文教大学情報学部『情報研究』第35号　2006年７月

SSマルチメディア認識知能情報論に基づく音声の多段階想起認識に役立つモデル構成作用素T，類似度関数SM，大分類関数BSC

鈴 木 昇 一

Model-Construction Operator T,Similarity-Measure Function SM and Rough Classifier BSC for Multi-Stage Associative Recognition of Speeches Based upon SS Multi-Media Intelligence Informatics of Recognition

Shoichi　SUZUKI

要　約

処理の対象となる問題の，すべてのパターンの集まりを記号Φで表す．パターンモデル$T\varphi$とは原パターンφの標準形であって，原パターンφと同じように見えたり，聞こえたりするようなものである．このようなパターンモデルを出力し，axiom 1を満たす写像

$T:\Phi \to \Phi$

がS.Suzukiにより提案されており，モデル構成作用素といわれている．モデル構成作用素Tがパターンφの変形を吸収できるためには，SS理論［B３］，［B４］によれば，零元不動点性，正定数倍不変性，ベキ等性，非零写像性という４性質を少なくとも満たさなければならない．

類似度関数SMは，パターン$\varphi \in \Phi$が各カテゴリ$\mathfrak{C}_j$の持つ諸性質を典型的に代表している代表パターンω_jの集合（代表パターンの集合）

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\}$$

の各元ω_jと似ている程度を出力する．関数SMはS.Suzukiの理論（SS理論）でのaxiom 2を満たさなければならない．

大分類関数BSCは，パターン$\varphi \in \Phi$が帰属するかも知れない候補カテゴリを複数個，出力する．関数BSCはSS理論でのaxiom 3を満たさなければならない．

音声を認識したり，理解したりするのに役立つであろうSS連想形認識の技術を確保するために，モデル構成作用素T，類似度関数SM 大分類関数BSCの諸例が本論文では，構成される．通常のパターン認識システムは，事前処理器，特徴抽出器，識別器で構成されるといわれるが，T, SM, BSCは各々，事前処理器，特徴抽出器，識別器に相当する．

処理の対象となるパターンφが帰属しているカテゴリ（第$j \in J$番目のカテゴリ）$\mathfrak{C}_j$の番号（カテゴリ番号）jの，すべての集まりを記号Jで表す．SS多段階連想形認識［B3］，［B4］の過程を実現するには，パターンからパターンへ変換する写像（パターン想起変換）の列が帰納的推理で選ばれ

ることが必要である．このパターン想起変換として使われているのが，候補カテゴリ番号のリスト$\mu(\subseteq J)$を助変数に持つ構造受精作用素

$$A(\mu):\Phi\to\Phi,\mu\subseteq J$$

である．パターン$\varphi\in\Phi$を入力した場合に構造受精作用素$A(\mu)$からの出力$A(\mu)\varphi\in\Phi$は，各カテゴリ$\mathfrak{C}_j$の持つ諸性質を典型的に代表している代表パターンω_jのモデル$T\omega_j$の集合（代表パターンモデルの集合）

$$T\cdot\Omega\equiv\{T\omega_j\mid j\in J\}$$

を検索して得られるパターン(想起されたパターン)である．$A(\mu)$は集合$T\cdot\Omega$と，写像Tの下で不変な2つの関数SM, BSCとを用いて構成される．

処理の対象となるパターンφが帰属しているカテゴリ（第$j\in J$番目のカテゴリ）$\mathfrak{C}_j$を決定できるSS多段階連想形認識の過程を実現するには，パターンからパターンへ変換する写像（パターン想起変換）の列が帰納的推理で選ばれることが必要である．このパターン想起変換として使われているのが，従来の，候補カテゴリ番号のリスト$\mu(\subseteq J)$を助変数に持つ構造受精作用素$A(\mu)$である．SS多段階連想形認識の過程においては，$A(\mu)$をモデル構成作用素Tで両側を挟んだ形式$TA(\mu)T$で使うことになる．

入力パターン$\varphi\in\Phi$を

$$\varphi=\varphi_{fixed}+\varphi_{nonfixed}\wedge T\varphi_{fixed}=\varphi_{fixed}\wedge T\varphi_{nonfixed}\neq\varphi_{nonfixed}$$

と分解し，Tの不動点$\varphi_{fixed}=T\varphi\in\Phi$を$\varphi$の代りに採用し，可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元として表された入力パターン$\varphi$を記憶$T\cdot\Omega$内のパターン$\omega_j$のモデル$T\omega_j$として再生し，然も，入力パターン$\varphi$が帰属するカテゴリ$\mathfrak{C}_j$を決定できる連想形多段階認識の働き（SS多段階連想形認識の過程）を実行することになる．

本研究で提案されたT, SM, BSCの諸性質に基づいて，SS多段階想起認識の働きへのその応用が簡単に研究される．

大分類関数BSCを学習の働きで構成することは当然であるが，類似度関数SMを学習の働きで構成することは，本研究の独創性である．この独創性の効用はシミュレーションを実行してみないとわからないが，多分，音声認識にとって，有用な結果をもたらすだろう．

キーワード

(1) パターンモデル(パターンの標準形)　(2)類似度　(3) 大分類
(4)構造受精作用素　(5)カテゴリ帰属知識　(6) 多段階想起SS-認識

Abstract

A pattern recognizer involves three elements:preprocessor,feature extractor and classifier. A preprocessor is used to obtain a canonical form $T\varphi$ of an input pattern φ.A feature extractor is used to seek for a set $u(T\varphi,\ell),\ell\in L$ of numerical values called features extracted from the corresponding canonical form $T\varphi$ of the input pattern φ.A classifier is used to assign a category $\mathfrak{C}_j$

to the input pattern φ with the help of the set $u(T\varphi,\ell),\ell \in L$.

A set of all patterns to be recognized in question is represented by Φ. A model $T\varphi$ is a canonical form of an original pattern φ .If the reconizer will see or hear a correspondung model $T\varphi$ of the original pattern φ, he has a sense of seeing or hearing the original pattern φ as though the model $T\varphi$ were the original pattern φ. Such a mapping

$$T:\Phi \to \Phi$$

must satisfy axiom 1 which appears in a theory (ss theory) proposed by S.Suzuki and then gives as its output when φ is accepted by the recognizer a model $T\varphi$. T is called a model-construction operator. T consequently possesses four properties of having 0 as its fixed-point, an invariance under a multiplication by any positive number,idempotency, and non-zero mapping. Thus, T can absorb some deformation which appears in patterns.

A function SM ,called a similarity-measure function outputs a quantity of similarity between the pattern φ in question and each prototypical pattern $\omega_j \in \Omega \equiv \{\omega_i \mid i \in J\}$,where ω_j is the jth prototypical pattern ω_j belonging to the jth category $\mathfrak{C}_j$. SM must axiom 2 in SS theory.

A function BSC called a rough classifier or a binary-state classifier outputs one or more candidate categories to which a pattern may belong. BSC must satisfy axiom 3 in SS theory.

It is very likely that SS-theory is useful to recognizing or understanding a speech-sound. Some examples of T, SM and BSC for an associative recognition of SS-theory are presented here. T, SM and BSC are equivalent to a preprocessor, a feature extractor, and a classifier respectively.

We represent by J a whole set of numbers js of all categories $\mathfrak{C}_j$, $j \in J$ to which a pattern φ respectively belongs. In order to realize a process of SS multi-stage associative type recognition [B3],[B4], choosing by inductive inference the sequence of the mapping called pattern associative conversion which can transform into a pattern from a pattern is required.

A structural fertilization operator which has a list of candidate category numbers in an assistant variable

$$A(\mu):\Phi \to \Phi, \mu \subseteq J$$

is used as this pattern associative conversion. $A(\mu)\varphi \in \Phi$ which is an output obtained by inputting pattern $\varphi \in \Phi$ to the structural fertilization operator $A(\mu)$ is a recalled pattern obtained by inputting $\varphi \in \Phi$ and by retrieving

$$T \cdot \Omega \equiv \{T\omega_j \mid j \in J\} .$$

$A(\mu)$ consists of $T \cdot \Omega$, SM and BSC that are invariant under T. Form $TA(\mu)T$ which is sandwiched both sides by T is used instead of $A(\mu)$ in the process of SS multi-stage associative type recognition.

SS multi-stage associative type recognition is described as follows:

An input pattern φ expressed as an element of the separable Hilbert space $\mathfrak{H}$ is resolvesd into φ_{fixed} and $\varphi_{nonfixed}$ such that

$$\varphi = \varphi_{fixed} + \varphi_{nonfixed} \wedge T\varphi_{fixed} = \varphi_{fixed} \wedge T\varphi_{nonfixed} \neq \varphi_{nonfixed} .$$

Recognizer adopts the fixed point $T\varphi$ of T instead of φ.Input pattern φ may be reproduced as the model $T\omega_j$ of ω_j in memory $T \cdot \Omega$ throughout multi-stage.Then recognizer can determine that φ belongs to the jth category $\mathfrak{C}_j$. □

Faculties of SS multi-stage associative recognition and its application is simply studied based on many properties of T, SM and BSC.

Although BSC naturally constitutes from work of learning, that SM constitutes from work of learning is the originality of this research. Although this originality is not known, probably a result useful for speech recognition will be brought about if a simulation will be performed.

Key words

(1) a corresponding model of the pattern(a canonical form of the pattern)
(2) similarity-measure (3)rough classification (4) structural fertilization operator
(5) categorical membership knowledge (6) multi-stage associative SS-recognition

1．まえがき

A pattern recognition system involves three elements:preprocessor, feature extractor and classifier. A preprocessor is used to obtain a canonical form $T\varphi$ of an input pattern φ. A feature extractor is used to seek for a set $u(T\varphi, \ell), \ell \in L$ of numerical values called features extracted from the corresponding canonical form $T\varphi$ of the input pattern φ. A classifier is used to assign a category $\mathfrak{C}_j$ to the input pattern φ, with the help of the set $u(T\varphi, \ell), \ell \in L$.

本論文は，画像理解の技術を確保するためにSS理論[B3],[B4]が適用された前研究［B18],[B26],,[B29],[B30],に引き続き，SS理論を音声理解へ適用する方法を研究するものである．

SS理論（A theory proposed by Shoichi Suzuki）は，プログラムの不動点意味論，ニューラルネットによる求解理論，論理による問題解決のための導出原理の理論，数理計画の理論などと同様に，

パターン認識問題の解（入力パターンφの帰属するカテゴリ名）が初期点（入力パターンφのパターンモデル$T\varphi$）からの逐次近似列のアトラクターとして求められる

ことを明らかにしている．いいかえれば，SS理論で明らかになったのは，

パターンの連想形認識問題（入力パターンφに対応する意味モデル$T\omega_j$を発見し，かつ，φが帰属するカテゴリ$\mathfrak{C}_j$（第$j \in J$番目のカテゴリ）を決定できるかという問題）

の解は，

ある連想形認識方程式（SS方程式） を解くことで求められ，初期点$T\varphi$（φのモデル）からの逐次近似列のアトラクターを求めることになり，この求解過程は入力パターンφの認識過程である

ということである．明らかにされたこの事実が，他の如何なるパターン情報処理研究者による研究内容よりもSS理論が優れていることを保証している．

処理の対象とする問題のパターンφの集合をΦで表すとしよう．S.Suzukiは，万能性認識システムRECOGNITRONがモデル$T\varphi \in \Phi$を見たり聞いたりしたならば（$T\varphi$を感性的に受け取ったならば）,原パターン$\varphi \in \Phi$と同じように見えたり聞こえたりすること（原パターンφと錯覚し原パターンφと同じように感性的に受容すること）だと解釈可能なパターンモデル$T\varphi \in \Phi$を考案している．

パターンモデル $T\varphi \in \Phi$ は座標変換されていたり，雑音が含まれていたりして変形があってもよいパターン φ の標準形(canonical form)である．標準形に直す手段により，以後の認識処理が容易になると共に，良好な認識の性能が保証されることがある．

SS理論［B1］～［B4］での，axiom 1を満たす対【Φ, T】での，後半の写像

$$T : \Phi \to \Phi \tag{1.1}$$

はパターン $\varphi \in \Phi$ のパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ を生成するが，この写像 T をモデル構成作用素(model-construction operator)という．既に，数理形態学のopening operator,closing operatorに対応し，モデル構成作用素 T をS.Suzukiは2種類構成しており（文献［B3］の２．５．２項,或いは，文献［A４］)，この２種類の T に関し計算機シミュレーション結果も得ている(文献［B17］の付録６).

入力パターン $\varphi \in \Phi$ のパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ は，一般的には，$\varphi \in \Phi$ の“構造モデル”であるが，次に，パターン $\varphi \in \Phi$ を多段階にわたり変換し，その“意味モデル（$\varphi \in \Phi$ が帰属するカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の典型的な諸性質を代表しているパターン ω_j の構造モデル $T\omega_j$ ）”を出力する多段階の連想形認識過程について簡単に説明しておこう.

多段階の連想形(想起形)認識過程の収束先を説明すれば十分であろう.

第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の持つ諸性質を典型的に備えている代表パターンを ω_j で表す．処理の対象となる問題のパターン φ の集まり Φ と，すべての代表パターン ω_j の，1次独立な系

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} (\subset \Phi) \tag{1.2}$$

とを導入する．処理の対象となる問題のパターン φ が帰属しているカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の番号（カテゴリ番号） j の集まりが記号 J で表されている．すべてのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の集合

$$\mathfrak{C}(J) \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid j \in J\} \tag{1.3}$$

と，各カテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の出現確率 $p(\mathfrak{C}_j)$ が

$$「\forall j \in J, 0 < p(\mathfrak{C}_j) < 1] \wedge \sum_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) = 1 \tag{1.4}$$

を満たすように導入されているとしよう.

代表パターン ω_j のモデル $T\omega_j$ の集合

$$T \cdot \Omega \equiv \{T\omega_j \mid j \in J\} (\subset T \cdot \Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\}) \tag{1.5}$$

が，認識システムが基本的に蓄えている1次独立な記憶内容とする．パターン φ が入力されたことが契機になって，記憶内容 $T \cdot \Omega$ を活性化し，入力パターン φ の意味（φ の帰属するカテゴリ）を帰納的に推論することを考えよう．それには，パターンを変換する役割を備えた写像

$$A_t : \Phi \to \Phi \tag{1.6}$$

の列

$$A_0, A_1, \cdots, A_t, \cdots \tag{1.7}$$

を帰納推理の働きで発見しながら，得られるパターンモデル φ_t の列

$$\varphi \to \varphi_0 \equiv T\varphi \to \varphi_1 \equiv TA_0T\varphi_0 \to \varphi_2 = TA_1T\varphi_1 \to \cdots \to \varphi_{t+1} \equiv TA_tT\varphi_t \to \cdots \tag{1.8}$$

の収束先

$$\varphi_\infty \equiv \lim_{t\to\infty} \varphi_t \tag{1.9}$$

が推論された結果（入力パターン$\varphi \in \Phi$をkeyとして，$T \cdot \Omega$内の元φ_∞が連想的に検索された結果）と考えればよい．帰納的に推論された結果φ_∞は入力パターンφの構造が再生されたパターンモデル（意味モデル）であり，パターンφが入力されたことが契機になって，記憶内容$T \cdot \Omega$から呼び出され想起されたパターンモデルである．

式(1.8)のパターンの変換列において登場している各パターン変換A_tは，SS理論［B1]～[B4］では，（パターンの）構造（を）受精(するための)作用素（structural fertilization operator）といわれる．構造受精作用素A_tはパターンからパターンへの想起変換である．φ_tが記憶内容$T \cdot \Omega$と接触した結果，$\varphi_{t+1} = TA_tT\varphi_t$が受精されると考えている訳である．

もし，式(1.9)の収束先$\varphi_\infty \equiv \lim_{t\to\infty} \varphi_t$が存在し，それがある代表パターン$\omega_j$のモデル$T\omega_j$になっているなら，つまり，収束条件式

$$\exists j \in J, \varphi_\infty = T\omega_j \tag{1.10}$$

が成立するならば，入力パターンφは，帰納推論で得られた構造受精変換TA_tTの列

$$TA_tT : \Phi \to \Phi,\ t = 0,1,2,\cdots \tag{1.11}$$

の働きで，$T\omega_j$として再生されたことになり，第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に認識され，式(1.8)のパターンモデルの列は連想（想起）の働きで得られた多段階の連想形（想起形）認識過程であると解釈されてよいだろう．尚，不動点方程式

$$\varphi_{t+1} (= TA_tT\varphi_t) = \varphi_t \tag{1.12}$$

が成立することを終了条件に採用することで，有限の連想段階で終了する多段階連想形認識

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{t-1}, \varphi_t \tag{1.13}$$

を実現することができる．

音声を認識したり，理解したりするのに役立つであろうSS連想形認識の技術を確保するために，モデル構成作用素T, 類似度関数SM, 大分類関数BSC, の諸例が本論文では，研究される．

処理の対象となる問題の，すべてのパターンφの集まりを記号Φで表す．パターンモデル$T\varphi$とは原パターンφの標準形であって，原パターンφと同じように見えたり，聞こえたりするようなものである．このようなパターンモデルを出力する式(1.1)の写像，つまり，モデル構成作用素$\varphi \in \Phi$がパターン$T : \Phi \to \Phi$の変形を吸収できるのは，SS理論［B3],[B4］によれば，零元不動点性，正定数倍不変性，ベキ等性，非零写像性という4性質(axiom 1)を少なくとも満たすからである．

類似度関数SMは，パターン$\varphi \in \Phi$が各カテゴリ$\mathfrak{C}_j$の持つ諸性質を典型的に代表している代表パターンω_jの,式(1.2)の集合（代表パターンの集合）$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\}$の各元と似ている程度を出力する．

大分類関数BSCは，パターン$\varphi \in \Phi$が帰属すかも知れない候補カテゴリを複数個，出力する．

処理の対象となるパターン φ が帰属しているカテゴリ（第 $j \in J$ 番目のカテゴリ）$\mathfrak{C}_j$ の番号（カテゴリ番号）j の，すべての集まりを記号 J で表す．SS多段階連想形認識[B3],[B4]の過程を実現するには，パターンからパターンへ変換する写像（パターン想起変換）の列が帰納的推理で選ばれることが必要である．このパターン想起変換として使われているのが，候補カテゴリ番号のリスト $\mu(\subseteq J)$ を助変数に持つ構造受精作用素

$$A(\mu): \Phi \to \Phi, \mu \subseteq J \tag{1.14}$$

である．$A(\mu)$ は写像 T の下で不変な 2 つの関数 SM, BSC を用いて構成される(2.6節)．パターン $\varphi \in \Phi$ を入力した場合に構造受精作用素 $A(\mu)$ からの出力 $A(\mu)\varphi \in \Phi$ は，各カテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の持つ諸性質を典型的に代表している代表パターン ω_j のモデル $T\omega_j$ の，式 (1.5) の集合（代表パターンモデルの集合）$T \cdot \Omega \equiv \{T\omega_i \mid j \in J\}$ の持つ情報と比較しながら得られるパターンである．

本研究で解明された T, SM, BSC の諸性質に基づいて，SS多段階想起認識の働きへのその応用が簡単に研究される．

音声認識・理解に関する計算機シミュレーションを行い，構成された T, SM, BSC の諸例がどのような効果を備えているかを確かめなければならない．

本付録A,D,Fでは，音声波形 $\varphi = \{\varphi(x) \mid x = 0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ の特徴量が3種類，提案されている．

本付録Bでは，熱力学の立場から，パターン φ から抽出される特徴量から得られる諸量が提案される．つまり，処理の対象とする問題のパターン φ から非負実数値特徴量 $u(\varphi, \ell)$ が抽出されたとき，このパターン $\varphi \in \Phi$ を特性付ける熱力学的諸量（特性量）が提案されている．

本付録Cでは，音声波形 $\varphi = \{\varphi(x) \mid x = 0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ を 2 値ベクトルの列に変換する方法が提案されている．

本付録Eでは，類似度関数 SM_1 を基準にして，2 つの類似度関数 SM_2, SM_3 の性能を比較するとき，役立つ 2 つの相関 $COR(p_1, p_2), COR(p_1, p_3)$ が提案されている．

2．SS-公理系(axiom1～4)を各々,満たさなければならないパターン集合 Φ,モデル構成作用素 T の対【Φ, T】,類似度関数 SM,大分類関数 BSC,カテゴリ選択関数 CSF［B3],[B4]

本章では,処理の対象となる問題のパターン φ の集合 Φ,モデル構成作用素 T,類似度関数 SM,カテゴリ選択関数 CSF,について説明される.対【Φ, T】の満たされなければならないaxiom 1と,類似度関数 SM の満たされなければならないaxiom 2も説明され，Φ の表示が明らかにされ，Φ が構成的集合であることが指摘される.更に,大分類関数 BSC の満たされなければならないaxiom 3も説明される.カテゴリ選択関数 CSF が満たされなければならないaxiom 4も説明され,CSF の構造が SM, BSC を用いて決定されることが明らかにされる.

2.1　axiom 1とパターン集合,モデル構成作用素 T

一般に,処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ は或る可分な[A1]な (separable) 一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の零元0を含む或る部分集合である.例えば,$\overline{\eta}$ を η の複素共役として,

M：q次元ユークリッド空間 R^q の可測部分集合　(2.1)

dm(x):正値ルベーグ・スティルチェス式測度　(2.2)

$$\mathrm{x} = <\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \cdots, \mathrm{x}_q> \in M (\subseteq R^q)$$:実数値q変数直交座標系 (2.3)

を導入し,その内積(φ,η),ノルム‖φ‖を,

$$(\varphi,\eta) = \int_M \mathrm{dm(x)}\ \varphi(\mathrm{x}) \cdot \overline{\eta}(\mathrm{x}) \tag{2.4}$$

$$\| \varphi \| = \sqrt{(\varphi,\varphi)} \tag{2.5}$$

とする線形空間（ベクトル空間）としての可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$=L_2(M；dm)の特別な場合として,

M=R^2（2次元全平面） (2.6)

$$dm(x) = dm(x_1, x_2) = \frac{1}{{x_1}^2 + {x_2}^2} \cdot dx_1 dx_2 \tag{2.7}$$

を選ぶことができる.

このようなΦ並びに,写像

$$T : \Phi \to \Phi \tag{2.8}$$

は次のaxiom 1を満たさなければならない.このとき,写像Tはモデル構成作用素 (model-construction operator) と呼ばれ,$T\varphi \in \Phi$ は$\varphi \in \Phi$ の代りとなり得るという意味で,パターン$\varphi \in \Phi$ のモデル (model),或いは,パターンモデルと呼ばれる.

下記のaxiom 1からわかるように,パターンモデル$T\varphi$ の集合T・Φは，原パターンφ の集合Φへの埋込性

$$T \cdot \Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \subset \Phi \tag{2.9}$$

を満たし，Φは原点(=0)を始点とし,Φの任意の点を通る半直線を含むような集合,つまり,錐(cone)であらねばならない.下記の式(A1.14)によるΦの表示が正にΦが錐であることを明らかにしている.

Axiom 1を満たすパターン集合Φは実は,構成的集合(constructible set)である.S.Suzukiは形式と意味とが互いに非分離であるようなパターンというものが満たされなければならない帰納的定義（再帰的定義）からΦの集合論的再帰領域方程式（axiom 1を満たす最小のΦの表現式;set-theoretic reflective domain equation）を提案し,この方程式を解き，の構造，構成方法を明らかにしている(文献［B3］の２.４節).その結果は次のとおりである:

パターンと判明している元の集合（基本領域;basic domain)（axiom 1の（i）の前半から０∈）Φ_Bを導入して, 集合論的再帰領域方程式

$$\Phi = \Phi_B \cup T \cdot \Phi \cup R^{++} \cdot \Phi \tag{2.10}$$

ここに,

$$\mathrm{T} \cdot \Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \tag{2.11}$$

R^{++}は正実数全体の集合 (2.12)

$$\mathrm{R}^{++} \cdot \Phi \equiv \{r^{++} \cdot \varphi \mid r^{++} \in R^{++}, \varphi \in \Phi\} \tag{2.13}$$

の解Φは

$$\Phi = R^{++} \cdot [\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B] \tag{2.14}$$

と表示される（文献[B3]の式(2.56)を参照）Φ の表示式(2.14)から,明らかに,２つの等式

(a)$\mathrm{T}\cdot\Phi = T\cdot\Phi_B \subseteq \Phi$

　∵　axiom 1の(ⅱ),(ⅲ)の２後半 (2.15)

(b)$\mathrm{R}^{++}\cdot\Phi = \Phi(= R^{++}\cdot\Phi_B \ \cup R^{++}\mathrm{T}\cdot\Phi_B)$

　∵　axiom 1の(ⅱ)の後半 (2.16)

が成り立つ.

<u>Axiom 1</u>(パターン集合Φとモデル構成作用素Tとの対【Φ, T】の満たすべき公理)

(ⅰ)（零元0の-包含性と,零元0の T-不動点性;fixed-point property of zero element under mapping T）

$0\in\Phi \wedge \mathrm{T}0=0.$

(ⅱ)（Φの錐性,Tの正定数倍吸収性;cone property）

$\forall\varphi\in\Phi, a\cdot\varphi\in\Phi \wedge T(a\cdot\varphi)=T\varphi$

for any positive real number a.

(ⅲ)（Φの埋込性(embeddedness)と,Tのベキ等性(idempotency)）

$\forall\varphi\in\Phi, \mathrm{T}\varphi\in\Phi \wedge T(T\varphi)=T\varphi.$

(ⅳ)（写像Tの非零写像性;non-zero mapping property of T）

$\exists\varphi\in\Phi, T\varphi\neq 0.$ □

２.２　処理の対象となる問題のパターンφの集合Φとモデル構成作用素Tとの対【Φ, T】の基本構成と,パターンモデル$T\varphi$とパターンφとの間の同一知覚原理

原パターン$\varphi\in\Phi$が如何なる意味を備えているか, つまりφが如何なる類概念(category)を表しているかを決定する働きをもつのが,認識システムRECOGNITRONである.RECOGNITRONがモデル$T\varphi\in\Phi$を見たり聞いたりしたならば（$T\varphi$を感性的に受け取ったならば）,原パターン$\varphi\in\Phi$と同じに見えたり聞こえたりすること（原パターンφと錯覚し原パターンφと同じように感性的に受容すること）だと,解釈可能な対【Φ, T】について説明しよう.

パターンモデル$T\varphi$を出力する式(1.1)の写像Tに要求されるのは,次の４性質①～④である ：

① （零元不動点性） $\varphi=0\in\Phi$ については、$T\varphi=0$.

② （正定数倍不変性）任意の正実定数 a に対し,

$\forall\varphi\in\Phi, T(a\cdot\varphi)=T\varphi.$

③（ベキ等性） $\forall\varphi\in\Phi, T(T\varphi)=T\varphi.$

④（非零写像性） $\exists\varphi\in\Phi, T\varphi\neq 0$.

上述の①～④は各々，2.1節の axiom 1の(ⅰ),(ⅱ) の後半,(ⅲ)の後半,(ⅳ)である. 零元 $\varphi=0\in\Phi$ は背景も何も無いパターンである.

Φは処理の対象とする問題のパターンφの集合Φであり, $T\varphi\in\Phi$ は$\varphi\in\Phi$に対応するパターンモデルであって,原パターン$\varphi\in\Phi$と同じ空間Φに埋め込まれている.モデル$T\varphi$は, $T\varphi\in\Phi$を見たり聞いたりしたならばあたかも原パターン$\varphi\in\Phi$かのように見えたり聞こえたりするようなもの

である（$T\varphi$とφとの間の同一知覚原理）.この同一知覚原理を達成するために,SS理論［B1］～［B6］では,式(1.1)の写像であるモデル構成作用素Tが導入され,対[Φ,T]は2.1節のaxiom 1を満たしていなければならないことになる.このとき,写像Tはモデル構成作用素と呼ばれ,$T\varphi \in \Phi$は$\varphi \in \Phi$の代りとなり得るという意味で,パターン$\varphi \in \Phi$のモデルと呼ばれる.

処理の対象とするパターンφの集合Φは或る可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の,零元0を含む或る部分集合であり，このΦ，並びに，式 (1.1) の写像Tの対[Φ,T]は上記の4性質①～④((ii),(iii)の2後半,並びに(i),(iv))を含む形で，2.1節の axiom 1をみたさなければならない.

次の定理 2.1は,axiom 1を満たす対[Φ,T]を決定している.

[定理2.1]（パターン集合Φとモデル構成作用素Tとの対[Φ,T]の構成定理）

パターンと判明しているφの集合（基本領域）$\Phi_B(\ni 0)$と,すべての正実定数の集合R^{++}とを用意する.

式 (1.1) の写像Tがaxiom 1の(i), (ii),(iii)の3後半,並びに, (iv)を満たすとしよう.このとき,次の(イ),(ロ)が成り立つ:

(イ) 処理の対象とする問題のパターンの集合Φを,式 (2.14) の如く設定すれば，2式(2.15),(2.16)が成立し,axiom の(i), (ii),(iii)の3前半をΦは満たし，結局，対[Φ,T]はaxiom 1を満たす.

(ロ) 逆に,$(0\in)\Phi_B$を部分集合に持つがaxiom 1 の(i), (ii),(iii)の3前半を満たすとすれば,

$$\Phi \supseteq \Phi_B \cup \mathrm{R}^{++}\cdot\Phi \cup \mathrm{T}\cdot\Phi \tag{2.17}$$

が成立するが,ここで,特に,包含式(2.17)において等号が成立するような最小のΦを採用すれば，つまり，領域方程式 (2.10) の成立を仮定すれば,axiom 1を満たす対[Φ,T]のは式(2.14) のように表され,2式(2.15), (2.16) も成立する.

(証明) (イ)は文献 [B4], 付録1の定理A 1 . 1 である. (ロ)は文献 [B3],pp.64-66 (2.4節) で証明されている.

2.3　axiom 2と類似度関数SM

任意のパターン$\varphi \in \Phi$が,記憶されている代表的なパターンからなる有限個の元からなる集合Ω内の任意の代表パターンω_jとどの程度似ているか,違っているかを計量する手段を設定することが,認識の働きを確保するために必要とされる.類似性計量のための手段が類似度関数SMである.

“正常なパターン”(well-formed pattern) は,ある1つのカテゴリ(category) $\mathfrak{C}_j$（第$j \in J$番目の類概念）のみに帰属しているものとし,このような$\mathfrak{C}_j$の集まり（有限集合）

$$\mathfrak{C}(J)=\{\mathfrak{C}_j \mid \mathrm{j}\in \mathrm{J}\} \tag{2.18}$$

を想定する$\mathfrak{C}_j$の備えている性質を典型的に持っている（第$j \in J$番目の）代表パターン(prototypical pattern) ω_j ($\neq 0$) を1つ選定する$\mathfrak{C}_j$は,典型 (prototype) としての代表パターンω_jを中心とした緩やかな（第$j \in J$番目の）カテゴリであることを仮定したことに注意しておく.

ここに,

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid \mathrm{j}\in J\} \subset \Phi \tag{2.19}$$

が式 (2.18) の全カテゴリ集合 $\mathfrak{F}(J)$ に1対1に対応する代表パターンの集合である．式 (2.19) の系 Ω は，

複素定数 a_j の組 $\{a_j \mid j \in J\}$ について $\sum_{j \in J} a_j \cdot \omega_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J, a_j = 0$ (2.20)

が成立しているという意味で，1次独立 (linearly independent) でなければならない． Ω を視察で決定できる場合があるが，訓練パターン系列から Ω を適応的に決定する方法については，文献 [B3] の付録I で説明されている．

Axiom 1を満たす式 (1.1) のモデル構成作用素 T によって，式 (1.2) の代表パターン集合 Ω が変換されて得られる系

$$\mathrm{T} \cdot \Omega \equiv \{T\omega \mid \omega \in \Omega\} = \{T\omega_j \mid j \in J\} \tag{2.21}$$

も1次独立であると要請する．このとき，類似度関数 (similarity-measure function)

$$\mathrm{SM}: \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \le s \le 1\} \tag{2.22}$$

を導入し，

$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_i)=1,0$ 従って，パターン $\varphi \in \Phi$ は各々， ω_j と確定的な類似度関係，相違関係にあり，
また， $0<\mathrm{SM}(\varphi, \omega_i)<1$ の場合は,あいまいな類似・相違関係にある (2.23)

と，SMを解釈しよう．

式 (2.22) の関数 SM は次のaxiom 2を満たすように構成されねばならない．Axiom 2の(i)では、クロネッカー(Kronecker)の δ 記号

$$\delta_{ij}=1 \quad \text{if} \quad i=j, =0 \quad \text{if} \quad i \neq j \tag{2.24}$$

が導入されているが、特にaxiom 2の(i)なるこの正規直交性は、候補カテゴリの分離・抽出が効果的に行われ，

候補カテゴリの鋭利な削減(a sharp reduction) (2.25)

をもたらすために要請されている．

Axiom 2 (類似度関数 SM の満たすべき公理)

(i)(正規直交性;orthonormality)

$$\forall i, \forall j \in J, SM(\omega_i, \omega_j) = \delta_{ij}.$$

(ii) (規格化条件，確率性，正規性;probability condition,normalization)

$$\forall \varphi \in \Phi, \Sigma_{j \in J}\, \mathrm{SM}(\varphi, \omega_j)=1.$$

(iii) (写像 T の下での不変性;invariance under mapping T)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j)=\mathrm{SM}(\varphi, \omega_j).$$

上述のaxiom 2の (i) ～ (iii) について簡単に説明しておこう．

SM の解釈式 (2.23) の下で，(i)は，相異なカテゴリの代表パターン同士は確定的な相違関係にあり，同一カテゴリの代表パターン同士は確定的な類似度関係にあることを要請している．

(ⅱ)は、任意のパターンφについて，すべてのカテゴリについての類似度の総和は1であることを要請している．つまり，パターンφ は少なくとも1つのカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属していることを要請している．(ⅲ)は，パターンモデル$T\varphi$は原パターンφと任意のカテゴリについて同一類似度を持つことを要請している．ということは，パターンモデル$T\varphi$を見たり，聞いたりするならば，原パターンφと同じように見えたり、聞こえたりすること（同一知覚原理;2.2節を参照）を要請していることになる．

尚,第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の生起確率である非負実数p($\mathfrak{C}_j$)を，2条件

$$[\forall j \in J, 0 < \mathrm{p}(\mathfrak{C}_j) < 1] \wedge [\sum_{j \in J} \mathrm{p}(\mathfrak{C}_j) = 1] \tag{2.26}$$

を満たすものとして導入しておく．

2．4 axiom 3と大分類関数

本章では，ある1つのカテゴリに帰属するかどうかを決定する2カテゴリ分類器としての大分類関数BSCは，axiom 3を満たすように構成されなければならないことが説明される．

式(2.22)の類似度関数SMが式(2.25)でいう“候補カテゴリの鋭利な削減”を持つためには，axiom 2,(ⅰ)の正規直交性を満たす必要があることが2.3節で指摘されたが，$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_i)$の代りに$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_i)$ $\mathrm{BSC}(\varphi, \mathrm{j})$を用いれば，パターン$\varphi$が帰属するかも知れない
候補カテゴリを益々，鋭利に削減できると期待される．

大分類関数 (rough classifier,binary-state classifier)と呼ばれる2値関数

$$\mathrm{BSC}: \Phi \times J \to \{0,1\} \tag{2.27}$$

を，次のaxiom 3を満たすものとして導入し，解釈

パターン$\varphi \in \Phi$の帰属する候補カテゴリの1つが第$j \in J$番目の$\mathfrak{C}_j$であるならば,

$\mathrm{BSC}(\varphi, \mathrm{j})=1$ であることが望ましい (2.28)

を採用しよう．この際，注意すべきは，

$\mathrm{BSC}(\varphi, \mathrm{j})=0$ であっても，パターン$\varphi \in \Phi$の帰属する候補カテゴリの1つは，第$j \in J$番目の$\mathfrak{C}_j$でないとは限らない (2.29)

としていることである．また，axiom 3の(ⅰ)からわかるように，カテゴリ間の相互排除性
(the mutual exclusion of the one category from the other categories)

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, BSC(\omega_i, j) = 0, \tag{2.30}$$

を公理として要請していない事実に注意しておこう．この事実を補うのが実は，式(2.22)の類似度関数SMが満たさなければならないとしているaxiom 2の(ⅰ)(正規直交性)である．

Axiom 3 (大分類関数BSCの満たすべき公理)
(i) (カテゴリ抽出能力;category separability)

$$\forall j \in J, BSC(\omega_j, j)=1.$$

(ii) (写像 T の下での不変性;invariance under mapping T)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, BSC(T\varphi, j) = BSC(\varphi, j).$$

2.5　axiom 4と、カテゴリ選択関数CSFの構造形式

認識システムRECOGNITRONがパターン $\varphi \in \Phi$ に対し，
「パターン $\varphi \in \Phi$ が、式 (2.18) の全カテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J)$ の部分集合

$$\mathfrak{C}(\gamma) \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid j \in \gamma\} \tag{2.31}$$

内の何れか 1 つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属する可能性がある」　(2.32)
という“パターンのカテゴリ帰属知識(categorical membership-knowledge)”を持っているとする．この知識を，

$$<\varphi, \gamma> \in <\Phi, 2^J> \tag{2.33}$$

と表す．

$$<\Phi, 2^J> \equiv \{<\varphi, \gamma> \mid \varphi \in \Phi, \gamma \in 2^J\} \tag{2.34}$$

は，カテゴリ帰属知識空間 (categorical membership-knowledge space)と呼ばれ、すべてのパターン $\varphi \in \Phi$ と，すべてのカテゴリ番号のリスト $\gamma \in 2^J$ とのなす順序の付いた対リスト(an ordered pair list) $<\varphi, \gamma>$ の集合である．ここに，2^J は集合 J のすべての部分集合のなす集合，つまり，“すべてのカテゴリ番号の集合 J のべき集合 (power set)”をで表わしている．

カテゴリ帰属知識空間 $<\varphi, 2^J>$ はパターン集合 Φ の意味領域である．

カテゴリ選択関数 (category-selection function) と呼ばれる写像

$$\text{CSF}: \Phi \times 2^J \to 2^J \tag{2.35}$$

は，包含関係 (inclusion relation)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \gamma \in 2^J, \text{CSF}(\varphi, \gamma) \subseteq \gamma \subseteq J \in 2^J \tag{2.36}$$

を満たし,然も，次のaxiom 4を満たすものとして，設定されるとしよう．

<u>Axiom 4</u> (カテゴリ選択関数CSFの満たすべき公理)
(i) $\varphi = 0 \vee \gamma = \phi$ の場合
　如何なるカテゴリ番号 $k \in \gamma$ も $<\varphi, \gamma>$ の有効な候補カテゴリの番号ではない．

(ii) $\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ であり，かつ，$\mathrm{SM}(\varphi,\omega_k)=0 \wedge BSC(\varphi,k)=0$ の場合
カテゴリ番号$k \in \gamma$ は，<φ , γ >の有効な候補カテゴリの番号ではない.

