

原パターンを近似できるという
拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの、
会話音声・動画像処理への応用

鈴木 昇一

**An Application of a Constrained Least Square Norm Pattern-Model
Which Can Approximate an Original Pattern to a Processing of
Discoursed Speeches and Animated Images**

Shoichi Suzuki

あらまし

パターン $\varphi \in \Phi$ を近似するという拘束条件の付いた自乗ノルムの最小化問題として、見慣れた形状であり、実現しやすく、更に、形状にまとまりがある（パターン $\varphi \in \Phi$ に対応する）パターンモデル（最小自乗近似付き自乗ノルム最小化モデル） $T\varphi \in \Phi$ を決定するのが、本研究の第一目的であり、動画像、会話音声を的確に処理する方面へ、得られた $T\varphi \in \Phi$ を利用できるような7個の1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ を提案することが第2目的である。

写像 T の役割は、原パターン φ を簡素化し、ある程度相違しているパターンを一層相違しているように、また、ある程度似ているパターンを一層似ているように、原パターン φ を表現し直すことである。

$c(\varphi)$ を φ に依存した非負定数（規格化定数）として、本論文では、自乗ノルム $\|c(\varphi) \cdot T\varphi\|^2$ を最小とするように、その差 $\varphi - c(\varphi) \cdot T\varphi$ の自乗ノルムを一定値とするような拘束条件の付いた原パターン φ を近似するモデル $T\varphi$ が、会話音声・動画像の処理場面において、役立つように求められている。このようなパターンモデルを研究した論文はこれまで、存在していない。S.Suzukiが研究したこれまでのパターンモデル [B1] ~ [B4], [B34], [B35] に比べても、形状がプレグナンツの傾向を持つかもしれないという意味で、冗長性が排除されたパターンモデルが求められているといえる。

同じ意味を表すのに見かけ上異なるいくつかのパターンが存在するから、標準的な表現形式を備えたパターンに原パターンを変換しておかねばならない。この標準的な表現形式を備えたパターンが原パターン $\varphi \in \Phi$ に対応し、システムの短期記憶内に確保されるパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ である。処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ と、パターンの標準的な表現形式を与える写像 T との対 $[\Phi, T]$ はS.Suzukiのパターン認識の数学的理論、いわゆるSS理論[B3], [B4]によれば、付録Aのaxiom 1を満たさなければならない。このとき、写像 T はモデル構成作用素と呼ばれる。

形状（configuration）には、全体として形態的に秩序あるまとまりをなそうとする傾向、つまり、

心理学のプレグナンツの傾向(Pragnanz-tendenz)があることに注目し、エネルギー（ノルムの自乗）が小さいパターンモデルほど見慣れた形状であり、実現しやすく、更に、形状にまとまりがあると想定した。この想定下で、1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ の1次結合 $\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell$ を使って原パターン $\varphi \in \Phi$ を最小自乗ノルム近似するときの近似誤差 $\varphi - \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell$ の自乗ノルム $\|\varphi - \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell\|^2$ を一定に保ったとき、 $\varphi \in \Phi$ の近似パターン $\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell$ のエネルギー $\|\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell\|^2$ の最小となるパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ が本論文では、SS理論のaxiom 1を満たすように、求められている。当然ながら、パターンモデル $T\varphi$ は原パターン φ の持つ情報を反映させて得られた合成パターン（the synthetic pattern）である。パターン φ を処理するにあたり、 φ を如何なるパターンに対しても同一の構造形式を備えたパターン $T\varphi$ に変換しておく、システムによる以後の処理が容易になったり、原パターン φ にあるかも知れない変形を取り除けたりするが、本研究で得られたパターンモデル $T\varphi$ は従来のパターンモデル [B3], [B4]より会話音声・動画像の処理場面において、この目的を達成するのに一層役立つことになる。

1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ が直交系の場合に限って、近似拘束条件無しの場合と全く同じパターンモデルが得られるという事実が明らかになった。その事実をあらわにする1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ が、会話音声・動画像なる2種類のパターン系列の処理に役立つように、7例構成されている。

パターン系列内の1つのパターンを前時刻でのパターンから予測するという働きを取り入れこのパターン系列を処理する連想形認識器SPATEMTRON [B33]の構成に本パターンモデル $T\varphi$ を用いた場合、どの程度有用であるかを確かめる必要があることは確かである。

キーワード

- (1) 最小自乗近似 (2) 拘束条件 (3) 動画像 (4) 会話音声 (5) SS理論
(6) モデル構成作用素

Abstract

This paper has two following objectives (1#) and (2#):

(1#) We determine a corresponding model $T\varphi \in \Phi$ of a pattern $\varphi \in \Phi$ so that $T\varphi$ may be a familiar and likely configuration to be put in order by solving a problem of minimization of a squared norm constrained to approximate φ .

(2#) We propose seven linearly independent systems $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ so as to make good use of the obtained model $T\varphi$ in two cases of treating discoursed Speeches and animated Images with great exactness.

The mapping T supplies the place of representing the original pattern φ so that $T\varphi$ may be a simplified pattern of φ , $T\varphi_1$ may be more similar to $T\varphi_2$ if φ_1 is similar to φ_2 to a certain extent, and $T\varphi_1$ may be more different from $T\varphi_2$ if φ_1 is different from φ_2 to a greater extent.

Let $c(\varphi)$ be a non-negative normalizing constant dependent on φ . In this paper $T\varphi$ is determined so that $\|c(\varphi) \cdot T\varphi\|^2$ may be minimized under a constraint of that $\|\varphi - c(\varphi) \cdot T\varphi\|^2$ is equal to a given constant c . The other papers that studied such a pattern-model have not existed up to this point. We assert that $T\varphi$ has not a redundant information in a sense of that its configuration presents more Pragnanz-tendenz in comparison with models that has been studied so far by S.Suzuki.

An original pattern φ ought to be transformed into a pattern which have a canonical form because many patterns which are different from the others in appearance have sometimes the same meaning.

The pattern which have a canonical form is the corresponding pattern-model $T\varphi$ of φ stored in a short-time memory of a system.

A pair $[\Phi, T]$ consisting of a set Φ of patters to be processed in question and T which brings a pattern to the canonical form must satisfy axiom 1 in appendix A according to SS-theory [B3], [B4]. Then the mapping T is called a model-construction operator.

We take notice of that a configuration has a tendency to come orderly to a unity in shape as a whole, that is to say, called a psychological Pragnanz-tendenz.

We assume that the less an energy (a squared norm) of the pattern-model is, the more familiar, probable and harmonic the model is becoming.

On this assumption, We seek for pattern-model $T\varphi \in \Phi$ which minimize a squared norm $\|\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell\|^2$ that is an energy of a linear combination $\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell$ of a linearly independent system $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ which can approximate pattern $\varphi \in \Phi$ assuming that $\varphi - \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell$ which is an error when we approximate $\varphi \in \Phi$ by the use of $\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell$ remains in the condition of that $\|\varphi - \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell\|^2$ is a given constant. As a result $T\varphi \in \Phi$ can satisfy axiom 1 in SS-theory. As a matter of course useful information which φ contains is reflected in a synthetic pattern $T\varphi$. In the scene of processing φ in question the system must transform φ into $T\varphi$ which has the same structure for whatever pattern, so the system can manipulate the pattern with ease and can remove the various deformations contained in φ . The pattern-model presented here is more useful than traditional pattern-models so far [B3], [B4] for this purpose when the system must deal with discoursed speeches and animated images.

We will make clear that the pattern-model is exactly the same as the pattern-model without the constraint of the approximation of the original pattern if and only if the linearly independent systems $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ is set to be an orthogonal system. In order to make clear this fact, seven examples of the system $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ are given that are of much use in two kinds of a sequence of patterns which are discoursed speeches and animated images.

It is obvious that a processing of two kinds of a sequence will depend to an appreciable extent upon how the model to be used. It is necessary to see if SPATEMTRON comes into a good operation using the mapping T presented here.

