形ベクトル空間であり，２元 $\varphi, \eta \in \mathfrak{H}$ の間にその相違の程度を反映している距離

$$dis(\varphi, \eta) \equiv \|\varphi - \eta\| \tag{1.14}$$

が導入された距離空間であり，この距離で位相（近さの概念）が定義された位相空間である．ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$ とは内積が定義された無限次元であってよいベクトル空間(内積が定義され得る線形空間)のことであり，有限次元の場合を含む．４性質

（イ）$(\varphi, \varphi) \geqq 0$，かつ，「$\varphi = 0 \Leftrightarrow (\varphi, \varphi) = 0$」 （1.15）

（ロ）(η, φ)は(φ, η)の共役複素数 （1.16）

（ハ）$(\varphi_1 + \varphi_2, \eta) = (\varphi_1, \eta) + (\varphi_2, \eta)$ （1.17）

（ニ）任意の複素定数aについて，

$$(a \cdot \varphi, \eta) = a \cdot (\varphi, \eta) \tag{1.18}$$

を満たすだけの,複素数値を与える内積(φ, η)というものが定義されていなければならない.

２式（1.17),（1.18）から,

任意の２元 $\varphi, \eta \in \mathfrak{H}$ と任意の複素定数aに対して

$$(\varphi, a \cdot \eta) = \overline{a} \cdot (\varphi, \eta) \tag{1.19}$$

が成り立つことに注意しておく.

式（1．1）の認識システム*RECOGNITRON* が処理の対象とする問題のパターン φ は内積(φ, η)，ノルム$\|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ が導入されている可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$ の元とする．完全な正規直交系が存在し，この系が高々可算個からなっていれば，ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$は可分である．また,

可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$ には，高々可算個からなる完全な正規直交系を作ることができる （1.20）

ことが証明されている．よって，一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$ で高々可算個からなる完全な正規直交系が存在することと，一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$ が可分なこととは同値であることに注意しておこう.

高々可算個からなる完全な正規直交系が存在するというだけのヒルベルト空間$\mathfrak{H}$ が可分かつ一般抽象という意味である.

１．４．３　可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M, dm)$

ベクトル算法式（1.12）が定義されている線形空間としての可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$ の,典型的な１例として，関数空間 $\mathfrak{H} = L_2(M, dm)$ が説明される.

例えば，$\overline{\eta}$ を η の複素共役として,

M：q 次元ユークリッド空間R^q の可測部分集合 （1.21）

$dm(x)$:正値ルベーグ・スティルチェス式測度 （1.22）

$x = < x_1, x_2, \cdots, x_q > \in M (\subseteq R^q)$:実数値変数の直交座標系 （1.23）

を導入し,その内積(φ, η)，ノルム$\|\varphi\|$が,

$$(\varphi,\ \eta)=\int_M dm(x)\quad \varphi(\mathrm{x})\cdot\overline{\eta}(\mathrm{x}) \tag{1.24}$$

$$\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi,\varphi)} \tag{1.25}$$

と与えられる線形空間（ベクトル空間）$\mathfrak{H}$ が $\mathfrak{H}=L_2(M,dm)$ である．

尚，４付録A，B，C，Dには，各々，

（a）認識システム $RECOGNITRON$ に関するSS理論（パターン認識の数学的理論）に登場する４要素（モデル構成作用素 T，類似度関数 SM，大分類関数 BSC，カテゴリ選択関数 CSF）が満たさなければならない４公理axiom　１～４

（b）変換前の認識システム $RECOGNITRON$，変換後の認識システム $RECOGNITRON'$ の間で認識能力に差がある場合，その差を計量する手法

（c）第３，４章の研究に引き続いて，SM,BSCの再帰的構成による認識システム $RECOGNITRON$ の合成法

（d）認識システム $RECOGNITRON$ が採用している多段階連想形認識の働き

が説明されている．

第２章　認識システム $RECOGNITRON=<\Phi_B,T,SM,BSC>$ の分解性

本章では，親認識システム $RECOGNITRON$ から複数個のカテゴリを１つの大カテゴリとするような子認識システム $RECOGNITRON'$ を作る方法が研究される．

２．１　決定性 $\mathrm{RECOGNITRON}=\mathrm{RECOGNITRON}(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))=<\Phi_B,T,SM,BSC>$ から得られる大カテゴリの族 $\mathfrak{C}(J_k)\equiv\{\mathfrak{C}_j\mid j\in J_k\},\ k\in K$

決定性 $RECOGNITRON$ での，式（Ａ２．１）の全カテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J)$ を有限分割し，複数個のカテゴリからなる素な各カテゴリ部分集合を１つの大カテゴリとみなしているような新しい，式（１．２）の連想形認識システム（子認識システム;child recognizer）$RECOGNITRON'$ を，式（１．１）の連想形認識システム（親認識システム;parent recognizer）[3]，[4] $RECOGNITRON\ (\mathfrak{C}(J):\Omega(J))$ の要素を使って構成してみよう．ここに，Jは全カテゴリ番号の集合といわれるものである．得られた新しい認識システム $RECOGNITRON'$ は元の認識システム $RECOGNITRON$ を分解したものになっている．

Φ を処理の対象とする問題のパターンの集合としよう．

親認識システム $RECOGNITRON$ でのカテゴリ番号jの全集合Jを，各部分集合 $J_k(k\in K)$ へと有限分割し，

$$J\equiv\{1,2,\cdots,m\}=\cup_{k\in K}J_k\ ,\ J_k\cap J_\ell\neq\phi(k\neq\ell) \tag{2.1}$$

としよう．この分割に応じ，カテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の，式（２．１）の全集合 $\mathfrak{C}\equiv\mathfrak{C}(J)$ と，第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン ω_j からなる，式（Ａ２．２）の全代表パターン集合 $\Omega\equiv\Omega(J)$ とを分割すると，大カテゴリ $\mathfrak{C}(J)$ の族

$$\mathfrak{C}(J)=\cup_{k\in K}\mathfrak{C}(J_k)\ ,\ \mathfrak{C}(J_k)\equiv\{\mathfrak{C}_j\mid j\in J_k\} \tag{2.2}$$

と，大代表パターン $\Omega(J_k)$ の族

$$\Omega\equiv\Omega(J)=\cup_{k\in K}\Omega(J_k)\ ,\ \Omega(J_k)\equiv\{\omega_j\mid j\in J_k\} \tag{2.3}$$

が得られる．$|J_k|$ 個のカテゴリ $\mathfrak{C}_j,j\in J_k$ からなる各カテゴリ部分集合 $\mathfrak{C}(J_k)$ を１つのカテゴリ（大カテゴリ）と解釈し直そう．

２．２　子認識システムとしての非決定性 $RECOGNITRON'$

２．２．１　$RECOGNITRON'$ の非決定性

これ迄での，式（１.１）の連想形認識システム $RECOGNITRON$ を分割して，パターン $\varphi \in \Phi$ が $|K|$ 個のカテゴリ $\mathfrak{C}(J_k), k \in K$ の内の，どの１つ
のカテゴリ $\mathfrak{C}(J_k)$ に帰属するかを決定する連想形認識システム（子認識システム）

RECOGNITRON′

$$\equiv RECOGNITRON'(\mathfrak{C}(J_k), k \in K : \Omega(J_k), k \in K) \equiv < \Phi_B, T, SM', BSC' > \qquad (2.4)$$

が，以下で構成される．$RECOGNITRON'$ によりパターン $\varphi \in \Phi$ が第 $k \in K$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}(J_k)$ に帰属すると決定されたとしても，カテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J_k)$ の内の任意の１つのカテゴリに帰属するという非決定性（indeterminacy）があることに注意する．

２．２．２　第 $k \in K$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}(J_k)$ の生起確率 $p(\mathfrak{C}(J_k))$，代表パターン $\omega(J_k)$

第 $k \in K$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}(J_k)$ の生起確率 $p(\mathfrak{C}(J_k))$ を

$$p(\mathfrak{C}(J_k)) \equiv \frac{\max_{j \in J_k} p(\mathfrak{C}_j)}{\sum_{k \in K} \max_{i \in J_k} p(\mathfrak{C}_i)}, k \in K \qquad (2.5)$$

と定義する，

第 $k \in K$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}(J_k)$ の代表パターン $\omega(J_k)$ は，実は，有限集合

$$\Omega(J_k) \qquad (2.6)$$

（の内の任意の元）と定義する（式（２.３）を参照）．即ち，$\omega(J_k)$ は非決定的な集合（indeterministic set）である．分割された式（２.４）の認識システム $RECOGNITRON'$ と，分割前の式（１.１）の認識システム $RECOGNITRON$ とにおいて，パターン集合の基本領域 Φ_B，モデル構成作用素 T が共通であることに注意する．

２．２．３　$RECOGNITRON'$ の類似度関数 SM'

$$SM'(\varphi, \Omega(J_k)) \equiv \frac{\max_{j \in J_k} SM(\varphi, \omega_j)}{\sum_{k \in K} \max_{i \in J_k} SM(\varphi, \omega_i)} \qquad (2.7)$$

と定義された関数

$$SM' : \Phi \times \cup_{k \in K} \Omega(J_k) \to \{s \mid 0 \le s \le 1\} \qquad (2.8)$$

について，axiom 2に対応して，以下の(1#),(2#),(3#)が成り立つ：

(1#) $SM'(\omega_i, \Omega(J_k)) =$

$$\begin{cases} 1 \cdots i \in J_k \text{ のとき} \\ 0 \cdots i \notin J_k \text{ のとき} \end{cases} \qquad (2.9)$$

(2#) $\forall \varphi \in \Phi, \sum_{k \in K} SM'(\varphi, \Omega(J_k)) = 1.$ （2.10）

(3#) $\forall \varphi \in \Phi, \forall k \in K, SM'(T\varphi, \Omega(J_k)) = SM'(\varphi, \Omega(J_k))$. （2.11）

２．２．４　$RECOGNITRON'$ の大分類関数 BSC'

$$BSC'(\varphi, J_k) \equiv \max_{j \in J_k} BSC(\varphi, j) \tag{2.12}$$

と定義された関数

$$BSC' : \Phi \times \cup_{k \in K} J_k \to \{0,1\} \tag{2.13}$$

について，axiom 3に対応して，以下の(1$),(2$)が成り立つ：

(1$) $j \in J_k$ の時，$BSC'(\omega_j, J_k) = 1$.　(2.14)

(2$) $\forall \varphi \in \Phi, \forall k \in K, BSC'(T\varphi, J_k) = BSC'(\varphi, J_k)$.　(2.15)

式（1.1）の認識システム $RECOGNITRON$ において，大分類関数BSCがカテゴリ間の、式（A 3.4）の相互排除性を満たしていれば，式（2.4）の認識システム $RECOGNITRON'$ において，大分類関数BSC'がカテゴリ間の相互排除性

$$\forall k \in K, \forall \ell \in K - \{k\}, \exists \omega_i \in \Omega(J_\ell), BSC(\omega_i, J_k) = 0 \tag{2.16}$$

が成り立つ.

２．２．５　$RECOGNITRON'$ の構造受精作用素 $A(\mu) : \Phi \to \Phi$

式（1.1）の連想形認識システム $RECOGNITRON$ での，$\omega_k, T\omega_k (k \in J)$ の代りに式（2.4）の連想形認識システム $RECOGNITRON'$ では各々，２つの非決定集合 $\Omega(J_k), T\Omega_k \equiv \{T\omega_j \mid j \in J_k\}(k \in K)$ を用いることになるのであるが，$\Omega(J_k), T\Omega_k$ の内から各々，任意に選んだ $\omega_{j_k}, T\omega_{j_k} (j_k \in J_k)$ を多段階連想形認識過程では固定して使うのがよい．例えば，式（1.1）の連想形認識システム $RECOGNITRON$ の多段階連想形認識過程では，各 $j \in J$ を要素とするカテゴリ番号リスト $\mu \in 2^{\{1,2,\cdots,m\}}$ を助変数に持つ構造受精作用素

$$A(\mu) : \Phi \to \Phi \tag{2.17}$$

は付録Dの定義D-２で定義されているが，この定義に対応して，式（2.4）の連想形認識システム $RECOGNITRON'$ では，各 $J_k (k \in K)$ を要素とする大カテゴリ番号リスト $\mu' \in 2^{\cup_{k \in K} J_k}$ を助変数に持つ構造受精作用素

$$A'(\mu') : \Phi \to \Phi \tag{2.18}$$

については,

（ｉ）$\varphi = 0 \vee \mu' = \phi$ のとき

$$A'(\mu')\varphi = 0. \tag{2.19}$$

（ii）$\varphi \neq 0 \wedge \mu' \neq \phi$ のとき

（ii−1）$\sum_{J_k \in \mu'} BSC(\varphi, J_k) = 0$　のとき

$$A(\mu')\varphi = \sum_{J_k \in \mu'} SM(\varphi, \Omega(J_k)) \cdot T\omega_{j_k}. \tag{2.20}$$

（ii−2）$\sum_{J_k \in \mu'} BSC(\varphi, J_k) > 0$ のとき

$$A(\mu')\varphi = \sum_{J_k \in \mu'} SM(\varphi, \Omega(J_k)) \cdot BSC(\varphi, J_k) \cdot T\omega_{j_k}. \tag{2.21}$$

と定義したものを使わなければならない．ここに，2^V は

$$2^V \equiv \{U \mid U \subseteq V\} \tag{2.22}$$

と定義され，集合Vのすべての部分集合からなる集合，つまり，Vのべき集合（power set）を表す．

２．３　子認識システム$RECOGNITRON'$ の，親認識システム$RECOGNITRON$ への還元

次の定理２．１は，各カテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J_k)$ $(k \in K)$ が各々，相異なる唯１つのカテゴリを含むならば，$RECOGNITRON'$ は$RECOGNITRON$ へ帰着することを指摘している．

[定理２．１]（$RECOGNITRON'$ の，$RECOGNITRON$ への還元定理）

$$\forall k \in K, |J_k| = 1 \quad \therefore \quad K = J \tag{2.23}$$

ならば，（1#），（2#），（3#）はaxiom 2に一致し，且つ，（1$），（2$）はaxiom 3に一致し，

$$\forall k \in K, J_k = \{k\} \tag{2.24}$$

とすれば，式（２.８）の類似度関数SM'は

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall k \in K, SM'(\varphi, \Omega(J_k)) = SM(\varphi, \omega_k) \tag{2.25}$$

という具合にaxiom 2を満たす類似度関数SMに一致し，且つ，式（２.13）の大分類関数BSC'は

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall k \in K, BSC'(\varphi, \Omega(J_k)) = BSC(\varphi, k) \tag{2.26}$$

という具合にaxiom 3を満たす大分類関数BSCに一致し，結局，式（２.４）の非決定的連想形認識システム $RECOGNITRON'$ は式（２.２）の決定的連想形認識システム$RECOGNITRON$ へ還元される．

（証明）　割愛される　□

式（２.１）の，カテゴリ $\mathfrak{C}(J)$ 集合の分割法は$K = \{1, 2\}$である２分割ですら，$2^{|J|}$個あるから，多様な式（２.４）の非決定的連想形認識システム $RECOGNITRON'$ の集合が得られることがわかる．

式（２.４）の非決定的連想形認識システム $RECOGNITRON'$ は，入力パターン$\varphi \in \Phi$ があるカテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J_k)$ 内のどれか１つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j (j \in J_k)$ の代表パターン $\omega_j \in \Omega$ に似ていれば，第 $k \in K$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}(J_k)$ に帰属すると認識されるので，式（１.１）の決定的連想形認識システム$RECOGNITRON$ よりも耐変形性が大であることになる．例えば，

カテゴリ集合（大カテゴリ）$\mathfrak{C}(J_k)$ 内の各カテゴリ（小カテゴリ）の代表パターンに各々，特定の人の喜怒哀楽の顔，正面顔，左右に数十度度ずつ横向いた顔，上向き顔，下向き顔などを採用する　（２.27）

ことにより，$|K|$ 人の顔画像認識が様々のポーズに耐えて，可能になることが分る．

第３章　モデル構成作用素Tを変えた場合（べき等有界実数値関数 f により連想形認識システム$RECOGNITRON$ を変換して得られる連想形認識システム $f(RECOGNITRON)$）

本章では，付録A，A1章，axiom 1を満たす順序対 $[\Phi, T]$ に注目し，式（A１.１）のモデル構成作用素 T を関数 f で変換して得られるモデル構成作用

素 $f(T)$ を採用した式（１.２）の新認識システム $RECOGNITRON'$ が式（１.１）の認識システム$RECOGNITRON$ の３要素をそのまま，使って構成される．

３．１　基底 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ を使わない場合

本節では，基底 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ を使わないで，基本領域 Φ_B に関する条件式（３.13）の下で，式（３.12）の認識システム $f(RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J) : \Omega(J)))$ を作ろう．

３．１．１　制約４条件①～④を満たす単位区間で定義されたべき等有界実数値関数 f

その絶対値が１より大きくない実数の全体

$$R_{[-1,+1]} \equiv \{r \mid -1 \le r \le +1\} \tag{3.1}$$

を考え，関数

$$f : R_{[-1,+1]} \to R_{[-1,+1]} \qquad (3.2)$$

が，４制約条件

①（0-不動点条件） $f(0)=0$ （3.3）

②（1-不動点条件） $f(1)=1$ （3.4）

③（1-有界条件） $\forall u \in R_{[-1,+1]}, |f(u)| \le 1$ （3.5）

④（べき等条件） $\forall u \in R_{[-1,+1]}, f(f(u)) = f(u)$ （3.6）

を満たすように構成されるとしよう．このような4条件①～④を満たす式（3.2）の関数fの８例については，文献[29]の６.１節にある．最も簡単な例は

$$f(u)=u \qquad (3.7)$$

である．特に，有用なのは，次の構成例１，２での，2値関数，3値関数である．

[構成例１]（2値関数）

$$f(u)= \begin{cases} 0 \cdots u \le e_+ \text{のとき} \\ 1 \cdots u > e_+ \text{のとき} \end{cases} \qquad (3.8)$$

ここに，閾値 e_+ は不等式

$$0 \le e_+ < 1 \qquad (3.9)$$

を満たす閾値である．

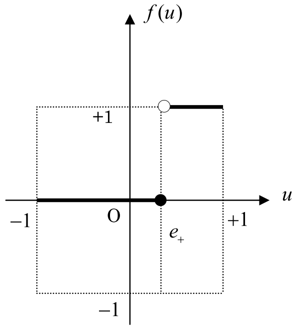
[構成例２]（３値関数）

$$f(u)= \begin{cases} -1 \cdots u \le e_- \text{のとき} \\ 0 \cdots e_- < u < e_+ \text{のとき} \\ +1 \cdots u \ge e_+ \text{のとき} \end{cases} \qquad (3.10)$$

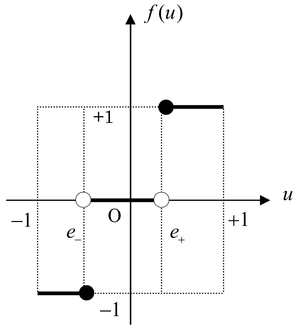
ここに， e_-, e_+ は不等式

$$-1 \le e_- < 0 < e_+ \le 1 \qquad (3.11)$$

を満たす閾値である．



構成例１の２値関数 $f(u)$



構成例２の３値関数 $f(u)$

３．１．２　基本領域 Φ_B ，モデル構成作用素 T' ，類似度関数 SM' ，大分類関数 BSC' と，べき等有界正値関数 f による，認識システム $RECOGNITRON$ の変換

２式（１.１），（１.２）の２つの認識システム $RECOGNITRON$,$RECOGNITRON'$ を考える．３．１．１項の，単位区間で定義されたべき等有界実数値関数 f を使って，連想形認識システム $RECOGNITRON$ を

$$f(RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)))=RECOGNITRON'(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) \tag{3.12}$$

の如く変換して得られる連想形認識システムが式（１.２）の $RECOGNITRON'$ である．

２つの認識システム $RECOGNITRON$,$RECOGNITRON'$ においては，基本領域 Φ_B は共通であり，

$$\Phi_B=\Phi'_B \tag{3.13}$$

であることに注意して，モデル構成作用素 T' ，類似度関数 SM' ，大分類関数 BSC' は各々，axiom１～３を満たすモデル構成作用素 T ，類似度関数 SM ，大分類関数 BSC から次の定義で得られる：

①$T'=f(T)$　（３.14）

②$SM'(\varphi,\omega_j)=$
［$SM(\varphi,\omega_j)$ を構成する際，登場しているすべての T の代りに　T' を用いたもの］　（３.15）

③$BSC'(\varphi,j)=$
［$BSC(\varphi,j)$ を構成する際，登場しているすべての T の代りに　T' を用いたもの］　（３.16）

３．１．１項の４条件①～④を満たす式（3.2）の関数 f を導入する．q次元ユークリッド空間R^qの可測部分集合Mを１つ選び，固定する0－計算規則

$$\forall x\in M,\frac{\varphi(x)}{\sup_{x\in M}|\varphi(x)|}=0 \qquad if \quad \sup_{x\in M}|\varphi(x)|=0 \tag{3.17}$$

を約束し，式（A１.１）のモデル構成作用素 T を，

$$(T\varphi)(x)=\frac{\varphi(x)}{\sup_{y\in M}|\varphi(y)|},x\in M \tag{3.18}$$

と定義する．式（３.18）の T の，f による変換 $T'\equiv f(T)$ を

$$(T'\varphi)(x)\equiv(f(T)\varphi)(x)\equiv f(\frac{\varphi(x)}{\sup_{y\in M}|\varphi(y)|}),x\in M \tag{3.19}$$

と定義する．

次の定理３．１は，モデル構成作用素 T を T' へと変換することにより，式（１.１）の連想形認識システム $RECOGNITRON$ が式（１.２）の $RECOGNITRON'$ へ再帰的に構成され得ることを示している．

[定理３．１]（モデル構成作用素 T の変換 f による連想形認識システム $RECOGNITRON$ の再帰構成定理）

T' を式（3.19）のように定義すると，３定義式（３.14），（３.15），（３.16）の下で対$[\Phi,T']$，関数 SM' ，関数 BSC' は各々，axiom１～３を満たし，T' ,SM' ,BSC' は各々，モデル構成作用素，類

似度関数，大分類関数である．従って，式（１.２）の認識システム $RECOGNITRON'$ が構成される．

特に，３．１．１項の４条件①～④を満たす式（３.２）の関数 f として，式（３.７）の関数 $f(u)=u$ を採用でき，この場合，変換後 $RECOGNITRON'$ のは変換前の $RECOGNITRON$ に還元される．

（証明）（1#）対 $[\Phi,T]$ はaxiom１を満たすから，対 $[\Phi,T']$ はaxiom１を満たすことは，文献[29]の８章，定理８．２を適用して証明される．

（2#） SM がaxiom２を満たすことから， SM' がaxiom２を満たす．

（3#） BSC がaxiom３を満たすことから， BSC' がaxiom３を満たす．

還元性は，式（３.７）の $f(u)=u$ より，

$$f(T)=T \tag{3.20}$$

が成り立つから，明らかである．

３．２　基底 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ を使う場合

本節では，基底 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ を使って，基本領域 Φ_B に関する条件式（３.13）の下で，式（３.12）の認識システム $f(RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)))$ を作ろう．

３．２．１　パターン $\varphi\in\mathfrak{H}$ の１次展開

１次独立な系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ を使って，パターン $\varphi\in\Phi\subseteq\mathfrak{H}$ をその１次結合

$$\sum_{\ell\in L} a_\ell\cdot\phi_\ell \tag{3.21}$$

で近似するときの近似誤差

$$\varphi-\sum_{\ell\in L} a_\ell\cdot\phi_\ell \tag{3.22}$$

のノルムの自乗

$$F(a_\ell,\ell\in L)\equiv\|\varphi-\sum_{\ell\in L} a_\ell\cdot\phi_\ell\|^2 \tag{3.23}$$

を最小にする１次結合の各係数 $a_\ell(=a_\ell(\varphi))$ は，最小自乗法を適用して，　連立１次方程式

$$\sum_{k\in L} g_{\ell k}\cdot a_k(\varphi)=b_\ell(\varphi),\ell\in L$$

$$\text{, where } g_{\ell k}\equiv(\phi_k,\phi_\ell),b_\ell(\varphi)\equiv(\varphi,\phi_\ell),\ell,k\in L \tag{3.24}$$

を解けばよい．第 $\ell,k\in L$ 成分が $g_{\ell k}$ であるような行列 $G=(g_{\ell k})_{\ell,k\in L}$ の行列式 $\det(G)$ の値は，系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ が１次独立なので，非零となり，連立１次方程式（３.24）の解 $a_k(\varphi),k\in L$ は一意的に求まる．特に， $\{\phi_k\}_{k\in L}$ が

$$k\neq\ell \text{ のとき，} (\phi_k,\phi_\ell)=0 \tag{3.25}$$

が成り立つという意味で直交系であれば，直交系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ は1次独立な系である．このとき，連立1次方程式（３.24）の解 $a_k(\varphi),k\in L$ は

$$a_k(\varphi)=\frac{(\varphi,\phi_k)}{(\phi_k,\phi_k)},k\in L \tag{3.26}$$

と求まる．

連立1次方程式（３.24）の解 $a_k(\varphi),k\in L$ を用いて， $\varphi\in\mathfrak{H}$ の１次展開

$\forall\varphi\in\Phi\subseteq\mathfrak{H},\ \exists\varphi_\perp\in\mathfrak{H}$ such that $\forall k\in L,(\varphi_\perp,\phi_k)=0,$

$$\varphi=\sum_{\ell\in L}a_\ell(\varphi)\cdot\phi_\ell+\varphi_\perp \tag{3.27}$$

が成り立つことに注意しておく．

例えば，１次独立な系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ について，次の例１，例２を挙げておく．

[例１]（１次元ガウス確率密度関数の系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ ）

$$(\varphi,\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\cdot\varphi(x)\cdot\overline{\eta}(x)\text{，ここに，}\overline{\eta}\text{ は }\eta\text{ の複素共役} \tag{3.28}$$

を内積とするヒルベルト空間 $\mathfrak{H}=L_2(R;dx)$ では，１次独立な系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ の各成分 ϕ_k として，平均値 m_k，標準偏差 σ_k の１次元ガウス確率密度関数

$$\phi_k(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k{}^2}}\cdot\exp[-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k}],-\infty<m_k<+\infty,0<\sigma_k$$

$$\text{ここに，}k\neq\ell\text{ の時，}m_k\neq m_\ell \tag{3.29}$$

を選ぶことが出来る．ここに，文献[43]の７．９節の式（7.109）より，

$$(\phi_k,\phi_\ell)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_k{}^2+\sigma_\ell{}^2)}}\cdot\exp[-\frac{(m_k-m_\ell)^2}{2(\sigma_k{}^2+\sigma_\ell{}^2)}] \tag{3.30}$$

が成り立っており，

$$k\neq\ell\text{ の時，}\sigma_k{}^2+\sigma_\ell{}^2\to 0\text{ であれば，}(\phi_k,\phi_\ell)\to 0\text{（直交性）} \tag{3.31}$$

が成立することに注意しておく．

[例２]（ 標本化関数の差からなる系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ ）

$$(\varphi,\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx_1\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}dx_2\cdot\varphi(x_1,x_2)\cdot\overline{\eta}(x_1,x_2)\text{，ここに，}\overline{\eta}\text{ は }\eta\text{ の複素共役} \tag{3.32}$$

を内積とするヒルベルト空間 $\mathfrak{H}=L_2(R^2;dx_1dx_2)$ では，１次独立な系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ の各成分 ϕ_k として，

$$\phi_k(x_1,x_2)=\phi_{k_1,1}(x_1)\cdot\phi_{k_2,2}(x_2),k=<k_1,k_2>(k_1,k_2=1,2,\cdots,N_j) \tag{3.33}$$

を選ぶことが出来る．ここに，N_1,N_2を十分大きい正整数として，また，W_1,W_2を正数として，

$$\Delta\mu_j\equiv\frac{2\pi W_j}{N_j}>0,j=1,2 \tag{3.34}$$

が $(\Delta\mu_j)^2$ より十分大きく選ばれているとして，関数 $\phi_{k_j,j}(x_j)$ は，

$$\phi_{k_j,j}(x_j)\equiv\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{(k_j-1)\cdot\Delta\mu_j\leq\mu<k_j\cdot\Delta\mu_j}d\mu\cdot\exp[+\sqrt{-1}\cdot x_j],j=1,2 \tag{3.35}$$

と定義されている．文献[43]の７．３節の式（7.19）より，関数 $\phi_{k_j,j}(x_j)$は，標本化関数の差として，

$$\phi_{k_j,j}(x_j)\equiv\frac{k_j\cdot\Delta\mu_j}{\pi}\cdot\frac{\sin(k_j\cdot\Delta\mu_j\cdot x_j)}{k_j\cdot\Delta\mu_j\cdot x_j}-\frac{(k_j-1)\cdot\Delta\mu_j}{\pi}\cdot\frac{\sin((k_j-1)\cdot\Delta\mu_j\cdot x_j)}{(k_j-1)\cdot\Delta\mu_j\cdot x_j},j=1,2 \tag{3.36}$$

と計算される．文献[43]の７．３節の式（7.17）より，

$$(\phi_{<k_1,k_2>},\phi_{<\ell_1,\ell_2>})=\begin{cases}\dfrac{\Delta\mu_1}{\pi}\cdot\dfrac{\Delta\mu_2}{\pi}\cdots k_1=\ell_1\wedge k_2=\ell_2\text{のとき}\\ 0\cdots k_1\neq\ell_1\vee k_2\neq\ell_2\text{のとき}\end{cases} \tag{3.37}$$

が成り立っており，１次独立な系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ は直交系である．連立1次方程式（９.５）の解 $a_k(\varphi),k\in L$ は,式（3.26）を適用して，文献[43]の７．３節の２式（7.17）,（7.20）より，$\Delta\mu_j$ が $(\Delta\mu_j)^2$ より十分大きく選ばれているから，

$$a_k(\varphi)$$

$$\fallingdotseq\int_{-\infty}^{+\infty}dx_1\int_{-\infty}^{+\infty}dx_2\cdot\varphi(x_1,x_2)\cdot\cos[(k_1-\frac{1}{2})\cdot\Delta\mu_1\cdot x_1]\cdot\cos[(k_2-\frac{1}{2})\cdot\Delta\mu_2\cdot x_2],k=<k_1,k_2>\in L \tag{3.38}$$

と近似出来，$a_k(\varphi)$ はパターン φ から $\frac{1}{2\pi}\cdot(k_1-\frac{1}{2})\cdot\Delta\mu_1,\frac{1}{2\pi}\cdot(k_2-\frac{1}{2})\cdot\Delta\mu_2$ 付近の周波数成分の大きさを抽出していることがわかる．

３．２．２　モデル構成作用素 T'，類似度関数 SM'，大分類関数 BSC'

３．１．１項の４条件①～④を満たす上述の単位区間で定義された式（3.2）の有界実数値関数 f に対応して，有界実数値特徴抽出写像

$$u:\Phi\times L\to R\ (\text{実数全体の集合}) \tag{3.39}$$

を導入する．ここに，

$$(-1\leq)u(\varphi,\ell)\equiv\frac{a_\ell(\varphi)}{\sup_{k\in L}|a_k(\varphi)|}(\leq+1) \tag{3.40}$$

を，パターン $\varphi\in\Phi$ から抽出された第 $k\in L$ 番目の特徴量として採用しよう．但し，実定数 $a_\ell(\varphi)$ の列 $\{a_\ell(\varphi)\}_{\ell\in L}$ については，0 −計算規則

$$\frac{a_\ell(\varphi)}{\sup_{k\in L}|a_k(\varphi)|}=0\qquad if\quad \sup_{k\in L}|a_k(\varphi)|=0 \tag{3.41}$$