(iii) $\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ であり，かつ，$\sum_{k\in\gamma} \mathrm{BSC}(\varphi,\mathrm{k})=0$ の場合

$\mathrm{BSC}(\varphi,\mathrm{k})=0$ であっても，$\mathrm{SM}(\varphi,\omega_k)>0$ でであるようなカテゴリ番号$k \in \gamma$ は，<φ , γ >の有効な候補カテゴリの番号である.

(iv) $\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ であり，かつ，$\sum_{k\in\gamma} \mathrm{BSC}(\varphi,\mathrm{k})=0$ の場合

(iv-1) $\mathrm{BSC}(\varphi,\mathrm{k})=0$ なるカテゴリ番号$k \in \gamma$ は，$\mathrm{SM}(\varphi,\omega_k)>0$ であっても，<φ , γ >の有効な候補カテゴリの番号ではない.

(iv--2) $\mathrm{SM}(\varphi,\omega_k)=0$ なるカテゴリ番号$k \in \gamma$ は，$\mathrm{BSC}(\varphi,\mathrm{k})=1$ であっても，<φ , γ >の有効な候補カテゴリの番号ではない.

次の定理２.２では，式(2.35)の写像 CSF は,式(2.22)の類似度関数SM,式(2.27)の大分類関数BSCを使用する形式で,

その定義域が$\Phi \times 2^J$ であり，その値域が，パターン$\varphi \in \Phi$ のカテゴリ帰属知識<φ , γ > $\in$< $\Phi,2^J$ > の“有効な”候補カテゴリの番号リスト(a list of significant category-numbers)の集合である (2.37)

の如く，構成されている.

次の定理２.２は，axiom 4を満たすように，式 (2.35) のカテゴリ選択関数 CSF の構造を決定したものである.

[定理２.２](カテゴリ選択関数 CSF の構成定理)

次のように定義される式(2.35)の１つの写像CSFは式(2.36)と上述のaxiom 4を満たす:

(i) $\varphi=0 \vee \gamma=\phi$ の場合

$$\mathrm{CSF}(\varphi,\gamma=\phi. \tag{2.38}$$

(ii) $\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ の場合

$$\mathrm{CSF}(\varphi,\gamma)=$$

$$\begin{cases} \{\mathrm{k}\in\gamma \mid SM(\varphi,\omega_k\}>0\} \quad \text{if} \ \sum_{k\in\gamma} \mathrm{BSC}(\varphi,\mathrm{k})=0 & (2.39) \\ \{\mathrm{k}\in\gamma \mid SM(\varphi,\omega_k\}>0 \wedge \ \mathrm{BSC}(\varphi,\mathrm{k})=1\} \quad \text{if} \ \sum_{k\in\gamma} \mathrm{BSC}(\varphi,\mathrm{k})>0 & (2.40) \end{cases}$$

（証明）文献[B3]の定理E1である. □

定理２.２の写像CSFについて,次のように解釈できる:

処理の対象とするパターン$\varphi \in \Phi$ がカテゴリ$\mathfrak{C}_j$, j$\in \gamma$ の何れか１つに帰属する可能性があると想定した場合，更に絞り込んで，その内のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$, j$\in \mathrm{CSF}(\varphi,\gamma) \subseteq \gamma$ の何れか１つに帰属する可能性があると帰納推論(inductive reasoning)できる機能を備え，その出力$\mathrm{CSF}(\varphi,\gamma)$ はパターン$\varphi \in \Phi$ の有効な候補カテゴリの番号のリストを与えている. □

2.6　構造受精作用素 $A(\mu)$

分類の働きの対象となるデータが画像や音声などのパターンで与えられる場合，この分類の働きはパターン認識といわれる．更に，複数の事物が存在する場合での画像の内容や，会話音声の内容を確定する働きはパターン理解と呼ばれることが多い．

パターン φ が入力されたことが契機になって，記憶内容（各カテゴリの性質を典型的に備えている代表パターンのモデルの集合）を活性化し，入力パターン φ の構造を生成する働きを備えているパターン変換（パターンからパターンへの想起変換）をSS理論[B1]～[B4}では，構造受精作用素(structural fertilization operator)という．構造受精作用素はパターンからパターンへの想起変換である．

構造受精作用素

$$A(\mu):\Phi \to \Phi \tag{2.41}$$

の定義は次の通りである：

（ⅰ）$\varphi = 0 \vee \mu = \phi$ のとき

$$A(\mu)\varphi = 0. \tag{2.42}$$

（ⅱ） $\varphi \neq 0 \wedge \mu \neq \phi$ のとき

（ⅱ-1）$\sum_{j\in\mu} BSC(\varphi, j) = 0$　のとき

$$A(\mu)\varphi = \sum_{j\in\mu} SM(\varphi, \omega_j)\cdot T\omega_j. \tag{2.43}$$

よって，

$$\sum_{j\in\mu} SM(\varphi, \omega_j) = 0 \text{ のとき，} A(\mu)\varphi = 0 \text{ である．} \tag{2.44}$$

（ⅱ-2） $\sum_{j\in\mu} BSC(\varphi, j) > 0$　のとき

$$A(\mu)\varphi = \sum_{j\in\mu} SM(\varphi, \omega_j)\cdot BSC(\varphi, j)\cdot T\omega_j. \tag{2.45}$$

$$= \sum_{j\in\mu \wedge BSC(\varphi, j)=1} SM(\varphi, \omega_j)\cdot T\omega_j. \tag{2.46}$$

よって，

$$\sum_{j\in\mu \wedge BSC(\varphi, j)=1} SM(\varphi, \omega_j) = 0 \text{ のとき，} A(\mu)\varphi = 0 \text{ である．} \tag{2.47}$$

2.7　カテゴリ帰属知識 <ψ ,λ> の変換

本節では，拡張された構造受精変換 $TA(\mu)T$ の定義域 Φ，値域 Φ を共に，カテゴリ帰属知識空間 $<\Phi, 2^J>$ へと拡張する．更に，構造受精変換 $TA(\mu)T$ をカテゴリ帰属知識へ作用するのは，ある代表パターン ω_j と似ている程度を最大値１へと変換するためであるが，構造受精変換 $TA(\mu)T$ によって類似度がどのような不等式を満たす形式で変換されるかを検討する．

2.7.1　定義域Φ，値域Φが共に，$\Phi\times 2^J$へと拡張された構造受精変換$TA(\mu)T$の定義

処理の対象とする問題のパターンφについて，この入力パターンφを式(2.21)の記憶内容$T\cdot\Omega$内のある1つのパターンω_jのモデル$T\omega_j$として再生し，然も，入力パターンφが帰属するカテゴリ$\mathfrak{C}_j$を決定できる連想形多段階認識の働き[B3],[B4]におけるパターン変換を説明しよう．

その途中でパターンが得られたなら常にそのパターンの標準形を求めている形式に多段階連想形認識の働きを設定するため，モデル構成作用素と呼ばれる式(2.8)の写像Tを導入し,構造受精作用素$A(\mu)$をモデル構成作用素で両側を挟むのであり，この挟むことが，他の研究者によるいかなる研究内容から本研究内容を区別している．

先ず，2つのカテゴリ帰属知識$<\varphi,\gamma>,<\psi,\lambda>\in<\Phi,2^J>$,間の等形式関係(equi-form relation)$_\Delta$を

$$<\varphi,\gamma>=_\Delta<\psi,\lambda>\Leftrightarrow\varphi=\psi\wedge\gamma=\lambda \tag{2.48}$$

と定義する．

次に，式(2.41)の写像$A(\mu):\Phi\to\Phi, where\quad \mu\in 2^J$の定義域（パターン集合）$\Phi$，値域$\Phi$を共に，カテゴリ帰属知識空間（パターン集合の意味領域）$\Phi\times 2^J$へと拡張して，写像

$$TA(\mu)T:<\Phi,2^j>\to<\Phi,2^J>,\mu\in 2^J \tag{2.49}$$

と考え，カテゴリ帰属知識をカテゴリ帰属知識へと変換する定義

$$<\psi,\lambda>=_\Delta TA(\mu)T<\varphi,\gamma>\in<\Phi,2^J> \tag{2.50}$$

を考えよう．拡張された写像$TA(\mu)T$を構造受精変換というが，この構造受精変換$TA(\mu)T$が施された結果のパターン$\psi\in\Phi$とカテゴリ番号リスト$\lambda\in 2^J$を

$$\psi=TA(\mu\cap\gamma)T\varphi \tag{2.51}$$

$$\lambda=CSF(\varphi,\mu\cap\gamma) \tag{2.52}$$

と定義する．2^Jは各カテゴリ番号$j(\in J)$を要素に持つすべてのリストからなる集合（すべてのカテゴリ番号からなる集合Jのすべての部分集合のなす集合；Jのべき集合）であり，写像$CSF:\Phi\times 2^J\to 2^J$　はカテゴリ選択関数であり，2.5節の定理2.2で決定されている．

2.7.2　構造受精変換$TA(\mu)T$による類似度の変換

先ず，次の2補助定理2.1，2.2を用意する．

[補助定理2.1](構造受精作用素$A(\lambda)$のT－不変性)

$$\forall\lambda\subseteq J,\forall\varphi\in\Phi,A(\lambda)T\varphi=A(\lambda)\varphi.$$

（証明）$A(\lambda)$の定義において，axiom 2,(iii)(SMのT－不変性)，並びに，axiom 3,(ii)(BSCのT－不変性)を考慮すれば明らかである．　□

[補助定理2.2](SMの正定数倍不変性)

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J,SM(a\cdot\varphi,\omega_j)=SM(\varphi,\omega_j)\ \text{for any positive number } a.$$

（証明）　任意の正定数aをとる．

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(a \cdot \varphi, \omega_j)$$

$$= SM(T(a \cdot \varphi), \omega_j) \quad \because \quad \text{axiom 2,(iii)(SM の T-不変性)}$$

$$= SM(T\varphi, \omega_j) \quad \because \quad \text{axiom 1,(ii)の後半}$$

$$= SM(\varphi, \omega_j) \quad \because \quad \text{axiom 2,(iii)(SM の T-不変性)}$$

□

上述の２補助定理２.１，２.２を使用し証明される次の２定理２.３，２.４は，構造受精変換$TA(\mu)T$によって，パターン$\phi \in \Phi$の類似度分布

$$SM(\varphi, \omega_j), j \in J \tag{2.53}$$

が，パターン$TA(\lambda)T\varphi \in \Phi$の類似度分布

$$SM(TA(\lambda)T\varphi, \omega_j), j \in J \tag{2.54}$$

へと変換される際，ある１つの$j \in J$，ある１つの$i \in J$についての$SM(TA(\lambda)T\varphi, \omega_j)$，$SM(TA(\lambda)T\varphi, \omega_i)$の上限，下限を決定している．

帰納推理の働きで選ばれた構造受精変換$A(\lambda_t), t = 0,1,2,\cdots$の列を

$$A_t \equiv A(\lambda_t), t = 0,1,2,\cdots \tag{2.55}$$

と想定したときの，式(1.8)のパターンモデル変換

$$\varphi \to \varphi_0 \equiv T\varphi \to \varphi_1 \equiv TA_0T\varphi_0 \to \varphi_2 = TA_1T\varphi_1 \to \cdots \to \varphi_{t+1} \equiv TA_tT\varphi_t \to \cdots \tag{2.56}$$

によって，

入力パターン$\varphi \in \Phi$の意味構造が$T\omega_j$へと再生され，入力パターン$\varphi \in \Phi$の帰属するカテゴリが$\mathfrak{C}_j$であると決定できる不動点類似度分布

$$\exists j \in J, SM(\varphi_t, \omega_j) = 1 \wedge [\forall k \in J - \{j\}, SM(\varphi_t, \omega_k) = 0] \text{（不動点類似度分布）} \tag{2.57}$$

へと収束することがあることを保証している．

[定理２.３]（構造受精変換$TA(\mu)T$による類似度の変換における上限・下限の評価定理１）

２条件

$$\sum_{k \in \lambda} SM(\varphi, \omega_k) > 0 \tag{2.58}$$

$$\sum_{k \in \lambda} BSC(\varphi, k) = 0 \tag{2.59}$$

が成立するようなパターン$\varphi \in \Phi$とカテゴリ番号リス$\lambda \subseteq J$とについて，

$$\forall j \in J, SM(TA(\lambda)T\varphi, \omega_j) = SM\left(\sum_{\ell \in \lambda} \frac{SM(\varphi, \omega_\ell)}{\sum SM(\varphi, \omega_k)} \cdot T\omega_\ell, \omega_j\right) \tag{2.60}$$

であり，

$$
\exists j \in J,\quad
\left.\begin{array}{l}
\dfrac{SM(\varphi,\omega_j)}{\sum_{k\in\lambda} SM(\varphi,\omega_k)} \qquad if \qquad j\in\lambda \\
0 \quad if \qquad j\notin\lambda
\end{array}\right\}
\geq SM(TA(\lambda)T\varphi,\omega_j) \tag{2.61}
$$

かつ,

$$
\exists i \in J,\quad SM(TA(\lambda)T\varphi,\omega_i) \geq
\begin{cases}
\dfrac{SM(\varphi,\omega_i)}{\sum_{k\in\lambda} SM(\varphi,\omega_k)} & if \qquad i\in\lambda \\
0 \quad if \qquad i\notin\lambda
\end{cases} \tag{2.62}
$$

（証明）条件式(2.59)の下では，式(2.43)からわかるように，

$$
A(\lambda)\varphi = \sum_{j\in\lambda} SM(\varphi,\omega_j)\cdot T\omega_j . \tag{2.63}
$$

である．

$$\forall\varphi\in\Phi, \forall j\in J, SM(TA(\lambda)T\varphi,\omega_j)$$

$$= SM(A(\lambda)T\varphi,\omega_j) \quad \because \text{ axiom 2,(iii)(SMのT-不変性)}$$

$$= SM(A(\lambda)\varphi,\omega_j) \quad \because \text{ 補助定理2.1}$$

$$= SM\Big(\sum_{\ell\in\lambda} SM(\varphi,\omega_\ell)\cdot T\omega_\ell, \omega_j\Big) \quad \because \text{ 式(2.63)}$$

$$= SM\Big(\sum_{\ell\in\lambda} \frac{SM(\varphi,\omega_\ell)}{\sum_{k\in\lambda} SM(\varphi,\omega_k)}\cdot T\omega_\ell, \omega_j\Big) \quad \because \text{ 補助定理2.2，かつ，条件式(2.58)} \tag{2.64}$$

であるが，

$$
\forall j\in J, SM(TA(\lambda)T\varphi,\omega_j) < \sum_{\ell\in\lambda} \frac{SM(\varphi,\omega_\ell)}{\sum_{k\in\lambda} SM(\varphi,\omega_k)}\cdot SM(T\omega_\ell,\omega_j) \tag{2.65}
$$

と仮定し，両辺をわたり総和すれば，は有限集合であるから，矛盾した不等式

$$
1 = \sum_{j\in J} SM(TA(\lambda)T\varphi,\omega_j) < \sum_{\ell\in\lambda} \frac{SM(\varphi,\omega_\ell)}{\sum_{k\in\lambda} SM(\varphi,\omega_k)}\cdot \sum_{j\in J} SM(T\omega_\ell,\omega_j) = 1
$$

∵　　axiom 2,(ⅱ)(規格化条件) (2.66)

が得られる．よって，不等式(2.65)の否定

$$\exists i \in J, SM(TA(\lambda)T\varphi,\omega_i) \geq \sum_{\ell\in\lambda}\frac{SM(\varphi,\omega_\ell)}{\sum_{k\in\lambda}SM(\varphi,\omega_k)}\cdot SM(T\omega_\ell,\omega_i) \tag{2.67}$$

$$=\sum_{\ell\in\lambda}\frac{SM(\varphi,\omega_\ell)}{\sum_{k\in\lambda}SM(\varphi,\omega_k)}\cdot SM(\omega_\ell,\omega_i) \quad \because \quad \text{axiom 2,(iii)(SMのT-不変性)} \tag{2.68}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{SM(\varphi,\omega_i)}{\sum_{k\in\lambda}SM(\varphi,\omega_k)} & if \quad i\in\lambda \\ 0 \quad if & i\notin\lambda\end{cases}$$

∵　　axiom 2,(ⅰ)(SMの正規直交性) (2.69)

が成立する．

同様に，

$$\forall k \in J, SM(TA(\lambda)T\varphi,\omega_k) > \sum_{\ell\in\lambda}\frac{SM(\varphi,\omega_\ell)}{\sum_{k\in\lambda}SM(\varphi,\omega_k)}\cdot SM(T\omega_\ell,\omega_k) \tag{2.70}$$

を仮定すると，上述と同様な矛盾が生じるから，

$$\exists j \in J, SM(TA(\lambda)T\varphi,\omega_j) \leq \sum_{\ell\in\lambda}\frac{SM(\varphi,\omega_\ell)}{\sum_{k\in\lambda}SM(\varphi,\omega_k)}\cdot SM(T\omega_\ell,\omega_j) \tag{2.71}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{SM(\varphi,\omega_j)}{\sum_{k\in\lambda}SM(\varphi,\omega_k)} & if \quad j\in\lambda \\ 0 \quad if & j\notin\lambda\end{cases} \tag{2.72}$$

が成り立つ． □

次の定理2.4も成り立つ．

[定理2.4](構造受精変換 $TA(\mu)T$ による類似度の変換における上限・下限の評価定理定理2)

2条件

$$\sum_{k\in\lambda}SM(\varphi,\omega_k)\cdot BSC(\varphi,k) > 0 \tag{2.73}$$

$$\sum_{k\in\lambda}BSC(\varphi,k) > 0 \tag{2.74}$$

が成立するようなパターン $\varphi\in\Phi$ とカテゴリ番号リスト $\lambda\subseteq J$ とについて，

$$\forall j \in J, SM(TA(\lambda)T\varphi, \omega_j) = SM(\sum_{\ell \in \lambda} \frac{SM(\varphi, \omega_\ell) \cdot BSC(\varphi, \ell)}{\sum_{k \in \lambda} SM(\varphi, \omega_k) \cdot BSC(\varphi, k)} \cdot T\omega_\ell, \omega_j) \tag{2.75}$$

であり，

$$\exists j \in J,$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{SM(\varphi, \omega_j) \cdot BSC(\varphi, j)}{\sum_{k \in \lambda} SM(\varphi, \omega_k) \cdot BSC(\varphi, \omega_k)} & if \quad j \in \lambda \\ 0 \quad if \quad j \notin \lambda & \end{array}\right\}$$

$$\geq SM(TA(\lambda)T\varphi, \omega_j) \tag{2.76}$$

かつ，

$$\exists i \in J, SM(TA(\lambda)T\varphi, \omega_i) \geq$$

$$\begin{cases} \dfrac{SM(\varphi, \omega_i) \cdot BSC(\varphi, i)}{\sum_{k \in \lambda} SM(\varphi, \omega_k) \cdot BSC(\varphi, \omega_k)} & if \quad i \in \lambda \\ 0 \quad if \quad i \notin \lambda & \end{cases} \tag{2.77}$$

（証明）条件式(2.74)の下では，式(2.45)からわかるように，

$$A(\lambda)\varphi = \sum_{j \in \lambda} SM(\varphi, \omega_j) \cdot BSC(\varphi, j) \cdot T\omega_j. \tag{2.78}$$

である．

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(TA(\lambda)T\varphi, \omega_j)$$

$$= SM(A(\lambda)T\varphi, \omega_j) \quad \because \text{ axiom 2, (iii) (SMのT-不変性)}$$

$$= SM(A(\lambda)\varphi, \omega_j) \quad \because \text{ 補助定理2.1}$$

$$= SM(\sum_{\ell \in \lambda} SM(\varphi, \omega_\ell) \cdot BSC(\varphi, \ell) \cdot T\omega_\ell, \omega_j) \quad \because \text{ 式(2.78)}$$

$$= SM(\sum_{\ell \in \lambda} \frac{SM(\varphi, \omega_\ell) \cdot BSC(\varphi, \ell)}{\sum_{k \in \lambda} SM(\varphi, \omega_k) \cdot BSC(\varphi, k)} \cdot T\omega_\ell, \omega_j) \quad \because \text{ 補助定理2.2，かつ，条件式 (2.73)}$$

であるが， (2.79)

$$\forall j \in J, SM(TA(\lambda)T\varphi, \omega_j) < \sum_{\ell \in \lambda} \frac{SM(\varphi, \omega_\ell) \cdot BSC(\varphi, \ell)}{\sum_{k \in \lambda} SM(\varphi, \omega_k) \cdot BSC(\varphi, k)} \cdot SM(T\omega_\ell, \omega_j) \tag{2.80}$$

と仮定し，両辺をわたり総和すれば，J は有限集合であるから，矛盾した不等式

$$1=\sum_{j\in J} SM(TA(\lambda)T\varphi,\omega_j)<\sum_{\ell\in\lambda}\frac{SM(\varphi,\omega_\ell)\cdot BSC(\varphi,\ell)}{\sum_{k\in\lambda}SM(\varphi,\omega_k)\cdot BSC(\varphi,k)}\cdot\sum_{j\in J} SM(T\omega_\ell,\omega_j)=1$$

$\because$ axiom 2,(ⅱ)(規格化条件) (2.81)

が得られる．よって，不等式(2.80)の否定

$$\exists i\in J, SM(TA(\lambda)T\varphi,\omega_i)\geq\sum_{\ell\in\lambda}\frac{SM(\varphi,\omega_\ell)\cdot BSC(\varphi,\ell)}{\sum_{k\in\lambda}SM(\varphi,\omega_k)\cdot BSC(\varphi,k)}\cdot SM(T\omega_\ell,\omega_i) \tag{2.82}$$

$$=\sum_{\ell\in\lambda}\frac{SM(\varphi,\omega_\ell)\cdot BSC(\varphi,\ell)}{\sum_{k\in\lambda}SM(\varphi,\omega_k)\cdot BSC(\varphi,k)}\cdot SM(\omega_\ell,\omega_i) \quad \because \text{ axiom 2,(iii)(SMのT-不変性)} \tag{2.83}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{SM(\varphi,\omega_i)\cdot BSC(\varphi,i)}{\sum_{k\in\lambda}SM(\varphi,\omega_k)\cdot BSC(\varphi,k)} & if \quad i\in\lambda \\ 0 \quad if & i\notin\lambda\end{cases}$$

$\because$ axiom 2,(ⅰ)(SMの正規直交性) (2.84)

が成立する．

同様に，

$$\forall k\in J, SM(TA(\lambda)T\varphi,\omega_k)>\sum_{\ell\in\lambda}\frac{SM(\varphi,\omega_\ell)\cdot BSC(\varphi,\ell)}{\sum_{k\in\lambda}SM(\varphi,\omega_k)\cdot BSC(\varphi,k)}\cdot SM(T\omega_\ell,\omega_k) \tag{2.85}$$

を仮定すると，上述と同様な矛盾を生じるから，

$$\exists j\in J, SM(TA(\lambda)T\varphi,\omega_j)\leq\sum_{\ell\in\lambda}\frac{SM(\varphi,\omega_\ell)\cdot BSC(\varphi,\ell)}{\sum_{k\in\lambda}SM(\varphi,\omega_k)\cdot BSC(\varphi,k)}\cdot SM(T\omega_\ell,\omega_j) \tag{2.86}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{SM(\varphi,\omega_j)\cdot BSC(\varphi,j)}{\sum_{k\in\lambda}SM(\varphi,\omega_k)\cdot BSC(\varphi,k)} & if \quad j\in\lambda \\ 0 \quad if & j\notin\lambda\end{cases} \tag{2.87}$$

が成り立つ．□

3．SS理論での多段階連想形不動点認識の働きが探索する空間

本章では，SS多段階想起認識の働きが探索すべき空間(状態空間を明らかにし，あわせて，不動点

成分φ_{fixed}を入力パターンφの代りに採用し，以後，認識システムRECOGNITRONが多段階想起認識の働きを続行することの意味を解説する．

3.1　不動点認識の働きが作用する状態空間(探索すべき空間)とは？

3.1.1 多段階想起認識)の働きが探索する空間を$FGC_{search}(T\cdot\Omega)$に限ったこと

原点（$\varphi=0$）を含む最小の凸錐

$$FGC(T\cdot\Omega)\equiv\{\phi\mid\phi=\sum_{j\in J}a_j\cdot T\omega_j, a_j\geq 0(j\in J)\}\tag{3.1}$$

を，式(2.21)の$T\cdot\Omega\equiv\{T\omega_i\mid j\in J\}$によって生成される有限錐(finitely generated cone)という．SS理論での多段階連想形不動点認識法では，この有限錐$FGC(T\cdot\Omega)$の有界な部分集合

$$FGC_{search}(T\cdot\Omega)\equiv\{\phi\mid\phi=\sum_{j\in J}a_j\cdot T\omega_j, 1\geq a_j\geq 0(j\in J),\sum_{j\in J}a_j\leq 1\}\tag{3.2}$$

が，探索(すべき)空間(状態空間)である．

式(2.21)の$T\cdot\Omega$は1次独立な系であるから，処理の対象とする問題のパターン$\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$に対応するパターンモデル$T\varphi\in\Phi$は，

$$\exists(T\varphi)_\perp\in\mathfrak{H}\text{ such that }\forall j\in J,((T\varphi)_\perp,T\omega_j)=0,$$

$$T\varphi=\sum_{j\in J}a_j(T\varphi)\cdot T\omega_j+(T\varphi)_\perp\tag{3.3}$$

と1次展開できる．$T\varphi\in\Phi$を式(2.21)の$T\cdot\Omega$を用いての，1次結合式$\sum_{j\in J}a_j\cdot T\omega_j$で近似するときの誤差$T\varphi-\sum_{j\in J}a_j\cdot T\omega_j$自乗ノルム$\|T\varphi-\sum_{j\in J}a_j\cdot T\omega_j\|^2$を最小にするように決定するとすれば，つまり，

$$\|T\varphi-\sum_{j\in J}a_j\cdot T\omega_j\|^2\to\min\tag{3.4}$$

を満たすように決定する(最小自乗法)とすれば，各1次結合係数$a_j(T\varphi)(j\in J)$は，連立1次方程式

$$\sum_{k\in J}a_k(T\varphi)\cdot(T\omega_k,T\omega_j)=(T\varphi,T\omega_j), j\in J\tag{3.5}$$

の解$a_j(=a_j(T\varphi)), j\in J$として求まる．

$$[\forall j\in J,a_j(T\varphi)\geq 0]\wedge(T\varphi)_\perp=0\tag{3.6}$$

であれば，$T\varphi\in\Phi$は$FGC(T\cdot\Omega)$の元になり，

$$[\forall j\in J,1\geq a_j(T\varphi)\geq 0]\wedge\sum_{j\in J}a_j(T\varphi)\leq 1\wedge(T\varphi)_\perp=0\tag{3.7}$$

であれば，$T\varphi \in \Phi$ は $FGC_{search}(T \cdot \Omega)$ の元になる．

SS理論での多段階連想形不動点認識(多段階想起認識)の働きが探索する空間を $FGC_{search}(T \cdot \Omega)$ に限ったことは，深刻な解決不能な問題を招くことがあり得る．例えば，本来ならば，正しく認識できるであろうパターン $\varphi \in \Phi$ を誤認識する事態に招くことが予想される．認識システムRECOGNI-TRONの構成３要素 T, SM, BSC ,を処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ に関し適切に選定することによってこの種の深刻な事態を避けなければならない．

3.1.2　多段階想起認識の働きと，状態空間(探索すべき空間)としての，$|J|$ 次元単体 $co\{T0, T\omega_1, T\omega_2, \cdots, T\omega_{|J|}\}$

処理の対象とする問題のパターン φ について，この入力パターン φ を式 (2.21) の記憶 $T \cdot \Omega$ 内のある１つのパターン ω_j のモデル $T\omega_j$ として再生し(想起の働き)，然も，入力パターン φ が帰属するカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ を決定できる(認識の働き)という連想形多段階認識(多段階想起認識)の働き [B3] , [B4] が S.Suzukiによって提案されている．

パターン $\phi \in \Psi$ のモデル集合

$$T \cdot \Psi \equiv \{T\phi \mid \phi \in \Psi\} \tag{3.8}$$

内の任意の $T\phi, T\varphi \in T \cdot \Psi$ について，不等式 $0 \le a \le 1$ を満たす任意の実定数 a について，

$$a \cdot T\phi + (1-a) \cdot T\varphi \in T \cdot \Psi \tag{3.9}$$

が成り立つとき，$T \cdot \Psi$ を凸集合(convex set)という．

$|J|+1$ 個の要素からなる有限集合 $\{T0, T\omega_1, T\omega_2, \cdots, T\omega_{|J|}\}$ を含む凸集合 $T \cdot \Psi$ のすべての共通集合（$\{T0, T\omega_1, T\omega_2, \cdots, T\omega_{|J|}\}$ を含む最小の凸集合）を，$\{T0, T\omega_1, T\omega_2, \cdots, T\omega_{|J|}\}$ の凸包 (convex hull) という．$\{T0, T\omega_1, T\omega_2, \cdots, T\omega_{|J|}\}$ の凸包 $co\{T0, T\omega_1, T\omega_2, \cdots, T\omega_{|J|}\}$ は，

$$co\{T0, T\omega_1, T\omega_2, \cdots, T\omega_{|J|}\} = \{a_0 \cdot T0 + \sum_{i=1}^{|J|} a_i \cdot T\omega_i \mid a_i \ge 0 (i = 0,1,2,\cdots,|J|), \sum_{i=0}^{|J|} a_i = 1\} \tag{3.10}$$

と表わされる．$co\{T0, T\omega_1, T\omega_2, \cdots, T\omega_{|J|}\}$ の内，

$$T\omega_1 - T0, T\omega_2 - T0, \cdots, T\omega_{|J|} - T0 \tag{3.11}$$

が１次独立であるものを，$T0, T\omega_1, T\omega_2, \cdots, T\omega_{|J|}$ を頂点とする $|J|$ 次元単体(simplex)という．点 $co\{T0\}$, $co\{T\omega_i\}(i \in J)$ は0次元単体,線分 $co\{T0, T\omega_i\}(i \in J), co(T\omega_i, T\omega_i)(i, j \in J, i \ne J)$ は１次元単体，３角形 $co\{T0, T\omega_i, T\omega_j\}(i, j \in J)$ $co\{T\omega_i, T\omega_j, T\omega_k\}(i, j, k \in J)$ は２次元単体，四面体 $co\{T0, T\omega_i, T\omega_j, T\omega_k\}(i, j, k \in J, i \ne j, j \ne k, k \ne i)$, $co\{T\omega_i, T\omega_j, T\omega_k, T\omega_\ell\}(i, j, k, \ell \in J, i \ne j, j \ne k, k \ne \ell, \ell \ne i)$ は３次元単体である．$T0 = 0$ であるが (axiom 1,(i)の後半)，処理の対象とする問題のパターン(入力パターン) φ のモデル $T\varphi$ の再生物を，条件

$$a_0 = 1 - \sum_{i=1}^{|J|} a_i \tag{3.12}$$

の下で，$|J|$ 次元単体 $co\{T0, T\omega_1, T\omega_2, \cdots, T\omega_{|J|}\}$ から探すのが，SS多段階想起認識の働きである．SS多段階想起認識の働きでの状態空間(探索すべき空間)は，

$$\sum_{i\in J} a_i \cdot T\omega_i \text{, on condition that } [\forall i \in J, 0 \le a_i \le 1] \wedge \sum_{i\in J} a_i \le 1 \tag{3.13}$$

の集まりということになる．そして，$T\omega_1, T\omega_2, \cdots, T\omega_{|J|}$ によって生成される有限錐(finitely generated cone)，つまり，原点$T0=0$ を含む最小の凸錐(convex cone)

$$\{\eta \mid \eta = \sum_{j\in J} c_j \cdot T\omega_j, c_j \ge 0 (j \in J)\} \tag{3.14}$$

の有限な部分集合である$|J|$次元単体$co\{T0, T\omega_1, T\omega_2, \cdots, T\omega_{|J|}\}$を，零点(原点)である0次元単体$co\{T0\}$を除く他の$|J|$個の0次元単体(頂点)$co\{T\omega_i\}(i \in J)$のいずれかに探索空間を縮小する働きが，正常なSS多段階想起認識である．

3.2　ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の分解に基づくパターンの分解から得られるモデル$\varphi_{fixed} \equiv T\varphi$

3.2.1　不動点成分φ_{fixed}を入力パターンφの代りに採用し，以後，多段階想起認識の働きを続行すること

多段階想起認識の働きは，入力パターンφ内の不動点成分φ_{fixed}を処理の対象とする．φを処理の対象とする問題のパターン（入力パターン）とする．べき等性

$$T \cdot T = T \text{ (axiom 1 の(iii)の後半)} \tag{3.15}$$

が成立する写像

$$T : \Phi \to \Phi \text{, where } \Phi \subset \mathfrak{H} \tag{3.16}$$

に関し，φ内の，不動点である成分φ_{fixed}，不動点でない成分$\varphi_{nonfixed}$の和に，φを

$$\varphi = \varphi_{fixed} + \varphi_{nonfixed} \tag{3.17}$$

$$\text{, where } T\varphi_{fixed} = \varphi_{fixed} \wedge T\varphi_{nonfixed} \ne \varphi_{nonfixed} \tag{3.18}$$

と分解し，以後，φ_{fixed}をφの代りに採用し，多段階想起認識の働きを続行する．

実は，任意のヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元φについて，

$$\varphi = T\varphi + (\varphi - T\varphi) = \varphi_{fixed} + \varphi_{nonfixed} \in \mathfrak{H} \tag{3.19}$$

を考慮すれば，わかるように，

$$\varphi_{fixed} \equiv T\varphi \in null(I-T)(= range(T)) \tag{3.20}$$

であり，

$$(I-T)(I-T)\varphi = (I-T)[\varphi - T\varphi] \ne 0 \tag{3.21}$$

であれば，

$$\varphi_{nonfixed} \equiv \varphi - T\varphi \notin null(I-T) \tag{3.22}$$

であり，結局

$$\varphi_{nonfixed} \equiv \varphi - T\varphi \in range(I-T) \wedge \varphi_{nonfixed} \notin null(I-T) \tag{3.23}$$

である．ここに，I は

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H},\ I\varphi = \varphi \tag{3.24}$$

を満たすという意味で，恒等作用素である．

以下の３.２.２項，３.２.３項において，未定義の２術語 $range(T), null(I-T)$ を含め，上述の成立を詳細に説明する．

３.２.２　$range(T), null(I-T)$ が成立すること

$\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{H}$ への写像 A の定義域(domain) $domain(A)$，値域(range) $range(A)$，零化集合(null set) $null(A)$ とは，

$$domain(A) \equiv \{\varphi \in \mathfrak{H} \mid \eta = A\varphi \in \mathfrak{H}\} \subseteq \mathfrak{H} \tag{3.25}$$

$$range(A) \equiv \{\eta \in \mathfrak{H} \mid \exists \varphi \in domain(A), \eta = A\varphi \in \mathfrak{H}\} \subseteq \mathfrak{H} \tag{3.26}$$

$$null(A) \equiv \{\varphi \in domain(A) \mid 0 = A\varphi \in \mathfrak{H}\}\ (\subseteq domain(A)) \tag{3.27}$$

と定義される．

一般に，任意のパターン $\varphi \in \mathfrak{H}$ に対し，和分解

$$\varphi = T\varphi + (I-T)\varphi \in \mathfrak{H} \tag{3.28}$$

が成り立つので，ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ は

$$\mathfrak{H} = range(T) + range(I-T) \tag{3.29}$$

と分解される．それ故，下の命題３.３を適用して，実は，

$$\mathfrak{H} = null(I-T) + range(I-T) \tag{3.30}$$

が成り立つ．

先ず，不動点方程式

$$A\varphi = \varphi \tag{3.31}$$

を満たすような $\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{H}$ への写像 A の不動点 φ について成立する命題

$$\varphi \in null(I-A) \Leftrightarrow A\varphi = \varphi \tag{3.32}$$

に注目し，次の３命題３.１，３.２，３.３を証明する．

[命題３.１]　$range(T) \supset null(I-T).$

(証明)(ｲ) $\varphi \in null(I-T)$ とすれば，$(I-T)\varphi = 0 \quad \therefore \quad \varphi = T\varphi \in range(T)$ □

[命題３.２] $range(T) \subset null(I-T)$.