Key words: (1) least square approximation (2) constraint (3) animated image (4) discoursed speech (5) SS-theory (6) model-construction operator

1. まえがき

与えられた誤差で原パターン $\varphi \in \Phi$ を近似するという拘束条件の下で、パターンモデル $T\varphi \in \Phi$ の定数倍の自乗ノルムを最小化せよという問題を解決して、見慣れた形状であり、実現しやすく、更に、形状にまとまりがある原パターン $\varphi \in \Phi$ に対応するパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ を決定するのが、本研究の第一目的である。 $T\varphi \in \Phi$ 内の、動画像、会話音声を的確に処理することに利用できるような複数個の1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ を提案するのが第2目的である。

パターンからパターンへの変換としての、登場している写像 T の役割は、原パターン φ を簡素化し、ある程度相違しているパターンを一層相違しているように、また、ある程度似ているパターンを

一層似ているように、原パターン φ を表現し直しすることである。

T の持っているような役割を果たす変換は、シンボルを使って推論する場面においても現れる。簡単に、このことを説明しておく。

パターンではなくシンボルを使って推論する場面における3命題 P, Q, R について、等式 $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ が成り立つ。左辺の命題 $P \vee (Q \wedge R)$ とみかけ上異なる右辺の命題 $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ は節形式 (clausal form), 連言標準形 (conjunctive canonical form) である。このように、同じ意味を表す見かけ上異なるいくつかの命題論理式が存在することを考慮し、記号を用いた推論システムでは、 $P \vee (Q \wedge R)$ などを常に、標準形であるその節形式 $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ に変換して、その後の推論を続行するのが通常である。例えば、人工知能言語Prologでは、節形式の特別なものであるホーン節 (Horn clause) の集まり (ホーン集合; Horn set) の論理構造形式にprogramを書くことを要求している。書かれたprogramがこの要求を満たしていれば、標準形についてのみ推論動作の機構 (推論エンジン) が正しく稼動するように、設計していればよいからである。このように、標準形に変換していれば、以後の推論動作のメカニズムが簡素化になり、推論が楽になる。

記号 (を用いた) 処理の上述の場面と同様に、パターン (を用いた) 処理の場面でも、入力されたパターンを、標準形 (パターンモデル) に直してから、以後の処理を続行するのがよい。パターン処理の、設計されるべき機構 (認識推論エンジン) が簡素化されるからである。

処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ を処理するにあたり、同一の構造形式を備えたパターンに変換しておく、都合がよい。何故ならば、同じ意味を表すのに見かけ上異なるいくつかのパターンが存在するからである。得られるパターン $T\varphi \in \Phi$ は、原パターン $\varphi \in \Phi$ のパターンモデル (a corresponding model of an original pattern $\varphi \in \Phi$) とされる。このような場合、標準的な表現形式を定めておくことになる。この標準的な表現形式を与えるのがSS理論に登場するaxiom 1を満たす写像 (付録Aでのモデル構成作用素; model-construction operator) T であり、S.Suzukiによる以外のパターン情報の処理理論では、全く見られない。 $T\varphi$ を求めたとき、生じる実益は、パターン φ を処理するにあたり、 φ を同一の構造形式を備えたパターン $T\varphi$ に変換しておく、以後の処理が容易になったり、原パターン φ にあるかも知れない変形の諸要因、例えば、雑音とか、線形・非線形なパターン変換、座標変換を取り除けたりすることである。例えば、川島宏彰、松本隆司による予測を用いた多視点動作認識システム [A4] では、このようなモデル構成作用素 T が使われていないためあって、動画像認識における空間的な変動に有意義に、全く対処できていない。当然ながら、パターンモデル $T\varphi$ は原パターン φ の持つ情報を反映させて得られた合成パターン (the synthetic pattern) である。

原パターン $\varphi \in \Phi$ のパターンモデルは、標準的な表現形式を備え、 $T\varphi \in \Phi$ と表記される。 Φ は処理の対象とする問題のパターンの集合である。 Φ と T との対 $[\Phi, T]$ はS.Suzukiのパターン認識の数学的理論によれば、付録Aのaxiom 1を満たさなければならない。Axiom 1の (i), (ii), (iii) の3前半、並びに (iv) を満たさなければならない集合 Φ の最小は集合論的再帰領域方程式 (A1.10) を満たすものであらねばならない。その結果、 Φ は式 (A1.14) のように表示されることになる (定理A2.1を参照)。パターンモデル $T\varphi \in \Phi$ を生成する写像式 (A1.8) の写像 T はAxiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半、並びに (iv) を満たさなければならないで、その結果得られた写像 T はモデル構成作用素と呼ばれる。

これまで拘束条件無し、処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ の、axiom 1を満たすパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ を用いて、万能性認識システムRECOGNITRON [B13], [B3], [B4], [B18], [B26], [B29], [B30], 多重マルコフ性連想形記憶システムMEMOTRON [B2], [B10], ファジィ・マルチ

メディア・プロダクションシステムFUZZITRON [B20], パターン系列 (会話音声, 動画像) の, 単純マルコフ性認識力学系想起システムSPATEMTRON [B33] を構築してきた。

形状は全体として形態的に秩序あるまとまりをなそうとする傾向, つまり, 心理学のプレグナンツの傾向に注目し, エネルギー (ノルムの自乗) が小さいパターンモデルほど見慣れた形状であり, 実現しやすく, 更に, 形状にまとまりがあると, 本論文では, 想定する. そして, 内積, ノルムを各々, $(\varphi, \eta), \|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ とする可分なヒルベルト空間 (節A1を参照) Φ の高々可算個の元 ψ_ℓ からなる1次独立な系

$$\{\psi_\ell\}_{\ell \in L} \tag{1.1}$$

の1次結合

$$\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell \tag{1.2}$$

を用いて, 原パターン $\varphi \in \Phi$ を最小自乗近似するときの近似誤差

$$\varphi - \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell \tag{1.3}$$

の自乗ノルム

$$\|\varphi - \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell\|^2 \tag{1.4}$$

を一定に保ったとき, エネルギー

$$\|\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell\|^2 \tag{1.5}$$

$$\text{の最小となるパターンモデル } T\varphi \in \Phi \tag{1.6}$$

をSS理論のaxiom 1を満たすように, 求める。

動画像 (animated images), 会話音声 (discoursed speech) などはパターン系列 (a sequence of spatio-temporal patterns or time-varying patterns) と呼ばれ, マルチメディア社会の進展に伴い, これら両者を統合的に処理する技術を開発することが急務となっている。これまでの拘束条件無しのパターンモデルを用いるより, 拘束条件有りの, 本研究のパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ を使う4システム RECOGNITRON, MEMOTRON, FUZZITRON, SPATEMTRONの方が, 動画像, 会話音声を適切に処理できる可能性があると, 十分期待される。

1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ が直交系の場合, 拘束条件無しの場合と全く同じパターンモデルが得られた。その事実をあらわにする1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ によるパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ を7例構成する。

尚, 4付録A, B, C, Dが設けられている。付録Aでは, SS公理系 (axiom 1~4) が解説され, 付録Bでは, モデル間の相関検出写像の族を用い, 類似度関数SMがaxiom 2を満たすように再帰的に構成されている。この再帰的に得られた類似度関数SMは, 1つのカテゴリに複数個の代表パターンを設けたのと同様な効果をもたらしている。付録Cでは, 1次ニューラルネットを使用し, 大分類関数BSCがaxiom 3を満たすように構成されており, 更に, その後, BSCを再帰的に構成し直し, axiom 3を満たす今1つの大分類関数BSC'が決定されている。最後に, 付録Dでは, サンプル振幅値の系列のみ与えられたパターン $\varphi \in \Phi$ のモデル $T\varphi \in \Phi$ がaxiom 1の (i) (ii) (iii) の3後半, 並びに, (iv) を満たすように, 決定されている。

2. 拘束条件（近似誤差が一定値）有りの、処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ の、 axiom 1 を満たす最要約化パターンモデル $T\varphi \in \Phi$

本章では、まず、axiom 1 を満たすモデル構成作用素 T の果たすべき役割が説明される。その後、会話音声、動画像などを処理するのに簡便な 3 値振幅パターンモデル $T\varphi$ 、5 値振幅パターンモデル $T\varphi$ が指摘される。

写像 T の役割は、原パターン φ を簡素化し、ある程度相違しているパターンを一層相違しているように、また、ある程度似ているパターンを一層似ているように、原パターン φ を表現し直しすることであるが、本章においてはその後、続き、会話音声、動画像などを処理するのに適切な式 (A1.8) のモデル構成作用素 T を、これまでの拘束条件無しの場合と異なり、近似誤差の自乗ノルムが一定値という拘束条件を課して、構成する。

