

パターンの整形化方程式

鈴木 昇一

An Equation of Structure-Preserving Pattern-Reduction

Shoichi Suzuki

あらまし

パターン認識技術を確保しようとする歴史はパターンの変形を吸収できる4機能である“正規化・特徴抽出・識別・学習”についての各技術研究の歴史でもある。

本論文では、これまでのいかなる諸研究とは異なり、パターンの変形を吸収する半順序関係 \preceq が提案されている。その後、認識システムの持たねばならない知識としての2つのパターン変換写像 K, B を想定し、任意に入力パターン φ が与えられたとき、ここで提案された整形化方程式の \preceq に関する最小解 $T_{\min}(K, B)\varphi$ を求める逐次近似法など、 $T_{\min}(K, B)\varphi$ が φ の整形化パターンと解釈されるための基礎が研究されている。

認識システムが原パターン φ を理解するために再構成されるこれまでの計算機シミュレーション済みのパターンモデル $T\varphi$ とは異なり、 $K-B$ パターンの帰納的定義に基づいて、認識システム内の、適切に選ばれた知識 K, B による整形化が可能になることが指摘される。 $K=T, B=I$ (恒等作用素)と選定している場合、 $T_{\min}(K, B)\varphi$ が $T\varphi$ に一致することも証明されている。

キーワード

- (1) 半順序 (2) パターンモデル (3) $K-B$ パターンの帰納的定義
(4) 整形化方程式 (5) 最小上界 (6) 逐次近似法

Abstract

The history which is going to secure pattern-recognition techniques is also the history of each technical research about “the normalization, the feature extraction, the classification, and the learning” which are four functions which can absorb kinds of deformations of input patterns.

In this paper a partial order relation which is able to absorb various deformations contained in patterns is proposed differing from any various researches of the situation to date and the past. Then, It assumes two pattern conversion mappings with which a recognizer must be equipped as knowledges.

When an input pattern φ is given arbitrarily, a method of successive approximations for obtaining a minimum solution $T_{\min}(K, B)\varphi$ is presented here. The foundation for $T_{\min}(K, B)\varphi$ being interpreted as a structure-preserving reduction of φ is studied. Differing from model $T\varphi$ used so far in computer simulations and needed for the recognizer to understand the original pattern φ , it is pointed out that a structure-preserving reduction of φ is attained using knowledge appropriately chosen in the recognition system based on the recursive definition of a $K-B$ pattern. It is proved that $T_{\min}(K, B)\varphi$ is accords with $T\varphi$ in the case where K and B are respectively selected as T and I (identity mapping) specially.

Key Words: (1) partial ordering (2) corresponding model of pattern (3) recursive definition of $K-B$ patterns (4) equation of structure-preserving pattern-reduction (5) least upper bound (6) successive approximation

1. まえがき

例えば、誤差逆伝播学習ニューラルネット [31], [38] をパターン認識情報処理に用いるのは、結局は、経験したことの無い変形がある未知入力パターン φ に対し、入出力関係の高々可算個の訓練事例を介し、その変形を是正しながら、正しい認識出力を得るような“補間・対連想的学習能力の存在”を、このニューラルネットに期待しているからである。

視覚的形態（パターン）の記憶に関する実験に基づいて、ウルフ（Wulf, F.）は、1922年に、「不規則的な形態を繰り返し再生した被験者がその形態をより単純に、より規則的に、見慣れた対象に近くなるように変えて再生する」

事実を見いだしている [3].

本研究では、ニューラルネットによる対連想の働き、或いはウルフによって見いだされた事実を勘案し、パターン φ をパターン η として再生した場合、ある半順序関係 [2], [5]

$$\varphi \bullet \leq \eta$$

が成立しているとみなすことにする。

パターン（pattern）[18] が記号（symbol）と異なるのは、変形に耐え、その意味を保持できることにある。

パターンとは、ある種のユニタリ座標変換（基本的なパターン変換）からある程度の変形を受けても、ある種の雑音があっても、その意味が保存されるような情報である。そのために、パターンというものは、冗長な表現形態を備えざるを得ない。そのため、パターン構造の再生、パターン認識、パターン連想などに関して、効率的なパターン情報処理機能を獲得するためには、処理の対象とする問題の、冗長な表現形態を備えているパターン $\varphi \in \Phi$ に対し、その代りとなるような

“加わっているある種の雑音を取り去るような簡潔な構造形式を備えており、然も、その指示する類概念 (category) がある種のユニタリ座標変換の下で不変であるようなパターンモデル [19], [21], [25] $T\varphi \in \Phi$ ”

が求められることが必要とされる。ここに、 Φ は処理の対象とするパターン φ の集合である。

本論文では、処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ に含まれている変形は通常不規則であり、パターン全体にわたる単一の規則的変換（ユニタリ座標変換）、例えば、平行移動 [20], [22], 縮小拡大 [23], [24], 回転 [26] では表され得ないこと、並びに、これまでのパターン情報処理技術はパ

ターンの大きな変形に対しては無力な処理手法しか提供していないことを思い起こし、この種のパターン変形を是正可能なパターン処理技術が研究される。

パターン認識技術を確認しようとする歴史はパターンの変形に対する攻略法研究の歴史でもある。

変形に対し頑健なパターン認識法（耐変形性認識技術）を研究することは、

(i) パターン変形表現の確立 [7]~[9]

(ii) パターンに含まれている雑音，変形を取り除く復元法 [16]・正規化・特徴抽出法 [17]

(iii) パターンの変形を吸収する認識システムの自己組織化構造，識別法，学習法の確保 [33], [34]などを介し，これまでなされてきた。

本論文ではこれまでの如何なる諸研究とは異なり，パターンの変形を吸収する半順序関係[30], [38]

● を定義し，この半順序関係 ● に関する 2 元 $K\varphi, B\psi$ の上限 $K\varphi \Delta B\psi$ を解を持つ整形化方程式

$$\psi = K\varphi \Delta B\psi \tag{1}$$

を提案する。逐次近似法

$$\psi_0 = K\varphi \quad (\text{initialization}) \tag{2}$$

$$\psi_t = K\varphi \Delta B\psi_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots \quad (\text{recursion}) \tag{3}$$

を適用して得られる極限

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t \tag{4}$$

が処理の対象としている問題のパターン φ の整形化パターン $T_{\min}(K, B)\varphi$ を与えることになる。

本論文は，手書き漢字，日本語単独母音のパターン構造再生 [22]~[24], [26], [28], パターン認識 [29], [35], [36], パターン連想 [27], [34] に関し，計算機シミュレーション済みのパターンモデル（いわゆるパターン認識分野での，原パターン φ の正規化パターン） $T\varphi$ の改良を目指し， $T\varphi$ の代りとなるパターンモデル $T_{\min}(K, B)\varphi$ を提案するものである。このモデル $T_{\min}(K, B)\varphi$ は付録A，A6章の最大類似度認識法での $T\varphi$ の代りに用いることができる。認識システムが何かを見るためにはそれについての知識が必要であり [4]，知識 K, B に基づかない $T\varphi$ に比べ，知識 K, B に基づく処理の対象 φ の意味付け，即ち，対象 φ の再構成 $T_{\min}(K, B)\varphi$ こそ， φ の理解に他ならないことを明らかにしたといえよう。

2. パターン集合 Φ 上の半順序関係 ●，同値関係 ~ とパターンの整形化

本章では，付録Aの解説を前提とし，半順序関係 ● を導入し，● に基づくパターンの整形化変換の意味，パターン集合 Φ の商集合 Φ / \sim とパターンモデル集合 $T \cdot \Phi$ との同一視可能性（定理1），並びに，付録Aのモデル構成作用素 T の4構成例が説明される。

2.1 半順序関係 ● によるパターン φ の変形

2.1.1 半順序関係 ● とその上限 Δ

処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ についての，2条件式 (A2)，(A22) に注意し，パターン $\varphi \in \Phi$ はパターン $\eta \in \Phi$ に整形化変換（structure-preserving reduction）可能であることを、

$$\varphi \bullet \eta \tag{5}$$

と表記する。

例えば、線処理過程 (line process) を導入し、事後ポテンシャルエネルギー関数を最小にする物体表面を記述する画像を求めるという“マルコフ確率場での画像復元手法 [16]”では、画像 η のエネルギーの方が画像 φ のエネルギーより大きくなければ、半順序関係式 (5) が成立していると考えられよう [30].

式 (5) の2項関係 $\varphi \bullet \eta$ を式 (22), 式 (39) で定義する本研究では、この2項関係 $\varphi \bullet \eta$ は半順序関係であって、次の4解釈 (一)~(四) が可能であるとする：

- (一) φ は η の近似である.
- (二) φ は η に要約される.
- (三) η は φ の情報を含む.
- (四) η は φ に変形されている. □

上手な知覚と記憶の働きというのは、原パターン φ のあらゆる部分を等しく重要視して再生するのではなく、 φ の持つ構造全体の判断が容易に得られるように、刺激としてのパターン φ の持つ多くの情報から、重要ないくつかの部分情報のみを再生すると考えられる. 2項関係 \bullet が適切に用意されていれば、式 (5) は、パターン φ がパターン η として、上手な知覚と記憶の働きで再生された状況を表していると、考えられる.

そこで、曖昧さ (fuzziness, ambiguity) に関する半順序を導入しよう.

\bullet は、処理の対象とするパターン φ の集合 Φ ($\subset \mathfrak{P}$) 上での、

反射律 (refletive law, $\varphi \bullet \varphi$)

反対称律 (以下の式 (8) ; antisymmetric law, $\varphi \bullet \eta \wedge \eta \bullet \varphi \Rightarrow \varphi \sim \eta$)

推移律 (半順序の公理 [2], [5] ; transitive law, $\varphi \bullet \eta \wedge \eta \bullet \psi \Rightarrow \varphi \bullet \psi$)

を満たす半順序関係 (partial ordering) とし、この半順序関係 \bullet の下での、パターン集合 Ψ ($\subseteq \Phi$) の上限 (supremum), 即ち、最小上界 (least upper bound) $\Delta\Psi$ を次のように定義する.

[Ψ ($\subseteq \Phi$) の最小上界 $\Delta\Psi$ の定義]

Φ を半順序関係 \bullet の定義された半順序集合 (partially ordered set) とするとき、 Φ の部分集合 Ψ ($\subseteq \Phi$) の上限 ψ とは、次の2条件 (i), (ii) を満たす Φ の要素であり (Ψ の要素とは限らない),

$$\psi \equiv \Delta\Psi \in \Phi \tag{6}$$

と書く：

(i) (上界性 ; $\Psi \bullet \psi$) $\forall \eta \in \Psi, \eta \bullet \psi$.

(ii) (最小性 ; $\Psi \bullet \psi'$ ならば, $\psi \bullet \psi'$)

$$\exists \varphi \in \Phi, \forall \eta \in \Psi, \eta \bullet \varphi \text{ ならば, } \psi \bullet \varphi. \tag{7}$$

付録Dでは、式 (D1) を満たし、整形化変換を可能にする線形作用素 A について解説されている.

特に、 $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ のときの $\Delta\Psi = \Delta\{\varphi_1, \varphi_2\}$ を、

$$\varphi_1 \Delta \varphi_2 \tag{7}$$

と表すことがある. 式 (7) の $\varphi_1 \Delta \varphi_2$ は φ_1 と φ_2 とを併合して得られたパターン (φ_1, φ_2 双方に共通な情報を備えているパターン) であるという.

次の命題1の成立は、 $\varphi \Delta \eta$ が有限集合 $\{\varphi, \eta\}$ に関する半順序関係 \bullet の上限であることから、明らかである.

[命題1] (上限の性質)

$$\varphi \bullet \eta \Leftrightarrow [\varphi \Delta \eta = \eta]. \tag{8}$$

□

2.1.2 同値関係 \sim

本研究では、同値関係 \sim を半順序関係 $\bullet\subset$ で定義する。言い換えれば、2つのパターン $\varphi, \eta \in \Phi$ がある2項関係 \sim を持っていること（同等な情報を持っている事態） $\varphi \sim \eta$ を、

$$\varphi \sim \eta \Leftrightarrow [\varphi \bullet\subset \eta \wedge \eta \bullet\subset \varphi] \quad (\text{反対称律}) \tag{8}$$

と定義してみよう。

2項関係 \sim は、

反射律 (reflexive law ; $\varphi \sim \varphi$)

対称律 (symmetric law ; $\varphi \sim \eta$ ならば $\eta \sim \varphi$)

推移律 (transitive law ; $\varphi \sim \eta$ かつ $\eta \sim \psi$ ならば $\varphi \sim \psi$) (同値関係の公理 [5])

を満たすことが直ちにわかる。パターン集合 Φ の任意の2元 φ, η の間に、2項関係 \sim が成立するかしないかを必ず決めることができ、この意味で、 $\varphi \sim \eta$ は、 φ が η と同値であると読む。

φ と同値な Φ の元全体を、 φ を含む Φ の同値類 (the equivalence class containing φ) といい、

$$[\varphi] \equiv \{\eta \in \Phi \mid \varphi \sim \eta\} (\subset \Phi \subset \mathfrak{P}) \tag{9}$$

と表す。任意にとった2つの同値類は、全く一致するか、または共通の元を1つも持たない。同値類 $[\varphi]$ の1つの要素を $[\varphi]$ の代表元 (representative) という。同値関係 (equivalence relation) \sim による Φ の商集合 (quotient set) Φ/\sim とは、 Φ の同値類全体の集合

$$\Phi/\sim \equiv \{[\varphi] \mid \varphi \in \Phi\} \tag{10}$$

のことである。

2.2 商集合 Φ/\sim の、パターンモデル集合 $T \cdot \Phi$ による意味付け

パターン集合 Φ からその商集合 Φ/\sim の上への写像

$$q : \Phi \rightarrow \Phi/\sim \tag{11}$$

を、 Φ の商変換 (quotient transformation) という。

式 (A21) のパターンモデル集合 $T \cdot \Phi$ を用意すると、同値類 $[\varphi] \subset \Phi$ と、パターンモデル $T \cdot \varphi \in T \cdot \Phi$ とは同一視でき、 $[\varphi]$ の意味とは $T\varphi$ であること、つまり、商集合 Φ/\sim の意味標識集合とはパターンモデル集合 $T \cdot \Phi$ であることを、次の定理1は指摘している。

[定理1] (商集合、パターンモデル集合間の対応定理)

(1#) 2.3節の例1～4

(2#) 付録Cの2定理C1, C2

(3#) 付録D

での、式 (A9) のモデル構成作用素 T については、式 (11) の商変換 q と異なり、写像

$$F : \Phi/\sim \rightarrow T \cdot \Phi \tag{12}$$

は次の (i), (ii) を満たし、1対1 (injection) かつ上への写像 (surjection) である：

(i) $\varphi \sim \eta$ が成立するのなら、常に $T\varphi = T\eta$ 。

(ii) $T \cdot \Phi$ の任意の元 $T\varphi$ に対し、 $F([\varphi]) = T\varphi$ を満たす Φ/\sim の元 $[\varphi]$ が常に存在する。

(証明) 同値関係の定義式 (8) より、

$$T\varphi = T\eta \Rightarrow T\varphi \sim T\eta \tag{13}$$

は明らかに成り立つ。ところが、(1#)～(3#) のモデル構成作用素 T では、逆の関係

$$T\varphi \sim T\eta \Rightarrow T\varphi = T\eta \tag{14}$$

もいえ、よって、

$$T\varphi \sim T\eta \Leftrightarrow T\varphi = T\eta \quad (15)$$

が成り立つ。

ところが、(1#)～(3#) のモデル構成作用素 T では、

$$\varphi \sim \eta \Leftrightarrow T\varphi \sim T\eta \quad (16)$$

も成り立っており、式 (9) の同値類 $[\varphi]$ の定義を勘案して、2式 (15), (16) より、

$$[\varphi] = [\eta] \Leftrightarrow \varphi \sim \eta \Leftrightarrow T\varphi = T\eta \quad (17)$$

を得、これは (i), (ii) の成立を意味する。□

2.3 モデル構成作用素 $T\varphi$ の4例

本節では、付録A, A3章の4性質①～④を満たす式 (A9) のモデル構成作用素 T の4構成例1～4が示される。2式 (14), (16) が満たされる4例である。

例1～4, 付録Dのモデル構成作用素 T の近似 S については、付録Bの定理B1, 系B1で説明されており、 S は式 (B12) の形式を備えていることに注意しておこう。

2例1, 2では、

$$\forall x \in M, \varphi(x) = 0 \text{ のとき,}$$

$$\forall x \in M, \frac{\varphi(x)}{\sup_{x \in M} |\varphi(x)|} = 0 \quad (18)$$

と、約束する。

[例1] (正定数倍規格化パターンモデル $T\varphi$) [37]

パターン $\varphi = \varphi(x)$ を有界な実数値関数とする。

条件式 (18) の約束に注意し、

$$(T\varphi)(x) = \frac{\varphi(x)}{\sup_{x \in M} |\varphi(x)|} \quad (19)$$

と定義される式 (A9) の写像 T は、4つの場合

$$(イ) \forall x \in M, \varphi(x) = 0 \wedge \forall x \in M, \eta(x) = 0$$

$$(ロ) \exists x \in M, \varphi(x) \neq 0 \wedge \forall x \in M, \eta(x) = 0$$

$$(ハ) \forall x \in M, \varphi(x) = 0 \wedge \exists x \in M, \eta(x) \neq 0$$

$$(ニ) \exists x \in M, \varphi(x) \neq 0 \wedge \exists x \in M, \eta(x) \neq 0$$

に分けて考えればわかるように、正定数倍規格化性

$$\exists c \in R^+ \text{ (正実数の集合), } \forall x \in M, \varphi(x) = c \cdot \eta(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in M, (T\varphi)(x) = (T\eta)(x) \quad (20)$$

を満たし、写像 T は、付録A, A3章の4性質①～④を満たすモデル構成作用素であることが確かめられる。

不等式

$$\forall x \in M, -1 < h(x) < +1 \quad (21)$$

を満たす実数値関数 $h(x)$ を用意し、閾値関数として使用しよう。式 (5) の2項関係 $\varphi \bullet \ll \eta$ を、

$$\varphi \bullet \ll \eta$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in M, -1 \leq (T\eta)(x) \leq (T\varphi)(x) < h(x)$$

$$\forall h(x) \leq (T\varphi)(x) \leq (T\eta)(x) \leq +1 \tag{22}$$

と定義してみると、 Φ 上の半順序関係である。

同値関係 $\varphi \sim \eta$ は、

$$\varphi \sim \eta \Leftrightarrow \forall x \in M, (T\varphi)(x) = (T\eta)(x) \tag{23}$$

と表され、式 (20) から、 $\varphi \sim \eta$ なる 2 つのパターン φ, η は、正実定数倍の関係にあることがわかる。

次の命題 2 が成立ち、2 値化パターン $\psi = \psi(x) \in \{-1, +1\}$ は、この例 1 では、式 (22) の半順序関係 \bullet の極大要素 (maximal element) であることがわかる。

[命題 2] (半順序関係 \bullet に関する極大要素の存在)

$$\forall x \in M, \psi(x) \in \{-1, +1\}$$

であれば、

$$\forall x \in M, (T\psi)(x) = \psi(x)$$

が成り立つ。このとき、

$$\forall \varphi \in \Phi, \varphi \bullet \psi. \tag{□}$$

上記の命題 2 は次の事実を指摘している：

$\psi \bullet \varphi \wedge [\psi \sim \varphi \text{ は成立しない}]$ を満たす $\varphi \in \Phi$ は、同値関係 \sim に関し、 $\psi = \psi(x) \in \{-1, +1\}$ と等しいものを除くと、存在しない。つまり、 $\psi = \psi(x) \in \{-1, +1\}$ より大きいものは存在しない。

付録A, A3章の性質③の成立に注意すると、式 (23) から、2 式 (14), (16) の成立がわかる。

(例 1 終)

[例 2] (3 値パターンモデル $T\varphi$) [37]

パターン $\varphi = \varphi(x)$ を有界な実数値関数とする。

不等式

$$\forall x \in M, -1 < \psi^0 < +1 \tag{24}$$

を満たす実数閾値パターン関数 $\psi^0(x)$ を用意し、閾値関数として使用しよう。

条件式 (18) の約束に注意し、式 (A9) の写像 T を、次のように定義する：

$$(T\varphi)(x) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \cdots -1 \leq \frac{\varphi(x)}{\sup_{x \in M} |\varphi(x)|} < -\psi^0(x) \text{ のとき} \\ 0 \cdots -\psi^0(x) \leq \frac{\varphi(x)}{\sup_{x \in M} |\varphi(x)|} < +\psi^0(x) \text{ のとき} \\ +1 \cdots +\psi^0(x) \leq \frac{\varphi(x)}{\sup_{x \in M} |\varphi(x)|} \leq +1 \text{ のとき} \end{array} \right. \tag{25}$$

□

このとき、3 値への規格化性

$$\forall x \in M, \varphi(x) \in \{-1, 0, +1\} \text{ であれば, } T\varphi = \varphi \tag{26}$$

が成立しており、式 (A9) の写像 T は、付録A, A3章の 4 性質①～④を満たすモデル構成作用素であることが確かめられる。

不等式 (21) を満たす閾値関数 $h(x)$ を用意し、式 (5) の $\varphi \bullet \eta$ を式 (22) で定義すると、2 元関係 \bullet は Φ 上の半順序関係である。