(証明)任意の$\varphi \in \mathfrak{H}$に対し，$T\varphi \in range(T)$である．$T \cdot T = T$より，

$$T\varphi - T \cdot T\varphi = 0 \quad \therefore \quad (I-T)\cdot T\varphi = 0$$ を得，$T\varphi \in null(I-T)$が成り立つ． □

２命題３.１，３.２より次の命題３.３が成り立つ．

[命題３.３] $range(T) = null(I-T)$. □

因みに，３命題３.４，３.５，３.６を示しておく．

[命題３.４] $null(T) \subset range(I-T)$.

(証明) $\varphi \in null(T) \quad \therefore \quad T\varphi = 0$ とすれば，$\varphi = \varphi - 0 = \varphi - T\varphi = (I-T)\varphi$が成り立つ．

よって，$\varphi \in range(I-T)$得る． □

[命題３.５] $null(T) \supset range(I-T)$は一般的には成り立たない．

(証明)べき等性$T \cdot T = T$が成立していても，Tは線形でないので，一般に，

$$T(\varphi - T\varphi) \neq 0\text{，つまり，}T(I-T)\varphi \neq 0 \tag{3.33}$$

であり，$(I-T)\varphi \in range(I-T)$を考慮しても，一般に，

$$null(T) \supset range(I-T) \tag{3.34}$$

は証明されない． □

２命題３.４，３.５より次の命題６が成り立つ．

[命題３.６] $null(T) = range(I-T)$ は 一 般 的 に は 成 り 立 た な い ． □

３.２.３ 入力パターンφ内にある，モデル構成作用素Tの不動点$\varphi_{fixed} \equiv T\varphi$を，$\varphi$の代りに処理の対象とする意味

ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$を式 (3.30) の如く，分解できたが，実は，次の２命題３.７，３.８が成り立ち，次の命題３.７の意味するところにより，この分解は，ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の直和ではないという欠点を持つ．

[命題３.７] $null(I-T) \cap range(I-T) \neq \{0\}$

(証明) $\phi \in null(I-T)$ とすると，$(I-T)\phi = 0 \quad \therefore \quad \phi = T\phi$ であるが，この$\phi \in range(I-T)$が0に限らないことを示せばよい.，
$\phi \in range(I-T)$であるが，これより，$\exists \eta, \phi = (I-T)\eta = \eta - T\eta$が得られる．ところが，一般に，$\eta = T\eta$であるとは限らないので，一般的には，$\phi \neq 0$である． □

[命題３.８] $\phi \in range(I-T) - null(I-T)$ ならば，$\exists \eta, \phi = \eta - T\eta \wedge \phi \neq T\phi$

(証明) $\phi \in range(I-T)$より，$\exists \eta, \phi = (I-T)\eta = \eta - T\eta$である．また，

$\phi \notin null(I-T)$ より，$(I-T)\phi = \phi - T\phi \neq 0 \quad \therefore \quad T\phi \neq \phi$ である． □

実は，入力パターン φ について，２パターン成分

$$\varphi_{fixed} = T\varphi \in null(I-T) \tag{3.35}$$

$$\varphi_{nonfixed} = \varphi - T\varphi \in range(I-T) \tag{3.36}$$

を設けると，

$$\varphi = \varphi_{fixed} + \varphi_{nonfixed} \tag{3.37}$$

であって，ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の分解式(3.30)に対応したものである．命題３.７より，一般的には，

$$null(I-T) \cap range(I-T) \neq \{0\} \tag{3.38}$$

なので，３.２.１項では，条件

$$(I-T)(I-T)\varphi = (I-T)[\varphi - T\varphi] \neq 0 \tag{3.39}$$

の下で

$$\varphi_{nonfixed} = \varphi - T\varphi \in range(I-T) - null(I-T) \tag{3.40}$$

と考え，

$$\varphi - T\varphi \neq T(\varphi - T\varphi)\text{，つまり，}\varphi_{nonfixed} \neq T\varphi_{nonfixed} \tag{3.41}$$

という状況を想定した訳である．実は，処理の対象とする問題のパターン φ の集合

$$\Phi = R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B)(\subset domain(T)) \qquad \because \text{ 式(2. 14)} \tag{3.42}$$

内の，パターンモデル集合 $T \cdot \Phi_B \ (= T \cdot \Phi \subset \Phi)$ に属するのが，処理の対象とする問題のパターン(入力パターン) $\varphi \in \Phi$ についての，の不動点成分 $\varphi_{fixed} \equiv T\varphi$ である．ここに，式(2.15),(2.16)が成立していることに注意しておく．

最後に指摘しておきたいことは，パターン φ に対しaxiom 1を満たす写像 T の不動点 $\varphi_{fixed} \equiv T\varphi$ を求めるというパターン φ のモデル化

$$\text{“}\varphi \to \varphi_{fixed} \equiv T\varphi\text{”} \tag{3.43}$$

により失われる情報は，写像の不動点でない成分であることである．

４．axiom 1を満たすモデル構成作用素

本章では，2.1節のaxiom 1を満たす式(2.8)のモデル構成作用素 T を具体的に構成する．

４.１　パターンモデル $T\varphi$ が満たさなければならない4性質①〜④

パターンというものは，その1部分が他のパターンに隠されて欠落していたり，変形して構造が崩れていたり，雑音が加わり変質していたり，不規則な座標変換，或いは，規則的な座標変換がなされていたりする．欠落を補ったり，崩れる以前の状態に直したり，雑音を取り除いたり，座標変換がな

される前の状態に戻したりする操作を，一般に，パターン正規化ということになっている．本論文では，パターンφを標準形（パターンのモデル）$T\varphi$に変換すること，つまり

$$\varphi \to T\varphi \tag{4.1.1}$$

をパターン正規化と呼び，この種の正規化の下で連想形多段階認識の働きが本論文では，研究される．

一般に，処理の対象とする問題のパターンφの集合Φを可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の或る部分集合とする.パターンモデル$T\varphi$を出力する式 (2.8) の写像Tに要求されるのは，２.２節の 4 性質①～④であることが理論的に明らかにされている [B3] , [B4] .

パターン集合Φは，式 (2.14) で表される．

２.２節の 4 性質①～④を満たすという意味でモデル構成作用素 (model-construction operator) と呼ばれる式 (2.8) の写像Tについての研究はS.Suzukiの研究以外には存在しない．この写像Tは，入力顔画像φから目，鼻，口の各成分を抽出するのに有用であることも判明している [B16] ．また，日本語単独母音の認識 [B13] や，連想形記憶の働きを備えたニューラルネットの構成 [B10] にも使用され，計算機シミュレーション済である．

その他のモデル構成作用素Tについては，平均画像を用いた画像 2 値化をもたらす構成 [B16]，界面エネルギーの減少を利用した構成 [B17]，画素単位の構成 [B18]，「B26」,[B29]などがある．

以下では，２.２節の 4 性質①～④を満たす式 (2.8) の写像Tの諸例が構成される．

４.２　パターンモデル$T\varphi$の構成１(２値モデル;単極型１)

先ず，計算規則

$$\varphi(x)/\sup_{y\in M}|\varphi(y)|=0 \qquad if \quad \sup_{y\in M}|\varphi(y)|=0 \tag{4.2.1}$$

を設ける．不等式

$$0 \le e(x) < 1, x \in M \tag{4.2.2}$$

を満たす閾値関数$e(x)$を求めておく．

そうすると，次の定理４.２.１が成り立ち，パターンφの振幅が 2 値化されたパターンモデル$T\varphi$が得られたことがわかる．

[定理４.２.１](２値モデルの構成定理１)

$$\forall x \in M, (T\varphi)(x) = \begin{cases} 0 \cdots \dfrac{\varphi(x)}{\sup_{x\in M}|\varphi(x)|} \le e(x) \text{ のとき} \\ 1 \cdots \dfrac{\varphi(x)}{\sup_{x\in M}|\varphi(x)|} > e(x) \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.2.3}$$

と定義される式(2.8)の写像Tは，２.２節の 4 性質①～④を満たす．　□

上述の定理４.２.１を証明するため，次の補助定理４.２.１を証明する．

[補助定理４.２.１](不動点定理)
閾値関数$e(x)$ の設定式 (4.2.2) に基づく T の定義式 (4.2.3) では，

$$\forall x \in M, \varphi(x) \in \{0,1\}$$

ならば，

$$T\varphi = \varphi. \tag{4.2.4}$$

(補助定理４.２.１の証明)
(イ) $\sup_{x\in M} |\varphi(x)| = 0$ ，つまり， $\varphi = 0$ のとき

$$\forall x \in M, \varphi(x) = 0 \tag{4.2.5}$$

であるから， T の定義式 (4 .2 .3) より，

$$\forall x \in M, (T\varphi)(x) = 0 \tag{4.2.6}$$

を得，$T\varphi = 0 = \varphi$.
(ロ) $\sup_{x\in M} |\varphi(x)| > 0$ ，つまり， $\varphi \neq 0$ のとき

$$\sup_{x\in M} |\varphi(x)| = 1 \tag{4.2.7}$$

であるから，

$$\forall x \in M, \varphi(x) / \sup_{y\in M} |\varphi(y)| = \varphi(x) \tag{4.2.8}$$

が成り立つ．よって， T の定義式 (4.2.3) より，

$$\forall x \in M, (T\varphi)(x) = \begin{cases} 0 \cdots \varphi(x) \le e(x) \text{ のとき} \\ 1 \cdots \varphi(x) > e(x) \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.2.9}$$

を得， $\varphi(x) = 0,1$ の２つの場合に分けて，不等式 (4.2.2)に注意しながら，確かめれば，

$$\forall x \in M, (T\varphi)(x) = \varphi(x) \tag{4.2.10}$$

が成立することがわかる． □

(定理４.２.１の証明) ２.２節の４性質①～④を満たすことを示す．
性質①の成立の確かめ：補助定理４.２.１を適用すれば，明らか．
性質②の成立の確かめ： a を任意の正定数として， η を

$$\eta \equiv a \cdot \varphi \tag{4.2.11}$$

とおく． T の定義式 (4.2.3) より，次の (イ) , (ロ) がわかる．

(イ) $\sup_{x\in M} |\varphi(x)| = 0$ ，つまり， $\varphi = 0$ のとき

このとき， $\eta = 0$を得，補助定理４.２.１を適用すれば，

$$T\eta = \eta = 0 = \varphi = T\varphi \tag{4.2.12}$$

を得る．

(ロ), $\sup_{x \in M} |\eta(x)| > 0$，つまり，$\eta \neq 0$ のとき

$$\forall x \in M, \eta(x) / \sup_{y \in M} |\eta(y)| = \varphi(x) / \sup_{y \in M} |\varphi(y)| \tag{4.2.13}$$

がわかり，T の定義式(4.2.3)より，

$$T\eta = T\varphi \tag{4.2.14}$$

の成立がわかる．

性質③の成立の確かめ：η を

$$\eta \equiv T\varphi \tag{4.2.15}$$

とおく．T の定義式 (4.2.3) より，

$$\forall x \in M, \eta(x) \in \{0,1\} \tag{4.2.16}$$

がわかり，補助定理４．２．１を適用すれば,

$$T\eta = \eta \tag{4.2.17}$$

を得る．

性質④の成立の確かめ：補助定理４．２．１を適用すれば，明らか □

４．３　パターンモデルの構成２(２値モデル;単極型2)

先ず，式 (4.2.1) の計算規則を設ける．不等式 (4.2.2) とは異なる不等式

$$0 < e(x) \leq 1, x \in M \tag{4.3.1}$$

を満たす閾値関数$e(x)$ を求めておく．

そうすると，次の定理４．３．１が成り立ち，パターン φ の振幅が2値化されたパターンモデル $T\varphi$ が得られたことがわかる．

[定理４．３．１](２値モデルの構成定理２)

$$\forall x \in M, (T\varphi)(x) =$$

$$\begin{cases} 0 \cdots \dfrac{\varphi(x)}{\sup_{x \in M} |\varphi(x)|} < e(x) \text{ のとき} \\ 1 \cdots \dfrac{\varphi(x)}{\sup_{x \in M} |\varphi(x)|} \geq e(x) \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.3.2}$$

と定義される式(2.8)の写像 T は，２．２節の４性質①～④を満たす． □

上述の定理４.３.１を証明するため，次の補助定理４.３.１を証明する．

[補助定理４.３.１](不動点定理)
閾値関数 $e(x)$ の設定式 (4.3.1) に基づく T の定義式 (4.3.2) では，
$\forall x \in M, \varphi(x) \in \{0,1\}$
ならば、不動点式(4.2.4)が成り立つ．

(補助定理４.３.１の証明)

(イ) $\sup_{x \in M} |\varphi(x)| = 0$，つまり，$\varphi = 0$ のとき

式 (4.2.5) がいえ，T の定義式 (4.3.2) より，式 (4.2.6) を得，$T\varphi = 0 = \varphi$

(ロ) $\sup_{x \in M} |\varphi(x)| > 0$，つまり，$\varphi \neq 0$ のとき

式 (4.2.7) が成り立ち，式 (4.2.8) が成り立つ．よって，T の定義式 (4.3.2) より，

$$\forall x \in M, (T\varphi)(x) = \begin{cases} 0 \cdots \varphi(x) < e(x) \text{ のとき} \\ 1 \cdots \varphi(x) \geq e(x) \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.3.3}$$

を得，$\varphi(x) = 0{,}1$ の２つの場合に分けて，不等式 (4.3.1) に注意しながら，確かめれば，式 (4.2.10)が成立することがわかる．□

(定理４.３.１の証明) ２.２節の４性質①〜④を満たすことを示す．
性質①の成立の確かめ：補助定理４.３.１を適用すれば，明らか．
性質②の成立の確かめ：a を任意の正定数として，η を式(4.2.11)の如くおく．T の定義式 (4.3.2) より，次の(イ),(ロ)がわかる．

(イ) $\sup_{x \in M} |\varphi(x)| = 0$，つまり，$\varphi = 0$ のとき

このとき，$\eta = 0$ を得，補助定理４.３.１を適用すれば，式 (4.2.12) を得る．

(ロ) $\sup_{x \in M} |\eta(x)| > 0$，つまり，$\eta \neq 0$ のとき

式 (4.2.13) がわかり，T の定義式 (4.3.2) より，式 (4.2.14) の成立がわかる．

性質③の成立の確かめ：η を式 (4.2.15) の如くおく．T の定義式 (4.3.2) より，式 (4.2.16) がわかり，補助定理４.３.１を適用すれば，式 (4.2.17) を得る．
性質④の成立の確かめ：補助定理４.３.１を適用すれば，明らか．□

４.４　パターンモデルの構成３(３値モデル;双極型)

先ず，式(4.2.1)の計算規則を設ける．不等式

$$-1 < e_-(x) < 0 \leq e_+(x) < 1 \tag{4.4.1}$$

を満たす閾値関数 $e(x)$ を求めておく．

そうすると，次の定理４.４.１が成り立ち，パターン φ の振幅が3値化されたパターンモデル $T\varphi$ が

得られたことがわかる.

[定理４．４．１](3値モデルの構成定理)

$$\forall x \in M, (T\varphi)(x) =$$
$$\begin{cases} -1 & if \quad -1 \le \varphi(x)/\sup_{y\in M}|\varphi(y)| \le e_-(x) \\ 0 \quad if & e_-(x) < \varphi(x)/\sup_{y\in M}|\varphi(y)| \le e_+(x) \\ +1 & if \quad e_+(x) < \varphi(x)/\sup_{v\in M}|\varphi(y)| \le +1 \end{cases} \tag{4.4.2}$$

と定義される式 (2.8) の写像Tは，２．２節の４性質①～④を満たす． □

上述の定理４．４．１を証明するため，次の補助定理４．４．１を証明する．

[補助定理４．４．１](不動点定理)

２閾値関数の設定式 (4.4.1) に基づくの定義式 (4.4.2) では，

$$\forall x \in M, \varphi(x) \in \{-1, 0, +1\} \tag{4.4.3}$$

ならば，不動点式 (4.2.4) が成り立つ．

(補助定理４．４．１の証明)

(イ) $\sup_{x\in M}|\varphi(x)| = 0$，つまり，$\varphi = 0$のとき

式 (4.2.5) がいえ，Tの定義式 (4.4.2) より，式 (4.2.6) を得，$T\varphi = 0 = \varphi$.

(ロ) $\sup_{x\in M}|\varphi(x)| > 0$，つまり，$\varphi \ne 0$のとき

式 (4.2.7) が成り立ち，式 (4.2.8) が成り立つ．よって，Tの定義式 (4.4.2) より，

$$\forall x \in M, (T\varphi)(x) =$$
$$\begin{cases} -1 \cdots -1 \le \varphi(x) \le e_-(x) \text{ のとき} \\ 0 \cdots e_-(x) < \varphi(x) \le e_+(x) \text{ のとき} \\ +1 \cdots e_+(x) < \varphi(x) \le +1 \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.4.3}$$

得，$\varphi(x) = -1, 0, +1$の３つの場合に分けて，不等式 (4.4.1) に注意しながら，確かめれば，式 (4.2.10) が成立することがわかる □

(定理４．４．１の証明) ２．２節の４性質①～④を満たすことを示す．

性質①の成立の確かめ：補助定理４．４．１を適用すれば，明らか．

性質②の成立の確かめ：aを任意の正定数として，ηを式 (4.2.11) の如くおく．Tの定義式 (4.4.2) より，次の (イ) , (ロ) がわかる．

(イ) $\sup_{x\in M}|\varphi(x)| = 0$，つまり，$\varphi = 0$のとき

このとき，$\eta = 0$を得，補助定理４．４．１を適用すれば，式 (4.2.12) を得る．

(ロ) $\sup_{x \in M} |\eta(x)| > 0$，つまり，$\eta \neq 0$ のとき

式 (4.2.13) がわかり，T の定義式 (4. 4 .2) より，式 (4.2.14) の成立がわかる．
性質③の成立の確かめ：η を式 (4.2.15) の如くおく．T の定義式 (4. 4 .2) より，

$$\forall x \in M, \eta(x) \in \{-1, 0, +1\} \tag{4.4.4}$$

がわかり，補助定理４.４.１を適用すれば，式 (4.2.17) を得る．
性質④の成立の確かめ：補助定理４.４.１を適用すれば，明らか　□

４.５パターンモデルの構成４(５値モデル;2対双極型)

先ず，式 (4.2.1) の計算規則を設ける．そうすると，次の定理４.５.１が成り立ち，パターンの振幅が５値化されたパターンモデルが得られたことがわかる．

[定理４.５.１](５値モデルの構成定理)

$$\forall x \in M, (T\varphi)(x) =$$

$$\begin{cases} 1 & if \quad 2/3 < \varphi(x) / \sup_{y \in M} |\varphi(y)| \leq 1 \\ 1/2 & if \quad 1/3 < \varphi(x) / \sup_{y \in M} |\varphi(y)| \leq 2/3 \\ 0 & if \quad -1/3 \leq \varphi(x) / \sup_{y \in M} |\varphi(y)| \leq 1/3 \\ -1/2 & if \quad -2/3 \leq \varphi(x) / \sup_{y \in M} |\varphi(y)| < -1/3 \\ -1 & if \quad -1 \leq \varphi(x) / \sup_{y \in M} |\varphi(y)| < -2/3 \end{cases} \tag{4.5.1}$$

と定義される式 (2.8) の写像 T は，２.２節の４性質①〜④を満たす．　□

上述の定理４.５.１は次節の定理４.６.１の特別な場合である．

４.６.パターンモデル $T\varphi$ の構成５(有限多値モデル；離散モデル)

先ず，不等式

$$\begin{aligned} -1 \equiv e_{p+1}^{-}(x) < e_{p}^{-}(x) < \cdots < e_{2}^{-}(x) \\ < e_{1}^{-}(x) < 0 < e_{1}^{+}(x) \\ < e_{2}^{+}(x) < \cdots < e_{q}^{+}(x) < e_{q+1}^{+}(x) \equiv 1, x \in M \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

を満たす閾値の組

$$e^{-}(x), k=1,2,\cdots,p+1; e^{+}(x), k=1,2,\cdots,q+1, x\in M \tag{4.6.2}$$

を用意する．そして，式 (4.2.1) の計算規則を設ける．

更に，各 $t_k^{\pm}(x)$ は，

$$t_{p+1}^{-}(x)=-1, t_{q+1}^{+}(x)=+1, x\in M \tag{4.6.3}$$

$$e_k^{-}(x)\le t_k^{-}(x)<e_{k-1}^{-}(x), 2\le k\le p+1, x\in M \tag{4.6.4}$$

$$e_{k-1}^{+}(x)<t_k^{+}(x)\le e_k^{+}(x), 2\le k\le q+1, x\in M \tag{4.6.5}$$

を満たすように選ばれているものである．例えば，

$$t_k^{-}(x)=2^{-1}\cdot[e_k^{-}(x)+e_{k-1}^{-}(x)], 2\le k\le p+1, x\in M \tag{4.6.6}$$

$$t_k^{+}(x)=2^{-1}\cdot[e_{k-1}^{+}(x)+e_k^{+}(x)], 2\le k\le q+1, x\in M \tag{4.6.7}$$

と選べばよい．

このとき，パターン

$$\varphi=\{\varphi(x)\mid x\in M\} \tag{4.6.8}$$

を，次のパターン

$$T\varphi=\{(T\varphi)(x)\mid x\in M\} \tag{4.6.9}$$

の様に離散化する：

$$\forall x\in M, (T\varphi)(x)=$$

$$\begin{cases} t_k^{-}(x)\cdots e_k^{-}(x)\le \dfrac{\varphi(x)}{\sup\limits_{x\in M}|\varphi(x)|}<e_{k-1}^{-}(x) \quad (2\le k\le p+1)\text{ のとき} \\ 0\cdots e_1^{-}(x)\le \dfrac{\varphi(x)}{\sup\limits_{x\in M}|\varphi(x)|}\le e_1^{+}(x)\text{ のとき} \\ t_k^{+}(x)\cdots e_{k-1}^{+}(x)< \dfrac{\varphi(x)}{\sup\limits_{x\in M}|\varphi(x)|}\le e_k^{+}(x) \quad (2\le k\le q+1)\text{ のとき} \end{cases} \tag{4.6.10}$$

□

そうすると，次の定理４.６.１が成り立ち，パターンφ の振幅が$(p+q+1)$ 個の値$t_k^{+}(x)(2\leqq k\leqq p+1)$，0，$t_\ell^{+}(x)(2\leqq \ell\leqq q+1)$ に離散化されたパターンモデル$T\varphi$ が得られたことがわかる．

[定理４.６.１](離散モデルの構成定理)

式 (4.6.10) の如く定義された式 (2.8) の写像T は，２.２節の４性質①～④を満たす． □

上述の定理４.６.１を証明するため，次の補助定理４.６.１を証明する.

[補助定理４.６.１](不動点定理)

２閾値関数 $e_k^-(x), e_k^+(x)$ の設定式 (4.6.3) ～ (4.6.5)に基づく T の定義式(4.6.10)では,

$$\sup_{x\in M} |\varphi(x)| \in \{0,1\} \tag{4.6.11}$$

$$\forall x \in M, \varphi(x) \in \{0\} \cup \{t_k^-(x) \mid 2 \le k \le p+1\} \cup \{t_k^+(x) \mid 2 \le k \le q+1\} \tag{4.6.12}$$

について，不動点式 (4.2.4) が成り立つ.

(補助定理４.６.１の証明)

(イ) $\sup_{x\in M} |\varphi(x)| = 0$，つまり，$\varphi = 0$ のとき

式 (4.2.5) がいえ，T の定義式 (4.6.10) より，式 (4.2.6) を得，$T\varphi = 0 = \varphi$.

(ロ) $\sup_{x\in M} |\varphi(x)| > 0$，つまり，$\varphi \ne 0$ のとき

式(4.2.7)が成り立ち，式(4.2.8)が成り立つ．よって，T の定義式(4.6.10)より，

$$\forall x \in M, (T\varphi)(x) =$$

$$\begin{cases} t_k^-(x) \cdots e_k^-(x) \le \varphi(x) < e_{k-1}^-(x) \quad (2 \le k \le p+1) \text{ のとき} \\ 0 \cdots e_1^-(x) \le \dfrac{\varphi(x)}{\sup_{x\in M} |\varphi(x)|} \le e_1^+(x) \text{ のとき} \\ t_k^+(x) \cdots e_{k-1}^+(x) < \varphi(x) \le e_k^+(x) \quad (2 \le k \le q+1) \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.6.13}$$

を得，$\varphi(x) = t_k^-(x), 0, t_k^+(x)$ の３つの場合に分けて，４不等式 (4.6.1) , (4.6.3) ～ (4.6.5) に注意しながら，確かめれば，式 (4.2.10) が成立することがわかる．□

(定理４.６.１の証明) ２.２節の４性質①～④を満たすことを示す.

性質①の成立の確かめ：補助定理４.６.１を適用すれば，明らか.

性質②の成立の確かめ：a を任意の正定数として，η を式(4.2.11)の如くおく．T の定義式(4.6.10)より，次の(イ),(ロ)がわかる.

(イ) $\sup_{x\in M} |\varphi(x)| = 0$，つまり，$\varphi = 0$ のとき

このとき，$\eta = 0$ を得，補助定理４.６.１を適用すれば，式 (4.2.12) を得る.

(ロ) $\sup_{x\in M} |\eta(x)| > 0$，つまり，$\eta \ne 0$ のとき

式 (4.2.13) がわかり，T の定義式 (4.6.10) より，式 (4.2.14) の成立がわかる.