パターン φ をモデル $T\varphi$ (の定数倍) で最小自乗近似するときの誤差を一定値に抑えた条件の下で、モデル (の定数倍) の自乗ノルムを最小にするようなモデル $T\varphi$ を、SS理論でのaxiom 1が満たされるように決定しよう。更に、このモデル $T\varphi$ を一層、要約化した“ $T\varphi$ の離散モデル $T'\varphi$ ”も、axiom 1 を満たすように求める。

2.1 SS公理系のaxiom 1を満たすモデル構成作用素 T の役割

SS公理系は、4 公理axiom 1~4からなっており、付録Aで解説されている。axiom 1を満たすモデル構成作用素 T に要求される役割を説明しよう。写像 T による単一化と簡素化とについて、説明しよう。それは、次のように、述べられる。

①単一化 (unification) :

$$T\varphi_1 = T\varphi_2 = \dots = T\varphi_n = \eta \quad (2.1)$$

という具合に、ある程度、互いに似ている複数個のパターン

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in \Phi \quad (2.2)$$

を共通のあるパターン $\eta \in \Phi$ に変換すること。具体的には、座標変換前後の 2 つのパターンの内の 1 つのパターン (変換後のパターン; deformed pattern) を、今 1 つのパターン (変換前のパターン) に戻すことなどを指す。

②簡素化 (simplification) :例えば、

$$\varphi' = \varphi + \varepsilon, \varphi' = \varphi(1 + \varepsilon) \quad (2.3)$$

という具合に、意味のない情報を含んでいるパターン $\varphi' \in \Phi$ から冗長な情報成分 (加法成分, 乗法成分など) ε , $\varphi \cdot \varepsilon$ を取り除いて、一層簡単なパターン $\varphi \in \Phi$ に変換すること。具体的には、雑音を含有しているパターン (noisy pattern) から雑音を除去して、整形されたパターン $T\varphi (= T\varphi')$ を得ることを指す。□

この 2 つの単一化・簡素化双方を指して、要約化 (summarization) という。要約化がaxiom 1 を満たすモデル構成作用素の役割 T である。

2.2 3 値振幅パターンモデル $T\varphi$ 、5 値振幅パターンモデル $T\varphi$

動画像、会話音声の簡便な処理に役立つように、単一化・簡素化双方の機能を持つモデル構成作用素 T とは?。それは、3 値振幅モデル $T\varphi$ 、5 値振幅モデル $T\varphi$ である。付録Aのaxiom 1 を満たさなければならないモデル構成作用素 T として、3 値振幅モデル $T\varphi$ 、5 値振幅モデル $T\varphi$ があり、そ

の簡便性から、有用である。以下、このパターンモデルを説明しておく。

q 次元ユークリッド空間 R^q の可測部分集合 M をとる。 M 上の実数値関数としてのパターン

$$\varphi : R^q \rightarrow R^1 \tag{2.4}$$

を考える。まず、算法上の約束

$$\varphi(x) / \sup_{y \in M} |\varphi(y)| = 0 \quad \text{if} \quad \sup_{y \in M} |\varphi(y)| = 0 \tag{2.5}$$

を導入しておく。

2.2.1 T の選定 1 (3 値振幅モデル $T\varphi$)

3 値 $\{0, \pm 1\}$ を値域に持ち、

$$T\varphi = \begin{cases} 1 & \text{if } 2^{-1} < \varphi(x) / \sup_{y \in M} |\varphi(y)| \leq 1 \\ 0 & \text{if } -2^{-1} \leq \varphi(x) / \sup_{y \in M} |\varphi(y)| \leq 2^{-1} \\ -1 & \text{if } -1 \leq \varphi(x) / \sup_{y \in M} |\varphi(y)| < -2^{-1} \end{cases} \tag{2.6}$$

と定義される式 (A1.8) の写像 T は、axiom 1 の (i), (ii), (iii) の 3 後半、並びに、(iv) を満たすことが示され、よって、付録A、定理A2.1を適用すれば、パターン集合 Φ とモデル構成作用素 T との対 $[\Phi, T]$ が構成されることになる。

式 (2.6) のモデル構成作用素 T を一般化して、定理5.3の形で示そう。

2つの閾値関数 $e_1^-(x)$, $e_1^+(x)$ を、不等式

$$-1 \leq e_1^-(x) < 0 < e_1^+(x) \leq 1 \tag{2.7}$$

を満たすように選ぶ。式 (A1.8) の写像 T を、

$$T\varphi = \begin{cases} 1 & \text{if } e_1^+(x) < \varphi(x) / \sup_{y \in M} |\varphi(y)| \leq 1 \\ 0 & \text{if } e_1^-(x) \leq \varphi(x) / \sup_{y \in M} |\varphi(y)| \leq e_1^+(x) \\ -1 & \text{if } -1 \leq \varphi(x) / \sup_{y \in M} |\varphi(y)| < e_1^-(x) \end{cases} \tag{2.8}$$

と定義される式 (A1.8) の写像 T は、axiom 1 の (i), (ii), (iii) の 3 後半、並びに、(iv) を満たす。

2.2.2 T の選定 2 (5 値振幅モデル $T\varphi$)

前項の 3 値パターンモデル $T\varphi$ を 5 値に精密化しよう。

5 値 $\{0, \pm 2^{-1}, \pm 1\}$ を値域に持ち、

$$T\varphi = \begin{cases} 1 & \text{if } 2/3 < \varphi(x) / \sup_{y \in M} |\varphi(y)| \leq 1 \\ 2^{-1} & \text{if } 1/3 < \varphi(x) / \sup_{y \in M} |\varphi(y)| \leq 2/3 \\ 0 & \text{if } -1/3 \leq \varphi(x) / \sup_{y \in M} |\varphi(y)| \leq 1/3 \\ -2^{-1} & \text{if } -2/3 \leq \varphi(x) / \sup_{y \in M} |\varphi(y)| < 1/3 \\ -1 & \text{if } -1 \leq \varphi(x) / \sup_{y \in M} |\varphi(y)| \leq -2/3 \end{cases} \tag{2.9}$$

鈴木昇一：原パターンを近似できるという拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの、会話音声・動画像処理への応用

と定義される式 (A1.8) の写像 T は, axiom 1 の (i), (ii), (iii) の 3 後半, 並びに, (iv) を満たすことが示され (証明を省略), よって, 付録A, 定理A2.1 を適用すれば, パターン集合 Φ とモデル構成作用素 T との対 $[\Phi, T]$ が構成されることになる.

付録D で提案されているサンプル値パターンモデル $T\varphi$ も有用である.

2.3 近似条件付き自乗ノルム最小化規準 $F(a_\ell, \ell \in L)$

形状 (configuration) は全体として形態的に秩序あるまとまりをなそうとする傾向, つまり, 心理学のプレグナンツの傾向 (Pragnanz-tendenz) に注目し, エネルギー (ノルムの自乗) が小さいパターンモデルほど見慣れた形状であり, 実現しやすく, 更に, 形状にまとまりがあると想定しよう.

近似条件付き自乗ノルム最小化問題の解決として, 見慣れた形状であり, 実現しやすく, 更に, 形状にまとまりがあるパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ を決定するのが, 本研究の第一目的であり, 動画像, 会話音声を的確に処理することに利用できるような, $T\varphi \in \Phi$ 内の 1 次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ を構成するのが第 2 目的である.

式 (1.1) の 1 次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ を選定し, 各複素定数 $a_\ell (\ell \in L)$ によるその 1 次結合式 (1.5) のエネルギー $\|\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell\|^2$ がある与えられた条件下で最小となる場合, 式 (1.2) のパターン $\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell$ をこの条件下で最も簡単なパターン (the simplest pattern) という.

パターン $\varphi \in \Phi \subset$ a separable Hilbert space \mathfrak{H} の形状を 1 次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ の 1 次結合式 (1.2) の形で近似的, かつ, 要約的に抽出し, 原パターン $\varphi \in \Phi$ をノルムの意味で最小自乗近似するとき, 式 (1.3) の近似誤差の, 式 (1.4) の自乗ノルムを

$$\|\varphi - \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell\|^2 = c^2 \quad (2.10)$$

という具合に, 一定値に抑えるという拘束条件の下で, 式 (1.2) の抽出した形状 $\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell$ のノルム $\|\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell\|$ の自乗 (エネルギー) なる式 (1.5) の $\|\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell\|^2$ を最小にする式 (1.2) の $\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell$ を求めることは, 近似拘束条件付き最小自乗ノルム規準 (constrained least square norm criterion), つまり, 近似条件付き自乗ノルムの最小化規準

$$F \equiv F(a_\ell, \ell \in L) \equiv \|\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell\|^2 + b \cdot [\|\varphi - \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell\|^2 - c^2] \quad (2.11)$$

を最小にする各複素定数 $a_\ell (\ell \in L)$ を求めることである (近似条件付き自乗ノルムの最小化問題). ここに, 実乗数はラグランジュ乗数 (the Lagrange multiplier) であり, 方程式 (2.10) を満足するように決定しなければならない. 但し, ラグランジュ乗数 b については, 正条件

$$b > 0 \quad (2.12)$$

を課する. 何故ならば,

$b = 0$ という設定は拘束条件式 (2.10) が無視されることになり, $b < 0$ という設定は汎関数 F の最小化に矛盾することになるからである.