同値関係 $\varphi \sim \eta$ は、式 (23) のように表される。

この例 2 においても、 $\forall x \in M, \phi(x) \in \{-1, +1\}$ の代りに、

$$\forall x \in M, \phi(x) \in \{-1, 0, +1\}$$

と仮定すれば、命題 2 はそのまま成り立つことがわかる。

付録 A, A3 章の性質③の成立に注意すると、式 (23) から、2 式 (14), (16) の成立がわかる。

(例 2 終)

以下の例 3 において必要とされる次の補助定理 1 は容易に証明される。

[補助定理 1] (規格化実数値不動点定理)

式 (30) の 1 次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ の下で、規格化条件

$$\sum_{k \in L} c_k^2 \in \{0, 1\} \quad (27)$$

を満たす与えられた実数値係数 $c_k \in R$ (実数の集合) の組 $\{c_k\}_{k \in L}$ の 1 次結合

$$\eta \equiv \sum_{k \in L} c_k \cdot \phi_k \quad (28)$$

は、式 (35) の各特微量 $u(\varphi, k)$ を用いて式 (36) で定義される式 (A9) の写像 T の不動点である：

$$T\eta = \eta. \quad (29)$$

(例 2 終)

[例 3] (規格化 1 次展開パターンモデル $T\varphi$) [37]

可分なヒルベルト空間 \mathfrak{H} (例えば、 $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$) の元 ϕ_k の組

$$\{\phi_k\}_{k \in L} \quad (30)$$

は、1 次独立であるとする。このような 1 次独立な各 ϕ_k は、wavelet 理論 [13], 正則化理論 (regularization theory) [14] に登場している。各 ϕ_k は式 (36) で定義される式 (A9) の写像 T により、式 (38) に示されるごとく、変形されなくてそのまま誤差なく忠実に復元可能であり、この各 ϕ_k は、すべてのパターン φ の構造はそこまで分解できるという意味で極小のパターンであり、パターン形状素 (primitive shape-component) [25] と呼ばれる。

このとき、

$$\|\varphi - \sum_{k \in L} a_k \cdot \phi_k\|^2 \rightarrow \min \quad (31)$$

を満たす最小自乗近似複素係数 a_k の組 $a_k, k \in L$ を求める。それには、連立 1 次方程式

$$\sum_{k \in L} a_k \cdot (\phi_k, \phi_\ell) = (\varphi, \phi_\ell), \ell \in L \quad (32)$$

を解けばよい [10]。この解 $a_k(\varphi) \equiv a_k, k \in L$ が得られたならば、パターン $\varphi \in \mathfrak{H}$ は、

直交条件

$$\forall k \in L, (\varphi_\perp, \phi_k) = 0 \quad (33)$$

を満たす残差パターン $\varphi_\perp \in \mathfrak{H}$ が存在して、

$$\varphi = \sum_{k \in L} a_k(\varphi) \cdot \phi_k + \varphi_\perp \quad (34)$$

と、1 次展開の形式に表現される。

パターン $\varphi \in \mathfrak{H}$ から抽出される第 $k \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, k)$ として、

$$u(\varphi, k) = \begin{cases} \frac{a_k(\varphi)}{\left[\sum_{k \in L} |a_k(\varphi)|^2\right]^{1/2}} \cdots \exists \ell \in L, a_\ell(\varphi) \neq 0 \text{ の場合} \\ 0 \cdots \forall \ell \in L, a_\ell(\varphi) = 0 \text{ の場合} \end{cases} \quad (35)$$

を用意し、2式(19)、(25)での、式(A9)の写像 T とは異なり、式(34)の、パターン $\varphi \in \Phi$ の1次展開に対応して、

$$T\varphi = \sum_{k \in L} u(\varphi, k) \cdot \psi_k \quad (36)$$

と定義される式(A9)の写像 T を導入する。文献[25]においては、式(36)のパターンモデル形式について解説されている。

加法的雑音 $\varphi_\perp \in \mathfrak{H}$ の除去性

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H}, T\left(\sum_{k \in L} a_k(\varphi) \cdot \psi_k + \varphi_\perp\right) = T\left(\sum_{k \in L} a_k(\varphi) \cdot \psi_k\right) \quad (37)$$

が成立する。更に、上述の補助定理1を考慮すると、式(36)で定義される式(A9)の写像 T は、付録A、A3章の性質③を満たすことがわかる。特に、各 ψ_k の変形不能性を示す不動点写像性

$$\forall k \in L, T(\pm \psi_k) = \pm \psi_k \text{ (複号同順)} \quad (38)$$

が成り立つことに注意しておく。

式(36)の写像 T は、付録A、A3章の4性質①～④を満たすモデル構成作用素であることが容易に確かめられる。

以後、各 $a_k(\varphi) (k \in L)$ が実数値であるようなパターン $\varphi = \varphi(x)$ を処理の対象としよう。

閾値 $th(k)$ の組 $\{th(k)\}_{k \in L}$ を用意・固定し、2つのパターン $\varphi, \eta \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ について、式(5)の2項関係 $\varphi \bullet \eta$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \varphi \bullet \eta &\Leftrightarrow \\ \forall k \in L, u(\eta, k) &\leq u(\varphi, k) < th(k) \\ \vee th(k) &\leq u(\varphi, k) \leq u(\eta, k) \end{aligned} \quad (39)$$

と定義されるパターン集合 Φ 上の2項関係 \bullet は半順序関係である。但し、同値関係 $\varphi \sim \eta$ は、

$$\varphi \sim \eta \Leftrightarrow \forall \ell \in L, u(\varphi, \ell) = u(\eta, \ell) \quad (40)$$

と定義されており、式(30)の系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ は1次独立であるから、2式(35)、(36)で定義されるモデル構成作用素 T について、

$$\varphi \sim \eta \Leftrightarrow \forall x \in M, (T\varphi)(x) = (T\eta)(x) \quad (41)$$

が成立している。 $\varphi \sim \eta$ なる2つのパターン $\varphi, \eta \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ は同一の特徴量の組を備えており(式(40)を参照)、2つのパターンモデル $T\varphi, T\eta$ は、一致すること(式(41)を参照)がわかる。

次の命題3は、この例3においては、各パターン形状素 ψ_k が式(39)の半順序関係 \bullet の極大要素であることを指摘している。

[命題3] (半順序関係 \bullet に関する極大要素の存在)

$$\forall k \in L, \forall \varphi \in \Phi, \varphi \bullet \psi_k \cdot$$

$$\text{(証明)} \exists k \in L, a_k(\eta) \in \{-1, +1\} \wedge [\forall \ell \in L - \{k\}, a_\ell(\eta) = 0]$$

であれば、任意の $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ について、 $\varphi \bullet \eta$ が成立することがわかる。このような $\eta \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ として、

$\eta = \psi_k$ を選ぶことができる。 □

このとき、付録A, A3章の③より、モデル $T\varphi$ が原パターン φ から抽出された式 (35) でいう特徴量の組

$$\vec{u}(\varphi) \equiv \{u(\varphi, \ell) \mid \ell \in L\} \quad (42)$$

を保存している事実、つまり、

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall k \in L, u(T\varphi, k) = u(\varphi, k) \quad (43)$$

が成り立っていることは、式 (30) のパターン形状素 ψ_k の組 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ の 1 次独立性より直ちに確かめられる。

付録A, A3章の性質③の成立に注意すると、式 (41) から、2 式 (14), (16) の成立がわかる。 □

以下の例 4 において必要とされる次の補助定理 2 は容易に証明される。

[補助定理 2] (3 値不動点定理)

与えられた 3 値係数 $c_k \in \{-1, 0, +1\}$ の組 $\{c_k\}_{k \in L}$ の、式 (28) の 1 次結合 η は、不動点方程式 (29) を満たし、式 (45) の各 $u(\cdot, \ell)$ を用いて式 (36) で定義される写像 T の不動点である。

(例 3 終)

[例 4] (展開係数の 3 値規格化 1 次展開パターンモデル $T\varphi$)

上述の例 3 と同様な設定の下で、パターン φ の 1 次展開式 (31) での各実数値展開係数 $a_k(\varphi)$ を用いて、

$$b_k(\varphi) \equiv \begin{cases} \frac{a_k(\varphi)}{\sup_{\ell \in L} |a_\ell(\varphi)|} \cdots \exists \ell \in L, a_\ell(\varphi) \neq 0 \text{ の場合} \\ 0 \cdots \forall \ell \in L, a_\ell(\varphi) = 0 \text{ の場合} \end{cases} \quad (44)$$

を用意し、パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出される第 $\ell \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, \ell)$ として、式 (35) の定義と異なり、

$$u(\varphi, \ell) = \begin{cases} -1 \cdots -1 \leq b_\ell(\varphi) \leq e_\ell^- \text{ の場合} \\ 0 \cdots e_\ell^- < b_\ell(\varphi) < e_\ell^+ \text{ の場合} \\ +1 \cdots e_\ell^+ \leq b_\ell(\varphi) \leq +1 \text{ の場合} \end{cases} \quad (45)$$

$$\text{ここに、} -1 \leq e_\ell^- < 0 < e_\ell^+ \leq +1 \quad (46)$$

を用意し、2 式 (19), (25) での写像 T は異なり、式 (34) のパターン $\varphi \in \Phi$ の 1 次展開に対応して、式 (36) で定義される式 (A9) の写像 T を導入する。

加法的雑音 $\varphi_\perp \in \mathfrak{G}$ の除去性を示す式 (37) も成立している。

上述の補助定理 2 を考慮すると、式 (36) で定義される式 (A9) の写像 T は、付録A, A3章の性質④を満たすことがわかる。特に、不動点方程式 (38) も成り立つことに注意しておく。

式 (36) で定義される写像 T は、付録A, A3章の 4 性質①～④を満たすモデル構成作用素であることが容易に確かめられる。

閾値 $th(k)$ の組 $\{th(k)\}_{k \in L}$ を用意・固定し、2つのパターン $\varphi, \eta \in \Phi \subset \mathfrak{P}$ について、パターン集合 Φ 上の、式 (5) の2項関係 $\varphi \bullet \eta$ を式 (39) で定義すれば、例3と同様、2項関係 \bullet は半順序関係である。

同値関係 $\varphi \sim \eta$ は2式 (40), (41) のごとく、表され、 $\varphi \sim \eta$ なる2つのパターン φ, η は同一の特微量の組を備えており (式 (40)), 2つのパターンモデル $T\varphi, T\eta$ は、一致すること (式 (41)) がわかる。

次の命題4は、この例4においては、抽出される各特微量 $u(\varphi, k)$ が ± 1 であるようなパターン φ は式 (39) の半順序関係 \bullet の極大要素であることを指摘している。

【命題4】 (半順序関係 \bullet に関する極大要素の存在)

$$\forall k \in L, u(\varphi, k) \in \{-1, +1\}$$

であれば、

$$\forall \varphi \in \Phi, \varphi \bullet \varphi. \quad \square$$

このとき、付録A, A3章の③より、モデル $T\varphi$ が原パターン φ から抽出された式 (35) でいう特微量の、式 (42) の組を保存している事実、つまり、式 (43) が成り立っていることは、式 (30) のパターン形状素 ψ_k の組 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ の1次独立性より直ちに確かめられる。

付録A, A3章の性質③の成立に注意すると、式 (41) から、2式 (14), (16) の成立がわかる。

(例4終)

尚、付録Bでは、上記の4例1~4は無論として、付録A, A3章の4性質①~④を満たす一般のモデル構成作用素 T' の構造は、式 (B12) の構造を持った式 (B13) の写像 S で十分近似可能なことが定理B1, その系1, 2で証明されている。 T を T' で置き換えて得られる式 (36) の構造形式 T' と、式 (B12) の構造形式との間に、

$$k \in L \leftrightarrow j \in J$$

$$u(\varphi, k) \leftrightarrow v_j(\varphi)$$

$$\psi_k \leftrightarrow T'\varphi_j$$

という対応があることに注意しておこう。

3. 整形化方程式の逐次的求解に基づいた同値関係 \sim の下での パターンモデル $T_{\min}(K, B)\varphi$

2式 (11), (12) の写像 q, F を用いて、

$$g(\varphi) \equiv F(q(\varphi)) \quad \text{for any } \varphi \in \Phi \quad (47)$$

と定義される合成写像

$$g: \Phi \rightarrow T \cdot \Phi \quad (48)$$

を考えて見れば、 $T\varphi$ がパターン φ のモデルであり、

$$q(\varphi) = [\varphi], F([\varphi]) = T\varphi \quad \therefore g(\varphi) = T\varphi \quad (49)$$

であるから、式 (47) の合成写像 g がいわゆる普通の意味では、

「原パターン φ の代りとなり φ に含まれているなんらかの規則的・不規則的変形とか雑音を取り除いて得られるパターンモデル」

を出力する“パターン認識分野での正規化写像 [18], [19], [24], [25]”に相当することがわかる。

本章では、認識システム内の知識（具体的には、以下の式 (50) の写像 K, B を用いて、式 (47) の写像 g の改良を目指し (2 定理 2, 3), g の代りとなる式 (53) の写像 $T_{\min}(K, B)$ の構造を明らかにするため、整形化方程式 (1) の求解法に付き論じる。

3.1 K - B パターンの帰納的定義

処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ に対し、2つの作用素

$$K: \Phi \rightarrow \Phi, \quad B: \Phi \rightarrow \Phi \quad (50)$$

が与えられたとしよう。このとき、 K - B パターンとは次のように、帰納的に定義される。

[K - B パターンの帰納的定義 (recursive definition)]

パターン $\varphi \in \Phi$ と式 (50) の 2 写像 K, B を固定する。

① (initialization)

$K\varphi$ は K - B パターンである。

② (recursion 1)

ψ が K - B パターンであるならば、 $B\psi$ は K - B パターンである。

③ (recursion 2)

η_1, η_2 が共に、 K - B パターンであるならば、 $\eta_1 \Delta \eta_2$ は K - B パターンである。

④ (termination)

以上の①, ②, ③より K - B パターンと判明するものだけが K - B パターンである。

□

3.2 パターンの整形化方程式

前節の K - B パターンの帰納的定義に基づくと、任意ではあるが固定したパターン $\varphi \in \Phi$ について、

$$[K\varphi \Delta B\psi] \in \Phi \quad (51)$$

は、 K - B パターンということになる。 $K\varphi \Delta B\psi$ と等しい K - B パターン $\psi \in \Phi$ を想定すると、 K - B パターンの帰納的定義を満たす再帰方程式 (1) が得られる。

パターン $\varphi \in \Phi$ が与えられたときの再帰関係、つまり、再帰方程式 (reflective equation) として、方程式 (1) を満たす (2.1 節の半順序関係 \leq に関する) 最小の ψ を ψ_{\min} と表わすと、 ψ_{\min} は φ から定まるから

$$\psi_{\min} = T_{\min}(K, B)\varphi \quad (52)$$

と書ける。以後、式 (52) の解が存在すると仮定し、登場した作用素

$$T_{\min} \equiv T_{\min}(K, B): \Phi \rightarrow \Phi \quad (53)$$

の構造につき、研究しよう。次節で説明される逐次近似法では、付録E、定理E1の系1からわかるように、 Φ を完全半順序集合と仮定し、以下の式 (55) の写像 $S(K, B)$ を連続と仮定すると、式 (52) の解 ψ_{\min} は以下の式 (65) の如く必ず求まる。

式 (52) の $\psi_{\min} \in \Phi$ をパターン $\varphi \in \Phi$ の整形化パターン (a corresponding reduced pattern preserving the structure of φ) と解釈するとき、式 (1) のパターン再帰方程式 (reflective pattern-equation) をパターン整形化方程式という。

3.3 パターン整形化方程式 (1) の逐次的求解法

$\varphi \sim \eta$ が成り立たないとき, $\varphi \text{ not } \sim \eta$ と書く.

5 条件

(あ) $\forall \varphi \in \Phi, K(a \cdot \varphi) = K\varphi$ for any positive real number a .

(い) $\varphi = 0$ であれば, $K\varphi = 0$.

(う) $\varphi = 0$ であれば, $B\varphi = 0$.

(え) $\exists \varphi \in \Phi, \exists t \in \{1, 2, \dots\}, B^t \cdot K\varphi \text{ not } \sim 0$.

(お) $\forall \varphi \in \Phi, \varphi \sim K\varphi$.

が満たされているものとする.

付録Eの式 (E14) において, 底要素 b の代わりに $K\varphi$ を採用し, 写像

$$S : \Phi \rightarrow \Phi \tag{54}$$

として,

$$S\psi \equiv S(K, B)\psi \equiv K\psi \Delta B\psi \text{ for any } \psi \in \Phi \text{ and a given } \varphi \in \Phi \tag{55}$$

と定義されるものを採用する. そして, 逐次接近法 (method of successive approximations) を適用し, パターン整形化に関する再帰方程式 (1) を解き, 式 (52) の最小解 $\psi_{\min} \in \Phi$ を求めよう.

2 式 (2), (3) を使って,

$$\psi_0 \equiv K\varphi \tag{56}$$

$$\psi_1 = K\psi_0 \Delta B\psi_0 = K\psi_0 \Delta BK\varphi \tag{57}$$

$$\psi_2 = K\psi_1 \Delta B\psi_1 = K\psi_1 \Delta [BK\psi_0 \Delta B^2 \cdot K\varphi] \tag{58}$$

...

$$\psi_t = \Delta \{K\varphi, B \cdot K\varphi, \dots B^t \cdot K\varphi\} \tag{59}$$

...

を求めて行くと, 明らかに, 鎖 (chain) の性質 (付録E)

$$\psi_0 \bullet \psi_1 \bullet \psi_2 \bullet \dots \bullet \psi_t \bullet \dots \tag{60}$$

が成り立っていることがわかる. 従って, 不動点方程式 (fixed-point equation)

$$\psi_t = K\psi_t \Delta B\psi_t \text{ (termination)} \tag{61}$$

を満たす最小の t を求めれば, この ψ_t が, 式 (1) のパターン整形化再帰方程式の最小解としての式 (52) の ψ_{\min} である.

ここで, 我々は, 順次,

$$\psi_0, S(K, B)\psi_0, S(K, B)\psi_1, S(K, B)\psi_2, \dots \tag{62}$$

を計算していけば, つまり,

$$S(K, B)[\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t] \text{ (定義域上での極限)}$$

が計算できるならば,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(K, B)\psi_t \text{ (値域上の極限)}$$

に近づけ, 一致させることができると仮定している. それには,

「単調増加列が上に有限ならば収束し, その極限值はこの列の上限に等しい」ということを考慮すれば,

$$\exists \psi \in \Phi, \psi_t \bullet \psi \text{ for any } t \tag{63}$$

を、4者 φ, Φ, K, B に対し、仮定すればよい。

この場合、式 (60) が成立しているから、命題 1 から

$$\Delta\{\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_t\} = \psi_t \text{ for any } t \quad (64)$$

が、いえ、式 (52) の ψ_{\min} は、

$$\begin{aligned} \psi_{\min} &\equiv T_{\min}(K, B)\varphi \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\{\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_t\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t \end{aligned} \quad (65)$$

と求められる。

一般化して、

$$S(K, B)[\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t] = \lim_{t \rightarrow \infty} S(K, B)\psi_t \quad (66)$$

が成立するならば、式 (52) の ψ_{\min} は、式 (65) の如く求められる。

以上の逐次近似法で、パターン整形化方程式 (1) のすべての不動点が求められることは保証されていないが、式 (56)~(58), ..., 式 (59), ... を計算列と考えると、式 (55) から定まる操作 $S(K, B)$ を繰り返して目標とする式 (65) の対象 (最小不動点) ψ_{\min} に近づく過程が原パターン $\varphi \in \Phi$ の整形化操作ということになる。

$T_{\min}(K, B)\varphi$ の持つ 3 性質は、次の命題 5 で指摘される。

[命題 5] ($T_{\min}(K, B)\varphi$ の 3 性質)

(i) (零元不動点性) $\varphi = 0$ であれば、 $T_{\min}(K, B)\varphi = 0$ 。

(ii) (正定数倍不変性)

$$\forall \varphi \in \Phi, T_{\min}(K, B)(a \cdot \varphi) = T_{\min}(K, B)\varphi \text{ for any positive real number } a.$$

(iii) (非零写像性) $\exists \varphi \in \Phi, T_{\min}(K, B)\varphi \text{ not } \sim 0$ 。

(i) の証明： $\varphi = 0$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} K\varphi &= 0 \quad \because \text{(い)} \\ BK\varphi &= 0 \quad \because \text{(う)} \end{aligned} \quad (67)$$

を得て、この式 (67) に (う) を複数回適用すれば、

$$\forall s \in \{0, 1, 2, \dots\}, B^s \cdot K\varphi = 0. \quad (68)$$

よって、式 (59) を適用して、

$$\forall t \in \{0, 1, 2, \dots\}, \psi_t = 0 \quad (69)$$

が、いえ、結局、式 (65) を適用すると、

$$T_{\min}(K, B)\varphi = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t = 0 \quad (70)$$

が得られた。

(ii) の証明： a を任意の正定数とする。

$$\psi_t = \Delta\{K\varphi, B \cdot K\varphi, \dots, B^t \cdot K\varphi\} \quad \because \text{式 (59)} \quad (71)$$

$$\eta_t = \Delta\{K(a \cdot \varphi), B \cdot K(a \cdot \varphi), \dots, B^t \cdot K(a \cdot \varphi)\} \quad (72)$$

とおくと、

$$\forall t \in \{0, 1, 2, \dots\}, \psi_t = \eta_t \quad \because \text{(あ)} \quad (73)$$

を得て,

$$T_{\min}(K, B)(a \cdot \varphi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t = T_{\min}(K, B)\varphi \quad (74)$$

が成り立つことがわかった.