性質③の成立の確かめ：η を式 (4.2.15) の如くおく．T の定義式 (4.6.10) より，

$$\sup_{x\in M} |\eta(x)| \in \{0,1\} \tag{4.6.14}$$

$$\wedge \forall x \in M, \eta(x) \in \{0\} \cup \{t_k^-(x) \mid 2 \le k \le p+1\} \cup \{t_k^+(x) \mid 2 \le k \le q+1\} \tag{4.6.15}$$

がわかり，補助定理４.６.１を適用すれば，式 (4.2.17) を得る．
性質④の成立の確かめ：補助定理４.６.１を適用すれば，明らか． □

４.７　雑音除去効果を有するモデル構成作用素 T

先ず，式 (4.2.1) の計算規則を設ける．不等式

$$-1 \le e_-(x) < 0 < e_+(x) \le +1 \tag{4.7.1}$$

を満たす２つの閾値関数$e_k^-(x), e_k^+(x)$ を求めておく．

そうすると，次の定理４.７.１が成り立ち，パターンφ の振幅の絶対値が小の場合，0になるパターンモデル$T\varphi$ が得られたことがわかる．不等式

$$[\sup_{x\in M} |\varphi(x)|]\cdot e_-(x) < \varphi(x) < [\sup_{x\in M} |\varphi(x)|]\cdot e_+(x) \tag{4.7.2}$$

を満たす“パターンφ 内の雑音部分”は除去されて，パターンモデル$T\varphi$ は0になることがわかる．

[定理４.７.１](小雑音除去型モデルの構成定理)

$$\forall x \in M,\ (T\varphi)(x) =$$
$$\begin{cases} 0 \cdots e_-(x) < \dfrac{\varphi(x)}{\sup_{x\in M}|\varphi(x)|} < e_+(x) \text{ のとき} \\ \\ \dfrac{\varphi(x)}{\sup_{x\in M}|\varphi(x)|} \cdots [\dfrac{\varphi(x)}{\sup_{x\in M}|\varphi(x)|} \le e_-(x)] \vee [e_+(x) \le \dfrac{\varphi(x)}{\sup_{x\in M}|\varphi(x)|}] \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.7.3}$$

と定義される式(2.8) の写像T は，２.２節の４性質①～④を満たす． □

上述の定理４.７.１を証明するため，次の補助定理４.４.１を証明する．

[補助定理４.７.１](不動点定理)

２閾値関数$e_k^-(x), e_k^+(x)$ の設定式 (4.7.1) に基づくT の定義式 (4.7.3) では，式 (4.6.11) を満たし，

(イ) $e_-(x) < \varphi(x) < 0$ を満たす座標値$x \in M$ は存在しない (4.7.4)

(ロ) $0 < \varphi(x) < e_+(x)$ を満たす座標値$x \in M$ は存在しない (4.7.5)

(ハ) $\varphi(x) = 0$ を満たす座標値$x \in M$ は存在する (4.7.6)

(ニ) $[\varphi(x) \le e_-(x)] \vee [e_+(x) \le \varphi(x)]$ のとき

$$-1 \le \varphi(x) | \le e_-(x) \vee e_+(x) \le \varphi(x) \le +1 \tag{4.7.7}$$

を満たすパターン φ について，不動点式 (4.2.4) が成り立つ．

(補助定理 4．7．1 の証明)

(イ) $\sup_{x\in M}|\varphi(x)|=0$，つまり，$\varphi=0$ のとき

式 (4.2.5) がいえ，T の定義式 (4.7.3) より，式(4.2.6)を得，$T\varphi=0=\varphi$．

(ロ) $\sup_{x\in M}|\varphi(x)|>0$，つまり，$\varphi\neq 0$ のとき

式 (4.2.7) が成り立ち，式 (4.2.8) が成り立つ．よって，T の定義式 (4.7.3) より，

$$\forall x\in M,\ (T\varphi)(x)=\begin{cases}0\cdots e_-(x)<\varphi(x)<e_+(x)\text{ のとき}\\ \varphi(x)\cdots[\varphi(x)\le e_-(x)]\vee[e_+(x)\le\varphi(x)]\text{ のとき}\end{cases}\tag{4.7.8}$$

を得る．式(4.7.6)に注意すると，の定義式(4.7.3)より，

$$\varphi(x)=0\text{ のとき }(T\varphi)(x)=0\tag{4.7.9}$$

がわかる．また，3 式 (4.7.4) , (4.7.5) , (4.7.7) を考慮すれば，$[\varphi(x)\le e_-(x)],[e_+(x)\le\varphi(x)]$ の 2 つの場合に分けて，不等式 (4.7.1) に注意しながら，式 (4.7.8) を使用し確かめれば，式 (4.2.10) が成立することがわかる．□

(定理 4．4．1 の証明) 2．2 節の 4 性質①～④を満たすことを示す．

性質①の成立の確かめ：式 (4.7.9) 或いは，補助定理 4．7．1 を適用すれば，明らか．

性質②の成立の確かめ：aを任意の正定数として，η を式 (4.2.11) の如くおく．T の定義式 (4.7.3) より，次の (イ) , (ロ) がわかる．

(イ) $\sup_{x\in M}|\varphi(x)|=0$，つまり，$\varphi=0$ のとき

このとき，η を得，補助定理 4．7．1 を適用すれば，式 (4.2.12) を得る．

(ロ) $\sup_{x\in M}|\eta(x)|>0$，つまり，$\eta\neq 0$ のとき

式 (4.2.13) がわかり，T の定義式 (4.7.3) より，式 (4.2.14) の成立がわかる．

性質③の成立の確かめ：η を式 (4.2.15) の如くおく．T の定義式 (4.7.3) より，φ の代りにηを考えると，η は 4 条件式 (4.7.4) ～ (4.7.7) を満たし，補助定理 4．7．1 を適用でき，式 (4.2.17) を得る．

性質④の成立の確かめ：4 条件式 (4.7.4) ～ (4.7.7) を満たす非零パターン φ を考えれば，補助定理 4．7．1 を適用すれば，明らか．□

4．8．1 次独立な系(基底)$\{\phi_k\}_{k\in L}$によるパターン $\varphi\in\mathfrak{H}$ の 1 次近似

1 次独立な系)$\{\phi_k\}_{k\in L}$ は基底として使える．本節では，基底)$\{\phi_k\}_{k\in L}$ を使うパターンモデル $T\varphi$ を研究するため，1 次独立な系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ によってパターン $\varphi\in\mathfrak{H}$ を 1 次展開し，その近似として，パターンモデル $T\varphi$ を構成するための準備をする．．

系$\{\phi_k\}_{k\in L}$が必ずしも直交系でなく，複素定数c_kの組$\{c_k\}_{k\in L}$について，

$$\sum_{k\in L} c_k\cdot\phi_k = 0 \Rightarrow \forall k\in L, c_k = 0 \tag{4.8.1}$$

が成り立つという意味で，１次独立な系とする．系$\{\phi_k\}_{k\in L}$が直交系であれば，１次独立な系であることに注意しておく．

１次独立な系$\{\phi_k\}_{k\in L}$を使って，パターン$\varphi\in\Phi\subseteq\mathfrak{H}$をその１次結合

$$\sum_{\ell\in L} a_\ell\cdot\phi_\ell \tag{4.8.2}$$

で近似するときの近似誤差$\varphi-\sum_{\ell\in L} a_\ell\cdot\phi_\ell$のノルムの自乗

$$F(a_\ell,\ell\in L)\equiv\|\varphi-\sum_{\ell\in L} a_\ell\cdot\phi_\ell\|^2 \tag{4.8.3}$$

を最小にしよう．最小にする１次結合の各係数$a_\ell(=a_\ell(\varphi))$は，最小自乗法を適用して，

$$\frac{\partial F(a_\ell,\ell\in L)}{\partial a_\ell}=0,\ell\in L \tag{4.8.4}$$

から導かれる連立１次方程式

$$\sum_{k\in L} g_{\ell k}\cdot a_k(\varphi)=b_\ell(\varphi),\ell\in L$$

$$\text{, where }\ g_{\ell k}\equiv(\phi_k,\phi_\ell), b_\ell(\varphi)\equiv(\varphi,\phi_\ell),\ell,k\in L \tag{4.8.5}$$

を解けばよい．第$\ell,k\in L$成分が$g_{\ell k}$であるような行列$G=(g_{\ell k})_{\ell,k\in L}$の行列式$\det(G)$の値は，系$\{\phi_k\}_{k\in L}$が１次独立なので，非零となり，連立１次方程式 (4.8.5) の解$a_k(\varphi),k\in L$は一意的に求まる．このとき，$\varphi\in\mathfrak{H}$の１次展開

$$\forall\varphi\in\Phi\subseteq\mathfrak{H},\ \exists\varphi_\perp\in\mathfrak{H}\ \text{such that}\ \forall k\in L,(\varphi_\perp,\phi_k)=0,$$

$$\varphi=\sum_{\ell\in L} a_\ell(\varphi)\cdot\phi_\ell+\varphi_\perp \tag{4.8.6}$$

が成り立つ．

４.９　実数値特徴抽出写像uを導入した条件下での採用したパターンモデル$T\varphi$の構造形式と，１次独立な系$\{\phi_k\}_{k\in L}$を用いた場合の単極モデル$T\varphi$

４.９.１　採用したパターンモデルの構造形式

特徴抽出写像

$$u:\Phi\times L\to R\ \text{(実数全体の集合)} \tag{4.9.1}$$

を導入する．実数値$u(\varphi,\ell)\in R$はパターン$\varphi\in\Phi$から抽出された第$k\in L$番目の特徴量である．パターンモデル$T\varphi$の構造形式として，

$$T\varphi=\sum_{\ell\in L} u(\varphi,\ell)\cdot\phi_\ell \tag{4.9.2}$$

を採用する．その理由は，パターンφの１次展開式(4.8.6)の主成分$\sum_{\ell\in L} a_\ell(\varphi)\cdot\phi_\ell$の定数倍

$$\frac{1}{\sup_{k\in L}|a_k(\varphi)|}\cdot\sum_{\ell\in L} a_\ell(\varphi)\cdot\phi_\ell=\sum_{\ell\in L}\frac{a_\ell(\varphi)}{\sup_{k\in L}|a_k(\varphi)|}\cdot\phi_\ell \tag{4.9.3}$$

の近似として，パターンモデル$T\varphi$を決定するためである．但し，実定数a_ℓの列$\{a_\ell\}_{\ell\in L}$については，計算式

$$\frac{a_\ell}{\sup_{k\in L}|a_k|}=0 \qquad if \quad \sup_{k\in L}|a_k|=0 \tag{4.9.4}$$

を約束しておく．

4．9．2．1 次独立な系$\{\phi_k\}_{k\in L}$を用いた場合の単極モデル$T\varphi$

系を1次独立な系$\{\phi_k\}_{k\in L}$に選ぶ．各閾値$e(\ell)(\ell\in L)$を，不等式

$$0\le e(\ell)<1, \ell\in L \tag{4.9.5}$$

を満たすように選ぶ．

パターン$\varphi\in\Phi$から抽出された第$\ell\in L$番目の特徴量$u(\varphi,\ell)$として，２値量

$$u(\varphi,\ell)=\begin{cases}0\cdots\dfrac{a_\ell(\varphi)}{\sup_{k\in L}|a_k(\varphi)|}\le e(\ell)\text{ のとき}\\ 1\cdots\dfrac{a_\ell(\varphi)}{\sup_{k\in L}|a_k(\varphi)|}>e(\ell)\text{ のとき}\end{cases} \tag{4.9.6}$$

を採用する．

先ず，次の補助定理４．９．１を証明する．

[補助定理４．９．１](不動点定理)

系$\{\phi_k\}_{k\in L}$を1次独立な系に選ぶ．パターン$\varphi\in\Phi$から抽出された第$\ell\in L$番目の特徴量$u(\varphi,\ell)$として，式(4.9.6)を選ぶ．条件

$$a_\ell\in\{0,1\}, \ell\in L \tag{4.9.7}$$

を満たす各２値定数a_ℓを使って得られるパターン

$$\varphi=\sum_{\ell\in L}a_\ell\cdot\phi_\ell \tag{4.9.8}$$

について，不動点式(4.2.4)が成立する．

(証明) ２つの場合(イ),(ロ)に分けて，示す．

(イ) $\sup_{k\in L}|a_k|=0$ のとき

(4.9.9)

である．また，

$$\forall\ell\in L, a_\ell(\varphi)=a_\ell=0 \qquad \therefore \qquad \sup_{k\in L}|a_k(\varphi)|=0 \tag{4.9.10}$$

を得，

$$\therefore \quad \frac{a_\ell(\varphi)}{\sup_{k\in L}|a_k(\varphi)|}=0 \quad \therefore \quad u(\varphi,\ell)=0 \tag{4.9.11}$$

$$\therefore \quad T\varphi=0=\varphi. \tag{4.9.12}$$

(ロ) $\sup_{k\in L}|a_k|=1$ のとき

$$\forall\ell\in L, a_\ell(\varphi)=a_\ell \quad \therefore \quad \frac{a_\ell(\varphi)}{\sup_{k\in L}|a_k(\varphi)|}=a_\ell(\varphi)=a_\ell \tag{4.9.13}$$

を得る．$a_\ell=0,1$の２つの場合に分けて確かめれば，

$$\therefore \quad \forall\ell\in L, u(\varphi,\ell)=a_\ell \tag{4.9.14}$$

$$\therefore \quad T\varphi=\sum_{\ell\in L}a_\ell\cdot\phi_\ell=\varphi. \tag{4.9.15}$$

□

補助定理４.９.１を適用して，次の定理４.９.１が得られ，基底としての１次独立な系$\{\phi_k\}_{k\in L}$の各成分ϕ_ℓは誤差なく再現されることがわかる．

[定理４.９.１](１次独立な系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$の各成分 ϕ_ℓ の不動点定理)
系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ を１次独立な系に選ぶ．パターン$\varphi\in\Phi$ から抽出された第$\ell\in L$番目の特徴量として，式(4.9.6)を採用する．このとき，不動点式

$$\forall\ell\in L, T\phi_\ell=\phi_\ell \tag{4.9.16}$$

が成り立つ．
(証明)　$\varphi=\sum_{\ell\in L}a_\ell\cdot\phi_\ell=\phi_k$ のとき，

$$a_\ell=1 \quad if \quad \ell=k, =0 \quad if \quad \ell\neq k \tag{4.9.17}$$

が成り立ち，以後，補助定理４.９.１を適用すればよい．□

次の定理４.９.２は，パターン$\varphi\in\Phi$ から抽出された第$\ell\in L$番目の特徴量$u(\varphi,\ell)$として，式(4.9.6)を採用し，構成された式(A2.11)の作用素Tが２.２の４性質①～④）を満たすことを指摘したものである．
[定理４.９.２](１次独立な$\{\phi_k\}_{k\in L}$系を用いた２値(単極型)モデル構成作用素Tの構成定理)
系$\{\phi_k\}_{k\in L}$を１次独立な系に選ぶ．パターン$\varphi\in\Phi$ から抽出された第$\ell\in L$番目の特徴量$u(\varphi,\ell)$として，式(4.9.6)を採用する．このとき，式(4.9.2)で定義される式(2.8)のモデル構成作用素Tは２.２の４性質①～④）を満たす．
(証明) ①(零元不動点性;axiom 1の(ⅰ))の成立については，補助定理４.９.１を適用し，

$$\forall\ell\in L, a_\ell=0 \quad \therefore \quad \varphi=0 \tag{4.9.18}$$

が成り立つ式(4.9.8)のφをとれば，不動点方程式(4.2.4)が成立することから明らか．

②(正定数倍不変性;axiom 1の(ⅱ)の後半) の成立を示そう．

a を任意の正定数として，η を

$$\eta \equiv a \cdot \varphi = \sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \phi_\ell \tag{4.9.19}$$

とおけば,

$$\forall \ell \in L, a_\ell(\eta) = c_\ell = a \cdot a_\ell(\varphi) \tag{4.9.20}$$

であることに注意しておく．２つの場合②－１，②－２に分けて示す．

$$②-1 \qquad \forall \ell \in L, a_\ell(\varphi) = 0 \text{ のとき} \tag{4.9.21}$$

$$\forall \ell \in L, u(\varphi, \ell) = 0 \quad \therefore \qquad T\varphi = 0$$

であり，また,

$$\forall \ell \in L, u(\eta, \ell) = 0 \quad \therefore \qquad T\eta = 0 \tag{4.9.22}$$

を得,

$$T\eta = 0 = T\varphi. \tag{4.9.23}$$

$$②-2 \qquad \exists \ell \in L, a_\ell(\varphi) \neq 0 \text{ のとき} \tag{4.9.24}$$

$$\forall \ell \in L, \frac{a_\ell(\eta)}{\sup_{k \in L} |a_k(\eta)|} = \frac{a_\ell(\varphi)}{\sup_{k \in L} |a_k(\varphi)|}$$

$$\therefore \qquad \forall \ell \in L, u(\eta, \ell) = u(\varphi, \ell) \tag{4.9.25}$$

を得,

$$T\eta = T\varphi. \tag{4.9.26}$$

③(ベキ等性;axiom 1の(ⅲ)の後半) の成立を示そう．

η を

$$\eta \equiv T\varphi = \sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \phi_\ell \tag{4.9.27}$$

とおけば,

$$\forall \ell \in L, a_\ell(\eta) = c_\ell = u(\varphi, \ell) \tag{4.9.28}$$

が成り立つ．然も,

$$\forall \ell \in L, c_\ell \in \{0,1\} \tag{4.9.29}$$

を得，補助定理４．９．１を適用でき,

$$T\eta = \eta \tag{4.9.30}$$

がいえる．

④(非零写像性;axiom 1の(iv))の成立は，補助定理 4 . 9 . 1 から明らか □

4 .10. 1 次独立な系を用いた場合の双極モデル$T\varphi$

系$\{\phi_k\}_{k\in L}$を1次独立な系に選ぶ．各閾値$e(\ell)(\ell \in L)$を，不等式

$$-1 \le e_-(\ell) < 0 \le e_+(\ell) \le +1, \ell \in L \tag{4.10.1}$$

を満たすように選ぶ．

パターン$\varphi \in \Phi$から抽出された第$\ell \in L$番目の特徴量$u(\varphi,\ell)$として，3 値量

$$u(\varphi,\ell) =$$

$$\begin{cases} -1 \cdots \dfrac{a_\ell(\varphi)}{\sup\limits_{k\in L}|a_k(\varphi)|} \le e_-(\ell) \text{ のとき} \\ 0 \cdots e_-(\ell) < \dfrac{a_\ell(\varphi)}{\sup\limits_{k\in L}|a_k(\varphi)|} < e_+(\ell) \text{ のとき} \\ 1 \cdots \dfrac{a_\ell(\varphi)}{\sup\limits_{k\in L}|a_k(\varphi)|} \ge e(\ell) \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.10.2}$$

を採用する．

先ず，次の補助定理 4 .10. 1 を証明する．

[補助定理 4 .10. 1](不動点定理)

系$\{\phi_k\}_{k\in L}$を1次独立な系に選ぶ．パターン$\varphi \in \Phi$から抽出された第$\ell \in L$番目の特徴量として，式 (4.10.2) を選ぶ．条件

$$a_\ell \in \{-1,0,+1), \ell \in L \tag{4.10.3}$$

を満たす各 2 値定数a_ℓを使って得られる式(4.9.8)のパターン$\varphi = \sum_{\ell\in L} a_\ell \cdot \phi_\ell$について，不動点式 (4.2.4) が成立する．

(証明) 2 つの場合 (イ) , (ロ) に分けて，示す．

(イ) $\sup\limits_{k\in L}|a_k| = 0$ のとき

式 (4.9.9) が成り立つ．また，式 (4.9.10) を得， 2 式 (4.9.11) , (4.9.12) が成り立つ．

(ロ) $\sup\limits_{k\in L}|a_k| = 1$ のとき

式 (4.9.13) を得, $a_\ell = -1, 0, +1$の 3 つの場合に分けて確かめれば， 2 式 (4.9.14) , (4.9.15) が成り立つ．

□

補助定理 4 .10. 1 を適用して，次の定理 4 .10. 1 が得られ，基底としての 1 次独立な系$\{\phi_k\}_{k\in L}$の各成分は誤差なく再現されることがわかる．

[定理４.10.１](１次独立な系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ の各成分 ϕ_ℓ の不動点定理)

系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ を１次独立な系に選ぶ．パターン $\varphi\in\Phi$ から抽出された第 $\ell\in L$ 番目の特徴量として，式 (4.10.2) を採用する．このとき，不動点式 (4.9.16) が成り立つ．

(証明) $\varphi=\sum_{\ell\in L} a_\ell\cdot\phi_\ell=\phi_k$ 　のとき，式(4.9.17)が成り立ち，以後，補助定理４.10.１を適用すればよい．　□

次の定理４.10.２は，パターン $\varphi\in\Phi$ から抽出された第 $\ell\in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi,\ell)$ として，式(4.10.2)を採用し，構成された式(A2.11)の作用素 T が２.２の４性質①～④）を満たすことを指摘したものである．

[定理４.10.２](１次独立な系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ を用いた３値(双極型)モデル構成作用素 T の構成定理)

系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ を１次独立な系に選ぶ．パターン $\varphi\in\Phi$ から抽出された第 $\ell\in L$ 番目の特徴量として，式(4.10.2)を採用する．このとき，式(4.9.2)で定義される式(2.8)のモデル構成作用素 T は２.２の４性質①～④）を満たす．

(証明) ① (零元不動点性;axiom 1の(i))の成立については，補助定理４.10.１を適用し，式(4.9.18)が成り立つ式(4.9.8)の φ をとれば，不動点方程式 (4.2.4) が成立することから明らか．

② (正定数倍不変性;axiom 1の(ii)の後半) の成立を示そう．

a を任意の正定数として，η を式 (4.9.19) の如くおけば，式 (4.9.20) が成り立つことに注意しておく．

２つの場合②－１，②－２に分けて示す．

②－１　　$\forall\ell\in L, a_\ell(\varphi)=0$ のとき

２式 (4.9.21) , (4.9.22) を得，式 (4.9.23) が成り立つ．

②－２　　$\exists\ell\in L, a_\ell(\varphi)\neq 0$ のとき

２式 (4.9.24) , (4.9.25) を得，式 (4.9.26) が成り立つ．

③ (ベキ等性; axiom 1の(iii)の後半) の成立を示そう．

η を式 (4.9.27) の如くおけば，式 (4.9.28) が成り立つ．然も，

$$\forall\ell\in L, c_\ell\in\{-1,0,+1\} \tag{4.10.4}$$

を得，補助定理４.10.１を適用でき，式 (4.9.30) がいえる．

④ (非零写像性; axiom 1の(iv))の成立は，補助定理４.10.１から明らか．　□

４.11　基底系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ を使った有限多値モデル $T\varphi$

先ず，不等式

$$\begin{aligned}-1\equiv e^-_{p+1}(\ell)<e^-_p(\ell)<\cdots<e^-_2(\ell)\\ <e^-_1(\ell)<0<e^+_\ell(\ell)\\ <e^+_2(\ell)<\cdots<e^+_q(\ell)<e^+_{q+1}(\ell)\equiv 1,\ell\in L\end{aligned} \tag{4.11.1}$$

を満たす閾値の組

$$e^-(\ell),k=1,2,\cdots,p+1;e^+(\ell),k=1,2,\cdots,q+1,\ell\in L \tag{4.11.2}$$

を用意する．そして，式(4.9.4)の計算規則を設ける．

更に，各 $t^\pm_k(\ell)$ は，

$$t^-_{p+1}(\ell)=-1,t^+_{q+1}(\ell)=+1,\ell\in L \tag{4.11.3}$$

$$e_k^-(\ell) \le t_k^-(\ell) < e_{k-1}^-(\ell), 2 \le k \le p+1, \ell \in L \tag{4.11.4}$$

$$e_{k-1}^+(\ell) < t_k^+(\ell) \le e_k^+(\ell), 2 \le k \le q+1, \ell \in L \tag{4.11.5}$$

を満たすように選ばれているものである．例えば，

$$t_k^-(\ell) = 2^{-1} \cdot [e_k^-(\ell) + e_{k-1}^-(\ell)], 2 \le k \le q+1, \ell \in L \tag{4.11.6}$$

$$t_k^+(\ell) = 2^{-1} \cdot [e_{k-1}^+(\ell) + e_k^+(\ell)], 2 \le k \le q+1, \ell \in L \tag{4.11.7}$$

と選べばよい．

このとき，パターン$\varphi \in \Phi$ から抽出される 1 次展開式(4.8.6)での 1 次結合係数$a_\ell(\varphi)$ の組

$$\vec{a}(\varphi) \equiv \{a_\ell(\varphi) \mid \ell \in L\} \tag{4.11.8}$$

の定数倍を離散化し，次のパターン$\varphi \in \Phi$ から抽出される特徴量$u(\varphi, \ell)$ の組

$$\vec{u}(\varphi) \equiv \{u(\varphi, \ell) \mid \ell \in L\} \tag{4.11.9}$$

を得る：

$$\forall \ell \in L, u(\varphi, \ell) =$$
$$\begin{cases} t_k^-(\ell) \cdots e_k^-(\ell) \le \dfrac{a_\ell(\varphi)}{\sup\limits_{k \in L} |a_k(\varphi)|} < e_{k-1}^-(\ell) \quad (2 \le k \le p+1) \text{ のとき} \\[2ex] 0 \cdots e_1^-(\ell) \le \dfrac{a_\ell(\varphi)}{\sup\limits_{\ell \in L} |a_k(\varphi)|} \le e_1^+(\ell) \text{ のとき} \\[2ex] t_k^+(\ell) \cdots e_{k-1}^+(\ell) < \dfrac{a_\ell(\varphi)}{\sup\limits_{k \in L} |a_\ell(\varphi)|} \le e_k^+(\ell) \quad (2 \le k \le q+1) \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.11.10}$$

□

そうすると，次の定理 4 .11. 1 が成り立ち，パターン φ の一次展開係数 $a_\ell(\varphi)$ が$(p+q+1)$個の値 $t_k^-(\ell)(2 \leqq k \leqq p+1), 0, t_k^+(\ell)(2 \leqq k \leqq q+1)$に離散化されたパターンモデル$T\varphi$ が得られたことがわかる.

[定理 4 .11. 1](離散モデル$T\varphi$の構成定理)

系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$を1次独立な系に選ぶ．パターン$\varphi \in \Phi$ から抽出された第 $\ell \in L$番目の特徴量$u(\varphi, \ell)$として，式 (4.11.10) を選ぶ．このとき，式 (4.9.2) で定義される式 (2.8) のモデル構成作用素 T は 2 . 2 の 4 性質①～④）を満たす □

上述の定理 4 .11. 1 を証明するため，次の補助定理 4 .11. 1 を証明する．

[補助定理 4 .11. 1](不動点定理)

閾値関数 $e_k^-(\ell), e_k^+(\ell)$ の設定式 (4.11.1) ～ (4.11.5)) に基づく T の定義式 (4.9.2) では，

$$\sup_{k \in L} | a_k(\varphi) | \in \{0,1\} \tag{4.11.11}$$

$$\forall \ell \in L, a_\ell(\varphi) \in \{0\} \cup \{t_k^-(\ell) \mid 2 \le k \le p+1\} \cup \{t_k^+(\ell) \mid 2 \le k \le q+1\} \tag{4.11.12}$$

について，

$$T\varphi = \varphi - \varphi_\perp \tag{4.11.13}$$

が成立し，特に， $\varphi_\perp = 0$ ならば不動点式(4.2.4)が成り立つ．

(補助定理４.11.１の証明)

パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ の１次展開式(4.8.6)の成立に注意しておく．

(イ) $\sup_{k \in L} | a_k(\varphi) | = 0$，つまり， $\varphi = \varphi_\perp$ のとき

$$\forall k \in L, a_k(\varphi) = 0 \tag{4.11.14}$$

がいえ， T の定義式(4.9.2)より，

$$T\varphi = 0 \tag{4.11.15}$$

を得，

$$T\varphi = 0 = \varphi - \varphi_\perp . \tag{4.11.16}$$

(ロ) $\sup_{k \in L} | a_k(\varphi) | = 1$，つまり， $\varphi = \sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi) \cdot \phi_\ell + \varphi_\perp$ のとき

$u(\varphi, \ell) \in R$ の定義式(4.11.10)より，

$$\forall \ell \in L, u(\varphi, \ell) =$$

$$\begin{cases} t_k^-(\ell) \cdots e_k^-(\ell) \le a_\ell(\varphi) < e_{k-1}^-(x) \quad (2 \le k \le p+1) \text{ のとき} \\ 0 \cdots e_1^-(\ell) \le a_\ell(\varphi) \le e_1^+(\ell) \text{ のとき} \\ t_k^+(\ell) \cdots e_{k-1}^+(\ell) < a_\ell(\varphi) \le e_k^+(\ell) \quad (2 \le k \le q+1) \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.11.17}$$

を得， $a_\ell(\varphi) = t_k^-(\ell), 0, t_k^+(\ell)$ の３つの場合に分けて， ３不等式 (4.11.3) ～ (4.11.5) に注意しながら，確かめれば，

$$\forall \ell \in L, u(\varphi, \ell) = a_\ell(\varphi) \tag{4.11.18}$$

$$\therefore \quad T\varphi = \sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi) \cdot \phi_\ell = \varphi - \varphi_\perp \tag{4.11.19}$$

が成立することがわかる． □

補助定理４.９.１を適用して，次の定理４.11.２が得られ，基底としての１次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ の各成分 ϕ_ℓ は誤差なく再現されることがわかる．

[定理 4 .11. 2](1 次独立な系$\{\phi_k\}_{k\in L}$の各成分 ϕ_ℓ の不動点定理)

系$\{\phi_k\}_{k\in L}$ を 1 次独立な系に選ぶ．パターン$\varphi\in\Phi$ から抽出された第$\ell\in L$番目の特徴量$u(\varphi,\ell)$として，式(4.11.10)を採用する．このとき，不動点式 (4.9.16)が成り立つ．

(証明) $\varphi=\sum_{\ell\in L}a_\ell\cdot\phi_\ell=\phi_k$ のとき，式(4.9.17)が成り立ち，以後，補助定理 4 .11. 1 を適用すればよい． □

(定理 4 .11. 1 の証明) 2 . 2 節の 4 性質①～④を満たすことを示す．

性質①の成立の確かめ：

$$\varphi=0\Rightarrow\forall\ell\in L,a_\ell(\varphi)=0\wedge\varphi_\perp=0 \tag{4.11.20}$$

であるから，以後，補助定理 4 .11. 1 を適用すれば，明らか．

性質②の成立の確かめ：aを任意の正定数として，η を式(4.2.11)の如くおく．T の定義式(4.9.2)，並びに，$u(\varphi,\ell)$ の定義式(4.11.17)より，次の(イ),(ロ)が成立する．

(イ) $\sup_{k\in L}|a_k(\varphi)|=0$，つまり，$\varphi=\varphi_\perp$ のとき

このとき，$\eta=\eta_\perp=a\cdot\varphi_\perp$ を得，補助定理 4 .11. 1 を適用すれば，

$$T\eta=0=T\varphi \tag{4.11.21}$$

を得る．

(ロ) $\sup_{k\in L}|a_k(\varphi)|>0$，つまり，$\varphi=\sum_{\ell\in L}a_\ell(\varphi)\cdot\phi_\ell+\varphi_\perp$ のとき

2 式(4.9.24),(4.9.25)がわかり，T の定義式(4.9.2)より，式(4.9.26)の成立がわかる．

性質③の成立の確かめ：η を式 (4.2.15) の如くおく．uの定義式(4.11.17)より，

$$\sup_{k\in L}|a_k(\eta)|\in\{0,1\} \tag{4.11.22}$$

$$\forall\ell\in L,a_\ell(\eta)\in\{0\}\cup\{t_k^-(\ell)\,|\,2\le k\le p+1\}\cup\{t_k^+(\ell)\,|\,2\le k\le q+1\} \tag{4.11.23}$$

がわかり，更に，T の定義式(4.9.2)より，

$$\eta_\perp=0 \tag{4.11.24}$$

がわかり，補助定理 4 .11. 1 を適用すれば，式 (4.2.17) を得る．

性質④の成立の確かめ：補助定理 4 .11. 1 を適用すれば，明らか． □

4 .12　基底系$\{\phi_k\}_{k\in L}$を使った雑音除去効果を有する無限多値モデル$T\varphi$

2 . 2 の 4 性質①～④）を満たし，雑音除去効果を有する式(2.8)のモデル構成作用素を，式(4.9.2)の形式で求めよう．

先ず，不等式

$$-1\le e_-(\ell)<0<e_+(\ell)\le+1 \tag{4.12.1}$$

を満たす閾値の組

$$e_{-}(\ell), e_{+}(\ell), \ell \in L \tag{4.12.2}$$

を用意する．そして，式(4.9.4)の計算規則を設ける．

このとき，パターン$\varphi \in \Phi$から抽出される１次展開式(4.8.6)での１次結合係数$a_{\ell}(\varphi)$の，式(4.11.8)の組　$\vec{a}(\varphi) \equiv \{a_{\ell}(\varphi) \mid \ell \in L\}$の定数倍から，次のパターン$\varphi \in \Phi$から抽出される特徴量$u(\varphi,\ell)$の，式(4.11.9)の組$\vec{u}(\varphi) \equiv \{u(\varphi,\ell) \mid \ell \in L\}$を得る：

$$\forall \ell \in L, u(\varphi,\ell) =$$

$$\begin{cases} 0 \cdots e_{-}(\ell) < \dfrac{a_{\ell}(\varphi)}{\sup\limits_{k \in L} |a_k(\varphi)|} < e_{+}(\ell) \text{のとき} \\ \\ \dfrac{a_{\ell}(\varphi)}{\sup\limits_{k \in L} |a_k(\varphi)|} \cdots [\dfrac{a_{\ell}(\varphi)}{\sup\limits_{k \in L} |a_{\ell}(\varphi)|} \le e_{-}(\ell)] \vee [e_{+}(\ell) \le \dfrac{a_{\ell}(\varphi)}{\sup\limits_{k \in L} |a_k(\varphi)|}] \text{のとき} \end{cases} \tag{4.12.3}$$

□

そうすると，次の定理 4 .12. 1 が成り立ち，パターンφの１次展開係数$a_{\ell}(\varphi)$が簡単化されたパターンモデル$T\varphi$が得られたことがわかる．次の定理 4 .12. 1 が成り立ち，パターンφの１次展開係数$a_{\ell}(\varphi)$の絶対値が小の場合，0になるパターンモデル$T\varphi$が得られたことがわかる．不等式

$$[\sup_{k \in L} |a_k(\varphi)|] \cdot e_{-}(\ell) < a_{\ell}(\varphi) < [\sup_{k \in L} |a_{\ell}(\varphi)|] \cdot e_{+}(\ell) \tag{4.12.4}$$

を満たす“パターン$\varphi = \sum_{\ell \in L} a_{\ell}(\varphi) \cdot \phi_{\ell} + \varphi_{\perp}$内の雑音部分$a_{\ell}(\varphi) \cdot \phi_{\ell}$”は除去されて，パターンモデル$T\varphi$は0になることがわかる．

[定理 4 .12. 1](基底系$\{\phi_k\}_{k \in L}$を使った小雑音除去型モデルの構成定理)
系$\{\phi_k\}_{k \in L}$を1次独立な系に選ぶ．パターン$\varphi \in \Phi$から抽出された第$\ell \in L$番目の特徴量$u(\varphi,\ell)$として，式(4.12.3)を選ぶ．このとき，式(4.9.2)で定義される式(2.8)のモデル構成作用素Tは 2 . 2 の 4 性質①～④）を満たす． □

上述の定理 4 .12. 1 を証明するため，次の補助定理 4 .12. 1 を証明する．

[補助定理 4 .12. 1](不動点定理)
各閾値$e_{-}(\ell), e_{+}(\ell)$,の設定式(4.12.1)に基づくTの定義式(4.9.2)では，

$$\forall \ell \in L, a_{\ell}(\varphi) \in \{-1,0,+1\} \tag{4.12.5}$$

ならば，式(4.11.13)が成り立ち，特に，$\varphi_{\perp} = 0$ならば不動点式(4.2.4)が成り立つ．

(補助定理 4 .12. 1 の証明)

パターン$\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$の 1 次展開式 (4.8.6) の成立に注意しておく.

(イ) $\sup_{k \in L} |a_k(\varphi)| = 0$，つまり，$\varphi = \varphi_\perp$ のとき

式 (4.11.14) が成り立ち，T の定義式 (4.9.2) より，式 (4.11.15) が成り立ち,式 (4.11.16) が得られる.

(ロ) $\sup_{k \in L} |a_k(\varphi)| = 1$，つまり，$\varphi = \sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi) \cdot \phi_\ell + \varphi_\perp$ のとき

$u(\varphi, \ell)$ の定義式 (4.12.3) より，

$$\forall \ell \in L, u(\varphi, \ell) = \begin{cases} 0 \cdots e_-(\ell) < a_\ell(\varphi) < e_+(\ell) \text{ のとき} \\ \\ a_\ell(\varphi) \cdots [a_\ell(\varphi) \le e_-(\ell)] \vee [e_+(\ell) \le a_\ell(\varphi)] \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.12.6}$$

を得，$a_\ell(\varphi) = -1, 0, +1$の 3 つの場合に分けて，不等式 (4.12.1) に注意しながら，確かめれば，2 式 (4.11.18) , (4.11.19) が成り立つことがわかる. □

補助定理 4 .12. 1 を適用して，次の定理 4 .12. 2 が得られ，基底としての 1 次独立な系$\{\phi_k\}_{k \in L}$の各成分 ϕ_ℓ は誤差なく再現されることがわかる.

[定理 4 .12. 2](1 次独立な系$\{\phi_k\}_{k \in L}$の各成分 ϕ_ℓ の不動点定理)

系$\{\phi_k\}_{k \in L}$を 1 次独立な系に選ぶ. パターン$\varphi \in \Phi$ から抽出された第$\ell \in L$番目の特徴量$u(\varphi, \ell)$として，式 (4.12.3) を採用する. このとき，不動点式 (4.9.16) が成り立つ.

(証明) $\varphi = \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \phi_\ell = \phi_k$のとき，式 (4.9.17) が成り立ち，以後，補助定理 4 .12. 1 を適用すればよい. □

(定理 4 .12. 1 の証明) 2 . 2 節の 4 性質①～④を満たすことを示す.

性質①の成立の確かめ：式 (4.11.20) が成り立つから，であるから，以後，補助定理 4 .12. 1 を適用すれば，明らか.

性質②の成立の確かめ：aを任意の正定数として，η を式 (4.2.11) の如くおく. T の定義式 (4.9.2)，並びに，$u(\varphi, \ell)$ の定義式(4.12.3)より，次の(イ),(ロ)が成立する.

(イ) $\sup_{k \in L} |a_k(\varphi)| = 0$，つまり，$\varphi = \varphi_\perp$ のとき

このとき，$\eta = \eta_\perp = a \cdot \varphi_\perp$ を得，補助定理 4 .12. 1 を適用すれば，式 (4.11.21)を得る.

(ロ) $\sup_{k \in L} |a_k(\varphi)| > 0$，つまり，$\varphi = \sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi) \cdot \phi_\ell + \varphi_\perp$ のとき

2 式 (4.9.24) , (4.9.25) がわかり，T の定義式 (4.9.2) より，式 (4.9.26) の成立がわかる.