を約束する．

パターンモデル $T\varphi$ を生成するモデル構成作用素 T を，

$$T\varphi\equiv\sum_{\ell\in L}u(\varphi,\ell)\cdot\phi_\ell \tag{3.42}$$

と導入する．

３．１．１項の４条件①～④を満たす式（3.2）の関数 f を導入する．式（3.42）の T の，f による変換 $T'\equiv f(T)$ を

$$f(T)\varphi\equiv\sum_{\ell\in L}f(u(\varphi,\ell))\cdot\phi_\ell \tag{3.43}$$

を導入する．

基本領域 Φ_B に関する式（3.13）の下で，モデル構成作用素 T'，類似度関数 SM'，大分類関

数 BSC' は各々，axiom　1～3を満たすモデル構成作用素 T，類似度関数 SM，大分類関数 BSC から3式（3.14），（3.15），（3.16）の定義で得られる．

次の定理3．2は，モデル構成作用素 T を T' へと変換することにより，式（1.1）の連想形認識システム $RECOGNITRON$ が式（1.2）の $RECOGNITRON'$ へ再帰的に構成され得ることを示している．

[定理3．2]（モデル構成作用素の変換による連想形認識システム $RECOGNITRON$ の再帰構成定理）

対 $[\Phi,T']$，類似度関数 SM'，大分類関数 BSC' は各々，axiom 1～3を満たす．

T' を式（3.43）のように定義すると，3定義式（3.14），（3.15），（3.16）の下で対 $[\Phi,T']$，関数 SM'，関数 BSC' は各々，axiom 1～3を満たし，T', SM', BSC' は各々，モデル構成作用素，類似度関数，大分類関数である．従って，式（1.2）の認識システム $RECOGNITRON'$ が構成される．

特に，3．1．1項の4条件①～④を満たす式（3.2）の関数 f として，式（3.7）の関数 $f(u)=u$ を採用でき，この場合，変換後の $RECOGNITRON'$ は変換前の $RECOGNITRON$ に還元される．

（証明）（1#）対 $[\Phi,T]$ はaxiom 1を満たすから，対 $[\Phi,T']$ はaxiom 1を満たすことは，文献[29]の9.2節，定理9.2を適用して証明される．

（2#）SM がaxiom 2を満たすことから，SM' がaxiom 2を満たす．

（3#）BSC がaxiom 3を満たすことから，BSC' がaxiom 3を満たす．

還元性は，式（3.7）の $f(u)=u$ より，式（3.20）がが成り立つから，明らかである．

第4章　類似度関数 SM を変えた場合（零点を不動点に持つ有界正値関数 f により連想形認識システム $RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))$ を変換して得られる連想形認識システム $RECOGNITRON''(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))$）

本章では，連想形認識システム $RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))$ の，付録A，A2章，axiom 2を満たす式の（A2.5）の類似度関数 SM に注目し，零点を不動点に持つ単位区間で定義された有界正値関数 f でこの SM を変換して得られる類似度関数 SM'' を採用し,残りの3要素 Φ_B,T,BSC をそのまま，使って得られる連想形認識システム

$$RECOGNITRON''(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) = f(RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))) \qquad (4.1)$$

を構成しよう．

4．1　連想形認識システムを $RECOGNITRON''$

本節では，基本領域 Φ_B は式（3.13）の如く共通であると，設定して，式（1.1）の認識システム $RECOGNITRON$ から，

$$RECOGNITRON'' =_{\Delta} RECOGNITRON''(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) \equiv \langle \Phi_B, T'', SM'', BSC'' \rangle \qquad (4.2)$$

を作ろう．

4．1．1　$RECOGNITRON$ を変換すための有界正値関数f

零点を不動点に持つ単位区間で定義された有界正値関数

$$f:\{s\,|\,0\le s\le 1\}\to R^{+} \quad \text{（非負実数全体の集合）} \qquad (4.3)$$

に要求される2条件とは，次のように表される：

(1#)（零点の不動点性）$f(0)=0$　　(4.4)

(2#)（正性）$\forall s(0<s\le 1), 0<f(s)<+\infty$　　(4.5)

４．１．２　モデル構成作用素 T''，類似度関数 SM''，大分類関数 BSC'' と，有界正値関数 f による，$RECOGNITRON$ の変換

２つの基本領域 Φ_B, Φ'_B に関する条件式（３.13）の下で，モデル構成作用素 T''，類似度関数 SM''，大分類関数 BSC'' は各々，axiom１～３を満たすモデル構成作用素 T，類似度関数 SM，大分類関数 BSC から次の定義で得られる：

①$T'' = T$　（４.６）

② $$SM''(\varphi,\omega_j) = \frac{f(SM(\varphi,\omega_j))}{\sum_{i\in J} f(SM(\varphi,\omega_i))}$$　（４.７）

③$BSC''(\varphi, j) = BSC(\varphi, j)$　（４.８）

次の定理４．１は，類似度関数 SM を SM'' へと変換することにより，連想形認識システム $RECOGNITRON$ が $RECOGNITRON''$ へ再帰的に構成され得ることを示している．

[定理４．１]（類似度関数の変換による連想形認識システム $RECOGNITRON$ の再帰構成定理）

対 $[\Phi, T'']$，類似度関数 SM''，大分類関数 BSC'' は各々，axiom１～３を満たす．

（証明）（1#）対 $[\Phi, T]$ はaxiom１を満たすから，対 $[\Phi, T'']$ はaxiom１を満たす．

（2#）先ず，SM がaxiom２,（i）を満たすことから，

$$\forall j \in J, f(SM(\omega_j,\omega_j)) = f(1) > 0$$　（４.９）

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, f(SM(\omega_i,\omega_j)) = f(0) = 0$$　（４.10）

が成立することに，注意しておく．

類似度関数 SM'' がaxiom２を満たすことを示そう．

先ず，

$$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{i\in J} f(SM(\varphi,\omega_i)) > 0$$　（４.11）

であることは，

$$\exists \varphi \in \Phi, \sum_{i\in J} f(SM(\varphi,\omega_i)) = 0$$

$$\Rightarrow \forall i \in J, f(SM(\varphi,\omega_i)) = 0 \quad \because \text{(1\#), (2\#)}$$

$$\Rightarrow \forall i \in J, SM(\varphi,\omega_i) = 0 \quad \because \text{(1\#)}$$

$$\therefore \quad \sum_{i\in J} SM(\varphi,\omega_i) = 0$$

を得，SM がaxiom２,（ii）を満たすことに矛盾するからである．

よって，SM'' がaxiom２,（ii）を満たすことがわかる．

さて，$\varphi = \omega_j$ の時，

$$SM''(\varphi,\omega_j)=\frac{f(SM(\varphi,\omega_j))}{f(SM(\varphi,\omega_j))+\sum_{i\in J-\{j\}}f(SM(\varphi,\omega_i))}$$

$$=\frac{f(1)}{f(1)+\sum_{i\in J-\{j\}}f(0)}$$

$$=\frac{f(1))}{f(1)} \quad \because \quad f(0)=0$$

$$=1 \quad \because \quad \forall s(0<s\le 1), f(s)>0 \tag{4.12}$$

次に,

任意の $k\in J-\{j\}$ について, $\varphi=\omega_k$ の時,

$$SM''(\varphi,\omega_j)=\frac{f(SM(\varphi,\omega_j))}{f(SM(\varphi,\omega_k))+\sum_{i\in J-\{k\}}f(SM(\varphi,\omega_i))}$$

$$=\frac{f(0)}{f(1)+\sum_{i\in J-\{k\}}f(0)}$$

$$=\frac{0}{f(1)} \quad \because \quad f(0)=0$$

$$=0 \quad \because \quad \forall s(0<s\le 1), f(s)>0 \tag{4.13}$$

を得, SM'' がaxiom 2,（ｉ）を満たすことがわかった.

SM がaxiom 2,（iii）を満たすことから, SM'' がaxiom 2,（iii）を満たすことが従う.

（3#） BSC がaxiom 3を満たすことから, BSC'' がaxiom 3を満たす. □

次の定理４．２は，変換後の $RECOGNITRON''$ が，変換前の $RECOGNITRON$ へ還元され得る場合が存在することを明らかにしている.

[定理４．２]（$RECOGNITRON''$ の，$RECOGNITRON$ への還元定理）

４．１．１項の2条件（1#）,（2#）を満たす関数 f として，４．５節の例１の $f(s)=s$ を採用でき，この場合,

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J, SM''(\varphi,\omega_j)=SM(\varphi,\omega_j) \tag{4.14}$$

が成り立ち，変換後の $RECOGNITRON''$ が，変換前の $RECOGNITRON$ へ還元される.

（証明） $f(s)=s$ であれば,

$$\forall\varphi\in\Phi,\sum_{i\in J}f(SM(\varphi,\omega_i))=\sum_{i\in J}SM(\varphi,\omega_i)=1 \quad \because \quad \text{axiom 2,（ii）} \tag{4.15}$$

が成立し,

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J,\ SM'(\varphi,\omega_j)=\frac{f(SM(\varphi,\omega_j))}{\sum_{i\in J}f(SM(\varphi,\omega_i))}$$

$$=\frac{SM(\varphi,\omega_j)}{\sum_{i\in J}SM(\varphi,\omega_i)}$$

$$=SM(\varphi,\omega_j)\quad\because\ \text{axiom 2,(ii)}\tag{4.16}$$

を得，明らか.　□

４．２　類似度差が拡大されるか？

RECOGNITRON から *RECOGNITRON″* へ変換すれば，どのような効果がもたらされなければならないかは，次の①，②で指摘される．４．１．１項の2条件（1#），(2#）を満たす関数 f は①，②が満たされるように，選定されなければならない.

① 相異なるある２つのカテゴリ番号 $j_1,j_2\in J(j_1\neq j_2)$ が存在して，

$$SM(\varphi,\omega_{j_1})-SM(\varphi,\omega_{j_2})>0\wedge\min\{SM(\varphi,\omega_{j_1}),SM(\varphi,\omega_{j_2})\}>\frac{1}{2}\tag{4.17}$$

のとき，類似度差の拡大

$$b(j_1,j_2:\varphi)\equiv\frac{SM''(\varphi,\omega_{j_1})-SM''(\varphi,\omega_{j_2})}{SM(\varphi,\omega_{j_1})-SM(\varphi,\omega_{j_2})}>1\tag{4.18}$$

が成立するかどうか？

②相異なるある２つのカテゴリ番号 $j_3,j_4\in J(j_3\neq j_4)$ が存在して，

$$SM(\varphi,\omega_{j_3})-SM(\varphi,\omega_{j_4})<0\wedge\max\{SM(\varphi,\omega_{j_3}),SM(\varphi,\omega_{j_4})\}<\frac{1}{2}\tag{4.19}$$

のとき，類似度差の拡大

$$b(j_3,j_4:\varphi)>1\tag{4.20}$$

が成立するかどうか？

４．３　４．１．１項での2条件（1#），(2#）を満たす有界正値関数 f の例と，４．１．２項での②の類似度関数 SM'' を定義している関数 $g_j(s_i,i\in J)$ の増減性質

４．１．１項での2条件（1#），(2#）を満たす有界正値関数 f で決まる関数

$$g_j(s_i,i\in J)\equiv\frac{f(s_j)}{\sum_{i\in J}f(s_i)}=\frac{f(s_j)}{f(s_j)+\sum_{i\in J-\{j\}}f(s_i)}\tag{4.21}$$

の増減性質を検討しよう．ここに,

$$s_j=SM(\varphi,\omega_j),\ j\in J\tag{4.22}$$

と考えると,

$$g_j(s_i, i \in J) = SM''(\varphi, \omega_j),\ j \in J \tag{4.23}$$

であることがわかる．つまり，

$$[\forall i \in J, 0 \le s_i \le 1] \wedge \sum_{i \in J} s_i = 1 \tag{4.24}$$

のとき，

$$g_j(s_i, i \in J) - s_j = \frac{f(s_j)}{\sum_{i \in J} f(s_i)} - s_j = \frac{f(s_j)}{f(s_j) + \sum_{i \in J-\{j\}} f(s_i)} - \frac{s_j}{s_j + \sum_{i \in J-\{j\}} s_i}$$

$$= \frac{f(s_j) \cdot \sum_{i \in J-\{j\}} s_i - s_j \cdot \sum_{i \in J-\{j\}} f(s_i)}{\sum_{i \in J} f(s_i)} \cdots \sum_{i \in J} f(s_i) > 0 \text{ のとき} \tag{4.25}$$

が成り立つから，

$$(1\$)\ \exists j \in J, g_j(s_i, i \in J) \equiv \frac{f(s_j)}{\sum_{i \in J} f(s_i)} < s_j \cdots \frac{s_j}{\sum_{i \in J-\{j\}} s_i} > \frac{f(s_j)}{\sum_{i \in J-\{j\}} f(s_i)} \quad \text{のとき} \tag{4.26}$$

$$(2\$)\ \exists j \in J, g_j(s_i, i \in J) \equiv \frac{f(s_j)}{\sum_{i \in J} f(s_i)} = s_j \cdots\cdots\cdots \frac{s_j}{\sum_{i \in J-\{j\}} s_i} = \frac{f(s_j)}{\sum_{i \in J-\{j\}} f(s_i)} \quad \text{のとき} \tag{4.27}$$

$$(3\$)\ \exists j \in J, g_j(s_i, i \in J) \equiv \frac{f(s_j)}{\sum_{i \in J} f(s_i)} > s_j \cdots\cdots\cdots \frac{s_j}{\sum_{i \in J-\{j\}} s_i} < \frac{f(s_j)}{\sum_{i \in J-\{j\}} f(s_i)} \quad \text{のとき} \tag{4.28}$$

がいえる．更に，検討しよう．先ず，

$$\sum_{i \in J} f(s_i) > 0$$

$\because$　$\sum_{i \in J} f(s_i) > 0$ と仮定すると，$\forall i \in J, f(s_i) = 0$，よって，関数に関する4.1.1項の2条件（1#），

（2#）から成り立つ命題「$f(s) = 0 \Leftrightarrow s = 0$」を適用して，$\forall i \in J, s_i = 0$　$\therefore$　$\sum_{i \in J} s_i = 0$ とい

う矛盾を得る　(4.29)

に注意しておく．

①-1　任意の $j \in J$ について

$$\frac{\partial}{\partial s_j} g_j(s_i, i \in J) = \frac{\frac{df(s_j)}{ds_j}}{[\sum_{i \in J} f(s_i)]^2} \cdot [\sum_{i \in J} f(s_i) - f(s_j)]$$

$$= \frac{\dfrac{df(s_j)}{ds_j}}{\sum_{i \in J} f(s_i)} \cdot [1 - g_j(s_i, i \in J)] \tag{4.30}$$

であるから，条件

$$\sum_{i \in J-\{j\}} f(s_i) = \sum_{i \in J} f(s_i) - f(s_j) > 0 \tag{4.31}$$

或いは

$$0 \le g_j(s_i, i \in J) < 1 \tag{4.32}$$

の下で，次の増減性質が成り立つ.

$$\frac{\partial}{\partial s_j} g_j(s_i, i \in J)$$

$$\begin{cases} < 0 \cdots \dfrac{df(s_j)}{ds_j} < 0 \text{ のとき} \\ = 0 \cdots \dfrac{df(s_j)}{ds_j} = 0 \text{ のとき} \\ > 0 \cdots \dfrac{df(s_j)}{ds_j} > 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.33}$$

この解析から，$SM(\varphi, \omega_j)$ が増加，或いは減少すると，$SM''(\varphi, \omega_j)$ が各々，増加，或いは減少することがわかる．増加，或いは減少の程度は次の①-2からわかる．

①-2　任意の $j \in J$ について s_j が $s_j \to s_j + \Delta s_j$ と変化した場合，$g_j(s_i, i \in J)$ が増加，或いは減少する程度

$$\frac{f(s_j + \Delta s_j)}{f(s_j + \Delta s_j) + \sum_{i \in J-\{j\}} f(s_i)} - g_j(s_i, i \in J)$$

$$= \frac{\sum_{i \in J-\{j\}} f(s_i)}{f(s_j + \Delta s_j) + \sum_{i \in J-\{j\}} f(s_i)} \cdot \frac{f(s_j + \Delta s_j) - f(s_j)}{\sum_{i \in J} f(s_i)}$$

$$\begin{cases} < 0 \cdots f(s_j + \Delta s_j) < f(s_j) \wedge \sum_{i \in J-\{j\}} f(s_i) > 0 \text{ のとき} \\ = 0 \cdots f(s_j + \Delta s_j) = f(s_j) \wedge \sum_{i \in J-\{j\}} f(s_i) > 0 \text{ のとき} \\ > 0 \cdots f(s_j + \Delta s_j) > f(s_j) \wedge \sum_{i \in J-\{j\}} f(s_i) > 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.34}$$

この解析から，$SM(\varphi,\omega_j)$ が

$$SM(\varphi,\omega_j) \to SM(\varphi,\omega_j)+\Delta s_j \tag{4.35}$$

と変化したとき，変動の評価

$$\frac{f(SM(\varphi,\omega_j)+\Delta s_j)}{f(SM(\varphi,\omega_j)+\Delta s_j)+\sum_{i\in J-\{j\}} f(SM(\varphi,\omega_i))} - SM(\varphi,\omega_j)$$

$$= \frac{\sum_{i\in J-\{j\}} f(SM(\varphi,\omega_i))}{f(SM(\varphi,\omega_j)+\Delta s_j)+\sum_{i\in J-\{j\}} f(SM(\varphi,\omega_i))} \cdot [\frac{f(SM(\varphi,\omega_j)+\Delta s_j)}{\sum_{i\in J} f(SM(\varphi,\omega_i))} - SM''(\varphi,\omega_j)] \tag{4.36}$$

が得られる．

②-1　任意の $k \in J-\{j\}$ について

$$\frac{\partial}{\partial s_k} g_j(s_i, i\in J)$$

$$= f(s_j)\cdot\frac{\partial}{\partial s_k}\frac{1}{f(s_k)+\sum_{i\in J-\{k\}} f(s_i)}$$

$$= -g_j(s_i, i\in J)\cdot\frac{1}{\sum_{i\in J} f(s_i)}\cdot\frac{df(s_k)}{ds_k} \tag{4.37}$$

であるから，次の増減性質が成り立つ．

$$\frac{\partial}{\partial s_k} g_j(s_i, i\in J)$$

$$\begin{cases} \geq 0 \cdots \dfrac{df(s_k)}{ds_k} < 0 \text{ のとき} \\ = 0 \cdots \dfrac{df(s_k)}{ds_k} = 0 \text{ のとき} \\ \leq 0 \cdots \dfrac{df(s_j)}{ds_k} > 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.38}$$

この解析から，任意の $k \in J-\{j\}$ についての $SM(\varphi,\omega_k)$ が増加，或いは減少すると，$SM''(\varphi,\omega_j)$ が各々，減少，或いは増加することがわかる．増加，或いは減少の程度は次の②-2からわかる．

②-2　任意の $k \in J-\{j\}$ について s_k が $s_k \to s_k+\Delta s_k$ と変化した場合，$g_j(s_i, i\in J)$ が増加，或いは減少する程度

$$\frac{f(s_j)}{f(s_k+\Delta s_k)+\sum_{i\in J-\{j\}} f(s_i)} - g_j(s_i, i\in J)$$

$$= \frac{f(s_j)}{f(s_k+\Delta s_k)+\sum_{i\in J-\{j\}} f(s_i)} \cdot \frac{f(s_k)-f(s_k+\Delta s_k)}{\sum_{i\in J} f(s_i)}$$

$$\begin{cases} >0\cdots f(s_k+\Delta s_k)<f(s_k)\wedge f(s_j)>0 \text{ のとき} \\ =0\cdots f(s_k+\Delta s_k)=f(s_k)\wedge f(s_j)>0 \text{ のとき} \\ <0\cdots f(s_k+\Delta s_k)>f(s_k)\wedge f(s_j)>0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (4.39)$$

この解析から，$SM(\varphi,\omega_k)$ が

$$SM(\varphi,\omega_k)\to SM(\varphi,\omega_k)+\Delta s_k \quad (4.40)$$

と変化したとき，変動の評価

$$\frac{f(SM(\varphi,\omega_j))}{f(SM(\varphi,\omega_k)+\Delta s_k)+\sum_{i\in J-\{j\}} f(SM(\varphi,\omega_i))} - SM''(\varphi,\omega_j)$$

$$= \frac{f(SM(\varphi,\omega_j))}{f(SM(\varphi,\omega_k)+\Delta s_k)+\sum_{i\in J-\{j\}} f(SM(\varphi,\omega_i))} \cdot [SM''(\varphi,\omega_k) - \frac{f(SM(\varphi,\omega_k)+\Delta s_k)}{\sum_{i\in J} f(SM(\varphi,\omega_i))}] \quad (4.41)$$

が得られる．

③ $s_j=0$ のとき

$s_j=0 \Leftrightarrow g_j(s_i, i\in J)=0$

∵　４．１．１項の,関数 f の２条件（1#），（2#）,並びに，式（4.11）　(4.42)

が判明し，変換後の $SM''(\varphi,\omega_j)=0$ が変換前の $SM(\varphi,\omega_j)=0$ と一致するのは，$SM(\varphi,\omega_j)=0$ が成立する場合のみであるこになる．

④ $\exists j\in J,\ s_j>0\wedge\sum_{i\in J} f(s_i)>0$ のとき

$$\exists j\in J,\ s_j=g_j(s_i, i\in J)\Leftrightarrow[s_j=1\wedge[\forall i\in J-\{j\}, s_i=0]] \quad (4.43)$$

（証明）

$$\exists j\in J,\ s_j=g_j(s_i, i\in J)\equiv\frac{f(s_j)}{f(s_j)+\sum_{i\in J-\{j\}} f(s_i)}$$

$$\Leftrightarrow f(s_j)\cdot[s_j-1]+s_j\cdot\sum_{i\in J-\{j\}} f(s_i)=0 \quad \because \quad \sum_{i\in J} f(s_i)>0$$

$$\Leftrightarrow【f(s_j)=0\vee s_j=1】\wedge【s_j=0\vee\sum_{i\in J-\{j\}} f(s_i)=0】$$

$$\Leftrightarrow s_j = 0 \vee [s_j = 0 \wedge \sum_{i \in J-\{j\}} f(s_i) = 0] \vee [s_j = 1 \wedge s_j = 0] \vee [s_j = 1 \wedge \sum_{i \in J-\{j\}} f(s_i) = 0]$$

∵　４．１．１項の，関数 f の条件(1#)，(2#)より，$f(s) = 0 \Leftrightarrow s = 0$

$$\Leftrightarrow s_j = 0 \vee [s_j = 1 \wedge \sum_{i \in J-\{j\}} f(s_i) = 0]$$

$$\Leftrightarrow [s_j = 1 \wedge \sum_{i \in J-\{j\}} f(s_i) = 0] \quad \because \quad s_j > 0$$

$$\Leftrightarrow [s_j = 1 \wedge [\forall i \in J - \{j\}, s_i = 0]]$$

∵　４．１．１項の，関数 f の条件(1#)，(2#)より，$f(s) = 0 \Leftrightarrow s = 0$

□

この解析から，

$SM(\varphi, \omega_j) > 0 \wedge \sum_{i \in J} f(SM(\varphi, \omega_i)) > 0$ のとき

$\exists j \in J, SM''(\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j)$ (fixed-point equation) (4.44)

$\Leftrightarrow SM(\varphi, \omega_j) = 1 \wedge [\forall i \in J - \{j\}, SM(\varphi, \omega_i) = 0]$ (4.45)

が判明し，変換後の $SM''(\varphi, \omega_i)$ が変換前の $SM(\varphi, \omega_j) > 0$ と一致するのは，$SM(\varphi, \omega_j) = 1$ が成立する場合のみであるこになる．

４．４　４．１．１項での2条件（1#），（2#）を満たす有界正値関数の諸例

本節では，４．１．１項での2条件（1#），（2#）を満たす式（4.3）の有界正値関数 f を選定する．選ばれた関数 f は一般に図４．１に示される形状をしていることが望ましい．この選定にあたって考慮しなければないのは，次の2点（1&），（2&）である．

（1&）$f(\frac{1}{2}) <,=,> \frac{1}{2}$ かどうか？

（2&）方程式 $\frac{d^2 f(s)}{ds^2} = 0$ の解 s_{ip} は f の変曲点（inflection point）といわれるものである．

（2&-1）$0 \le s < s_{ip}$ なる範囲では，$\frac{d^2 f(s)}{ds^2} > 0$ であることが望ましい．何故ならば，この範囲で，$\frac{df(s)}{ds}$ は増加状態にあることが望ましいからである．

（2&-2）$s_{ip} < s \le 1$ なる範囲では，$\frac{d^2 f(s)}{ds^2} < 0$ であることが望ましい．何故ならば，$\frac{df(s)}{ds}$ は減少状態にあることが望ましいからである．

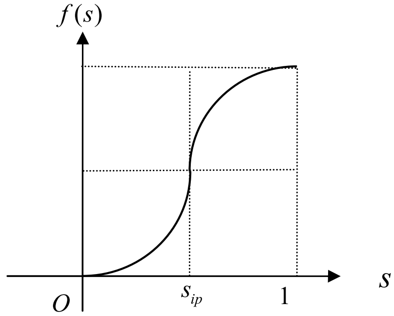
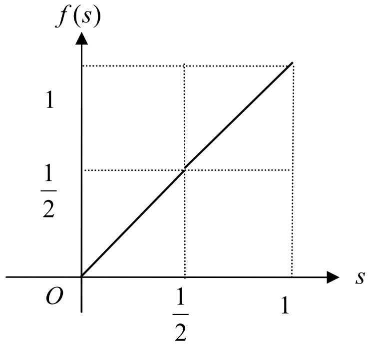
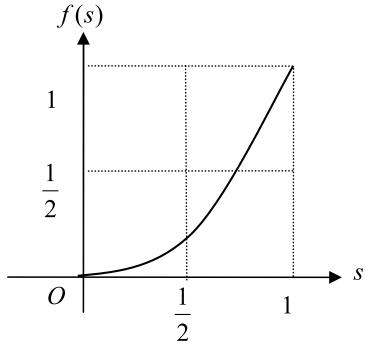


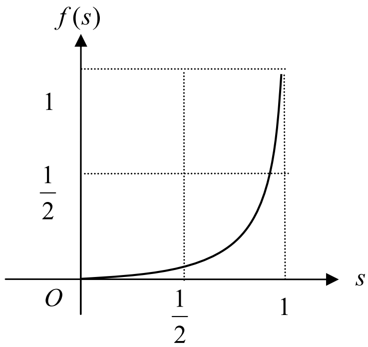
Fig. ４． １ The configuration of $f(s), 0 \le s_{ip} \le 1$



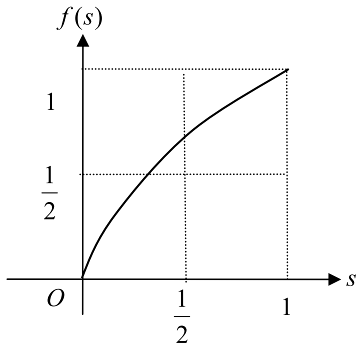
$f(s) = s$



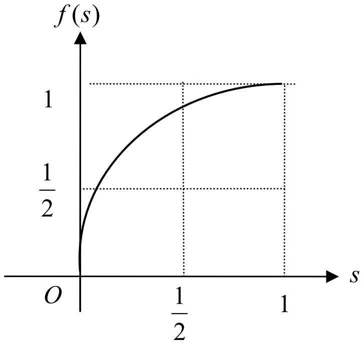
$f(s) = s^2$



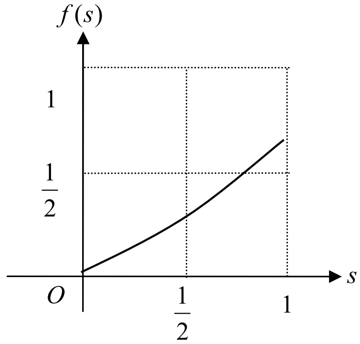
$f(s) = s^n (n = 3, 4, \cdots)$



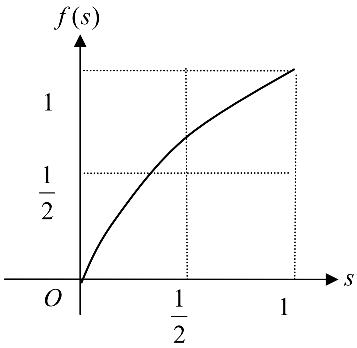
$f(s) = \sqrt{s}$



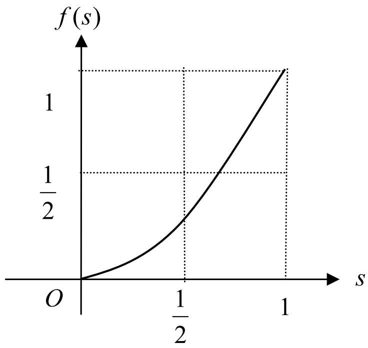
$f(s) = -s \cdot \log_e s + s$



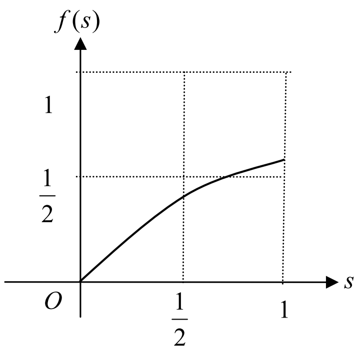
$f(s) = \log_e(1+s)$



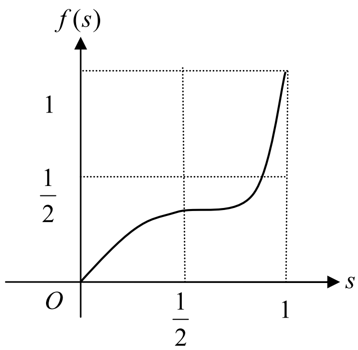
$f(s) = \sin(\frac{\pi}{2} \cdot s)$



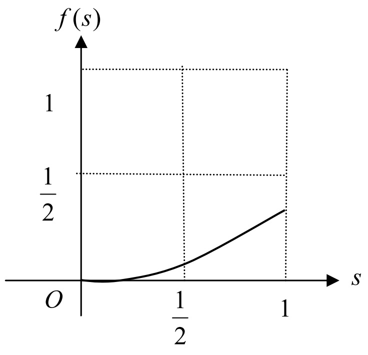
$f(s) = 1 - \cos(\frac{\pi}{2} \cdot s)$