(iii) の証明: (え) より,

$$\exists \varphi \in \Phi, \exists t \in \{1, 2, \dots\}, B^t \cdot K\varphi \text{ not } \sim 0$$

としてよいから, 式 (71) で定義される各 ϕ_s について,

$$\forall s \in \{1, 2, \dots\} (s \geq t), 0 \text{ not } \sim B^t \cdot K\varphi \quad (75)$$

$$\bullet \ll K\varphi \Delta B \cdot K\varphi \Delta B^2 \cdot K\varphi \Delta \dots \Delta B^t \cdot K\varphi \quad (76)$$

$$\bullet \ll \phi_s \quad \because \text{式 (59)} \quad (77)$$

$$\bullet \ll \lim_{u \rightarrow \infty} \phi_u \quad \because \text{式 (60)}$$

$$= T_{\min}(K, B)\varphi \quad \because \text{式 (65)} \quad (78)$$

□

3.4 同値関係 \sim に関する 4 性質をみたすパターンモデル $T_{\min}(K, B)\varphi$

方程式 (1) の最小化解を式 (52) の様に書いているから, 方程式

$$\phi = K \cdot T_{\min}(K, B)\varphi \Delta B\phi \quad (79)$$

を満たす最小の $\phi = \phi_{\min\min}$ は

$$\phi_{\min\min} = T_{\min}(K, B) \cdot T_{\min}(K, B)\varphi \quad (80)$$

と書かれる.

[命題 6] (写像 $T_{\min}(K, B)\varphi$ のベキ等性)

$$\forall \varphi \in \Phi, T_{\min}(K, B) \cdot T_{\min}(K, B)\varphi \sim T_{\min}(K, B)\varphi.$$

(証明) 仮に, ψ', ψ'' を,

$$\psi' \equiv T_{\min}(K, B)\varphi, \quad \psi'' \equiv T_{\min}(K, B) \cdot T_{\min}(K, B)\varphi. \quad (81)$$

と置く.

① $\psi' \bullet \ll \psi''$ の証明.

$$\psi' \sim K\psi' \quad \because \text{(お)}$$

$$\bullet \ll K\psi' \Delta B\psi'' \quad \because \bullet \ll \text{の定義} \quad (82)$$

$$= \psi''. \quad \because \psi'' \text{の定義} \quad (83)$$

$$\text{つまり, } \psi' \bullet \ll \psi'' \quad (84)$$

② $\psi'' \bullet \ll \psi'$ の証明.

$$\psi' = K\varphi \Delta B\psi' \quad \because \psi' \text{の定義} \quad (85)$$

より,

$$B\psi' \bullet \ll \psi' \quad (86)$$

を得る. この式 (86) に 2.1.1 項の命題 1 を適用して, 同値式

$$\psi' = \psi' \Delta B\psi'$$

を得, 同値式

$$\psi' \sim \psi' \Delta B\psi' \quad (87)$$

が成立することがわかる．よって，

$$\begin{aligned} \psi' &\sim \psi' \triangle B \psi' \\ &\sim K \psi' \triangle B \psi' \quad \because \quad (\text{お}) \end{aligned} \quad (88)$$

がわかる．ここで， ψ'' は

$$\begin{aligned} \psi &= K \psi' \triangle B \psi \\ \psi'' &\bullet \psi' \end{aligned} \quad (89)$$

でなければならない．

上述の①，②より，本命題3の証明が終了したことがわかる． □

$$\varphi = \eta \Rightarrow \varphi \sim \eta \quad (90)$$

に注意すれば，2命題5，6から，次の定理2が成立することが判明する．

【定理2】(同値関係 \sim の下でのパターンモデル定理)

式(52)の解 $\psi_{\min} = T_{\min}(K, B)\varphi$ が存在するようなパターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{P}$ の集合を $\Phi_{\min}(\ni 0)$ とすれば，3.3節の5条件(あ)～(お)の下で，写像

$$T_{\min}(K, B): \Phi_{\min}/\sim \rightarrow \Phi_{\min}/\sim \quad (91)$$

は，付録A，A3章の4性質①～④に対応する次の4性質(イ')～(ニ')を満たす：

(イ') (零元不動点性) $\varphi = 0$ であれば， $T_{\min}(K, B)\varphi \sim 0$ ．

(ロ') (正定数倍不変性) $\forall \varphi \in \Phi, T_{\min}(K, B)(a \cdot \varphi) \sim T_{\min}(K, B)\varphi$ for any positive real number a ．

(ハ') $\forall \varphi \in \Phi, T_{\min}(K, B) \cdot T_{\min}(K, B)\varphi \sim T_{\min}(K, B)\varphi$ ．

(ニ') (非零写像性) $\exists \varphi \in \Phi, T_{\min}(K, B)\varphi \not\sim 0$ ． □

上述の定理2が成立するような，2写像 K, B の2選定法が付録Fで説明されているが，簡単に，以下の式(92)のように， K, B を設定すれば，式(53)の写像 $T_{\min}(K, B)$ がモデル構成作用素 T に一致し， T の自然な拡張となっている事実が，次の定理3で指摘される．

【定理3】($T_{\min}(K, B)$ の，モデル構成作用素 T への還元定理)

付録A，A3章の4性質①～④を満たすモデル構成作用素 T ，恒等作用素 I に注目し，2写像 K, B を，

$$K\varphi = T\varphi \wedge B\varphi = I\varphi \text{ for any } \varphi \in \Phi \quad (92)$$

とおけば，

$$\Phi_{\min} = \Phi \wedge T_{\min}(K, B) = T. \quad (93)$$

(証明) 式(92)のように設定された2写像 K, B は，3.3節の5性質(あ)～(お)を満たすことが，例1～4，付録C，D(3式(23)，(41)，(C23)，D7章)から直ちにわかる．このとき，任意に取られた $\varphi \in \Phi$ について，式(52)の $\psi_{\min} = T_{\min}(K, B)\varphi$ は，2式(59)，(65)から，

$$\psi_{\min} = T_{\min}(K, B)\varphi = K\varphi = T\varphi \quad (94)$$

と求められ，証明が終わった． □

上の定理3は，条件式(93)を代入して得られる式(1)のパターン整形化方程式

$$\psi = T\varphi \triangle \psi \quad (95)$$

の，半順序関係 \bullet に関する最小解 $\psi_{\min} = T_{\min}(K, B)\varphi$ については，

$$\forall t \in \{0, 1, 2, \dots\}, \psi_t = K\varphi \quad \because \quad \text{式(59)}$$

$$\therefore \psi_{\min} = T_{\min}(K, B)\varphi = T\varphi \quad \because \quad \text{2式(59)，(65)} \quad (96)$$

であることを，指摘している．

4. むすび

文献 [25] の続編としての半順序関係研究を更に推し進めた研究がなされた。

付録A, A3章の4性質①～④を満たすという意味でモデル構成作用素と呼ばれる写像 [18], [19], [21], [24], [25], [37] T を拡張した写像の構造を明らかにするという研究目的はひとまず、達成されたといえよう。つまり、 T の自然な拡張は、写像 $T_{\min}(K, B)$ であること (2 定理 2, 3) が判明した。

パターン構造の再生, パターン認識, パターン連想などのパターン情報処理の公理的取り扱いの端緒となったパターン認識の数学的理論 [37] で明確かつ一般的に登場した“モデル構成作用素 T の構造形式”は、4例1～4, 2付録C, Dからわかるように、多様性を備えており、それ故に、統一的取り扱いを困難にしてきたが、この写像 T の十分な近似が、式 (36) に似た“付録Bの式 (B12) の構造形式”であることが明らかになり、一応の解決を見たことも、本研究の1つの成果であろう。

モデル構成作用素 T の出力 $T\varphi$ が入力パターン φ を含む、同値関係 \sim に関する同値類 $[\varphi]$ の一意的意味標識となり得ることを示し (2.2節の定理 1), 本論文で提案された整形化方程式 (1) の、半順序関係 \bullet に関する最小解 $\phi_{\min} = T_{\min}(K, B)\varphi$ が同値関係 \sim の下でパターン φ のモデルと解釈され得ることが証明され (3.4節の定理 2), 認識システムが持っている知識としての2つの写像 K, B を各々、式 (92) の如く、 $K = T, B = I$ と選定していれば、 $T_{\min}(K, B) = T$ が成立している (3.4節の定理 3) という意味で、写像 $T_{\min}(K, B)$ が T の自然な拡張となっている事実が明らかにされた。

本論文で提案された半順序関係 \bullet に関する極大要素を研究すること (3 命題 2, 3, 4 と命題 C1) により、写像 $T_{\min}(K, B)$ と各種モデル構成作用素 T との機能上の違いが浮き彫りになったことも本研究の成果であろう。

$\|\varphi - \eta\| = 0$ を $\varphi = \eta$ と表すノルム同値関係 $=$ に関するパターンモデル $T\varphi$ を生じさせるこれまでの写像 T に比べ、それより弱い同値関係 \sim (式 (90) を参照) に関するパターンモデル $\phi_{\min} = T_{\min}(K, B)\varphi$ を生じさせる写像 $T_{\min}(K, B)$ は、認識システムの備えている知識 K, B を利用し、原パターン φ を大幅に整形化する機能を有し、付録F, F2章に示されている例からわかるように、例えば、 φ の帰属しているであろう1つのカテゴリ \mathfrak{C}_j の代表パターン ω_j のモデル $T\omega_j$ に変換できる機能、つまり、パターン連想機能 “ $\varphi \rightarrow T\omega_j$ ” を、写像 $T_{\min}(K, B)$ に備えさせることができ、パターン識別機能を秘めているのが特色であろう。

3 事柄

I. 本研究では、整形化方程式 (1) が最小解 $\phi_{\min} = T_{\min}(K, B)\varphi$ を持つものとして、逐次近似法で論を進めたが、逐次近似法によってパターン整形化方程式 (1) の、解としてのすべての不動点 ϕ が求められることは保証されていないことを勘案すると、すべての不動点解を求める手法、並びに、最小解 $\phi_{\min} = T_{\min}(K, B)\varphi$ が存在するための諸条件を明確にすること (例えば、付録E, 定理 E1 の系 1 などがヒントになる)

II. 最小解 $\phi_{\min} = T_{\min}(K, B)\varphi$ が存在するための1つの十分条件は、付録E, 定理 E1, 並びに、その系 1 からわかるように、式 (55) の写像 $S(K, B)$ の連続性であるが、この連続性を成立せしめる諸条件の発見、例えば、 Φ を完備束とし、写像 $S(K, B)$ が

$$\forall \varphi, \forall \eta \in \Phi, \varphi \bullet \eta \Rightarrow S(K, B)\varphi \bullet S(K, B)\eta$$

を満たすという意味で、(必ずしも連続でない) 単調写像ならば (付録Eの補助定理 E1 を参照)、半順序関係

$$S(K, B)\phi \ll \phi$$

を満たす最小の ϕ は $S(K, B)$ の最小不動点であること [6] を利用する.

Ⅲ. 3.3節の5条件 (あ)~(お) を満たす2つの写像 K, B を様々に選定して見て, 最小解 $\phi_{\min} = T_{\min}(K, B)\phi$ をもたらす写像 $T_{\min}(K, B)$ の具体的機能, 具体的意味の把握などが残された課題であるが, これまでの諸研究 [27], [29], [36], [37] と密接に関連した以下の解決すべき事柄をも指摘し, 本論文を終えよう:

「パターンモデルの非負1次結合を変換して行き, ある1つのカテゴリの代表パターンモデルを得, 連想的認識の働きを実現しようとする不動点探索形構造受精変換認識技術 [36], [37]」では, 付録A, A4章での3性質(直交性, 確率性, T -不変性)を備えた式(A10)の類似度関数 SM が用いられるが, 本研究で得られた式(53)のモデル構成作用素 $T_{\min}(K, B)$ と式(A14)の類似度関数 SM とを使い, 付録A, A6章での最大類似度法の一般化としてのこの不動点探索形構造受精変換認識技術の研究も進め, 日本語単独母音の認識・連想に関し一部そのシミュレーション[27], [29], [36]でその有効性が確かめられている認識・連想技術を画像処理, 文字認識, 音声処理, 顔表情の判断, 顔表情による人物同定, 指紋同定などにおける各種のパターンに適用し, 次第に実際のパターン情報処理技術分野に占めるその役割を鮮明にすることが望まれる.

□

尚, 付録Dの3定理D1, D2, D3の証明については, 別の機会に譲られる.

文 献

- [1] 吉田耕作: “近代解析 (基礎数学講座20)”, 共立出版, Dec.1963
- [2] Angus E. Taylor, David C. Lay: “Introduction to function analysis”, p.251, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1980
- [3] R. L. クラッキ: “記憶のしくみ・(第2版)”, 箱田・中溝共訳, p.528, Nov.1982
- [4] 田原育夫: “人工知能の基礎知識”, p.13, 近代科学社, Sept.1988
- [5] 青木利夫, 高橋渉: “集合・位相空間要論”, 培風館, Sept.1979
- [6] H. P. Barendregt: “The lambda calculus (Its syntax and semantics)”, p.11, p.15, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1981
- [7] A. Daffertshofer and H. Haken: “A new approach to recognition of deformed patterns”, Pattern Recognition, vol.27, no.12, pp.1697-1705, Dec.1994
- [8] 塩野充: “非線形な幾何学的ひずみを用いた手書き風文字パターン生成の一手法”, 電子情報通信学会論文誌 (D-II), vol.J74-D-II, no.2, pp.209-219, Feb.1991
- [9] Pietro Perona: “Deformable kernels for early vision”, IEEE Trans. Pattern Anal. & Mach. Intell., vol.17, no.5, PP.488-499, May 1995
- [10] Richard L. Dykstra: “An algorithm for restricted least squares regression”, Journal of the American Statistical Association, vol.78, no.384, pp.837-842, Dec.1983
- [11] M. Lindenbaum, M. Fischer and A. Bruckstein: “On Gabor’s contribution to image enhancement”, Pattern Recognition, vol.27, no.1, pp.1-8, 1994
- [12] D. Marr and E. Hildreth: “Theory of edge detection”, Proc. R. Soc. Lond. B, vol. 207, pp.187-217, 1980

- [13] Ingrid Daubechies: “Orthonormal bases of compactly supported wavelets”, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. XL I , pp.909-996, 1988
- [14] Charles A. Micchelli: “Interpolation of scattered data: Distance matrices and conditionally positive definite functions”, Constructive Approximation, vol.2, pp.11-22, 1986
- [15] Erkki Oja: “パターン認識と部分空間法”, 小川英光・佐藤誠訳, 産業図書, Apr.1986
- [16] S. Geman and D. Geman: “Stochastic relaxation, Gibbs distribution, and the Bayesian restoration of images”, IEEE Trans. Pattern Anal. & Mach. Intell., vol.PAMI-6, no.6, PP.721-741, Nov.1984
- [17] Cem Yuceer and Kemal Oflazer: “A rotation, scaling, and translation invariant pattern classification System”, Pattern Recognition, vol.26, no.5, pp.687-710, May 1993
- [18] 鈴木昇一: “認識工学 (上)”, 柏書房, Feb.1975
- [19] 鈴木昇一: “測度的不変量検出形認識系の構成理論”, 電子通信学会論文誌 (D), vol.55-D, no.8, pp.531-538, Aug.1972
- [20] 鈴木昇一: “画像情報量とその手書き漢字への応用”, 画像電子学会誌, vol.4, no.1, pp.4-12, 1975
- [21] 鈴木昇一: “パターン認識における構造化モデルの4性質とその応用”, 電子通信学会論文誌 (D), vol.J60-D, no.9, pp.710-717, Sept.1977
- [22] 鈴木昇一, 斎藤静昭, 奥野治雄, 太田芳雄: “画像の復元とその計算機シミュレーション”, 工学院大学研究報告, vol.39, pp.198-206, Jan.1976
- [23] 鈴木昇一: “手書き漢字の側抑制効果的分解とその計算機シミュレーション”, 情報処理 (情報処理学会誌), vol.15, no.12, pp.927-934, Dec.1974
- [24] 鈴木昇一: “抽出された特徴による手書き漢字構造の再生”, 情報処理 (情報処理学会誌), vol.18, no.11, pp.1115-1122, Nov.1977
- [25] 鈴木昇一: “パターンのエントロピーモデル”, 電子情報通信学会論文誌 (D-II), vol.J77-D-II, no.11, pp.2220-2238, Nov. 1994
- [26] 鈴木昇一: “回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シミュレーション”, 情報研究 (文教大学情報学部), no.4, pp.36-56, Dec.1983
- [27] 鈴木昇一: “連想形記憶器MEMOTRONと日本語母音系列の再生に関する計算機シミュレーション”, 情報研究 (文教大学情報学部), no.7, pp.14-29, Dec.1986
- [28] 鈴木昇一: “収縮写像の構成用空間回路とその計算機シミュレーション”, 情報研究 (文教大学情報学部), no.9, pp.17-28, Dec.1988
- [29] 鈴木昇一: “帰属係数法に基づく類似度, 帰属関係あいまい度, 認識情報量の計算機シミュレーション”, 情報研究 (文教大学情報学部), no.11, pp.51-68, Dec.1990
- [30] 鈴木昇一: “半順序と情報処理”, 情報研究 (文教大情報学部), no.12, pp.121-174, Dec.1991
- [31] 鈴木昇一: “誤差確率分布を考慮した誤差逆伝播学習”, 情報研究 (文教大情報学部), no.13, pp.173-202, Dec.1992
- [32] 鈴木昇一: “新しい情報の測度とパターン情報処理”, 情報研究 (文教大情報学部), no.13, pp.273-358, Dec.1992
- [33] 鈴木昇一: “マイクロ経済学におけるワルラスの法則とパターン類似度関数のホップフィールドニューラルネット形調整”, 情報研究 (文教大情報学部), no.14, pp.211-236, Dec.1993
- [34] 鈴木昇一, 佐久間拓也: “パターンモデルを用いた不動点探索形連想記憶システム方程式”, 情報研究 (文教大情報学部), nol.15, pp.97-128, Dec.1994

- [35] 鈴木昇一：“平均類似度の概念に基づく特徴抽出及び識別法 ($\Phi_a^{(m)}$ - 核型第 1 種特徴抽出作用素の固有値問題)”，電子情報通信学会技術研究報告インホメーション理論研究会，no.IT71-10，Apr.1971
- [36] 鈴木昇一：“平均類似度を用いた構造受精法を用いた日本語単独母音の認識”，電子情報通信学会技術研究報告パターン認識と学習研究会，vol.82, no.31, PRL82-4, pp.25-32, May 1982
- [37] 鈴木昇一：“パターン認識の数学的理論”，電子（情報）通信学会技術研究報告 [パターン認識と学習，パターン認識と理解]，PRL84-6(第 I 部)，PRL84-30, PRL84-38, PRL85-27, PRU86-8, PRU86-35, PRU86-69, PRU87-1, PRU87-28, PRU88-30, PRU89-1, PRU89-27, PRU89-40, PRU89-66, PRU89-77, PRU89-136, PRU90-5, PRU90-15, PRU90-29, PRU90-125, PRU91-1, PRU91-29, PRU91-42, PRU92-1, PRU92-18, PRU92-25, PRU92-89, PRU92-102 (第28部)，May1984~Jan. 1993
- [38] 鈴木昇一：“ニューラルネットの新数理”，近代文芸社，Sept.1996
- [39] 鈴木昇一：“パターン認識問題の数理的一般解決”，近代文芸社，June 1997
- [40] 鈴木昇一：“認識知能情報論の新展開”，近代文芸社，Aug.1998
- [41] 鈴木昇一：“平均顔を用いた顔画像の 2 値化、並びに、目・鼻・口の抽出と、その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.22, pp.65-150, Dec.1999
- [42] 鈴木昇一：“界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の、顔画像処理に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.23, pp.109-182, Mar.2000
- [43] 鈴木昇一：“風景画から知識を抽出し，解釈するシステムの，ファジィ推論ニューラルネットによる構成”，情報研究（文教大学・情報学部），no.23, pp.183-265, Mar.2000
- [44] 鈴木昇一：“各個人の感性を反映した認識システム RECOGNITRON”，情報研究（文教大学・情報学部），no.24, pp.185-257, Dec.2000
- [45] 鈴木昇一：“プロダクション・システムとしてのファジィ・マルチメディア・コンピュータと、空間多重パターンファジィ推論系”，情報研究（文教大学・情報学部），no.24, pp.105-183, Dec.2000
- [46] 鈴木昇一：“SS 大分類関数 BSC の適応的構成への，計算論的学習理論の適用”，情報研究（文教大学・情報学部），no.25, pp.185-236, Mar.2001
- [47] 鈴木昇一：“量子力学の諸原理，多段階量子認識系と，心理状態を取り入れた想起に基づく部分空間認識法”，情報研究（文教大学・情報学部），no.25, pp.237-282, Mar.2001
- [48] 鈴木昇一：“Support Vector Machine を利用した大分類関数の構成”，情報研究（文教大学・情報学部），no.26, pp.1-62, Dec.2001
- [49] 鈴木昇一：“2 カテゴリー分類困難度の情報理論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.26, pp.63-160, Dec.2001
- [50] 鈴木昇一：“一般化類似度関数を用いた“導出原理による第 1 階述語推論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.27, pp.27-71, Mar.2002
- [51] 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：“風景画の理解に関する JAVA 言語による RECOGNITRON の計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.27, pp.73-109, Mar.2002
- [52] 鈴木昇一：“遺伝的アルゴリズムにおける適合度比例選択戦略を利用した進化方程式の，パターン多段階変換に基づく認識への応用”，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.37-67, Dec.2002
- [53] 鈴木昇一：“近傍を利用した音素認識のためのモデル構成作用素 T ，類似度関数 SM ，大分類関数 BSC の諸構成と，SS 不動点探索型多段階想起認識”，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.69-141, Dec.2002