性質③の成立の確かめ：η を式(4.2.15)の如くおく. uの定義式 (4.12.3) より，

$$\forall \ell \in L, a_\ell(\eta) \in \{-1, 0, +1\} \tag{4.12.7}$$

がわかり，更に，T の定義式 (4.9.2) より，式 (4.11.24) がわかり，補助定理 4 .12. 1 を適用すれば，式 (4.2.17) を得る．

性質④の成立の確かめ：補助定理 4 .12. 1 を適用すれば，明らか．　□

4 .13　音声波形 φ の事前処理

離散座標値 $x = 0,\pm1,\pm2,\cdots$ の，式 (A.1) のパターン (音声波形) φ について，パターンモデル

$$T\varphi = \{(T\varphi)(x) \mid x = 0,\pm1,\pm2,\cdots\} \tag{4.13.1}$$

を直接求めるのは，波形の崩れに応じ切れないと予想される場合は，雑音除去に用いられる ε フィルタと，輪郭を抽出するのに用いられるA2.3節の 2 階微分フィルタとを組み合わせた処理技術を使うのがよい場合がある．この技術を以下に説明しよう．

式 (A.1) の音声波形に対し，cを適当な正定数として

$$\breve{\varphi}(x) = c \cdot \tilde{\varphi}(x) \tag{4.13.2}$$

を求め，この $\breve{\varphi}(x)$ のモデル $T\breve{\varphi}$ を $T\varphi$ の代りに採用することになる．

集合 K を $K = \{-1,0,+1\}$ と選び，各重み $p_k(x) (k \in K, x = 0,\pm1,\pm2,\cdots)$ を

$$p_0(x) = 3/5, p_{+1}(x) = -1/5, p_{-1}(x) = -1/5 \tag{4.13.3}$$

と，式 (A2.14) を参考にして選ぶ．各座標変換 $S_k (k \in K)$ を

$$S_k x = x + k, k \in K \tag{4.13.4}$$

と定義し，各 $\hat{\varphi}(S_k x)\ (k \in K, x = 0,\pm1,\pm2,\cdots)$を

$$\hat{\varphi}(S_k x) = \begin{cases} \varphi(S_k x) & if \quad |\varphi(x) - \varphi(S_k x)| \le \varepsilon(x) \\ \varphi(x) & if \quad |\varphi(x) - \varphi(S_k x)| > \varepsilon(x) \end{cases} \tag{4.13.5}$$

と定義した後， $\tilde{\varphi}(x)(x = 0,\pm1,\pm2,\cdots)$ を

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{k \in K} p_k(x) \cdot \hat{\varphi}(S_k x) \tag{4.13.6}$$

と定義する．

4 .14 簡単な直交系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ の選び方

直交系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ は 1 次独立な系である．

[例 1](各部分領域 M_ℓ の特性関数)

$\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ で考えよう．M の部分集合 M' を 2 条件

$$\forall \ell \in L, M_\ell \ne \phi \tag{4.14.1}$$

$$\forall k \in L, \forall \ell \in L - \{k\}, M_k \cap M_\ell = \phi(k \neq \ell) \tag{4.14.2}$$

を満たすように，

$$M \supset M' = \cup_{\ell \in L} M_\ell \tag{4.14.3}$$

と有限分割する．各関数$\psi_\ell(x)(\ell \in L)$を

$$\psi_\ell(x) = 1 \qquad if \qquad x \in M_k, = 0 \qquad if \qquad x \notin M_k \tag{4.14.4}$$

と定義する．$\psi_\ell(x)$は部分領域M_ℓの特性関数(characteristic function)である．このとき，$\{\psi_k\}_{k \in L}$は直交系であり，

$$(\psi_k, \psi_\ell) = 0 \qquad if \qquad k \neq \ell \tag{4.14.5}$$

を満たす．

連立１次方程式(4.8.5)を解けば，

$$a_\ell(\varphi) = \frac{(\varphi, \psi_\ell)}{(\psi_\ell, \psi_\ell)}, \ell \in L \tag{4.14.6}$$

であり，具体的には，

$$a_\ell(\varphi) = \frac{\int_M dm(x) \cdot \varphi(x) \cdot \overline{\psi_\ell}(x)}{\int_{M_\ell} dm(x)}, \ell \in L \tag{4.14.7}$$

である．

[例２](離散コサイン関数)

音声波形データ

$$\{f(0), f(1), \cdots, f(n)\} \tag{4.14.8}$$

が得られたとする．Nを正の偶数とする．

①qを

$$q = N - 1 \tag{4.14.9}$$

と選んで，$\varphi_r(i)$を

$$\varphi_r(i) = f(i + r), i = 0,1,2, \cdots, q \tag{4.14.10}$$

と定義する．そうすると，音声の部分パターンφ_rが

$$\varphi_r = \{\varphi_r(i) \mid i = 0,1,2, \cdots, q\} \tag{4.14.11}$$

が得られる．

②rを

$$r = k \cdot \frac{N}{4}, k = 0,1,2,\cdots,k_{\max} \tag{4.14.12}$$

と決める．

③ k, r の最大値 $k_{\max}, r_{\max}$ は次のように決める．
先ず，不等式

$$(N-1) + r_{\max} = q + r_{\max} \leq n \tag{4.14.13}$$

を満たすように，$r_{\max}$ を決め，その次に，等式

$$r_{\max} = k_{\max} \cdot \frac{N}{4} \tag{4.14.14}$$

から，$k_{\max}$ を決定する．

④音声の部分パターン φ_r に対し

$$(DCT \quad \varphi_r)(\ell) = (\varphi_r, \phi_\ell), \ell = 0,1,2,\cdots,N-1 \tag{4.14.15}$$

$$(IDCT \quad DCT \quad \varphi_r)(k) = \sum_{\ell=0}^{N-1} (DCT \quad \varphi_r)(\ell) \cdot \phi_\ell(k) \tag{4.14.16}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{N-1} (\varphi_r, \phi_\ell) \cdot \phi_\ell(k), k = 0,1,2,\cdots,N-1 \tag{4.14.17}$$

を求める．

$$(DCT \quad \varphi_r) = \{(DCT \quad \varphi_r)(\ell) \mid \ell = 0,1,2,\cdots,N-1\} \tag{4.14.18}$$

を φ_r の離散コサイン変換DCT(discrete cosine transformation)といい，

$$(IDCT \quad DCT \quad \varphi_r) = \{(IDCT \quad DCT \quad \varphi_r)(k) \mid k = 0,1,2,\cdots,N-1\} \tag{4.14.19}$$

を，$(DCT \quad \varphi_r)$ の離散コサイン逆変換IDCT(inverse discrete cosine transformation)という．ここに，(φ_r, ϕ_ℓ)，ϕ_ℓ は次のように定義される：

$$(\varphi_r, \phi_\ell) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r(i) \cdot \phi_\ell(i) \tag{4.14.20}$$

$$\phi_0 = \{\phi_0(i) \mid i = 0,1,2,\cdots,N-1\}, \phi_0(i) = \sqrt{\frac{1}{N}} \tag{4.14.21}$$

$$\phi_\ell = \{\phi_\ell(i) \mid i = 0,1,2,\cdots,N-1\}, \phi_\ell(i) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \cos\frac{(2i+1)\cdot \ell \cdot \pi}{2N}, \ell = 1,2,\cdots,N-1 \tag{4.14.22}$$

□

連立１次方程式 (4.8.5) を解けば，各解 $a_\ell(\varphi_r)$ として，

$$a_\ell(\varphi_r) = (\varphi_r, \phi_\ell), \ell = 0,1,2,\cdots,N-1 \tag{4.14.23}$$

が得られ，式(4.8.6)に示されているように，

$$\varphi_r = \sum_{\ell=0}^{N-1} (\varphi_r, \phi_\ell) \cdot \phi_\ell \tag{4.14.24}$$

と1次展開される．$\{\phi_\ell\}_{\ell=,1,2,\cdots,N-1}$ は，完全な正規直交系である．

5．axiom 2を満たす類似度関数SMの構成

本章では，音声情報処理に役立つaxiom 2を満たす式(2.22)の類似度関数SMの各種を提案する．

5.1　axiom 2を満たす類似度関数SMの構成1

5.1.1 類似性密度関数$sm(\cdot,\cdot)(x)$の構成

先ず，ある場合，式(2.22)の$SM : \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \le s \le 1\}$の密度関数に相当する$sm(\cdot,\cdot)(x)$を構成する．

式(2.2)の正値ルベーグ・スティルチェス式測度$dm(x)$を導入する．

q次元ユークリッド空間の部分集合Mの部分集合$M'(\subseteq M)$を選ぶ．座標点$x \in M'$の，空でない部分集合

$$(x \in) NB(x) (\subset M') \tag{5.1.1}$$

は座標点$x \in M'$の近傍(neighborhood)であるが，$NB(x)$は認識システムの視野(the field of vision)に相当すると考えよう．条件

$$x \ne x' \Rightarrow NB(x) \ne NB(x') \tag{5.1.2}$$

を課する．

条件

$$\forall x \in M'(\subset M), \forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} sm(\varphi, \omega_j)(x) \le 1 \tag{5.1.3}$$

を満たす関数

$$sm(\cdot,\cdot)(x) : \Phi \times \Omega \to R^+ \text{(非負実数全体の集合)} \tag{5.1.4}$$

を用意する．

$sm(\varphi, \omega_i)(x) \in R^+$ は，座標値$x \in M$においてパターンφが第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターンω_jと似ている程度を表し，

$sm(\varphi, \omega_i)(x) \in R^+$ の値が大きいほど，パターンφが代表パターンω_jと似ている　(5.1.5)

と解釈しよう．

以下では，第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターンω_jのモデル$T\omega_j$の，式(2.21)の集合

$T \cdot \Omega \equiv \{T\omega_j \mid j \in J\}$について，

$$\begin{aligned} &\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \exists M'(\ne \phi) \subseteq M, \\ &\forall x \in M', \textstyle\int_{NB(x)} dm(y)(T\omega_i)(y) \ne \int_{NB(x)} dm(y)(T\omega_j)(y) \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

を要請しておく．また，条件式 (2.26) を満たす第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$の生起確率 $p(\mathfrak{C}_j)$を導入しておく．

関数$s_j(\cdot)$の系

$$s_j(\cdot) \to \Phi(\equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\}) \to R\,(\text{実数全体の集合}), j \in J, x \in M' \tag{5.1.7}$$

を用意し，

$$sm(\varphi, \omega_j)(x) = \begin{cases} \dfrac{s_j(T\varphi)(x)}{\sum_{k \in J} |s_k(T\varphi)(x)|} & \text{if} \quad \sum_{k \in J} |s_k(T\varphi)(x)| > 0 \\ p(\mathrm{C}_j) & \text{if} \quad \sum_{k \in J} |s_k(T\varphi)(x)| = 0 \end{cases} \tag{5.1.8}$$

と設定すると，条件式(5.1.3)の等号が成立していること，つまり，

$$\forall x \in M', \forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} sm(\varphi, \omega_j)(x) = 1 \tag{5.1.9 }$$

が満たされ，然も，以下の, axiom $2_x(\infty)$ (iii)(T-不変性)を満たしている．

式 (5.1.8) の $sm(\varphi, \omega_j)(x)$ 内の式 (5.1.7) の $s_j(T\varphi)(x), x \in M$ については，次の如く定義できる．

第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$に帰属するパターン$\varphi \in \Phi$ の集合Φ_j の系

$$\Phi_j(\subset \Phi), j \in J \tag{5.1.10}$$

を，条件

$$(\Phi_j\,\text{条件１})\, \forall j \in J,\ \ \omega_j \in \Phi_j = \{\varphi_{j,t} \mid t = 1,2,\cdots,n_j\},\ n_j \ge 1 \qquad , \tag{5.1.11}$$

$$(\Phi_j\,\text{条件２})\, \forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \Phi_i \cap \Phi_j = \phi \tag{5.1.12}$$

の下で導入する．

パターンモデル$T\varphi, T\eta \in T \cdot \Phi_j \equiv \{T\eta \mid \eta \in \Phi_j\}(j \in J)$ は実数値とする．

$T\varphi \in T \cdot \Phi$ が$T \cdot \Phi_j$ と異なっている程度(difference) $DIFF(T\varphi, \Phi_j)$ を，

$$DIFF(T\varphi, \Phi_j)(x) \equiv \min_{\eta \in \Phi_j} \left| \int_{NB(x)} dm(y)(T\varphi)(y) - \int_{NB(x)} dm(y)(T\eta)(y) \right| \text{と定義する.} \tag{5.1.13}$$

と定義する．

無限型成分を持つ式 (5.1.4) の類似性密度関数写像$sm(\cdot,\cdot)(x) : \Phi \times \Omega \to R^+$ で，以下のaxiom $2_x(\infty)$ を満たすものを採用する．

Axiom $2_x(\infty)$　(類似性密度関数$sm(\cdot,\cdot)(x) : \Phi \times \Omega \to R^+$ の満たすべき公理)

(i)(直交性；orthogonality) 不等式

$$0 \le \varepsilon_{i,j}(x), x \in M' \tag{5.1.14}$$

を満たす閾値 $\varepsilon_{i,j}(x), x \in M'$ の組

$$\varepsilon_{i,j}(x), x \in M', i, j \in J \tag{5.1.15}$$

を決めておく

$$\begin{aligned}&\forall i, j \in J, \forall x \in M' \\ &\exists c_{i,j}(x) > 0, \exists d_{i,j}(x) \ \text{ such that } \ \forall \mathrm{x} \in M', c_{i,j}(x) \ge | d_{i,j}(x) |,\end{aligned} \tag{5.1.16}$$

$$sm(\omega_i, \omega_j)(x) = \begin{cases} c_{i,j}(x) & \text{if} \quad DIFF(T\omega_i, \Phi_j)(x) \le \varepsilon_{i,j}(x) \\ d_{i,j}(x) & \text{if} \quad | DIFF(T\omega_i, \Phi_j)(x) > \varepsilon_{i,j}(x) \end{cases} \tag{5.1.17}$$

(ⅱ)(確率条件;probability condition)

$$\forall x \in M', \forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} sm(\varphi, \omega_j)(x) = 1 \tag{5.1.18}$$

(ⅲ)(写像Tの下での不変性;invariance under mapping T)

$$\forall x \in M', \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, sm(T\varphi, \omega_j)(x) = sm(\varphi, \omega_j)(x). \tag{5.1.19}$$

□

先ず，不等式

$$0 \le \varepsilon_j(x), x \in M' \tag{5.1.20}$$

を満たす閾値 $\varepsilon_j(x), x \in M'$ の組

$$\varepsilon_j(x), j \in J \tag{5.1.21}$$

を決めておく.

次の定理 5.1 は，式 (5.1.8) のように定義される $sm(\varphi, \omega_i)(x)$ が式 (5.1.16) を満たす無限型成分を持つ形でaxiom $2_x(\infty)$ を満たすように，定義される得ることを指摘したものである.

[定理 5.1](axiom $2_x(\infty)$ を満たす無限型成分を持つ類似性密度関数$sm(\cdot,\cdot)(x)$ の構成定理)

式 (5.1.4) の密度関数$sm(\cdot,\cdot)(x)$ が式 (5.1.8) のように定義される $sm(\varphi, \omega_i)(x)$ で考えよう. 不等式 (5.1.20) が満たされるように，式 (5.1.21) の非負関数の系$\varepsilon_j(x) j \in J$ を選定しておく. このとき，式(5.1.8)の $sm(\varphi, \omega_i)(x)$ 内の式 (5.1.7) の各 $s_i(T\varphi)(x)$ が

$$\forall x \in M', \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, 0 \le s_j(T\varphi)(x)$$

$$\begin{cases} = +\infty \quad \text{if} \quad DIFF(T\varphi, \Phi_j)(x) \le \varepsilon_j(x) & (5.1.22) \\ < +\infty \quad \text{if} \quad DIFF(T\varphi, \Phi_j)(x) |> \varepsilon_j(x) & (5.1.23) \end{cases}$$

が満たされるように設定すれば，式 (5.1.4) の密度関数 $sm(\cdot,\cdot)(x)$ はaxiom $2_x(\infty)$ を満たす．

尚，不等式

$$DIFF(T\omega_i, \Phi_j)(x) \le \varepsilon_j(x) \tag{5.1.24}$$

を満たすカテゴリ番号 $i \in J$ の集合 $n_j(x)$ をとすると，等式

$$\forall x \in M', \forall j \in J, sm(\omega_j, \omega_j)(x) = \frac{1}{|n_j(x)|} \tag{5.1.25}$$

が成立し，更に，等式

$$\forall x \in M', \forall j \in J, \forall i \in J - n_j(x), sm(\omega_i, \omega_j)(x) = 0 \tag{5.1.26}$$

も成り立つ．

(証明)　容易に証明できる．　□

式 (5.1.8) の $sm(\varphi, \omega_i)(x)$ 内の式 (5.1.7) の各 $s_j(T\varphi)(x)$ を設定する１つの方法は次のようになる．

正値の閾値関数 $\delta_j(x) > 0, j \in J$ の系を用意する．

$$s_j(T\varphi)(x) =$$

$$\begin{cases} +\infty \quad \text{if} \quad DIFF(T\varphi, \Phi_j)(x) \le \varepsilon_j(x) \\ [\log_e[1 + \delta_j(x) \cdot DIFF(T\varphi, \Phi_j)(x)^2]]^{-1} \quad \text{if} \quad DIFF(T\varphi, \Phi_j)(x) > \varepsilon_j(x) \end{cases} \tag{5.1.27}$$

5.1.2 axiom $2_x(\infty)$ を満たす密度関数 $sm(\varphi, \omega_j)(x), x \in M$ を使って，axiom 2を満たす類似度関数SMを構成するには？

SS理論[B1]～[B4]では，２.３節のaxiom ２の３条件，つまり，(ⅰ)正規直交性,(ⅱ)規格化条件(ⅲ)写像 T の下での不変性を満たす式(2.22)の類似度関数 $sm(\varphi, \omega_i)$ が導入されている．

本項では，逆に，axiom $2_x(\infty)$ を満たす式(5.1.4)の密度関数 $sm(\varphi, \omega_j)(x), x \in M$ を使って，axiom 2を満たす式(2.22)の類似度関数SMを構成しよう．結果は次の定理５.２で示される．

[定理５.２](axiom $2_x(\infty)$ を満たす密度関数 $sm(\varphi, \omega_j)(x), x \in M$ を使っての，axiom 2を満たす類似度関数SMの構成定理)

式 (5.1.4) の密度関数 $sm(\cdot,\cdot)(x)$ が式 (5.1.8) のように定義される $sm(\varphi, \omega_i)(x)$ で考えよう．

不等式 (5.1.20) が満たされるように，式(5.1.21)の非負関数の系 $\varepsilon_j(x) j \in J$ を選定しておく．

このとき，axiom $2_x(\infty)$ での，式 (5.1.4)の密度関数 $sm(\cdot,\cdot)(x)$ において，

$$\forall x \in M, \forall j \in J, DIFF(T\omega_j, \Phi_j)(x) \le \varepsilon_{j,j}(x) \tag{5.1.28}$$

$$\forall x \in M, \forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}, DIFF(T\omega_i, \Phi_j)(x) > \varepsilon_{i,j}(x) \tag{5.1.29}$$

が成り立つとき，

$$\forall j \in J, \int_M dm(x) c_{j,j}(x) = \int_M dm(y) \tag{5.1.30}$$

$$\forall x \in M, \forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}, \int_M dm(x) d_{i,j}(x) = 0 \tag{5.1.31}$$

であれば，

$$SM(\varphi, \omega_j) \equiv \int_M dm(x) sm(\varphi, \omega_j)(x) / \int_M dm(y) \tag{5.1.32}$$

と定義される，式(2.22)の関数SMはaxiom 2を満たす．

実際，式(5.1.8)の$sm(\varphi, \omega_i)(x)$内の式(5.1.7)の各$s_i(T\varphi)(x)$を用いて得られるaxiom $2_x(\infty)$を満たす定理5.1での，式(5.1.8)の密度関数$sm(\cdot,\cdot)(x)$では，

$$c_{i,j}(x) = \frac{1}{|n_j(x)|} \quad \text{for} \quad i \in n_j(x), x \in M \tag{5.1.33}$$

$$d_{i,j}(x) = 0 \quad \text{for} \quad i \in J - n_j(x), x \in M \tag{5.1.34}$$

であるから，

$$\forall x \in M, \forall j \in J, n_j(x) = 1 \tag{5.1.35}$$

であれば，2式(5.1.30),(5.1.31)が満たされる．

(証明) 容易に証明できる．□

式(2.21)の代表パターンモデル集合$T\cdot\Omega$について要請される条件式(5.1.29)は，かなり強いものである．$T\cdot\Omega$について，条件式(5.1.29)が満たされるように，axiom 1を満たすモデル構成作用素$T:\Phi \to \Phi$と各$\omega_j \in \Omega (j \in J)$とを，各$T\omega_i (j \in J)$を適切に選んでおく必要がある．

以上，axiom $2_x(\infty)$を満たす密度関数$sm(\varphi, \omega_j)(x), x \in M$を使って，axiom 2を満たす類似度関数SMを構成する方法が確保された．

5.2 axiom 2を満たす類似度関数SMの構成2

先ず，式(2.22)の関数SMを，

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} \dfrac{s_j(T\varphi)}{\sum_{k\in J} s_k(T\varphi)} & \text{if} \quad \sum_{k\in J} s_k(T\varphi) > 0 \\ p(\mathfrak{C}_j) & \text{if} \quad \sum_{k\in J} s_k(T\varphi) = 0 \end{cases} \tag{5.2.1}$$

と定義する．明らかに，2.3節でのaxiomの(ii),(iii)を満たすことがわかる．

先ず，第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属することが判明しているパターン$\varphi \in \Phi$の集まり(有限

集合) Φ_j を導入する．各 Φ_j ($j \in J$) について，2条件式 (5.1.11) , (5.1.12) を設けなければなない．
次に，$T\varphi$ の，Φ_j からの最小ノルム距離(minimum distance)

$$diff\,(T\varphi, T\cdot\Phi_j) \equiv \min_{\eta\in\Phi_j} \| T\varphi - T\eta \| \tag{5.2.2}$$

を定義する．不等式

$$\forall j \in J, 0 \le \varepsilon_j < \min_{k\in J-\{j\}} diff\,(T\omega_k, T\cdot\Phi_j) \tag{5.2.3}$$

を満たすを満たす閾値 ε_j の，$j \in J$ にわたる組を決めておく．
次の定理５．３は，式 (5.2.1) のように定義される式 (2.22) の関数 SM が不等式

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, 0 \le s_j(T\varphi) \le +\infty \tag{5.2.4}$$

を満たす無限型でaxiom 2を満たすように，定義される得ることを指摘したものである．

[定理５．３](axiom 2を満たす無限型成分を持つ類似度関数 SM の構成定理)
式 (2.22) の関数 SM が式 (5.2.1) のように定義される場合を考えよう．
不等式 (5.2.3) が満たされるように，閾値 ε_j の, $j \in J$ にわたる組を選定しておく．
このとき，式 (5.2.1) の $SM(\varphi, \omega_i)$ 内の,各 $s_j(T\varphi)$ が

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, 0 \le s_j(T\varphi)$$
$$\begin{cases} = +\infty \quad \text{if} \quad diff\,(T\varphi, T\cdot\Phi_j) \le \varepsilon_j \\ < +\infty \quad \text{if} \quad diff\,(T\varphi, T\cdot\Phi_j) > \varepsilon_j \end{cases} \tag{5.2.5}$$

が満たされるように設定すれば，式 (2.22) の関数 SM はaxiom 2を満たす．
(証明) 容易に証明できる．　□
式 (5.2.5) を満たす式 (5.2.1) の $SM(\varphi, \omega_i)$ 内の,各 $s_j(T\varphi)$ を具体的に設定する方法の１つは次の通りである．
不等式

$$\forall x \in M, \forall j \in J, \delta_j > 0 \tag{5.2.6}$$

を満たす関数の系

$$\delta_j, j \in J \tag{5.2.7}$$

を用意する．そうすれば，各 $s_j(T\varphi)$ を

$$_j(T\varphi) =$$
$$\begin{cases} +\infty \quad \text{if} \quad diff\,(T\varphi, T\cdot\Phi_j) \le \varepsilon_j \\ [\log_e[1+\delta_j \cdot diff\,(T\varphi, T\cdot\Phi_j)^2]^{-1} \quad \text{if} \quad diff\,(T\varphi, T\cdot\Phi_j) > \varepsilon_j \end{cases} \tag{5.2.8}$$

と定義できる．

5.3　axiom 2を満たす類似度関数の構成 3

特徴抽出写像

$$u:\Phi\times L\to Z\quad (\text{複素数の全体}) \tag{5.3.1}$$

を導入する．$u(\varphi,\ell)\in Z$ は，パターン (音声波形そのものではなく，音声波形から得られる情報でもよい) $\varphi\in\Phi$ から抽出される第$\ell\in L$番目の複素数値特徴量$u(\varphi,\ell)\in Z$ である．

$$\vec{u}(\varphi)\equiv\{u(\varphi,\ell)\mid \ell\in L\} \tag{5.3.2}$$

はパターン$\varphi\in\Phi$ から抽出される第$\ell\in L$番目の特徴量$u(\varphi,\ell)\in Z$ の組である．

$\overline{u(\eta,\ell)}$ は$u(\eta,\ell)$ の複素共役として，内積

$$[\vec{u}(\varphi),\vec{u}(\eta)]\equiv\sum_{\ell\in L}w_\ell\cdot u(\varphi,\ell)\cdot\overline{u(\eta,\ell)} \tag{5.3.3}$$

を定義する．ここに，$\forall\ell\in L, w_\ell>0$ である．ノルム

$$|\vec{u}(\varphi)|\equiv\sqrt{[\vec{u}(\varphi),\vec{u}(\eta)]} \tag{5.3.4}$$

をも定義しておく．

定理５.３と同様に，次の定理５.４が成立する．

[定理５.４](特徴抽出写像uを使ったaxiom 2を満たす無限型成分を持つ類似度関数SM の構成定理)

式 (2.22) の関数SM が式 (5.2.1) のように定義される場合を考えよう．

式(5.2.2)の$diff(T\varphi,T\cdot\Phi_j)$ の代りに，特徴抽出写像u

を使って，

$$diff(T\varphi,T\cdot\Phi_j)\equiv\min_{\eta\in\Phi_j}|\vec{u}(T\varphi)-\vec{u}(T\eta)| \tag{5.3.5}$$

を定義する．不等式 (5.2.3) が満たされるように，閾値ε_j の, $j\in J$ にわたる組を選定しておく．

このとき，式(5.2.1)の$SM(\varphi,\omega_j)$ 内の,各$s_j(T\varphi)$ を式(5.2.5)のように定義すれば，式 (2.22) の関数SM はaxiom 2を満たす．□

各$s_j(T\varphi)$ は具体的に例えば，式 (5.2.8) のように設定できる．

5.4　axiom 2を満たす類似度関数の構成 4

第$j\in J$ 番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属することが判明しているパターン$\varphi_{j,t}$ の集合$\Phi_j(\subset\Phi)$ を，2条件式 (5.1.11) , (5.1.12) が満たされるように選定しておけば，また，第$j\in J$ 番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$のカテゴリ番号$j\in J$ について，

$$f_j(u)=\log_e(1+a_j\cdot u^k), k=1,2,\cdots,a_j>0 \tag{5.4.1}$$

と定義される関数

$$f_j:R^+\to R^+,\ \text{ここに，}\ R^+\ \text{は非負実数全体の集合} \tag{5.4.2}$$

を用意する．

次の定理５.４が成立する．

[定理５.５](axiom 2を満たす無限型成分を持つ類似度関数 SM の一般構成定理)

パターンモデル $T\varphi$ とパターンモデル集合 $T\cdot\Phi_j \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi_j\}$ との，式(5.2.2)の最小ノルム距離 $diff(T\varphi, T\cdot\Phi_j)$ を持ち出せば，次のように定義される式(2.22)の関数はaxiom 2を満たす:

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} \dfrac{f_j(diff(T\varphi, T\cdot\Phi_j))^{-2}}{\sum_{k\in J} f_k(diff(T\varphi, T\cdot\Phi_k))^{-2}} \cdots \sum_{k\in J} f_k(diff(T\varphi, T\cdot\Phi_j)) > 0 \text{ のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \sum_{k\in J} f_k(diff(T\varphi, T\cdot\Phi_j)) = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{5.4.3}$$

□

５.５　axiom 2を満たす類似度関数 SM の構成５

式(5.3.1)の特徴抽出写像 u を導入する．$u(\varphi,\ell)\in Z$ は，パターン(音声波形そのものではなく，音声波形から得られる情報でもよい) $\varphi\in\Phi$ から抽出される第 $\ell\in L$ 番目の複素数値特徴量である．式(5.3.2)の $\vec{u}(\varphi)$ はパターン $\varphi\in\Phi$ から抽出される第 $\ell\in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi,\ell)\in Z$ の組である．

$\overline{u(\eta,\ell)}$ は $u(\eta,\ell)$ の複素共役として，式(5.3.3)の内積 $[\vec{u}(\varphi),\vec{u}(\eta)]$ を定義する．ここに，$\forall\ell\in L, w_\ell > 0$ である．式(5.3.4)のノルム $\vec{u}(\varphi)$ をも定義しておく．

式(5.3.1)の特徴抽出写像 u を導入し，式(5.2.2)の最小ノルム距離 $diff(T\varphi, T\cdot\Phi_j)$ を書き直し，定理５.５に対応する次の定理５.６が成り立つ．

[定理５.６](特徴抽出写像 u を使ったaxiom 2を満たす無限型成分を持つ類似度関数 SM の構成定理)

分離条件

$$\forall j\in J, \forall i\in J-\{j\}, \forall\varphi\in\Phi_j, \forall\eta\in\Phi_i, \vec{u}(T\eta)\neq\vec{u}(T\varphi) \tag{5.5.1}$$

の下で定義される $diff(T\varphi, T\cdot\Phi_j)$ を式(5.3.5)の如く定義しても，式(5.4.3)で定義される式(2.22)の関数 SM はaxiom 2を満たす．

(証明)　容易に証明できる．　□

５.６　axiom 2を満たす類似度関数 SM の構成６(適応的構成)

５.６.１　類似度関数の再帰的構成

Axiom 2を満たす類似度関数

$$SM' : \Phi\times\Omega \to \{s \mid 0\le s\le 1\} \tag{5.6.1}$$

を持ち出す．添え字(カテゴリ番号) $i\in J$ を助変数に持つ関数

$$c_i : T\cdot\Phi \to R \tag{5.6.2}$$

をも導入する．２変数の関数

$$\max\{a,b\}=a \quad if \quad a \geq b, = b \quad if \quad a<b \tag{5.6.3}$$

を導入しておく．

関数系$c_i, i \in J$ を適応的に構成するものとする．そうすると，axiom 2を満たす類似度関数SM'から，axiom 2を満たす類似度関数SMを再帰的に構成できることを明らかにしたのが，次の定理５．７である．

[定理５．７](axiom 2を満たす類似度関数SMの適応的構成再帰定理)

axiom 2を満たす類似度関数SM'を用い，非正条件

$$\forall j \in J, \forall i \in J-\{i\}, c_j(T\omega_i) \leq 0 \tag{5.6.4}$$

の下で，

$$SM(\varphi,\omega_j)=\frac{SM'(\varphi,\omega_j)+\max\{c_j(T\varphi),0\}}{1+\sum_{k\in J}\max\{c_k(T\varphi),0\}} \tag{5.6.5}$$

を構成すれば，式(2.22)の，この関数SMは再び，axiom 2を満たす．

(証明)　容易に証明される．□

５．６．２　類似度関数SMの均衡

ここで，下の式(5.6.10)などから．

$$\exists\varphi\in\Phi, \exists j \in J,$$

$$SM(\varphi,\omega_j)=SM'(\varphi,\omega_{j)} \tag{5.6.6}$$

$$\Leftrightarrow [1-SM'(\varphi,\omega_j)]\cdot\max\{c_j(T\varphi),0\}=SM'(\varphi,\omega_j)\cdot\sum_{k\in J-\{j\}}\max\{c_k(T\varphi),0\} \tag{5.6.7}$$

に注意しておく．これから，次の(イ),(ロ)が成立することになる：

不動点式(5.6.6)が成立していれば，

(イ) $$c_j(T\varphi)\leq 0 \Rightarrow SM'(\varphi,\omega_j)=0 \vee [\forall k\in J-\{j\}, c_k(T\varphi)\leq 0]. \tag{5.6.8}$$

(ロ) $$\forall k \in J-\{j\}, c_k(T\varphi)\leq 0 \Rightarrow SM'(\varphi,\omega_j)=1\vee c_j(T\varphi)\leq 0. \tag{5.6.9}$$

□

次の定理５．８は，類似度関数SM'が式(5.6.11)が成立するという意味で均衡していれば，直交条件式(5.6.12)の下で，式(5.6.2)の関数c_i: $T\cdot\Phi\to R$ の系の値が非負になること，つまり，等式(5.6.13)が成り立つことを示したものである．

[定理５．８](類似度関数の均衡定理)

不動点式(5.6.6)が成立していれば，

$$\max\{c_j(T\varphi),0\}=SM'(\varphi,\omega_j)\cdot\sum_{k\in J}\max\{c_k(T\varphi),0\} \tag{5.6.10}$$

が成立し，不動点式系(すべての $j \in J$ にわたる不動点式(5.6.6))

$$\exists \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \quad SM(\varphi, \omega_j) = SM'(\varphi, \omega_j) \tag{5.6.11}$$

が成立していれば，

$$[\sum_{i \in J} SM'(\varphi, \omega_i) \cdot c_i(T\varphi)] = 0 \quad \text{（直交性）} \tag{5.6.12}$$

$$\Rightarrow \forall j \in J, c_j(T\varphi) \cdot \max\{c_j(T\varphi), 0\} = 0. \tag{5.6.13}$$

(証明)　式(5.6.10)は，

$$SM'(\varphi, \omega_j) = \frac{SM'(\varphi, \omega_j) + \max\{c_j(T\varphi), 0\}}{1 + \sum_{k \in J} \max\{c_k(T\varphi), 0\}} \tag{5.6.14}$$

を変形すれば得られる．式(5.6.10)の両辺に $c_j(T\varphi)$ を乗じ，$j \in J$ につき総和すれば，

$$[\sum_{i \in J} SM'(\varphi, \omega_i) \cdot c_i(T\varphi)] \cdot [\sum_{k \in J} \max\{c_k(T\varphi), 0\}] = \sum_{j \in J} c_j(T\varphi) \cdot \max\{c_j(T\varphi), 0\} \tag{5.6.15}$$

が得られる．よって，式(5.6.12)が成立していれば，

$$\sum_{j \in J} c_j(T\varphi) \cdot \max\{c_j(T\varphi), 0\} = 0 \tag{5.6.16}$$

が成り立つ．ところが，

$$\forall j \in J, c_j(T\varphi) \cdot \max\{c_j(T\varphi), 0\} \geq 0 \tag{5.6.17}$$