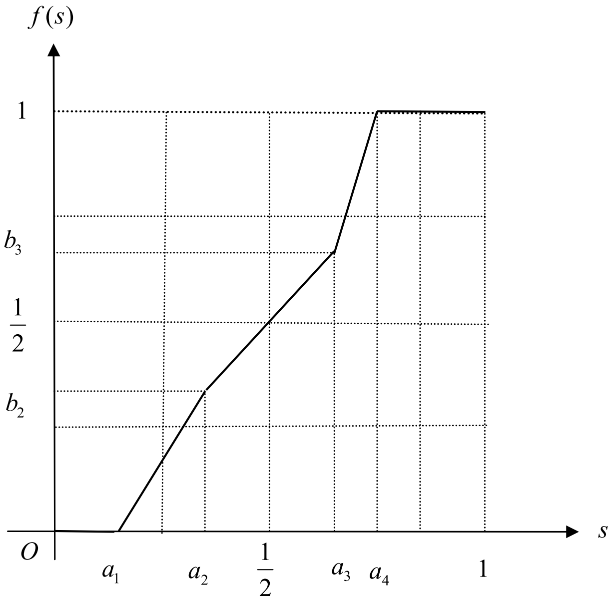
$f(s) = 1 - \exp(-s)$



$f(s) = \exp(-\frac{1-s}{s})$



$f(s)=\frac{1}{2}\cdot\log_e(1+s^2)$



例１２　区分的１次関数

［例１］ $f(s)=s$

$f(0)=0$，$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，$f(1)=1$

$$\frac{df(s)}{ds}=1$$

$$\frac{d^2f(s)}{ds^2}=0$$

すべての $s(0\leq s\leq 1)$ が変曲点であることがわかる．　□

［例２］ $f(s)=s^2$

$$f(0)=0, f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}, f(1)=1$$

$$\frac{df(s)}{ds}=2s \geq 0$$

$$\frac{d^2 f(s)}{ds^2}=2$$

すべての $s(0 \leq s \leq 1)$ が変曲点でないことがわかる． □

［例３］

$f(s)=s^n (n=3,4,\cdots)$， $f(0)=0, f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2^n}, f(1)=1$

$$\frac{df(s)}{ds}=ns^{n-1} \geq 0$$

$$\frac{d^2 f(s)}{ds^2}=n(n-1)s^{n-2} \geq 0$$

$n \geq 3$ であれば， $s=0$ が唯一の変曲点であることがわかる． □

［例４］ $f(s)=\sqrt{s}$

$$f(0)=0, f(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2} \fallingdotseq 0.7071, f(1)=1$$

$$\frac{df(s)}{ds}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{s}} \geq 0$$

$$\frac{d^2 f(s)}{ds^2}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{\sqrt{s}} \leq 0$$

すべての $s(0 \leq s \leq 1)$ が変曲点でないことがわかる． □

［例５］ $f(s)=-s\cdot\log_e s+s$ ，ここに， $0\cdot\log_e 0 \equiv 0$

$$f(0)=0, f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\cdot\log_e 2+\frac{1}{2} \fallingdotseq 0.8466, f(1)=1 \qquad \because \quad \log_e 2 \fallingdotseq 0.6932$$

$$\frac{df(s)}{ds}=\log_e\frac{1}{s} \geq 0$$

$$\frac{d^2 f(s)}{ds^2}=-\frac{1}{s^2}\cdot\log_e\frac{1}{s} \leq 0$$

$s=1$ が唯一の変曲点であることがわかる． □

［例６］ $f(s)=\log_e(1+s)$

$$f(0)=0, f(\frac{1}{2})=\log_e\frac{3}{2}\fallingdotseq 0.4054, f(1)=\log_e 2\fallingdotseq 0.6932 \qquad \because \quad \log_e 3\fallingdotseq 1.0986$$

$$\frac{df(s)}{ds}=\frac{1}{1+s}\geq 0$$

$$\frac{d^2f(s)}{ds^2}=-\frac{1}{(1+s)^2}\leq 0$$

すべての $s(0\leq s\leq 1)$ が変曲点でないことがわかる．　□

［例７］ $f(s)=\sin(\frac{\pi}{2}\cdot s)$

$$f(0)=0, f(\frac{1}{2})=\sin(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\fallingdotseq 0.7071, f(1)=1$$

$$\frac{df(s)}{ds}=\frac{\pi}{2}\cdot\cos(\frac{\pi}{2}\cdot s)\geq 0$$

$$\frac{d^2f(s)}{ds^2}=-(\frac{\pi}{2})^2\cdot\sin(\frac{\pi}{2}\cdot s)\leq 0$$

$s=1$ が唯一の変曲点であることがわかる．　□

［例８］ $f(s)=1-\cos(\frac{\pi}{2}\cdot s)$

$$f(0)=0, f(\frac{1}{2})=1-\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\fallingdotseq 0.2929$$

$$f(1)=1$$

$$\frac{df(s)}{ds}=\frac{\pi}{2}\cdot\sin(\frac{\pi}{2}\cdot s)\geq 0$$

$$\frac{d^2f(s)}{ds^2}=(\frac{\pi}{2})^2\cdot\cos(\frac{\pi}{2}\cdot s)\geq 0$$

$s=1$ が唯一の変曲点であることがわかる．　□

［例９］ $f(s)=1-\exp(-s)$

$$f(0)=0, f(\frac{1}{2})=1-\exp(-\frac{1}{2})\fallingdotseq 0.3935$$

$$\because \quad \exp(-\frac{1}{2})\fallingdotseq 0.6065$$

$$f(1)=1-\frac{1}{e}\fallingdotseq 0.6321 \qquad \because \quad \frac{1}{e}\fallingdotseq 0.3679$$

$$\frac{df(s)}{ds}=\exp(-s)>0$$

$$\frac{d^2f(s)}{ds^2}=-\exp(-s)<0$$

すべての $s(0 \le s \le 1)$ が変曲点でないことがわかる． □

［例１０］ $f(s) = \exp(-\frac{1-s}{s})$

$f(0) = 0, f(\frac{1}{2}) = \exp(-1) \fallingdotseq 0.3679$

$f(1) = 1$

$$\frac{df(s)}{ds} = \frac{1}{s^2} \cdot \exp(-\frac{1-s}{s}) > 0$$

$$\frac{d^2 f(s)}{ds^2} = \frac{1}{s^3} \cdot \exp(-\frac{1-s}{s}) \cdot (\frac{1}{s} - 2)$$

$$\frac{d^2 f(s)}{ds^2} < 0 \Leftrightarrow s > \frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2 f(s)}{ds^2} = 0 \Leftrightarrow s = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2 f(s)}{ds^2} > 0 \Leftrightarrow s < \frac{1}{2}$$

$s = \frac{1}{2}$ が唯一の変曲点であることがわかる． □

［例１１］

$f(s) = \frac{1}{2} \cdot \log_e (1 + s^2)$

$f(0) = 0$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \log_e \frac{5}{4} \fallingdotseq 0.1116 \because \log_e 1.25 \fallingdotseq 0.2231$

$f(1) = \frac{1}{2} \cdot \log_e 2 \fallingdotseq 0.3466 \quad \because \log_e 2 \fallingdotseq 0.6932$

$$\frac{df(s)}{ds} = \frac{s}{1+s^2} \ge 0$$

$$\frac{d^2 f(s)}{ds^2} = \frac{1-s^2}{(1+s^2)^2} \ge 0$$

$s = 1$ が唯一の変曲点であることがわかる． □

［例１２］（区分的１次関数）

$$0 \le a_1 < a_2 < \frac{1}{2} \le a_3 < a_4 \le 1$$

$$0 < b_2 < b_3 < 1$$

とする.

$$f(s) =$$

$$\begin{cases} 0 \cdots 0 \le s \le a_1 \text{ のとき} \\ \dfrac{b_2}{a_2 - a_1}(x - a_1) \cdots a_1 < s \le a_2 \text{ のとき} \\ \dfrac{b_3 - b_2}{a_3 - a_2}(x - a_2) + b_2 \cdots a_2 < s \le a_3 \text{ のとき} \\ \dfrac{1 - b_3}{a_4 - a_3}(x - a_3) + b_3 \cdots a_3 < s < a_4 \text{ のとき} \\ 1 \cdots a_4 \le s \le 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$f(0) = 0$$

$$b_2 < f(\frac{1}{2}) \le b_3 \cdots a_2 < \frac{1}{2} \le a_3 \text{ のとき}$$

$$f(1) = 1$$

$$\frac{df(s)}{ds} =$$

$$\begin{cases} 0 \cdots 0 \le s \le a_1 \text{ のとき} \\ \dfrac{b_2}{a_2 - a_1} \cdots a_1 < s \le a_2 \text{ のとき} \\ \dfrac{b_3 - b_2}{a_3 - a_2} \cdots a_2 < s \le a_3 \text{ のとき} \\ \dfrac{1 - b_3}{a_4 - a_3} \cdots a_3 < s < a_4 \text{ のとき} \\ 0 \cdots a_4 \le s \le 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\frac{d^2 f(s)}{ds^2} = 0$$

すべての $s(0 \le s \le 1)$ が変曲点である．

$$0 < \frac{b_2}{a_2 - a_1} < 1$$

$$\frac{b_3 - b_2}{a_3 - a_2} = 1$$

$$\frac{1 - b_3}{a_4 - a_3} > 1$$

が望ましい． □

第５章　大分類関数 BSC を変えた場合―零点を不動点に持つ有界正値関数 f により連想形認識システム $RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))$ を変換して得られる連想形認識システム） $RECOGNITRON'''(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))$

本章では，連想形認識システム $RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))$ の，付録A，A3章，axiom 3を満たす式の（A3.1）の大分類関数 BSC に注目し，この BSC を零点を不動点に持つ単位区間で定義された有界正値関数 f で変換して得られる大分類関数 BSC''' を採用し,残りの3要素 Φ_B , T , SM をそのまま，使って得られる連想形認識システム

$$RECOGNITRON'''(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) = f(RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))) \tag{5.1}$$

を構成しよう．

５．１　連想形認識システム $RECOGNITRON'''$

５．１．１　$RECOGNITRON$ を変換するための有界正値関数

零点を不動点に持つ単位区間で定義された有界正値関数

$$f:\{v \mid -1 \le v \le 1\} \to R \text{（実数全体の集合）} \tag{5.2}$$

に要求される２条件とは，次のように表される：

（1$）（零点の不動点性） $f(0)=0$ (5.3)

（2$）（1 −有界性） $\forall v(-1 \le v \le +1), -1 \le f(v) \le +1$ (5.4)

□

この２条件を満たす関数として，

$$f(v) = v \tag{5.5}$$

がある．今１つ，有用な関数 f として，Fig.5.1に示されているように， $a_1 = -1, a_2 = +1$ であれば $f(v) = v$ に一致する区分的線形関数

$$f(v)=\begin{cases}-1\cdots -1\le v<a_1 \text{ のとき}\\ -\dfrac{1}{a_1}\cdot(v-a_1)-1\cdots a_1\le v<0 \text{ のとき}\\ \dfrac{1}{a_2}\cdot v\cdots 0\le v\le a_2 \text{ のとき}\\ +1\cdots a_2<v\le 1 \text{ のとき}\end{cases}$$

ここに、$-1\le a_1<0<a_2\le +1$　(5.6)
がある．

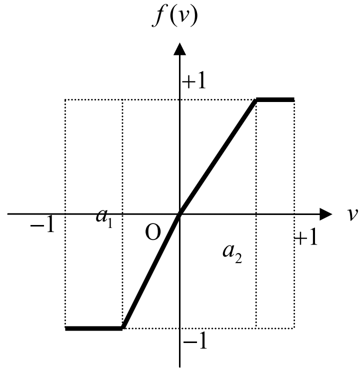


Fig.5.1 区分的線形関数 $f(v)$

５．１．２　モデル構成作用素 T'''，類似度関数 SM'''，大分類関数 BSC''' と，有界正値関数 f による，*RECOGNITRON* の変換

零点を不動点に持つ単位区間で定義された有界正値関数 f を使って，連想形認識システム *RECOGNITRON* を変換して得られる連想形認識システム

$$RECOGNITRON''' =_{\Delta} RECOGNITRON'''(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) \equiv <\Phi_B, T''', SM''', BSC'''> \tag{5.7}$$

を得よう．

１実変数uの2値$(\in\{0,1\})$関数（positive-sign function）

$$psn(u)=\begin{cases}1\cdots u\ge 0 \text{ のとき}\\ 0\cdots u<0 \text{ のとき}\end{cases} \tag{5.8}$$

を導入する．

２つの基本領域 Φ_B,Φ'_B に関する等式（3.13）の下で，モデル構成作用素 T'''，類似度関数 SM'''，大分類関数 BSC''' は各々，axiom 1〜3を満たすモデル構成作用素 T，類似度関数 SM，大分類関

数 BSC から次の定義で得られる：

① $T''' = T$ (5.9)

② $SM'''(\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j)$ (5.10)

③ $BSC'''(\varphi, j) \equiv psn(f(v_j(\varphi)) - e_j)$ (5.11)

ここに，$v_j(\varphi), e_j$ については，

$$v_j(\varphi) \equiv BSC(\varphi, j) \cdot SM(\varphi, \omega_j) - \sum_{i \in J - \{j\}} BSC(\varphi, i) \cdot SM(\varphi, \omega_i) \tag{5.12}$$

$$f(-1) < e_j \le f(+1) \tag{5.13}$$

□

不等式

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, -1 \le v_j(\varphi) \le 1 \tag{5.14}$$

が成立している．

次の定理５．１は，類似度関数 BSC を BSC''' へと変換することにより，連想形認識システム $RECOGNITRON$ が $RECOGNITRON'''$ へ再帰的に構成され得ることを示している．

[定理５．１]（大分類関数の変換による連想形認識システムRECOGNITRONの再帰構成定理）

対 $[\Phi, T''']$，類似度関数 SM'''，大分類関数 BSC''' は各々，axiom 1～3を満たす．

更に，大分類関数 BSC''' はカテゴリ間の相互排除性を満たす．

（証明）（1#）対 $[\Phi, T]$ はaxiom 1を満たすから，対 $[\Phi, T''']$ はaxiom 1を満たす．

（2#）類似度関数 SM がaxiom 2を満たすから，類似度関数 SM''' がaxiom 2を満たす．

（3#）$\varphi = \omega_j$ のとき，

$$BSC(\varphi, j) \cdot SM(\varphi, \omega_j) = 1 \wedge \sum_{i \in J - \{j\}} BSC(\varphi, i) \cdot SM(\varphi, \omega_i) = 0$$

∵ axiom 2の（ｉ），axiom 3の（ｉ） (5.15)

であるから，

$$v_j(\varphi) = 0 - 1 = -1 \tag{5.16}$$

を得，

$$BSC'''(\varphi, \omega_j) = psn(f(1) - e_j) = 1 \quad \because \text{ 式（5.13）} \tag{5.17}$$

が成立し，BSC''' がaxiom 3の（ｉ）を満たすことになる．

次に，SM がaxiom 2,（iii）を満たすことから，且つ，BSC がaxiom 3,（ii）を満たすことから，BSC''' がaxiom 3,（ii）を満たすことがわかる．

最後に，任意の $k \in J - \{j\}$ について，$\varphi = \omega_k$ のとき，

$$BSC(\varphi,j)\cdot SM(\varphi,\omega_j)=0 \tag{5.18}$$

$$\sum_{i\in J-\{j\}} BSC(\varphi,i)\cdot SM(\varphi,\omega_i)=BSC(\varphi,k)\cdot SM(\varphi,\omega_k)+\sum_{i\in J-\{j,k\}} BSC(\varphi,i)\cdot SM(\varphi,\omega_i)$$

$$=1 \quad \because \ \text{axiom 2の（i），axiom 3の（i）} \tag{5.19}$$

であるから，

$$v_j(\varphi)=0-1=-1 \quad \because \ \text{式（5.12）} \tag{5.20}$$

を得，

$$BSC'''(\varphi,\omega_j)=psn(f(-1)-e_j)=0 \quad \because \ \text{式（5.13）} \tag{5.21}$$

が成立し，大分類関数 BSC''' はカテゴリ間の相互排除性を満たすことがわかる．　□

次の定理５．２は，変換後の $RECOGNITRON'''$ が変換前の $RECOGNITRON$ へと還元され得る場合があることを指摘している．

[定理５．２]（$RECOGNITRON'''$ の，$RECOGNITRON$ への還元定理）

５．１．１項での2条件（1$），(2$）を満たす関数 f として，式（5.5）の f をを選び，任意のパターン $\varphi\in\Phi$ について，

$$BSC(\varphi,j)=1 \text{ であれば，} \ v_j(\varphi)\geq e_j \tag{5.22}$$

$$BSC(\varphi,j)=0 \text{ であれば，} \ v_j(\varphi)< e_j \tag{5.23}$$

であるように，各閾値 $e_j(j\in J)$ が選ばれていれば，

$$BSC'''(\varphi,j)=BSC(\varphi,j) \tag{5.24}$$

が成立し，$RECOGNITRON'''$ は，$RECOGNITRON$ へ還元される．

（証明）　明らか．　□

５．２　類似度差・類別差が拡大されるか？

$RECOGNITRON$ から $RECOGNITRON'''$ へ変換すれば，どのような効果がもたらされなければならないかは，次の①，②で指摘される．５．１．１項の2条件（1$），(2$）を満たす関数 f は①，②が満たされるように選定されなければならない．

① 相異なるある２つのカテゴリ番号 $j_1, j_2\in J(j_1\neq j_2)$ が存在して，

$$BSC(\varphi,j_1)\cdot SM(\varphi,\omega_{j_1})-BSC(\varphi,j_2)\cdot SM(\varphi,\omega_{j_2})\geq 0 \tag{5.25}$$

$$\wedge \ \min\{BSC(\varphi,j_1)\cdot SM(\varphi,\omega_{j_1}),BSC(\varphi,j_2)\cdot SM(\varphi,\omega_{j_2})\}>\frac{1}{2} \tag{5.26}$$

のとき，類似度差・類別差の拡大

$$c(j_1, j_2 : \varphi) \equiv \frac{BSC'''(\varphi, j_1) \cdot SM'''(\varphi, \omega_{j_1}) - BSC'''(\varphi, j_2) \cdot SM'''(\varphi, \omega_{j_2})}{BSC(\varphi, j_1) \cdot SM(\varphi, \omega_{j_1}) - BSC(\varphi, j_2) \cdot SM(\varphi, \omega_{j_2})} \geq 1 \tag{5.27}$$

が成立するかどうか？
②相異なるある２つのカテゴリ番号 $j_3, j_4 \in J(j_3 \neq j_4)$ が存在して，

$$BSC(\varphi, j_3) \cdot SM(\varphi, \omega_{j_3}) - BSC(\varphi, j_4) \cdot SM(\varphi, \omega_{j_4}) \leq 0 \tag{5.28}$$

$$\wedge \max\{BSC(\varphi, j_3) \cdot SM(\varphi, \omega_{j_3}), BSC(\varphi, j_4) \cdot SM(\varphi, \omega_{j_4})\} < \frac{1}{2} \tag{5.29}$$

のとき，類似度差・類別差の拡大

$$c(j_3, j_4 : \varphi) \geq 1 \tag{5.30}$$

が成立するかどうか？
尚，付録Cには，第４，５章の続編として，SM, BSCを変えた場合の認識システムの合成法が研究されている．

第６章　モデル構成作用素Tを変えた場合（パターン振幅の最小演算，最大演算による変換）

本章では，第３章に続き，T を変えた場合の認識システムの合成法が研究される．特に，2つのモデル構成作用素T_1, T_2 の最小値，最大値をとる２つの写像がモデル構成作用素となる諸条件が研究される．

６．１　min演算による再帰的構成

次の定理６．１は，パターンφ の，T_1によるパターンモデル$T_1\varphi$ と，T_2 によるパターンモデル$T_2\varphi$ との最小値 $\min\{T_1\varphi, T_2\varphi\}$ はまた，パターンモデル$T\varphi$ になり得る場合があることを指摘している．尚，

$$\forall \varphi \in \Phi_B, \forall x \in M, \max\{(T_1\varphi)(x), (T_2\varphi)(x)\}$$

$$\leq \min\{(T_1 \cdot T_2\varphi)(x), (T_2 \cdot T_1\varphi)(x)\}$$

$\Rightarrow$２式（6.5），（6.6）の成立　(6.1)

に注意しておく．

[定理６．１]（min構成に関するT −再帰定理）

$$T_j : \Phi_j \to \Phi_j, j = 1,2 \tag{6.2}$$

であるような２つの作用素 $T_j, j = 1,2$ は，axiom 1の（ｉ），（ii），（iii）の３後半，並びに，（iv）を満たし，

$$(T_j\varphi)(x), x \in M \quad \text{は実数値である}\ (j = 1,2) \tag{6.3}$$

としよう.

２つのパターン集合 Φ_j を

$$\Phi_j = R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T_j \cdot \Phi_B), j = 1, 2 \qquad (6.4)$$

の如く定義すると，対 $[\Phi_j, T_j]$ はaxiom 1を満たす.

このとき，２条件

$$① \ \forall \varphi \in \Phi_B, \forall x \in M, (T_1\varphi)(x) \leq (T_2 \cdot T_1\varphi)(x) \qquad (6.5)$$

$$\wedge (T_2\varphi)(x) \leq (T_1 \cdot T_2\varphi)(x) \qquad (6.6)$$

$$② \ \exists \varphi \in \Phi_B, T_1\varphi \neq 0 \wedge T_2\varphi \neq 0 \qquad (6.7)$$

の下で,

$$(T\varphi)(x) \equiv \min\{(T_1\varphi)(x), (T_2\varphi)(x)\}, x \in M \quad \text{for any} \quad \varphi \in \Phi_B \qquad (6.8)$$

と定義される式（A1.1）の作用素 T は，axiom 1の（ｉ）,（ii）,（iii）の３後半，並びに,（iv）を満たし，パターン集合 Φ を式（A1.4）の如く定義すると，対 $[\Phi, T]$ はaxiom 1を満たす.

（証明） 鈴木昇一：パターンモデルを出力するモデル構成作用素の諸例とその再帰性，文教大学情報学部情報研究,to be published
を参照. □

式（6.8）で定義されている $T\varphi$ は，$T_1\varphi$ と $T_2\varphi$ とに共通な情報を持つパターンモデルである.

６．２　max演算による再帰的構成

次の定理6.2は，パターン φ の，T_1 によるパターンモデル $T_1\varphi$ と，T_2 によるパターンモデル $T_2\varphi$ との最大値 $\max\{T_1\varphi, T_2\varphi\}$ はまた，パターンモデル $T\varphi$ になり得る場合があることを指摘している．尚,

$$\forall \varphi \in \Phi_B, \forall x \in M, \min\{(T_1\varphi)(x), (T_2\varphi)(x)\}$$

$$\geq \max\{(T_1 \cdot T_2\varphi)(x), (T_2 \cdot T_1\varphi)(x)\}$$

⇒２式（6.10）,（6.11）の成立 (6.9)

に注意しておく.

[定理6.2]（max構成に関する T −再帰定理）

式（6.2）の２つの作用素 $T_j, j = 1,2$ は, axiom 1の（ｉ）,（ii）,（iii）の３後半，並びに,（iv）を満たし，パターンモデルの実数値条件式（6.3）が成り立つとしよう.

２つのパターン集合 Φ_j を式（6.4）の如く定義すると，対 $[\Phi_j, T_j]$ はaxiom 1を満たす.

このとき，２条件

$$① \ \forall \varphi \in \Phi_B, \forall x \in M, (T_1\varphi)(x) \geq (T_2 \cdot T_1\varphi)(x) \qquad (6.10)$$

$$\wedge (T_2\varphi)(x) \geq (T_1 \cdot T_2\varphi)(x) \qquad (6.11)$$

② $\exists \varphi \in \Phi_B, T_1\varphi \neq 0 \wedge T_2\varphi \neq 0$ (6.12)

の下で，

$(T\varphi)(x) \equiv \max\{(T_1\varphi)(x),(T_2\varphi)(x)\}, x \in M$ for any $\varphi \in \Phi_B$ (6.13)

と定義される式（A1.1）の作用素Tは，axiom 1の（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）の３後半，並びに，（iv）を満たし，パターン集合Φを式（A1.4）の如く定義すると，対$[\Phi, T]$はaxiom 1を満たす．

（証明）　式（6.13）の作用素Tがaxiom 1の（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）の３後半，並びに，（iv）を満たすことを示せば，残りは，付録Aの定理A.1から明らかである．

axiom 1,（ⅰ）の後半の成立:

$\varphi = 0$とする．

$T\varphi = \max\{T_1\varphi, T_2\varphi\}$

$= \max\{0,0\} \quad \because \quad T_1\varphi = T_2\varphi = 0$ (6.14)

$= 0.$

axiom 1,（ⅱ）の後半の成立: aを正定数とする．

$T(a\cdot\varphi) = \max\{T_1(a\cdot\varphi), T_2(a\cdot\varphi)\}$

$= \max\{T_1\varphi, T_2\varphi\}$

$\because \quad \{T_1(a\cdot\varphi) = T_1\varphi \wedge T_2(a\cdot\varphi) = T_2\varphi$

$= T\varphi.$ (6.15)

axiom 1,（ⅲ）の後半の成立:

$\eta(x) \equiv (T\varphi)(x) = \max\{(T_1\varphi)(x),(T_2\varphi)(x)\}$

とおく．そうすれば，

$(T\eta)(x) = \max\{(T_1\eta)(x),(T_2\eta)(x)\}$

であるが，任意に固定した$x \in M$について，２つの場合（イ），（ロ）にわけて示そう．

（イ） $\eta(x) = (T_1\varphi)(x)$の場合

$(T\eta)(x) = \max\{(T_1T_1\varphi)(x),(T_2T_1\varphi)(x)\}$

$= \max\{(T_1\varphi)(x),(T_2T_1\varphi)(x)\} \quad \because \quad \forall x \in M, (T_1T_1\varphi)(x) = (T_1\varphi)(x)$ (6.16)

$= (T_1\varphi)(x)$

$\because$　式（6.10），並びに，付録Aの定理A.1,（イ－a）の$T_j\cdot\Phi = T_j\cdot\Phi_B \subset \Phi (j=1,2)$ (6.17)

$= \eta(x).$

（ロ） $\eta(x)=(T_2\varphi)(x)$ の場合

$(T\eta)(x)=\max\{(T_1T_2\varphi)(x),(T_2T_2\varphi)(x)\}$

$=\max\{(T_1T_2\varphi)(x),(T_2\varphi)(x)\}$ $\because$ $\forall x\in M,(T_2T_2\varphi)(x)=(T_2\varphi)(x)$ (6.18)

$=(T_2\varphi)(x)$

$\because$ 式(6.11),並びに,付録Aの定理A.1,(イ−a)の $T_j\cdot\Phi=T_j\cdot\Phi_B\subset\Phi(j=1,2)$ (6.19)

$=\eta(x).$

axiom 1,(iv)の成立: 条件式(6.12)を考慮し,

$\exists\varphi\in\Phi_B,\exists x\in M,0\neq(T_1\varphi)(x)\le(T_2\varphi)(x)$

なる $\varphi\in\Phi_B$ をとれば,

$$(T\varphi)(x)=\max\{(T_1\varphi)(x),(T_2\varphi)(x)\}=(T_2\varphi)(x)\neq 0 \tag{6.20}$$

が成り立ち，ここで,付録Aの定理A.1,（a）の $T\cdot\Phi=T\cdot\Phi_B\subset\Phi$ を考慮すれば，この $\varphi\in\Phi_B$ を，

$$\varphi\in\Phi \tag{6.21}$$

をとることができる． □

式（6.13）で定義されている $T\varphi$ は， $T_1\varphi$ と $T_2\varphi$ とをあわせた情報を持つパターンモデルである．

第７章　T を変えた場合（パターンから抽出される特徴量同士の最小演算，最大演算による変換）

本章では，第３章に続き，T を変えた場合の認識システムの合成法が研究される．特徴抽出後定まる２種類のモデル構成作用素の，再帰による２構成を論じるため，１次独立な系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ を使い，

$$T\varphi=\sum_{\ell\in L}u(\varphi,\ell)\cdot\phi_\ell \tag{7.1}$$

と定義される式（A1.1）の写像Tは， axiom 1の（ｉ），（ii），（iii）の３後半，並びに，（iv）を満たすモデル構成作用素であることが既に示されている[10],[3],[4]．ここに，

$$u:\Phi\times L\to R \text{（実数全体の集合）} \tag{7.2}$$

は特徴抽出写像であり，

$$u(\varphi,\ell)\in R \tag{7.3}$$

はパターン $\varphi\in\Phi$ から抽出された第$\ell\in L$番目の特徴量である．付録Aの定理A.１を適用できるように，

axiom 1の（ｉ），(ii），(iii）の３後半，並びに（iv）を満たし，特徴抽出後定まる２種類の，式（7.1）の形式を備えた２つの複合モデル構成作用素 $T_{\min\{\#1,\#2\}}, T_{\max\{\#1,\#2\}}$ を，２つのモデル構成作用素 $T_{\#1}, T_{\#2}$ から再帰的に構成する手法が研究される．

本章では，式（7.1）の構造形式を備えた2つのモデル構成作用素

$$T_{\# j}\varphi = \sum_{\ell \in L} u_{\# j}(\varphi,\ell)\cdot\phi_{\ell}, \varphi \in \Phi_j, j = 1,2 \tag{7.4}$$

を考え， $\max\{u_{\#1}(\varphi,\ell), u_{\#2}(\varphi,\ell)\}$, $\min\{u_{\#1}(\varphi,\ell), u_{\#2}(\varphi,\ell)\}$ がパターン $\varphi \in \Phi$ から抽出された第 $\ell \in L$ 番目の特徴量として採用できる諸条件を研究する．

７．１　特徴抽出後定まるパターンモデル $T\varphi$ の構造形式

可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の元 ϕ_ℓ からなる１次独立な系

$$\phi_\ell, \ell \in L \tag{7.5}$$

を導入する．また，パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出される第 $\ell \in L$ 番目の実数値特徴量を式（7.3）の如く定義すれば，式（7.2）の特徴抽出写像uが定義される．このとき，特徴抽出後定まるパターンモデル $T\varphi$ の構造形式の１つは各 $u(\varphi,\ell) \in R$ を１次結合係数に持つ式（5.1）の系 $\phi_\ell, \ell \in L$ の１次形式

$$T\cdot = \sum_{\ell \in L} u(\cdot,\ell)\cdot\phi_\ell : \Phi \to \Phi \tag{7.6}$$

である．これが，特徴抽出後定まるパターンモデル $T\varphi$ の構造形式である．

処理の対象とする問題のパターンの集合（$0\in$） Φ（$\subset\mathfrak{H}$）を想定すれば，

式（7.6）の構造形式を備えた式（A1.1）の写像Tがaxiom 1の（ｉ），(ii），(iii）の３後半，並びに，(iv）を満たすように構成され，しかも， Φ が式（A1.4）の如く与えられれば，この写像 T との対$[\Phi, T]$ がaxiom 1を満たすことになる（付録Aの定理A.１，(イ)）.