2.4 各 1 次結合係数, ラグランジュ乗数を決定する連立 1 次方程式

汎関数 F が実際に各 a_ℓ で最小値をとるものとすれば, 方程式

$$0 = \frac{\partial F}{\partial a_\ell}, \ell \in L \quad (\text{setting the derivatives of } F \text{ with respect to each } a_\ell \text{ to zero}) \quad (2.13)$$

を、この各 a_ℓ は満たさなければならない、 $\overline{a_\ell}$ を a_ℓ の複素共役とすれば、

$$\partial a_\ell / \partial \overline{a_k} = 0 \tag{2.14}$$

であるから、具体的に計算すれば、

$$\begin{aligned} \forall \ell \in L, 0 &= \frac{\partial F}{\partial a_\ell} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial a_\ell} \sum_{k \in L} a_k \cdot \psi_k, \sum_{q \in L} a_q \cdot \psi_q \right) + \left(\sum_{k \in L} a_k \cdot \psi_k, \frac{\partial}{\partial \overline{a_\ell}} \sum_{q \in L} a_q \cdot \psi_q \right) \\ &\quad + b \cdot \left[\left(\frac{\partial}{\partial a_\ell} \left\{ \varphi - \sum_{k \in L} a_k \cdot \psi_k \right\}, \varphi - \sum_{q \in L} a_q \cdot \psi_q \right) + \left(\varphi - \sum_{k \in L} a_k \cdot \psi_k, \frac{\partial}{\partial \overline{a_\ell}} \left\{ \varphi - \sum_{q \in L} a_q \cdot \psi_q \right\} \right) \right] \\ &= (\psi_\ell, \sum_{q \in L} a_q \cdot \psi_q) + b \cdot (-\psi_\ell, \varphi - \sum_{q \in L} a_q \cdot \psi_q) \end{aligned} \tag{2.15}$$

が得られる。両辺の複素共役をとれば、

$$\forall \ell \in L, \left(\sum_{q \in L} a_q \cdot \psi_q, \psi_\ell \right) - b \cdot \left(\varphi - \sum_{q \in L} a_q \cdot \psi_q, \psi_\ell \right) = 0 \tag{2.16}$$

が成り立つ。式 (2.16) を更に変形すれば、

$$\sum_{q \in L} [1+b] \cdot a_q \cdot (\psi_q, \psi_\ell) = b \cdot (\varphi, \psi_\ell), \ell \in L \tag{2.17}$$

を得、 $c_{\ell q}(b)$, d_ℓ を

$$c_{\ell q}(b) \equiv (1+b^{-1}) \cdot (\psi_q \cdot \psi_\ell), \ell, q \in L \tag{2.18}$$

$$d_\ell \equiv (\varphi, \psi_\ell), \ell \in L \tag{2.19}$$

とおくと、結局、各1次結合係数 a_ℓ を決定する連立1次方程式は、

$$\sum_{q \in L} c_{\ell q}(b) \cdot a_q = d_\ell, \ell \in L \tag{2.20}$$

であることがわかる。

2.5 近似条件付き自乗ノルムの最小化

式 (2.11) の近似拘束条件付き最小自乗ノルム規準 F を最小にする各1次結合係数 a_ℓ ($\ell \in L$) は連立1次方程式 (2.20) の解として求められ、このとき得られる各1次結合係数 a_ℓ を $a_\ell(\varphi)$ ($\ell \in L$) と書こう。

まず、式 (1.1) の1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ が、

$$(\psi_k, \psi_\ell) = 0 \quad \text{if} \quad k \neq \ell \tag{2.21}$$

を満たすという意味で、直交系であれば、連立1次方程式 (2.20) の解 $a_\ell(\varphi)$ ($\ell \in L$) は

$$a_\ell(\varphi) = \frac{1}{1+b^{-1}} \cdot \frac{(\varphi, \psi_\ell)}{(\psi_\ell, \psi_\ell)}, \ell \in L \tag{2.22}$$

と求まることに気付く。

次の定理2.1が成り立ち、第2.4で提起した近似条件付き自乗ノルムの最小化問題は解決されたことになる。

【定理2.1】 (近似条件付自乗ノルムの最小化定理)

式 (1.4) の自乗ノルムを式 (2.10) が成立する拘束条件の下で、つまり、一定値 c^2 に抑えるという拘束条件の下で、式 (1.2) の抽出した形状 $\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell$ のノルム $\| \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell \|$ の自乗 (エネルギー) な

鈴木昇一：原パターンを近似できるという拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの，会話音声・動画像処理への応用

る式 (1.5) の $\|\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell\|^2$ を最小にする各 1 次結合係数 $a_\ell(\varphi) (\ell \in L)$ が求まると，次の (i)，(ii) が成立する．つまり，原パターン $\varphi \in \Phi$ は式 (2.23) のように，1 次展開され，近似条件付き自乗ノルムの最小化規準式 (2.11) の F でのラグランジュ乗数 b は式 (2.25) のように，求まる．

(i) (原パターン $\varphi \in \Phi$ の 1 次展開)

$$\exists \varphi_\perp \in \mathfrak{H}, \varphi = \sum_{k \in L} a_k(\varphi) \cdot \psi_k + \varphi_\perp \quad (2.23)$$

$$\wedge [\forall \ell \in L, (\varphi_\perp, \psi_\ell) = (\varphi, \psi_\ell) / (b+1)] \quad (2.24)$$

(ii) (ラグランジュ乗数 b の決定)

$$b = \frac{\|\sum_{k \in L} a_k(\varphi) \cdot \psi_k\|^2}{\|\varphi\|^2 - (\sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi) \cdot \psi_\ell, \varphi) - c^2} \quad (2.25)$$

(証明) (i) の証明： φ_\perp を，

$$\varphi_\perp = \varphi - \sum_{k \in L} a_k \cdot \psi_k \quad (2.26)$$

とおくと，式 (2.15) から，

$$\forall \ell \in L, 0 = (\psi_\ell, \varphi - \varphi_\perp) - b \cdot (\psi_\ell, \varphi_\perp) \quad (2.27)$$

を得，両辺の複素共役をとって，

$$(\varphi - \varphi_\perp, \psi_\ell) - b \cdot (\varphi_\perp, \psi_\ell) = 0, \ell \in L \quad (2.28)$$

の成立がわかる．よって，

$$(\varphi, \psi_\ell) = [b+1] \cdot (\varphi_\perp, \psi_\ell), \ell \in L \quad (2.29)$$

を得，式 (2.24) の成立が判明した．

式 (2.23) は，式 (2.26) を書き直したものである．

(ii) の証明: 正条件式 (2.12) が課せられたラグランジュ乗数は方程式 (2.10) を満足するように決定しなければならない．先ず，式 (2.15) の複素共役から，

$$(\varphi - \sum_{q \in L} a_q(\varphi) \cdot \psi_q, \psi_\ell) = b^{-1} \cdot (\sum_{q \in L} a_q \cdot \psi_q, \psi_\ell), \ell \in L \quad (2.30)$$

が成り立っている．次に，式 (2.10) の

$$(\varphi - \sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi) \cdot \psi_\ell, \varphi) - (\varphi - \sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi) \cdot \psi_\ell, \sum_{k \in L} a_k(\varphi) \cdot \psi_k) = c^2 \quad (2.31)$$

を変形すれば，

$$(\varphi, \varphi) - (\sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi) \cdot \psi_\ell, \varphi) - \sum_{k \in L} \overline{a_k(\varphi)} \cdot (\varphi - \sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi) \cdot \psi_\ell, \psi_k) = c^2 \quad (2.32)$$