- [54] 鈴木昇一：“JAVA言語で実装化された画像理解システムIUSの動作概要と、その稼動方法”，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.143-165, Dec.2002
- [55] 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：“JAVA言語による計算機シミュレーションで生じた風景画像の理解場面での多段階連想形認識過程の異常現象”，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.123-166, July 2003
- [56] 鈴木昇一：“パターン情報処理（モデル構成作用素，誤差逆伝播学習2層ニューラルネット）と，論理的含意とによる非単調的知識推論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.75-122, July 2003
- [57] 鈴木昇一：“可分な一般抽象ヒルベルト空間でのK-L直交系の理論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.41-73, July 2003
- [58] 鈴木昇一：“パターン系列（動画像，会話音声）の，dynamical systemによる連想理論と，連想器SPATEMTRON”，情報研究（文教大学・情報学部），no.30, pp.139-186, Jan.2004
- [59] 鈴木昇一：“入出力例の系列を用いた“対連想問題・その擬逆問題”の一般解”，情報研究（文教大学・情報学部），no.30, pp.81-137, Jan.2004
- [60] 鈴木昇一：“共役勾配法の一般解における直交系の応用（画像復元，パターンモデルの構成，パターン集合の情報理論的次元）”，情報研究（文教大学・情報学部），no.30, pp.27-79, Jan.2004
- [61] Dao-Qiang Zhang, Song-Can Chen: “A comment on “Alternative c-means clustering algorithm”, Pattern Recognition, vol.37, pp.173-174, 2004
- [62] 鈴木昇一：“2つのパターンモデル構成作用素の，言語論理による合成法”，情報研究（文教大学・情報学部），no.31, pp.41-64, Jul.2004
- [63] 鈴木昇一：“会話音声・動画像処理への，万能性類似度関数の採用によるSS多段階認識の改良”，情報研究（文教大学・情報学部），no.31, pp.65-108, Jul.2004
- [64] 鈴木昇一：“数形形態学の新しい2つのパターン変換作用素を用いた多段階想起認識”，情報研究（文教大学・情報学部），no.31, pp.109-139, Jul.2004
- [65] 鈴木昇一：“1パラメータLie座標変換群とそのパターン正規化への応用”，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.21-74, Jan.2005
- [66] 鈴木昇一：“曖昧さに関する半順序 \leq を単調に保つモデル構成作用素 T ”，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.75-126, Jan.2005
- [67] 鈴木昇一：“パターンから抽出された特徴量 $u(\varphi, \ell)$ のfuzzy単調変換”，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.127-168, Jan.2005
- [68] 鈴木昇一：“パターンモデル（パターンの標準形）の一般形”，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.169-218, Jan.2005
- [69] 鈴木昇一：“類似度関数の密度を用いた，画素毎のパターン認識処理（パターン理解処理）の方法”，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.219-285, Jan.2005
- [70] 鈴木昇一：“パターン（画像，音声）から感性情報を計量できる一般的な方法（視野を考慮して構成された類似度関数 SM の応用）”，情報研究（文教大学・情報学部），no.33, pp.261-316, Jul.2005
- [71] 鈴木昇一：“知識工学におけるcertainty factorによる多段階認識過程の評価”，情報研究（文教大学・情報学部），no.33, pp.199-260, Jul.2005
- [72] 鈴木昇一：“線形方程式の制約条件下での，残差法によるパターンモデル”，情報研究（文教大

- 学・情報学部), no.33, pp.149-197, Jul.2005
- [73] 鈴木昇一：“正規直交性を満たす類似度関数 SM に積分核が存在するか？”，情報研究（文教大学・情報学部），no.33, pp.111-147, Jul.2005
- [74] 鈴木昇一：“原パターンを近似できるという拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの，会話音声・動画像処理への応用”，情報研究（文教大学・情報学部），no.33, pp.43-110, Jul.2005

付録A（モデル構成作用素 T ，類似度関数 SM と，最大類似度認識法）

本付録Aでは，モデル構成作用素 T ，類似度関数 SM の満たすべき諸性質， SM の各々の1構成例を指摘し，簡単な認識法としての最大類似度（認識）法 [29]，[32]，[33] が説明される．

A1. 処理の対象とするパターン φ の集合 Φ

本研究では，これまでの設定通り [19]，[21]，[25]，パターン φ はある可分な（separable）[1] ヒルベルト（Hilbert）空間 \mathfrak{H} の元としよう．例えば，内積 (φ, η) ，ノルム $\|\varphi\|$ が，

$$(\varphi, \eta) = \int_M dm(x) \varphi(x) \cdot \overline{\eta(x)}$$

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$$

ここに， $\bar{\eta}$ は η の複素共役であり，

M ： q 次元ユークリッド空間 R^q の可測部分集合

$x = \langle x_1, x_2, \dots, x_q \rangle$ ： M の実数値直交座標系

$dm(x) = dM(x_1, x_2, \dots, x_q)$ ：正值Lebesgue-Stieltjes式測度

(A1)

とするヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ [2]，[18] を考えておけば良い [25]．

処理するパターン φ の集合 Φ は，可分なヒルベルト空間 \mathfrak{H} の（零元0を含む）ある部分集合（部分空間とは限らない）である [37]： $\Phi (\ni 0) \subset \mathfrak{H}$ ．

(A2)

例えば，簡単な可分な実ヒルベルト空間 \mathfrak{H} を挙げておこう．

$$M = \{x \mid 1 \leq x \leq n\}, dm(x) = 1 \quad \text{if } \exists k (= 1, 2, \dots, n), x = k, = 0 \quad \text{otherwise}$$

(A3)

とすると，内積 (φ, η) は，

$$(\varphi, \eta) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k$$

(A4)

ここに，

$$\varphi = \text{col} (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n) \quad (\text{実数列としての列ベクトル})$$

$$\eta = \text{col} (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n)$$

(A5)

と表わされ，この内積 (φ, η) を採用する n 次元ユークリッド空間 R^n は可分な実ヒルベルト空間 \mathfrak{H} であることに注意しておく．

A2. 代表パターン集合 Ω

Φ の任意の元であるパターン φ はカテゴリ集合

$$\mathfrak{C}(J) = \{ \mathfrak{C}_j \mid j \in J \} \tag{A6}$$

のいずれか1つに帰属しているとし、第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j の代表パターン ω_j の集合

$$\Omega = \{ \omega_j \mid j \in J \} \tag{A7}$$

を導入する。式 (A6) のカテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J)$ は以後常に、2個以上の要素を持つ有限集合であると仮定する。また、確率条件式

$$\forall j \in J, 0 < P(\mathfrak{C}_j) \wedge \sum_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) = 1 \tag{A8}$$

を満たす各カテゴリ \mathfrak{C}_j の生起確率 $p(\mathfrak{C}_j)$ をも導入しておく。

初めて目にする事物にそれに相応しいラベルを与えたとした場合に含まれる認知機能を、心理学ではカテゴリ作用 (categorization) と呼ぶが、本研究ではパターン認識 (pattern recognition) と呼ぶ [18]。本研究では、典型 (prototype) を中心として事例パターン集合が序列づけられたカテゴリ構造を持つと想定して、以後、論を進めるとすれば、式 (A7) の代表パターン集合 Ω が、このような典型の集合である。

尚、各代表パターン ω_j の適応的決定法は、文献 [37] の第21部、付録1にある [25]。

A3. パターンモデル $T\varphi$ の満たすべき4性質

入力 $\varphi \in \Phi$ に対するその出力がそのパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ であるような写像

$$T: \Phi \rightarrow \Phi \tag{A9}$$

は、次の4性質①~④を満たさなければならない [25], [37] としてみよう。

性質②, ④は各々、正定数倍, T 作用というパターン変形の下で、パターンという意味概念が保存されることを要請している。

① (零元不動点性) $\varphi = 0$ について $T\varphi = \varphi \in \Phi$.

② (正定数倍不変性) $\forall \varphi \in \Phi, T(a \cdot \varphi) = T\varphi$

for any positive real number a .

③ (ベキ等性) $\forall \varphi \in \Phi, T(T\varphi) = T\varphi$.

④ (非零写像性) $\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0$. □

4性質①~④を満たすという意味でモデル構成作用素と呼ばれる式 (A9) の写像 T を導入することの1つの意義は、実際に処理の対象とするパターン φ というものの帰納的定義が可能になり、パターン認識システムの自己組織化が精密に論じられることである [37]。直接的には、パターンモデル $T\varphi$ を、処理対象とする問題のパターン φ の変形前に戻された近似としての正規化パターンと想定すると、パターン認識分野におけるいわゆる式 (A9) の正規化写像 T が最小限満たさなければならない4性質①~④を指摘していることである [25]。

上述の4性質①~④を満たす式 (A4) の写像 T はこれまで、多数指摘されている [18], [19], [21], [22], [24]~[27], [29]~[34], [36]~[38]。

A4. 類似度関数 SM の満たすべき3性質

本章では、A3章の4性質①~④を満たしているパターンモデル $T\varphi$ を生成する式 (A9) のモデル構成作用素 T の下で不変な類似度関数

$$SM : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \quad (\text{A10})$$

について考察する。

式 (A10) の写像 SM が少なくとも、次の 3 性質 (正規直交性, 確率性, T -不変性) を満たすとしてみよう. 1 より大きくない非負量 $SM(\eta, \omega_j)$ は, パターン $\eta \in \Phi$ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j の代表パターン $\omega_j \in \Omega \subset \Phi$ と似ている程度を表しているとしよう. 最大値 1 に近い値を持つほど, 似ていると考える訳である:

(イ) (正規直交性) $SM(\omega_i, \omega_j) =$

$$\begin{cases} 1 \cdots i=j \text{ のとき} \\ 0 \cdots i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

(ロ) (確率性; 総和規格性)

$$\forall \eta \in \Phi, \sum_{j \in J} SM(\eta, \omega_j) = 1.$$

(ハ) (T -不変性)

$$\forall \eta \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\eta, \omega_j) = SM(\eta, \omega_j). \quad \square$$

上述の (イ), (ロ), (ハ) の効用について解説しておこう.

(イ) は, 式 (A7) での各代表パターン $\omega_i, \omega_j (i \neq j)$ が, カテゴリ帰属情報を全く共有しないことを要請している.

次に, (ロ) は, $SM(\eta, \omega_j)$ は処理の対象としている問題のパターン η が代表パターン ω_j を表している確率と解釈できることを要求している.

パターン変換機能を持つモデル構成作用素 T が各カテゴリ \mathfrak{C}_j について, 類似度 SM の値を保存することを要請している (ハ) は, パターンモデル $T\eta \in \Phi$ とその原パターン $\eta \in \Phi$ とが各カテゴリ $\mathfrak{C}_j \in \mathfrak{C}(J)$ の代表パターン $\omega_j \in \Omega \subset \Phi$ に対し, 同一の類似度 SM の値を備えていることを要求している.

以上で (イ), (ロ), (ハ) について解説が終わった. 上記の 3 性質 (正規直交性, 確率性, T -不変性) を満たす類似度関数 SM はこれまで多数指摘されているが [29], [32], [33], [36], [37], 次節では, このような SM を 1 つ構成しよう.

A5. 類似度関数 SM の 1 構成

A4 章の 3 性質 (イ), (ロ), (ハ) を満たす式 (A10) の写像 SM はこれまで多数構成されている. 本章では, 新たに, 1 例だけを構成しよう.

[例A1] (パターンモデル間ノルム距離に基づいた SM の構成)

容易に満たされる代表パターン集合 Ω 内の各元 ω の分離条件

$$\|T\omega_i - T\omega_j\| > 0 (i \neq j) \wedge [\forall j \in J, \|T\omega_j\| > 0] \quad (\text{A11})$$

の下で考えよう. 各正数 ε_j を, 不等式

$$\begin{aligned} \forall j \in J, 0 < \varepsilon_j < \min_{k \in J - \{j\}} \frac{\|T\omega_k - T\omega_j\|}{\|T\omega_k\| + \|T\omega_j\|} \\ \leq \frac{\|T\omega_i - T\omega_j\|}{\|T\omega_i\| + \|T\omega_j\|} \quad \text{if } i \neq j \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

を満たすように選び, 固定しておく. その後, 各 $s_j(\varphi)$ を,

(一) $\|T\varphi - T\omega_j\| < \varepsilon_j \cdot [\|T\varphi\| + \|T\omega_j\|]$ のとき

$$s_j(\varphi) = \varepsilon_j - \frac{\|T\varphi - T\omega_j\|}{\|T\varphi\| + \|T\omega_j\|}$$

(二) $\|T\varphi - T\omega_j\| \geq \varepsilon_j \cdot [\|T\varphi\| + \|T\omega_j\|]$ のとき

$$s_j(\varphi) = 0 \tag{A13}$$

と定義すると、この式 (A13) の類似性尺度 $s_j(\varphi)$ を用いて、A4章の3性質 (正規直交性, 確率性, T -不変性) を満たす式 (A10) の類似度関数 SM の1つは、

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} \frac{s_j(\varphi)}{\sum_{k \in J} s_k(\varphi)} \cdots \exists k \in J, \|T\varphi - T\omega_k\| < \varepsilon_k \cdot [\|T\varphi\| + \|T\omega_k\|] \text{ のとき} \\ b(\mathfrak{C}_j) \cdots \forall k \in J, \|T\varphi - T\omega_k\| \geq \varepsilon_k \cdot [\|T\varphi\| + \|T\omega_k\|] \text{ のとき} \end{cases} \tag{A14}$$

と定義されるものであることがわかる。 □

A6. 最大類似度 (認識) 法

パターン集合 Φ から式 (A1) のカテゴリの有限集合 $\mathfrak{C}(J)$ への多対1の写像としての認識写像 (recognizer)

$$RG : \Phi \rightarrow \mathfrak{C}(J) \tag{A15}$$

を設定するには、簡単には、最大類似度 (認識) 法 [29], [32], [37], つまり、A4章の類似度関数 SM の3性質 (直交性, 確率性, T -不変性) に注目して、

“パターン $\varphi \in \Phi$ について、

The pattern φ is then determined to belong to the same category to which the nearest ω_j belongs such that

$$\max_{k \in J} SM(T\varphi, \omega_k) = SM(T\varphi, \omega_j). \tag{A16}$$

という認識推断を行う機能を考えれば良い。

このとき、同値関係 $s \sim$ が、

$$\varphi \sim \eta \iff$$

$$\arg \max_{k \in J} SM(T\varphi, \omega_k) = \arg \max_{k \in J} SM(T\eta, \omega_k). \tag{A17}$$

と定義され、 $\eta \in \Phi$ を含む認識同値類と称されて良い $\{\eta\}_s$ は、

$$\{\eta\}_s \equiv \{\varphi \in \Phi \mid \varphi \sim \eta\} \subset \Phi \tag{A18}$$

と表されることに注意する。認識同値類 $\{\eta\}_s$ は、パターン $\eta \in \Phi$ と同一のカテゴリに帰属すると認識推断されるパターン $\varphi \in \Phi$ の集合である。A4章の、 SM の T -不変性より、写像 T による同値関係 $s \sim$ の保存則

$$\forall \eta \in \Phi, T\eta \in \{\eta\}_s \tag{A19}$$

が成立しており、パターン $\eta \in \Phi$ のモデル $T\eta \in \Phi$ に対し、 T により正規化がなされた形で、最大類似度法という認識の働きが達成されている。

なお、A3章の3性質①, ②, ③より、処理の対象とするパターン φ の集合 Φ は、

$$R^{++} \cdot \Phi \equiv \{a \cdot \varphi \mid \varphi \in \Phi\}$$

ここに、 R^{++} は正実数の集合 (A20)

$$T \cdot \Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \quad (\text{A21})$$

として、埋込性質

$$\{0\} \cup R^{++} \cdot \Phi \cup T \cdot \Phi \subset \Phi \quad (\text{A22})$$

を備えていなければならないが、この埋込性質を表わす式 (A22) を満たす Φ の逐次的構成法は、文献 [37] の第24部にあり、 Φ を求めた結果は次の通りである [39], [40] : 包含関係

$$\{0\} \subset \Omega \subset \Phi_B \subset \mathfrak{S} \quad (\text{A23})$$

を満たしており、パターンと判明している基本領域 (basic domain) Φ_B を導入して、

$$\Phi = R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B). \quad (\text{A24})$$

付録B (モデル構成作用素 T' の近似再帰的表現)

本付録Bでは、A3章の4性質①～④を満たすという意味でモデル構成作用素と呼ばれる式 (A9) の如き写像 T' を、以下の式 (B12) のごとく定義される式 (B13) の写像 S に

パターンモデルの差集合 $T' \cdot \Phi - T' \cdot \Phi_0$

上で近似的に帰着させよう。正確には、 S はA3章の4性質①～④を満たすある写像 T' の近似であって、 T' の構造を近似再帰的に明らかにしている表現 (定理B1) である。

B1. 写像 S の定義

処理の対象とする問題のパターン φ の基礎集合 (basic domain)

$$\Phi_B \equiv \{\varphi_k \mid k \in K\} \subset \Phi \subset \mathfrak{S} \quad (\text{B1})$$

について、式 (A7) の代表パターン集合 Ω に注目し、条件

$$0 \in \Phi_0 \subset \Phi \wedge [0 \notin \Phi_B \subset \Phi] \wedge [\forall k \in K, \varphi_k \notin \Phi_0] \wedge [\Omega \subset \Phi_B - \Phi_0] \quad (\text{B2})$$

を満たすパターン集合 Φ_0 を選定する。パターン $\varphi \in \Phi_0$ は比較的重要でないパターンである。A3章の4性質①～④を満たすという意味でモデル構成作用素と呼ばれるある1つの写像

$$T' : \Phi \rightarrow \Phi \quad (\text{B3})$$

を考えよう。

容易に満たされる分離条件

$$\|T'\varphi_i - T'\varphi_j\| > 0 \quad (i \neq j) \quad (\text{B4})$$

$$\wedge [\forall k \in K, \|T'\varphi_k\| > 0] \quad (\text{B5})$$

の下で考えよう。各正数 ε_j を、不等式

$$\forall j \in K, 0 < \varepsilon_j < \min_{k \in K - \{j\}} \|T'\varphi_k - T'\varphi_j\| \leq \|T'\varphi_i - T'\varphi_j\| \quad \text{if } i \neq j \quad (\text{B6})$$

を満たすように選び、固定しておく。式 (A21) の $T \cdot \Phi$ と同様に、 $T' \cdot \Phi_B$, $T' \cdot \Phi_0$ を定義し、中心が $T'\varphi_k$ で半径が ε_k の開球 (open sphere)

$$\begin{aligned} OS(T'\varphi_k; \varepsilon_k) \\ \equiv \{T'\varphi \mid \|T'\varphi - T'\varphi_k\| < \varepsilon_k, \varphi \in \Phi\} \subset T' \cdot \Phi \end{aligned} \quad (\text{B7})$$

を用意する。 $T' \cdot \Phi$ の、 $T' \cdot \Phi_0$ に関する差集合

$$T' \cdot \Phi - T' \cdot \Phi_0$$

$$\begin{aligned} &\equiv \{T'\varphi \in T \cdot \Phi \mid T'\varphi \in T \cdot \Phi \wedge T'\varphi \notin T \cdot \Phi_0\} \\ &\subset T' \cdot \Phi \subset \Phi \end{aligned} \tag{B8}$$

を導入する。ここに、式 (A22) と同様に、

$$\{0\} \cup R^{++} \cdot \Phi \cup T' \cdot \Phi \subset \Phi \tag{B9}$$

が満たされているとしている。

任意の $\varphi \in \Phi$ に対し、非負量

$$u_j(\varphi) = \begin{cases} \varepsilon_j - \|T'\varphi - T'\varphi_j\| \cdots \|T'\varphi - T'\varphi_j\| < \varepsilon_j \text{ のとき} \\ 0 \cdots \|T'\varphi - T'\varphi_j\| \geq \varepsilon_j \text{ のとき} \end{cases} \tag{B10}$$

を求め、その後、

$$v_j(\varphi) = \begin{cases} \frac{u_j(\varphi)}{\sum_{k \in J} u_k(\varphi)} \cdots \exists k \in K, \|T'\varphi - T'\varphi_k\| < \varepsilon_k \text{ のとき} \\ 0 \cdots \forall k \in K, \|T'\varphi - T'\varphi_k\| \geq \varepsilon_k \text{ のとき} \end{cases} \tag{B11}$$

を算出し、

$$S\varphi \equiv \sum_{j \in J} v_j(\varphi) \cdot T'\varphi_j \tag{B12}$$

と定義される写像

$$S : \Phi \rightarrow \Phi \tag{B13}$$

を導入する。

B2. 擬モデル構成作用素としてのS

次の定理B1の(ii)は、 $T' \cdot \Phi - T' \cdot \Phi_0$ 上で、式(B12)で定義される式(B13)の写像Sが十分な精度でA3章の4性質①～④を満たすモデル構成写像 T' を近似可能ことを指摘しており、系B1の③'において、 T' の代りに、Sを想定すると、写像Sはベキ等性をも近似的に満たすことになり、系B1、系B2を勘案すると、写像SはA3章の4性質①～④を近似的に満たす“擬モデル構成作用素”であると言えるものである。即ち、Sは T' 自身を用い、 T' の再帰構造をモデル集合 $T' \cdot \Phi - T' \cdot \Phi_0$ 上で近似的に明らかにしている写像と言えよう。

【定理B1】(モデル構成作用素 T' の近似的再帰定理)

A3章の4性質①～④を満たす式(B3)の1つのモデル構成作用素 T' について、包含仮定

$$(i) T' \cdot \Phi - T' \cdot \Phi_0 \subset \cup_{k \in K} OS(T'\varphi_k; \varepsilon_k)$$

の下では、次の(ii)、(iii)が成り立つ：

(ii) ($T' \cdot \Phi - T' \cdot \Phi_0$ 上での近似可能性)

$$\forall T'\varphi \in T' \cdot \Phi - T' \cdot \Phi_0, \|S\varphi - T'\varphi\| \leq \max_{k \in K} \varepsilon_k.$$

(iii) ($T' \cdot \Phi_0$ 上での零写像性)

$$\forall T'\varphi \in T' \cdot \Phi_0, S\varphi = 0.$$

[定理B1の系1]

式 (B12) で定義される式 (B13) の写像 S について、次の①' ~ ④' が成り立つ：

①' (零元不動点性) $\varphi = 0$ について $S\varphi = \varphi \in \Phi$.