次の定理７．１は，式(7.5)の系$\phi_\ell, \ell \in L$ が１次独立であることを考慮すれば，容易に証明される．

[定理７．１]（ 式（A1.1）の写像T と式（7.2）の特徴抽出写像uとの同値定理）

式（7.6）の構造形式を備えた式（A1.1）の写像T がaxiom 1の（ｉ），(ii），(iii）の後半,並びに,(iv）を満たすことと, 式（7.2）の特徴抽出写像uが次の４性質①～④を満たすことは同値である：

①axiom 1の（ｉ）の後半： $\varphi = 0$とする．

$$T\varphi = 0 \Leftrightarrow \forall \ell \in L, u(\varphi,\ell) = 0. \tag{7.7}$$

②axiom 1の（ii）の後半：aを正定数とする．

$$\begin{aligned}&\forall \varphi \in \Phi,\\ &T(a\cdot\varphi) = T\varphi\\ &\Leftrightarrow \forall \ell \in L, u(a\cdot\varphi,\ell) = u(\varphi,\ell).\end{aligned} \tag{7.8}$$

③axiom 1の（iii）の後半：

$$\begin{aligned}&\forall \varphi \in \Phi,\\ &T(T\varphi) = T\varphi\\ &\Leftrightarrow \forall \ell \in L, u(T\varphi,\ell) = u(\varphi,\ell).\end{aligned} \tag{7.9}$$

④axiom 1の（iv）：

$$\exists\varphi\in\Phi, T\varphi\neq 0. \\ \Leftrightarrow \exists\varphi\in\Phi, u(\varphi,\ell)\neq 0. \tag{7.10}$$

□

７．２　パターンから抽出される特徴量同士の最小演算に基づく再帰的合成

min演算による再帰的構成を論じよう．

２つの写像 $T_{\#1}, T_{\#2}$, ２つのパターン集合 Φ_1, Φ_2 の２つの対 $[\Phi_1, T_{\#1}]$, $[\Phi_2, T_{\#2}]$ は共に，axiom 1を満たすとしよう．このとき，付録Aの定理A.１の（ロ）により，Φ_j の表現が式（6.4）の如く，与えられる．ここで，

$$T_{\min\{\#1,\#2\}}\varphi = \sum_{\ell\in L}\min\{u_{\#1}(\varphi,\ell), u_{\#2}(\varphi,\ell)\}\cdot\phi_\ell \tag{7.11}$$

と定義される写像

$$T_{\min\{\#1,\#2\}}:\Phi\to\Phi \tag{7.12}$$

を考える．

次の定理７．２は，パターンの φ ，モデル構成作用素 $T_{\#1}$ によるパターンモデル $T_{\#1}\varphi$ の各特徴量

$$u_{\#1}(\varphi,\ell)(=u_{\#1}(T\ \ \varphi,\ell) \quad \because \quad 式(7.\ 9)) \tag{7.13}$$

と，モデル構成作用素 $T_{\#2}$ によるパターンモデル $T_{\#2}\varphi$ の各特徴量

$$u_{\#2}(\varphi,\ell)(=u_{\#2}(T_{\#2}\varphi,\ell) \quad \because \quad 式(7.\ 9)) \tag{7.14}$$

との最小値 $\min\{u_{\#1}(\varphi,\ell), u_{\#2}(\varphi,\ell)\}$ を備えた式（7.11）の $\mathfrak{H}$ の元 $T_{\min\{\#1,\#2\}}\varphi$ はまた，パターンモデルになり得る場合があることを指摘している．

$$\forall\varphi\in\Phi_B, \forall\ell\in L,\ \max\{u_{\#1}(\varphi,\ell), u_{\#2}(\varphi,\ell)\}\leq\min\{u_{\#1}(T_{\#2}\varphi,\ell), u_{\#2}(T_{\#1}\varphi,\ell)\} \tag{7.15}$$

であれば，２式（7.17），(7.18）が成り立つことに注意する．

[定理７．２]（min構成による特徴抽出に関する T −再帰定理）

式（7.4）の如く定義される２つの作用素 $T_{\#j}, j=1,2$ は，axiom 1の（ｉ），(ii），(iii）の３後半，並びに，(iv）を満たし，

$$u_{\#j}(\varphi,\ell), \ell\in L \text{ は実数値の組である（ｊ＝1, 2）} \tag{7.16}$$

とする．

パターン集合 Φ_j を式（6.4）の如く定義すると，対 $[\Phi_j, T_{\#j}]$ はaxiom 1を満たす．

このとき，２条件

$$①\ \forall\varphi\in\Phi_B, \forall\ell\in L, u_{\#1}(\varphi,\ell)\leq u_{\#2}(T_{\#1}\varphi,\ell) \tag{7.17}$$

$$\wedge u_{\#2}(\varphi,\ell) \le u_{\#1}(T_{\#2}\varphi,\ell) \tag{7.18}$$

$$②\exists\varphi\in\Phi_B, \exists\ell\in L, u_{\#1}(\varphi,\ell)\ne 0 \wedge u_{\#2}(\varphi,\ell)\ne 0 \tag{7.19}$$

の下で，

$$T_{\min\{\#1,\#2\}}\varphi$$

$$\equiv \sum_{\ell\in L}\min\{u_{\#1}(\varphi,\ell),u_{\#2}(\varphi,\ell)\}\cdot\phi_\ell \quad \text{for any} \quad \varphi\in\Phi_B \tag{7.20}$$

と定義される写像

$$T_{\min\{\#1,\#2\}}:\Phi\to\Phi \tag{7.21}$$

は，axiom 1の（i），（ii），（iii）の３後半，並びに，（iv）を満たし，パターン集合Φを

$$\Phi = R^{++}\cdot(\Phi_B \cup T_{\min\{\#1,\#2\}}\cdot\Phi_B) \tag{7.22}$$

の如く定義すると，対$[\Phi, T_{\min\{\#1,\#2\}}]$はaxiom 1を満たす.

（証明） 文献[44]の定理２である. □

式（7.11）で定義されている$T_{\min\{\#1,\#2\}}\varphi$は，$T_{\#1}\varphi$と$T_{\#2}\varphi$とに共通な情報を持つパターンモデルである.

７．３　パターンから抽出される特徴量同士の最大演算に基づく再帰的合成

maxによる再帰的構成を論じよう.

$$T_{\max\{\#1,\#2\}}\varphi = \sum_{\ell\in L}\max\{u_{\#1}(\varphi,\ell),u_{\#2}(\varphi,\ell)\}\cdot\phi_\ell \tag{7.23}$$

と定義される写像

$$T_{\max\{\#1,\#2\}}:\Phi\to\Phi \tag{7.24}$$

を考える.

次の定理７．３は，パターンφの，モデル構成作用素$T_{\#1}$によるパターンモデル$T_{\#1}\varphi$の，式（7.13）の各特徴量$u_{\#1}(\varphi,\ell)$と，モデル構成作用素$T_{\#2}$によるパターンモデル$T_{\#2}\varphi$の，式（7.14）の各特徴量$u_{\#2}(\varphi,\ell)$との最大値$\max\{u_{\#1}(\varphi,\ell),u_{\#2}(\varphi,\ell)\}$を備えた式（7.23）の$\mathfrak{H}$の元$T_{mjax\{\#1,\#2\}}\varphi$はまた，パターンモデルになり得る場合があることを指摘している.

$$\forall\varphi\in\Phi_B, \forall\ell\in L, \min\{u_{\#1}(\varphi,\ell),u_{\#2}(\varphi,\ell)\}\ge\max\{u_{\#1}(T_{\#2}\varphi,\ell),u_{\#2}(T_{\#1}\varphi,\ell)\} \tag{7.25}$$

であれば，２式（7.26），（7.27）が成り立つことに注意する.

[定理７．３]（max構成による特徴抽出に関するT−再帰定理）

式（7.4）の如く定義される２つの作用素$T_{\#j}, j=1,2$は，axiom 1の（i），（ii），（iii）の３後半，並びに，（iv）を満たし，抽出された特徴量$u_{\#j}(\varphi,\ell), \ell\in L$の実数値条件式（7.16）が成り立つとする.

２つのパターン集合Φ_jを式（6.4）の如く定義すると，対$[\Phi_j, T_{\#j}]$はaxiom 1を満たす.

このとき，２条件

$$①\forall\varphi\in\Phi_B,\forall\ell\in L,u_{\#1}(\varphi,\ell)\geq u_{\#2}(T_{\#1}\varphi,\ell) \tag{7.26}$$

$$\wedge u_{\#2}(\varphi,\ell)\geq u_{\#1}(T_{\#2}\varphi,\ell) \tag{7.27}$$

$$②\exists\varphi\in\Phi_B,\exists\ell\in L,u_{\#1}(\varphi,\ell)\neq 0\vee u_{\#2}(\varphi,\ell)\neq 0 \tag{7.28}$$

の下で，式（7.23）の如く定義される式（7.24）の写像 $T_{\max\{\#1,\#2\}}$ は，axiom 1の（ｉ），（ii），（iii）の３後半，並びに，（iv）を満たし，パターン集合 Φ を

$$\Phi=R^{++}\cdot(\Phi_B\cup T_{\max\{\#1,\#2\}}\cdot\Phi_B) \tag{7.29}$$

の如く定義すると，対 $[\Phi,T_{\max\{\#1,\#2\}}]$ はaxiom 1を満たす.

（証明）　式（7.24）の作用素 $T_{\max\{\#1,\#2\}}$ がaxiom 1の（ｉ），（ii），（iii）の３後半，並びに，（iv）を満たすことを示せば，残りは，付録Aの定理A.１,（イ）から明らかである.

axiom 1,（ｉ）の後半の成立: $\varphi=0$ とする.

$$T_{\#1}\varphi=0\Leftrightarrow\forall\ell\in L,u_{\#1}(\varphi,\ell)=0 \tag{7.30}$$

$$T_{\#2}\varphi=0\Leftrightarrow\forall\ell\in L,u_{\#2}(\varphi,\ell)=0 \tag{7.31}$$

が成り立っているから,

$$\begin{aligned}T_{\max\{\#1,\#2\}}\varphi&=\sum_{\ell\in L}\max\{u_{\#1}(\varphi,\ell),u_{\#2}(\varphi,\ell)\}\cdot\phi_\ell\\&=\sum_{\ell\in L}\max\{0,0\}\cdot\phi_\ell\qquad\because\ \ 2式(7.30),(7.31)\\&=0.\end{aligned} \tag{7.32}$$

axiom 1,（ii）の後半の成立: αを正定数とする.

$$\begin{aligned}&T_{\#1}(a\cdot\varphi)=T_{\#1}\varphi\\&\Leftrightarrow\forall\ell\in L,u_{\#1}(a\cdot\varphi,\ell)=u_{\#1}(\varphi,\ell)\end{aligned} \tag{7.33}$$

$$\begin{aligned}&T_{\#2}(a\cdot\varphi)=T_{\#2}\varphi\\&\Leftrightarrow\forall\ell\in L,u_{\#2}(a\cdot\varphi,\ell)=u_{\#2}(\varphi,\ell)\end{aligned} \tag{7.34}$$

が成り立っているから,

$$\begin{aligned}&T_{\max\{\#1,\#2\}}(a\cdot\varphi)\\&=\sum_{\ell\in L}\max\{u_{\#1}(a\cdot\varphi,\ell),u_{\#2}(a\cdot\varphi,\ell)\}\cdot\phi_\ell\\&=\sum_{\ell\in L}\max\{u_{\#1}(\varphi,\ell),u_{\#2}(\varphi,\ell)\}\cdot\phi_\ell\qquad\because\ \ 2式(7.33),(7.34)\\&=T_{maX\{\#1,\#2\}}\varphi.\end{aligned} \tag{7.35}$$

axiom 1（iii）の後半の成立:式（7.9）より，

$$T_{\#1}(T_{\#1}\varphi)=T_{\#1}\varphi$$

$$\Leftrightarrow \forall \ell \in L, u_{\#1}(T_{\#1}\varphi,\ell)=u_{\#1}(\varphi,\ell)$$

$$T_{\#2}(T_{\#2}\varphi)=T_{\#2}\varphi \tag{7.36}$$

$$\Leftrightarrow \forall \ell \in L, u_{\#2}(T_{\#2}\varphi,\ell)=u_{\#2}(\varphi,\ell) \tag{7.37}$$

が成り立っていることに注意しておく．

$$\eta \equiv T_{\max\{\#1,\#2\}}\varphi$$

$$=\sum_{\ell\in L}\max\{u_{\#1}(\varphi,\ell),u_{\#2}(\varphi,\ell)\}\cdot\phi_\ell \tag{7.38}$$

とおく．そうすれば，

$$T_{\max\{\#1,\#2\}}\eta=\sum_{\ell\ L}\max\{u_{\#1}(\eta,\ell),u_{\#2}(\eta,\ell)\}\cdot\phi_\ell \tag{7.39}$$

であるが，固定した任意の $\ell\in L$ について，２つの場合にわけて示そう．

（イ） $\max\{u_{\#1}(\varphi,\ell),u_{\#2}(\varphi,\ell)\}=u_{\#1}(\varphi,\ell)$ の場合

$$\begin{aligned}\eta &= \sum_{\ell\in L}u_{\#1}(\varphi,\ell)\cdot\phi_\ell \quad \because \text{ 式(7.38)}\\ &=T_{\#1}\varphi \quad \because \text{ 式(7.4)}\end{aligned} \tag{7.40}$$

であり，

$$T_{\max(\#1,\#2\}}\eta=\sum_{\ell\in L}\max\{u_{\#1}(T_{\#1}\varphi,\ell),u_{\#2}(T_{\#1}\varphi,\ell)\}\cdot\phi_\ell \quad \because \text{ 2式(7.39), (7.40)}$$

$$=\sum_{\ell\in L}\max\{u_{\#1}(\varphi,\ell),u_{\#2}(T_{\#1}\varphi,\ell)\}\cdot\phi_\ell \quad \because \text{ 式(7.36)}$$

$$=\sum_{\ell\in L}u_{\#1}(\varphi,\ell)\cdot\phi_\ell \quad \because \text{ 式(7.26)}$$

$$=\eta. \quad \because \text{ 式(7.40)}$$

（ロ） $\max\{u_{\#1}(\varphi,\ell),u_{\#2}(\varphi,\ell)\}=u_{\#2}(\varphi,\ell)$ の場合

$$\begin{aligned}\eta &= \sum_{\ell\in L}u_{\#2}(\varphi,\ell)\cdot\phi_\ell \quad \because \text{ 式(7.38)}\\ &=T_{\#2}\varphi \quad \because \text{ 式(7.4)}\end{aligned} \tag{7.41}$$

であり，

$T_{\max\{\#1,\#2\}}\eta = \sum_{\ell \in L} \max\{u_{\#1}(T_{\#2}\varphi,\ell), u_{\#2}(T_{\#2}\varphi,\ell)\} \cdot \phi_\ell$　　∵　２式(7.39), (7.41)

$= \sum_{\ell \in L} \max\{u_{\#1}(T\ \ \varphi,\ell), u_{\#2}(\varphi,\ell)\} \cdot \phi_\ell$　　∵　式(7.37)

$= \sum_{\ell \in L} u_{\#2}(\varphi,\ell) \cdot \phi_\ell$　　∵　式(7.27)

$= \eta.$　∵　式(7.41)

axiom 1,(ⅳ)の成立：　条件式(7.28)を考慮し,

$\exists\varphi \in \Phi_B, \exists\ell \in L, u_{\#1}(\varphi,\ell) \neq 0 \wedge u_{\#2}(\varphi,\ell) \neq 0$

なる$\varphi \in \Phi_B$をとれば,

$$T_{\max\{\#1,\#2\}}\varphi = \sum_{\ell \in L} \max\{u_{\#1}(\varphi,\ell), u_{\#2}(\varphi,\ell)\} \cdot \phi_\ell \neq 0 \tag{7.42}$$

が成り立ち，ここで，付録Aの定理A.1の（イ-a）の$T \cdot \Phi = T \cdot \Phi_B \subset \Phi$を考慮すれば，この$\varphi \in \Phi_B$を

$$\varphi \in \Phi \tag{7.43}$$

をとることができる．　□

式（7.23）で定義されている$T_{\max\{\#1,\#2\}}$は，$T_{\#1}\varphi$と$T_{\#2}\varphi$とをあわせた情報を持つパターンモデルである．

上述の２定理７．２，７．３は．axiom 1に関し,２種類の再帰性が成り立つことを指摘している．

第８章　Tを変えた場合（単方向積による変換）

本章では，式（1.1）の認識システム$RECOGNITRON$の変換

$$RECOGNITRON \to RECOGNITRON' \equiv \lambda B.[\Phi \to \Phi]_0.T_{new}BT(RECOGNITRON) \tag{8.1}$$

を考える．変換後得られた認識システム$RECOGNITRON'$は２つのモデル構成作用素T, T_{new}の双方にこの順位で不変な連想形認識の働きを発現し，$RECOGNITRON'$が各認識段階でパターン$\varphi \in \Phi$のモデル$T\varphi \in \Phi$を求めた後，構造受精変換$T_{new}A(\mu)T_{new}$を使い，多段階連想形認識を行うシステムであることが示される．

そのために，$RECOGNITRON$内のモデル構成作用素を以下の式（8.7）のT'へと変えよう．

２つの対$[\Phi, T], [\Phi_{new}, T_{new}]$は共に，axiom 1を満たすとしよう．式（A1.4）のパターン集合Φと，今1つのパターン集合

$$\Phi_{new} = R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T_{new} \cdot \Phi_B) \tag{8.2}$$

を用意する．Φ_BはΦ, Φ_{new}の双方に共通であることに注意する．

式（1.1）の認識システムから２式（1.2），(3.12）の認識システム

$$RECOGNITRON'(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) = f(RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))) \equiv < \Phi'_B, T', SM', BSC' > \tag{8.3}$$

を作る．ここに，写像Bを変数とする関数 f は

$$f(B) \equiv \lambda B \in [\Phi \to \Phi]_0 . T_{new} BT \tag{8.4}$$

と定義される．

ここで，ラムダ言語を使い，$RECOGNITRON' \equiv RECOGNITRON'(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))$ の 4 要素 Φ'_B, T', SM', BSC' は次のように定義される：

① $\Phi'_B = \Phi_B$ (8.5)

② axiom 1の（ i ），（ii），（iii）の3後半，並びに，（iv）を満たす式（A1.1）のモデル構成作用素Tに対比して，axiom 1の（ i ），（ii），（iii）の3後半，並びに，（iv）を満たすモデル構成作用素

$$T_{new} : \Phi_{new} \to \Phi_{new} \tag{8.6}$$

を導入する．その後，ラムダ言語で表現された式（8.4）のoperator

$$T' \equiv f(B) \tag{8.7}$$

を導入する．T' は T から T_{new} の方向への単方向積（unidirectional product）で得られたという．

ここに，$[\Phi \to \Phi]_0$ は

$\varphi = 0$ ならば $B\varphi = 0$ (8.8)

であるような，Φ から Φ への写像（パターン変換）Bの全体である．

③ $SM'(\varphi, \omega_j) =$

[$SM(\varphi, \omega_j)$ を構成する際，登場しているすべての T の代りに T' を用いたもの] (8.9)

④ $BSC'(\varphi, j) =$

[$BSC(\varphi, j)$ を構成する際，登場しているすべての T の代りに T' を用いたもの] (8.10)

□

因みに，

$$\forall \varphi \in \Phi', \forall \mu \in 2^J, 【T'A(\mu)T'】\varphi = 【(T_{new}A(\mu)T_{new})T)】\varphi \tag{8.11}$$

であることは，

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \mu \in 2^J, 【T'A(\mu)T'】\varphi$$

$$= 【(\lambda B \in [\Phi_0 \to \Phi_0].T_{new}BT)A(\mu)T'】\varphi \quad \because \ T' \text{の表現} \tag{8.12}$$

$$= 【T_{new}A(\mu)T'T】\varphi \quad \because \ \text{引数} B \text{に} A(\mu)T' \text{を代入} \tag{8.13}$$

$$= 【T_{new}A(\mu)(\lambda B \in [\Phi_0 \to \Phi_0].T_{new}BT)T】\varphi \quad \because \ T' \text{の表現} \tag{8.14}$$

$$= 【T_{new}A(\mu)(T_{new}TT)】\varphi \quad \because \ \text{引数} B \text{に} T \text{を代入} \tag{8.15}$$

$$=【T_{new}A(\mu)(T_{new}T)】\varphi \qquad \because \quad TT=T \tag{8.16}$$

$$=【(T_{new}A(\mu)T_{new})T】\varphi \tag{8.17}$$

という具合に，わかる．各認識段階でパターン $\varphi\in\Phi$ のモデル $T\varphi\in\Phi$ を求めた後， $\mu\in 2^J$ を助変数とする構造受精変換 $T_{new}A(\mu)T_{new}$ を使い，多段階連想形認識を実行できる写像

$$T'A(\mu)T':\Phi'\to\Phi' \tag{8.18}$$

が得られたことが式（8.11）からわかる．上述で登場しているパターン集合 Φ' は

$$\Phi'=R^{++}\cdot(\Phi'_B\cup T'\cdot\Phi'_B) \tag{8.19}$$

と定義されるものである．式（8.4）の T' はaxiom 1の（ i ），（ii），（iii）の3後半，並びに，（iv）を満たすことが示され[44]，定理A.1,（イ）を適用すれば，対 $[\Phi',T']$ はaxiom 1を満たし，写像 T' は Φ' 上でのモデル構成作用素である．

以上を整理すれば，*RECOGNITRON'* がパターン $\varphi\in\Phi$ のモデル $T\varphi\in\Phi$ を求めた後，構造受精変換 $T_{new}A(\mu)T_{new}$ を使い，多段階連想形認識を行うシステムであることを可能ならしめる次の２定理８．１，８．２が成り立つ[44].

[定理８．１]（構造受精作用素 $T'A(\mu)T'$ の表現定理）

$$\forall\mu\in 2^J, T'A(\mu)T'=[T_{new}A(\mu)T_{new}]T$$

（証明）式（8.11）である．　□

[定理８．２]（ $T'T_{new}$ の， $T_{new}T$ への還元定理）

$$\forall\varphi\in\Phi, T'T_{new}\varphi=T_{new}T\varphi. \tag{8.20}$$

（証明） $\forall\varphi\in\Phi_{new}, T'T_{new}\varphi$

$$=【(\lambda B\in[\Phi_0\to\Phi_0].T_{new}BT)T_{new}】\varphi \qquad \because \quad T' \text{の表現} \tag{8.21}$$

$$=【T_{new}T_{new}T】\varphi \qquad \because \quad \text{引数}\,B\,\text{に}\,T_{new}\,\text{を代入} \tag{8.22}$$

$$=【T_{new}T】\varphi \qquad \because \quad T_{new}T_{new}=T_{new}\ (\text{axiom 1,(iii)の後半}) \tag{8.23}$$

第９章　T を変えた場合（ユニタリ共変な認識システム *RECOGNITRON'* ）

本章では，第３章に続き， T を変えた場合の認識システムの合成法が研究される．

本章では，正規直交基底系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ を使ったユニタリ共変な連想形認識システム

$$RECOGNITRON'(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))=U^{-1}\cdot RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))\cdot U \tag{9.1}$$

を構成し，その複数個の例を考察する．

９．１　必ずしも完全でない正規直交系$\{\phi_k\}_{k\in L}$を使ったパターンの1次展開

$\mathfrak{H}$の元からなる系$\{\phi_k\}_{k\in L}$を

$$(\phi_k,\phi_\ell)=\delta_{k\ell}\text{, where }\delta_{k\ell}=1\quad\text{if}\quad k=\ell,=0\quad\text{if}\quad k\neq\ell \tag{9.2}$$

が成り立つという意味で正規直交系に選ぶ．正規直交系は1次独立な系である．正規直交系$\{\phi_k\}_{k\in L}$については

$$\forall k\in L,(\varphi,\phi_k)=0\Rightarrow\|\varphi\|=0 \tag{9.3}$$

が成り立つという意味で，完全であることが望ましいが，完全である必要はない．
このとき，正規直交系$\{\phi_k\}_{k\in L}$を採用している場合，３．２．１項の連立1次方程式（3.24）を解けば，

$$a_\ell(\varphi)=(\varphi,\phi_\ell),\ell\in L \tag{9.4}$$

が得られ，式（3.27）から，パターンの1次展開

$$\forall\varphi\in\Phi\subseteq\mathfrak{H},\ \exists\varphi_\perp\in\mathfrak{H}\text{ such that }\forall k\in L,(\varphi_\perp,\phi_k)=0, \tag{9.5}$$

$$\varphi=\sum_{\ell\in L}(\varphi,\phi_\ell)\cdot\phi_\ell+\varphi_\perp \tag{9.6}$$

が成り立つ．特に，正規直交系$\{\phi_k\}_{k\in L}$が完全であれば，

$$\varphi_\perp=0 \tag{9.7}$$

が成り立つ．

９．２　モデル構成作用素Tの座標変換

式（7.2）の特徴抽出写像uを導入する．ここに，３．１．１項の４条件①～④を満たす式（3.2）の関数fを導入して得られる実数量

$$u(\varphi,\ell)\equiv f\left(\frac{(\varphi,\phi_\ell)}{\sup_{k\in L}|(\varphi,\phi_k)|}\right) \tag{9.8}$$

はパターン$\varphi\in\Phi$から抽出された第$k\in L$番目の特徴量である．但し，実定数(φ,ϕ_ℓ)の列$\{(\varphi,\phi_\ell)\}_{\ell\in L}$については，０−計算規則

$$\frac{(\varphi,\phi_\ell)}{\sup_{k\in L}|(\varphi,\phi_k)|}=0\qquad if\quad \sup_{k\in L}|(\varphi,\phi_k)|=0 \tag{9.9}$$

を約束する．

パターンモデルを$T\varphi$生成するモデル構成作用素Tを式（7.6）の如く，導入する．

$$\forall\varphi,\forall\eta\in\mathfrak{H},U(a\cdot\varphi+b\cdot\eta)=a\cdot U\varphi+b\cdot U\eta\ \text{ for any two complex numbers }a,b\text{（線形性）} \tag{9.10}$$

$$\forall\varphi\in\mathfrak{H},\|U\varphi\|=\|\varphi\|\text{（ノルム保存性）} \tag{9.11}$$

を満たすという意味で，ユニタリ作用素Uを導入する．ユニタリ作用素U，並びに，その逆作用素U^{-1}は$\mathfrak{H}$では座標変換に相当する．第$k \in L$番目の元ϕ_kを

$$\phi'_k \equiv U^{-1}\phi_k \text{ , } k \in L \tag{9.13}$$

と，ユニタリ座標変換U^{-1}で座標変換して得られるϕ'_kからなる系$\{\phi'_k\}_{k\in L}$を考えよう．定義して得られる$\{\phi_k\}_{k\in L}$が正規直交系であれば，$\{\phi'_k\}_{k\in L}$も正規直交系であり，$\{\phi_k\}_{k\in L}$が完全であれば，$\{\phi'_k\}_{k\in L}$も完全である．

正規直交系$\{\phi_k\}_{k\in L}$を使った2式（9.8），（7.6）の特徴抽出写像u，パターンモデル$T\varphi$と同様に，正規直交系$\{\phi'_k\}_{k\in L}$を使い，

$$u'(\varphi,\ell) \equiv f\left(\frac{(\varphi,\phi'_\ell)}{\sup_{k\in L}|(\varphi,\phi'_k)|}\right) \tag{9.14}$$

$$T'\varphi \equiv \sum_{\ell\in L} u'(\varphi,\ell)\cdot\phi'_\ell \tag{9.15}$$

を定義する．

次の定理９．１は，

$$\forall\varphi\in\Phi, TU\varphi = UT'\varphi \text{（座標変換}U\text{ の前後のユニタリ同値性）} \tag{9.16}$$

言い換えれば，

パターンφが$U\varphi$という具合に座標変換Uを受けた時，座標変換後のパターン$U\varphi$の，Tによるモデル$T(U\varphi)$は，座標変換前のパターンφの，T'によるモデル$T'\varphi$が座標変換Uを受けたパターン$U(T'\varphi)$に等しい（基底$\{\phi_k\}_{k\in L}$を使ったユニタリ共変性）　(9.17)

を意味し，座標変換Uを先に受けても，後で受けても等しくなるような２つのモデル構成作用素T，T'の存在を指摘している．

[定理９．１]（モデル構成作用素Tの座標変換定理；モデル構成作用素Tのユニタリ同値定理；モデル構成作用素のユニタリ共変定理）

$$\forall\varphi\in\Phi, \forall\ell\in L, u(U\varphi,\ell) = u'(\varphi,\ell) \tag{9.18}$$
（座標変換Uに伴う抽出された特徴量$u(\varphi,\ell)$の保存性）

が成り立ち，

$$T' = U^{-1}TU \tag{9.19}$$

が成り立つ．

（証明）　文献[29]の６．３節，定理６．１で証明されている．　□

上の定理９．１の前半は，

パターンφが$U\varphi$という具合に座標変換Uを受けた時，座標変換後のパターン$U\varphi$から，uで特徴することは，座標変換前のパターンφから，u'で特徴することに等しい　(9.20)

を指摘している．

９．３　連想形認識システムのユニタリ共変変換

上述のユニタリ作用素を使って，連想形認識システムをユニタリ共変変換して得られる連想形認識システムをと表す：

$$U^{-1}\cdot RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))\cdot U = RECOGNITRON'(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) \tag{9.21}$$

□

2式（1.1），（1.2）の認識システム $RECOGNITRON$ ， $RECOGNITRON'$ を導入する．モデル構成作用素T'，類似度関数 SM'，大分類関数BSC' は各々，axiom 1〜3を満たすモデル構成作用素 T，類似度関数 SM，大分類関数BSC から次の定義で得られる：

２つの基本領域 Φ_B,Φ'_B に関する条件式（3.13）の下で

①$T' = U^{-1}TU$ (9.22)

②$SM'(\varphi,\omega_j) =$
［$SM(\varphi,\omega_j)$ を構成する際，登場しているすべてのT の代りに　T' を用いたもの］ (9.23)

③$BSC'(\varphi,j) =$
［$BSC(\varphi,j)$ を構成する際，登場しているすべてのT の代りに　T' を用いたもの］ (9.24)

□

次の定理９．２は，モデル構成作用素 T をT' へと変換することにより，連想形認識システム$RECOGNITRON$ が $RECOGNITRON'$ へ再帰的に構成され得ることを示している．

[定理９．２]（ユニタリ座標変換による連想形認識システムRECOGNITRONの再帰構成共変定理）

対$[\Phi,T]$，類似度関数 SM'，大分類関数BSC' は各々，axiom 1〜3を満たす．

（証明）（1#）対$[\Phi,T]$ はaxiom 1を満たすから，対$[\Phi,T']$はaxiom 1を満たすことは，上述の定理９．１，並びに，文献[29]の６．３節，定理６．３を適用して証明される．

（2#） SM がaxiom 2を満たすことから， SM' がaxiom 2を満たす．

（3#） BSC がaxiom 3を満たすことから， BSC' がaxiom 3を満たす．　□

９．４　ユニタリ共変変換して得られる連想形認識システム$RECOGNITRON'$により，視点の移動を表現できる

ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ が関数空間 $L_2(M;dx_1dx_2)$ であるように選ぶ．：2次元平面 R^2 上に2次直交座標系 $x=<x_1,x_2>$ を導入し， R^2 の可測集合Mを

$$M=\{x=<x_1,x_2> \mid -a_1<x_1<+a_1, -a_2<x_2<+a_2\}, a_1,a_2>0$$

と選び，$\bar{\eta}$ をη の複素共役として，内積 (φ,η) を

$$(\varphi,\eta)=\int_{-a_1}^{+a_1}dx_1\int_{-a_2}^{+a_2}dx_1\cdot\varphi(x_1,x_2)\cdot\bar{\eta}(x_1,x_2) \tag{9.25}$$

と設定する．　□

2次元直交座標系 $x=<x_1,x_2>$ での座標点 $c=<c_1,c_2>$ を視点に持っている連想形認識システ

ム $RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))$ を変換して，視点が $c-t=<c_1-t_1, c_2-t_2>$ である認識システム

$$RECOGNITRON'(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) = U_{t_1,t_2}{}^{-1} \cdot RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) \cdot U_{t_1,t_2} \tag{9.26}$$

を得るには，ユニタリ作用素 U として，抽出される特徴量の保存式（9.18）などからわかるように，

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H} = L_2(M; dx_1 dx_2), (U_{t_1,t_2}\varphi) = \varphi(x_1 - t_1, x_2 - t_2) \tag{9.27}$$

と定義される U_{t_1,t_2} を採用すればよい．

$$\forall \varphi, \forall \eta \in L_2(R^2; dx_1 dx_2), (U_{t_1,t_2}\varphi, \eta) = (\varphi, U_{t_1,t_2}{}^{*}\eta) \tag{9.28}$$