を得，この式に，式 (2.30) を代入して，

$$(\varphi, \varphi) - (\sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi) \cdot \psi_\ell, \varphi) - \sum_{k \in L} \overline{a_k(\varphi)} \cdot b^{-1} \cdot (\sum_{q \in L} a_q(\varphi) \cdot \psi_q, \psi_k) = c^2 \quad (2.33)$$

が得られる．従って，

$$(\varphi, \varphi) - (\sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi) \cdot \psi_\ell, \varphi) - b^{-1} \cdot \|\sum_{q \in L} a_q(\varphi) \cdot \psi_q\|^2 = c^2 \quad (2.34)$$

が成立することになり，この式 (2.34) を解いて，式 (2.25) が得られる． \square

2.6 近似条件付き自乗ノルムの最小化モデル $T\varphi$

2.6.1 axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半, 並びに, (iv) を満たす写像 T

各1次結合係数 $a_\ell(\varphi) (\ell \in L)$ が求め, 0値計算規則

$$a_\ell(\varphi) / \sup_{k \in L} |a_k(\varphi)| = 0 \quad \text{if} \quad \sup_{k \in L} |a_k(\varphi)| = 0 \tag{2.35}$$

を約束して, パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出される第 $\ell \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, \ell) \in Z$ (複素数全体の集合) を

$$u(\varphi, \ell) = a_\ell(\varphi) / \sup_{k \in L} |a_k(\varphi)| \tag{2.36}$$

と定義する. ここに, 特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \rightarrow Z \tag{2.37}$$

が導入されたことに注意しておく.

その後, 式 (A1.8) の写像 T を,

$$T\varphi = \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell) \cdot \psi_\ell, \quad \varphi \in \Phi \tag{2.38}$$

と定義すると, 次の近似条件付自乗ノルムの最小化モデル定理が証明できる.

[定理2.2] (近似条件付自乗ノルムの最小化モデル定理)

式 (2.38) のように定義された式 (A1.8) の写像 T は, ラグランジュ乗数 b の正条件式 (2.12) の下で, 4性質

(イ) (零元 $\varphi = 0$ の T -不動点性; fixed-point property of zero element under mapping T)

$$\varphi = 0 \text{ のとき, } T\varphi = \varphi. \tag{2.39}$$

(ロ) (T の正定数倍吸収性; absorbent property about any positive real multiplicand a)

任意の正実定数 a に対し,

$$\forall \varphi \in \Phi, T(a \cdot \varphi) = T\varphi. \tag{2.40}$$

(ハ) (T のベキ等性; idempotent property)

$$\forall \varphi \in \Phi, T(T\varphi) = T\varphi. \tag{2.45}$$

(ニ) (写像 T の非零写像性; non-zero mapping property of T)

$$\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0. \tag{2.46}$$

を満たし, つまり, 式 (2.38) の如く定義される式 (A1.8) の写像 T は, axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半, 並びに, (iv) を満たす. □

定理2.2を証明するために, 2補助定理2.1, 2.2を先ず, 証明しておく.

[補助定理2.1] (零パターンモデル定理)

(i) $\varphi = \varphi_\perp$ について,

$$\forall k \in L, a_k(\varphi) = 0 \tag{2.47}$$

$$\wedge T\varphi = 0. \tag{2.48}$$

(ii) $\varphi = 0$ について, 2式 (2.47), (2.48) が成り立つ.

(証明) (i) の証明:式 (2.24) において, $\varphi = \varphi_\perp$ とおくと, b の正条件式 (2.12) を考慮すれば,

$$\forall \ell \in L, (\varphi_\perp, \psi_\ell) = 0 \tag{2.49}$$

が得られる. 従って, 連立1次方程式 (2.20) を解けば, 式 (1.1) の系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ は1次独立であるから, 式 (2.47) が得られる (式 (2.47) の成立は式 (2.23) から明らかである). よって, 0値計算

式 (2.35) を考慮すれば， u の定義式 (2.36) から

$$\forall k \in L, u(\varphi_{\perp}, k) = 0 \quad (2.50)$$

を得， T の定義式 (2.38) から，式 (2.48) が成り立つ。

(ii) の証明： $\varphi = 0$ とおくと，式 (2.23) から， $\varphi_{\perp} = 0$ を得，式 (2.49) が成り立ち，残りの証明は (i) と同様である。□

原パターン $\varphi \in \Phi$ の 1 次展開式 (2.23)，並びに， T の定義式 (2.38) からわかるように，各 $\phi_m (m \in L)$ は，パターン $\varphi \in \Phi$ ，パターンモデル $T\varphi \in \Phi$ の形状を決定する極小の要素であり，パターン形状素 (primitive shape-component) と呼ばれる。各形状素 $\phi_m (m \in L)$ は写像 T により完全に復元されるという次の補助定理 2.2 が成り立つ。

〔補助定理 2.2〕 (各形状素 $\phi_m (m \in L)$ の不動点定理)

任意の $m \in L$ について， $\varphi = \phi_m$ に対し，

$$a_{\ell}(\varphi) = [1 + b^{-1}]^{-1} \quad \text{if } \ell = m, = 0 \quad \text{if } \ell \neq m \quad (2.51)$$

$$\wedge T\varphi = \varphi \quad (\text{fixed-point equation}). \quad (2.52)$$

(証明) $\varphi = \phi_m$ に対し，連立 1 次方程式 (2.20) を解けば，

$$a_q(\varphi) = \begin{cases} (1 + b^{-1})^{-1} & \text{if } q = m \\ 0 & \text{if } q \neq m \end{cases} \quad (2.53)$$

であり，式 (2.51) が得られた。また，

$$\sup_{q \in L} |a_q(\varphi)| = (1 + b^{-1})^{-1} \quad (2.54)$$

であるから，抽出される特徴量 $u(\varphi, \ell)$ は， u の定義式 (2.36) から

$$u(\varphi, \ell) = 1 \quad \text{if } \ell = m, = 0 \quad \text{if } \ell \neq m \quad (2.55)$$

であることがわかり， T の定義式 (2.38) から

$$T\varphi = \phi_m = \varphi \quad (2.56)$$

を得，不動点方程式 (2.52) が得られた。□

(定理 2.2 の証明)

(イ) の証明：補助定理 2.1 の (ii) に示されている。

(ロ) の証明： a を正定数として， η を

$$\eta = a \cdot \varphi \quad (2.57)$$

とおく。

(ロ-1) $\exists k \in L, u(\varphi, k) \neq 0$ の場合

連立 1 次方程式 (2.20) を解けば，式 (1.1) の系 $\{\psi_{\ell}\}_{\ell \in L}$ は 1 次独立であるから，

$$\forall k \in L, a_k(a \cdot \varphi) = a \cdot a_k(\varphi) \quad (2.58)$$

を得， u の定義式 (2.36) から

$$\forall k \in L, u(\eta, k) = u(\varphi, k) \quad (2.59)$$

が判明し， T の定義式 (2.38) から

$$T\eta = T\varphi. \quad (2.60)$$

(ロ-2) $\forall k \in L, u(\varphi, k) = 0$ の場合

0 値計算規則式 (2.35)，並びに， u の定義式 (2.36) から，

$$\forall k \in L, a_k(\varphi) = 0 \quad (2.61)$$

であることがわかる。よって、式 (2.58) より、式 (1.1) の系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ は 1 次独立であるから、

$$\forall k \in L, a_k(a \cdot \varphi) = a \cdot a_k(\varphi) = 0 \tag{2.62}$$

を得、

$$\forall k \in L, u(\eta, k) = 0 = u(\varphi, k) \tag{2.63}$$

が成立する。それ故、 T の定義式 (2.38) から

$$T\eta = 0 = T\varphi. \tag{2.64}$$

(ハ) の証明： η を

$$\eta = T\varphi \tag{2.65}$$

とおく。

(ハ-1) $\exists k \in L, u(\varphi, k) \neq 0$ の場合

T の定義式 (2.38) から、 d_ℓ の定義式 (2.19) に付き、

$$(\eta, \psi_\ell) = \sum_{m \in L} u(\varphi, m) \cdot (\psi_m, \psi_\ell), \ell \in L \tag{2.66}$$