であるから，式(5.6.13)が成り立つことがわかる．　□

5.6.3　類似度関数 SM の，3層ニューラルネットによる適応方法

式(5.6.2)の関数 $c_i : T \cdot \Phi \to R$ を3層ニューラルネットで構成し，誤差逆伝播学習(error back-propagation learning)で重み(weight)，閾値(threshold value)を決定する方法を以下に説明する．

Ⅰ．3層ニューラルネットのシステム方程式

パターンモデルから抽出された各特徴量 $u(T\varphi, i), i \in L$ を3層ニューラルネットへ入力する，つまり，3層ニューラルネットの各入力 s'_i を，

$$s'_i = u(T\varphi, i), i \in L = \{1, 2, \cdots, m\} \tag{5.6.18}$$

とおく．3層ニューラルネットの動作を記述するシステム方程式は，

$$s_i = h_i(s'_i), i \in L = \{1, 2, \cdots, m\} \tag{5.6.19}$$

$$y_j = f_j(\sum_{i=1}^{m} W_{j\,i} \cdot s_i - a_j), j = 1,2,\cdots,n \tag{5.6.20}$$

$$z_k = g_k(\sum_{j=1}^{n} V_{k\,j} \cdot y_j - b_k), k \in J = \{1,2,\cdots,q\} \tag{5.6.21}$$

である．

式(5.6.5)内の各$c_k(T\varphi), k \in J$ を3層ニューラルネットからの出力z_kとして，

$$c_k(T\varphi) = z_k = g_k(\sum_{j=1}^{n} V_{k\,j} \cdot y_j - b_k), k \in J = \{1,2,\cdots,q\} \tag{5.6.22}$$

とおくことになる．

Ⅱ.ニューロン発火関数

1～3層目のニューロン発火関数(activation function)を次の①～③の如く設定する．

①1層目ニューロン発火関数

$$h_i(x) = \begin{cases} -d_i' & \text{if} \quad x \le -c_i' \\ \dfrac{d_i'}{c_i'} \cdot x & \text{if} \quad -c_i' < x < +c_i' \\ +d_i' & \text{if} \quad x \ge +c_i' \end{cases}$$

ここに，$c_i', d_i' > 0$（例えば，$c_i' = d_i' = 1$） (5.6.23)

$$dh_i(x)/dx = \begin{cases} \dfrac{d_i'}{c_i'} & \text{if} \quad -c_i' < x < +c_i' \\ 0 & \text{if} \quad x \le -c_i' \vee x \ge +c_i' \end{cases} \tag{5.6.24}$$

②2層目ニューロン発火関数

$$f_j(x) = \begin{cases} -d_j'' & \text{if} \quad x \le -c_j'' \\ \dfrac{d_j''}{c_j''} \cdot x & \text{if} \quad -c_j'' < x < +c_j'' \\ +d_j'' & \text{if} \quad x \ge +c_j'' \end{cases} \tag{5.6.25}$$

ここに，$c_j'', d_j'' > 0$（例えば，$c_j'' = d_j'' = 1$）

$$df_j(x)/dx = \begin{cases} \dfrac{d_j''}{c_j''} & \text{if} \quad -c_j'' < x < +c_j'' \\ 0 & \text{if} \quad x \le -c_j'' \vee x \ge +c_j'' \end{cases} \tag{5.6.26}$$

③３層目ニューロン発火関数

$$g_k(x) = \begin{cases} -d_k''' & \text{if} \quad x \le -c_k''' \\ \dfrac{d_k'''}{c_k'''} \cdot x & \text{if} \quad -c_k''' < x < +c_k''' \\ +d_k''' & \text{if} \quad x \ge +c_k''' \end{cases}$$

ここに，$c_k''', d_{ki}''' > 0$（例えば，$c_k''' = d_{ki}''' = 1$）　(5.6.27)

$$dg_k(x)/dx = \begin{cases} \dfrac{d_k'''}{c_k'''} & \text{if} \quad -c_k''' < x < +c_k''' \\ 0 & \text{if} \quad x \le -c_k''' \vee x \ge +c_k''' \end{cases} \tag{5.6.28}$$

Ⅲ. 重み，閾値の初期値の設定と重み，閾値の更新式

学習離散時刻 $t(=0,1,2,\cdots)$ での重み，閾値を $W_{j_i}(t)$, $a_j(t)$, $V_{kj}(t)$, $b_k(t)$ と書く．その初期値を，

$$W_{j_i}(1) = W_{j_i}(0) = \frac{1}{m+1} \text{ の関数} \tag{5.6.29}$$

$$a_j(1) = a_j(0) = \frac{m}{m+1} \text{ の関数} \tag{5.6.30}$$

$$V_{kj}(1) = V_{kj}(0) = \frac{1}{n+1} \text{ の関数} \tag{5.6.31}$$

$$b_k(1) = b_k(0) = \frac{n}{n+1} \text{ の関数} \tag{5.6.32}$$

とおく．時刻 t での重み，閾値から時刻 $(t+1)$ 出の値へと更新する仕方は次の通りである：

$$W_{j_i}(t+1) = W_{j_i}(t) + \Delta W_{j_i}(t) \tag{5.6.33}$$

$$a_j(t+1) = a_j(t) + \Delta a_j(t) \tag{5.6.34}$$

$$V_{kj}(t+1) = V_{kj}(t) + \Delta V_{kj}(t) \tag{5.6.35}$$

$$b_k(t+1) = b_k(t) + \Delta b_k(t) \tag{5.6.36}$$

$$t = 1,2,3,4,5,\cdots$$

□

Ⅳ. 更新分 $\Delta W_{j_i}(t)$, $\Delta a_j(t)$, $\Delta V_{kj}(t)$, $\Delta b_k(t)$ の決定

時刻 t での訓練パターン φ_t が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属するとき，

$$s_i' = u(T\varphi_t, i), i = 1,2,\cdots,m \tag{5.6.37}$$

とおいたときの，３式(5.6.19)～(5.6.21)で表される現実出力(actual outputs)

$$s_i, i \in L = \{1,2,\cdots,m\}, \qquad y_j, j = 1,2,\cdots,n, \qquad z_k, k \in J = \{1,2,\cdots,q\} \tag{5.6.38}$$

を求める．理想出力(desired outputs)を

$$do_j = +1 \tag{5.6.39}$$

$$do_k = -1 \text{ for any } k \in J - \{j\} \tag{5.6.40}$$

とし，適応自乗誤差(adaptive squared error)

$$E(t) \equiv E(t; < s', do >) \equiv \sum_{k=1}^{q} [z_k - do_k]^2 \tag{5.6.41}$$

ここに,

$$s' = col(s'_1 \quad s'_2 \quad \cdots \quad s'_m) \text{（列ベクトル）}, do = col(do_1 \quad do_2 \quad \cdots \quad do_q) \tag{5.6.42}$$

を最小にするように，最急降下法(method of steepest descent)を用いて，時刻tでの重み，閾値

$$W_{j_i}(t), a_j(t), i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n \tag{5.6.43}$$

$$V_{k\,j}(t), b_k(t), j = 1,2,\cdots,n; k = 1,2,\cdots,q \tag{5.6.44}$$

から，時刻$(t+1)$での重み，閾値

$$W_{j_i}(t+1), a_j(t+1), i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n \tag{5.6.45}$$

$$V_{k\,j}(t+1), b_k(t+1), j = 1,2,\cdots,n; k = 1,2,\cdots,q \tag{5.6.46}$$

を 4 式(5.6.33)～(5.6.36)に従い，求める(逐次学習法;successive learning method).

この際,

$(k-1)\cdot q + 1 \le t \le k \cdot q$ のとき

$$\varepsilon_{k\,j}(3;t) = \frac{1}{k}, \varepsilon_k(4;t) = \frac{1}{k}, \varepsilon_{j_i}(1;t) = \frac{1}{k}, \varepsilon_j(2;t) = \frac{1}{k}$$

と与えると，更新分$\Delta V_{k\,j}(t)$,$\Delta b_k(t)$ $\Delta W_{j_i}(t)$,$\Delta a_j(t)$ は，最急降下法による計算によれば，次のようになる：

$$\Delta V_{k\,j}(t) = \varepsilon_{k\,j}(3;t) \cdot [do_k - z_k] \cdot \frac{dg_k(x)}{dx} \Big|_{x=\sum_{j=1}^{n} V_{k\,j}(t)\cdot y_j - b_k(t)} \cdot y_j \tag{5.6.47}$$

$$\Delta b_k(t) = \varepsilon_k(4;t) \cdot [do_k - z_k] \cdot \frac{dg_k(x)}{dx} \Big|_{x=\sum_{j=1}^{n} V_{k\,j}(t)\cdot y_j - b_k(t)} \cdot (-1) \tag{5.6.48}$$

$$\Delta W_{ji}(t)$$

$$= \varepsilon_{ji}(1;t)\cdot[\sum_{k=1}^{q} V_{kj}(t)\cdot[do_k - z_k]\cdot\frac{dg_k(x)}{dx}|_{x=\sum_{j=1}^{n}V_{kj}(t)\cdot y_j - b_k(t)}]$$

$$\cdot\frac{df_j(x)}{dx}|_{x=\sum_{i=1}^{m}W_{ji}(t)\cdot s_i - a_j(t)}\cdot s_i \tag{5.6.49}$$

$$\Delta a_j(t)$$

$$= \varepsilon_j(2;t)\cdot[\sum_{k=1}^{q} V_{kj}(t)\cdot[do_k - z_k]\cdot\frac{dg_k(x)}{dx}|_{x=\sum_{j=1}^{n}V_{kj}(t)\cdot y_j - b_k(t)}]$$

$$\cdot\frac{df_i(x)}{dx}|_{x=\sum_{i=1}^{m}W_{ji}(t)\cdot s_i - a_j(t)}\cdot(-1) \tag{5.6.50}$$

$t = 1,2,3,4,5,\cdots$ □

Ⅴ. 訓練パターンの系列

時刻 t の訓練パターン φ_t の系列

$$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_q,\varphi_{q+1},\varphi_{q+2},\cdots,\varphi_{2q},\varphi_{2q+1},\varphi_{2q+2},\cdots,\varphi_{3q},\cdots \tag{5.6.51}$$

を考える．ここに，

$$\varphi_k,\varphi_{q+k},\varphi_{2q+k},\varphi_{3q+k},\cdots$$

：第 $k \in J = \{1,2,\cdots,q\}$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_k$ に帰属する訓練パターン (5.6.52)

であり，第 $j \in J = \{1,2,\cdots,q\}$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属する訓練パターンの出現頻度は $p(\mathfrak{C}_j)$ に比例するようにする．但し，

$$\exists t(=\ell\cdot q + j), \varphi_t = \omega_j \tag{5.6.53}$$

とする．

Ⅵ. 学習アルゴリズムと，その終了基準

3式 (5.6.19) ～ (5.6.21) に登場している重み，閾値 $W_{ji}, a_j, i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n$ ；
$V_{kj}, b_k, j = 1,2,\cdots,n; k = 1,2,\cdots,q$ を求める手順は次の通りである．

(1) 初期化 (initialization)

時刻 $t(=0,1)$ での，重み，閾値の初期値を 4 式 (5.6. 2 9) ～ (5.6.32) の如く設定する．

(2) 帰納 (recursion)

時刻 $t(=1,2,3,4,5,\cdots)$ での，２式 (5.6.43) , (5.6.44) の重み，閾値から，時刻 $(t+1)$ での，２式 (5.6.45) , (5.6.46) の重み，閾値を求める．

(3) 終了(termination)
終了基準

$$\forall j \in J, c_j(T\omega_j) > +1/2 \tag{5.6.54}$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}, c_j(T\omega_i) \le -1/2 \tag{5.6.55}$$

が確認された時刻 t で終了する．このときの, 2 式 (5.6.43) , (5.6.44) の重み，閾値が求める3式 (5.6.19) ～ (5.6.21) に登場している重み，閾値である．

6．axiom 3を満たす大分類関数

本章では，axiom 3を満たす式(2.27)の大分類関数BSC を， 3 種類構成する．

6.1　パーセプトロンの系によるaxiom 3を満たす大分類関数BSC の構成 (構成 1)

6.1.1 大分類関数BSC の設定

Axiom 3を満たす式 (2.27) の大分類関数BSC をパーセプトロンの系で構成しよう．
1 実変数の,式 (A1.7) の2値関数 $psn(u)$ と，実数値の重み$w(j,\ell)$ の組

$$w(j,\ell), j \in J, \ell \in L \tag{6.1.1}$$

と，閾値 $e(j)$ の組

$$e(j), j \in J \tag{6.1.2}$$

を導入する．式 (A1.1) の特徴抽出写像uを導入する． $u(\varphi,\ell) \in R$ (実数全体の集合)はパターン$\varphi \in \Phi$ から抽出された第 $\ell \in L$番目の実数値の特徴量である．
2 分離条件

$$\forall j \in J, f_j(T\omega_j) \ge 0 \tag{6.1.3}$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}, f_j(T\omega_i) < 0 \tag{6.1.4}$$

を満たすように，パーセプトロンの系

$$f_j(T\varphi) \equiv \sum w(j,\ell) \cdot u(T\varphi,\ell) - e(j), j \in J \tag{6.1.5}$$

が実数値の重み$w(j,\ell)$ の組と閾値 $e(j)$ の組とを学習の働きで決定する．そうすれば,

$$BSC(\varphi, j) = psn(f_j(T\varphi)) \tag{6.1.6}$$

と定義される式 (2.27) の 2 値関数BSC はaxiom 3を満たす．つまり，式 (6.1.3) から，axiom 3, (ⅰ)が満たされ，axiom 1, (ⅲ) の後半を考慮すれば，axiom 3, (ⅱ) が満たされてていることは，式 (6.1.6) から明らかである．更に，式 (6.1.4) から，カテゴリ間の相互排除式 (2.30) が満たされる．

6.1.2　重み，閾値の，適応による各重み$w(j,\ell)$，各閾値 $e(j)$ の決定

式 (6.1.5) 内の各重み$w(j,\ell)$，各閾値 $e(j)$ を学習で適応的に決定する方法を説明しよう．

Ⅰ．重み，閾値の初期値の設定と重み，閾値の更新式

学習離散時刻 $t(=0,1,2,\cdots)$ での重み，閾値を，$w(j,\ell;t)$，$e(j;t)$ と書く．その初期値を，

$$w(j,\ell;1)=w(j,\ell;0)=\frac{1}{|J|+|L|+1} \text{ の関数} \tag{6.1.7}$$

$$e(j;1)=e(j;0)=\frac{|J|}{|J|+1} \text{ の関数} \tag{6.1.8}$$

とおく．時刻 t での重み，閾値から時刻 $(t+1)$ での値へと更新する仕方は次の通りである：

$$w(j,\ell;t+1)=w(j,\ell;t)+\Delta w(j,\ell;t) \tag{6.1.9}$$

$$e(j;t+1)=e(j;t)+\Delta e(j;t) \tag{6.1.10}$$

$t=1,2,3,4,5,\cdots$ □

Ⅱ．更新分，$w(j,\ell;t)$，$e(j;t)$ の決定

その帰属するカテゴリが判明している時刻 t での訓練パターン φ_t が与えられたとき，式(6.1.5)で表される現実出力(actual outputs) $f_i(T\varphi_t;t)$ を

$$f_j(T\varphi_t;t)\equiv\sum_{\ell\in L}w(j,\ell;t)\cdot u(T\varphi_t,\ell)-e(j;t),\ j\in J \tag{6.1.11}$$

と求める．理想出力(desired outputs) $do(j;t)$ を

$$do(j;t)=$$
$$\begin{cases} +1\cdots\ \varphi_t \text{ が第 } j\in J \text{ 番目のカテゴリ } \mathfrak{C}_j \text{ に帰属するとき} \\ -1\cdots\ \varphi_t \text{ が第} i\in J \text{ 番目のカテゴリ } \mathfrak{C}_i(i\in J-\{j\}) \text{ に帰属するとき} \end{cases} \tag{6.1.12}$$

とし，適応自乗誤差

$$E(t)\equiv\sum_{i\in J}\ 2^{-1}\cdot|\,f_i(T\varphi_t;t)-do(i;t)\,|^2 \tag{6.1.13}$$

を最小にするように，最急降下法を用いて，時刻 t での重み，閾値

$$w(j,\ell;t),\quad e(j;t),\ j\in J,\ell\in L \tag{6.1.14}$$

から，時刻 $(t+1)$ での重み，閾値

$$w(j,\ell;t+1),\quad e(j;t+1),\ j\in J,\ell\in L \tag{6.1.15}$$

を２式(6.1.9)，(6.1.10)に従い，求める(逐次学習法).

この際，

$(k-1)\cdot q+1\le t\le k\cdot q$ のとき

$$\varepsilon(1;j,\ell;t)=\frac{1}{k},\varepsilon(2;j;t)=\frac{1}{k} \tag{6.1.16}$$

と与えると，更新分$\Delta w(j;\ell;t)$，$\Delta e(j;t)$は，最急降下法による計算によれば，次のようになる：

$$\Delta w(j,\ell;t) = -\varepsilon(1;j,\ell;t)\cdot[f_j(T\varphi_t;t)-do(j;t)]\cdot u(T\varphi_t,\ell) \quad (6.1.17)$$

$$\Delta e(j;t) = -\varepsilon(2;j;t)\cdot[f_j(T\varphi_t;t)-do(j;t)]\cdot(-1) \quad (6.1.18)$$

$t = 1,2,3,4,5,\cdots$ □

Ⅲ．学習アルゴリズムと，その終了基準

5.6.3項でのⅤでの訓練パターンのφ_t系列を用いる．

式(6.1.5)に登場している重み，閾値$w(j,\ell)$，$e(j)$，を求める手順は次の通りである．

(1) 初期化(initialization)

時刻$t(=0,1)$での，重み，閾値の初期値を2式(6.1.7)，(6.1.8)の如く設定する．

(2) 帰納(recursion)

時刻$t(=1,2,3,4,5,\cdots)$での，式(6.1.14)の重み，閾値から，時刻$(t+1)$での，式(6.1.15)の重み，閾値を求める．

(3) 終了(termination)

終了規準

$$\forall j \in J, f_j(T\omega_j;t) \geq 1/2 \quad (6.1.19)$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}, f_j(T\omega_i;t) < -1/2 \quad (6.1.20)$$

が確認された時刻tで終了する．このときの重み，閾値，$w(j,\ell;t)$，$e(j;t)$が求める式(6.1.5)に登場している重み，閾値，$w(j,\ell)$，$e(j)$である．

6.2　2次ニューラルネットの援用によるSS形Parzen Window法による大分類関数BSCの構成(構成2)

6.2.1　SS形Parzen Window法による大分類関数BSC

先ず，$f^{+}{}_j(T\varphi)$，$f^{-}{}_j(T\varphi)$を，

$f^{+}{}_j(T\varphi)$

:パターンモデル$T\varphi$が出現したとき，第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$が出現する確率

$f^{-}{}_j(T\varphi)$ (6.2.1)

:パターンモデル$T\varphi$が出現したとき，第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$以外の任意のカテゴリ$\mathfrak{C}_i(i \in J-\{j\})$が出現する確率 (6.2.2)

と解釈しよう．関数

$$h_j : T \cdot \Phi \to R \tag{6.2.3}$$

を導入して，式(2.27)の関数BSCを，

$$BSC(\varphi, j) = psn(d^+{}_j \cdot f^+{}_j(T\varphi) + d^-{}_j \cdot f^-{}_j(T\varphi) + h_j(T\varphi)) \tag{6.2.4}$$

ここに，$d^+{}_j > 0, d^-{}_j < 0$ (6.2.5)

と，設定する．ここに，

$$f^-{}_j(T\varphi) = 1 - f^+{}_j(T\varphi) \tag{6.2.6}$$

であるから，

$$BSC(\varphi, j) = psn(d^-{}_j + f^+{}_j(T\varphi) \cdot (d^+{}_j - d^-{}_j) + h_j(T\varphi)) \tag{6.2.7}$$

と，再表現される．ここで，特に，

$$d^+{}_j = d_j > 0, d^-{}_j = -d_j < 0 \tag{6.2.8}$$

とおくと，更に

$$BSC(\varphi, j) = psn(2d_j \cdot f^+{}_j(T\varphi) - d_j + h_j(T\varphi)) \tag{6.2.9}$$

と，再表現される．

ここで，$2d_j \cdot f^+{}_j(T\varphi) - d_j =$

$$\begin{cases} -d_j & \text{if} \quad f^+{}_j(T\varphi) = 0 \\ +d_j & \text{if} \quad f^+{}_j(T\varphi) = 1 \\ 0 \quad \text{if} & f^+{}_j(T\varphi) = 1/2 \end{cases} \tag{6.2.10}$$

に注意する．

S.Suzukiが提案したParzen Window法（の変形）とは，式 (6.2.9) 内の確率を次の式 (6.2.13) で推測するものである．

[S.Suzukiの提案によるParzen Window法]

代表パターンの包含条件

$$\forall j \in J, \exists t \in \{1, 2, \cdots, n_j\}, \varphi_{j,t} = \omega_j \tag{6.2.11}$$

を満たすサンプルパターン$\varphi_{j,t}$の系列

$$\varphi_{j,t}, \quad t = 1 \sim n_j, j \in J \tag{6.2.12}$$

を用いる．ここに，

$\varphi_{j,t}$ ：第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属する第$t(=1 \sim n_i)$番目のサンプルパターンである．

$$f^{+}{}_{j}(T\varphi)=\frac{n_j\cdot\max_{t=1\sim n_j}F(T\varphi,T\varphi_{j,t})}{\sum_{i\in J}n_i\cdot\max_{t=1\sim n_i}F(T\varphi,T\varphi_{i,t})} \tag{6.2.13}$$

ここに，区分的 1 次関数$f(x)$，規格化内積(inner product)$nip(\varphi,\eta)$を

$$f(x)=\begin{cases}1\cdots 0\le x\le a\text{のとき}\\ \dfrac{b-x}{b-a}\cdots a<x<b\text{のとき}\\ 0\cdots b\le x\text{のとき}\end{cases} \tag{6.2.14}$$

$$nip(\varphi,\eta)=\begin{cases}0\cdots\|\varphi\|\cdot\|\eta\|=0\text{のとき}\\ \dfrac{(\varphi,\eta)}{\|\varphi\|\cdot\|\eta\|}\cdots\|\varphi\|\cdot\|\eta\|>0\text{のとき}\end{cases} \tag{6.2.15}$$

と導入し，$F(\varphi,\eta)$は，

$$F(\varphi,\eta)=f(1-|nip(\varphi,\eta)|^2) \tag{6.2.16}$$

と定義される．

さて，２量

$$e'_{+}\equiv\max_{j\in J}[d_j-2d_j\cdot f^{+}{}_{j}(T\omega_j)] \tag{6.2.17}$$

$$e'_{-}\equiv\min_{j\in J}\min_{i\in J-\{j\}}[d_j-2d_j\cdot f^{+}{}_{j}(T\omega_i)] \tag{6.2.18}$$

を考えると，不等式

$$e'_{-}<e'_{+} \tag{6.2.19}$$

が成立していると，しよう．そして，

分離条件 1　$\forall j\in J,h_j(T\omega_j)\ge e'_{+}.$ (6.2.20)

分離条件 1　$\forall j\in J,\forall i\in J-\{j\},h_j(T\omega_i)<e'_{-}.$ (6.2.21)

を要求する．

そうすれば，式 (2.27) の 2 値関数BSCは axiom 3 を満たす．つまり，式(6.2.20)から，axiom 3,(i)が満たされ，axiom 1,(iii)の後半$T\cdot T=T$を考慮すれば，axiom 3,(ii)が満たされてていることは，式(6.2.13)から明らかである．更に，式(6.2,21)から，カテゴリ間の相互排除式(2.30)が満たされる．

6.2.2　2次ニューラルネット内の適応による各重み $w(j,\ell)$，各閾値 $e(j)$ の決定

式(A1.1)の特徴抽出写像 u を導入する． $u(\varphi,\ell)\in R$ (実数全体の集合)はパターン $\varphi\in\Phi$ から抽出された第 $\ell\in L$ 番目の実数値の特徴量である．

式(6.2.9)の $h_j(T\varphi)$ を，2次ニューラルネットの形式に，

$$h_j(T\varphi)=\sum_{k\in L}\sum_{\ell\in L}V_2(j,k,\ell)\cdot u(T\varphi,k)\cdot u(T\varphi,\ell)+\sum_{\ell\in L}V_1(j,\ell)\cdot u(T\varphi,\ell)+V_0(j) \tag{6.2.22}$$

と設定し，式(6.2.22)内の各重み $V_2(j,k,\ell),V_1(j,\ell)$，各閾値 $-V_0(j)$ を学習で適応的に決定する方法を説明しよう．

Ⅰ．重み，閾値の初期値の設定と重み，閾値の更新式

学習離散時刻 $t(=0,1,2,\cdots)$ での重み，閾値を $V_2(j,k,\ell;t),V_1(j,\ell;t)$，$-V_0(j;t)$,と書く．その初期値を，

$$V_2(j,k,\ell;1)=V_2(j,k,\ell;0)=\frac{1}{|J|+2\cdot|L|+1}\ \text{の関数} \tag{6.2.23}$$

$$V_1(j,\ell;1)=V_1(j,\ell;0)=\frac{1}{|J|+|L|+1}\ \text{の関数} \tag{6.2.24}$$

$$V_0(j;1)=V_0(j;0)=-\frac{|J|}{|J|+1}\ \text{の関数} \tag{6.2.25}$$

とおく．時刻 t での重み，閾値から時刻 $(t+1)$ での値へと更新する仕方は次の通りである：

$$V_2(j,k,\ell;t+1)=V_2(j,k,\ell;t)+\Delta V_2(j,k,\ell;t) \tag{6.2.26}$$

$$V_1(j,\ell;t+1)=V_1(j,\ell;t)+\Delta V_1(j,\ell;t) \tag{6.2.27}$$

$$V_0(j;t+1)=V_0(j;t)+\Delta V_0(j;t) \tag{6.2.28}$$

$$t=1,2,3,4,5,\cdots$$

□

Ⅱ．更新分 $\Delta w(j,\ell;t)$,$\Delta e(j;t)$ ，の決定

その帰属するカテゴリが判明している時刻 t での訓練パターン φ_t が与えられたとき，式(6.2.22)で表される現実出力(actual outputs) $h_j(T\varphi_t;t)$ を

$$\begin{aligned}&h_j(T\varphi_t;t)\\&=\sum_{k\in L}\sum_{\ell\in L}V_2(j,k,\ell;t)\cdot u(T\varphi_t,k)\cdot u(T\varphi_t,\ell)+\sum_{\ell\in L}V_1(j,\ell;t)\cdot u(T\varphi_t,\ell)+V_0(j;t)\end{aligned} \tag{6.2.29}$$

と求める．不等式

$$e_+\geqq e'_+,e_-<e'_- \tag{6.2.30}$$

を満たす e_+, e_- を決定する．式(5.6.51)のパターン列内の，第 φ_t 時刻の訓練パターン $t(=1,2,\cdots)$ が第 $j_t \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属するとしよう．

このとき，第 $t(=1,2,\cdots)$ 時刻の理想出力(desired outputs) $do(j, j_t; t)$ を

$$do(j, j_t; t) = \begin{cases} e_+ \cdots\ j = j_t \in J \text{ のとき} \\ e_- \cdots\ j \in J - \{j_t\} \text{ のとき} \end{cases} \tag{6.2.31}$$

とし，適応自乗誤差

$$F(<\varphi_t, [j_t]>; t) \equiv \sum_{i \in J} 2^{-1} \cdot |\, h_i(T\varphi_t; t) - do(i; j_t; t)\,|^2 \tag{6.2.32}$$

を最小にするように，最急降下法を用いて，時刻tでの重み，閾値

$$V_2(j,k,\ell;t), V_1(j,\ell;t),\ -V_0(j;t),\ j \in J, \ell \in L \tag{6.2.33}$$

から，時刻$(t+1)$での重み，閾値

$$V_2(j,k,\ell;t+1), V_1(j,\ell;t+1),\ -V_0(j;t+1),\ j \in J, \ell \in L \tag{6.2.34}$$

を3式(6.2.26)～(6.2.28)に従い，求める(逐次学習法).

この際,

$(k-1)\cdot q + 1 \le t \le k \cdot q$ のとき

$$\varepsilon_2'(j,k,\ell;t) = \frac{1}{|J| + 2\cdot|L| + k}, \varepsilon_1'(j;\ell;t) = \frac{1}{|J| + |L| + k}, \varepsilon_0'(j;t) = \frac{1}{|J| + k} \tag{6.2.35}$$

と与えると，更新分$\Delta w(j;\ell;t)$, $\Delta e(j;t)$，は，最急降下法による計算によれば，次のようになる：

$$\Delta V_2(j,k,\ell;t) = -\varepsilon_2'(1; j,k,\ell;t)\cdot[h_j(T\varphi_t;t) - do(j,j_t;t)]\cdot u(T\varphi_t,k)\cdot u(T\varphi_t,\ell) \tag{6.2.36}$$

$$\Delta V_1(j,\ell;t) = -\varepsilon_1'(1; j,\ell;t)\cdot[h_j(T\varphi_t;t) - do(j,j_t;t)]\cdot u(T\varphi_t,\ell) \tag{6.2.37}$$

$$\Delta V_0(j;t) = -\varepsilon_0'(1; j;t)\cdot[h_j(T\varphi_t;t) - do(j,j_t;t)] \tag{6.2.38}$$

$t = 1,2,3,4,5,\cdots$ □

Ⅲ．学習アルゴリズムと，その終了基準

5.6.3項でのⅤでの訓練パターン φ_t の系列を用いる．
式(6.2.22)に登場している各重み$V_2(j,k,\ell), V_1$，各閾値 $-V_0(j)$ を求める手順は次の通りである．

(1) 初期化 (initialization)

時刻 $t(=0,1)$ での，重み，閾値の初期値を 3 式 (6.2.23) ～ (6.2.25) の如く設定する．

(2) 帰納 (recursion)

時刻 $t(=1,2,3,4,5,\cdots)$ での，式 (6.2.33) の重み，閾値から，時刻 $(t+1)$ での，式(6.2.34)の重み，閾値を求める．

(3) 終了 (termination)

終了規準

$$\forall j \in J, h_j(T\omega_j;t) \geq e'_+ \tag{6.2.39}$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}, h_j(T\omega_i;t) < e'_- \tag{6.2.40}$$

が確認された時刻 t で終了する．このときの，各重み，$V_2(j,k,\ell;t), V_1(j,\ell;t)$ 各閾値 $-V_0(j;t)$ が求める式 (6.2.22) に登場している各重み $V_2(j,k,\ell), V_1(j,\ell)$，各閾値 $-V_0(j)$ である．

6．3　Support Vector Machine の構造を利用した大分類関数 BSC の構成(構成 3)

6．3．1　支持ベクトルの系により定まる大分類関数 BSC

axiom 3を満たす式(2.27)の大分類関数 BSC をパーセプトロンの系に似た形式で構成しよう．

1実変数の，式 (A1.7) の2値関数 $psn(u)$ と，実数値の重み $w(j,\ell)$ の組

$$w(j,\ell), j \in J, \ell \in L \tag{6.3.1}$$

と，閾値 $b(j)$ の組

$$b(j), j \in J \tag{6.3.2}$$

を導入する．式(A1.1)の特徴抽出写像 v を導入する． $v(\varphi,\ell) \in R$ (実数全体の集合)はパターン $\varphi \in \Phi$ から抽出された第 $\ell \in L$ 番目の実数値の特徴量である．

式(6.1.5)のパーセプトロン $f_j(T\varphi)$ の系と同様に，

$$g_j(T\varphi) = \sum_{\ell \in L} W(j,\ell) \cdot v(T\varphi,\ell) + b(j) \tag{6.3.3}$$

を導入する．

式（A1.7）の 2 値関数 psn と式 (6.3.3) の $g_j(T\varphi)$ を使い，式 (6.1.6) の関数 BSC と同様に，

$$BSC(\varphi,j) = psn(g_j(T\varphi)) \tag{6.3.4}$$

と，式(2.27)の BSC を設定する．

maximal margin classifier,或いは，support vector machine [A16]の構造を考慮し，各重み $w(j,\ell)$，特徴量 $u(T\varphi,\ell)$ を次のように設定する：

① $$W(j,\ell) = w_{j,\ell} \cdot y_{j,\ell} = \pm w_{j,\ell} \tag{6.3.5}$$

ここに，$w_{j,\ell}$ は実数値であり，また，$y_{j,\ell}$ は 2 値 ± 1 をとり，

$$y_{j,\ell} = \begin{cases} +1 & \text{if} \quad \eta_\ell \quad \text{belongs to the jth category } \mathfrak{C}_j \\ -1 & \text{if} \quad \eta_\ell \quad \text{does not belong to the jth category } \mathfrak{C}_j \end{cases} \tag{6.3.6}$$

$$② \ u(T\varphi,\ell) \equiv K(T\eta_\ell, T\varphi) \equiv \exp[-\frac{\| T\varphi - T\eta_\ell \|^2}{a_\ell}], a_\ell > 0 \tag{6.3.7}$$

③$u(\varphi,\ell) \in R$ (実数全体の集合)もパターン$\varphi \in \Phi$ から抽出された第$\ell \in L$番目の実数値の特徴量であるとしよう．２式(5.3.3)，(5.3.4)の，特徴量同士の内積 $[\vec{u}(\varphi),\vec{u}(\eta)]$，ノルム $|\vec{u}(\varphi)|$を導入して，

$$v(T\varphi,\ell) \equiv K(T\eta_\ell, T\varphi) \equiv \exp[-\frac{|\vec{u}(T\varphi) - \vec{u}(T\eta_\ell)\|^2}{a_\ell}], a_\ell > 0 \tag{6.3.8}$$

□

結局，support vectorと称されてよいη_ℓ の系を使い，式(6.3.3)の$g_j(T\varphi)$ は，

$$g_j(T\varphi) = \sum_{\ell \in L} W(j,\ell) \cdot K(T\eta_\ell, T\varphi) + b(j) \tag{6.3.9}$$

と表される．

２分離条件式(6.1.3)，(6.1.4)と同様に，

分離条件１(非負条件)　$\forall j \in J, g_j(T\omega_j) \geq 0.$ (6.3.10)

分離条件２(負条件)　$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, g_j(T\omega_i) < 0.$ (6.3.11)

を設ける．

そうすれば，式(2.27)の２値関数BSC はaxiom 3を満たす．つまり，式 (6.3.10) から，axiom 3,(i) が満たされ，axiom 1,(iii)の後半$T \cdot T = T$ を考慮すれば，axiom 3,(ii)が満たされてていることは，式(6.3.3)から明らかである．更に，式(6.3.11)から，カテゴリ間の相互排除式(2.30)が満たされる．

６.３.２　重み$w_{j,\ell}$，閾値$b(j)$の学習

支持ベクトルη_ℓ の系$\{\eta_\ell \mid \ell \in L\}$ は，繰り返し提示され，包含条件

$$\{\eta_\ell \mid \ell \in L\} \subseteq \{\varphi_t \mid t = 1,2,\cdots,q,q+1,q+2,\cdots,2q,2q+1,2q+2,\cdots,3q,\cdots\}$$

(式(5.6.51)の訓練パターンの系列) (6.3.12)

を見たすとしよう．

式(6.3.9)内の各重み$w_{j,\ell}$，各閾値$b(j)$ を，式(5.6.51)の訓練パターンφ_t の系列を用い，学習で適応的に決定する方法を説明しよう．

Ⅰ．重み $w_{j,\ell}$ ，閾値 $b(j)$ の初期値の設定と重み，閾値の更新式

学習離散時刻 $t(=0,1,2,\cdots)$ での重み，閾値を，$w(j,\ell;t)$, $b(j;t)$ と書く．その初期値を，２式(6.1.7) , (6.1.8) の如く，つまり，

$$w(j,\ell;1)=w(j,\ell;0)=\frac{1}{|J|+|L|+1} \quad \text{の関数} \tag{6.3.13}$$

$$b(j;1)=b(j;0)=\frac{|J|}{|J|+1} \quad \text{の関数} \tag{6.3.14}$$

と設定する．

時刻 t での重み，閾値から時刻 $(t+1)$ での値へと更新する仕方は次の通りである：

$$w(j,\ell;t+1)=w(j,\ell;t)+\Delta w(j,\ell;t) \tag{6.3.15}$$

$$b(j;t+1)=b(j;t)+\Delta b(j;t) \tag{6.3.16}$$

$$t=1,2,3,4,5,\cdots$$

□

Ⅱ．更新分 $\Delta w(j,\ell;t)$, $\Delta e(j;t)$ の決定

その帰属するカテゴリが判明している時刻 t での訓練パターン φ_t が与えられたとき，式(6.3.9)で表される現実出力 $g_j(T\varphi_t;t)$ を

$$g_j(T\varphi_t;t)\equiv\sum_{\ell\in L}w(j,\ell;t)\cdot y_{j,\ell}\cdot K(T\varphi_\ell,T\varphi_t)+b(j;t),\ j\in J \tag{6.3.17}$$

と求める．理想出力 $do(j;t)$ を式 (6.1.12) の如く設定し，適応自乗誤差

$$E(t)\equiv\sum_{i\in J}\ 2^{-1}\cdot|\,g_i(T\varphi_t;t)-do(i;t)\,|^2 \tag{6.3.18}$$

を最小にするように，最急降下法を用いて，時刻 t での重み，閾値

$$w(j,\ell;t)\,,\ -b(j;t)\,,\ j\in J,\ell\in L \tag{6.3.19}$$

から，時刻 $(t+1)$ での重み，閾値

$$w(j,\ell;t+1)\,,\ -b(j;t+1)\,,\ j\in J,\ell\in L \tag{6.3.20}$$

を２式 (6.3.15) , (6.3.16) に従い，求める(逐次学習法).