②' (正定数倍不変性) $\forall \varphi \in \Phi, S(a \cdot \varphi) = S\varphi$

for any positive real number a .

③' (S による T' の吸収性) $\forall \varphi \in \Phi, S(T'\varphi) = S\varphi$.

④' (非零写像性) $\exists \varphi \in \Phi, S\varphi \neq 0$. □

[定理B1の系2] (Φ_B 上での S, T' の一致性と, S のべき特性)

式 (B12) で定義される式 (B13) の写像 S について、次の⑤', ⑥' が成り立つ.

⑤' $\forall \varphi \in \Phi_B, S\varphi = T'\varphi$.

⑥' $\forall \varphi \in \Phi_B, S(S\varphi) = S\varphi$.

(定理B1の証明)

(一) 包含仮定 (i) の下では, $T'\varphi \in T' \cdot \Phi - T' \cdot \Phi_0$ に対し,

$$\exists k \in K, T'\varphi \in OS(T'\varphi_k; \varepsilon_k) \tag{B14}$$

がいえ, $OS(T'\varphi_k; \varepsilon_k)$ の定義式 (B7) より

$$\|T'\varphi - T'\varphi_k\| < \varepsilon_k \tag{B15}$$

の成立がわかり, よって, $u_j(\varphi)$ の定義式 (B10) より, $u_k(\varphi) > 0$ がいえる. 従って, $v_k(\cdot)$ の定義式 (B11) より, $v_k(\varphi)$ の分母 $\sum_{i \in K} u_i(\varphi)$ は, 正の量, つまり,

$$\sum_{i \in K} u_i(\varphi) > 0 \tag{B16}$$

であることがわかる. このとき, 2式 (B15), (B16) より,

$$0 < v_k(\varphi) \leq 1 \tag{B17}$$

$$\wedge \sum_{i \in K} v_i(\varphi) = 1 \tag{B18}$$

である. よって, 式 (B13) の写像 S の定義式 (B12) を考慮すると, 表現

$$\begin{aligned} S\varphi - T'\varphi &= \sum_{j \in K} v_j(\varphi) \cdot T'\varphi_j - T'\varphi \\ &= \sum_{j \in K} v_j(\varphi) \cdot T'\varphi_j - \sum_{j \in K} v_j(\varphi) \cdot T'\varphi \quad \because \text{式 (B18)} \\ &= \sum_{j \in K} v_j(\varphi) \cdot (T'\varphi_j - T'\varphi) \end{aligned} \tag{B19}$$

を得, この表現式 (B19) に, ノルムに関する 3 角不等式

$$\left\| \sum_K b_k \cdot \eta_k \right\| \leq \sum_K |b_k| \cdot \|\eta_k\|$$

for any complex numbers b_k and any $\eta_k \in \mathfrak{E}$ (B20)

を適用すると, 式 (B19) より, 不等式

$$\|S\varphi - T'\varphi\| \leq \sum_{j \in K} v_j(\varphi) \cdot \|T'\varphi_j - T'\varphi\| \tag{B21}$$

が成り立つ.

更に、不等式 (B21) から、不等式 (B15) を考慮すると、

$$\begin{aligned}
 & \| S\varphi - T'\varphi \| \\
 & \leq \sum_{j \in K \wedge v_j(\varphi) > 0} v_j(\varphi) \cdot \varepsilon_j \quad \because \text{3式 (B17), (B11), (B10)} \\
 & \leq \sum_{j \in K} v_j(\varphi) \cdot \varepsilon_j \\
 & \leq [\max_{k \in K} \varepsilon_k] \cdot \sum_{j \in K} v_j(\varphi) \\
 & = [\max_{k \in K} \varepsilon_k] \quad \because \text{式 (B18)} \tag{B22}
 \end{aligned}$$

を得て、(ii) の成立が示された。

(二) 包含仮定 (i) の下では、 $T'\varphi \in T' \cdot \Phi_0$ に対し、

$$\forall k \in K, T'\varphi \notin OS(T'\varphi_k; \varepsilon_k) \tag{B23}$$

を得て、 $OS(T'\varphi_k; \varepsilon_k)$ の定義式 (B7) より、

$$\forall k \in K, \| T'\varphi - T'\varphi_k \| \geq \varepsilon_k \tag{B24}$$

が得られ、2式 (B10), (B11) より、

$$\forall k \in K, u_k(\varphi) = 0, v_k(\varphi) = 0 \tag{B25}$$

がわかる。 S の定義式 (B12) より、

$$S\varphi = 0 \tag{B26}$$

という (iii) が成り立つ。

(定理B1の系1, 系2の証明)

まず、 $0 \in \Phi_0$ であるから、 T' がA3章の①を満たすことより、 $\varphi = 0$ とすると、 $T'\varphi = 0$ を得て、(iii) より、 $S\varphi = 0$ がわかり、①' の成立がわかった。

次に、②' については、 T' がA3章の②を満たすことより、 a を任意の正定数として、2式 (B10), (B11) より、

$$\forall j \in K, u_j(a \cdot \varphi) = u_j(\varphi) \quad \therefore \quad v_j(a \cdot \varphi) = v_j(\varphi)$$

がわかり、 S の定義式 (B12) より、

$$S(a \cdot \varphi) = S\varphi$$

を得て、示された。

また、③' については、 T' がA3章の③を満たすことより、2式 (B10), (B11) より、

$$\forall j \in K, u_j(T'\varphi) = u_j(\varphi) \quad \therefore \quad v_j(T'\varphi) = v_j(\varphi)$$

がわかり、 S の定義式 (B12) より、

$$\forall \varphi \in \Phi, S(T'\varphi) = S(\varphi).$$

を得て、示された。

最後に、④' については、 T' がA3章の④を満たすことから、系2の⑤' を証明すれば、その成立は明らかである。系2の成立を示そう。

任意に、 $j \in K$ をとろう。

式 (B10) より、

$$u_j(\varphi_j) = \varepsilon_j > 0$$

$$\forall k \in K - \{j\}, u_k(\varphi_j) = 0 \quad \because \text{式 (B6)}$$

を得て、式 (B11) より、

$$\begin{aligned} v_j(\varphi_j) &= 1 \\ \forall k \in K - \{j\}, v_k(\varphi_j) &= 0 \end{aligned}$$

を得て、 S の定義式 (B12) より、

$$S\varphi_j = T'\varphi_j \neq 0 \quad \because \text{式 (B5)}$$

を得て、系 2 の成立が示された。

⑥' の証明は次の通りである。

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \Phi_B, S\varphi &= T'\varphi \quad \because \text{⑤'} \\ \Rightarrow \forall \varphi \in \Phi_B, S(S\varphi) &= S(T'\varphi) \\ &= S\varphi \quad \because \text{③'} \end{aligned}$$

□

付録C (最急降下法に基づくパターンモデル $T\varphi$ の構成)

本付録Cでは、ヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ における2.3節、2例3、4の最小自乗近似法の、可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} での一般化が研究される。

C1. 最小自乗近似法の一般化

1 実変数 u の関数 $f(u)$ が、2 条件

(条件C1) (無活動条件) $f(u) = 0$ if $u < 0$

(条件C2) (有活動条件) $0 = f(0) < f(u)$ for any $u > 0$

を満たすものとする。

可分なヒルベルト空間 ($\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ とは限らない) の元 ϕ_k の、式 (30) の組 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ は、1 次独立であるとする。パターン $\varphi \in \mathfrak{H}$ を、各 ϕ_k の一次結合式

$$\varphi - \sum_{k \in L} c_k \cdot \phi_k \tag{C1}$$

で近似するときの自乗ノルム誤差

$$e(\varphi; c_k, k \in L) \equiv \left\| \varphi - \sum_{k \in L} c_k \cdot \phi_k \right\|^2 \tag{C2}$$

の関数

$$\begin{aligned} E &\equiv E(c_k, k \in L) \\ &\equiv f\left(\left\| \varphi - \sum_{k \in L} c_k \cdot \phi_k \right\|^2\right) \\ &= f(e(\varphi; c_k, k \in L)) \end{aligned} \tag{C3}$$

を極小とする各1次結合係数 c_k を $c_k(\varphi)$ と書こう。例えば、従来の最小自乗近似法では、2条件C1, C2を満たす関数 $f(u)$ は、

$$f(u) = 0 \quad \text{if } u < 0, = u \quad \text{if } u \geq 0 \tag{C4}$$

と設定されることになる。

C2. 正規化1次展開係数 $c_k'(\varphi)$ と2つのパターンモデル $T\varphi$

前章で求められた各 $c_k(\varphi)$ の正規化

$$c_k'(\varphi) = \begin{cases} \frac{c_k(\varphi)}{\sup_{\ell \in L} |c_\ell(\varphi)|} \cdots \exists \ell \in L, c_\ell(\varphi) \neq 0 \text{ の場合} \\ 0 \cdots \forall \ell \in L, c_\ell(\varphi) = 0 \text{ の場合} \end{cases} \tag{C5}$$

を用意すると、次の2定理C1, C2の成立が容易に確かめられる.

[定理C1] (正定数倍規格化パターンモデル $T\varphi$ の構成定理)

$$T\varphi = \sum_{k \in L} c_k'(\varphi) \cdot \psi_k \tag{C6}$$

と定義される式 (A9) の写像 T は、付録A, A3章の4性質①~④を満たす. □

[定理C2] (3値化1次展開パターンモデル $T\varphi$ の構成定理)

各3値化1次展開係数 $d_k(\varphi)$ を、不等式

$$-1 < \varepsilon_k^- < 0 < \varepsilon_k^+ < +1 \tag{C7}$$

を満たす各閾値 ε_k^\pm の選定・固定の下で、

$$d_k(\varphi) = \begin{cases} -1 \cdots -1 \leq c_k'(\varphi) < \varepsilon_k^- \text{ のとき} \\ 0 \cdots \varepsilon_k^- \leq c_k'(\varphi) < \varepsilon_k^+ 0 \text{ のとき} \\ +1 \cdots \varepsilon_k^+ < c_k'(\varphi) \leq +1 \text{ のとき} \end{cases} \tag{C8}$$

と用意して、

$$T\varphi = \sum_{k \in L} d_k(\varphi) \cdot \psi_k \tag{C9}$$

と定義される式 (A9) の写像 T は、付録A, A3章の4性質①~④を満たす. □

C3. 最急降下法を適用しての、各実数値係数 $c_k(\varphi)$ の決定

本章では、添字集合 L が有限集合であり、各1次展開係数 $c_k(\varphi)$ が実数値である場合、ニューラルネットにおける誤差逆伝播学習 [31] で適用されている最急降下法 (method of steepest descent) を適用して、各 $c_k(\varphi)$ を逐次的に決定する手法が説明される。

$|K|$ は、集合に含まれる要素の総数

$\text{Re}[\dots]$ は、 \dots の実部

として、初期条件

$$c_k(\varphi; t)|_{t=0} = \frac{1}{|K|}, k \in L \tag{C10}$$

の下で、任意の $k \in L$ について、

$$c_k(\varphi; t + \Delta t) = c_k(\varphi; t) + \Delta c_k(\varphi; t) \tag{C11}$$

ここに,

$\Delta t > 0$ は十分小と選ばれており,

$$\Delta c_k(\varphi; t) = (\Delta t) \cdot \tau_k(t) \cdot 2 \cdot \left. \frac{df(u)}{du} \right|_{u = \|\varphi - \sum_{\ell \in L} c_\ell(\varphi; t) \cdot \psi_\ell\|^2} \cdot \operatorname{Re}[(\varphi - \sum_{\ell \in L} c_\ell(\varphi; t) \cdot \psi_\ell, \psi_k)] \quad (\text{C12})$$

を求めてゆくと, 各 $\tau_k(t) > 0$ が適切に選ばれていれば,

$$c_k(\varphi) = \lim_{t \rightarrow \infty} c_k(\varphi; t) \quad (\text{C13})$$

と求められる. 以上が, 最急降下法に基づく各 1 次展開係数 $c_k(\varphi)$ の求め方である.

以下に, その証明を行う.

以後, $c_k(\varphi; t)$ を簡単に, $c_k < t >$, 或いは, c_k と書くことがある.

式 (C3) の誤差 E に注意し, 微分方程式系 (再急降下法を採用した学習方程式系)

$$\frac{dc_k}{dt} = -\tau_k(t) \cdot \frac{\partial E}{\partial c_k}, \quad k \in L \quad (\text{C14})$$

を用意しよう. このとき, 不等式

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \sum_{k \in L} \frac{\partial E}{\partial c_k} \cdot \frac{dc_k}{dt} \\ &= -\sum_{k \in L} \tau_k(t) \cdot \left[\frac{\partial E}{\partial c_k} \right]^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{C15})$$

を得て, 式 (C3) の誤差 E は微分方程式系 (C14) の解曲線の上で決して増加しないことが判明するから, この微分方程式系 (C14) を解くこと, つまり, 十分時間 t が経過したときの c_k を, 式 (C13) のごとく, 求めればよいことになる.

結局, 初期条件式 (C10) の下で, 微分方程式系 (C14) の離散近似表現

$$\begin{aligned} c_k < t + \Delta t > \\ &= c_k < t > + (\Delta t) \cdot [-\tau_k(t)] \frac{\partial E}{\partial c_k} \end{aligned} \quad (\text{C16})$$

を解けばよい.

$$\Delta c_k < t > \equiv (\Delta t) \cdot [-\tau_k(t)] \frac{\partial E}{\partial c_k} \quad (\text{C17})$$

と置いたものが, 式 (C11) であり, 式 (C17) 内に登場している $\frac{\partial E}{\partial c_k}$ の具体的表現として,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial c_k} &= (-2) \cdot \left. \frac{df(u)}{du} \right|_{u = \|\varphi - \sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \psi_\ell\|^2} \cdot \operatorname{Re}[(\varphi - \sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \psi_\ell, \psi_k)] \end{aligned} \quad (\text{C18})$$

が以下の 2 式 (C19), (C20) で示され, 式 (C18) を式 (C17) に代入すると, 式 (C12) が得られる.

式 (C18) を求めよう.

$$\frac{\partial E}{\partial c_k} = \frac{df(u)}{du} \Big|_{u = \|\varphi - \sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \psi_\ell\|^2}.$$

$$\frac{\partial \|\varphi - \sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \psi_\ell\|^2}{\partial c_k}$$

∴ 式 (C3)

(C19)

であるが、 \bar{c}_k は c_k の複素共役であるが、仮定より、 $\bar{c}_k = c_k$ が成立していることに注意すると、

$$\frac{\partial \|\varphi - \sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \psi_\ell\|^2}{\partial c_k}$$

$$= \frac{\partial}{\partial c_k} (\varphi - \sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \psi_\ell, \varphi - \sum_{m \in L} c_m \cdot \psi_m)$$

$$= (\frac{\partial}{\partial c_k} [\varphi - \sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \psi_\ell], \varphi - \sum_{m \in L} c_m \cdot \psi_m) + (\varphi - \sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \psi_\ell, \frac{\partial}{\partial c_k} [\varphi - \sum_{m \in L} c_m \cdot \psi_m])$$

$$= (-\psi_k, \varphi - \sum_{m \in L} c_m \cdot \psi_m) + (\varphi - \sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \psi_\ell, -\psi_k)$$

$$= -2 \cdot [(\varphi - \sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \psi_\ell, \psi_k)]$$
(C20)

である。

C4. 2式 (14), (16) の成立について、

パターン φ から抽出される第 $k \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, k)$ を、

$$u(\varphi, k)$$

$$\equiv \text{式 (C5) の } c_k'(\varphi) \text{ 或いは、式 (C8) } d_k(\varphi)$$
(C21)

と定義すると、2定理C1, C2より、式(36)のパターンモデル $T\varphi$ が定義されるが、このとき、式(39)のように定義されるパターン集合 Φ 上の2項関係 \bullet は半順序関係である。

同値関係 $\varphi \sim \eta$ は、

$$\varphi \sim \eta \Leftrightarrow \forall \ell \in L, u(\varphi, \ell) = u(\eta, \ell)$$
(C22)

$$\Leftrightarrow T\varphi = T\eta$$
(C23)

と表され、 $\varphi \sim \eta$ なる2つのパターン φ, η は同一の特徴量の組を備えており (式 (C22))、2つのパターンモデル $T\varphi, T\eta$ は、一致すること (式 (C23)) がわかる。

次の命題C1が成立し、パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出される式(21)の各特徴量 $u(\varphi, k)$ を採用したとき、各 $c_k(\varphi)$ が ± 1 であるようなパターン ψ は、式 (39) の半順序関係 \bullet の極大要素であることを指摘している。

[命題C1] (半順序関係 \bullet に関する極大要素の存在)

$$\forall k \in L, c_k(\psi) \in \{-1, +1\}$$

であるような $\psi \in \Phi$ について、

$$\forall \varphi \in \Phi, \varphi \bullet \psi.$$

□

このとき、付録A, A3章の③より、式 (43) が成り立っていることは、式 (30) のパターン形状素 ψ_k の組 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ の1次独立性より直ちに確かめられる。

付録A, A3章の性質③の成立に注意すると, 式 (C23) から, 2式 (14), (16) の成立がわかる.

□

付録D (半順序関係 $\bullet\prec$ を保持する線形作用素の例 [25])

本付録Dでは, 主として, 半順序関係 $\bullet\prec$ に関し,

$$\forall \varphi \in \Phi, \varphi \bullet\prec A\varphi \tag{D1}$$

を満たす3種類の線形作用素 A が説明され (2 定理D1, D2), $\bullet\prec$ はあるユニタリ座標変換の族の下で不変であること (定理D3) が示される.

D1. 第 $k \in L$ 番目のユニタリ測度的不変量 $\mathfrak{F}_k(\varphi)$ とパターン形状素 ϕ_k

まず, 可分なヒルベルト空間 \mathfrak{H} での作用素 A の定義域 $Domain(A)$, 値域 $Range(A)$ を次のように導入する:

$$Domain(A) \equiv \{\varphi \in \mathfrak{H} \mid \|A\varphi\| < \infty\} \tag{D2}$$

$$Range(A) \equiv \{\eta \in \mathfrak{H} \mid \exists \varphi \in Domain(A), \eta = A\varphi\} \tag{D3}$$

□

自己共役作用素 H を用意する. H の関数としての第 $k \in L$ 番目の射影作用素 $\theta_k(H)$ の組 $\{\theta_k(H)\}_{k \in L}$ を, 3条件 (直交性, 非零性, 対称性)

$$\theta_k(H) \cdot \theta_\ell(H) =$$

$$\begin{cases} \theta_k(H) & \text{if } k = \ell \\ 0 & \text{if } k \neq \ell \end{cases} \tag{D4}$$

$$\forall k \in L, \exists \varphi (\neq 0) \in \mathfrak{H}, \theta_k(H)\varphi \neq 0 \tag{D5}$$

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H}, \forall \eta \in \mathfrak{H}, (\theta_k(H)\varphi, \eta) = (\varphi, \theta_k(H)\eta) \tag{D6}$$

を満たすように, 構成する.

非負実数値Borel可測関数 $f(\lambda)$ を用意する.

不等式

$$\forall \varphi \in Domain(f(H)), (f(H)\varphi, \varphi) \geq 0 \tag{D7}$$

を満たすという意味で半正值自己共役作用素と呼ばれる線形作用素 $f(H)$ が定義され, H の関数としての第 $k \in L$ 番目の半正值自己共役作用素

$$f_k(H) \equiv \theta_k(H) \cdot f(H) \tag{D8}$$

の組 $\{f_k(H)\}_{k \in L}$ が得られる.

$$Domain(f_k(H)) \subseteq Domain(f(H)) \tag{D9}$$

が成り立っており [25],

$$\mathfrak{F}_\ell(\varphi) \equiv \frac{(f_k(H)\varphi, \varphi)}{\sum_{k \in L} (\theta_k(H)\varphi, \varphi)} \tag{D10}$$

と定義されるユニタリ測度的不変量 [18], [19], [25] $\mathfrak{F}_k(\varphi)$ に関し, $f(H), \theta_k(H)$ の可換性 [1]

$$\begin{aligned} \varphi \in \text{Domain}(f(H)) \text{ ならば,} \\ \forall k \in L, \theta_k(H)\varphi \in \text{Domain}(f(H)) \wedge \\ f(H) \cdot \theta_k(H)\varphi = f_k(H)\varphi \end{aligned} \tag{D11}$$

が成り立っており、従って、3条件式 (D4)~(D6) を使うと、

$$\forall k \in L, \forall \varphi \in \text{Domain}(f(H)), 0 \leq \mathfrak{F}_k(\varphi) < \infty \tag{D12}$$

が成り立つ [1] が知られている。

H と可換なといわれる任意のユニタリ作用素 U に関し、

任意の $k \in L$ について、 $\varphi \in \text{Domain}(f_k(H))$ ならば、

$$U\varphi \in \text{Domain}(f_k(H)) \wedge f_k(H) \cdot U\varphi = U \cdot f_k(H)\varphi \tag{D13}$$

が成り立ち、

H と可換なといわれる任意のユニタリ作用素 U の下での不変性 (ユニタリ座標変換不変性 [19])

$$\forall \varphi \in \text{Domain}(f(H)), \mathfrak{F}_k(U\varphi) = \mathfrak{F}_k(\varphi) \tag{D14}$$

が成り立っている [19], [24], [25].