である。連立 1 次方程式 (2.20) を解けば、式 (1.1) の系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ は 1 次独立であるから、

$$(1+b^{-1}) \cdot a_q(\eta) = u(\varphi, q), q \in L \tag{2.67}$$

を得、

$$a_q(\eta) = (1+b^{-1})^{-1} \cdot u(\varphi, q), q \in L \tag{2.68}$$

がわかる。よって、2 式 (2.59), (2.60) が成り立つ。

(ハ-2) $\forall k \in L, u(\varphi, k) = 0$ の場合

式 (2.61) が成り立つ。また、 T の定義式 (2.38) から、 d_ℓ の定義式 (2.19) に付き、

$$(\eta, \psi_\ell) = 0, \ell \in L \tag{2.69}$$

を得、連立 1 次方程式 (2.20) を解けば、式 (1.1) の系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ は 1 次独立であるから、

$$\forall k \in L, a_k(\eta) = 0 \tag{2.70}$$

を得、2 式 (2.63), (2.64) が成立する。

(ニ) の証明： $\varphi = \psi_m$ ととれば、補助定理 2.2 から明らか。 □

2.6.2 写像 T が備えている単一化・簡素化双方の 2 性質

式 (2.38) のように定義された式 (A1.8) の写像 T は、節 2.1 で要求されている単一化・簡素化双方の 2 性質を満たすことを以下に示そう。

[単一化の性質]

原パターン $\varphi \in \Phi$ に対し、

$$\varphi_1 = a \cdot \varphi \text{ for any positive real number } a \tag{2.71}$$

$$\varphi_2 = T\varphi \tag{2.72}$$

$$\varphi_3 = \sum_{k \in L} a_k(\varphi) \cdot \psi_k \tag{2.73}$$

について、等式 (2.1) が成立し、3 種類のパターン

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \Phi \tag{2.74}$$

から共通の性質が抜き出され (定理 2.2 の (ロ), (ハ), 並びに、 T の定義式 (2.38) を参照), 共通のパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ に単一化されている。

[簡素化の性質]

$$T\varphi = T\left(\sum_{k \in L} a_k(\varphi) \cdot \psi_k + \varphi_\perp\right)$$

鈴木昇一：原パターンを近似できるという拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの，会話音声・動画像処理への応用

$$= T \left(\sum_{k \in L} a_k(\varphi) \cdot \psi_k \right) \quad (2.75)$$

が成立し ($\varphi \in \Phi$ の 1 次展開式 (2.23)，並びに， T の定義式 (2.38) を参照)，原パターン $\varphi \in \Phi$ から雑音 φ_{\perp} を除去できた形で，パターンモデル $T\varphi \in \Phi$ が求められている。□

上述のように，簡素化の性質は単一化の性質の 1 部にまとめられる場合が多い。

2.7 自乗ノルムの最小条件なしの場合は $b \rightarrow \infty$ で実現できる

1 次独立な系 $\{\psi_{\ell}\}_{\ell \in L}$ を用い，

$$\|\varphi - \sum_{\ell \in L} a_{\ell} \cdot \psi_{\ell}\|^2 \rightarrow \min \quad (2.76)$$

ならしめる各 1 次結合係数 $a_{\ell}(\varphi) \equiv a_{\ell}$ は，連立 1 次方程式

$$\sum_{q \in L} (\psi_q, \psi_{\ell}) \cdot a_q = (\varphi, \psi_{\ell}), \ell \in L \quad (2.77)$$

の解として与えられる。このとき， $\varphi \in \mathfrak{H}$ の表現 (1 次展開式)

$$\exists \varphi_{\perp} \in \mathfrak{H}, \varphi = \sum_{k \in L} a_k(\varphi) \cdot \psi_k + \varphi_{\perp} \quad (2.78)$$

$$\wedge [\forall \ell \in L, (\varphi_{\perp}, \psi_{\ell}) = 0] \quad (2.79)$$

が成り立つ。式 (1.1) の 1 次独立な系 $\{\psi_{\ell}\}_{\ell \in L}$ が式 (2.21) を満たすという意味で，直交系であれば，連立 1 次方程式 (2.77) の解 $a_{\ell}(\varphi) (\ell \in L)$ は

$$a_{\ell}(\varphi) = \frac{(\varphi, \psi_{\ell})}{(\psi_{\ell}, \psi_{\ell})}, \ell \in L \quad (2.80)$$

と求まることに気付く。

ラグランジュ乗数 b が

$$b \rightarrow \infty \quad (2.81)$$

という極限下で，連立 1 次方程式 (2.20) は連立 1 次方程式 (3.43) になり，上述の 1 次展開式 (2.78)，(2.79) が成り立つことがわかる。

定理 2.2 も， $b \rightarrow \infty$ なる極限化で成り立つことを確かめることができる。

式 (2.79) からわかるように，拘束条件 (自乗ノルムの最小条件) なしの場合は， $\varphi \in \mathfrak{H}$ の 1 次展開式 (2.78) での残余 (雑音) φ_{\perp} は，各形状素 $\psi_m (m \in L)$ と直交している。然るに，拘束条件 (自乗ノルムの最小条件) ありの場合は，式 (2.24) からわかるように， φ_{\perp} は各形状素 $\psi_m (m \in L)$ と直交してなくて， ψ_m と $(\varphi, \psi_m) / (b+1)$ だけの相関を持っている。

3. 近似拘束条件付き最要約化モデル構成作用素 T 内の，1 次独立な系 $\{\psi_{\ell}\}_{\ell \in L}$ の諸例

式 (A1.8) の写像 (モデル構成作用素) T の役割は，原パターン φ を簡素化し，ある程度相違しているパターンを一層相違しているように，また，ある程度似ているパターンを一層似ているように，原パターン φ を表現し直すことである。この役割を果たすためには，少なくとも式 (A1.8) の写像 T は，axiom 1 の (i)，(ii)，(iii) の 3 後半，並びに，(iv) を満たすことが必要とされると，SS 理論 [B1] ~ [B4] は主張している。

本章では、近似拘束条件付き最要約化モデル構成作用素と呼ばれてもよい T の定義式 (2.38) 内に登場する直交系 $\{\phi_\ell\}_{\ell \in L}$ 、1 次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ を会話音声、動画像の処理に応用できるように、7 節3.1~3.7において7例、構成する。

3.1 矩形波系

3.1.1 会話音声の場合

1次元直線上の座標系を採用した会話音声信号を、 $\varphi = \varphi(x) \in \mathfrak{H}$ 、 $a' \leq x < b'$ とする。可分なヒルベルト空間 \mathfrak{H} を

$$L_2(\{x | a' \leq x < b'\}; dx) \tag{3.1}$$

と選ぶ。内積

$$(\varphi, \eta) = \int_{a'}^{b'} dx \varphi(x) \cdot \bar{\eta}(x) \tag{3.2}$$

の定義の下で、ノルム $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ が定義される。 $\bar{\eta}$ は η の複素共役である。

区間 $[a', b'] \equiv \{x | a' \leq x < b'\}$ を n ($n \geq 1$) 等分すれば、その各等分点の座標 $a'(k)$ は、

$$a'(k) = a' + \frac{(b' - a')}{n} \cdot k, k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (n \geq 1) \tag{3.3}$$

である。正整数 n を十分大きく選ぶのがよい。そうすると、内積 (φ, η) は、

$$(\varphi, \eta) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a'(k)}^{a'(k+1)} dx \varphi(x) \cdot \bar{\eta}(x) \tag{3.4}$$

と表される。区間

$$[a'(k), a'(k+1)) \equiv \{x | a'(k) \leq x < a'(k+1)\} \tag{3.5}$$

を更に m ($m \geq 1$) 等分すると、その各等分点の座標 $a'(k, q)$ は、

$$a'(k, q) = a'(k) + \frac{(b' - a')}{n} \cdot \frac{1}{m} \cdot q, q = 0, 1, \dots, m \quad (m \geq 1) \tag{3.6}$$

である。正整数 m を十分大きく選ぶのがよい。系 $\{\psi_{(k, q)}\}_{k=0, 1, 2, \dots, n-1; m=0, 1, 2, \dots, m-1}$ の各成分 $\psi_{(k, q)} = \psi_{(k, q)}(x)$ は

$$\psi_{(k, q)}(x) = \begin{cases} 1 & \cdots a'(k, q) \leq x < a'(k, q+1) \text{ のとき} \\ 0 & \cdots x < a'(k, q) \vee x \geq a'(k, q+1) \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.7}$$

と設定される。等式

$$(\psi_{(k, q)}, \psi_{(\ell, r)}) = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq \ell \vee q \neq r \\ \frac{(b' - a')}{n} \cdot \frac{1}{m} & \text{if } k = \ell \vee q = r \end{cases} \tag{3.8}$$