を満たすという意味で，ユニタリ作用素 U_{t_1,t_2} の共役作用素 $U^{*}_{t_1,t_2}$ は U_{t_1,t_2} の逆作用素 $U_{t_1,t_2}{}^{-1}$ であり，

$$U_{t_1,t_2}{}^{-1} = U_{-t_1,-t_2} \tag{9.29}$$

が成り立つ．

よって，正規直交系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ の，各関数 ϕ_k を $U_{t_1,t_2}{}^{-1}$ で変換して得られる式（9.13）の関数 ϕ'_k は，

$$\phi'_k(x_1, x_2) = (U^{-1}{}_{t_1,t_2}\phi_k)(x_1, x_2) = \phi_k(x_1 + t_1, x_2 + t_2) \tag{9.30}$$

と表わされる．

正規直交系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ としては，例えば，

$$\phi_k(x_1, x_2) = \phi_{k_1,1}(x_1) \cdot \phi_{k_2,2}(x_2), k = <k_1, k_2> (k_1, k_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{9.31}$$

を選ぶことが出来る．ここに，$j = 1, 2$ として，

$$\phi_{0,j}(x_j) = \frac{1}{\sqrt{2a_j}} \tag{9.32}$$

$$\phi_{k_j,j}(x_j) = \frac{1}{\sqrt{a_j}} \cdot \cos\left(\frac{\pi k_j}{a_j} \cdot x_j\right), k_j = 1, 2, \cdots \tag{9.33}$$

$$\phi_{-k_j,j}(x_j) = \frac{1}{\sqrt{a_j}} \cdot \sin\left(\frac{\pi k_j}{a_j} \cdot x_j\right), k_j = 1, 2, \cdots \tag{9.34}$$

である．Lを

$$L = \{k = <k_1, k_2> | k_1, k_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\} \tag{9.35}$$

と選べば，正規直交系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ の完全性を示すフーリェ式展開

$$\forall \varphi \in L_2(M; dx_1 dx_2),\ \varphi(x_1, x_2) = \sum_{k\in L} (\varphi, \phi_k) \cdot \phi_k(x_1, x_2) \tag{9.36}$$

が成り立つ（2式（9.6），（9.7）を参照）．

９．５　角周波数領域で活動する認識システム $RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))\cdot U$

９．５．１　偶関数性実数値パターン φ の2次元フーリェ変換

ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ が $L_2(R^2;dx_1dx_2)$ であるとき，2次元直交座標系 $x=<x_1,x_2>$ を持つ2次元平面 R^2 で活動する連想形認識システム $RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))$ を変換して，2次元角周波数領域 $\lambda=<\lambda_1,\lambda_2>$ で活動する，式（9.21）の連想形認識システム $RECOGNITRON'$ を得るには，ユニタリ作用素 U として，抽出される特徴量の保存式（9.18）などからわかるように，

$$\forall\varphi\in \mathrm{H}=L_2(R^2;dx_1dx_2),(U\varphi)(\lambda_1,\lambda_2)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dy_1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp[-\sqrt{-1}\cdot\lambda_1\cdot y_1]\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}dy_2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp[-\sqrt{-1}\cdot\lambda_2\cdot y_2]\cdot\varphi(y_1,y_2) \tag{9.37}$$

と定義されるフーリェ変換 U を採用すればよい．ユニタリ作用素 U の共役作用素 U^* は U の逆作用素 U^{-1} であり， U^{-1} は

$$\forall\eta\in\mathfrak{H}=L_2(R^2;dx_1dx_2),(U\varphi)(\lambda_1,\lambda_2)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda_1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp[+\sqrt{-1}\cdot x_1\cdot\lambda_1]\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda_2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp[+\sqrt{-1}\cdot x_2\cdot\lambda_2]\cdot\eta(\lambda_1,\lambda_2) \tag{9.38}$$

である．

φ が実数値関数であっても，そのフーリェ変換結果 $U\varphi$ は一般に複素数値関数になってしまうので，処理が簡単でなくなる．フーリェ変換結果 $U\varphi$ が実数値になる状況を考えるため，次の２命題９．１，９．２を提出する．

[命題９．１]

（ｉ） $\forall x(-a<x<+a),f(-x)=f(x)$ （偶関数性） (9.39)

であれば，

$$\int_{-a}^{+a}dxf(x)=2\cdot\int_{0}^{+a}dxf(x). \tag{9.40}$$

（ii） $\forall x(-a<x<+a),f(-x)=-f(x)$ （奇関数性） (9.41)

であれば，

$$\int_{-a}^{+a}dxf(x)=0. \tag{9.42}$$

（証明）簡単に証明される．　□

[命題９．２]

半無限区間で定義された関数

$g(x),0\le x$ (9.43)

について，無限区間で定義された関数 f を

$$f(x) \equiv g(\mathrm{sgn}(x) \cdot x), -\infty < x < +\infty \tag{9.44}$$

ここに，$sgn(x)$

$$\begin{cases} -1 \cdots x < 0 \text{ のとき} \\ 0 \cdots x = 0 \text{ のとき} \\ +1 \cdots x > 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{9.45}$$

と定義すれば，偶関数性

$$\forall x(-\infty < x < +\infty), f(-x) = f(x) \tag{9.46}$$

が成立する．

（証明）簡単に証明される．　□

半無限区間で定義されたパターン

$$\varphi'(x_1, x_2), 0 \le x_1, x_2 \tag{9.47}$$

について，無限区間で定義されたパターン φ を

$$\varphi(x_1, x_2) \equiv \varphi'(\mathrm{sgn}(x_1) \cdot x_1, \mathrm{sgn}(x_2) \cdot x_2), -\infty < x_1, x_2 < +\infty \tag{9.48}$$

と定義すれば，命題９．２を適用して，偶関数性

$$\forall x_1, \forall x_2 (-\infty < x_1, x_2 < +\infty), \varphi(-x_1, -x_2) = \varphi(x_1, x_2) \tag{9.49}$$

が成立することがわかる．このような偶関数性を満たす実数値パターン φ については，そのフーリエ変換結果 $U\varphi$，並びに，そのフーリエ逆変換結果 $U^{-1}\varphi$ は，命題９．１を適用して，

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H} = L_2(R^2; dx_1 dx_2), (U\varphi)(\lambda_1, \lambda_2)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} dy_1 \cdot \cos[\lambda_1 \cdot y_1] \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} . \int_0^{+\infty} dy_2 \cdot \cos[\cdot \lambda_2 \cdot y_2] \cdot \varphi(y_1, y_2) \tag{9.50}$$

$$\forall \eta \in \mathfrak{H} = L_2(R^2; dx_1 dx_2), (U^{-1}\eta)(x_1, x_2)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} d\lambda_1 \cdot \cos[x_1 \cdot \lambda_1] \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} . \int_0^{+\infty} d\lambda_2 \cdot \cos[x_2 \cdot \lambda_2] \cdot \eta(\lambda_1, \lambda_2) \tag{9.51}$$

と表され，共に実数値関数となる．このとき，$\eta(\lambda_1, \lambda_2) = (U\varphi)(\lambda_1, \lambda_2)$ は2次元角周波数領域 $\lambda = < \lambda_1, \lambda_2 >$ で，偶関数性実数値関数であり，

$$\text{偶関数性実数値関数 } \varphi \text{ に対しては，} U^{-1}\varphi = U\varphi \tag{9.52}$$

であることに注意しておく．

９．５．２　1次元矩形関数系による，$L_2(R; dx)$ での正規直交系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ の構成

先ず，ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$が，内積(φ,η)が式（3.28）の如く与えられる関数空間$L_2(R;dx)$であるときを考えよう．単調増加性

$$0<a_1<a_2<\cdots<a_k<\cdots<a_n \tag{9.53}$$

を満たす数列$\{a_i\}_{i=1,2,\cdots}$を導入する．

$$\eta'_k(x)=$$

$$\begin{cases} 1\cdots 0\le x<a_k \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{2}\cdots x=a_k \text{ のとき} \\ 0\cdots x>a_k \text{ のとき} \end{cases} \tag{9.54}$$

と定義される関数$\eta'_k(x)(0\le x)$から，命題９．２を適用して，偶関数

$$\eta_k(x)\equiv\eta'_k(\mathrm{sgn}(x)\cdot x),-\infty<x<+\infty \tag{9.55}$$

を作る．$\phi'_1,\phi'_k(k=2,3,\cdots)$を

$$\phi'_1(x)\equiv\eta_1(x) \tag{9.56}$$

$$\phi'_k(x)\equiv\eta_k(x)-\eta_{k-1}(x),k=2,3,\cdots \tag{9.57}$$

と定義すると，

$$\|\phi'_1\|=\sqrt{2\cdot a_1} \tag{9.58}$$

$$\|\phi'_k\|=\sqrt{2\cdot(a_k-a_{k-1})},k=2,3,\cdots \tag{9.59}$$

$$(\phi'_k,\phi'_\ell)=0 \quad \text{if} \quad k\ne\ell \text{ (直交性)} \tag{9.60}$$

が成り立つ，よって，

$$\phi_k(x)\equiv\frac{\phi'_k(x)}{\|\phi'_k\|},k=1,2,\cdots \tag{9.61}$$

と定義すれば，$L_2(R;dx)$での正規直交系$\{\phi_k\}_{k\in L}$が得られる．

偶関数性実数値関数φについて，

$$(U\varphi)(\lambda)\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\cdot\exp[-\sqrt{-1}\cdot\lambda y]\cdot\varphi(y)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_{0}^{+\infty}dy\cdot\cos(\lambda y)\cdot\varphi(y) \tag{9.62}$$

と定義される1次元フーリエ変換Uを考えると，$\eta(\lambda)=(U\varphi)(\lambda)$は偶関数性実数値関数になり，その

逆変換 U^{-1} は

$$(U^{-1}\eta)(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \cdot \exp[+\sqrt{-1} \cdot x\lambda] \cdot \eta(\lambda)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_{0}^{+\infty} d\lambda \cdot \cos(y\lambda) \cdot \eta(\lambda) \tag{9.63}$$

である．

偶関数性実数値関数 φ に対しては，$U\varphi = U^{-1}\varphi$

であることに注意しておく．

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \eta_k(y) \cdot \cos(\lambda y)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_{0}^{+\infty} dy \cdot \eta_k(y) \cdot \cos(\lambda y) \quad \because \quad \text{命題９．１}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin(a_k \cdot \lambda)}{\lambda} \tag{9.64}$$

が成り立つ．よって，

$$(U\eta_1)(\lambda) = \int_{-\infty} dy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \eta_1(y) \cdot \cos(\lambda y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_{0}^{+\infty} dy \cdot \eta_1(y) \cdot \cos(\lambda y) \quad \because \quad \text{命題９．１}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin(a_1 \cdot \lambda)}{\lambda} \tag{9.65}$$

$$(U(\eta_k - \eta_{k-1}))(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (\eta_k - \eta_{k-1})(y) \cdot \cos(\lambda y)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_{0}^{+\infty} dy \cdot (\eta_k - \eta_{k-1})(y) \cdot \cos(\lambda y) \quad \because \quad \text{命題９．１}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \{\frac{\sin(a_k \cdot \lambda)}{\lambda} - \frac{\sin(a_{k-1} \cdot \lambda)}{\lambda}\}, \; k = 2,3,\cdots,n \tag{9.66}$$

９．５．３　2次元矩形関数系による，$L_2(R^2; dx_1dx_2)$ での正規直交系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ の構成

式（3.32）で与えられる内積 (φ,η) を採用したヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(R^2; dx_1dx_2)$ では，１次独立な系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ の各成分 ϕ_k として，

$$\phi_k(x) \equiv \phi_k(x_1, x_2) = \phi_{k_1,1}(x_1) \cdot \phi_{k_2,2}(x_2), x = < x_1, x_2 >, k = < k_1, k_2 > (k_1, k_2 = 1,2,\cdots,n_j) \tag{9.67}$$

を選ぶことが出来る．ここに，単調増加性

$$0 < a_{1,j} < a_{2,j} < \cdots < a_{k_j,j} < \cdots < a_{n_j,j}, j = 1,2 \tag{9.68}$$

を満たす数列$\{a_{k_j,j}\}_{j=1,2,\cdots,n_j}$を導入して,

$$\eta'_{k_j,j}(x_j)=$$

$$\begin{cases} 1\cdots 0\le x_j<a_{k_j,j} \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{2}\cdots x_j=a_{k_j,j} \text{ のとき} \\ 0\cdots x_j>a_{k_j,j} \text{ のとき} \end{cases} \tag{9.69}$$

と定義される各関数

$$\eta'_{k_j,j}(x_j)(0\le x_j)\ (k_j=1,2,3,\cdots n_j,\ j=1,2) \tag{9.70}$$

を使い，各関数

$$\phi_{k_j,j}(x_j)(k_j=1,2,3,\cdots,n_j,\ j=1,2) \tag{9.71}$$

は,

$$\phi_{1,j}(x_j)\equiv\frac{\eta'_{1,j}(\mathrm{sgn}(x_j)\cdot x_j)}{\sqrt{2\cdot a_{1,j}}},\ j=1,2 \tag{9.72}$$

$$\phi_{k_j,j}(x_j)\equiv\frac{\eta'_{k_j,j}(\mathrm{sgn}(x_j)\cdot x_j)-\eta'_{k_j-1,j}(\mathrm{sgn}(x_j)\cdot x_j)}{\sqrt{2\cdot(a_{k_j,j}-a_{k_j-1,j})}},k_j=2,3,\cdots,n_j,\ j=1,2 \tag{9.73}$$

と定義して得られる.

関数空間$\mathfrak{H}=L_2(R^2;dx_1dx_2)$では，この１次独立な系は正規直交系$\{\phi_k\}_{k\in L}$である.

2式（9.50），（9.51）の2次元フーリェ変換U，2次元フーリェ変換U^{-1}を使って，$U\phi_k,U^{-1}\phi_k$，を求めると,

$$(U\phi_k)(\lambda_1,\lambda_2)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}dy_1\cdot\cos[\lambda_1\cdot y_1]\cdot\phi_{k_1,1}(y_1)\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\int_0^{+\infty}dy_2\cdot\cos[\lambda_2\cdot y_2]\cdot\phi_{k_2,2}(y_2) \tag{9.74}$$

$$(U^{-1}\phi_k)(x_1,x_2)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}d\lambda_1\cdot\cos[x_1\cdot\lambda_1]\cdot\phi_{k_1,1}(\lambda_1)\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\int_0^{+\infty}d\lambda_2\cdot\cos[x_2\cdot\lambda_2]\cdot\phi_{k_2,2}(\lambda_2) \tag{9.75}$$

である．ここに,

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty} dy_j\cdot\cos[\lambda_j\cdot y_j]\cdot\phi_{1,j}(y_j)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\cdot a_{1,j}}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin(a_{1,j}\cdot\lambda_j)}{\lambda_j} \tag{9.76}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty} dy_j\cdot\cos[\lambda_j\cdot y_j]\cdot\phi_{k_j,j}(y_j)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\cdot(a_{k_j,j}-a_{k_j-1,j})}}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\{\frac{\sin(a_{k_j,j}\cdot\lambda_j)}{\lambda_j}-\frac{\sin(a_{k_j-1,j}\cdot\lambda_j)}{\lambda_j}\},\ k_j=2,3,\cdots,n_j \tag{9.77}$$

第１０章　T を変えた場合（ユニタリ不変な認識システム $RECOGNITRON'$）

本章では，第３章に続き，T を変えた場合の認識システムの合成法が研究される．
本章では，正規直交基底系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ を使ったユニタリ不変な連想形認識システム

$$RECOGNITRON'(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) = RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))\cdot U \tag{10.1}$$

を構成し，その複数個の例を考察する．

１０．１　必ずしも完全でない正規直交系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ を使ったパターン φ の1次展開

前章の９．１節はそのまま，成立する．

１０．２　モデル構成作用素 T の座標変換

式（7.2）の特徴抽出写像uを導入する．ここに，３．１．１項の４条件①～④を満たす式（3.2）の関数 f を導入して得られる実数量

$$u(\varphi,\ell)\equiv f\left(\sqrt{\frac{|(\varphi,\phi_\ell)|^2}{\sup_{k\in L}|(\varphi,\phi_k)|^2}}\right)=f\left(\frac{|(\varphi,\phi_\ell)|}{\sup_{k\in L}|(\varphi,\phi_k)|}\right) \tag{10.2}$$

はパターン $\varphi\in\Phi$ から抽出された第 $k\in L$ 番目の特徴量である．但し，実定数 $|(\varphi,\phi_\ell)|$ の列$\{|(\varphi,\phi_\ell)|\}_{\ell\in L}$ については，０−計算規則

$$\frac{|(\varphi,\phi_\ell)|}{\sup_{k\in L}|(\varphi,\phi_k)|}=\frac{|(\varphi,\phi_\ell)|^2}{\sup_{k\in L}|(\varphi,\phi_k)|^2}=0 \qquad if \quad \sup_{k\in L}|(\varphi,\phi_k)|=0 \tag{10.3}$$

を約束する．

パターンモデル $T\varphi$ を生成するモデル構成作用素 T を，前章，式（7.6）の如く定義する．線形性，ノルム保存性を満たすという意味で，ユニタリ作用素 U を導入する．U，並びに，その逆作用

素 U^{-1} は $\mathfrak{H}$ では座標変換に相当する．ユニタリ作用素 U は，

任意の $k \in L$ について，$|a_k|=1$ なる複素定数 a_k が存在して，$U\phi_k = a_k \cdot \phi_k \in \mathfrak{H}$ (10.4)

を満たすものとしよう．つまり，各 $\phi_k \in \mathfrak{H}$ は U の固有ベクトルとしよう．

次の定理１０．１は，

$\forall \varphi \in \Phi, T(U\varphi) = T\varphi$ （座標変換の前後のユニタリ不変性） (10.5)

言い換えれば，

パターン φ が $U\varphi$ という具合に座標変換 U を受けた時，座標変換後のパターン $U\varphi$ の，T によるモデル $T(U\varphi)$ は，座標変換前のパターン φ の，パターン $T\varphi$ モデルに等しい

（基底 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ を使ったユニタリ不変性） (10.6)

を意味し，座標変換を受けても等しくなるような２つのモデル構成作用素 T , T' の存在を指摘している．

[定理１０．１]（モデル構成作用素 T のユニタリ不変定理）

正規直交系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ と式（10.4）を満たすユニタリ作用素としての座標変換 U と導入する．

$\forall \varphi \in \Phi, \forall \ell \in L, u(U\varphi, \ell) = u(\varphi, \ell)$

（座標変換 U に伴う抽出された特徴量 $u(\varphi, \ell)$ の不変性） (10.7)

が成り立ち，

$T = TU$ (10.8)

が成り立つ．

（証明）　文献[29]の７．１節，定理７．１で証明されている．□

上の定理１０．１の前半は，

パターン φ が $U\varphi$ という具合に座標変換 U を受けた時，座標変換後のパターン $U\varphi$ から，u で特徴することは，座標変換前のパターン φ から，u で特徴することに等しい (10.9)

を指摘している．

１０．３　連想形認識システム*RECOGNITRON* のユニタリ共変変換

上述の，式（10.4）を満たすユニタリ作用素 U を使って，連想形認識システム *RECOGNITRON* をユニタリ共変変換して得られる連想形認識システムを式（10.1）の如く，*RECOGNITRON′* と表す．

2式（1.1），（1.2）の認識システム *RECOGNITRON* , *RECOGNITRON′* を導入する．モデル構成作用素 T' ，類似度関数 SM' ，大分類関数 BSC' は各々，axiom 1～3を満たすモデル構成作用素 T ，類似度関数 SM ，大分類関数 BSC から次の定義で得られる：

①$T' = TU$ (10.10)

②$SM'(\varphi, \omega_j) =$

[$SM(\varphi, \omega_j)$ を構成する際，登場しているすべての T の代りに T' を用いたもの] (10.11)

③$BSC'(\varphi, j) =$

[$BSC(\varphi, j)$ を構成する際，登場しているすべての T の代りに T' を用いたもの] (10.12)

□

次の定理１０．２は，モデル構成作用素TをT'へと変換することにより，連想形認識システム$RECOGNITRON$が$RECOGNITRON'$へ再帰的に構成され得ることを示している．

[定理１０．２]（ユニタリ座標変換による連想形認識システムRECOGNITRONの再帰構成不変定理）

対$[\Phi,T']$，類似度関数SM'，大分類関数BSC'は各々，axiom 1～3を満たす．

実は，$RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))\cdot U$は$RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))$と同一物であり，

$$RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))\cdot U = RECOGNITRON(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) \tag{10.13}$$

が成り立つ．

（証明）（1#）対$[\Phi,T]$はaxiom 1を満たすから，対$[\Phi,T']$はaxiom 1を満たすことは，上述の定理１０．１，並びに，文献[29]の７．２節，定理７．３を適用して証明される．

（2#）SMがaxiom 2を満たすことから，SM'がaxiom 2を満たす．

（3#）BSCがaxiom 3を満たすことから，BSC'がaxiom 3を満たす．　□

１０．４　定理１０．１での，正規直交系$\{\phi_k\}_{k\in L}$と式（10.4）を満たすユニタリ作用素としての座標変換Uの例

１０．４．１　Hauseholder変換

任意の整数$\ell\in L$についてのHouseholder変換U_ℓは，

$$U_\ell\varphi=\sum_{k\in L}(\varphi,\phi_{\mathrm{k}})\,\phi_{\mathrm{k}}-2\cdot(\varphi,\phi_\ell)\cdot\phi_\ell \tag{10.14}$$

と表わされ，結局，

$$U_\ell\varphi=-(\varphi,\phi_\ell)\cdot\phi_\ell+\sum_{k\in L-\{\ell\}}(\varphi,\phi_{\mathrm{k}})\cdot\phi_{\mathrm{k}} \tag{10.15}$$

が求めるものである．式（10.4）を満たすことが知れる．式（10.4）を満たすユニタリ座標変換Uとして，U_ℓを採用できる．

１０．４．２　平行移動

$$\varphi(x+a)=\varphi(x)\quad \text{for}\quad \text{every}\quad x\in R\ (\text{実数全体の集合}) \tag{10.16}$$

が，或る正定数αについて成り立つとしよう．ヒルベルト空間$\mathfrak{H}=L_2(\{x\,|\,-a<x<+a\},dx)$での，内積$(\varphi,\eta)$は，

$$(\varphi,\eta)=\int_{-a}^{+a}dx\varphi(x)\cdot\bar{\eta}(x)\text{，ここに，}\bar{\eta}\text{は}\eta\text{の複素共役} \tag{10.17}$$

である．このとき，第$k(=0,\pm1,\pm2,\cdots)$番目の関数

$$\phi_k(x)\equiv\frac{1}{\sqrt{2a}}\cdot\exp(+\sqrt{-1}\lambda_k x)$$

ここに，

$$\lambda_k = k \cdot \frac{\pi}{a} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{10.18}$$

を導入する．この複素指数関数系 $\{\phi_k\}_{k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots}$ は，次の2性質（1&），（2&）を満たすという意味で，完全正規直交系である:

（1&）（正規直交性）(ϕ_k, ϕ_ℓ)

$$\begin{cases} 1 \cdots k = \ell \text{のとき} \\ 0 \cdots k \neq \ell \text{のとき} \end{cases} \tag{10.19}$$

(2&) (完全性) $\forall k (= 0, \pm 1, \pm 2, \cdots), (\varphi, \phi_k) = 0 \Rightarrow \|\varphi\| = 0$. (10.20)

□

上述のように，完全正規直交系としての複素指数関数系 $\{\phi_k\}_{k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots}$ を使って，φ は，フーリエ級数

$$\varphi(x) = \sum^{+\infty} (\varphi, \phi_k) \cdot \phi_k(x) \quad \text{for} \quad |x| < a \tag{10.21}$$

と，無限和の形に展開できる．

式（10.18）の各関数 $\phi_k(x)(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ については,

$$(U_t \phi_k)(x) = \phi_k(x - t) \text{, } t \text{は任意の実数}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{10.22}$$

$$\therefore \quad (U_t \varphi)(x) = \varphi(x - t) \qquad \because \quad \text{式}(10.21) \tag{10.23}$$

とU_tを定義すれば,

$$\phi_k(x - t) = \exp(-i \lambda_k t) \cdot \phi_k(x), i \equiv \sqrt{-1} \tag{10.24}$$

が成立し，式（10.4）を満たすことが知れる．式（10.4）を満たすユニタリ座標変換 U として，平行移動座標変換 U_t を採用できる．

１０．４．３　縮小・拡大のユニタリ線形作用素 $U_t(-\infty < t < +\infty)$

2次元平面 R^2 上に，直交座標系 $x =< x_1, x_2 >$ をとり，極座標系 $< r, \theta >$ もあわせて考えよう．

ここに,

$$x_1 = r \cdot \cos\theta, x_2 = r \cdot \sin\theta \tag{10.25}$$

$$e^{-a} \leq r \leq e^{+a} (a > 0), -\pi \leq \theta < +\pi \tag{10.26}$$

$$r = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2}, \theta = \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} \tag{10.27}$$

としよう． $k =< k_1, k_2 > (k_1, k_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ として，第k番目の関数

$$\phi_k(x_1,x_2) \equiv \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot \exp[+\sqrt{-1} \cdot \lambda(k_1) \cdot \log_e r] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp[+\sqrt{-1} \cdot k_2 \cdot \theta] \tag{10.28}$$

ここに，$\lambda(k_1) \equiv k_1 \cdot \dfrac{\pi}{a}$　(10.29)

を導入する．$\overline{\eta}$ を η の複素共役として，内積

$$\left(\varphi,\eta\right) = \int_{-a}^{+a} d\log_e r \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \cdot \varphi(r\cdot\cos\theta, r\cdot\sin\theta) \cdot \overline{\eta}(r\cdot\cos\theta, r\cdot\sin\theta) \tag{10.30}$$

を導入する．ここに，座標系の変換に伴う公式

$$dx_1 dx_2 = r dr d\theta \tag{10.31}$$

に注意しておく．

直交性　$\left(\phi_k,\phi_\ell\right) = 0 \quad \text{if} \quad k \neq \ell, = 1 \quad \text{if} \quad k = \ell$　(10.32)

完全性（を満たすフーリエ式展開）　$\varphi(x_1,x_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{k_2=+\infty} \left(\varphi, \phi_{<k_1,k_2>}\right) \cdot \phi_{<k_1,k_2>}(x_1,x_2)$　(10.33)

が成り立つ．縮小・拡大の線形作用素 $U_t(-\infty < t < +\infty)$ を

$$(U_t\varphi)(x_1,x_2) = \varphi(e^{-t}\cdot x_1, e^{-t}\cdot x_2) \tag{10.34}$$

と定義すると，各 ϕ_k が $U_t(-\infty < t < +\infty)$ の固有関数であることを示す固有値方程式

$$(U_t\phi_k)(x_1,x_2) = \exp[-\sqrt{-1}\cdot t \cdot \lambda(k_1)] \cdot \phi_k(x_1,x_2) \tag{10.35}$$

が成り立ち，$U_t(-\infty < t < +\infty)$ はユニタリ作用素である．ここに，

$$d\log_e r = \frac{dr}{r} \tag{10.36}$$

であり，各が自己共役作用素 $\dfrac{1}{\sqrt{-1}} \cdot r \dfrac{\partial}{\partial r}$ の固有関数であることを示す固有値方程式

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot r \frac{\partial}{\partial r} \phi_k(x_1,x_2) = \lambda(k_1) \cdot \phi_k(x_1,x_2) \tag{10.37}$$

が成り立つ．

１０．４．４　回転のユニタリ線形作用素 $U_t(-\infty < t < +\infty)$

前項の設定で考えよう．回転の線形作用素 $U_t(-\infty < t < +\infty)$ を

$$(U_t\varphi)(r\cdot\cos\theta, r\cdot\sin\theta) = \varphi(r\cdot\cos(\theta - t), r\cdot\cos(\theta - t)) \tag{10.38}$$

と定義すると，各 ϕ_k が $U_t(-\infty < t < +\infty)$ の固有関数であることを示す固有値方程式

$$(U_t\phi_k)(x_1,x_2)=\exp[-\sqrt{-1}\cdot t\cdot k_2]\cdot\phi_k(x_1,x_2) \tag{10.39}$$

が成り立ち， $U_t(-\infty<t<+\infty)$ はユニタリ作用素である．ここに，各 ϕ_k が自己共役作用素

$\dfrac{1}{\sqrt{-1}}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ の固有関数であることを示す固有値方程式

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\phi_k(x_1,x_2)=k_2\cdot\phi_k(x_1,x_2) \tag{10.40}$$

が成り立つ．

第１１章　むすび

これまでの，S.Suzuki以外のパターン認識研究と異なり，式（1.1）の認識システム *RECOGNITRON* には処理できるパターン φ の基本集合が Φ_B というように指定されていることである．このような指定がある認識システムの構成論を論じたのは．SS理論[3],[4]しかない．このような指定をすれば，大抵のパターン認識の理論は破綻してしまうと，S.Suzukiは思っている．事実，破綻しないパターン認識の理論を他の研究者の研究成果にS.Suzukiはこれまで見たことがない．

本研究により，認識システム *RECOGNITRON* の，多様な構成法が示された．

留意すべきは，式（A1.1）の T を変えることにより，式（A1.4）の入力パターン集合 φ，式（A2.5）の類似度関数 SM ，式（A3.1）の大分類関数 BSC ，式（A4.5）のカテゴリ選択関数 CSF をも変ってくることである．

本論文では，先ず，式（1.1）の認識システム *RECOGNITRON* を分解し，複数個のカテゴリが1つの大カテゴリとして扱える式（1.2）の認識システム $RECOGNITRON'$ が，式（2.4）の如く構成された．その結果，音声認識では，個人差などに対応でき，文字認識では，個人差のみならず，同じ意味を表す大文字，小文字を１つの大カテゴリとして採用できる認識システムが得られることになった．画像認識では，見る方向により異なった形状になる状況に対応できる認識システムが得られることになったことにも注意しておこう．

その次に，本論文では，有限個の認識システム *RECOGNITRON* からそのいずれの認識システムのより認識能力の大きな $RECOGNITRON'$ を構築する方法が研究された．この構築方法を確立するため，本論文では，式（1.1）の決定性 *RECOGNITRON* の各構成要素 T , SM , BSC を1つずつ変化させたが，勿論，同時に変化させることも可能である．同時変化させなかったのは，得られる認識システムの能力を元の認識システムRECOGNITRONの能力と比較するのが容易になるからであり，同時変化させたときの能力を検討することが将来の研究として残されている．

この構築方法によると，周波数領域で動作する認識システムは，ユニタリ作用素としてフーリェ変換を採用すると，時間領域で動作する認識システム *RECOGNITRON* のユニタリ共変なシステム $U^{-1}\cdot RECOGNITRON\cdot U$ として得られることが判明した．また，パターンの位置ずれなどに対応できる認識システムは，この位置ずれを表現できるユニタリ座標変換を考えると，作用素元の認識システム *RECOGNITRON* のユニタリ不変なシステム $RECOGNITRON\cdot U$ として得られることが判明し

た．

各構成要素 T ,SM ,BSC 内の助変数を適応的に学習（batch modeではなく，incremental modeでの学習[42]）で変化させれば，RECOGNITRONの能力を向上させることが可能であるが，このような消極的な構造変化ではなく，認識システムを設計しようとする人間が各構成要素 T ,SM ,BSC そのものを経験的・発見的（heuristic）に変えていく積極的な構造変化を本論文では研究したことに注意しておこう．

にも拘らず，特に，３．１．１項の4条件①～④を満たす式（3.2）の関数 f，或いは，４．１．１項の2条件（1#）,（2#）を満たす式（4.3 ）の関数 f ，或いは，５．１．１項の2条件（1$）,（2$）を満たす式（5.2）の関数 f をincremental mode（on-line mode）での学習の働きで決定する方法を研究することは，本研究内容を真に発展させることにつながるだろう．