この際，

$(k-1)\cdot q+1\le t\le k\cdot q$ のとき $\varepsilon(1;j,\ell;t),\varepsilon(2;j;t)$ を式(6.1.16)の如く与えると，

更新分$\Delta w(j,\ell;t)$，$\Delta b(j;t)$は，最急降下法による計算によれば，次のようになる：

$$\begin{aligned}&\Delta w(j,\ell;t)\\&=-\varepsilon(1;j,\ell;t)\cdot\partial E(t)/\partial w(j,\ell;t)\\&=-\varepsilon(1;j,\ell;t)\cdot[g_j(T\varphi_t;t)-do(j;t)]\cdot y_{j,\ell}\cdot K(T\varphi_\ell,T\varphi_t)\end{aligned}\tag{6.3.21}$$

$$\begin{aligned}&\Delta e(j;t)\\&=-\varepsilon(2;j;t)\cdot\partial E(t)/\partial b(j;t)\\&=-\varepsilon(2;j;t)\cdot[g_j(T\varphi_t;t)-do(j;t)]\end{aligned}\tag{6.3.22}$$

$t=1,2,3,4,5,\cdots$ □

Ⅲ．学習アルゴリズムと，その終了基準

5．6．3項でのⅤでの訓練パターンφ_tの系列を用いる．

式(6.3.3)に登場している重み，閾値$w(j,\ell)$，$b(j)$を求める手順は次の通りである．

(1) 初期化(initialization)

時刻$t(=0,1)$での，重み，閾値の初期値を２式(6.3.13),(6.3.14)の如く設定する．

(2) 帰納(recursion)

時刻$t(=1,2,3,4,5,\cdots)$での，式(6.3.19)の重み，閾値から，時刻$(t+1)$での，式(6.3.20)の重み，閾値を求める．

(3) 終了(termination)

終了規準

$$\forall j\in J,g_j(T\omega_j;t)\ge 1/2\tag{6.3.23}$$

$$\forall j\in J,\forall i\in J-\{j\},g_j(T\omega_i;t)<-1/2\tag{6.3.24}$$

が確認された時刻tで終了する．このときの,重み，閾値$w(j,\ell;t)$,$b(j;t)$が求める式(6．3．3)に登場している重み，閾値$w(j,\ell)$，$b(j)$である．

7．SSマルチメディア認識知能情報論に基づく多段階想起不動点認識の方法

S.Suzukiは，画像，音声などのマルチメディアパターンを連想的に認識するという働きに関し，人工知能論と情報理論などの観点から，30年以上の年月を費やし，数理を構築している[B3],[B4]．

本章では，この数理(SSマルチメディア認識知能情報論;SS理論)を適用し，パターン$\varphi\in\Phi$を多段階にわたり，連想的に変換しながらカテゴリ帰属知識(２．５節)のある不動点$<T\omega_j,[j]>\in<\Phi,2^J>$を見つけることにより，$\varphi\in\Phi$を第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターンのモデル$T\omega_j$として再

生し（連想），かつ，$\varphi \in \Phi$ を第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$へと帰属させる方法（認識）が簡単に，説明される．Axiom 2を満たす類似度関数SMとして，"直交性かつミックスチュア性" 類似度関数SMを採用すれば，有限の変換段階で，意味ある認識結果が得られ，有限な認識段階で終了することが説明される．尚，直交性類似度関数SM，ミックスチュア性類似度関数SMを一般的に構成する方法，並びに，類似度関数SMを直交性かつミックスチュア性を備えてくるように再帰的に構成する方法は，文献[B4]の第４章，第６章で説明されている．

７.１　多段階想起不動点認識の働きと，その終了基準としての不動点方程式

式(1.6)から式(1.11)までの説明は,第 t 段階パターンモデル φ_t に関する不動点方程式(1.12)の成立を終了基準 (termination criterion) とするものであった．SS理論は，実は，カテゴリ帰属知識$< \varphi_t , \lambda_t >$ に関する不動点方程式 (7.6) の成立を終了基準としている．以下．不動点方程式(7.6)の成立を終了基準とする多段階想起不動点認識の働きを説明する．直交性かつミックスチュア性"類似度関数SMを構成することが何故，必要とされるかは７.２節以降で説明される．

axiom 1を満たす式(2.8)のモデル構成作用素Tと，axiom 2を満たす式 (2.22) の類似度関数SM並びに，axiom 3を満たす式 (2.27) の大分類関数BSCとを用意する[B3],[B4]．

処理の対象とする問題のパターン(入力パターン)$\varphi \in \mathfrak{H}$が与えられたとき，このφを式 (2.14) のパターン集合Φ内の基本領域Φ_B に追加する．その後，２式 (2.15) , (2.16) を満たす式 (2.14) のパターン集合Φを用意する．

SSマルチメディア認識知能情報論に基づいて，多段階想起不動点認識の方法を簡単に説明すれば，次のようになる．

[多段階想起不動点認識の方法]

(1) (初期化段階；initialization) $< \varphi_t , \lambda_t >|_{t=0} =_{\Delta} < T\varphi, J >$ (7.1)

の下で，

(2) (帰納推理化段階；recursion)

$$< \varphi_{t+1}, \lambda_{t+1} > =_{\Delta} TA(\mu_t)T < \varphi_t , \lambda_t >$$
$$=_{\Delta} < TA(\mu_t \cap \lambda_t)T\varphi_t , CSF(\varphi_t , \mu_t \cap \lambda_t) >$$
$$t = 0,1,2,\cdots \tag{7.2}$$

を経て，カテゴリ帰属知識$< \varphi_t , \lambda_t > \in < \Phi, 2^J >$ の列

$$< \varphi_t , \lambda_t > , t = 0,1,2,\cdots \tag{7.3}$$

を求めていく．$\varphi \in \Phi$ は，入力パターン$\varphi \in \Phi$ の連想形認識の過程において，第t段階で想起されたパターンモデルである．$\lambda_t \in 2^J$ は，第 t 段階パターンモデル$\varphi_t \in \Phi$ が帰属している候補カテゴリの番号のリストである．

登場しているカテゴリの番号のリストの列

$$\mu_t (\subseteq J) , t = 0,1,2,\cdots \tag{7.4}$$

について説明しておこう．多段階連想形認識の過程の第 t 段階で，φ_t が帰属するであろう候補カテゴリの番号のリスト $\mu_t(\subseteq J)$ が帰納推理の働きで，選ばれなければならない．通常，減少列に，つまり，

$$\mu_0 \supseteq \mu_1 \supseteq \mu_2 \supseteq \cdots \supseteq \mu_t \supseteq \mu_{t+1} \supseteq \cdots \supset \phi \text{ (the empty set)} \tag{7.5}$$

が成立するように選ばれる．大抵の場合，収束条件式(1.10)の場合と異なり，収束条件を
(3)(終了段階；termination)
不動点方程式(fixed-point equation)

$$<\varphi_{t+1}, \lambda_{t+1}> (=_\Delta TA(\mu_t)T <\varphi_t, \lambda_t>) =_\Delta <\varphi_t, \lambda_t> \tag{7.6}$$

の成立する第 t 連想段階の$<\varphi_t, \lambda_t>$ で終了させる
と設定すると，

$$\exists j \in J, \varphi_t = T\omega_j \wedge \lambda_t = [j] \tag{7.7}$$

を満たす有限の非負整数が，不等式

$$0 \leq t \leq |J|-1 \tag{7.8}$$

が満たされる形で存在する[B26].
式(7.7)が成立していれば，不動点類似度分布が得られる，つまり，

$$SM(\varphi_t, \omega_j) = 1 \wedge [\forall k \in J - \{j\}, SM\varphi_t, \omega_k) = 0] \tag{7.9}$$

を満たす類似度分布

$$SM(\varphi_t, \omega_i), i \in J \tag{7.10}$$

が成り立つことになる．
カテゴリ帰属知識$<\varphi_t, \lambda_t>$ に関する不動点方程式(7.6)の成立は，第 t 段階パターンモデル φ_t に関する不動点方程式(1.12)を含んでおり，

$$<\varphi_{t+1}, \lambda_{t+1}> (= TA(\mu_t)T <\varphi_t, \lambda_t>) =<\varphi_t, \lambda_t> \tag{7.11}$$

$$\Leftrightarrow TA(\mu_t \cap \lambda_t)T\varphi_t = \varphi_t \wedge CSF(\mu_t \cap \lambda_t, \varphi_t) = \lambda_t \tag{7.12}$$

であることに注意しておく．

7.2　SSポテンシャルの減少を保証する多段階想起不動点認識の働き

直交性類似度関数SMについては，カテゴリ帰属知識のポテンシャルエネルギー$\mathrm{E}(\varphi_t, \lambda_t)$ が認識段階 t の進展につれて減少することが証明されている(文献[B4]の定理８.３)．然も，ポテンシャルエネルギー$\mathrm{E}(\varphi_t, \lambda_t)$)が減少し続けることはないというポテンシャルエネルギーの停留性が保証されている(文献[B4]の定理８.1)

7.2.1　類似度関数に関するSM-直交条件

類似度関数SMに関するSM-直交条件は次のように述べられる.

【類似度関数に関するSM-直交条件】

任意の$\mu(\neq\phi)\in 2^{J}$についての,実定数a_iの組$\{a_i \mid i\in\mu\}$が,正条件

$$\forall k\in\mu, a_k>0 \tag{7.13}$$

を満たすとしよう.このとき,直交条件

$$\forall j\in J-\mu,\ SM(\sum_{i\in\mu} a_i\cdot T\omega_i,\omega_j)=0 \tag{7.14}$$

が成立しているような式(2.22)の類似度関数SMは直交性類似度関数(直交条件を満たす類似度関数)であるという. □

多段階想起不動点認識の働きが式(7.7)が成立するという意味で収束するためには，認識の各段階で選ばれた候補カテゴリ$\mathfrak{C}_i, i\in\mu$以外のカテゴリ$\mathfrak{C}_j, j\in J-\mu$の各代表パターン$\omega_j, j\in J-\mu$との類似度$SM(\sum_{i\in\mu} a_i\cdot T\omega_i,\omega_j)$を0にすることが必要とされる．直交性類似度関数(直交条件を満たす類似度関数)はこのことを可能にすることに注意しておく．

７．２．２　カテゴリ帰属知識のポテンシャルエネルギー$E(\varphi^t,\lambda^t)$

カテゴリ帰属知識$<\varphi_t,\lambda_t>\in<\Phi,2^{J}>$のポテンシャルエネルギー（energy）$E(\varphi_t,\lambda_t)$は次の様に定義される：

①　$\varphi_t=0$ あるいは　$\lambda_t=\phi$ (空集合)　のとき

$$E(\varphi_t,\lambda_t)=0. \tag{7.15}$$

②　$\varphi^t\neq 0$ かつ $\lambda^t\neq\phi$ (空集合)　のとき

$$E(\varphi_t,\lambda_t)=|\lambda_t|-\sum_{j\in\lambda_t} SM(\varphi_t,\omega_j). \tag{7.16}$$

□

認識が正常に進んでいるときは通常，減少性

$$E(\varphi_t,\lambda_t)\geq E(\varphi_{t+1},\lambda_{t+1}), t=0,1,2,\cdots \tag{7.17}$$

の成立が期待され，事実，直交性類似度関数を採用していれば，この減少性は保証される．

７．２．３　カテゴリ帰属知識のポテンシャルエネルギー$E(\varphi_t,\lambda_t)$が認識段階の進展につれて減少すること

直交性類似度関数SMに関しては，次のことがいえる：直交性類似度関数SMについては，カテゴリ帰属知識のポテンシャルエネルギー$E(\varphi_t,\lambda_t)$が認識段階の進展につれて減少することが証明されている(文献[B4]の定理８．３)．然も，ポテンシャルエネルギー$E(\varphi_t,\lambda_t)$が減少し続けることはないというポテンシャルエネルギーの停留性が保証されている(文献[B4]の定理８.1).

つまり，次の２定理７．１，７．２が成り立つ．

[定理７.１](直交性類似度関数の下でのポテンシャルエネルギーの非増加定理)

直交性類似度関数SMを採用しているとしよう．

条件

$$[\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi] \text{かつ} [\phi \neq 0 \wedge \lambda \neq \phi] \tag{7.18}$$

を満たすカテゴリ帰属知識$<\varphi, \gamma>$の，構造受精変換$TA(\mu)T$による変換結果

$$<\phi, \lambda> =_{\Delta} TA(\mu)T <\varphi, \gamma> \tag{7.19}$$

について，エネルギー不等式

$$E(\varphi, \gamma) \geq E(\phi, \lambda) \tag{7.20}$$

が成立する．この式(7.20)で等号が成り立つのは，以下の３条件①,②,③が共に成り立つ場合に限る：

$$① \ \mu \supseteq \gamma \tag{7.21}$$

$$② \ \gamma = CSF(\varphi, \gamma) \tag{7.22}$$

$$③ \ \sum_{j \in J-\gamma} SM(\varphi, \omega_j) = 0 \tag{7.23}$$

(証明) 文献[B4]の定理８.３である． □

[定理７.２](ポテンシャルエネルギーの非負定理)

$$\begin{aligned} &\forall \varphi (\neq 0) \in \Phi, \\ &\gamma \neq \phi \Rightarrow E(\varphi, \gamma) \geq 0 \end{aligned} \tag{7.24}$$

が成り立ち，

$$E(\varphi, \gamma) = 0 \tag{7.25}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$|\gamma| = 1 \wedge \sum_{j \in \gamma} SM(\varphi, \omega_j) = 1 \tag{7.26}$$

(証明) 文献[B4]の定理８.1である． □

７.３　選ばれた候補カテゴリ以外のカテゴリの代表パターンとの類似度を０にする多段階想起不動点認識の働き

直交性類似度関数SM,ミックスチュア性類似度関数SMについて考えよう．不動点方程式(7.6)が成立するという意味で，式(7.3)の多段階連想形認識の過程が終了するためには，直交性類似度関数SMを採用していれば，十分である．そして，この過程が終了するときは，ミックスチュア性類似度関数SMを採用していれば，式(7.7)が成立し，この多段階連想形認識過程のある代表パターンω_jのモデル$T\omega_j$のカテゴリ帰属知識$<T\omega_j, [j]>$への収束性が保証される(文献[B4]の定理６.６)．更に，式(7.3)の多段階想起不動点認識過程が停留し，テンシャルエネルギーが最小値０になるための必要かつ十分条件は，方程式(7.7)の成立である(文献[B4]の定理８.５)．

以下の７.４節で，この２つの事項を少し詳しく，説明する．

７．４　不動点方程式の成立で，入力パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属するカテゴリが唯１個決まるための条件

７．４．１　類似度関数 SM に関する SM ミックスチュア条件

類似度関数 SM に関する SM -チュアミックス条件は次のように述べられる.

【類似度関数に関する SM -ミックスチュア直交条件】

$$\forall k \in \mu, 0 < b_k < 1 \wedge 0 < \sum_{k \in \mu} \mathrm{b}_k \le 1 \tag{7.27}$$

を満たす実定数 b_k の組 $\{b_k | \mathrm{k} \in \mu\}$ について、

$$\mu \supseteq \{\ell, m\} (\ell \neq m) \tag{7.28}$$

が成り立つような $\ell, m \in J$ が少なくとも存在する任意の $\mu \in 2^J$ に対し,ミックスチュア条件

$$\exists j \in \mu, \quad SM(\sum_{k \in \mu} b_k \cdot T\omega_k, \omega_j) \neq b_j \tag{7.29}$$

が成立しているような式(2.22)の類似度関数 SM はミックスチュア性類似度関数(ミックスチュア条件を満たす類似度関数)であるという. □

$T\omega_k, k \in \mu$ のミックスチュア(mixture) $\sum_{k \in \mu} b_k \cdot T\omega_k$ はその１次結合係数 b_j を類似度関数 SM の値として持たないようなカテゴリ番号 $j \in J$ が候補カテゴリ番号リスト $\mu (\subseteq J)$ に少なくとも１つ存在するというのが，ミックスチュア性類似度関数(ミックスチュア条件を満たす類似度関数)の意味である．

７．４．２　ある代表パターン ω_j のモデル $T\omega_j$ のカテゴリ帰属知識 $< T\omega_j, [j] >$ への収束性

式(7.3)の多段階連想形不動点認識過程が循環過程(cyclic　process)にならなくて，不動点方程式(7.6)が成立し，終了したときを考えよう．このとき，

入力パターン $\varphi \in \Phi$ は，パターンモデル $\varphi_t \in \Phi$ として再生され，カテゴリ $\mathfrak{C}_j, j \in \lambda_t$ の内の何れか１つに帰属する (7.30)

という．

このとき，３つの場合

$$(a) | \lambda_t | \ge 2 \text{ (認識不定)の場合} \tag{7.31}$$

$$(b) | \lambda_t | = 1 \text{ (認識可能)の場合} \tag{7.32}$$

$$(c) | \lambda_t | = 0 \text{ (認識不能)の場合} \tag{7.33}$$

が成り立つ．

$(a) | \lambda_t | \ge 2$ の場合は，入力パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属するカテゴリが複数個存在する場合であり，更に，$(b) | \lambda_t | = 1$ の場合は，入力パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属するカテゴリが唯１個存在する場合であり，最後に，$(c) | \lambda_t | = 0$ の場合は，入力パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属するカテゴリが存在しない場合である．

S.Suzukiが証明しているように[B3],[B4]，ミックスチュア性類似度関数SMについては，式(7.4)の各カテゴリ番号リスト$\mu(\subseteq J)$を，

$$\mu_t \supseteq \lambda_t (\subseteq J) \ , t = 0,1,2,\cdots \tag{7.34}$$

と選定しているとき，$(b) \mid \lambda_t \mid = 1$ (認識可能)の場合のみ生じ，$(a) \mid \lambda_t \mid \geq 2$，$(c) \mid \lambda_t \mid = 0$ の異常な事態は生じないことが保証される．

この保証について，説明しよう．

ミックスチュア性類似度関数SMについては，不動点方程式(7.6)が成立するという意味で，式(7.3)の多段階連想形認識の過程が終了するときは，式(7.7)が成立し，ある代表パターンω_jのモデル$T\omega_j$のカテゴリ帰属知識$< T\omega_j, [j] >$への収束性が保証される(文献[B4]の定理６.６)．更に，式(7.3)の多段階想起不動点認識過程が停留し，テンシャルエネルギーが最小値０になるための必要かつ十分条件は，方程式(7.26)の成立である(文献[B4]の定理８.５)

つまり，次の定理７.３，定理７.３の系１，定理７.４が成り立つ．

[定理７.３](ミックスチュア性類似度関数についての，カテゴリ帰属知識の変換定理)

ミックスチュア性類似度関数SMを採用していれば，

$$< T\varphi, \lambda > =_{\Delta} TA(\mu)T < \varphi, \gamma > \tag{7.35}$$

$$\Rightarrow$$

$$[\exists j \in CSF(\varphi, \mu \cap \gamma), T\varphi = T\omega_j \wedge \lambda = [j]] \tag{7.36}$$

$$\vee [T\varphi = 0 \wedge \lambda = \phi] \tag{7.37}$$

[定理７.３の系１](ミックスチュア性類似度関数SMについての，カテゴリ帰属知識の不動点定理)

ミックスチュア性類似度関数SMを採用していれば，

$$< T\varphi, \lambda > =_{\Delta} TA(\mu)T < T\varphi, \lambda > \wedge T\varphi \neq 0 \tag{7.38}$$

$$\Rightarrow$$

$$[\exists j \in CSF(\varphi, \mu \cap \lambda), T\varphi = T\omega_j \wedge \lambda = [j]] \tag{7.39}$$

(証明) 文献[B4]の定理６.６，その系１である □

[定理７.４](カテゴリ帰属知識のポテンシャルエネルギーの最小値定理)

$$\varphi \neq 0 \wedge \mid \gamma \mid \geq 1 \tag{7.40}$$

のとき，

$$\mid \gamma \mid = 1 \wedge \mid [\exists j \in \gamma, \varphi = T\omega_j] \tag{7.41}$$

$$\Rightarrow$$

$$|\gamma| = 1 \wedge |[\exists j \in \gamma, SM(\varphi, \omega_j) = 1] \wedge [\forall i \in J - \{j\},\tag{7.42}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$E(\varphi, \gamma) = 0 \tag{7.43}$$

(証明) 文献[B4]の定理８.５である．　□

8．むすび

処理の対象となるパターンφが帰属しているカテゴリ(第$j \in J$番目のカテゴリ)$\mathfrak{C}_j$を決定できるSS多段階連想形認識[B3] ,[B4]の過程を実現するには，パターンからパターンへ変換する写像(パターン想起変換)の列が帰納的推理で選ばれることが必要である．このパターン想起変換として使われているのが，従来の，候補カテゴリ番号のリスト$\mu(\subseteq J)$を助変数に持つ２.６節の構造受精作用素$\varphi_{fixed} = T\varphi \in \Phi$であった．

構造受精作用素$A(\mu)$を構成するのには，axiom 1を満たすモデル構成作用素T，axiom 2を満たす類似度関数SM，axiom 3を満たす大分類関数BSCが必要とされる．SS多段階連想形認識の過程においては，$A(\mu)$をモデル構成作用素Tで両側を挟んだ形式$TA(\mu)T$で使うことに注意しておこう．

入力パターン$\varphi \in \Phi$を

$$\varphi = \varphi_{fixed} + \varphi_{nonfixed} \wedge T\varphi_{fixed} = \varphi_{fixed} \wedge T\varphi_{nonfixed} \neq \varphi_{nonfixed} \tag{8.1}$$

と分解し，Tの不動点$\varphi_{fixed} = T\varphi \in \Phi$を$\varphi$の代りに採用し，記憶$T \cdot \Omega$内の，パターン$\omega_j$のモデル$T\omega_j$へと，可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元として表された入力パターン$\varphi$を再生し，然も，入力パターン$\varphi$が帰属するカテゴリ$\mathfrak{C}_j$を決定できる連想形多段階認識の働き(SS多段階連想形認識の過程)を実行することになる(式(3.17)を参照).

パターン$\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in M\}$の座標系$x$については，座標系$x$が固有の意味を持ち，

$$y = Ux \in M, x \in M \tag{8.2}$$

での自由な座標変換$U : M \to M$が許されない場合がある．本研究では

$$\forall \varphi \in \Phi, T(U\varphi) = T\varphi \tag{8.3}$$

というように座標変換系に不変であり，しかも，SS理論[B3],[B4]によれば，①零元不動点性，②正定数倍不変性，③ベキ等性，④非零写像性という４性質を少なくとも満たさなければならないパターンモデル$T\varphi = \{(T\varphi)(x) \mid x \in M\}$については論及しなかった(文献[B3]の付録H,H2節).

$$\exists \varphi \in \Phi, \exists x \in M, T(U\varphi)(x) \neq (T\varphi)(x) \tag{8.4}$$

というような座標変換系$U : M \to M$に不変でないパターンモデル$T\varphi$を考えることは座標系が固有の意味を持つ場合，無意味ではない．また，

$$\forall \varphi \in \Phi, T(U\varphi) = UT'\varphi \tag{8.5}$$

が成立すると言う意味で，座標変換 $U: M \to M$ に共変的なモデル構成作用素 $T': \Phi \to \Phi$ も研究済みである．

大分類関数BSCを学習の働きで構成することは当然であるが，類似度関数SMを学習の働きで構成することは，本研究の独創性である．この独創性の効用はシミュレーションを実行してみないとわからないが，多分，音声認識にとって，有用な結果をもたらすだろう．

参　考　文　献 A

[A 1] 岩切宗利，松井甲子雄：“3.音声・音楽を用いたインフォメーションハイディング”,情報処理,vol.44,no.3,pp.242-247,March 2003

[A 2] 奥智岐，西本卓也，荒木雅弘，新美康永：“タスクに依存しない音声対話の制御方式”,電子情報通信学会論文誌D-Ⅱ ,vol.J86-D-Ⅱ,no.5,pp.608-615,May 2003

[A 3] 松田繁樹，中井満，下平博，嵯峨山茂樹：“非同期遷移型HMMによる音声認識”，電子情報通信学会論文誌D-Ⅱ ,vol.J86-D-Ⅱ,no.6,pp.741-754,Jun.2003

[A 4] 岡隆一，西村拓一，張建新，伊原正典：“フレーム特徴の音素記号化に基づく語彙に依存しない音声検索”，電子情報通信学会論文誌D-Ⅱ ,vol.J86-D-Ⅱ,no.6,pp.764-775,Jun.2003

[A 5] 籠嶋岳彦，森田真弘，瀬戸重宣，赤嶺政巳，志賀芳則：“代表パターンコードブックを用いた基本周波数制御法”，電子情報通信学会論文誌D-Ⅱ ,vol.J85D-Ⅱ, no.6, pp.976-986, Jun.2002

[A 6] J.D.Markel,A.H.Gray:“音声の線形予測”，鈴木久喜訳，コロナ社，Mar.1981

[A 7] 今井聖:“音声信号処理(音声の性質と聴覚の特性を考慮した信号処理)”，森北出版，Nov.1996

[A 8] 北研二，中村聖，永田昌明:“音声言語処理 (コーパスに基づくアプローチ)”，森北出版，Nov.1996

[A 9] 今井聖:“音声認識(情報・電子シリーズ16)”，共立出版，Nov.1995

[A10] 鹿野清宏，伊藤克亘，河原達也，武田一哉，山本幹雄:“音声認識システム”，オーム社，May 2001

[A11] 酒井幸市：“ディジタル画像処理入門”,コロナ社,Aug.1998

[A12] 戸田盛和：“熱・統計力学[物理入門コース7]”,岩波書店,Apr.1994

[A13] 津野義道：“劣微分と最適問題(数理情報科学シリーズ16)”,牧野書店 ,Apr.1997

[A14] 久志本茂：“最適化問題の基礎(数学ライブラリー50)”,森北出版,Jun.1979

[A15] Rafael C.Carrasco,Juan Ramón Rico-Juan：“A similarity between probabilistic tree languages : application to XML document families”,Pattern Recognition, vol.36,pp.2197-2199,2003

[A16] Vojtêch Franc,Válav Hlaváč ：“An iterative algorithm warning the maximal margin classifier”,Pattern Recognition,vol.36,pp.1985-1996,2003

参　考　文　献 B

[B 1] 鈴木昇一：“認識工学”,柏書房,Feb.1975

[B 2] 鈴木昇一：“ニューラルネットの新数理”,近代文芸社,Sept.1996

[B 3] 鈴木昇一：“パターン認識問題の数理的一般解決”,近代文芸社,June 1997

[B４]　鈴木昇一：“認識知能情報論の新展開”,近代文芸社,Aug.1998

[B６]　鈴木昇一：“手書き漢字の側抑制効果的分解とその計算機シミュレーション”情報処理学会誌,vol.15,no.12,pp.927-934,Dec.1974

[B７]　鈴木昇一：“画像情報量とその手書き漢字への応用”,画像電子学会誌,vol.4,no.1,pp.4-12,Apr.1975

[B８]　鈴木昇一：“抽出された特徴による手書き漢字構造の再生”,情報処理学会誌,vol.18,no.11,pp.1115-1122,Nov.1977

[B９]　鈴木昇一：“回転群と画像の分解･強調･構造化再構成に関する計算機シミュレーション”,情報研究(文教大学･情報学部),no.4,pp.36-56,Dec.1983

[B10]　鈴木昇一：“連想形記憶器MEMOTRONと日本語単独母音系列の再生に関する計算機シミュレーション”,情報研究(文教大学･情報学部),no.7,pp.14-29, Dec.1986

[B11]　鈴木昇一：“多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション”,情報研究(文教大学･情報学部),no.10,pp.35-49,Dec.1989

[B12]　鈴木昇一：“帰属係数法に基づく類似度，帰属関係あいまい度，認識情報量の計算機シミュレーション”,情報研究(文教大学･情報学部),no.11,pp.51-68,Dec.1990

[B13]　鈴木昇一:“構造受精法と日本語単独母音の認識”,情報研究（文教大学･情報学部）,no.18,pp.17-51, Dec.1998

[B14]　鈴木昇一,前田英明:“有声破裂音の代表パターンの学習的決定と，その計算機シミュレーション”,情報研究(文教大学･情報学部),no.20,pp.77－95, Dec.1998

[B15]　鈴木昇一,前田英明:“変動エントロピーによる有声破裂音の順序付けと，その計算機シミュレーション”,情報研究(文教大学･情報学部),no.21,pp.51－78,Mar.1999

[B16]　鈴木昇一:“平均顔を用いた顔画像の２値化、並びに、目･鼻･口の抽出と、その計算機シミュレーション”,情報研究(文教大学･情報学部),no.22,pp.65－150,Dec.1999

[B17]　鈴木昇一:“界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の，顔画像処理に関する計算機シミュレーション",情報研究(文教大学･情報学部),no.23,pp.109－182,Mar.2000

[B18]　鈴木昇一:“風景画から知識を抽出し，解釈するシステムの，ファジィ推論ニューラルネットによる構成”,情報研究(文教大学･情報学部),no.23,pp.183-265,Mar.2000

[B19]　鈴木昇一：“各個人の感性を反映した認識システムRECOGNITRON”,情報研究(文教大学･情報学部),no.24,pp.185－257,Dec.2000

[B20]　鈴木昇一：“プロダクション･システムとしてのファジィ･マルチメディア･コンピュータと、空間多重パターンファジィ推論系”,情報研究(文教大学･情報学部),no.24,pp.105－183,Dec.2000

[B21]　鈴木昇一：“SS大分類関数BSCの適応的構成への、計算論的学習理論の適用”,情報研究(文教大学･情報学部),no.25,pp.185－236,Mar.2001

[B22]　鈴木昇一：“量子力学の諸原理，多段階量子認識系と，心理状態を取り入れた想起に基づく部分空間認識法”,情報研究(文教大学･情報学部),no.25,pp.237－282,Mar.2001

[B23]　鈴木昇一:“Support Vector Machineを利用した大分類関数の構成”,情報研究(文教大学･情報学部),no.26,pp.1－62,Dec.2001

[B24]　鈴木昇一:“２カテゴリ分類困難度の情報理論”,情報研究(文教大学･情報学部),no.26,pp.63－160,Dec.2001

[B25]　鈴木昇一:“一般化類似度関数を用いた“導出原理による第１階述語推論””,情報研究(文教大

学･情報学部),no.27,pp.27－71,Mar.2002

[B26] 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹:“風景画の理解に関するJAVA言語によるRECOGNITRONの計算機シミュレーション”,情報研究(文教大学･情報学部),no.27,pp.73－109,Mar.2002

[B27] 鈴木昇一:“遺伝的アルゴリズムにおける適合度比例選択戦略を利用した進化方程式の，パターン多段階変換に基づく認識への応用”,情報研究(文教大学･情報学部),no.28,pp.37－67,Dec.2002

[B28] 鈴木昇一:“近傍を利用した音素認識のためのモデル構成作用素T，類似度関数SM，大分類関数BSCの諸構成と，SS不動点探索型多段階想起認識”,情報研究(文教大学･情報学部),no.28,pp.69－141,Dec.2002

[B29] 鈴木昇一:“JAVA言語で実装化された画像理解システムIUSの動作概要と，その稼動方法”,情報研究(文教大学･情報学部),no.28,pp.143－165,Dec.2002

[B30] 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹:“JAVA言語による計算機シミュレーションで生じた風景画像の理解場面での多段階連想形認識過程の異常現象”,情報研究(文教大学･情報学部),no.29,pp.123－166，July 2003

[B31] 鈴木昇一:“パターン情報処理(モデル構成作用素，誤差逆伝播学習2層ニューラルネット)と，論理的含意とによる非単調的知識推論”,情報研究(文教大学･情報学部),no.29,pp.75－121，July 2003

[B32] 鈴木昇一:“可分な一般抽象ヒルベルト空間でのK-L直交系の理論”,情報研究(文教大学･情報学部),no.29,pp.41－73,July 2003

[B33] 鈴木昇一:“パターン系列(動画像，会話音声)の，dynamical systemによる連想理論と，連想器SPATEMTRON”,情報研究(文教大学･情報学部),no.30,pp.139－186,Jan.2004

[B34] 鈴木昇一:“入出力例の系列を用いた“対連想問題･その擬逆問題”の一般解”,情報研究(文教大学･情報学部),no.30,pp.81-137,Jan.2004

[B35] 鈴木昇一:“共役勾配法の一般解における直交系の応用(画像復元，パターンモデルの構成，パターン集合の情報理論的次元)”,情報研究(文教大学･情報学部),no.30,pp.27-79, Jan.2004

[B36] 鈴木昇一:“会話音声・動画像処理への，万能性類似度関数の採用によるSS多段階認識の改良”,情報研究(文教大学･情報学部),no.31 ,pp.65-108,Jul.2004

[B37] 鈴木昇一:“１パラメータLie座標変換群とそのパターン正規化への応用”,情報研究(文教大学･情報学部),no.32,pp.21－74,Jan.2005

[B38] 鈴木昇一:“曖昧さに関する半順序$\propto$を単調に保つモデル構成作用素”,情報研究(文教大学･情報学部),no.32,pp.75－126,Jan.2005

[B39] 鈴木昇一:“パターンから抽出された特徴量$u(\varphi,\ell)$のfuzzy単調変換”,情報研究(文教大学･情報学部),no.32,pp.127－168,Jan.2005

[B40] 鈴木昇一:“パターンモデル(パターンの標準形)の一般形”,情報研究(文教大学･情報学部),no.32,pp.169－218,Jan.2005

[B41] 鈴木昇一:“類似度関数の密度を用いた，画素毎のパターン認識処理(パターン理解処理)の方法”,情報研究(文教大学･情報学部),no.32,pp.219－285, Jan.2005

[B42] 鈴木昇一:“パターン(画像，音声)から感性情報を計量できる一般的な方法(視野を考慮して構成された類似度関数SMの応用)”,情報研究(文教大学･情報学部),no.33,pp. 261－316, Jul.2005

[B43] 鈴木昇一:“知識工学におけるcertainty factorによる多段階認識過程の評価”,情報研究(文教大学･情報学部),no.33,pp. 199-260, Jul.2005

[B44]　鈴木昇一: “線形方程式の制約条件下での，残差法によるパターンモデル”,情報研究(文教大学･情報学部),no.33,pp.149-197,Jul.2005
[B45]　鈴木昇一: “正規直交性を満たす類似度関数に積分核が存在するか？”,情報研究(文教大学･情報学部),no.33,pp.111-147,Jul.2005
[B46]　鈴木昇一: “原パターンを近似できるという拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの，会話音声・動画像処理への応用”,情報研究(文教大学･情報学部),no.33,pp.43-110,Jul.2005

付録A.音声波形の特徴量1

本付録Aでは，音声波形

$$\varphi = \{\varphi(x) \mid x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\} \tag{A.1}$$

の特徴量を3種類，提案する．

A1. 特徴抽出写像 u

特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \to R \tag{A1.1}$$

を考えよう． $u(\varphi, \ell) \in R$ は $\varphi \in \Phi$ パターンから抽出される第 $\ell \in L$ 番目の特徴量である．

特徴空間での内積 $[\vec{u}(\varphi), \vec{u}(\eta)]$ とノルム $|\vec{u}(\varphi)|$ とを

$$[\vec{u}(\varphi), \vec{u}(\eta)] = \sum_{\ell \in L} w_\ell \cdot u(\varphi, \ell) \cdot u(\eta, \ell), |\vec{u}(\varphi)| = \sqrt{[\vec{u}(\varphi), \vec{u}(\varphi)]}, w_\ell > 0 (\ell \in L) \tag{A1.2}$$

を導入すれば，式(2.22)の類似度関数 SM ，式(2.27)の大分類関数 BSC を各々，axiom 2,3を満たすように，次の2節A1.1,A1.2のように構成できる．

A1.1　axiom 2を満たす類似度関数の簡単な構成

例えば，規格化内積(normalized inner product) $nip(\varphi, \eta)$ と相互情報量(amount of mutual information) $S(\varphi, \omega_i)$ とを

$$nip(\varphi, \eta) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad |\vec{u}(\varphi)| \cdot |\vec{u}(\eta)| = 0 \\ \dfrac{[\vec{u}(\varphi), \vec{u}(\eta)]}{|\vec{u}(\varphi)| \cdot |\vec{u}(\eta)|} & \text{if} \quad |\vec{u}(\varphi)| \cdot |\vec{u}(\eta)| \neq 0 \end{cases} \tag{A1.3}$$

$$S(\varphi,\omega_j) = -\frac{1}{2}\cdot\log_e[1-|nip(T\varphi,T\omega_j)|^2] \tag{A1.4}$$

と定義して，axiom 2を満たす式(2.22)の類似度関数SMを

$$SM(\varphi,\omega_j) = \begin{cases} p(\mathfrak{C}_j) & \text{if} \quad \sum_{k\in J} S(\varphi,\omega_k) = 0 \\ \dfrac{S(\varphi,\omega_j)}{\sum_{k\in J} S(\varphi,\omega_k)} & \text{if} \quad \sum_{k\in J} S(\varphi,\omega_k) > 0 \end{cases} \tag{A1.5}$$

と定義できる(文献[B4]の付録2の定理A2.3を参照).