が成り立ち、 $\{\psi_{(k, q)}\}_{k=0, 1, 2, \dots, n-1; m=0, 1, 2, \dots, m-1}$ は直交系である。 $(\varphi, \psi_{(k, q)})$ は、

$$(\varphi, \psi_{(k, q)}) = \int_{a'(k, q)}^{a'(k, q+1)} dx \varphi(x) \tag{3.9}$$

と計算され、系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ の添え字 ℓ の集合 L は、

$$L = \{\ell = \langle k, q \rangle | k = 0, 1, 2, \dots, n-1; q = 0, 1, 2, \dots, m-1\} \tag{3.10}$$

であることに注意しておく。

3.1.2 動画像関数の場合

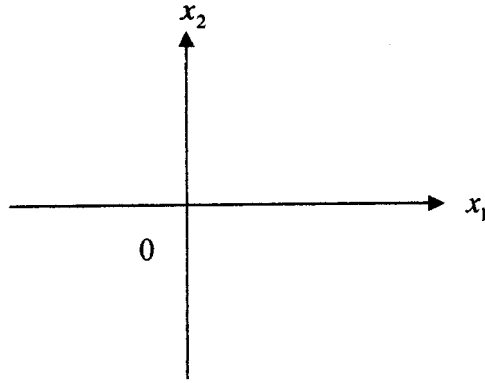


図3.1 直交座標系 (x_1, x_2)

Fig.3.1 A cartesian coordinate system (x_1, x_2)

2次元平面上の直角座標系 (x_1, x_2) を採用した動画像関数を， $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ ， $a' \leq x_1 < b'$ ， $a'' \leq x_2 < b''$ とする．

可分なヒルベルト空間 \mathfrak{H} を

$$L_2(\{(x_1, x_2) \mid a' \leq x_1 < b', a'' \leq x_2 < b''\}; dx_1 dx_2) \quad (3.11)$$

と選ぶ．内積

$$(\varphi, \eta) = \int_{a'}^{b'} dx_1 \int_{a''}^{b''} dx_2 \varphi(x_1, x_2) \cdot \bar{\eta}(x_1, x_2) \quad (3.12)$$

の定義の下で，ノルム $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ が定義される． $\bar{\eta}$ は η の複素共役である．

区間

$$[a', b'] \otimes [a'', b''] \equiv \{(x_1, x_2) \mid a' \leq x_1 < b', a'' \leq x_2 < b''\} \quad (3.13)$$

を各々， $n_1, n_2 (\geq 1)$ 等分すれば，その各等分点の座標 $a'(k)$ は，

$$a'(k_1) = a' + \frac{(b' - a')}{n_1} \cdot k_1, \quad k_1 = 0, 1, 2, \dots, n_1 \quad (n_1 \geq 1) \quad (3.14)$$

$$a''(k_2) = a'' + \frac{(b'' - a'')}{n_2} \cdot k_2, \quad k_2 = 0, 1, 2, \dots, n_2 \quad (n_2 \geq 1) \quad (3.15)$$

である．2正整数 n_1, n_2 を十分大きく選ぶのがよい．そうすると，内積 (φ, η) は，

$$(\varphi, \eta) = \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \int_{a'(k_1)}^{a'(k_1+1)} \int_{a''(k_2)}^{a''(k_2+1)} dx_1 dx_2 \varphi(x_1, x_2) \cdot \bar{\eta}(x_1, x_2) \quad (3.16)$$

と表される．2区間

$$[a'(k_1), a'(k_1+1)] \equiv \{x_1 \mid a'(k_1) \leq x_1 < a'(k_1+1)\} \quad (3.17)$$

$$[a''(k_2), a''(k_2+1)] \equiv \{x_2 \mid a''(k_2) \leq x_2 < a''(k_2+1)\} \quad (3.18)$$

を更に $m_1, m_2 (m_1, m_2 \geq 1)$ 等分すると，その各等分点の座標 $a'(k_1, q_1)$ ， $a''(k_2, q_2)$ は，

$$a'(k_1, q_1) = a'(k_1) + \frac{(b' - a')}{n_1} \cdot \frac{1}{m_1} \cdot q_1, \quad q_1 = 0, 1, \dots, m_1 \quad (m_1 \geq 1) \quad (3.19)$$

$$a''(k_2, q_2) = a'(k_2) + \frac{(b'' - a'')}{n_2} \cdot \frac{1}{m_2} \cdot q_2, \quad q_2 = 0, 1, \dots, m_2 (m_2 \geq 1) \quad (3.20)$$

である。2 整数 m_1, m_2 を十分大きく選ぶのがよい。系 $\{\phi_\ell\}_{\ell \in L}$ の添え字 ℓ の集合 L を、

$$L = \{\ell = \langle \langle k_1, q_1 \rangle \langle k_2, q_2 \rangle \rangle \mid k_1 = 0, 1, 2, \dots, n_1 - 1; k_2 = 0, 1, 2, \dots, n_2 - 1; q_1 = 0, 1, 2, \dots, m_1 - 1; q_2 = 0, 1, 2, \dots, m_2 - 1\} \quad (3.21)$$

と選ぶと、1 次独立な系

$$\begin{aligned} \psi_{\langle k_1, q_1 \rangle \langle k_2, q_2 \rangle}(x_1, x_2) &\equiv \psi'_{\langle k_1, q_1 \rangle}(x_1) \cdot \psi''_{\langle k_2, q_2 \rangle}(x_2) \\ k_1 = 0, 1, 2, \dots, n_1 - 1, k_2 = 0, 1, 2, \dots, n_2 - 1, & a' \leq x_1 < b', a'' \leq x_2 < b'' \\ q_1 = 0, 1, 2, \dots, m_1 - 1, q_2 = 0, 1, 2, \dots, m_2 - 1 & \end{aligned} \quad (3.22)$$

が設定される。ここに、系 $\{\phi_\ell\}_{\ell \in L}$ の各成分 $\phi_\ell = \psi_{\langle k_1, q_1 \rangle \langle k_2, q_2 \rangle}(x_1, x_2)$ は

$$\begin{aligned} \psi'_{\langle k_1, q_1 \rangle}(x_1) &= \\ \begin{cases} 1 \cdots a'(k_1, q_1) \leq x_1 < a'(k_1, q_1 + 1) \text{ のとき} \\ 0 \cdots x_1 < a'(k_1, q_1) \vee x_1 \geq a'(k_1, q_1 + 1) \text{ のとき} \end{cases} & \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \psi''_{\langle k_2, q_2 \rangle}(x_2) &= \\ \begin{cases} 1 \cdots a''(k_2, q_2) \leq x_2 < a''(k_2, q_2 + 1) \text{ のとき} \\ 0 \cdots x_2 < a''(k_2, q_2) \vee x_2 \geq a''(k_2, q_2 + 1) \text{ のとき} \end{cases} & \end{aligned} \quad (3.24)$$

と設定される。等式

$$\begin{aligned} (\psi_{\langle k_1, q_1 \rangle \langle k_2, q_2 \rangle}, \psi_{\langle \ell_1, r_1 \rangle \langle \ell_2, r_2 \rangle}) &= \\ \begin{cases} 0 & \text{if } \langle k_1, q_1 \rangle \neq \langle \ell_1, r_1 \rangle \vee \langle k_2, q_2 \rangle \neq \langle \ell_2, r_2 \rangle \\ \frac{(b' - a')}{n_1} \cdot \frac{1}{m_1} \cdot \frac{(b'' - a'')}{n_2} \cdot \frac{1}{m_2} & \text{if } \langle k_1, q_1 \rangle = \langle \ell_1, r_1 \rangle \wedge \langle k_2, q_2 \rangle = \langle \ell_2, r_2 \rangle \end{cases} & \end{aligned} \quad (3.25)$$

が成り立ち、 $\{\phi_\ell\}_{\ell \in L}$ は直交系である。

$$(\varphi, \psi_{\langle k_1, q_1 \rangle \langle k_2, q_2 \rangle}) = \int_{a'(k_1, q_1)}^{a'(k_1, q_1 + 1)} \int_{a''(k_2, q_2)}^{a''(k_2, q_2 + 1)} dx_1 dx_2 \varphi(x_1, x_2) \quad (3.26)$$

と計算される。

3.2 多項式系

3.2.1 会話音声の場合

会話音声信号を、 $\varphi = \varphi(x) \in \mathfrak{F}, a' \leq x < b'$ とし、4 式 (3.1) ~ (3.4) を導入しておく。