式 (A6) の第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j と 1 対 1 の対応関係にある式 (A7) の Ω の内の代表パターン ω_j のノルム規格化パターン $\omega_j \|\omega_j\|^{-1}$ を、確率条件式 (A8) を満たす \mathfrak{C}_j の生起確率 $p(\mathfrak{C}_j)$ で平均して得られるパターン (平均化パターン)

$$\xi \equiv \sum_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) \cdot \omega_j \cdot \|\omega_j\|^{-1} \tag{D15}$$

を導入し、各パターン形状素 ϕ_k を、次のように定義する：

3条件

$$\xi (\neq 0) \in \text{Domain}(f(H)) \tag{D16}$$

$$\forall k \in L, \theta_k(H)\xi \neq 0 \tag{D17}$$

$$\forall k \in L, 0 < \mathfrak{F}_k(\xi) < \infty \tag{D18}$$

の下で、複素定数 b_k の組 $\{b_k\}_{k \in L}$ を導入し、

$$\begin{aligned} \phi_k \\ \equiv \frac{b_k \cdot \theta_k(H)\xi}{\left\| \sum_{k \in L} \theta_k(H)\xi \right\|} \end{aligned} \tag{D19}$$

ここに、

$$[\forall k \in L, b_k \neq 0] \wedge \sup_{k \in L} |b_k|^2 < \infty \tag{D20}$$

□

手書き漢字、日本語単独母音に関するパターン情報処理 (パターン構造の再生、パターンの認識、パターン系列の連想) に関し、使用された $H, \theta_k(H), f(\lambda), \omega_j, p(\mathfrak{C}_j), \phi_k$ の諸例がある [23], [24], [26]~[29], [36].

尚、文献 [18]~[29], [35], [36] では、恒等条件

$$\sum_{k \in L} \theta_k(H) = I \text{ (恒等作用素)} \tag{D21}$$

が満たされている場合を想定しているが、上述の諸定義では、この恒等条件はパターン φ の大局的構造の抽出場面などにおいて必ずしも必要ではないこと [25], [38] が指摘されている。

D2. 特徴抽出写像 u

以後、処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ を、少なくとも、

$$\Phi \subseteq \text{Domain}(f(H)) \quad (\text{D22})$$

と選ぶ。式 (D14) で示されるユニタリ座標変換不変性を備えている式 (D10) の各測度的不変量 $\mathfrak{F}_k(\varphi)$ を使って、第 $k \in L$ 番目の規格化比測度的不変量 [24] と称される 1 より大きくない非負量

$$\mathfrak{G}_\ell(\varphi) \equiv$$

$$\begin{cases} [\mathfrak{F}_\ell(\varphi)/\{|b_\ell|^2 \cdot \mathfrak{F}_\ell(\xi)\}]/[\sum_{k \in L} \mathfrak{F}_k(\varphi)/\{|b_k|^2 \cdot \mathfrak{F}_k(\xi)\}] \cdots \exists k \in L, \mathfrak{F}_k(\varphi) > 0 \text{ の場合} \\ 0 \cdots \forall k \in L, \mathfrak{F}_k(\varphi) = 0 \text{ の場合} \end{cases}$$

(D23)

を導入し、パターン $\varphi \in \Phi \subseteq \text{Domain}(f(H))$ から抽出される第 $\ell \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, \ell)$ を、

$$u(\varphi, \ell) \equiv [\mathfrak{G}_\ell(\varphi)]^{1/2} \quad (\text{D24})$$

と定義する。そうすれば、確率条件

$$\forall k \in L, 0 \leq u(\varphi, k)^2 \wedge \sum_{k \in L} u(\varphi, k)^2 \in \{0, 1\} \quad (\text{D25})$$

を満たす特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \rightarrow R^+ \text{ (非負実数の集合)} \quad (\text{D26})$$

が用意出来たことがわかる。

D3. パターン集合 Φ 上の半順序関係 $\bullet\blacktriangleleft$

パターン集合 Φ 上に、閾値 $th(k)$ の組 $\{th(k)\}_{k \in L}$ を用意・固定し、

2つのパターン $\varphi, \eta \in \Phi \subset \mathfrak{S}$ について、

$$\varphi \bullet\blacktriangleleft \eta \Leftrightarrow$$

$$\forall k \in L, u(\eta, k)^2 \leq u(\varphi, k)^2 \leq th(k)$$

$$\vee th(k) \leq u(\varphi, k)^2 \leq u(\eta, k)^2$$

(D27)

という関係 $\bullet\blacktriangleleft$ を導入すると、 $\bullet\blacktriangleleft$ は半順序関係である [38].

D4. パターンモデル $T\varphi$

2式 (D19), (D24) での各パターン形状素 ϕ_k , 各特徴量 $u(\varphi, k)$ を使えば、付録A, A2章の4性質①~④を満たす式 (36) で示される式 (A9) のモデル構成写像 T が得られる (文献 [25] の定理1を参照).

式 (D19) の各パターン形状素 ϕ_k について、不動点方程式

$$\forall k \in L, T\phi_k = \phi_k \quad (\text{D28})$$

が成り立っているが [25], このとき、

式 (36) の写像 T の形式を考慮すると、式 (D28) から、

$$u(\phi_k, \ell) = 1 \text{ if } k = \ell, = 0 \text{ if } k \neq \ell \quad (\text{D29})$$

を得て、2.3節の命題3が成り立ち、各 ϕ_k は式 (D27) の半順序関係 $\bullet\blacktriangleleft$ に関する極大要素であることがわかる。

D5. 半順序関係 \bullet の保存変換

付録Fの拡散方程式 (F9) に注目し、その一般化としての、以下の方程式 (D30) について、先ず、考えよう。

初期条件 $\varphi_t|_{t=0} = \varphi \in \Phi$ の下での、拡散方程式

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial t} = -2^{-1} \cdot f(H) \varphi_t \tag{D30}$$

の解 φ_t は、自己共役作用素 H の関数としての、1パラメータ $t (\geq 0)$ の作用素値指数関数

$$B_t \equiv \exp(-2^{-1} \cdot t \cdot f(H)) \tag{D31}$$

を導入すると、

$$\varphi_t = B_t \varphi \tag{D32}$$

と表される。ここに、作用素 G の指数関数

$$\begin{aligned} \exp(= t \cdot G) \\ \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)} \cdot (-t \cdot G)^n \quad (0 \leq t) \end{aligned} \tag{D33}$$

が導入されている。

同様に、式 (F8) の $f_\ell(H)$ の指数関数

$$B_t(\ell) \equiv \exp(-2^{-1} \cdot t \cdot f_\ell(H)) \tag{D34}$$

を用意すると、同様な拡散方程式

$$\begin{aligned} \forall \ell \in L, \frac{\partial B_t(\ell) \varphi}{\partial t} \\ = -2^{-1} \cdot f_\ell(H) (B_t(H) \varphi) \end{aligned} \tag{D35}$$

が成り立つ。

$f(H)$ 、各 $f_\ell(H)$ は共に半正值自己共役作用素であるから、2式 (D31)、(D34) の B_t 、各 $B_t(\ell)$ は、不等式 [1]

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \text{Domain}(g(H)), \\ |(g(H)\varphi, \varphi)| \leq \sup_{\lambda} |g(\lambda)| \cdot (\varphi, \varphi) \end{aligned} \tag{D36}$$

からわかるように、任意の $t (\geq 0)$ について有界作用素であり、然も、半正值自己共役作用素であることに注意しておく。

[定理D1] ($\sqrt{f_\ell(H)}$, $f_\ell(H)$ の半順序保存定理)

任意の $\varphi \in \Phi$ について、

$$\begin{aligned} th(\ell) \leq u(\varphi, \ell)^2 \leq 1 \wedge \\ [\forall k \in L - \{\ell\}, 0 \leq u(\varphi, k)^2 \leq th(k)] \end{aligned} \tag{D37}$$

のとき、

$$\varphi \bullet \sqrt{f_\ell(H)} \varphi \bullet f_\ell(H) \varphi. \tag{D38}$$

(証明) 文献 [67] の定理1である。□

[定理D2] ($B_t(\ell)$ の半順序保存定理)

恒等条件式 (D21) が成立しているように、各 $\theta_k(H)$ が選ばれているとしよう。ならば、

$$\forall k \in L, \mathfrak{F}_k(\varphi) > 0 \tag{D39}$$

を満たす任意の $\varphi \in \Phi$ について、

$$0 < u(\varphi, \ell)^2 \leq th(\ell) \wedge [\forall k \in L - \{\ell\}, th(k) \leq u(\varphi, k)^2 < 1] \quad (D40)$$

であれば,

$$\forall \ell \in L, \forall t (0 \leq t < \infty), \varphi \bullet B_t(\ell) \varphi. \quad (D41)$$

(証明) 文献 [67] の定理 2 である. \square

定理 D2 では, 恒等条件式 (D21) が成立しているように, 各 $\theta_k(H)$ が選ばれているとしている. この恒等条件式 (F21) について検討しておこう. 各射影作用素 $\theta_k(H)$ は理想帯域フィルタであって [18]~[29], [36], $\{\theta_k(H)\}_{k \in L}$ は理想帯域フィルタの組である.

$$\varphi' \equiv \sum_{k \in L} \theta_k(H) \varphi \quad (D42)$$

と置けば, φ' は φ の帯域制限パターンである.

D6. 半順序関係 \bullet のユニタリ座標変換不変性

次の定理 D3, (ii) は式 (D14) の応用であり, 付録 A の最大類似度認識法がユニタリ座標変換不変性を備えている事実を指摘している.

[定理 D3] (帯域制限パターン φ' , 並びに, ユニタリ座標変換不変パターン $U\varphi$ のモデル $T\varphi'$, $TU\varphi$ の半順序保存定理)

式 (D19) の各パターン形状素 ψ_k と, 式 (D24) の各特微量 $u(\varphi, k)$ とを採用して得られる式 (36) のパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ について考えよう. 任意の $\varphi \in \text{Domain}(f(H))$ について, 次の (i), (ii) が成り立つ:

(i) パターンモデル $T\varphi$ の帯域制限性)

式 (D42) の φ' に関し,

$$\begin{aligned} \forall k \in L, \mathfrak{F}_k(\varphi') &= \mathfrak{F}_k(\varphi) \\ \therefore \varphi' \sim \varphi \quad \therefore T\varphi' &= T\varphi \end{aligned}$$

を得, よって,

$$\varphi \bullet \eta \Rightarrow \varphi' \bullet \eta \wedge \varphi \bullet \eta' \wedge \varphi' \bullet \eta' \quad (D43)$$

(ii) (パターンモデル $T\varphi$ のユニタリ座標変換不変性)

H と可換な任意のユニタリ作用素 U に関し,

$$U\varphi \sim \varphi \quad \therefore TU\varphi = T\varphi$$

を得, よって,

$$\varphi \bullet \eta \Rightarrow U\varphi \bullet \eta \wedge \varphi \wedge U\eta \wedge U\varphi \bullet U\eta \quad (D44)$$

(証明) 文献 [67] の定理 3 である. \square

上述の定理 D3 からわかるように, 定理 D2 は, $\varphi \in \Phi$ の帯域制限パターン $\varphi' \in \Phi$ についても同様に成立し, 実質, 定理 D1 と同様に, 恒等条件式 (D21) は制限とはならないことがわかる.

D7. 2 式 (14), (16) の成立について

半順序関係 \bullet の定義式 (D27), 並びに, 各特微量 $u(\varphi, \ell)$ の定義式 (D24) からわかるように, 同値関係 $\varphi \sim \eta$ は, 2 式 (C22), (C23) のごとく, 表され, $\varphi \sim \eta$ なる 2 つのパターン φ, η は同一の特微量の組を備えており (式 (C22)), 2 つのパターンモデル $T\varphi, T\eta$ は, 一致すること (式 (C23)) がわかる. このとき, 付録 A, A3 章の ③ より, 式 (43) が成り立っていることは, 式 (D19) のパター

ン形状素 ϕ_k の組 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ の1次独立性より直ちに確かめられる.

付録A, A3章の性質③の成立に注意すると, 式 (C23) から, 2式 (14), (16) の成立がわかる.

□

付録E (連続写像が完備束上で必ず最小不動点を持つことの解説)

処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ に2.1.1項での半順序 $\bullet\blacktriangleleft$ を導入して得られた Φ は, 正確には,

$$\langle \Phi, \bullet\blacktriangleleft \rangle \tag{E1}$$

と表記されねばならないが, 簡単に, Φ と書く場合もある.

半順序集合と呼ばれる式 (E1) の $\langle \Phi, \bullet\blacktriangleleft \rangle$ は, その任意の部分集合 $\Psi (\subseteq \Phi)$ が上限 $\Delta\Psi$ を持つと仮定する. つまり, 完備束 (complete lattice) と仮定する. ちなみに, 束とは, 上限が任意の有限な部分集合に対し存在するような半順序集合である. 半順序関係

$$\forall \varphi \in \langle \Phi, \bullet\blacktriangleleft \rangle, b \bullet\blacktriangleleft \varphi \bullet\blacktriangleleft t \tag{E2}$$

を満たすような

$$\text{底要素 } b \equiv b_\varphi \equiv \text{bottom}(\Phi) \in \Phi \tag{E3}$$

$$\text{頂要素 } t \equiv t_\varphi \equiv \text{top}(\Phi) \in \Phi \tag{E4}$$

の存在をも仮定する. ϕ を空集合の意として,

$$b \equiv \Delta\phi, t \equiv \Delta\Phi \tag{E5}$$

と表される.

完備束 Φ の部分集合 $\Psi (\subseteq \Phi)$ が有向集合 (directed set) であるとは,

任意の有限部分集合 $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \subset \Psi$ について,

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \varphi_i \bullet\blacktriangleleft \eta \tag{E6}$$

であるような $\eta \in \Psi$ が存在すること

である.

完備束 Φ 上での式 (54) の写像 S が連続写像 (continuous mapping) であるとは,

任意の有向集合 $\Psi (\subseteq \Phi)$ に対し, 等式

$$S(\Delta\Psi) = \Delta(S\Psi) \tag{E7}$$

$$\text{ここに, } S\Psi \equiv \{S\psi \mid \psi \in \Psi\} \tag{E8}$$

が成り立つこと

である.

さて, $\varphi, \eta \in \Phi$ に対し, $\varphi \bullet\blacktriangleleft \eta$ が成り立つとする. $\Psi \equiv \{\varphi, \eta\} \subset \Phi$ とすると, この Ψ は明らかに, 有向集合であり, 式 (54) の写像 S が連続であると仮定すると,

$$S\varphi \bullet\blacktriangleleft [S\varphi \Delta S\eta] \tag{E9}$$

$$= S(\varphi \Delta \eta) \quad \because \text{の連続性} \tag{E10}$$

$$= S\eta \quad \because \text{2.1.1項の命題1} \tag{E11}$$

が得られ, 次の補助定理E1の成立がわかった.

[補助定理E1] (連続写像 $S : \Phi \rightarrow \Phi$ の単調性) [6]

写像 $S : \Phi \rightarrow \Phi$ が連続であれば,

$$\varphi \bullet \ll \eta \Rightarrow S\varphi \bullet \ll S\eta \quad \square$$

任意の $\varphi, \eta \in \Phi$ に対し, $\varphi \bullet \ll \eta \Rightarrow S\varphi \bullet \ll S\eta$ が成り立つとき, 写像 S は単調 (monotonic) であるという. 補助定理E1は, 完備束 Φ では, 写像 S が連続であれば, 単調であることを指摘している.

上の補助定理E1を適用して, 連続写像 $S : \Phi \rightarrow \Phi$ に最小不動点が存在することを保証するだけでなく, それを求める構成的に方法を与えている次の定理E1が証明される.

[定理E1] (完備束 Φ 上での, 連続写像の最小不動点定理) [6]

Φ を完備束とし, 写像 $S : \Phi \rightarrow \Phi$ を連続と仮定すると, 不動点方程式

$$S\varphi = \varphi \quad (E12)$$

を満たす不動点 $\varphi \in \Phi$ の内で, 最小のもの $\varphi_{\min} \in \Phi$ が存在し, それは,

$$\varphi_{\min} = \Delta\mathcal{P} \in \Phi \wedge S\varphi_{\min} = \varphi_{\min} \quad (E13)$$

と与えられる. ここに, 鎖の性質

$$b \bullet \ll Sb \bullet \ll S^2b \bullet \ll \dots \bullet \ll S^n b \equiv S(S^{n-1}b) \bullet \ll \dots \quad (E14)$$

が成立しており,

$$S^0\psi \equiv \psi, S^n\psi \equiv S \cdot S^{n-1}\psi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (E15)$$

として, 部分集合 $\mathcal{P} (\subset \Phi)$ は,

$$\mathcal{P} \equiv \{b, Sb, S^2b, \dots, S^n b, \dots\} \quad (E16)$$

と定義されている. \mathcal{P} は有向集合であることに注意する. □

定理E1の証明の概要は次の通りである.

補助定理E1を適用して得られる半順序関係

$$b \bullet \ll Sb \quad (E17)$$

に補助定理E1を複数回適用して, 式 (E14) が得られ, 写像 $S : \Phi \rightarrow \Phi$ の連続性より, 式 (E16) の \mathcal{P} について,

$$\Delta\mathcal{P} = \Delta(S\mathcal{P}) \quad (E18)$$

が成立することがわかる. 写像 S が連続であることにより, \mathcal{P} が有向集合であることに注意すると, 式 (E7) が成り立っており, 式 (E18) は式 (E13) の成立 $\Delta\mathcal{P} = \Delta(S\mathcal{P}) = S(\Delta\mathcal{P})$ を意味する.

式 (E13) の φ_{\min} の最小性を示そう. 不動点方程式 (E12) を満たす φ に対し, 補助定理E1を複数回適用して

$$S^n b \bullet \ll \varphi \Rightarrow S^{n+1} b \bullet \ll (S\varphi) = \varphi \quad (E19)$$

の成立がわかり, よって, φ_{\min} の最小性

$$\varphi_{\min} (= \Delta\mathcal{P}) \bullet \ll \varphi \quad (E20)$$

が得られることがわかる. □

半順序集合 Φ の鎖 (chain) $\mathcal{P} (\subseteq \Phi)$ とは, \mathcal{P} が式 (60) を満たす高々可算個の元 ψ_t から成る集合

$$\mathcal{P} = \{\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_t, \dots\} \quad (E21)$$

であることをいう. 明らかに, 鎖は有向集合である. 鎖 \mathcal{P} の上限 $\Delta\mathcal{P}$ は, 式 (60) が成立しているから, 2.1.1項の命題1を考慮すれば,

$$\Delta\mathcal{P} = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t \quad (E22)$$

と表すことができ, \mathcal{P} の極限と呼ばれることが多い. 極限の概念は, 無限の対象へ, 有限の対象によっ

て近似しながら近づいていくことを可能にするものである。半順序集合 Φ が、2条件

(a#) Φ の任意の鎖 Ψ は上限 $\Delta\Psi \in \Phi$ を持つ

(b#) Φ には最小の要素 (minimum element) $b \in \Phi$ がある、つまり、

$$\exists b \in \Phi, \forall \varphi \in \Phi, b \ll \varphi \tag{E23}$$

を満たすとき、 Φ は完全半順序 (complete partial order) を備えている集合であるという。完全半順序集合 Φ に対しては、式 (E2) の t は必ずしも存在しなくてもよいことに注意する。尚、条件 (b#) での最小要素 b は本論文で導入している半順序 \ll に関しては、必ず存在する。例えば、2.3節の例1では、式 (22) からわかるように、

$$\forall x \in M, (T\eta)(x) = h(x) \tag{E24}$$

を満たすパターン η が最小要素 b である。

Φ を完全半順序集合とすると、式 (54) の写像 $S : \Phi \rightarrow \Phi$ が連続であるとは、任意の鎖 Ψ に対して、式 (E7) が成り立つことである。

次の定理E1の系1の成立は、定理E1の証明を振り返ると、明らかである。

[定理E1の系1] (完全半順序集合 Φ 上での、連続写像の最小不動点定理) [6]

完全半順序集合 Φ における連続写像 $S : \Phi \rightarrow \Phi$ は必ず最小不動点を持つ。

□

付録F (3.3節の5条件 (あ)～(お) を満たす2写像 K, B の2構成例)

本付録Fでは、3.3節の5条件 (あ)～(お) を満たす2写像 K, B の2構成例が説明される。

F1. 構成例1 (ユニタリ作用素, 拡散方程式)

式 (50) の写像 K を、ある自己共役作用素 H と可換なユニタリ作用素 U に注目し、

$$K\varphi = U \frac{\varphi}{\|\varphi\|} \quad \text{for any } \varphi \in \mathfrak{H}$$

$$\text{ここに、} \frac{\varphi}{\|\varphi\|} = 0 \quad \text{if } \varphi = 0 \tag{F1}$$

と置く。条件 (あ)、(い) の成立は直ちに判明する。条件 (お) の成立は、式 (D24) の特徴量 $u(\varphi, \ell)$ を採用し、式 (D27) の半順序関係 \ll を設定すれば、付録D、定理D3の (ii) からわかる。

式 (50) の写像 B を以下の式 (F2) の如く設定すると、条件 (う) の成立は直ちに判明する。問題は、条件 (え) が成立するかどうかであるが、条件 (え) の否定は明らかに成立しない。

画像の鮮明化 (image enhancement) 効果のある画像復元機能を、式 (53) の写像 $T_{\min}(K, B)$ に備えさせることを考えよう。

ガウス形核関数を持つ積分作用素によって少量ボカされた画像 $\varphi(x)$ から原画像 $\psi(x)$ を復元するには、 c を経験的に決められた定数として、

$$\psi(x) \equiv (B\varphi)(x) = \varphi(x) - c \cdot \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) \tag{F2}$$

とすればよいこと [11], [12] に注意する。このボカされた $\psi(x)$ は、拡散方程式 (diffusion equation)

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x)$$

$$\text{初期条件 } \varphi(x)|_{t=0} = \psi(x) \quad (\text{F3})$$

に従っているとするとすれば,

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \psi(y)$$

$$\text{ここに, } \sigma^2 = t \in R^{++} \text{ (非負実数の集合)} \quad (\text{F4})$$

と表される [1]. 写像 Q を,

$$\begin{aligned} (Q\varphi)(x) \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2}\right) \cdot \varphi(y) \quad \text{for any } \varphi \in \mathfrak{H} \end{aligned} \quad (\text{F5})$$

とおく. Q_t を $Q_t \equiv Q^t$ (Q の t 乗) とおけば, R を実数の集合 (1次元直線) とし, 可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(R; dx)$ での, 半正值自己共役作用素

$$G \equiv [\sqrt{-1} \cdot \frac{d}{dx}]^2 = -\frac{d^2}{dx^2} \quad (\text{F6})$$

を用意すると, $Q_t\varphi$ は,

$$(Q_t\varphi)(x) = [\exp(-2^{-1} \cdot t \cdot G)\varphi](x) \quad (\text{F7})$$

と表現され [1], 具体的には,

$$\begin{aligned} (Q_t\varphi)(x) \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \cdot \varphi(y) \quad \text{for any } \varphi \in \mathfrak{H} \end{aligned} \quad (\text{F8})$$

と表される. $Q_t\varphi$ は, 拡散方程式

$$\frac{\partial (Q_t\varphi)(x)}{\partial t} = -2^{-1} \cdot G (Q_t\varphi)(x) \quad (\text{F9})$$

を満たしている.