A1.2　axiom 3を満たす大分類関数BSCの簡単な構成

2次ニューラルネット(the second-order neural net)にパターンモデル$T\varphi$を入力して得られる出力

$$g(j;T\varphi) \equiv \sum_{k\in L}\sum_{\ell\in L} w(j;k,\ell)\cdot u(T\varphi,k)\cdot u(T\varphi,\ell) - h(j) \tag{A1.6}$$

と，2値関数

$$psn(u) = 0 \quad if \quad u<0, =1 \quad if \quad u \ge 0 \tag{A1.7}$$

とを導入して，

$$BSC(\varphi,j) = psn(g(j;T\varphi)) \tag{A1.8}$$

と定義する．

非負条件

$$\forall j \in J, g(j:T\omega_j) \ge 0 \tag{A1.9}$$

を満たす重み，閾値

$$w(j;k,\ell)(j\in J,k,\ell\in L), h(j)(j\in J) \tag{A1.10}$$

が例えば，最急降下学習で得られていれば，axiom 3を満たす．また，負条件

$$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}, g(j;T\omega_i) < 0 \tag{A1.11}$$

を満たす重み，閾値が得られていれば，カテゴリ間の相互排除性をを表す式(2.30)が満たされる(BSCの構成については，文献[B3]の２.８.２，２.８.３を参照).

A2.音声波形から抽出される3種類の特徴量$u(\varphi,\ell)\in R$

A2.1　原パターンφの近似情報を反映した特徴量

モデル$T\varphi$の，テーラ展開の2次までの近似

$$(T\varphi)(x+a) \cong (T\varphi)(x) + \frac{d(T\varphi)(z)}{dz}\Big|_{z=x} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2(T\varphi)(z)}{d^2 z}\Big|_{z=x} \cdot a^2 \tag{A2.1}$$

を近似的に反映した特徴量 $u(\varphi,\ell) \in R$ は,

$$u(\varphi,\ell) = -2 \cdot (T\varphi)(\ell) + \frac{3}{2} \cdot (T\varphi)(\ell+1) + \frac{3}{2} \cdot (T\varphi)(\ell-1) \tag{A2.2}$$

である．その理由は次の通りである：

座標値 x が離散値 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ であるとすると，テーラ展開の2次までの近似

$$(T\varphi)(x) \cong (T\varphi)(x-1) + \frac{d(T\varphi)(z)}{dz}\Big|_{z=x} \cdot [x+1-x] + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2(T\varphi)(z)}{d^2 z}\Big|_{z=x} \cdot [x+1-x]^2 \tag{A2.3}$$

を適用して,

$$(T\varphi)(x) \cong (T\varphi)(x-1) + [(T\varphi)(x+1) - (T\varphi)(x)]$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot [(T\varphi)(x+1) - (T\varphi)(x) - \{(T\varphi)(x) - (T\varphi)(x-1)\}] \tag{A2.4}$$

$$= -2 \cdot (T\varphi)(x) + \frac{3}{2} \cdot (T\varphi)(x+1) + \frac{3}{2} \cdot (T\varphi)(x-1) \tag{A2.5}$$

□

A2.2 原パターン φ の積分情報を反映した特徴量

積分値

$$\int_{l-1}^{\ell+1} (T\varphi)(x)dx \tag{A2.6}$$

を近似的に反映した特徴量 $u(\varphi,\ell) \in R$ は,

$$u(\varphi,\ell) = \frac{4}{3} \cdot (T\varphi)(\ell) + \frac{1}{3} \cdot (T\varphi)(\ell+1) + \frac{1}{3} \cdot (T\varphi)(\ell-1) \tag{A2.7}$$

である．その理由は次の通りである：

座標値 x が離散値 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ であるとすると，Simpson’s rule

$$\int_{a}^{a+2h} f(x)dx \cong \frac{h}{3} \cdot [f(a) + 4 \cdot f(a+h) + f(a+2h)], h > 0 \tag{A2.8}$$

を適用して,

$$\int_{x-1}^{x+1} (T\varphi)(x)dx \cong \frac{1}{3}[(T\varphi)(x-1) + 4 \cdot (T\varphi)(x) + (T\varphi)(x+1)] \tag{A2.9}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot (T\varphi)(x) + \frac{1}{3} \cdot (T\varphi)(x+1) + \frac{1}{3} \cdot (T\varphi)(x-1) \tag{A2.10}$$

□

A2.3　原パターン φ の2階微分情報を反映した特徴量

$$(T\varphi)(x) - \frac{d^2(T\varphi)(x)}{dx^2} \tag{A2.11}$$

を近似的に反映した特徴量$u(\varphi,\ell)\in R$は，

$$u(\varphi,\ell)=3\cdot(T\varphi)(\ell)-(T\varphi)(\ell+1)-(T\varphi)(\ell-1) \tag{A2.12}$$

である．その理由は次の通りである：

座標値xが離散値$x=0,\pm1,\pm2,\cdots$であるとすると，

$$(T\varphi)(x)-\frac{d^2(T\varphi)(x)}{dx^2} \tag{A2.13}$$

$$\cong(T\varphi)(x)-[(T\varphi)(x+1)-(T\varphi)(x)-\{(T\varphi)(x)-(T\varphi)(x-1)\}]$$

$$=3\cdot(T\varphi)(x)-(T\varphi)(x+1)-(T\varphi)(x-1). \tag{A2.14}$$

□

付録B．パターン$\varphi\in\Phi$の，熱力学的諸量

本付録Bでは，処理の対象とする問題のパターンφから非負実数値特徴量$u(\varphi,\ell)$が抽出されたとき，このパターン$\varphi\in\Phi$を特性付ける量(特性量)が提案される．

特徴抽出写像

$$u:\Phi\times L\to R^+ \quad \text{(非負実数全体の集合)} \tag{B.1}$$

を導入する．$u(\varphi,\ell)\in R$はパターン$\varphi\in\Phi$から抽出された第$k\in L$番目の非負実数値特徴量である．

以下の7量Z,q_ℓ,p_ℓ,U,F,S,Hはパターン$\varphi\in\Phi$の特性量である．

2助変数a,bを

a：温度(正定数)

b：正定数(熱力学では，ボルツマン定数(Boltzmann conatant)に相当するもの)

とする．

分配関数(partition function)，状態和(sum over states)

$$Z=\sum_{\ell\in L}\exp[-\frac{1}{ba}\cdot u(\varphi,\ell)] \tag{B.2}$$

を導入する．q_ℓを

$$q_\ell=\exp[-\frac{1}{ba}\cdot u(\varphi,\ell)] \tag{B.3}$$

と定義すれば，等式

$$Z=\sum_{\ell\in L}q_\ell \tag{B.4}$$

が成り立つ．解釈

$$p_\ell=\frac{q_\ell}{Z} \quad \text{温度}\ a\ \text{のパターン}\ \varphi\ \text{が特徴量}\ u(\varphi,\ell)\ \text{をとる確率} \tag{B.5}$$

を採用する．

パターン φ の平均情報量(average amount of information)，つまり，Shannon平均情報量 H は，

$$H = -\sum_{\ell \in L} p_\ell \cdot \log_e p_\ell$$
$$= \log_e Z - \frac{1}{Z} \cdot \sum_{\ell \in L} q_\ell \cdot \log_e q_\ell \tag{B.6}$$

と定義される．

パターンの中に蓄えられたエネルギー，内部エネルギー(internal energy) U を

$$U = -\frac{\partial \log_e Z}{\partial (\frac{1}{ba})} \tag{B.7}$$

と定義する．

自由エネルギー(free energy) F を，

$$F = U - a \cdot S \tag{B.8}$$

と定義する． F は自由に取り出せるエネルギーである．

エントロピー(entropy) S は，

$$S = \frac{1}{a} \cdot [U - F] \tag{B.9}$$

ということになる．内部エネルギー U と自由エネルギー F との差が大きいほど，　エントロピー S が大きい．

$a \cdot S$ は

$a \cdot S$ ：使えないエネルギー (B.10)

と解釈される．

各 $u(\varphi, \ell)$ →大であれば， Z →小， F →大

に注意する．

簡単な特徴量 $u(\varphi, \ell)$ の例を挙げておこう．

$\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ での正規直交系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ の各成分 ϕ_k を，

$$x \in M \supseteq M_k \neq \phi(k \in L), M_k \cap M_\ell = \phi(k \neq \ell) \tag{B.11}$$

として，

$$\phi_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\int_{M_k} dm(x)} & \text{if} \quad x \in M_k \\ 0 \quad \text{if} \quad x \notin M_k \end{cases} \tag{B.12}$$

と定義できる． x は M の座標系である．

$$(\varphi, \phi_k) = \int_{M_k} dm(x)\varphi(x) \tag{B.13}$$

であり，特徴量$u(\varphi, \ell)$として，

$$u(\varphi, \ell) = \frac{|(\varphi, \phi_\ell)|}{\sup_{k \in L} |(\varphi, \phi_k)|} \tag{B.14}$$

を採用できる．

内部エネルギーUは統計力学に見れば，パターンの平均エネルギーであることは，

$$U = \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell) \cdot p_\ell \tag{B.15}$$

と，再表現できることから，理解できる．また，F, S は

$$F = ba \cdot \log_e \frac{1}{Z} \tag{B.16}$$

$$S = \frac{1}{a} \cdot U + b \cdot \log_e Z \quad \therefore \qquad a \cdot S = U + ab \cdot \log_e Z \tag{B.17}$$

と，再表現できることに注意しておく．

付録C．音声波形から，2値ベクトルの列を得る方法

本付録Cでは，原音声パターン

$$\varphi = \{\varphi(x) \mid x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\} \tag{C.1}$$

を，

$$\varphi(x) \to \varphi_1(x) \to \varphi_2(x) \to \varphi_3(x) \to \varphi_4(x) \to \varphi_4(x) \to \varphi_5(x) \to \varphi_6(x)$$
$$, x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{C.2}$$

と変換していって，2値ベクトルの列

$$\varphi_6 = \{\varphi_6(x) \mid x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\} \tag{C.3}$$

を得る方法が提案される．

その各パターン$\varphi_k \, (k = 1, 2, \cdots, 6)$ は次の様に定義される．

① $\varphi_1(x) =$

$$\begin{cases} 0 \cdots \max_x |\varphi(x)| = 0 \text{ のとき} \\ \dfrac{\varphi(x)}{\max_x |\varphi(x)|} \cdots \max_x |\varphi(x) > 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$, x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{C.4}$$

このとき，

$$-1 \le \varphi_1(x) \le +1, x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{C.5}$$

$$\varphi(x) = [\max_x | \varphi(x)] \cdot \varphi_1(x) \ , x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{C.6}$$

が成立する．

② $\varphi_2(x) = 1 + \varepsilon(x) + \varphi_1(x), \varepsilon(x) > 0 \ , x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ (C.7)

このとき，

$$\varepsilon(x) \le \varphi_2(x) \le 2 + \varepsilon(x) \ , x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{C.8}$$

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) - 1 - \varepsilon(x) \ , x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{C.9}$$

が成立する．

③ $\varphi_3(x) = C \cdot \log_e[1 + \varphi_2(x)], C > 0 \ , x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ (C.10)

このとき，

$$C \cdot \log_e[1 + \varepsilon(x)] \le \varphi_3(x) \le C \cdot \log_e[3 + \varepsilon(x)] \ , x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{C.11}$$

$$\varphi_2(x) = \exp[\frac{\varphi_3(x)}{C}] - 1 \ , x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{C.12}$$

が成立する．

④ $\varphi_4(x) = \dfrac{\varphi_3(x) - C \cdot \log_e[1 + \varepsilon(x)]}{C \cdot \log_e[3 + \varepsilon(x)] - C \cdot \log_e[1 + \varepsilon(x)]} \ , x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ (C.13)

このとき，

$$0 \le \varphi_4(x) \le 1 \ , x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{C.14}$$

$$\varphi_3(x) = [C \cdot \log_e\{3 + \varepsilon(x)\} - C \cdot \log_e\{1 + \varepsilon(x)\}] \cdot \varphi_4(x) + C \cdot \log_e[1 + \varepsilon(x)] \\ , x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{C.15}$$

⑤ $\varphi_5(x) = \dfrac{1}{2} \cdot [\dfrac{k}{10} + \dfrac{k+1}{10}] = \dfrac{k+0.5}{10} \qquad if \quad \dfrac{k}{10} \le \varphi_4(x) < \dfrac{k+1}{10} (k = 0, 1, \cdots, 9)$

$, x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ (C.16)

このとき

$$\varphi_5(x) \le \varphi_4(x) + 0.05 < \varphi_5(x) + 0.1 \ , x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{C.17}$$

が成り立つ．

⑥ $\varphi_6(x) = bv(x) \ , x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ (C.18)

ここに，

$$bv(x) = bv_k \equiv col(0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0)\ (k\text{番目のみ}1)$$

$$\text{if} \quad \varphi_5(x) = \frac{k+0.5}{10} (k = 0,1,2,\cdots,9)\ , x = 0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{C.19}$$

付録D.音声波形の特徴量 2

本付録Dでは，付録Aに引き続いて，式(A.1)の音声波形パターンφから各特徴量$u(\varphi,\ell)$を抽出する３つの方法が提案される．

①式(4.14.24)のように１次展開されるパターン$\varphi_r (r = k \cdot \frac{N}{4}, k = 0,1,2,\cdots,k_{\max})$を用いる．

作用素A_kを

$$(A_k\varphi)(x) =$$

$$\begin{cases} \varphi(0) \cdots x-k<0\text{のとき} \\ \varphi(x-k) \cdots 0 \le x-k \le N-1\text{のとき} \\ \varphi(N-1) \cdots x-k>N-1\text{のとき} \end{cases} \tag{D.1}$$

と定義する．作用素A_{n+1}を

$$A_{n+1} \equiv I - \sum_{k \in L-\{n+1\}} A_k\ ,\quad I\ \text{は恒等作用素} \tag{D.2}$$

と定義する．

内積$(T\varphi_r, A_kT\varphi_r)$として，式(4.14.20)の内積を採用する，つまり，

$$(T\varphi_r, A_kT\varphi_r) = \sum_{x=0}^{N-1} (T\varphi_r)(x) \cdot (A_kT\varphi_r)(x) \tag{D.3}$$

を採用する．ノルム$\| T\varphi_r \| \equiv \sqrt{(T\varphi_r, T\varphi_r)}, \| A_kT\varphi_r \| \equiv \sqrt{(A_kT\varphi_r, A_kT\varphi_r)}$も導入する．

規格化内積(normalized inner product) $nip(T\varphi_r, A_kT\varphi_r)$を，

$$nip(T\varphi_r, A_kT\varphi_r) =$$

$$\begin{cases} 0 \cdots \| T\varphi_r \| \cdot \| A_kT\varphi_r \| = 0\text{のとき} \\ \dfrac{(T\varphi_r, A_kT\varphi_r)}{\| T\varphi_r \| \cdot \| A_kT\varphi_r \|} \cdots \| T\varphi_r \| \cdot \| A_kT\varphi_r \| > 0\text{のとき} \end{cases} \tag{D.4}$$

と定義する．

特徴軸の軸番号 ℓ の集合 L を

$$L = \{\ell \mid \ell = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm n\} \cup \{n+1\} \tag{D.5}$$

と導入する．パターン $\varphi_r (r = k \cdot \frac{N}{4}, k = 0,1,2,\cdots,k_{\max})$ から抽出される特徴量 $u(\varphi_r, \ell)$ を

$$u(\varphi_r, \ell) = \log_e \frac{1}{\sqrt{1 - |nip(T\varphi_r, A_k T\varphi_r)|^2}} \tag{D.6}$$

と定義する．

②式(4.14.24)のように１次展開されるパターン $\varphi_r (r = k \cdot \frac{N}{4}, k = 0,1,2,\cdots,k_{\max})$ について，式(4.14.23)の $a_\ell(\varphi_r)(\ell = 0,1,2,\cdots,N-1)$ を用い，式(4.12.3)の如く，各 $u(\varphi,\ell)$ を定める．

③ N, n を，
N は十分大なる正の偶数で， n の正整数倍
n は十分大なる正の偶数

(D.7)

とする．各 $M_k (k = 1 \sim n)$ を，

$$\begin{aligned} M_k &= \{\frac{k-1}{n} \cdot N + \ell \mid \ell = 0,1,2,\cdots,\frac{N}{n} - 1\} \\ &= \{\frac{k-1}{n} \cdot N, \frac{k-1}{n} \cdot N + 1, \frac{k-1}{n} \cdot N + 2, \cdots, \frac{k}{n} \cdot N - 1\} \end{aligned} \tag{D.8}$$

と定義する． $M_k, k = 1 \sim n$ は

$$M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_k \cup \cdots \cup M_n \subset \{x \mid 0 \le x \le N-1\} \tag{D.9}$$

を満たす．

例えば， $n = 16$ と選べる．

特徴軸の軸番号 ℓ の集合 L を

$$\ell = < j, q > \in L, j \in J, q \in \{1,2,\cdots,n\} \tag{D.10}$$

とする．そして，パターン φ から抽出される特徴量 $u(\varphi, \ell)$ を

$$u(\varphi,\ell) \equiv u(\varphi, < j, q >) \equiv SI(M_q; \varphi, \omega_j) \tag{D.11}$$

$$\equiv \sum_{x \in M_q} sm(\varphi, \omega_j)(x) = \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{n}-1} sm(\varphi, \omega_j)(\frac{q-1}{n} \cdot N + \ell) \tag{D.12}$$

と定義する．ここに， $sm(\varphi, \omega_j)(x)$ は，

$$sm(\varphi,\omega_j)(x)=$$
$$\begin{cases} \dfrac{s_j(T\varphi)(x)}{\sum_{k\in J} s_k(T\varphi)(x)} \cdots \sum_{k\in K} s_k(T\varphi)(x)>0 \text{ のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j)\cdots \sum_{k\in K} s_k(T\varphi)(x)>0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{D.13}$$

と定義される．登場している $s_j(T\varphi)(x)$ は，

$$0\le \varepsilon_j(x), x\in M_q (q=1,2,\cdots,n) \tag{D.14}$$

$$0\le \delta_j(x), x\in M_q (q=1,2,\cdots,n) \tag{D.15}$$

を導入して，

$$s_j(T\varphi)(x)=$$
$$\begin{cases} +\infty\cdots |(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|\le \varepsilon_j(x) \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{\log_e[1+\delta_j(x)\cdot|(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|^2]}\cdots |(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|>\varepsilon_j(x) \text{ のとき} \end{cases} \tag{D.16}$$

と定義される．

付録E. 2つの類似度関数SM_1, SM_2が，カテゴリ集合$\mathfrak{C}(\gamma)$に関し，相関(correlation)がある程度を2つのパターン集合Φ_1, Φ_2を介し，どう測るか？（相関定理）

本付録Fでは，文献[A15]で，a similarity measure between distributions generated by probabilistic tree automataが提案されていることを参考にし，2つの類似度関数

$$SM_1:\Phi\times\Omega\to\{s\mid 0\le s\le 1\} \tag{E.1}$$

$$SM_2:\Phi\times\Omega\to\{s\mid 0\le s\le 1\} \tag{E.2}$$

が，カテゴリの部分集合

$$\mathfrak{C}(\gamma)\equiv\{\mathfrak{C}_j \mid j\in\gamma\} \tag{E.3}$$

に関し，どの程度相関があるかどうかを，２つのパターン集合

$$\Phi_1,\Phi_2\subset\Phi \tag{E.4}$$

を介し測る方法を提案しよう．

$p'(\varphi)$ はパターン φ の出現確率である (E.5)

とすると，この $p'(\varphi)$ を，

$\sigma(\varphi)$ パターン φ の分散 (>0) (E.6)

$$\xi \equiv \sum_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) \cdot \omega_j \quad \text{：平均パターン} \tag{E.7}$$

を導入して，

$$p'(\varphi) = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(\varphi)^2}} \cdot \exp[-\dfrac{\| T\varphi - T\xi \|^2}{2\sigma(\varphi)^2}]}{\displaystyle\sum_{\eta \in \Phi_1 \cup \Phi_2} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(\eta)^2}} \cdot \exp[-\dfrac{\| T\eta - T\xi \|^2}{2\sigma(\eta)^2}]} \tag{E.8}$$

と与える．

$p_1(\mathfrak{C}_j / \varphi) : \varphi \in \Phi_1$ が与えられたとき，第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の出現確率 (E.9)
であり，

$$p_1(\mathfrak{C}_j / \varphi) = SM_1(\varphi, \omega_j), \varphi \in \Phi_1, j \in J \tag{E.10}$$

と考える．また，

$p_2(\mathfrak{C}_j / \eta) : \eta \in \Phi_2$ が与えられたとき，第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の出現確率 (E.11)
であり，

$$p_2(\mathfrak{C}_j / \eta) = SM_2(\eta, \omega_j), \eta \in \Phi_2, j \in J \tag{E.12}$$

と考える．このとき，

$$p_1(\mathfrak{C}_j) \equiv \sum_{\varphi \in \Phi_1} p_1(\mathfrak{C}_j / \varphi) \cdot p'(\varphi) \tag{E.13}$$

は，パターン φ の集合 Φ_1 が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ を表している確率であると解釈する．
また，

$$p_2(\mathfrak{C}_j) \equiv \sum_{\eta \in \Phi_1} p_2(\mathfrak{C}_j / \eta) \cdot p'(\eta) \tag{E.14}$$

は，パターン η の集合 Φ_2 が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ を表している確率であると解釈する．
更に，

$$S_{1,2}(\varphi, \eta; \gamma) \equiv \sum_{j \in \gamma} p_1(\mathfrak{C}_j / \varphi) \cdot p_2(\mathfrak{C}_j / \eta) \tag{E.15}$$

は，パターン $\varphi \in \Phi_1$ とパターン $\eta \in \Phi_2$ とがカテゴリの部分集合 $\mathfrak{C}(\gamma)$ に同時に帰属している確率であると解釈する．最後に

$$COR(p_1, p_2; \gamma) \equiv \sum_{j \in \gamma} p_1(\mathfrak{C}_j) \cdot p_2(\mathfrak{C}_j) \tag{E.16}$$

は，p_1, p_2 がカテゴリ集合 $\mathfrak{C}(\gamma)$ に関し，相関(correlation)が存在する程度であると解釈する．

次の定理F.1は，$COR(p_1, p_2; \gamma)$ が $S_{1,2}(\varphi, \eta; \gamma)$ を用い，分解できることを指摘している．

[定理F.1]($SM_{1,}$ SM_{2}の相関定理)

$$COR(p_1, p_2; \gamma) = \sum_{\varphi\in\Phi_1} \sum_{\eta\in\Phi_2} S_{1,2}(\varphi, \eta; \gamma)\cdot p'(\varphi)\cdot p'(\eta). \tag{E.17}$$

(証明) $COR(p_1, p_2; \gamma) \equiv \sum_{j\in\gamma} p_1(\mathfrak{C}_j)\cdot\ p_2(\mathfrak{C}_j)$

$$= \sum_{j\in\gamma}\ [\sum_{\varphi\in\Phi_1} p_1(\mathfrak{C}_j/\varphi)\cdot p'(\varphi)]\cdot[\sum_{\eta\in\Phi_2} p_2(\mathfrak{C}_j/\eta)\cdot p'(\eta)]$$

$$= \sum_{j\in\gamma}\ \sum_{\varphi\in\Phi_1}\sum_{\eta\in\Phi_2} p_1(\mathfrak{C}_j/\varphi)\cdot p'(\varphi)\cdot p_2(\mathfrak{C}_j/\eta)\cdot p'(\eta)$$

$$= \sum_{\varphi\in\Phi_1}\sum_{\eta\in\Phi_2}\ \sum_{j\in\gamma} p_1(\mathfrak{C}_j/\varphi)\cdot p'(\varphi)\cdot p_2(\mathfrak{C}_j/\eta)\cdot p'(\eta)$$

$$= \sum_{\varphi\in\Phi_1}\sum_{\eta\in\Phi_2}\ [\sum_{j\in\gamma}\ p_1(\mathfrak{C}_j/\varphi)\cdot p_2(\mathfrak{C}_j/\eta)]\cdot p'(\varphi)\cdot p'(\eta)$$

$$= \sum_{\varphi\in\Phi_1}\sum_{\eta\in\Phi_2}\ S_{1,2}(\varphi, \eta; \gamma)\cdot p'(\varphi)\cdot p'(\eta).$$

□

付録F. 音声波形の特徴量 3

本付録Fでは，付録A，付録Dに引き続き，パターン(音声波形そのものではなく，音声波形から得られる情報でもよい)$\varphi\in\Phi$ から抽出される第$\ell\in L$番目の特徴量$u(\varphi,\ell)\in R^+$がを説明される．

q 次元ユークリッド空間の部分集合M の部分集合M' を，２条件

$$\forall t\in K, M_t \neq \phi \tag{F.1}$$

$$\forall t\in K, \forall s\in K-\{t\}, M_t \cap M_s \neq \phi(t\neq s) \tag{F.2}$$

を満たすように (2式 (4.14.1) , (4.14.2) を参照),

$$M \supset M' = \cup_{t\in K} M_t \tag{F.3}$$

と有限分割する(式(4.14.3)を参照).

Axiom 1を満たす２.１節，２.２節の対$[\Phi, T]$ を導入する．

式 (2.21) の代表パターンモデル集合$T\cdot\Omega$ は，条件

$$\forall j\in J, \forall i\in J-\{j\}, \exists M'(\neq\phi)\subseteq M \tag{F.4}$$

$$\exists x\in M', (T\omega_i)(x) \neq (T\omega_j)(x)$$

を満たすとしよう．

ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$を$\mathfrak{H}= L_2(M; dm)$ で考えよう．similarity integral SIを

$$SI(M_t; \varphi, \omega_j) \equiv \int_{M_t} dm(x)\cdot sm(\varphi, \omega_j)(x) \tag{F.5}$$

と定義する．写像

$$s_j(\cdot): T\cdot\Phi \to R \quad \text{(実数全体の集合)} \tag{F.6}$$

を導入する．つまり，条件

$$0 \le \varepsilon_j(x), x \in M', j \in J \tag{F.7}$$

$$0 \le \delta_j(x), x \in M', j \in J \tag{F.8}$$

を満たす各閾値関数 $\varepsilon_j(x)$，温度関数の各逆数 $\delta_j(x)$ を導入して(2式(D.14),(D.15)を参照)，$s_j(T\varphi)(x)$ は，式(D.16)の如く定義される．
写像

$$sm(\cdot,\cdot)(x): \Phi\times\Omega \to R^+ \quad \text{(非負実数全体の集合)} \tag{F.9}$$

を導入する．，つまり，$sm(\varphi,\omega_j)(x)$ は，パターン $\varphi\in\Phi$ が代表パターン $\omega_j\in\Omega$ と似ている程度を表わすものとし，$sm(\varphi,\omega_j)(x)$ は，式(D.13)の如く定義される．
特徴抽出写像

$$u: \Phi\times L \to R^+ \tag{F.10}$$

を考えよう(式(A1.1)を参照)．$u(\varphi,\ell)\in R^+$ はパターン $\varphi\in\Phi$ から抽出される第 $\ell\in L$ 番目の特徴量である．特徴軸の番号の集合 L を $L=<J,K>$ と採用し，$u(\varphi,\ell)\equiv u(\varphi,<j,t>)$ を

$$u(\varphi,<j,t>) \equiv SI(M_t;\varphi,\omega_j), j\in J, t\in K \tag{F.11}$$

と定義する．実は，式(F.9)の写像(類似性密度関数) $sm(\cdot,\cdot)(x):\Phi\times\Omega\to R^+$ は，次のAxiom $2_x(\infty)$ を満たす．

Axiom $2_x(\infty)$ ·(類似性密度関数 $sm(\cdot,\cdot)(x):\Phi\times\Omega\to R^+$ の満たすべき公理)
(ｉ)(直交性;orthogonality)
不等式

$$0 \le \varepsilon_{i,j}(x), x\in M' \tag{F.12}$$

を満たす閾値 $\varepsilon_{i,j}(x), x\in M$ の組

$$\varepsilon_{i,j}(x), x\in M', i,j\in J \tag{F.13}$$

を決めておく

$$\forall i,j\in J, \forall x\in M'$$

$$\exists c_{i,j}(x)>0, \exists d_{i,j}(x) \quad \text{such that} \quad \forall\, \mathrm{x}\in M', c_{i,j}(x) \ge |\, d_{i,j}(x)\,|, \tag{F.14}$$

$$sm(\omega_i,\omega_j)(x)=\begin{cases} c_{i,j}(x) & if \quad |(T\omega_i)(x)-(T\omega_j)(x)|\le \varepsilon_{i,j}(x) \\ d_{i,j}(x) & if \quad |(T\omega_i)(x)-(T\omega_j)(x)|> \varepsilon_{i,j}(x) \end{cases} \tag{F.15}$$

(ⅱ)(確率条件;probability condition)

$$\forall x\in M',\forall\varphi\in\Phi,\sum_{j\in J} sm(\varphi,\omega_j)(x)=1 \tag{F.16}$$

(ⅲ)(写像Tの下での不変性;invariance under mapping T)

$$\forall x\in M',\forall\varphi\in\Phi,\forall j\in J,sm(T\varphi,\omega_j)(x)=sm(\varphi,\omega_j)(x). \tag{F.17}$$

□

尚，不等式

$$|(T\omega_i)(x)-(T\omega_j)(x)|\le\varepsilon_j(x) \tag{F.18}$$

を満たすカテゴリ番号$i\in J$の集合を$n_j(x)$とすると，等式

$$\forall x\in M',\forall j\in n_j(x)\subset J,sm(\omega_j,\omega_j)(x)=\frac{1}{|n_j(x)|} \tag{F.19}$$

が成立し，更に，等式

$$\forall x\in M',\forall j\in J,\forall i\in J-n_j(x)\subset J,sm(\omega_i,\omega_j)(x)=0 \tag{F.20}$$

も成立する．

(著者　鈴木昇一，論文題目　SSマルチメディア認識知能情報論に基づく音声の多段階想起認識に役立つモデル構成作用素 T ,類似度関数SM ,大分類関数BSC ，文教大学情報学部情報研究no.　投稿論文，投稿年月日　2006年4月17日(月)