文　　献

［1］鈴木昇一：認識工学,柏書房,Feb.1975

［2］鈴木昇一：ニューラルネットの新数理,近代文芸社,Sept.1996

［3］鈴木昇一：パターン認識問題の数理的一般解決 ,近代文芸社,June 1997

［4］鈴木昇一：認識知能情報論の新展開,近代文芸社,Aug.1998

［5］鈴木昇一：測度的不変量検出形認識系の構成理論，電子通信学会論文誌（D），vol.55-D，no.8，pp.513-538,Aug.1972

［6］鈴木昇一：手書き漢字の側抑制効果的分解とその計算機シミュレーション,情報処理学会誌,vol.15,no.12,pp.927-934,Dec.1974

［7］鈴木昇一：画像情報量とその手書き漢字への応用,画像電子学会誌,vol.4,no.1,pp.4-12,Apr.1975

［8］鈴木昇一：パターン認識における構造化モデルの4性質とその応用，電子通信学会論文誌（D），vol.J60-D，no.9，pp.710-717,Sept.1977

［9］鈴木昇一：抽出された特徴による手書き漢字構造の再生,情報処理学会誌,vol.18,no.11,pp.1115-1122,Nov.1977

［10］鈴木昇一：パターンのエントロピーモデル,電子情報通信学会論文誌（D-Ⅱ）,vol.J77-D-Ⅱ,no.10,pp.2220-2238,Nov.1994

［11］鈴木昇一,斎藤静昭,奥野治雄,太田芳雄：画像の復元とその計算機シュミレーション，工学院大学研究報告,no.39,pp.198-206,Jan.1976

［12］鈴木昇一：回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シミュレーション,情報研究（文教大学・情報学部）,no.4,pp.36-56,Dec.1983

［13］鈴木昇一：連想形記憶器MEMOTRONと日本語単独母音系列の再生に関する計算機シミュレーション,情報研究（文教大学・情報学部）,no.7,pp.14-29, Dec.1986

［14］鈴木昇一：多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション,情報研究（文教大学・情報学部）,no.10,pp.35-49,Dec.1989

［15］鈴木昇一：帰属係数法に基づく類似度,帰属関係・あいまい度,認識情報量の計算機シミュレーション,情報研究（文教大学・情報学部）,no.11,pp.51-68,Dec.1990

［16］鈴木昇一:構造受精法と日本語単独母音の認識,情報研究（文教大学・情報学部）no.18,pp.17-51,

Dec.1998
[17] 鈴木昇一,前田英明:有声破裂音の代表パターンの学習的決定と,その計算機シミュレーション,情報研究（文教大学･情報学部）,no.20,pp.77−95, Dec.1998
[18] 鈴木昇一:平均顔を用いた顔画像の２値化,並びに,目･鼻･口の抽出と,その計算機シミュレーション,情報研究（文教大学･情報学部）,no.22,pp.65−150,Dec.1999
[19] 鈴木昇一:界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の,顔画像処理に関する計算機シミュレーション,情報研究（文教大学･情報学部）,no.23,pp.109−182,Mar.2000
[20] 鈴木昇一:風景画から知識を抽出し,解釈するシステムの,ファジィ推論ニューラルネットによる構成,情報研究（文教大学･情報学部）,no.23,pp.183-265,Mar.2000
[21] 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹:風景画の理解に関するJAVA言語によるRECOGNITRONの計算機シミュレーション,情報研究（文教大学･情報学部）,no.27,pp.73−109,Mar.2002
[22] 鈴木昇一:JAVA言語で実装化された画像理解システムIUSの動作概要と，その稼動方法,情報研究（文教大学･情報学部）,no.28,pp.143−165,Dec.2002
[23] 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹:JAVA言語による計算機シミュレーションで生じた風景画像の理解場面での多段階連想形認識過程の異常現象,情報研究（文教大学･情報学部）,no.29,pp.123−166,July 2003
[24] 鈴木昇一：可分な一般抽象ヒルベルト空間でのK-L直交系の理論，情報研究（文教大学･情報学部）,no.29,pp.41-73,July 2003
[25] 鈴木昇一:入出力例の系列を用いた“対連想問題・その擬逆問題”の一般解,情報研究（文教大学･情報学部）,no.30,pp.81-137,Jan.2004
[26] 鈴木昇一:１パラメータLie座標変換群とそのパターン正規化への応用,情報研究（文教大学･情報学部）,no.32,pp.21−74,Jan.2005
[27] 鈴木昇一:曖昧さに関する半順序∝を単調に保つモデル構成作用素,情報研究（文教大学･情報学部）,no.32,pp.75−126,Jan.2005
[28] 鈴木昇一:パターンから抽出された特徴量のfuzzy単調変換,情報研究（文教大学･情報学部）,no.32,pp.127−168,Jan.2005
[29] 鈴木昇一:パターンモデル（パターンの標準形）の一般形,情報研究（文教大学･情報学部）,no.32,pp.169−218,Jan.2005
[30] 鈴木昇一:類似度関数の密度を用いた，画素毎のパターン認識処理（パターン理解処理）の方法,情報研究（文教大学･情報学部）,no.32,pp.219−285,Jan.2005
[31] 鈴木昇一:パターン（画像，音声）から感性情報を計量できる一般的な方法（視野を考慮して構成された類似度関数の応用）,情報研究（文教大学･情報学部）,no.33,pp. 261-316,Jul. 2005
[32] 鈴木昇一:知識工学におけるcertainty factorによる多段階認識過程の評価,情報研究（文教大学･情報学部）,no.33,pp.199-260,Jul.2005
[33] 鈴木昇一:線形方程式の制約条件下での，残差法によるパターンモデル,情報研究（文教大学･情報学部）,no.33,pp.149-197,Jul.2005
[34] 鈴木昇一:正規直交性を満たす類似度関数*SM*に積分核が存在するか？,情報研究（文教大学･情報学部）,no.33,pp.111-147,Jul.2005
[35] 鈴木昇一:原パターンを近似できるという拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの，会話音声・動画像処理への応用,情報研究（文教大学･情報学部）,no.33,pp.43-110,Jul.2005

［36］ 鈴木昇一:パターンの変形量を外積演算による情報量で捉えよう-情報容量の提案と，情報容量を用いた類似度関数の構成-,情報研究（文教大学・情報学部）,to be published
［37］ 鈴木昇一:新しいパターン外積演算と，発想推論に役立つ異種想起の働き,情報研究（文教大学・情報学部）,to be published
［38］ 鈴木昇一:認識の階層とC-RECOGNITRON,情報研究（文教大学・情報学部）,to be published
［39］ 鈴木昇一:パターンの整形化方程式,情報研究（文教大学・情報学部）,no.34,pp.73-127, Jan.2006
［40］ 鈴木昇一:Householder変換と，素想起の働きを備えたその連想形認識への応用,情報研究（文教大学・情報学部）,to be published
［41］ 鈴木昇一:Support Vector Machine を利用した大分類関数の構成,情報研究（文教大学・情報学部）,no.26,,pp.1-62,Dec.2001
［42］ Olga Kouropteva,Oleg Okun,Matti Pietikäinen:Incremental locally linear embedding,PATTERN RECOGNITION,vol.38,no.10,pp.1764-1767,Oct.2005
［43］ 鈴木昇一:SS大分類関数BSCの適応的構成への計算論的学習理論の適用,情報研究（文教大学・情報学部）,no.25,pp.187-238,Mar.2000
［44］ 鈴木昇一:２つのモデル構成作用素の，λ言語論理による合成法,情報研究（文教大学・情報学部）,no.31,,pp.41-64,Jul.2004
［45］ Shimon Ullman,Ronen Basri:Recognition by linear combinations of models, IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE,vol.13,no.10,pp.992-1006,Oct.1991

付録A.SS公理系とカテゴリ帰属知識空間

S.Suzukiが提案したパターン情報処理に関する数学的理論は４つの公理axiom 1～4からなるSS公理系で組み建てられている．本付録Aでは，４つの公理axiom 1～４を説明する．SS公理系を適用して構築されたRECOGNITRONの連想形認識の動作，カテゴリ帰属知識空間，構造受精作用素と構造受精変換，同値関係，半順序関係，連想形認識方程式と，その解，人工知能学における探索理論から眺めた不動点探索形多段階認識過程などについては，割愛される．

A1.パターン集合Φと，モデル構成作用素Tとの対$[\Phi,T]$が満たさなければならない公理１

認識システムRECOGNITRONがモデル$T\varphi\in\Phi$を見たり聞いたりしたならば，原パターン$\varphi\in\Phi$と同じに見えたり聞こえたりする同一知覚原理が成立するならば，処理の対象とする問題のパターンの集合Φとモデル構成作用素$T:\Phi\to\Phi$とのなす対$[\Phi,T]$が満たさなければならないaxiom 1について説明しよう．

処理の対象とするパターンφの集合Φはある可分なヒルベルト空間[19]$\mathfrak{H}$の，零元０を含むある部分集合であり，このΦ，並びに写像

$$T:\Phi\to\Phi \tag{A1.1}$$

の順序対$[\Phi,T]$は次のaxiom 1を満たさなければならない．このとき，写像Tはモデル構成作用素（model-construction operator）と呼ばれ，$T\varphi\in\Phi$は$\varphi\in\Phi$の代りとなり得るという意味で，パター

ン $\varphi \in \Phi$ のパターンモデル，或いは簡単にモデル（model）と呼ばれる．

Axiom 1（パターン集合 Φ とモデル構成作用素 T との順序対 $[\Phi, T]$ の満たすべき公理）[3],[4]

（i）（零元0の Φ への埋込性，零元0の T −不動点性）

$$0 \in \Phi \wedge T0 = 0.$$

（ii）（Φ の錐性，T の正定数倍吸収性）

$$\forall \varphi \in \Phi, a \cdot \varphi \in \Phi \wedge T(a \cdot \varphi) = T\varphi \quad \text{for any positive real number } a.$$

（iii）（Φ への埋込性，T のベキ等性）

$$\forall \varphi \in \Phi, T\varphi \in \Phi \wedge T(T\varphi) = T\varphi.$$

（iv）（ の非零写像性）

$$\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0.$$

□

上述のaxiom 1からわかるように，パターン集合 Φ は，埋込性

$$T \cdot \Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \subset \Phi \tag{A1.2}$$

を満たし，原点$(=0)$を始点とし，Φ の任意の点を通る半直線を含むような集合，つまり，錐（cone）であらねばならない．

パターンと判明している φ の集合（基本領域;basic domain）$\Phi_B (\ni 0)$ と，すべての正実定数の集合 R^{++} とを用意する．Φ_B は零元0を含まなければならない．

パターンと判明している元の集合（基本領域;basic domain）（axiom 1の（i）の前半から，$0 \in$）Φ_B を導入して，集合論的再帰領域方程式（set-theoretic reflective domain equation）

$$\Phi = \Phi_B \cup T \cdot \Phi \cup R^{++} \cdot \Phi$$

ここに，

R^{++} 正実数全体の集合

$$R^{++} \cdot \Phi \equiv \{r^{++} \cdot \varphi \mid r^{++} \in R^{++}, \varphi \in \Phi\} \tag{A1.3}$$

の解 Φ は以下の式（A1.4）のようにと表示される．

次の定理A.1は，axiom 1を満たす対 $[\Phi, T]$ を決定している．

[定理A.1]（パターン Φ 集合とモデル構成作用素 T との順序対 $[\Phi, T]$ の基本構成定理）

パターンと判明している φ の集合（基本領域）$\Phi_B (\ni 0)$ と，すべての正実定数の集合 R^{++} とを用意する．

式（A1.1）の写像 T がaxiom 1の（i），（ii），（iii）の３後半，並びに，（iv）を満たすとしよう．このとき，次の（イ），（ロ）が成り立つ：

（イ）処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ を，

$$\Phi = R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B)$$

$$\equiv \{r^{++} \cdot \varphi_B \mid r^{++} \in R^{++}, \varphi_B \in \Phi_B\} \bigcup \{r^{++} \cdot T\varphi_B \mid r^{++} \in R^{++}, \varphi_B \in \Phi_B\} \tag{A1.4}$$

の如く設定すれば,

（イ−a） $T \cdot \Phi = T \cdot \Phi_B \subset \Phi$

∵　axiom １の（ⅱ），（ⅲ）の２後半

（イ−b） $R^{++} \cdot \Phi = \Phi$

∵　axiom １の（ⅱ）の後半

が成立し,axiom の（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）の３前半を Φ は満たし, 結局, 対 $[\Phi, T]$ はaxiom 1を満たす.

（ロ）逆に,（$0 \in$）Φ_B を部分集合に持つ Φ がaxiom 1の（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）の３前半を満たすとすれば,

$$\Phi \supseteq \Phi_B \cup R^{++} \cdot \Phi \cup T \cdot \Phi \tag{A1.5}$$

が成立するが，ここで，特に，包含式（A1.5）において等号が成立するような最小の Φ を採用すれば，つまり,領域方程式（A1.3）の成立を仮定すれば,axiom 1を満たす対 $[\Phi, T]$ の Φ は式（A1.4）のように表され,（イ-a），（イ-b）も成立する.

（証明）（イ）は文献[4],付録1の定理Ａ１．１である.（ロ）は文献[3],pp.64-66（2.4節）で証明されている.

３文献[3],[4],[21],[22],[23]での,多段階パターンモデル変換処理（多段階認識処理，つまり，不動点探索形多段階パターンモデル変換に基づく帰納推理による認識処理）を破綻ならしめることを避けるのに，パターン集合 Φ と T との対 $[\Phi, T]$ について定理A.１の式（A1.4）が成立していなければならない.何故ならば，多段階パターンモデル変換処理においては，パターン φ からそのパターンモデル $T\varphi$ への変換

$$\varphi \to T\varphi \tag{A1.6}$$

と,帰納推理に基づくパターンモデル $TA(\mu)T\varphi$ への構造受精過程（式（D.3）の $A(\mu)$ を参照）

$$\varphi \to TA(\mu)T\varphi, \text{ where } \mu \subseteq J \tag{A1.7}$$

とにおいては，２つの包含条件

$$\text{（一）} \varphi \in \Phi \text{ ならば，} T\varphi \in \Phi \tag{A1.8}$$

$$\text{（二）} \varphi \in \Phi \text{ ならば，} T\phi \in \Phi, \text{ where } \phi = A(\mu)T\varphi \in \Phi \tag{A1.9}$$

が保証されていなくてはならないが，順序対 $[\Phi, T]$ は，定理１の（イ）での（a）の後半の包含条件 $T \cdot \Phi \subset \Phi$ を満たすことから,（一），（二）の成立が保証される.

A2. 類似度関数 SM の満たさなければならない公理2

任意のパターン $\varphi \in \Phi$ が,記憶されている代表的なパターンからなる有限個の元からなる集合 Φ 内の任意の代表パターン ω_j とどの程度似ているか,違っているかを計量する手段を設定することが,認識の働きを確保するために必要とされる.類似性計量のための手段が類似度関数 SM である.

“正常なパターン”（well-formed pattern）は,ある１つのカテゴリ（category）$\mathfrak{C}_j$（第 $j \in J$ 番目の類概念）のみに帰属しているものとし,このような $\mathfrak{C}_j$ の集まり（有限集合）

$$\mathfrak{C}(J)=\{\mathfrak{C}_j \mid j\in J\} \tag{A2.1}$$

を想定する．$\mathfrak{C}_j$ の備えている性質を典型的に持っている（第 $j\in J$ 番目の）代表パターン（prototypical pattern）$\omega_j\,(\neq 0)$ を１つ選定する．$\mathfrak{C}_j$ は,典型（prototype）としての代表パターン ω_j を中心とした緩やかな（第 $j\in J$ 番目の）カテゴリであることを仮定したことに,注意しておく.ここに,

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j\in J\}\subset \Phi \tag{A2.2}$$

が式（A2.1）の全カテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J)$ に1対1に対応する代表パターンの集合である．式（A2.2）の系 Ω は,

$$\text{複素定数 a}_j\text{ の組}\{a_j \mid j\in J\}\text{について}\sum_{j\in J} a_j\cdot\omega_j=0 \Rightarrow \forall j\in J, a_j=0 \tag{A2.3}$$

が成立しているという意味で，1次独立（linearly independent）でなければならない．Ω を視察で決定できる場合があるが，訓練パターン系列から Ω を適応的に決定する方法については，文献[3]の付録Iで説明されている．

Axiom 1を満たす式（A1.1）のモデル構成作用素 T によって，式（A2.2）の代表パターン集合 Ω が変換されて得られる系

$$T\cdot\Omega \equiv \{T\omega \mid \omega\in\Omega\}=\{T\omega_j \mid j\in J\} \tag{A2.4}$$

も1次独立であると要請する．このとき，類似度関数（similarity-measure function）

$$SM:\Phi\times\Omega\to\{s \mid 0\le s\le 1\} \tag{A2.5}$$

を導入し,

$SM(\varphi,\omega_j)=1{,}0$ に従って，パターン $\varphi\in\Phi$ は各々，ω_j と確定的な類似度関係，相違関係にあり，
また，$0<SM(\varphi,\omega_j)<1$ の場合は,あいまいな類似・相違関係にある （A2.6）

と，SM を解釈しよう．

式（A2.5）の関数 SM は次のaxiom 2を満たすように構成されねばならない．Axiom 2の（i）では、クロネッカー（Kronecker）のδ記号

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if}\quad i=j\\ 0 & \text{if}\quad i\neq j\end{cases} \tag{A2.7}$$

が導入されているが、特にaxiom 2の（i）なるこの正規直交性は、候補カテゴリの分離・抽出が効果的に行われ,

候補カテゴリの鋭利な削減（a sharp reduction） （A2.8）

をもたらすために要請されている.

類似度関数（similarity-measure function）と呼ばれる関数（A2.5）の関数 SM は，次のaxiom 2を満たすように構成されねばならない.

Axiom 2（類似度関数 SM の満たすべき公理）

（ｉ）（正規直交性;orthonormality）

$\forall i, \forall j, SM(\omega_i, \omega_j) = \delta_{ij}.$

（ii）（規格化条件，確率性，正規性;probability condition,normalization）

$$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} SM(\varphi, \omega_j) = 1.$$

（iii）（写像Tの下での不変性;invariance under mapping T）

$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j).$ □

上述のaxiom 2の（ｉ）～（iii）について簡単に説明しておこう．

SMの解釈式（A2.6）の下で，（ｉ）は，相異なカテゴリの代表パターン同士は確定的な相違関係にあり，同一カテゴリの代表パターン同士は確定的な類似度関係にあることを要請している．（ii）は，任意のパターンφについて，すべてのカテゴリについての類似度の総和は１であることを要請している．つまり，パターンφは少なくとも１つのカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属していることを要請している．（iii）は，パターンモデル$T\varphi$は原パターンφと任意のカテゴリについて同一類似度を持つことを要請している．ということは，パターンモデル$T\varphi$を見たり，聞いたりするならば，原パターンφと同じように見えたり、聞こえたりすること（同一知覚原理）を要請していることになる．

1より大きくない非実数$SM(\varphi, \omega_j)$は，パターン$\varphi \in \Phi$が，第$j \in J$番目のカテゴリ

$$\mathfrak{C}_j \in \mathfrak{C} \equiv \mathfrak{C}(J) \equiv \{\mathfrak{C}_i \mid i \in J\} \tag{A2.9}$$

の諸性質を備えている代表パターン

$$\omega_j \in \Omega \equiv \Omega(J) \equiv \{\omega_i \mid i \in J\} \subseteq \Phi \tag{A2.10}$$

と似ている程度を表している，と解釈できる．ここに，Jは全カテゴリ番号の集合といわれるものである．全カテゴリ番号の集合Jの部分集合

$$\gamma = \{i, j, \cdots k\} (\subseteq J) \tag{A2.11}$$

は，重複要素があってもよいリスト

$$\gamma = [i \quad j \quad \cdots \quad k] \in 2^J \equiv \{\lambda | \ \lambda \subseteq J\} \tag{A2.12}$$

として，表現されることがあり，このカテゴリ番号リスト$\gamma \in 2^J$から定まるような，$\mathfrak{C}(J)$,$\Omega(J)$の部分集合

$$\mathfrak{C}(\gamma) \equiv \{\mathfrak{C}_i \mid i \in \gamma\} \subseteq \mathfrak{C}(J), \gamma \subseteq J \tag{A2.13}$$

$$\Omega(\gamma) \equiv \{\omega_i \mid i \in \gamma\} \subseteq\in \Omega(J), \gamma \subseteq J \tag{A2.14}$$

も定義しておく．尚，確率条件

$$[\forall j \in J, 0 < p(\mathfrak{C}_j) < 1] \wedge \sum_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) = 1 \tag{A2.15}$$

を満たす第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の出現確率 $p(\mathfrak{C}_j)$ を導入しておく.

A3.大分類関数の満たさなければならない公理3

式（A2.5）の類似度関数 SM が式（A2.8）でいう“候補カテゴリの鋭利な削減”を持つためには，axiom 2,（i）の正規直交性を満たす必要があることがA2章で指摘されたが，$SM(\varphi,\omega_j)$ の代りに $SM(\varphi,\omega_j)\cdot BSC(\varphi,j)$ を用いれば，パターン φ が帰属するかも知れない候補カテゴリを益々，鋭利に削減できると期待される.

大分類関数（rough classifier,binary-state classifier）と呼ばれる2値関数

$$BSC:\Phi\times J\to\{0,1\} \tag{A3.1}$$

を，次のaxiom 3を満たすものとして導入し，解釈

パターン $\varphi\in\Phi$ の帰属する候補カテゴリの１つが第 $j\in J$ 番目の $\mathfrak{C}_j$ であるならば,

$BSC(\varphi,j)=1$ であることが望ましい （A3.2）

を採用しよう．この際，注意すべきは,

$BSC(\varphi,j)=0$ であっても，パターン $\varphi\in\Phi$ の帰属する候補カテゴリの１つは，第 $j\in J$ 番目の $\mathfrak{C}_j$ でないとは限らない （A3.3）

としていることである．また，axiom 3の（i）からわかるように，カテゴリ間の相互排除性（the mutual exclusion of the one category from the other categories）

$$\forall j\in J,\forall i\in J-\{j\},BSC(\omega_i,j)=0, \tag{A3.4}$$

を公理として要請していない事実に注意しておこう．この事実を補うのが実は，類似度関数 SM が満たさなければならないとしているaxiom 2の（i）（正規直交性）である.

<u>Axiom 3</u>（大分類関数 BSC の満たすべき公理）

（i）（カテゴリ抽出能力;category separability）

$$\forall j\in J,BSC(\omega_j,j)=1.$$

（ii）（写像の下での不変性;invariance under mapping T）

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J,BSC(T\varphi,j)=BSC(\varphi,j).$$ □

$BSC(\varphi,j)=1$ であれば，第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ は，パターン $\varphi\in\Phi$ が帰属する候補カテゴリの１つであると，解釈できる.

A4.公理４と、カテゴリ選択関数CSFの構造形式

認識システムRECOGNITRONがパターン $\varphi\in\Phi$ に対し,

「パターン $\varphi\in\Phi$ が、式（A2.1）の全カテゴリ集合 $\mathfrak{C}_j$ の部分集合

$$\mathfrak{C}(\gamma)\equiv\{\mathfrak{C}_j\mid j\in\gamma\} \tag{A4.1}$$

内の何れか１つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属する可能性がある」 （A4.2）

という“パターン $\varphi\in\Phi$ のカテゴリ帰属知識（categorical membership-knowledge）”を持っていると

する．この知識を，

$$\langle \varphi,\gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle \tag{A4.3}$$

と表す．ここに，カテゴリ帰属知識 $\langle \varphi,\gamma \rangle$ のすべての集まり

$$\langle \Phi, 2^J \rangle \equiv \{\langle \varphi,\gamma \rangle \mid \varphi \in \Phi,\ \gamma \in 2^J\} \tag{A4.4}$$

は，カテゴリ帰属知識空間（categorical membership-knowledge space）と呼ばれ、すべてのパターン $\varphi \in \Phi$ と，すべてのカテゴリ番号のリスト $\gamma \in 2^J$ とのなす順序の付いた対リスト（an ordered pair list）$\langle \varphi,\gamma \rangle$ の集合である．ここに，2^Jは集合Jのすべての部分集合のなす集合，つまり，“すべてのカテゴリ番号の集合Jのべき集合（power set）”をで表わしている．

カテゴリ帰属知識空間 $\langle \Phi, 2^J \rangle$ はパターン集合 Φ の意味領域（semantic domain）である．

カテゴリ選択関数（category-selection function）と呼ばれる写像

$$CSF : \Phi \times 2^J \rightarrow 2^J \tag{A4.5}$$

は，包含関係（inclusion relation）

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \gamma \in 2^J,\ CSF(\varphi,\gamma)) \subseteq \gamma \subseteq J \in 2^J \tag{A4.6}$$

を満たし,然も，次のaxiom 4を満たすものとして，設定されるとしよう．

<u>Axiom 4</u>（カテゴリ選択関数 CSF の満たすべき公理）

（i） $\varphi = 0 \vee \gamma = \phi$ の場合

如何なるカテゴリ番号 $k \in \gamma$ も，$\langle \varphi,\gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリの番号ではない．

（ii） $\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ であり，かつ，$SM(\varphi,\omega_k) = 0 \wedge BSC(\varphi,k) = 0$ の場合

カテゴリ番号 $k \in \gamma$ は，$\langle \varphi,\gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリの番号ではない.

（iii） $\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ であり，かつ，$\sum_{k \in \gamma} BSC(\varphi,k) = 0$ の場合

$SM(\varphi,\omega_k) > 0$ であるようなカテゴリ番号 $k \in \gamma$ は，$\langle \varphi,\gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリの番号である．

（iv） $\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ であり，かつ，$\sum_{k \in \gamma} BSC(\varphi,k) > 0$ の場合

（iv-1） $BSC(\varphi,k) = 0$ なるカテゴリ番号 $k \in \gamma$ は，$\langle \varphi,\gamma \rangle$の有効な候補カテゴリの番号ではない．

（iv-2） $BSC(\varphi,k) = 1$ なるカテゴリ番号 $k \in \gamma$ は，$SM(\varphi,\omega_k) > 0$ であれば，$\langle \varphi,\gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリの番号である．　□

次の定理A.2では，式（A4.5）の写像 CSF は,式（A2.5）の類似度関数 SM，式（A3.1）の大分類関数 BSC を使用する形式で，

その定義域が $\Phi \times 2^J$ であり，その値域が，パターン $\varphi \in \Phi$ のカテゴリ帰属知識 $\langle \varphi,\gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$ の“有効な”候補カテゴリの番号リスト（a list of significant category-numbers）の集合である　（A4.7）

の如く，構成されている．

次の定理A.2は，axiom 4を満たすように，式（A4.5）のカテゴリ選択関数 CSF の構造を決定したものである．

[定理A.2]（カテゴリ選択関数CSFの構成定理）

次のように定義される式（A4.5）の１つの写像CSFは包含式（A4.6）と上述のaxiom 4を満たす:

（i） $\varphi = 0 \vee \gamma = \phi$ の場合

$$CSF(\varphi,\gamma) = \phi. \tag{A4.8}$$

（ii） $\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ の場合

$$CSF(\varphi,\gamma) =$$

$$\begin{cases} \{k \in \gamma \mid SM(\varphi,\omega_k) > 0\} \quad \text{if} \ \sum_{k\in\gamma} BSC(\varphi,k) = 0 & \text{(A4.9)} \\ \{k \in \gamma \mid SM(\varphi,\omega_k) > 0 \wedge BSC(\varphi,k) = 1\} \quad \text{if} \ \sum_{k\in\gamma} BSC(\varphi,k) > 0 & \text{(A4.10)} \end{cases}$$

（証明）文献[B3]の定理E1である． □

定理A.2のカテゴリ選択関数CSFについて,次のように解釈できる:

処理の対象とするパターン$\varphi \in \Phi$がカテゴリ$\mathfrak{C}_j$， $j \in \gamma$ の何れか１つに帰属する可能性があると想定した場合，更に絞り込んで，その内のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$， $j \in CSF(\varphi,\gamma) \subseteq \gamma$ の何れか１つに帰属する可能性がある （A4.11）

という具合に帰納推論（inductive reasoning）できる機能を備えており，写像CSFからのその出力$CSF(\varphi,\gamma)$はパターン$\varphi \in \Phi$の有効な候補カテゴリの番号からなるリストを与えている．

（付録A終わり）

付録B.２つの認識システム間の認識能力の差を与える物差

本付録Bでは，変換前の認識システム

$$RECOGNITRON(1) \equiv RECOGNITRON \tag{B.1}$$

と,今1つの認識システム

$$RECOGNITRON(2) \equiv RECOGNITRON' = f(RECOGNITRON) \tag{B.2}$$

との間にどの程度の認識能力の差があるか，その物差を提案してみよう．

B1. パターン集合$\Psi(\subseteq\Phi)$に関する，認識システム$RECOGNITRON$ の集合上での半順序関係$\underline{\propto}_{\Psi}$

$RECOGNITRON$ (1)により正しく認識されるパターンがすべて，$RECOGNITRON$ (2)により正認識される事態を

$$RECOGNITRON(1) \underline{\propto}_{\Psi} RECOGNITRON(2) \tag{B.3}$$

と書けば，パターン集合$\Psi(\subseteq\Phi)$に関して$RECOGNITRON$ (1)より$RECOGNITRON$ (2)の認識能力は小さくないといえるであろう．

$RECOGNITRON$ (1)により正しく認識されるパターン$\varphi \in \Psi(\subseteq\Phi)$がすべて，

$RECOGNITRON$ (2)により正認識され，且つ，$RECOGNITRON$ (2)により正しく認識されるパタ

ーン$\varphi \in \Psi(\subseteq \Phi)$がすべて，$RECOGNITRON$（1）により正認識される事態を，

$$RECOGNITRON(1) \backsim_{\Psi} RECOGNITRON(2) \tag{B.4}$$

と書くことにすれば，次の命題B.1が成り立ち，2元関係$\underline{\propto}_{\Psi}$はパターン集合$\Psi(\subseteq \Phi)$に関し，認識システム$RECOGNITRON$の集合上での半順序関係であることが判明する．

[命題B.1]（パターン集合$\Psi(\subseteq \Phi)$に関する，認識システム$RECOGNITRON$の集合上での半順序関係$\underline{\propto}_{\Psi}$）

(1)（反射律;reflexive law）$RECOGNITRON \underline{\propto}_{\Psi} RECOGNITRON$

(2)（反対称律;antisymmetric law）

$$RECOGNITRON(1) \underline{\propto}_{\Psi} RECOGNITRON(2)$$

$$\wedge RECOGNITRON(2) \underline{\propto}_{\Psi} RECOGNITRON(1)$$

$$\Rightarrow RECOGNITRON(1) \backsim_{\Psi} RECOGNITRON(2)$$

(3)（推移律;transitive law）

$$RECOGNITRON(1) \underline{\propto}_{\Psi} RECOGNITRON(2)$$

$$\wedge RECOGNITRON(2) \underline{\propto}_{\Psi} RECOGNITRON(3)$$

$$\Rightarrow RECOGNITRON(1) \underline{\propto}_{\Psi} RECOGNITRON(3)$$

B2. 同一のパターン集合$\Psi(\subseteq \Phi)$に関する認識能力の差をもたらす距離$DIS(1,2:\Psi)$

$RECOGNITRON$（1），$RECOGNITRON$（2）間の，同一のパターン集合$\Psi(\subseteq \Phi)$に関する認識能力の差をもたらす距離$DIS(1,2:\Psi)$を，パターン集合$\Psi(\subseteq \Phi)$に関する，認識システム$RECOGNITRON$の集合上での半順序関係$\underline{\propto}_{\Psi}$が反映されるように，確立しよう．