パターン整形化方程式 (1) の最小解である式 (65) の $T_{\min}(K, B)\varphi$ の意味は, 式 (59) の ψ_t から詳細に検討されなければならないが, 原パターン φ を式 (F1) でのユニタリ作用素 U で変換しながら, 式 (F2) と同様な画像鮮明化機能の実現にあると見てよいだろう.

F2. 構成例 2 (モデル構成作用素 T , 部分空間法)

付録A, A3章の4性質①~④を満たす2つのモデル構成作用素 T, T' を, 非可換性

$$\exists \varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}, T \cdot T'\varphi \neq T' \cdot T\varphi \quad (\text{F10})$$

を満たすように用意し, 先ず, 式 (50) の写像写像 K を,

$$K\varphi = T\varphi \quad \text{for any } \varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H} \quad (\text{F11})$$

とおく. 式 (50) の写像写像 B を, 以下の式 (F12) のように選定してみよう.

第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j の代表パターン $\omega_j \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ の, 付録A, A3章の式 (A7) の組 Ω を用意して,

$$B\varphi \equiv \begin{cases} 0 \cdots T'\varphi = 0 \text{ のとき} \\ \sum_{j \in J} \text{prob}\{\mathfrak{C}_j/T'\varphi\} \cdot T\omega_j \cdots T'\varphi \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{F12})$$

と与えてみよう。式 (F12) 内の $\text{prob}\{\mathfrak{C}_j/T'\varphi\}$ は、
 パターンモデル $T'\varphi$ がカテゴリ \mathfrak{C}_j に帰属する条件つき確率
 であり、以下の3式 (F21), (F27), (F29) での $\text{prob}\{T\varphi \in \text{CSS}(j)\}$ を使って、式 (F12) 内の
 $\text{prob}\{\mathfrak{C}_j/T'\varphi\}$ は、

$$\text{prob}\{\mathfrak{C}_j/T'\varphi\} = \text{prob}\{T\varphi \in \text{CSS}(j)\} \quad (\text{F13})$$

と与えられる。

3.3節の4条件 (あ), (い), (う) の成立は付録A, A3章の4性質①~④などから容易にわかる。
 条件 (お) の成立は式 (16) において η の代りに $T\varphi$ を考えれば、付録A, A3章の性質③から明らか
 である。残っている問題は条件 (え) が成立するかどうかであるが、

$$BK\varphi = BT\varphi = \begin{cases} 0 \cdots T'T\varphi = 0 \text{ のとき} \\ \sum_{j \in J} \text{prob}\{\mathfrak{C}_j/T'T\varphi\} \cdot T\omega_j \cdots T'T\varphi \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{F14})$$

に注意すると、条件 (え) の否定は明らかに成立しない。

パターン整形化方程式 (1) の最小解である式 (65) の $T_{\min}(K, B)\varphi$ の意味は、式 (59) の ψ_t から
 詳細に検討されなければならないが、原パターン φ のモデル $T\varphi$ を、 T と非可換な T' を用い、ある1
 つのカテゴリ \mathfrak{C}_j の代表パターン $\omega_j \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ のモデル $T\omega_j \in T\Phi \subset \mathfrak{H}$ へ近づける機能の実現にあると
 見てよいだろう。

部分空間法的思想 [15], [19] に基づき、3式 (F21), (F27), (F29) の導出について、説明しよう。

1. 直接法 [式 (F21) の導出]

I.1 完全直交系 $\{\phi_k'\}_{k \in K}$ と射影作用素 P_k

(一) (完全性) $\forall k \in K, (\varphi, \phi_k') = 0 \Rightarrow \|\varphi\| = 0$

(二) (直交性) $(\phi_k', \phi_\ell') = 0 (k \neq \ell)$

を満たす完全直交系 $\{\phi_k'\}_{k \in K}$ を用意しよう。

$$P_k\varphi \equiv (\varphi, \phi_k' \cdot \|\phi_k'\|^{-1}) \cdot \phi_k' \cdot \|\phi_k'\|^{-1} \quad \text{for any } \varphi \in \mathfrak{H} \quad (\text{F15})$$

と定義される線形作用素 P_k は射影作用素であり、

(三) (ベキ等性) $\forall \varphi \in \mathfrak{H}, P_k P_k \varphi = P_k \varphi$

(四) (対称性) $\forall \varphi, \forall \eta \in \mathfrak{H}, (P_k \varphi, \eta) = (\varphi, P_k \eta)$

(五) (ノルム有界性) $\forall \varphi \in \mathfrak{H}, \|P_k \varphi\| \leq \|\varphi\|$

が成立している。フーリエ展開 [1], [2]

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H}, \sum_{k \in K} P_k \varphi = \varphi \quad (\text{F16})$$

が成立している。

I.2 パターン φ が部分的に $\text{CSS}(j)$ の状態にあることの確率 $\text{prob}\{\varphi \in \text{CSS}(j)\}$

非交差条件

$$K(i) \cap K(j) = \phi \quad (i \neq j) \quad (\text{F17})$$

を満たすとは限らないような、添字 k の集合 K の、付録A, A2章の式 (A6) のカテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J)$ に関する有限分割

$$\forall j \in J, K(j) (\neq \phi) \cup_{i \in J} K(i) \subseteq K \quad (\text{F18})$$

を用意し、第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j の持つ典型的な諸性質を少なくとも反映した閉部分空間 (closed subspace)

$$\text{CSS}(j) \equiv \{\varphi \in \mathfrak{H} \mid \varphi = \sum_{k \in K(j)} P_k \eta \mid \eta \in \mathfrak{H}\} \quad (\text{F19})$$

を定義する。パターン φ が部分的に ψ_k' の状態にあることの本規格化確率 [18], [19], [25]

$$s_k(\varphi) \equiv (P_k \varphi, \varphi) = |(\varphi, \psi_k' \cdot \|\psi_k'\|^{-1})|^2 \quad (\text{F20})$$

を導入すると、パターン φ が部分的に $\text{CSS}(j)$ の状態にあることの本規格化確率 $\text{prob}\{\varphi \in \text{CSS}(j)\}$ は、

$$\begin{aligned} & \text{prob}\{\varphi \in \text{CSS}(j)\} \\ &= \frac{\sum_{k \in K(j)} s_k(\varphi)}{\sum_{j \in J} \sum_{k \in K(i)} s_k(\varphi)} \end{aligned} \quad (\text{F21})$$

と表されることになる。

式 (F20) の $s_k(\varphi)$ が本規格化確率であると解釈できる根拠は、 $s_k(\varphi)$ が

$$s_k(\varphi) = (P_k P_k \varphi, \varphi) \quad \because \quad (\text{三})$$

$$= (P_k \varphi, P_k \varphi) \quad \because \quad (\text{四})$$

$$= \|P_k \varphi\|^2 \quad (\text{F22})$$

とも再表現されこと、並びに、更に、フーリエ分解式 (F16) を、

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathfrak{H}, \varphi &= \sum_{k \in K} P_k \varphi \\ &= \sum_{k \in K(j)} P_k \varphi + \sum_{\ell \in K-K(i)} P_\ell \varphi \end{aligned} \quad (\text{F23})$$

と2つの和に直交分解し、 $\|\varphi\|^2$ を計算してみると、

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^2 &= (\varphi, \varphi) \\ &= \left(\sum_{k \in K(j)} P_k \varphi + \sum_{\ell \in K-K(i)} P_\ell \varphi, \varphi \right) \\ &= \left(\sum_{k \in K(j)} P_k \varphi, \varphi \right) + \left(\sum_{\ell \in K-K(i)} P_\ell \varphi, \varphi \right) \\ &= \sum_{k \in K(j)} (P_k \varphi, \varphi) + \sum_{\ell \in K-K(i)} (P_\ell \varphi, \varphi) \\ &= \sum_{k \in K(j)} s_k(\varphi) + \sum_{\ell \in K-K(i)} s_\ell(\varphi) \end{aligned} \quad (\text{F24})$$

を得ることの2つの理由から、明らかであろう。

II. 間接法1 [式 (F27), (F29) の導出]

式 (F22) を考慮し, 式 (F24) を移項してみると,

$$\begin{aligned} & \|\varphi\|^2 - \sum_{k \in K(j)} \|P_k \varphi\|^2 \\ &= \sum_{k \in K-K(j)} \|P_k \varphi\|^2 \end{aligned} \tag{F25}$$

を得るが, 処理の対象とする問題のパターン φ から式 (F19) の閉部分空間 $CSS(j)$ にいたるノルム距離 (distance defined by norm) $dis(\varphi, CSS(j))^2$ の自乗は式 (F25) の最右辺で与えられることがわかる:

$$\begin{aligned} dis(\varphi, CSS(j))^2 &\equiv \sum_{k \in K-K(j)} \|P_k \varphi\|^2 \\ &= \|\varphi\|^2 - \sum_{k \in K(j)} \|P_k \varphi\|^2 \end{aligned} \tag{F26}$$

よって, 式 (F21) の $prob\{\varphi \in CSS(j)\}$ とは異なり, パターン φ が部分的に $CSS(j)$ の状態にあることの規格化確率 $prob\{\varphi \in CSS(j)\}$ は, 正定数 a_j の組 $\{a_j\}_{j \in J}$ を用意して,

$$\begin{aligned} & prob\{\varphi \in CSS(j)\} \\ &= \frac{\exp[-\frac{1}{a_j} \cdot dis(\varphi, CSS(j))^2]}{\sum_{i \in J} \exp[-\frac{1}{a_i} \cdot dis(\varphi, CSS(i))^2]} \end{aligned} \tag{F27}$$

と与えられてもよいだろう。もし,

$$\forall j \in J, a_j = a \quad (j \in J \text{ に無関係な正定数}) \tag{F28}$$

であるならば, 式 (F22) を考慮して,

$$\begin{aligned} & prob\{\varphi \in CSS(j)\} \\ &= \frac{\exp[-\frac{1}{a} \cdot \sum_{k \in K(i)} s_k(\varphi)]}{\sum_{i \in J} \exp[-\frac{1}{a} \cdot \sum_{k \in K(i)} s_k(\varphi)]} \end{aligned} \tag{F29}$$

と与えられることになる。

III. 間接法2

3式 (F21), (F27), (F29) よりも,

$$\varphi \in CSS(j) \Rightarrow prob\{\varphi \in CSS(j)\} = 1 \wedge [\forall i \in J - \{j\}, prob\{\varphi \in CSS(i)\} = 0]$$

が成り立つという意味で, カテゴリ間の相互排除性に関する sharp reduction が可能である確率 $prob\{\varphi \in CSS(j)\}$ を構成すると, 以下の2式ようになる:

(イ) $prob\{\varphi \in CSS(j)\}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{dis(\varphi, CSS(j))^2} \\ &= \frac{1}{\sum_{i \in J} dis(\varphi, CSS(i))^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{1}{\|\varphi\|^2 - \sum_{k \in K-K(j)} \|P_k \varphi\|^2}}{\sum_{i \in J} \frac{1}{\|\varphi\|^2 - \sum_{k \in K-K(i)} \|P_k \varphi\|^2}} \quad (\text{F30})$$

(ロ) 正定数 a_j の組 $\{a_j\}_{j \in J}$ を用意して,

$$\begin{aligned} & \text{prob}\{\varphi \in \text{CSS}(j)\} \\ &= \frac{\exp\left(\frac{1}{a_j} \cdot \frac{1}{\text{dis}(\varphi, \text{CSS}(j))^2}\right)}{\sum_{i \in J} \exp\left(\frac{1}{a_i} \cdot \frac{1}{\text{dis}(\varphi, \text{CSS}(j))^2}\right)} \\ &= \frac{\exp\left(\frac{1}{a_j} \cdot \frac{1}{\|\varphi\|^2 - \sum_{k \in K-K(j)} \|P_k \varphi\|^2}\right)}{\sum_{i \in J} \exp\left(\frac{1}{a_i} \cdot \frac{1}{\|\varphi\|^2 - \sum_{k \in K-K(i)} \|P_k \varphi\|^2}\right)} \quad (\text{F31}) \end{aligned}$$

□

付録G（2次元画像から幾何学的特徴を抽出し、 その抽出した結果を反映した画像モデルを確保する方法）

直角座標系 $\langle x_1, x_2 \rangle$ でのパターン（2次元画像） $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ から線分、楕円、放物線などの幾何学的特徴を抽出し、その抽出した結果を反映した画像モデル $T\varphi = (T\varphi)(x_1, x_2)$ を確保するには、どうしたらよいかを考えよう。

G1. 抽出された幾何学的特徴を反映させるとは限らない画像モデルを確保する方法

まず、axiom 1を満たす対 $[\Phi, T]$ を導入し、パターン（2次元画像） $\varphi = \varphi(x_1, x_2) \in \Phi$ のモデル $T\varphi = (T\varphi)(x_1, x_2)$ を確保した後、 $T\varphi = (T\varphi)(x_1, x_2)$ から抽出した結果

$$\vec{u}(T\varphi) = \{u(T\varphi, k) \mid k \in L\} \quad (\text{G1})$$

を、画像モデル $T\varphi = (T\varphi)(x_1, x_2)$ に反映させるとは限らない方法を考えよう。

G1.1 線分を抽出する場合

G1.1.1 x_2 軸に平行でない線分 $x_2 = m(k) \cdot x_1 + b(k)$ を抽出する場合

パターン（2次元画像） $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ のモデル $T\varphi = (T\varphi)(x_1, x_2)$ から、線分

$$x_2 = m(k) \cdot x_1 + b(k), \quad c(k) \leq x_1 \leq d(k) \quad (\text{G2})$$

を抽出するため、

$$\psi_k(x_1; T\varphi) \equiv (T\varphi)(x_1, m(k) \cdot x_1 + b(k)), \quad c(k) \leq x_1 \leq d(k) \quad (\text{G3})$$

を作り、パターンモデル $T\varphi \in \Phi$ から抽出される第 $k \in L$ 番目の特徴量 $u(T\varphi, k) \in R$ として、

$$u(T\varphi, k) = \frac{\int_{c(k)}^{d(k)} dx_1 \frac{\psi_k(x_1; T\varphi)}{\max_{c(k) \leq x_1 \leq d(k)} |\psi_k(x_1; T\varphi)|}}{d(k) - c(k)} \quad (\text{G4})$$

を採用できる．ここに，特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \rightarrow R \tag{G5}$$

が導入されている． R は実数全体の集合である．

$u(T\varphi, k)$ には，パターン（2次元画像） $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ のパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ に， x_2 軸に平行でない式 (G2) の線分 $x_2 = m(k) \cdot x_1 + b(k)$ が存在する程度が反映されている．

正に， $u(T\varphi, k) = 1$ であれば，この線分が文句なしに存在しているといえよう．

不等式

$$-1 \leq u(T\varphi, k) \leq +1 \tag{G6}$$

が成立している．

さて，不等式

$$0 < th(k) < 1 (k \in L) \tag{G7}$$

を満たす閾値を選んでおいて，

$$th(k) \leq u(T\varphi, k) \tag{G8}$$

であれば，

パターンモデル $T\varphi = T\varphi(x_1, x_2)$ に，式 (G2) の線分 $x_2 = m(k) \cdot x_1 + b(k)$ が存在する (G9)

と考えればよい．

G1.1.2 x_2 軸に平行な線分 $x_1 = b(k)$ を抽出する場合

x_2 軸に平行な線分

$$x_1 = b(k), c(k) \leq x_2 \leq d(k) \tag{G11}$$

を抽出する場合

式 (G3) の $\psi_k(x_1; T\varphi)$ の代わりに，

$$\psi_k(x_2; T\varphi) \equiv T\varphi(b(k), x_2), c(k) \leq x_2 \leq d(k) \tag{G12}$$

を作る．以後，G1.1.1節と同様に処理すればよい．

$th(k) \leq u(T\varphi, k)$ であれば，

パターンモデル $T\varphi = T\varphi(x_1, x_2)$ に，線分 $x_1 = b(k), c(k) \leq x_2 \leq d(k)$ が存在する (G13)

と考えることができる．

G1.2 楕円を抽出する場合

前節の2式 (G2)，(G11) の2線分 $c(k) \leq x_2 \leq d(k)$ を抽出する場合，

$$f_k(x_1, x_2) = a_1(k) \cdot x_1 + a_2(k) \cdot x_2 + a_3(k) = 0, c(k) \leq x_1 \leq d(k) \tag{G14}$$

の場合であった．それで，楕円

$$f_k(x_1, x_2) = \frac{(x_1 - a_1(k))^2}{b_1(k)} + \frac{(x_2 - a_2(k))^2}{b_2(k)} - 1 = 0, c_j(k) \leq x_j \leq d_j(k) (j = 1, 2) \tag{G15}$$

where

$$b_j(k) > 0 (j = 1, 2) \tag{G16}$$

を抽出する場合，不等式

$$\forall x_1, \forall x_2, \varepsilon_k(x_1, x_2) > 0 \tag{G17}$$

を満たす閾値関数 ε_k の系 $\varepsilon_k, k \in L$ を選んで，関数

$$\phi_k(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 \cdots |f_k(x_1, x_2)| \leq \varepsilon_k(x_1, x_2) \text{ のとき} \\ 0 \cdots |f_k(x_1, x_2)| > \varepsilon_k(x_1, x_2) \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{G18})$$

を作る。関数 $\phi_k(x_1, x_2)$ として、

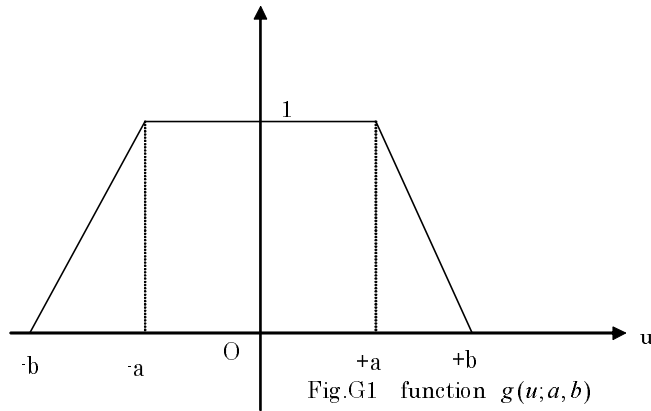
$$\phi_k(x_1, x_2) = g(f_k(x_1, x_2); \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_k(x_1, x_2), \varepsilon_k(x_1, x_2)) \quad (\text{G19})$$

$$\phi_k(x_1, x_2) = g(f_k(x_1, x_2); \frac{2}{3} \cdot \varepsilon_k(x_1, x_2), \varepsilon_k(x_1, x_2)) \quad (\text{G20})$$

などを選んでよい。ここに、関数 $g(u; a, b) (a \geq 0, b > 0)$ は

$$g(u; a, b) = \begin{cases} 0 \cdots u < -b \text{ のとき} \\ \frac{u+b}{b-a} \cdots -b \leq u < -a \text{ のとき} \\ 1 \cdots -a \leq u \leq +a \text{ のとき} \\ \frac{-u+b}{b-a} \cdots +a < u \leq +b \text{ のとき} \\ 0 \cdots u > +b \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{G21})$$