$n(\geq 1)$個のパターンφからなるパターン集合Ψを考え，Ψの元φの内$RECOGNITRON$（1），$RECOGNITRON$（2）によって正しく認識されたパターンφの集合を各々，

$$\Psi(1), \Psi(2)(\Psi \subseteq \Phi) \tag{B.5}$$

と表す．更に，$\varphi \in \Psi(1)$の内，不等式

$$\max_{j \in CSF_2(\varphi,J)} SM_2(\varphi,\omega_j) \leq \max_{j \in CSF_1(\varphi,J)} SM_1(\varphi,\omega_j) \tag{B.6}$$

を満たし，且つ，$RECOGNITRON$（2）によって正しく認識されたパターンφの集合を

$$\Psi(1,2)(\subseteq \Psi(1) \subseteq \Psi \subseteq \Phi) \tag{B.7}$$

とする．同様に，$\varphi \in \Psi(2)$の内，不等式

$$\max_{j\in CSF_1(\varphi,J)} SM_1(\varphi,\omega_j) \le \max_{j\in CSF_2(\varphi,J)} SM_2(\varphi,\omega_j) \tag{B.8}$$

を満たし，且つ，*RECOGNITRON*（1）によって正しく認識されたパターンφの集合を

$$\Psi(2,1)(\subseteq \Psi(2) \subseteq \Psi \subseteq \Phi) \tag{B.9}$$

とする．ここに，SM_j, CSF_j は各々，*RECOGNITRON*（j）内の，axiom 2を満たす類似度関数，axiom 4を満たすカテゴリ選択関数である．

このとき，選ばれたパターン集合Ψについての，*RECOGNITRON*（1），*RECOGNITRON*（2）の認識能力の差を表す距離$DIS(1,2:\Psi)$は，

$$DIS(1,2:\Psi)$$
$$=1-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sum_{\varphi\in\Psi(1,2)}\max_{j\in CSF_2(\varphi,J)} SM_2(\varphi,\omega_j)}{\sum_{\varphi\in\Psi(1)}\max_{j\in CSF_1(\varphi,J)} SM_1(\varphi,\omega_j)}+\frac{\sum_{\varphi\in\Psi(2,1)}\max_{j\in CSF_1(\varphi,J)} SM_1(\varphi,\omega_j)}{\sum_{\varphi\in\Psi(2)}\max_{j\in CSF_2(\varphi,J)} SM_2(\varphi,\omega_j)}\right] \tag{B.10}$$

と定義される．パターン集合$\Psi(\ni\varphi)$の内，*RECOGNITRON*（1）によって正しく認識されたパターンφが*RECOGNITRON*（2）により正しく認識されるパターンφが多いほど，更に，*RECOGNITRON*（2）によって正しく認識されたパターンφが*RECOGNITRON*（1）により正しく認識されるパターンφが多いほど，$DIS(1,2:\Psi)$は小さい値になるべきであるということを少なくとも表しているのが，*RECOGNITRON*（1），*RECOGNITRON*（2）の認識能力の差を表す距離$DIS(1,2:\Psi)$である．

このとき，

$$RECOGNITRON(1) = RECOGNITRON(2) \text{ ならば，} DIS(1,2:\Psi)=0 \tag{B.11}$$

が成立する次の定理B.1が成り立つ．

[定理B.1]（パターン集合Ψについての，*RECOGNITRON*（1），*RECOGNITRON*（2）の認識能力の差を表す距離$DIS(1,2:\Psi)$定理）

（1）$0 \le DIS(1,2:\Psi) \le 1.$

（2）【$\Psi(1)=\Psi(1,2) \wedge [\forall\varphi\in\Psi(1), \max_{j\in CSF_1(\varphi,J)} SM_1(\varphi,\omega_j) = \max_{j\in CSF_2(\varphi,J)} SM_2(\varphi,\omega_j)]$】

$\wedge$【$\Psi(2)=\Psi(2,1) \wedge [\forall\varphi\in\Psi(2), \max_{j\in CSF_2(\varphi,J)} SM_2(\varphi,\omega_j) = \max_{j\in CSF_1(\varphi,J)} SM_1(\varphi,\omega_j)]$】

$\Rightarrow DIS(1,2:\Psi)=0.$

（3）$\Psi(1,2)=\Psi(2,1)=\phi \Rightarrow DIS(1,2:\Psi)=1.$

（証明）明らか． □

上述の定理B.1の（１）について：認識能力の差を表す距離$DIS(1,2:\Psi)$は1より大きくない非負量であることを指摘している．

更に，上述の定理B.1の（２）について：認識能力の差を表す距離$DIS(1,2:\Psi)$は最小値0をとることの状況中には，

$$RECOGNITRON(1) \simeq_{\Psi} RECOGNITRON(2) \tag{B.12}$$

つまり，$RECOGNITRON$（1）により正しく認識されるパターンがすべて，$RECOGNITRON$（2）により正認識され，且つ，

$$RECOGNITRON(2) \simeq_{\Psi} RECOGNITRON(1) \tag{B.13}$$

つまり，$RECOGNITRON$（2）により正しく認識されるパターンがすべて，$RECOGNITRON$（1）により正認識される場合，つまり，

$$RECOGNITRON(1) \backsim_{\Psi} RECOGNITRON(2) \tag{B.14}$$

が成立する場合を含んでいることを指摘している．

更に，定理B.1の（３）について：認識能力の差を表す距離$DIS(1,2{:}\boldsymbol{\Psi})$は最大値1をとることの状況中には，$RECOGNITRON$（1）により正しく認識されるパターンがすべて，$RECOGNITRON$（2）により誤認識され，且つ，$RECOGNITRON$（２）により正しく認識されるパターンがすべて，$RECOGNITRON$（1）により誤認識される場合が少なくとも，含まれていることを指摘している．

（付録B終わり）

付録C．認識システム$RECOGNITRON$ の合成

本付録Cでは，新類似度関数SM'，新大分類関数BSC'が旧類似度関数SM，旧大分類関数BSCを用いて再帰的に定義され，式（1.1）の認識システム$RECOGNITRON$から，再帰的に新しい式（1.2）の認識システム$RECOGNITRON'$を作る．

C1.２つの類似度関数$SM_{\#k}, k=1,2$を最大値・最小値演算で合成して，$RECOGNITRON_{\#1}$，$RECOGNITRON_{\#2}$から，新認識システムを作る

２つの新認識システム

$$RECOGNITRON_{\max\{\#1,\#2\}},\quad RECOGNITRON_{\min\{\#1,\#2\}} \tag{C1.1}$$

を作ろう．

C1.1　$RECOGNITRON_{\max\{\#1,\#2\}}$を作る

$$RECOGNITRON_{\#1}\,(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) \equiv <\Phi_B, T, SM_{\#1}, BSC> \tag{C1.2}$$

$$RECOGNITRON_{\#2}\,(\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) \equiv <\Phi_B, T, SM_{\#2}, BSC> \tag{C1.3}$$

から，再帰的構成して，$SM_{\max\{\#1,\#2\}}$を得よう．

付録A,A2章のaxiom 2を満たす2個の類似度関数

$$SM_{\#k}: \Phi\times\Omega \to \{s \mid 0\le s\le 1\}, k=1,2 \tag{C1.4}$$

を導入する．次の定理C.1は，$SM_{\#1}, SM_{\#2}$からaxiom 2を満たす$SM_{\max\{\#1,\#2\}}$が構成され得る事実を指摘

している． $SM_{\max\{\#1,\#2\}}$ は $SM_{\#1}, SM_{\#2}$ の双方の情報を集めて得られた類似度関数である．
[定理C.１]（ 最大値演算による類似度関数の再帰構成定理）
式（C1.4）の２個の類似度関数 $SM_{\#k}(k=1,2)$ は付録A,A2章のaxiom 2を満たすとしよう．

$$SM_{\max\{\#1,\#2\}}(\varphi,\omega_j)=\frac{\max\{SM_{\#1}(\varphi,\omega_j),SM_{\#2}(\varphi,\omega_j)\}}{\sum_{i\in J}\max\{SM_{\#1}(\varphi,\omega_i),SM_{\#2}(\varphi,\omega_i)\}}$$

但し，分母が０の場合， $SM_{\max\{\#1,\#2\}}(\varphi,\omega_j)=p(\mathfrak{C}_j)$ （C1.5）

を採用しても，関数

$$SM_{\max\{\#1,\#2\}}:\Phi\times\Omega\to\{s\,|\,0\le s\le 1\} \tag{C1.6}$$

はaxiom 2を満たす． □

そうすると，最大値選択関数

$$f_{\max\{\#1,\#2\}}(z_1,z_2)=\max\{z_1,z_2\} \tag{C1.7}$$

を導入して，2つの認識システム $RECOGNITRON_{\#1}$， $RECOGNITRON_{\#2}$ から，新たに，認識システム

$$RECOGNITRON\ (\mathrm{C}(J):\Omega(J))_{\max\{\#1,\#2\}}\equiv<\Phi_B,T,SM_{\max\{\#1,\#2\}},BSC>$$

$$=f_{\max\{\#1,\#2\}}(RECOGNITRON_{\#1},RECOGNITRON_{\#2}) \tag{C1.8}$$

が得られ,

$$RECOGNITRON_{\max\{\#1,\#2\}}\equiv\max\{RECOGNITRON_{\#1},RECOGNITRON_{\#2}\} \tag{C1.9}$$

と表記する．

C1.2　$RECOGNITRON_{\max\{\#1,\#2\}}$ を作る

2式（C1.2），（C1.3）の，２つの認識システムから，再帰的構成して， $SM_{\min\{\#1,\#2\}}$ を得よう．
次の定理C.２は，axiom 2を満たす２つの式（C1.4）の $SM_{\#1},SM_{\#2}$ からaxiom 2を満たす $SM_{\min\{\#1,\#2\}}$ が構成され得る事実を指摘している． $SM_{\min\{\#1,\#2\}}$ は $SM_{\#1},SM_{\#2}$ に共通な情報を集めて得られた類似度関数である．
[定理C.２]（最小値演算による類似度関数の再帰構成定理）
式（C1.4）の２個の類似度関数 $SM_k(k=1,2)$ は付録A,A2章のaxiom 2を満たすとしよう．

$$SM_{\min\{\#1,\#2\}}(\varphi,\omega_j)=\frac{\min\{SM_{\#1}(\varphi,\omega_j),SM_{\#2}(\varphi,\omega_j)\}}{\sum_{i\in J}\min\{SM_{\#1}(\varphi,\omega_i),SM_{\#2}(\varphi,\omega_i)\}}$$

但し，分母が０の場合， $SM_{\min\{\#1,\#2\}}(\varphi,\omega_j)=p(\mathfrak{C}_j)$ （C1.10）

を採用しても，関数

$$SM_{\min\{\#1,\#2\}}:\Phi\times\Omega\to\{s\,|\,0\le s\le 1\} \tag{C1.11}$$

はaxiom 2を満たす. □

そうすると，最小値選択関数

$$f_{\min\{\#1,\#2\}}(z_1, z_2) = \min\{z_1, z_2\} \tag{C1.12}$$

を導入して，2つの認識システム $RECOGNITRON_{\#1}$，$RECOGNITRON_{\#2}$ から，新たに，認識システム

$$RECOGNITRON\ (\mathfrak{C}(J):\Omega(J))_{\min\{\#1,\#2\}} \equiv < \Phi_B, T, SM_{\min\{\#1,\#2\}}, BSC >$$

$$= f_{\min\{\#1,\#2\}}(RECOGNITRON_{\#1}, RECOGNITRON_{\#2}) \tag{C1.13}$$

が得られ，

$$RECOGNITRON_{\min\{\#1,\#2\}} \equiv \min_{SM}\{RECOGNITRON_{\#1}, RECOGNITRON_{\#2}\} \tag{C1.14}$$

と表記する．

C1.3 $RECOGNITRON_{\max\{\#1,\#2\}}, RECOGNITRON_{\min\{\#1,\#2\}}$ の，$RECOGNITRON_{\#k}, k=1,2$ への還元

次の定理C.3は，$RECOGNITRON_{\max\{\#1,\#2\}}$，$RECOGNITRON_{\min\{\#1,\#2\}}$ が $RECOGNITRON_{\#k}, k=1,2$ へ還元される場合があることを指摘している．

[定理C.3]（$RECOGNITRON_{\max\{\#1,\#2\}}$，$RECOGNITRON_{\min\{\#1,\#2\}}$ の，$RECOGNITRON_{\#k}, k=1,2$ への還元定理）

$$\forall\varphi\in\Phi_{\mathbf{B}}, \forall j\in J, SM_{\#1}(\varphi,\omega_j) = SM_{\#2}(\varphi,\omega_j) \tag{C1.15}$$

ならば，

$$\forall\varphi\in\Phi, \forall j\in J, SM_{\max\{\#1,\#2\}}(\varphi,\omega_j) = SM_{\min\{\#1,\#2\}}(\varphi,\omega_j) = SM_{\#k}(\varphi,\omega_j), k=1,2 \tag{C1.16}$$

が成り立ち，$RECOGNITRON_{\max\{\#1,\#2\}}$，$RECOGNITRON_{\min\{\#1,\#2\}}$ は共に，$RECOGNITRON_{\#k}, k=1,2$ へ還元される．

（証明） 式（A2.5）の類似度関数が正の定数倍に対し不変であること，つまり，

$$\forall\varphi\in\Phi, \forall j\in J, SM(a\cdot\varphi,\omega_j) = SM(\varphi,\omega_j) \text{ for any real positive number } a \tag{C.17}$$

が，axiom 1,（ii）の後半，axiom 2,（iii）から成り立つ．axiom 2,（iii）をも考慮すれば，式（C1.15）から，

$$\forall\varphi\in\Phi, \forall j\in J, SM_{\#1}(\varphi,\omega_j) = SM_{\#2}(\varphi,\omega_j) \quad \because \text{ 式(A1.4)} \tag{C1.18}$$

が成り立つことがわかる．この式（C1.18）を使えば，$k=1,2$として，

$$\forall\varphi\in\Phi, \forall j\in J, SM_{\max\{\#1,\#2\}}(\varphi,\omega_j) = \frac{\max\{SM(\varphi,\omega_j), SM(\varphi,\omega_j)\}}{\sum_{i\in J}\max\{SM(\varphi,\omega_i), SM(\varphi,\omega_i)\}}$$

$$= \frac{SM_{\#k}(\varphi,\omega_j)}{\sum_{i\in J} SM_{\#k}(\varphi,\omega_i)} \tag{C1.19}$$

$$= SM_{\#k}(\varphi, \omega_j) \qquad \because \quad \text{axiom 2,(ii)} \tag{C1.20}$$

を得る．同様に，

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM_{\min\{\#1,\#2\}}(\varphi, \omega_j) = SM_{\#k}(\varphi, \omega_j) \tag{C1.21}$$

を得，式（C1.16）の成立がわかった． □

C２.類似度関数 $SM_{\#}$ から，$RECOGNITON_{\neg\#}$ を作る

C2.1逆数演算を使った典型的な再帰的構成例

関数

$$SM_{\#} : \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \le s \le 1\} \tag{C2.1}$$

は，axiom 2を満たすとしよう．次の定理C.4は， $SM_{\#}$ からaxiom 2を満たす類似度関数 $SM_{\neg\#}$ が定義できることを示している．

[定理C.4]（逆数演算による類似度関数の再帰的構成定理）

axiom 2を満たす式（C2.1）の類似度関数 $SM_{\#}$ を導入し，

$$SM_{\neg\#}(\varphi, \omega_j) = \frac{\dfrac{1}{1 - SM_{\#}(\varphi, \omega_j)}}{\displaystyle\sum_{i \in J} \frac{1}{1 - SM_{\#}(\varphi, \omega_i)}} \tag{C2.2}$$

と定義される関数

$$SM_{\neg\#} : \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \le s \le 1\} \tag{C2.3}$$

も，axiom 2を満たす．

（証明）　省略される． □

$$SM_{\#}(\varphi, \omega_j) < 1 \tag{C2.4}$$

であれば，

$$\frac{1}{1 - SM_{\#}(\varphi, \omega_i)} \le \frac{1}{1 - SM_{\#}(\varphi, \omega_j)}$$

$$\Leftrightarrow SM_{\#}(\varphi, \omega_i) \le SM_{\#}(\varphi, \omega_j) \tag{C2.5}$$

が成立するから，類似度値の大小関係は $SM_{\#}$ から $SM_{\neg\#}$ へと変換しても保存されるが，関数

$$f_{\neg\#}(z) \equiv \neg z \equiv \frac{1}{1 - z} \tag{C2.6}$$

の性質により，

1に近い $SM_{\#}(\varphi, \omega_j)$ を持つすべてのカテゴリ番号 $j \in J$ についての $SM_{\neg\#}(\varphi, \omega_j)$ は更に1に近く変換

され，0に近い $SM_{\#}(\varphi,\omega_j)$ を持つすべてのカテゴリ番号 $j\in J$ についての $SM_{\neg\#}(\varphi,\omega_j)$ は更にに近く変換される可能性があること　(C2.7)
に注意しておこう．

認識システム

$$RECOGNITRON_{\#}(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))\equiv<\Phi_B,T,SM_{\#},BSC> \quad (C2.8)$$

から，新たに，認識システム

$$\begin{aligned}&RECOGNITRON_{\neg\#}(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))\equiv<\Phi_B,T,SM_{\neg\#},BSC>\\&=f_{\neg\#}(RECOGNITRON_{\#})\end{aligned} \quad (C2.9)$$

を作る．この認識システムを

$$RECOGNITRON_{\neg\#}\equiv\neg_{SM}RECOGNITRON_{\#} \quad (C2.10)$$

と表記する．

C2.2　逆数演算を使った再帰的一般化

前節の内容を一般化する．3条件

⑴% $0\le f(0)<+\infty$　(C2.11)

⑵% $\forall z(0<z\le 1),f(z)>0$　(C2.12)

⑶% $f(1)=+\infty$　(C2.13)

を満たす関数

$f:\{z\,|\,0\le z\le 1\}\to R^{+}$（非負実数全体の集合）　(C2.14)

を用意する．

次の定理C.5 は，定理C.４を一般化したものである。

[定理C.5]（類似度関数の構成定理）

Axiom 2を満たす式の類似度関数 $SM_{\#}$ と，3条件（1%），（2%），（3%）を満たす式（2.14）の関数fとを用いて，

$$SM_{\neg\#}(\varphi,\omega_j)=\frac{f(SM_{\#}(\varphi,\omega_j))}{\sum_{i\in J}f(SM_{\#}(\varphi,\omega_i))} \quad (C2.15)$$

と定義されるはaxiom 2を満たす．

（証明）先ず，SM がaxiom 2,（ｉ）を満たすことから，

$\forall j\in J,f(SM_{\#}(\omega_j,\omega_j))=f(1)=+\infty \quad \because$　条件⑶%　(C2.16)

$\forall j\in J,\forall i\in J-\{j\},f(SM_{\#}(\omega_i,\omega_j))=f(0)\ge 0 \quad \because$　条件⑴%　(C2.17)

が成立することに，注意しておく．

類似度関数 SM'' がaxiom 2を満たすことを示そう．
先ず，

$$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{i \in J} f(SM_{\#}(\varphi, \omega_i)) > 0 \tag{C2.18}$$

であることは，次のようにしてわかる．

$$\exists \varphi \in \Phi, \sum_{i \in J} f(SM_{\#}(\varphi, \omega_i)) = 0$$

を仮定すると，

$$\forall i \in J, f(SM(\varphi, \omega_i)) = 0 \quad \because \text{ 条件(1%), (2%)} \tag{C2.19}$$

を得る．ところが，

$$\exists k \in J, SM_{\#}(\varphi, \omega_k) > 0 \qquad \because \text{ axiom 2, (ii)}$$

であるから， このカテゴリ番号 $k \in J$ について，

$$f(SM(\varphi, \omega_k)) > 0 \quad \because \text{ 条件(2%)}$$

を得，式（C2.19）に矛盾する．
よって， SM'' がaxiom 2,（ii）を満たすことがわかる．
さて， $\varphi = \omega_j$ の時，axiom 2,（ i ）より，

$$SM_{\#}(\varphi, \omega_j) = 1 \wedge [\forall i \in J - \{j\}, SM_{\#}((\varphi, \omega_i) = 0] \tag{C2.20}$$

であるから，

$$\begin{aligned} SM_{\#}(\varphi, \omega_j) &= \frac{f(SM(\varphi, \omega_j))}{f(SM(\varphi, \omega_j)) + \sum_{i \in J - \{j\}} f(SM(\varphi, \omega_i))} \\ &= \frac{f(1)}{f(1) + \sum_{i \in J - \{j\}} f(0)} \\ &= \frac{1}{1 + \sum_{i \in J - \{j\}} \frac{f(0)}{f(1)}} \qquad \text{(C2.21)} \\ &= \frac{1}{1+0} \quad \because \text{ 2 条件(1%), (3%)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

次に，任意の $k \in J - \{j\}$ について，

$$SM_{\#}(\varphi,\omega_k)=\frac{f(SM(\varphi,\omega_k))}{f(SM(\varphi,\omega_j))+\sum_{i\in J-\{j\}}f(SM(\varphi,\omega_i))}$$

$$=\frac{f(0)}{f(1)+\sum_{i\in J-\{j\}}f(0)}$$

$$=\frac{f(0)}{+\infty+\sum_{i\in J-\{j\}}f(0)}\quad\because\ \text{条件}(3\%)$$

$$=0\quad\because\ \text{条件}(1\%)\tag{C2.22}$$

を得，$SM_{\#}$ がaxiom 2,（ｉ）を満たすことがわかった．

SM がaxiom 2,（iii）を満たすことから，$SM_{\#}$ がaxiom 2,（iii）を満たすことが従う． □

3条件（1%），（2%），（3%）を満たす式（C2.14）の関数 f を挙げておこう．例1で，$n=1$の場合がC2.1節で研究されたものである．

［例 1］ $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)^n}$， $n=1,2,3,\cdots$ （C2.23）

□

［例 2］ $f(z)=\exp[\dfrac{1}{1-z}]$ （C2.24）

□

［例 3］ $f(z)=\log_e\dfrac{1}{1-z}$ （C2.25）

□

［例 4］ $f(z)=\dfrac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}z)}$ （C2.26）

□

［例 5］ $f(z)=\dfrac{1}{1-\sin(\frac{\pi}{2}z)}$ （C2.27）

□

［例 6］ $f(z)=\dfrac{1}{1-z^n}$， $n=1,2,3,\cdots$ （C2.28）

□

C3.　２つの大分類関数 $BSC_{\#k}, k=1,2$ を最大値・最小値演算で合成して，$RECOGNITRON_{\max\{\#1,\#2\}}$，$RECOGNITRON_{\min\{\#1,\#2\}}$ を作る

これまでと同じように，実数値 a_j の組 $\{a_j\}_{i=1\sim n}$ について，0 −計算規則

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \text{ のとき，} \frac{a_j}{\sum_{i=1}^{n} a_i} = 0 \tag{C3.1}$$

を約束しておく．また，1実数値変数uの2値関数

$$psn(u) = \begin{cases} 1 \cdots u \geq 0 \text{ のとき} \\ 0 \cdots u < 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{C3.2}$$

を導入しておく．

C3.1　$RECOGNITRON_{\max\{\#1,\#2\}}$ を作る

$$RECOGNITRON_{\#1}\ (\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) \equiv < \Phi_B, T, SM, BSC_{\#1} > \tag{C3.3}$$

$$RECOGNITRON_{\#2}\ (\mathfrak{C}(J):\Omega(J)) \equiv < \Phi_B, T, SM, BSC_{\#2} > \tag{C3.4}$$

から，再帰的構成により，$BSC_{\max\{\#1,\#2\}}$ を得よう．

次の定理C.6は,最大値演算により大分類関数 $BSC_{\max\{\#1,\#2\}}$ が構成されることを指摘している．

[定理C.6]（ 最大値演算による大分類関数の再帰構成定理）

$$BSC_{\max\{\#1,\#2\}}(\varphi, j) = psn\left(\frac{\max\{BSC_{\#1}(\varphi, j), BSC_{\#2}(\varphi, j)\}}{\sum_{i\in J}\max\{BSC_{\#1}(\varphi, i), BSC_{\#2}(\varphi, i)\}} - e_j\right), 0 < e_j \leq 1 \tag{C3.5}$$

と定義される関数

$$BSC_{\max\{\#1,\#2\}} : \Phi \times J \to \{0,1\} \tag{C3.6}$$

は，axiom 3を満たす $BSC_{\#1}, BSC_{\#2}$ が共にカテゴリ間の,式（A3.4）の相互排除性も満たすなら，axiom 3を満たす．$BSC_{\#1}, BSC_{\#2}$ が共にカテゴリ間の相互排除性も満たすなら，$BSC_{\max\{\#1,\#2\}}$ もカテゴリ間の相互排除性も満たす．

（証明）　割愛される．　□

$BSC_{\max\{\#1,\#2\}}$ は $BSC_{\#1}, BSC_{\#2}$ の双方の情報を集めて得られた類似度関数である．

そうすると，式（C1.7）の最大値選択関数 $f_{\max\{\#1,\#2\}}(z_1, z_2)$ を導入して，2つの認識システム $RECOGNITRON_{\#1}$，$RECOGNITRON_{\#2}$ から，新たに，認識システム

$$\begin{aligned} &RECOGNITRON\ (\mathrm{C}(J):\Omega(J))_{\max\{\#1,\#2\}} \equiv < \Phi_B, T, SM, BSC_{\max\{\#1,\#2\}} > \\ &= f_{\max\{\#1,\#2\}}(RECOGNITRON_{\#1}, RECOGNITRON_{\#2}) \end{aligned} \tag{C3.7}$$

が得られ,

$$RECOGNITRON_{\max\{\#1,\#2\}} \equiv \max{}_{BSC}\{RECOGNITRON_{\#1}, RECOGNITRON_{\#2}\} \tag{C3.8}$$

と表記する.

C3.2　$RECOGNITRON_{\min\{\#1,\#2\}}$ を作る

再帰的構成により，$BSC_{\min\{\#1,\#2\}}$ を得よう.

次の定理C.７は,最小値演算により大分類関数 $BSC_{\min\{\#1,\#2\}}$ が構成されることを指摘している.

[定理C.７]（ 最小値演算による大分類関数の再帰構成定理）

$$BSC_{\min\{\#1,\#2\}}(\varphi,j)=psn(\frac{\min\{BSC_{\#1}(\varphi,j),BSC_{\#2}(\varphi,j)\}}{\sum_{i\in J}\min\{BSC_{\#1}(\varphi,i),BSC_{\#2}(\varphi,i)\}}-e_j),0<e_j\le 1 \tag{C3.9}$$

と定義される３つの関数

$$BSC_{\min\{\#1,\#2\}}:\Phi\times J\to\{0,1\} \tag{C3.10}$$

は，axiom 3を満たす $BSC_{\#1},BSC_{\#2}$ が共にカテゴリ間の,式（A3.4）の相互排除性も満たすなら，axiom 3を満たす．$BSC_{\#1},BSC_{\#2}$ が共にカテゴリ間の相互排除性も満たすなら，$BSC_{\min\{\#1,\#2\}}$ もカテゴリ間の相互排除性も満たす.

（証明）　割愛される.　□

$BSC_{\min\{\#1,\#2\}}$ は $BSC_{\#1},BSC_{\#2}$ に共通な情報を集めて得られた類似度関数である.

そうすると，式（C1.12）の最小値選択関数 $f_{\min\{\#1,\#2\}}(z_1,z_2)$ を導入して，2つの認識システム $RECOGNITRON_{\#1}$，$RECOGNITRON_{\#2}$ から，新たに，認識システム

$$RECOGNITRON\ (\mathsf{C}(J):\Omega(J))_{\min\{\#1,\#2\}}\equiv<\Phi_B,T,SM,BSC_{\min\{\#1,\#2\}}>$$

$$=f_{\min\{\#1,\#2\}}(RECOGNITRON_{\#1},RECOGNITRON_{\#2}) \tag{C3.11}$$

が得られ,

$$RECOGNITRON_{\min\{\#1,\#2\}}\equiv\min_{BSC}\{RECOGNITRON_{\#1},RECOGNITRON_{\#2}\} \tag{C3.12}$$

と表記する.

C3.3　2つの新認識システム $RECOGNITRON_{\max\{\#1,\#2\}}$，$RECOGNITRON_{\min\{\#1,\#2\}}$ の，旧認識システム $RECOGNITRON_{\#k},k=1,2$ への還元

$RECOGNITRON_{\max\{\#1,\#2\}}$，$RECOGNITRON_{\min\{\#1,\#2\}}$ が $RECOGNITRON_{\#k},k=1,2$ へ還元され得る場合があることを示そう.

式（C3.1）0－の計算規則を約束すれば，次の定理C.８は，$RECOGNITRON_{\max\{\#1,\#2\}}$，$RECOGNITRON_{\min\{\#1,\#2\}}$ が $RECOGNITRON_{\#k},k=1,2$ へ還元される場合があることを指摘している.

[定理C.８]（$RECOGNITRON_{\max\{\#1,\#2\}}$，$RECOGNITRON_{\min\{\#1,\#2\}}$ の，$RECOGNITRON_{\#k},k=1,2$ への還元定理）

条件

$$\forall j\in J,e_j\le\frac{1}{|J|} \tag{C3.13}$$

の下で,

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J,BSC_{\#1}(\varphi,j)=BSC_{\#2}(\varphi,j) \tag{C3.14}$$

ならば，$k=1,2$として，

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J,BSC_{\max\{\#1,\#2\}}(\varphi,\omega_j)=BSC_{\min\{\#1,\#2\}}(\varphi,\omega_j)=BSC_{\#k}(\varphi,\omega_j) \tag{C3.15}$$

が成り立ち，$RECOGNITRON_{\max\{\#1,\#2\}}$，$RECOGNITRON_{\min\{\#1,\#2\}}$ は共に，$RECOGNITRON_{\#k},k=1,2$，へ還元される．

（証明） 本定理の条件を使えば，$k=1,2$として，

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J,BSC_{\max\{\#1,\#2\}}(\varphi,j)=psn(\frac{\max\{BSC_{\#1}(\varphi,j),BSC_{\#2}(\varphi,j)\}}{\sum_{i\in J}\max\{BSC_{\#1}(\varphi,i),BSC_{\#2}(\varphi,i)\}}-e_j)$$

$$=psn(\frac{BSC_{\#k}(\varphi,j)}{\sum_{i\in J}BSC_{\#k}(\varphi,i)}-e_j) \tag{C3.16}$$

$$=BSC_{\#k}(\varphi,j)\qquad\because\qquad\forall j\in J,e_j\le\frac{1}{|J|} \tag{C3.17}$$

を得る．同様に，$k=1,2$として，

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J,BSC_{\min\{\#1,\#2\}}(\varphi,j)=BSC_{\#k}(\varphi,j) \tag{C3.18}$$

を得る． □

C４．大分類関数 $BSC_{\#}$ を持つ $RECOGNITRON_{\#}$ から $RECOGNITON_{\neg\#}$ を作る

再帰的構成により，$RECOGNITRON_{\#}$ から $RECOGNITON_{\neg\#}$ を得よう．

認識システム

$$RECOGNITRON_{\#}(\mathfrak{C}(J):\Omega(J))\equiv<\Phi_B,T,SM,BSC_{\#}> \tag{C4.1}$$

での大分類関数 $BSC_{\#}$ を使って新しい大分類関数 $BSC_{\neg\#}$ を再帰的に構成し，新たに，認識システム

$$RECOGNITRON_{\neg\#}(\mathsf{C}(J):\Omega(J))\equiv<\Phi_B,T,SM,BSC_{\neg\#}>$$

$$=f_{\neg\#}(RECOGNITRON_{\#}) \tag{C4.2}$$

を作る．この認識システムを

$$RECOGNITRON_{\neg\#}\equiv\neg_{BSC}RECOGNITRON_{\#} \tag{C4.3}$$

と表記する．

C4.1 逆数演算による大分類関数の再帰的構成―原型―

以後，式（1.1）の認識システム $RECOGNITRON$ の，axiom 3を満たす式（A3.1）の大分類関数 BSC はカテゴリ間の，式（A3.1）の相互排除性を満すとしよう．

先ず，

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J,0\le\frac{\dfrac{1}{1-BSC_{\#}(\varphi,j)}}{\displaystyle\sum_{i\in J}\frac{1}{1-BSC_{\#}(\varphi,i)}}\le 1 \qquad \text{(C4.4)}$$

が成立することに注意しておく．カテゴリ番号 $j\in J$ の２つの部分集合

$$J_0(\varphi)\equiv\{j\in J\mid BSC_{\#}(\varphi,j)=0\} \qquad \text{(C4.5)}$$

$$J_1(\varphi)\equiv\{j\in J\mid BSC_{\#}(\varphi,j)=1\} \qquad \text{(C4.6)}$$

を導入する．

$$J_0(\varphi)\cup J_1(\varphi)=J \qquad \text{(C4.7)}$$

が成立する．

ここで，

$$\frac{\dfrac{1}{1-BSC_{\#}(\varphi,j)}}{\displaystyle\sum_{i\in J}\frac{1}{1-BSC_{\#}(\varphi,i)}}=$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{|J_1(\varphi)|}\cdots\ j\in J_1(\varphi)\ne\phi\text{のとき}\\[2ex] 0\cdots\ j\in J_0(\varphi)\wedge J_1(\varphi)\ne\phi\text{のとき}\\[2ex] \dfrac{1}{|J|}\cdots\ J_1(\varphi)=\phi\text{のとき}\end{cases} \qquad \text{(C4.8)}$$

であることに注意する．

$$\forall j\in J,0<\frac{1}{n+1}<e_j\le\frac{1}{n},0<n\le\frac{1}{|J|} \qquad \text{(C4.9)}$$

であれば，$J_1(\varphi)\ne\phi$ の場合，

$$n\ge|J_1(\varphi)| \qquad \text{(C4.10)}$$

とすれば，数式（4.13）で定義される式（4.14）の関数 $BSC_{\neg\#}$ につき，

$$j\in J_0(\varphi)\text{のとき，}\ BSC_{\neg\#}(\varphi,j)=0 \qquad \text{(C4.11)}$$

$$j\in J_1(\varphi)\text{のとき，}\ BSC_{\neg\#}(\varphi,j)=1 \qquad \text{(C4.12)}$$

を得，$BSC_{\neg\#}$ はこのパターン $\varphi\in\Phi$ の有効なカテゴリの数を n 個以下に制限することがわかる．

詳細には，次の定理C.9が成立することがわかる．

[定理C.9]（逆数演算による大分類関数の再帰的構成）

axiom 3を満たす大分類関数 BSC はカテゴリ間の相互排除性を満すとしよう．

$$BSC_{\neg\#}(\varphi, j) = psn\left(\frac{\dfrac{1}{1-BSC_{\#}(\varphi, j)}}{\sum_{i \in J} \dfrac{1}{1-BSC_{\#}(\varphi, i)}} - e_j\right)$$

$$0 < e_j \le 1 \tag{C4.13}$$

と定義される関数

$$BSC_{\neg\#} : \Phi \times J \to \{0,1\} \tag{C4.14}$$

は，$BSC_{\#}$ がカテゴリ間の相互排除性も満たすなら，axiom 3を満たす．$BSC_{\#}$ がカテゴリ間の相互排除性も満たすなら，もカテゴリ間の相互排除性も満たす．

そして，次の（1&），（2&）が成り立つ：

(1&−1) $J_1(\varphi) = J \vee J_1(\varphi) = \phi$ としよう．

(1&−1−0) $|J| > \dfrac{1}{e_j} \Rightarrow BSC_{\neg\#}(\varphi, j) = 0$

(1&−1−1) $|J| \le \dfrac{1}{e_j} \Rightarrow BSC_{\neg\#}(\varphi, j) = 1$

(1&−1−3) $J_1(\varphi) = J$ のとき

$$\forall j \in J, |J| \le \frac{1}{e_j}$$

$$\Rightarrow \forall j \in J, BSC_{\neg\#}(\varphi, j) = 1 = BSC_{\#}(\varphi, j)$$

That is, $\forall j \in J, BSC_{\neg\#}(\varphi, j) = BSC(\varphi, j)$

(1&−1−4) $J_1(\varphi) = \phi$ のとき

$$\forall j \in J, |J| > \frac{1}{e_j}$$

$$\Rightarrow \forall j \in J, BSC_{\neg\#}(\varphi, j) = 0 = BSC_{\#}(\varphi, j)$$

That is, $\forall j \in J, BSC_{\neg\#}(\varphi, j) = BSC(\varphi, j)$

(2&) $J_1(\varphi) \neq \phi \wedge J_1(\varphi) \neq J$ としよう．

(2&-1) $\forall j \in J - J_1(\varphi), BSC_{\neg\#}(\varphi, j) = 0$

(2&-2) $\forall j \in J_1(\varphi),\ 0 < e_j \leq \dfrac{1}{n_j} \wedge \left|J_1(\varphi)\right| \leq n_j$

$$\Rightarrow [\forall j \in J_1(\varphi), BSC_{\neg\#}(\varphi, j) = 1 = BSC_{\#}(\varphi, j)]$$

$$\wedge[\forall i \in J - J_1(\varphi), BSC_{\neg\#}(\varphi, i) = 0 = BSC_{\#}(\varphi, i)]$$

That is, $\forall j \in J, BSC_{\neg\#}(\varphi, j) = BSC(\varphi, j)$

(2&-3) $\dfrac{1}{n_j} < e_j \leq 1 \wedge \left|J_1(\varphi)\right| > n_j \wedge BSC_{\#}(\varphi, j) = 1$

$$\Rightarrow BSC_{\neg\#}(\varphi, j) = 0 = 1 - BSC_{\#}(\varphi, j)$$

(2&-4) $\dfrac{1}{n_j} < e_j \leq 1 \wedge \left|J_1(\varphi)\right| \leq n_j \wedge \dfrac{1}{\left|J_1(\varphi)\right|} < e_j \wedge BSC_{\#}(\varphi, j) = 1$

$$\Rightarrow BSC_{\neg\#}(\varphi, j) = 0 = 1 - BSC_{\#}(\varphi, j)$$

(2&-5) $\dfrac{1}{n_j} < e_j \leq 1 \wedge \left|J_1(\varphi)\right| \leq n_j \wedge \dfrac{1}{\left|J_1(\varphi)\right|} \geq e_j \wedge BSC_{\#}(\varphi, j) = 1$

$$\Rightarrow BSC_{\neg\#}(\varphi, j) = 1 = BSC_{\#}(\varphi, j)$$

(2&-6) $0 < e_j \leq \dfrac{1}{n_j} \wedge \left|J_1(\varphi)\right| > n_j \wedge \dfrac{1}{\left|J_1(\varphi)\right|} < e_j \wedge BSC_{\#}(\varphi, j) = 1$

$$\Rightarrow BSC_{\neg\#}(\varphi, j) = 0 = 1 - BSC_{\#}(\varphi, j)$$

(2&-7) $0 < e_j \leq \dfrac{1}{n_j} \wedge \left|J_1(\varphi)\right| > n_j \wedge \dfrac{1}{\left|J_1(\varphi)\right|} \geq e_j \wedge BSC_{\#}(\varphi, j) = 1$

$$\Rightarrow BSC_{\neg\#}(\varphi, j) = 1 = BSC_{\#}(\varphi, j)$$

が成り立つ．

（証明）丹念に検討すれば，容易に確かめることができる．　□

上述の定理C.9から，次の定理C.10が成り立つ．

[定理C.10]（RECOGNITRONの無変換定理）

上述の定理C.9の3場合，（1&-1-3），（1&-1-4），（2&-2）では，

$RECOGNITRON_{\neg\#} = RECOGNITRON_{\#}$.

（証明）　明らか．　□

C4.2　カテゴリ間の相互排除性を満たす大分類関数 $BSC_{\neg\#}$ の構成

$$BSC_{\neg\#}(\varphi, j) = psn\left(\frac{\dfrac{1}{1 - SM_{\#}(\varphi,\omega_j)\cdot BSC_{\#}(\varphi, j)}}{\sum_{i\in J}\dfrac{1}{1 - SM(\varphi,\omega_i)_{\#}\cdot BSC_{\#}(\varphi,i)}} - e_j\right)$$

ここに，$0 < e_j \le 1$　（C4.15）

を導入する．

３つのカテゴリ番号の集合

$$J'_0(\varphi) \equiv \{ j \in J \mid 0 = SM_{\#}(\varphi,\omega_j)\cdot BSC_{\#}(\varphi, j)\} \quad \text{(C4.16)}$$

$$J'_+(\varphi) \equiv \{ j \in J \mid 0 < SM_{\#}(\varphi,\omega_j)\cdot BSC_{\#}(\varphi, j) < 1\} \quad \text{(C4.17)}$$

$$J'_1(\varphi) \equiv \{ j \in J \mid SM_{\#}(\varphi,\omega_j)\cdot BSC_{\#}(\varphi, j) = 1\} \quad \text{(C4.18)}$$

を導入すると，

$$J'_0(\varphi) \cup J'_+(\varphi) \cup J'_1(\varphi) = J \quad \text{(C4.19)}$$

が成立する．このとき，

$$\frac{\dfrac{1}{1 - SM_{\#}(\varphi,\omega_j)\cdot BSC_{\#}(\varphi, j)}}{\sum_{i\in J}\dfrac{1}{1 - SM_{\#}(\varphi,\omega_i)\cdot BSC_{\#}(\varphi,i)}} \quad \text{(C4.20)}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{1 - SM_{\#}(\varphi,\omega_j)\cdot BSC_{\#}(\varphi, j)}}{\left|J'_0(\varphi)\right| + \sum_{i\in J'_0(\varphi)}\dfrac{1}{1 - SM_{\#}(\varphi,\omega_i)\cdot BSC_{\#}(\varphi,i)} + \sum_{i\in J'_1(\varphi)} +\infty} =$$

$$\begin{cases} 0\cdots j\in J_0'(\varphi)\cup J_+'(\varphi)\wedge J_1'(\varphi)\neq\phi \text{のとき} \\ \dfrac{1}{|J_1'(\varphi)|}\cdots j\in J_1'(\varphi)\wedge J_1'(\varphi)\neq\phi \text{のとき} \\ \dfrac{1}{|J_0'(\varphi)|+\sum_{i\in J_0'(\varphi)}\dfrac{1}{1-SM_\#(\varphi,\omega_i)\cdot BSC_\#(\varphi,i)}}\cdots j\in J_0'(\varphi)\wedge J_1'(\varphi)=\phi \text{のとき} \\ \dfrac{\dfrac{1}{1-SM_\#(\varphi,\omega_i)\cdot BSC_\#(\varphi,i)}}{|J_0'(\varphi)|+\sum_{i\in J_0'(\varphi)}\dfrac{1}{1-SM_\#(\varphi,\omega_i)\cdot BSC_\#(\varphi,i)}}\cdots j\in J_+'(\varphi)\wedge J_1'(\varphi)=\phi \text{のとき} \end{cases} \tag{C4.21}$$

である.

次の定理C.11が成り立ち，カテゴリ間の相互排除性を満たすとは限らない大分類関数$BSC_\#$から，カテゴリ間の相互排除性を満たす大分類関数$BSC_{\neg\#}$が構成された.

[定理C.11]（カテゴリ間の相互排除性を満たす大分類関数の再帰的構成定理）

関数$SM_\#$はaxiom 2を満たすとしよう．関数$BSC_{\neg\#}$はaxiom 3を満たすとしよう．このとき，式（C4.15）の如く定義された関数はaxiom 3を満たす．しかも，関数$BSC_{\neg\#}$はカテゴリ間の相互排除性を満たす.

（証明）

$$\forall j\in J, SM_\#(\omega_j, j)=1\wedge[\forall i\in J-\{j\}, SM_\#(\omega_i,\omega_j)=0] \quad \because \quad \text{axiom 2,(i)} \tag{C4.22}$$

$$\forall j\in J, BSC_\#(\omega_j, j)=1 \quad \because \quad \text{axiom3,(i)} \tag{C4.23}$$

が成立しているから，

$$\frac{1}{1-SM_\#(\omega_j,\omega_i)\cdot BSC_\#(\omega_j,i)}=$$

$$\begin{cases} +\infty\cdots i=j \text{のとき} \\ 1\cdots i\neq j \text{のとき} \end{cases} \tag{C4.24}$$

であることを考慮すれば,

$$\frac{\dfrac{1}{1-SM_{\#}(\omega_k,\omega_j)\cdot BSC_{\#}(\omega_k,j)}}{\displaystyle\sum_{i\in J}\frac{1}{1-SM(\omega_k,\omega_i)_{\#}\cdot BSC_{\#}(\omega_k,i)}}=$$

$$\begin{cases}1\cdots k=j\text{のとき}\\0\cdots k\neq j\text{のとき}\end{cases}\tag{C4.25}$$

が成り立つ．よって，

$$\varphi=\omega_j\text{のとき，}\ BSC_{\neg\#}(\varphi,j)=1\wedge[\forall i\in J-\{j\},BSC_{\neg\#}(\varphi,i)=0]\tag{C4.26}$$

がわかり，関数$BSC_{\neg\#}$がaxiom3,（ⅰ）を満たし，然も，カテゴリ間の相互排除性を満たすことがわかった．

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J,SM_{\#}(T\varphi,\omega_j)=SM_{\#}(\varphi,\omega_j)\quad\because\ \text{axiom 2,(iii)}\tag{C4.27}$$

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J,BSC_{\#}(T\varphi,j)=BSC_{\#}(\varphi,j)\because\ \text{axiom3,(ii)}\tag{C4.28}$$

が成立しているから，関数$BSC_{\neg\#}$がaxiom3,（ii）を満たすことがわかる．

C4.3　素直な大分類関数BSCの再帰的構成

2条件

（1&）（零点不動点性）$f(0)=0$ （C4.29）

（2&）（正性）$f(1)=a>0$ （C4.30）

を満たす関数

$$f:\{0,1\}\leftrightarrow\{0,a\}\tag{C4.31}$$

を選ぶ．このとき，axiom 3を満たす大分類関数BSC'から，次のように定義される関数BSC'を作る：

$$BSC'(\varphi,j)=psn\left(\frac{f(BSC(\varphi,j)}{\sum_{i\in J}f(BSC(\varphi,i))}-e_j\right),\quad 0<e_j\leq 1\tag{C4.32}$$

□

カテゴリ間の，式（A3.4）の相互排除性を考えておく．

$$J_{BSC,1}(\varphi)\equiv\{j\in J\,|\,BSC(\varphi,j)=1\}\tag{C4.33}$$

を導入する．そうすると，次の定理C.12が成り立つ．

[定理C.12]（ 大分類関数の再帰的構成定理）

axiom 3を満たす大分類関数BSC'はカテゴリ間の相互排除性を満たすとしよう．式（C4.32）の如く定義された関数

$$BSC':\Phi\times J\to\{0,1\}\tag{C4.34}$$

はaxiom 3を満たす．関数BSC'はカテゴリ間の相互排除性をも満たしている．

[定理C.12の系1]
一般に,

$$J_{BSC',1}(\varphi) \subseteq J_{BSC,1}(\varphi) \tag{C4.35}$$

であるが，ある有限な正整数 n_j が存在し，不等式

$$e_j \leq \frac{1}{n_j} \tag{C4.36}$$

が成立しているとしよう．

$$BSC'(\varphi, j) = 1 \Rightarrow BSC(\varphi, j) = 1 \wedge n_j \geq \left|J_{BSC,1}(\varphi)\right| \tag{C4.37}$$

が成立する．逆に,

$$n_j \geq |J_{BSC,1}(\varphi)| \geq 1 \text{ ならば, } BSC(\varphi, j) = 1 \Rightarrow BSC'(\varphi, j) = 1 \tag{C4.38}$$

[定理C.12の系2]
不等式

$$e_j \leq \frac{1}{|J|} \tag{C4.39}$$

が成立しているならば,

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, BSC'(\varphi, j) = BSC(\varphi, j). \tag{C3.40}$$

（証明） $$q_j(\varphi) \equiv \frac{f(BSC(\varphi, j))}{\sum_{i \in J} f(BSC(\varphi, i))} \tag{C4.41}$$

について,

(1@) $J_{BSC,1}(\varphi) = \phi$ のとき，$\forall j \in J,\ q_j(\varphi) = 0 \quad \therefore \quad BSC'(\varphi, j) = 0$　(C4.42)

(2@) $J_{BSC,1}(\varphi) \neq \phi \wedge BSC(\varphi, j) = 0$ のとき,

$$q_j(\varphi) = \frac{f(0)}{\sum_{i \in J_{BSC,1}(\varphi)} f(1)} = 0 \quad \therefore \quad BSC'(\varphi, j) = 0 \tag{C4.43}$$

$\therefore$　$i \neq j$ ならば，BSC に関するカテゴリ間の相互排除性の成立から，$BSC'(\omega_i, j) = 0$

(3@) $J_{BSC,1}(\varphi) \neq \phi \wedge BSC(\varphi, j) = 1$ のとき,　(C4.44)

$$q_j(\varphi) = \frac{f(1)}{\sum_{i \in J_{BSC,1}(\varphi)} f(1)} \leq 1 \tag{C4.45}$$

$$\therefore \quad BSC'(\varphi, j) = 0 \vee BSC'(\varphi, j) = 1 \tag{C4.46}$$

$$\therefore \quad q_j(\omega_j) = 1 \quad \therefore \quad BSC'(\omega_j, j) = 1 \tag{C4.47}$$

より，axiom 3,（ｉ），並びに，BSC' に関するカテゴリ間の相互排除性の成立は明らか．更に，axiom 3,（ii）の成立は，BSC がaxiom 3,（ii）を満たすことより明らか．

（定理C.12の系1の証明） 定理C.12の証明での，（1@），（2@）からわかるように，式（C4.35）が成り立つ．

特に，$J_{BSC,1}(\varphi) = \phi$ であれば，$J_{BSC',1}(\varphi) = \phi$ であることがわかる．

$J_{BSC',1}(\varphi) = \phi$ として，

$BSC'(\varphi, j) = 1$ ならば，$BSC(\varphi, j) = 1$ である．何故ならば，$BSC(\varphi, j) = 0$ とすると，$BSC'(\varphi, j) = 0$ という矛盾が従うからである．

以上により，式（C4.35）が示された．

不等式（C4.36）が成立しているとしよう．

$J_{BSC,1}(\varphi) \neq \phi \wedge BSC(\varphi, j) = 1$ であるようなカテゴリ番号 $j \in J$ について，（3@）から，

$$q_j(\varphi) = \frac{f(1)}{\sum_{i \in J_{BSC,1}(\varphi)} f(1)} = \frac{1}{\left|J_{BSC,1}(\varphi)\right|} \tag{C4.48}$$

であり，

$$BSC'(\varphi, j) = 1 \Rightarrow BSC(\varphi, j) = 1 \wedge q_j(\varphi) - e_j \geq q_j(\varphi) - \frac{1}{n_j} \geq 0 \Rightarrow n_j \geq |J_{BSC,1}(\varphi)| \tag{C4.49}$$

が得られた．逆に，

$$n_j \geq |J_{BSC,1}(\varphi)| \geq 1 \Rightarrow \quad \frac{1}{\left|J_{BSC,1}(\varphi)\right|} - e_j \geq \frac{1}{\left|J_{BSC,1}(\varphi)\right|} - \frac{1}{n_j} \geq 0 \tag{C4.50}$$

を得，

$$BSC(\varphi, j) = 1 \tag{C4.51}$$

であれば，

$$q_j(\varphi) - e_j \geq 0 \quad \therefore \quad BSC'(\varphi, j) = 1 \tag{C4.52}$$

が成り立つ．

（定理C.12の系2の証明）

定理C.12の証明での，（1@），（2@）からわかるように，

$BSC(\varphi, j) = 0$ であれば，$BSC'(\varphi, j) = 0$ である．よって，$BSC(\varphi, j) = 1$ であれば，$BSC'(\varphi, j) = 1$ であることを示せば，系２が成り立つことになる．

$J_{BSC,1}(\varphi) \neq \phi \wedge BSC(\varphi, j) = 1$ であるようなカテゴリ番号 $j \in J$ について，（3@）から，不等式（C4.39）が成立していれば，

$$q_j(\varphi) = \frac{f(1)}{\sum_{i \in J_{BSC,1}(\varphi)} f(1)} = \frac{1}{|J_{BSC,1}(\varphi)|} \geq \frac{1}{|J|} \geq e_j \quad \therefore \quad BSC'(\varphi, j) = 1 \tag{C4.53}$$

を得，証明が終わる．□

C4.4 一般2重規格化演算による今１つの大分類関数の再帰的構成

２条件

(1¥)（零点不動点性）$f(0) = 0$ （C4.54）

(2¥)（正性）$f(\frac{1}{k}) = a_k > 0, k = 1, 2, \cdots, |J|$ （C4.55）

を満たす正値関数

$$f : \{0, \frac{1}{|J|}, \frac{1}{|J|-1}, \frac{1}{|J|-2}, \ldots, 1\} \to \{0, a_{|J|}, a_{|J|-1}, a_{|J|-2}, \cdots, a_1\} \tag{C4.56}$$

を導入する．このとき，axiom 3を満たすカテゴリ間の相互排除性を満たす大分類関数BSCを導入して，一般2重規格化演算を使って，2値関数BSC'を次のように定義する：

$$BSC'(\varphi, j) = psn\left(\frac{f\left(\frac{BSC(\varphi, j)}{\sum_{k \in J} BSC(\varphi, k)}\right)}{\sum_{i \in J} f\left(\frac{BSC(\varphi, i)}{\sum_{k \in J} BSC(\varphi, k)}\right)} - e_j\right), 0 < e_j \leq 1 \tag{C4.57}$$

このとき，次の定理C.13が成り立つ．

[定理C.13]（一般2重規格化演算による大分類関数の再帰的構成定理）

axiom 3を満たす大分類関数BSCはカテゴリ間の相互排除性を満たすとしよう．式（C4.57）の如く定義された式（C4.34）のBSC'はaxiom 3を満たす．関数はカテゴリ間の相互排除性をも満たしている．

（証明）BSC'がaxiom 3,（ii）を満たすことは，がaxiom 3,（ii）を満たすことから，明らかである．

さて，$\varphi = \omega_\ell$としよう．

$$f\left(\frac{BSC(\varphi, i)}{\sum_{k \in J} BSC(\varphi, k)}\right) = f\left(\frac{BSC(\varphi, i)}{BSC(\varphi, \ell)}\right) =$$

$$= f\left(\frac{BSC(\varphi, i)}{BSC(\varphi, \ell)}\right) \quad \because \quad BSC \text{ はカテゴリ間の相互排除性を満たす}$$

$$=$$

$$\begin{cases} f(1) \cdots \ell = i \text{ のとき} \\ f(0) = 0 \cdots \ell \neq i \text{ のとき} \end{cases} \tag{C4.58}$$

を得て，

$$\frac{f(\dfrac{BSC(\varphi,j)}{\sum_{k\in J}BSC(\varphi,k)})}{\sum_{i\in J}f(\dfrac{BSC(\varphi,i)}{\sum_{k\in J}BSC(\varphi,k)})}-e_j$$

$=$

$$\begin{cases}\dfrac{f(1)}{f(1)}-e_j=1-e_j\cdots\ell=j\text{ のとき}\\ \\ \dfrac{0}{f(1)}-e_j=0-e_j\cdots\ell=j\text{ のとき}\end{cases} \quad \text{(C4.59)}$$

が成立し，

$BSC'(\varphi,\omega_j)=$

$$\begin{cases}1\cdots\ell=j\text{ のとき}\\ 0\cdots\ell\neq j\text{ のとき}\end{cases} \quad \text{(C4.60)}$$

を得，BSC' がaxiom 3,（i）を満たし，然も，カテゴリ間の相互排除性を満たすことがわかる． □

式（4.33）の部分集合 $J_{BSC,1}(\varphi)$ を導入すれば，

$J_{BSC,1}(\varphi)=\phi$ のとき，

$$\forall j\in J,\ BSC'(\varphi,j)=psn(0-e_j)=0 \quad \because \quad \frac{0}{0}=0 \quad \text{(C4.61)}$$

である．以後，$J_{BSC,1}(\varphi)\neq\phi$ としよう．

$$BSC'(\varphi,j)=psn(\frac{f(\dfrac{BSC(\varphi,j)}{\left|J_{BSC.1}(\varphi)\right|})}{\sum_{i\in J}f(\dfrac{BSC(\varphi,i)}{\left|J_{BSC,1}(\varphi)\right|})}-e_j)$$

$$=psn(\frac{f(\dfrac{BSC(\varphi,j)}{\left|J_{BSC.1}(\varphi)\right|})}{\sum_{i\in J_{BSC,1}(\varphi)}f(\dfrac{BSC(\varphi,i)}{\left|J_{BSC.1}(\varphi)\right|})}-e_j) \quad \text{(C4.62)}$$

である．

$BSC(\varphi,j)=0$ のとき，$BSC'(\varphi,j)=0$ であることがわかる．

$BSC(\varphi,j)=1$ のとき，$n(\varphi)\equiv\left|J_{BSC,1}(\varphi)\right|$ とおくと，

$$BSC'(\varphi,j)=psn(\frac{a_{n(\varphi)}}{n(\varphi)\cdot a_{n(\varphi)}}-e_j)=psn(\frac{1}{n(\varphi)}-e_j) \quad \text{(C4.63)}$$

を得，

$$BSC'(\varphi, j) = \begin{cases} 0 \cdots n(\varphi) > \dfrac{1}{e_j} \text{のとき} \\ 1 \cdots n(\varphi) \leq \dfrac{1}{e_j} \text{のとき} \end{cases} \tag{C4.64}$$

を得，大分類関数 BSC' の値は， $BSC(\varphi, j) = 1$ となるカテゴリ番号 $j \in J$ の個数 $n(\varphi)$ にのみ依存して決まることがわかる．　（付録C終わり）

付録D.認識システム *RECOGNITRON* の多段階連想形認識過程

本付録Dでは，式（1.1）の認識システム *RECOGNITRON* が使用している連想形認識（associative recognition）の働きが説明される．

先ず，次の3定義[定義D-1],[定義D-2],[定義D-3]を設ける．

[定義D-1]（カテゴリ帰属知識間の等形式関係 $=_\Delta$）

２つのカテゴリ帰属知識 $<\varphi, \gamma>, <\phi, \lambda> \in <\Phi, 2^J>$ の形式が等しいことを，

$$<\varphi, \gamma> =_\Delta <\phi, \lambda> \tag{D.1}$$

と表現し，

$$<\varphi, \gamma> =_\Delta <\phi, \lambda> \Leftrightarrow \varphi = \phi \wedge \gamma = \lambda \tag{D.2}$$

と定義する．　□

[定義D-2]（構造受精作用素 $A(\mu) : \Phi \to \Phi$ の定義）

パターン $\varphi \in \Phi$ をパターン $A(\mu)\varphi \in \Phi$ へ変換する構造受精作用素と呼ばれる写像

$$A(\mu) : \Phi \to \Phi \tag{D.3}$$

は，式（A1.1）のモデル構成作用素 T，式（A2.5）の類似度関数 SM，式（A3.1）の大分類関数 BSC，式（A2.2）の代表パターン集合 Ω を使用して次のように定義される：

（ｉ）$\varphi = 0 \vee \mu = \phi$ のとき

$$A(\mu)\varphi = 0. \tag{D.4}$$

（ⅱ） $\varphi \neq 0 \wedge \mu \neq \phi$ のとき

（ⅱ-1） $\sum_{j \in \mu} BSC(\varphi, j) = 0$　のとき

$$A(\mu)\varphi = \sum SM(\varphi, \omega_j) \cdot T\omega_j . \tag{D.5}$$

（ⅱ-2） $\sum_{j\in\mu} BSC(\varphi, j) > 0$ 　のとき

$$A(\mu)\varphi = \sum_{j\in\mu} SM(\varphi, \omega_j)\cdot BSC(\varphi, j)\cdot T\omega_j. \tag{D.6}$$

□

[定義D-3]（カテゴリ帰属知識空間 $<\Phi, 2^J>$ での構造受精変換 $TA(\mu)T$ の定義）
構造受精変換

$$TA(\mu)T :< \Phi, 2^J > \to < \Phi, 2^J > \tag{D.7}$$

の定義は次の通りである：

$$\forall < \varphi, \gamma > \in < \Phi, 2^J >, TA(\mu)T < \varphi, \gamma >$$

$$=_\Delta < TA(\mu\cap\gamma)T\varphi, CSF(\varphi, \mu\cap\gamma) > \tag{D.8}$$

□

さて，$\varphi\in\Phi$ が処理の対象とする問題のパターンとしよう．φ はカテゴリ集合

$$\mathfrak{C}(\lambda_0) \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid j\in\lambda_0\} \tag{D.9}$$

の内の１つのカテゴリに帰属していると，認識システムには事前に，わかっているものとしよう．このとき，初期条件として，

$$< \phi_t, \lambda_t >|_{t=0} =_\Delta < T\varphi, \lambda_0 > \tag{D.10}$$

を採用して，
カテゴリ番号リスト $\mu_t \in 2^J (t = 0,1,2,\cdots)$ をその都度，選定して，多段階連想形認識過程

$$< \phi_{t+1}, \lambda_{t+1} > =_\Delta TA(\mu_t)T < \phi_t, \lambda_t >, t = 0,1,2,\cdots \tag{D.11}$$

を作り出す．不動点方程式

$$< \phi_{s+1}, \lambda_{s+1} > =_\Delta < \phi_s, \lambda_s > \tag{D.12}$$

をこの多段階連想形認識過程が終了する条件として採用する．多段階連想形認識過程がこのように，第$s\,(= 0, 1, 2, \cdots)$段階で終了したとき，問題の入力パターン $\varphi\in\Phi$ を $RECOGNITRON$ が連想形認識した結果は，

(1$)recognition: φ belongs to one of $\mathfrak{C}_j, j\in\lambda_s$ (D.13)

(2$)association: φ associates with one of $T\omega_j, j\in\lambda_s$ (D.14)

ということになる．
尚，
（1#）連想形認識した結果は認識可能，認識不定，認識不能の３つに分類されるが，この3つの内，どの１つの認識結果が生じせしめる諸条件

（2#）採用している３構成要素T ,SM ,BSC による連想形認識過程が有限段階で終了するためには
どのような３構成要素T ,SM ,BSC を採用すべきか

（3#）採用している３構成要素T ,SM ,BSC による連想形認識過程について，候補カテゴリ番号リスト$\lambda t \in 2^I (t = 0, 1, 2, \cdots)$の減少条件

$$|\lambda_0| > |\lambda_1| > \cdots > |\lambda t| > \cdots$$

が成立するためには，どのような３構成要素T ,SM ,BSC を採用すべきか

などについては，文献[3],[4]で研究されている．

（付録D終わり）

（著者　鈴木昇一，論文題目　多段階連想形認識システムRECOGNITRONの再帰性と分解性・合成性，文教大学情報学部情報研究no. 投稿論文，投稿年月日　２００６　年４月１７日（月））