と定義されるものであり、そのグラフはFig.G1のとおりである。



汎関数

$$F(c_k; \varphi) = \int_{c_1(k)}^{d_1(k)} \int_{c_2(k)}^{d_2(k)} |\varphi(x_1, x_2) - c_k \cdot \eta_k(x_1, x_2)|^2 \quad (\text{G22})$$

を最小ならしめる実係数は、

$$c_k \equiv \frac{\int_{c_1(k)}^{d_1(k)} dx_1 \int_{c_2(k)}^{d_2(k)} dx_2 \varphi(x_1, x_2) \cdot \eta_k(x_1, x_2)}{\int_{c_1(k)}^{d_1(k)} dx_1 \int_{c_2(k)}^{d_2(k)} dx_2 \eta_k(x_1, x_2) \cdot \eta_k(x_1, x_2)} \quad (\text{G23})$$

と与えられ、直交分解式

$$\exists \varphi_{\perp}, 0 = \int_{c_1(k)}^{d_1(k)} dx_1 \int_{c_2(k)}^{d_2(k)} dx_2 \varphi_{\perp}(x_1, x_2) \cdot \eta_k(x_1, x_2) \wedge \varphi = c_k \cdot \eta_k + \varphi_{\perp} \quad (G24)$$

成り立つことが知られている。この事実を利用し、各 $q_k(T\varphi)$ を

$$q_k(T\varphi) \equiv \frac{\int_{c_1(k)}^{d_1(k)} dx_1 \int_{c_2(k)}^{d_2(k)} dx_2 (T\varphi)(x_1, x_2) \cdot (T\psi_k)(x_1, x_2)}{\int_{c_1(k)}^{d_1(k)} dx_1 \int_{c_2(k)}^{d_2(k)} dx_2 (T\psi_k)(x_1, x_2) \cdot (T\psi_k)(x_1, x_2)} \quad (G25)$$

と定義する。

式 (G5) の特徴抽出写像 u を考え、パターンモデル $T\varphi \in \Phi$ から抽出される第 $k \in L$ 番目の特徴量 $u(T\varphi, k) \in R$ として、

$$u(T\varphi, k) = \begin{cases} 0 \cdots |q_k(T\varphi)| \leq t_k(0) \text{ のとき} \\ q_k(T\varphi) \cdots t_k(0) < |q_k(T\varphi)| < t_k(1) \text{ のとき} \\ \frac{q_k(T\varphi)}{|q_k(T\varphi)|} \in \{-1, +1\} \cdots |q_k(T\varphi)| \geq t_k(1) \text{ のとき} \end{cases} \quad (G26)$$

を採用しよう。ここに、各閾値 $t_k(0), t_k(1)$ は、不等式

$$0 \leq t_k(0) < t_k(1) \leq 1 = q_k(T\psi_k), k \in L \quad (G27)$$

を満たすものである。尚、各閾値 $t_k(0), t_k(1)$ を、不等式

$$0 \leq \max_{\ell \in L - \{k\}} |q_k(T\psi_{\ell})| \leq t_k(0) < t_k(1) \leq 1 = q_k(T\psi_k), k \in L \quad (G28)$$

を満たすように、選べば、正規直交性

$$\forall k \in L, u(T\psi_k, k) = 1 \quad (G29)$$

$$\forall k \in L, \forall \ell \in L - \{k\}, u(T\psi_{\ell}, k) = 0 \quad (G30)$$

が成り立つ。

G1.3 放物線を抽出する場合

G1.3.1 上或いは下に開いた放物線を抽出する場合

$$f_k(x_1, x_2) = a_1(k) \cdot x_1^2 + a_2(k) \cdot x_1 + a_3(k) \cdot x_2 + a_4(k) = 0, c_j(k) \leq x_j \leq d_j(k) (j = 1, 2) \quad (G31)$$

を採用すれば、上或いは下に開いた放物線を抽出できる。以後の処理はG1.2節と同様に行えばよい。

G1.3.2 左或いは右に開いた放物線を抽出する場合

$$f_k(x_1, x_2) = a_1(k) \cdot x_1 + a_2(k) \cdot x_2 + a_3(k) \cdot x_2^2 + a_4(k) = 0, c_j(k) \leq x_j \leq d_j(k) (j = 1, 2) \quad (G32)$$

を採用すれば、左或いは右に開いた放物線を抽出できる。以後の処理はG1.2節と同様に行えばよい。

G1.4 式 (G1) の抽出された特徴量の組 $\vec{u}(T\varphi) = \{u(T\varphi, k) | k \in L\}$ の、類似度関数の構成への応用

パターンモデル $T\varphi$ を確保した後、式 (G1) の特徴 $\vec{u}(T\varphi) = \{u(T\varphi, k) | k \in L\}$ を抽出する上述の方法では、axiom 2を満たす類似度関数

$$SM : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s | 0 \leq s \leq 1\} \quad (G33)$$

を、簡単には、例えば、条件

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \exists k \in L, u(T\omega_i, k) \neq u(T\omega_j, k) \quad (\text{G34})$$

の下で、

$$SM(\varphi, \omega_j) = \frac{\text{dis}(\bar{u}(T\varphi, \bar{u}(T\omega_j))^{-1}}{\sum_{i \in J} \text{dis}(\bar{u}(T\varphi, \bar{u}(T\omega_k))^{-1}} \quad (\text{G35})$$

と構成できる．ここに、 $\|\bar{u}(\varphi) - \bar{u}(\omega_j)\|^2$ を

$$\|\bar{u}(\varphi) - \bar{u}(\omega_j)\|^2 = \sum_{k \in L} |u(\varphi, k) - u(\omega_j, k)|^2 \quad (\text{G36})$$

と定義して、

$$\text{dis}(\bar{u}(T\varphi, \bar{u}(T\omega_j)) = \sqrt{1 - \exp(-a \cdot \|\bar{u}(T\varphi) - \bar{u}(T\omega_j)\|^2)}, \quad a > 0 \quad (\text{G37})$$

と定義される関数

$$\text{dis} : R^{|L|} \times R^{|L|} \rightarrow R$$

は距離の公理

- (i) (非負性, 一意性) $\text{dis}(\bar{u}(\varphi), \bar{u}(\eta)) \geq 0 \wedge [\text{dis}(\bar{u}(\varphi), \bar{u}(\eta)) = 0 \Leftrightarrow \bar{u}(\varphi) = \bar{u}(\eta)]$
- (ii) (対称性) $\text{dis}(\bar{u}(\varphi), \bar{u}(\eta)) = \text{dis}(\bar{u}(\eta), \bar{u}(\varphi))$
- (iii) (3角不等式) $\text{dis}(\bar{u}(\varphi), \bar{u}(\eta)) \leq \text{dis}(\bar{u}(\varphi), \bar{u}(\psi)) + \text{dis}(\bar{u}(\psi), \bar{u}(\eta))$

(G38)

を満たす．距離の公理のこの充足性の証明については、文献 [61] にある．

G2. 抽出された幾何学的特徴 $\bar{u}(\varphi) = \{u(\varphi, \ell) \mid \ell \in L\}$ を反映した画像モデル $T\varphi$ を確保する一般化方法

前章とは異なり、その抽出した結果

$$\bar{u}(\varphi) = \{u(\varphi, k) \mid k \in L\} \quad (\text{G39})$$

を画像モデル $T\varphi = (T\varphi)(x_1, x_2)$ に反映させる方法を考えよう．それには、パターンモデル

$$T\varphi = \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell) \cdot \psi_\ell \quad (\text{G40})$$

を構成すればよい．

G2.1 1次独立な系 (基底) $\{\psi_k\}_{k \in L}$ によるパターン $\varphi \in \mathfrak{H}$ の1次近似

1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ は基底として使える．以下では、基底 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ を使うパターンモデル $T\varphi$ を研究するため、1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ によってパターン $\varphi \in \mathfrak{H}$ を1次展開し、その近似として、パターンモデル $T\varphi$ を構成するための準備をする．

系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ が必ずしも直交系でなく、複素定数 c_k の組 $\{c_k\}_{k \in L}$ について、

$$\sum_{k \in L} c_k \cdot \psi_k = 0 \Rightarrow \forall k \in L, c_k = 0 \quad (\text{G41})$$

が成り立つという意味で、1次独立な系とする．系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ が直交系であれば、1次独立な系であることに注意しておく．

1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ を使って、パターン $\varphi \in \Phi \subseteq \mathfrak{H}$ をその1次結合

$$\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell \quad (\text{G42})$$

で近似するときの近似誤差 $\varphi - \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell$ のノルムの自乗

$$F(a_\ell, \ell \in L) \equiv \left\| \varphi - \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell \right\|^2 \tag{G43}$$

を最小にしよう。最小にする1次結合の各係数 $a_\ell (= a_\ell(\varphi))$ は、最小自乗法を適用して、

$$\frac{\partial F(a_\ell, \ell \in L)}{\partial a_\ell} = 0, \ell \in L \tag{G44}$$

から導かれる連立1次方程式

$$\sum_{k \in L} g_{\ell k} \cdot a_k(\varphi) = b_\ell(\varphi), \ell \in L$$

, where $g_{\ell k} \equiv (\psi_k, \psi_\ell), b_\ell(\varphi) \equiv (\varphi, \psi_\ell), \ell, k \in L$ (G45)

を解けばよい。第 $\ell, k \in L$ 成分が $g_{\ell k}$ であるような行列 $G = (g_{\ell k})_{\ell, k \in L}$ の行列式 $\det(G)$ の値は、系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ が1次独立なので、非零となり、連立1次方程式 (G45) の解 $a_k(\varphi), k \in L$ は一意的に求まる。このとき、 $\varphi \in \mathfrak{H}$ の1次展開

$$\forall \varphi \in \Phi \subseteq \mathfrak{H}, \exists \varphi_\perp \in \mathfrak{H} \quad \text{such that} \quad \forall k \in L, (\varphi_\perp, \psi_k) = 0,$$

$$\varphi = \sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi) \cdot \psi_\ell + \varphi_\perp \tag{G46}$$

が成り立つ。1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ が特に、直交系で、

$$(\psi_k, \psi_\ell) = 0 \quad \text{if} \quad k \neq \ell \tag{G47}$$

が成立していれば、連立1次方程式 (G45) の解 $a_k(\varphi), k \in L$ は

$$a_k(\varphi) = \frac{(\varphi, \psi_k)}{(\psi_k, \psi_k)}, k \in L \tag{G48}$$

と求められることがわかる。

G2.2 実数値特徴抽出写像 u を導入した条件下での採用したパターンモデル $T\varphi$ の構造形式と、1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ を用いた場合の単極モデル $T\varphi$

G2.2.1 採用したパターンモデル $T\varphi$ の連続構造形式

式 (G5) の特徴抽出写像 $u : \Phi \times L \rightarrow R$ を導入する。実数値 $u(\varphi, \ell) \in R$ はパターン $\varphi \in \Phi$ から抽出された第 $k \in L$ 番目の特徴量である。パターンモデル $T\varphi$ の構造形式として、式 (G40) の $T\varphi = \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell) \cdot \psi_\ell$ を採用する。その理由は、パターン φ の1次展開式 (G46) の主成分 $\sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi) \cdot \psi_\ell$ の定数倍

$$\frac{1}{\sup_{k \in L} |a_k(\varphi)|} \cdot \sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi) \cdot \psi_\ell = \sum_{\ell \in L} \frac{a_\ell(\varphi)}{\sup_{k \in L} |a_k(\varphi)|} \cdot \psi_\ell \tag{G49}$$

の近似として、パターンモデル $T\varphi$ を決定するためである。但し、実定数 a_ℓ の列 $\{a_\ell\}_{\ell \in L}$ については、計算式

$$\frac{a_\ell}{\sup_{k \in L} |a_k|} = 0 \quad \text{if} \quad \sup_{k \in L} |a_k| = 0 \tag{G50}$$

を約束しておく。

次の定理G1が成り立ち、パターン $\varphi \in \Phi$ の連続モデル $T\varphi \in \Phi$ が得られたことがわかる。

[定理G1] (パターン φ の連続モデル $T\varphi$ の構成定理)

系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ を1次独立な系に選ぶ。パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出された第 $\ell \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, \ell)$ として、

$$u(\varphi, \ell) = \frac{a_\ell(\varphi)}{\sup_{k \in L} |a_k(\varphi)|} \quad (\text{G51})$$

を採用する。このとき、式(G40)で定義される式(2.8)のモデル構成作用素 T は付録A, A3章の4性質①~④を満たす。□

定理G1の①, ③を証明するには、式(G46)などを適用して証明される次の補助定理G1を使えばよい。

[補助定理G1]

$$\sup_{k \in L} |a_k(\varphi)| \in \{0, 1\} \quad (\text{G52})$$

であれば、

$$T\varphi = \varphi - \varphi_\perp. \quad (\text{G53})$$

(補助定理G1の証明)

(イ) $\sup_{k \in L} |a_k(\varphi)| = 0$ であれば、 $\forall \ell \in L, a_\ell(\varphi) = 0$ を得、

$$\varphi = \varphi_\perp \wedge \forall \ell \in L, u(\varphi, \ell) = 0 \quad (\text{G54})$$

が成り立ち、よって、

$$T\varphi = 0 = \varphi - \varphi_\perp. \quad (\text{G55})$$

(ロ) $\sup_{k \in L} |a_k(\varphi)| = 1$ であれば、

$$\forall \ell \in L, u(\varphi, \ell) = a_\ell(\varphi) \quad (\text{G56})$$

を得、

$$T\varphi = \sum_{k \in L} a_k(\varphi) \cdot \psi_k = \varphi - \varphi_\perp. \quad (\text{G57})$$

□

次の補助定理G2も証明される。

[補助定理G2]

$$\exists \ell \in L, a_\ell(\varphi) = \pm 1 \wedge [\forall k \in L - \{\ell\}, a_k(\varphi) = 0] \quad (\text{G58})$$

であれば、

$$\exists \ell \in L, u(\varphi, \ell) = \pm 1 \wedge [\forall k \in L - \{\ell\}, u(\varphi, k) = 0] \quad (\text{G59})$$

が成り立ち、

$$T\varphi = \varphi - \varphi_\perp. \quad (\text{G60})$$

よって、

$$\varphi_\perp = 0 \text{ であれば、 } T\varphi = \varphi. \quad (\text{G61})$$

[補助定理G2の系1] (不動点定理)

$$\forall \ell \in L, T\pm\psi_\ell = \pm\psi_\ell. \text{ (複合同順)} \quad (\text{G62})$$

(補助定理G2の証明) 補助定理G1を適用すればよい. 或いは, 式 (G46) から明らかである. \square
 (補助定理G2の系 1 の証明) $\varphi = \pm\psi_\ell$ については, 式 (G58) 並びに, $\varphi_\perp = 0$ を得, 式 (G61) から明らかである. \square

次の定理G2は, 各パターン形状素 $\pm\psi_k$ が式 (39) の半順序関係 \bullet の極大要素であることを指摘している.

[定理G2] (半順序関係 \bullet に関する極大要素の存在)

$$\forall k \in L, \forall \varphi \in \Phi, \varphi \bullet \pm\psi_k. \tag{G63}$$

(証明) $\varphi = \pm\psi_\ell$ については, 式 (G58) が成り立つことから明らかである. \square

G2.2.2 採用したパターンモデル $T\varphi$ の離散構造形式

離散構造形式を備えたパターンモデル $T\varphi$ として, 1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ を用いた場合の単極モデル $T\varphi$ を説明しよう.

系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ を1次独立な系に選ぶ. 各閾値 $e(\ell) (\ell \in L)$ を, 不等式

$$0 \leq e(\ell) < 1, \ell \in L \tag{G64}$$

を満たすように選ぶ.

パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出された第 $\ell \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, \ell)$ として, 2値量

$$u(\varphi, \ell) =$$

$$\begin{cases} 0 \cdots \frac{a_\ell(\varphi)}{\sup_{k \in L} |a_k(\varphi)|} \leq e(\ell) \text{ のとき} \\ 1 \cdots \frac{a_\ell(\varphi)}{\sup_{k \in L} |a_k(\varphi)|} > e(\ell) \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\tag{G65}$$

を採用する.

先ず, 次の補助定理G3を証明する.

[補助定理G3] (不動点定理)

系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ を1次独立な系に選ぶ. パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出された第 $\ell \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, \ell)$ として, 式 (G65) を選ぶ. 条件

$$a_\ell \in \{0, 1\}, \ell \in L \tag{G66}$$

を満たす各2値定数 a_ℓ を使って得られるパターン

$$\varphi = \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell \tag{G67}$$

について, 不動点式 $T\varphi = \varphi$ が成立する.

(証明) 省略. \square

補助定理G3を適用して, 次の定理G3が得られ, 基底としての1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ の各成分 ψ_ℓ は誤差なく再現されることがわかる.

[定理G3] (1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ の各成分 ψ_ℓ の不動点定理)

系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ を1次独立な系に選ぶ. パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出された第 $\ell \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, \ell)$ として, 式 (G65) を採用する. このとき, 不動点式

$$\forall \ell \in L, T\psi_\ell = \psi_\ell \tag{G68}$$

が成り立つ.

(証明) 省略. □

次の定理G4は、パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出された第 $\ell \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, \ell)$ として、式 (G65) を採用し、構成された式 (A2.11) の作用素 T が付録A, A3章の4性質①~④を満たすことを指摘したものである。

[定理G4] (1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ を用いた2値(単極型)モデル構成作用素 T の構成定理)

系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ を1次独立な系に選ぶ。パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出された第 $\ell \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, \ell)$ として、式 (G65) を採用する。このとき、式 (G40) で定義される式 (A9) のモデル構成作用素 T は付録A, A3章の4性質①~④を満たす。

(証明) 省略. □

次のG5は、各パターン形状素 ψ_k が式 (39) の半順序関係 \bullet_c の極大要素であることを指摘している。

[定理G5] (半順序関係 \bullet_c に関する極大要素の存在)

式 (39) の半順序関係 \bullet_c について

$$\forall k \in L, \forall \varphi \in \Phi, \varphi \bullet_c \psi_k.$$

(証明) $\varphi = \psi_k$ については、

$$\exists k \in L, a_k(\varphi) = 1 \wedge [\forall \ell \in L - \{k\}, a_\ell(\varphi) = 0] \tag{G69}$$

であれば、

$$\exists k \in L, u(\varphi, k) = \pm 1 \wedge [\forall \ell \in L - \{k\}, u(\varphi, \ell) = 0] \tag{G70}$$

を得、これから明らか. □

G2.3 抽出された幾何学的特徴 $\vec{u}(\varphi) = \{u(\varphi, \ell) \mid \ell \in L\}$ を反映した画像モデル $T\varphi$

2次元幾何学的形状を表す方程式を

$$f_k(x_1, x_2) = 0, c_j(k) \leq x_j \leq d_j(k) (j = 1, 2) \tag{G71}$$

とする。このような f_k として、次の(1#)~(6#)がある。

(1#) (x_2 軸に平行でない $x_2 = m(k) \cdot x_1 + b(k)$ 線分を抽出する場合)

$$f_k(x_1, x_2) = m(k) \cdot x_1 - x_2 + b(k) = 0 \tag{G72}$$

(2#) (x_2 軸に平行な線分 $x_1 = b(k)$ を抽出する場合)

$$f_k(x_1, x_2) = x_1 - b(k), c_j(k) \leq x_j \leq d_j(k) (j = 1, 2) \tag{G73}$$

(3#) (楕円を抽出する場合)

$$f_k(x_1, x_2) = \frac{(x_1 - a_1(k))^2}{b_1(k)} + \frac{(x_2 - a_2(k))^2}{b_2(k)} - 1 = 0, c_j(k) \leq x_j \leq d_j(k) (j = 1, 2) \tag{G74}$$

(4#) (上或いは下に開いた放物線を抽出する場合)

$$f_k(x_1, x_2) = a_1(k) \cdot x_1^2 + a_2(k) \cdot x_1 + a_3(k) \cdot x_2 + a_4(k) = 0, c_j(k) \leq x_j \leq d_j(k) (j = 1, 2) \tag{G75}$$

(5#) (左或いは右に開いた放物線を抽出する場合)

$$f_k(x_1, x_2) = a_1(k) \cdot x_1 + a_2(k) \cdot x_2 + a_3(k) \cdot x_2^2 + a_4(k) = 0, c_j(k) \leq x_j \leq d_j(k) (j = 1, 2)$$

(6#) (一般化2次形状を抽出する場合)

$$f_k(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}(k) \cdot x_i \cdot x_j + 2 \cdot \sum_{i=1}^2 b_i(k) \cdot x_i + c(k) = 0, a_{ij}(k) = a_{ji}(k) (i, j = 1, 2) \tag{G76}$$

□

不等式 (G17) を満たす閾値関数 ε_k の系 $\varepsilon_k, k \in L$ を選んで、関数 $\phi_k(x_1, x_2)$ を式 (G18) の如く作る。このとき、

$$(T\varphi)(x_1, x_2) = \sum_{k \in L} u(\varphi, k) \cdot \phi_k(x_1, x_2) \quad (\text{G77})$$

が、直角座標系 $\langle x_1, x_2 \rangle$ でのパターン (2次元画像) $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ から線分、楕円、放物線などの幾何学的特徴を抽出し、その抽出した結果を反映した画像モデルである。

関数 $\phi_k(x_1, x_2)$ として、2式 (G19), (G20) を選んでもよい。

(著者 鈴木昇一, 論文題目 パターンの整形化方程式, 文教大学情報学部情報研究no.34 投稿論文, 投稿年月日 2005年9月2日 (金))