まず、 $-1 \leq z < +1$ の値をとる変数 z の 3 関数

$$g_0(z) = 1 \quad (\text{高さ 1 の水平線}) \quad (3.27)$$

$$g_1(z) = z \quad (\text{原点 } (0, 0) \text{ を通る傾き } 45 \text{ 度の直線}) \quad (3.28)$$

$$g_2(z) = z^2 - 1/3 \quad (\text{3 点 } (-1, 2/3), (0, -1/3), (+1, 2/3) \text{ を通る凹状の 2 次曲線}) \quad (3.29)$$

を導入すると、3 積分公式

$$\int_{-1}^{+1} dz g_0(z)^2 = 2 \quad (3.30)$$

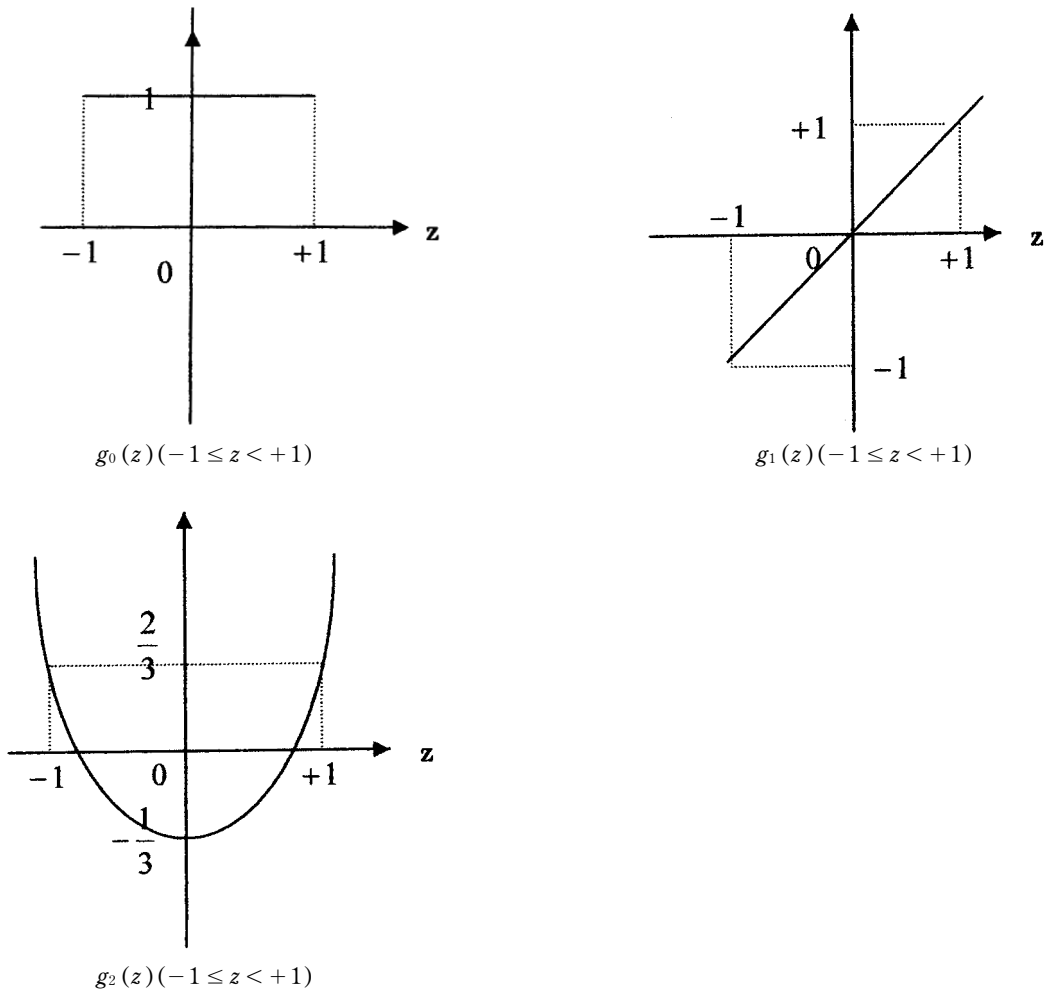


図3.2 3関数の形状 $g_0(z), g_1(z), g_2(z) (-1 \leq z < +1)$

Fig.3.2 Three configurations of three functions $g_0(z), g_1(z), g_2(z) (-1 \leq z < +1)$

$$\int_{-1}^{+1} dz g_1(z) = 2/3 \tag{3.31}$$

$$\int_{-1}^{+1} dz g_2(z)^2 = 8/45 \tag{3.32}$$

と，直交性

$$\int_{-1}^{+1} dz g_i(z) \cdot g_j(z) = 0 \quad \text{if } i \neq j \quad (i, j = 0, 1, 2) \tag{3.33}$$

とが成り立つ。

ここで、2つの区間

$$[-1, ;1] \equiv \{z \mid -1 \leq z < +1\}, [a'(k), a'(k+1)] \equiv \{x \mid a'(k) \leq x < a'(k+1)\} \quad (3.34)$$

の間の1対1の微分可能な関数 $z = h_k(x)$ は、

$$\begin{aligned} z = h_k(x) &= \frac{2}{a'(k+1) - a'(k)} \cdot \left(x - \frac{a'(k+1) - a'(k)}{2}\right) \\ &= \frac{n}{b' - a'} \cdot \left[x - \left\{a' + \frac{b' - a'}{n} \cdot \left(k + \frac{1}{2}\right)\right\}\right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

を使って、

$$\phi_{k,i}(x) \equiv g_i(h_k(x)) \quad \text{if } a'(k) \leq x < a'(k+1), = 0 \quad \text{otherwise} \quad (i = 0, 1, 2) \quad (3.36)$$

とおく。積分可能な関数 $y = f(h_k(x))$ について、積分公式

$$\int_{a'(k)}^{a'(k+1)} dx f(h_k(x)) = \frac{a'(k+1) - a'(k)}{2} \cdot \int_{-1}^{+1} dz f(z) = \frac{b' - a'}{2n} \cdot \int_{-1}^{+1} dz f(z) \quad (3.37)$$

が成り立つから、4積分公式

$$\int_{a'(k)}^{a'(k+1)} dx \phi_{k,i}(x) \cdot \phi_{k,j}(x) = 0 \quad (i \neq j) \quad (3.38)$$

$$\int_{a'(k)}^{a'(k+1)} dx \phi_{k,i}(x)^2 = \frac{b' - a'}{2n} \cdot c_{k,i}, \quad i = 0, 1, 2 \quad (3.39)$$

$$c_{k,0} = 2, c_{k,1} = 2/3, c_{k,2} = 8/45, k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.40)$$

が成り立ち、系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ の添え字 ℓ の集合 L を、

$$L = \{\ell = \langle k, q \rangle \mid k = 0, 1, 2, \dots, n-1; q = 0, 1, 2\} \quad (3.41)$$

とすると、

$$(\psi_{k,i}, \psi_{\ell,j}) = 0 \quad \text{if } k \neq \ell \vee i \neq j \quad (3.42)$$

が成り立ち、系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ は直交系である。

3.2.2 動画関数の場合

動画関数を、 $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$, $a' \leq x_1 < b'$, $a'' \leq x_2 < b''$ とし、6式 (3.11) ~ (3.16) を導入しておく。

系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ の添え字 ℓ の集合 L を、

$$L = \{\ell = \langle \langle k_1, q_1 \rangle \langle k_2, q_2 \rangle \rangle \mid k_1 = 0, 1, 2, \dots, n_1 - 1; k_2 = 0, 1, 2, \dots, n_2 - 1; q_1 = 0, 1, 2; q_2 = 0, 1, 2\} \quad (3.43)$$

と選ぶと、1次独立な系

$$\begin{aligned} \psi_{\langle k_1, q_1 \rangle \langle k_2, q_2 \rangle}(x_1, x_2) &\equiv \psi'_{\langle k_1, q_1 \rangle}(x_1) \cdot \psi''_{\langle k_2, q_2 \rangle}(x_2) \\ k_1 = 0, 1, 2, \dots, n_1 - 1; k_2 = 0, 1, 2, \dots, n_2 - 1, & a' \leq x_1 < b', a'' \leq x_2 < b'' \\ q_1 = 0, 1, 2; q_2 = 0, 1, 2 \end{aligned} \quad (3.44)$$

が設定される。ここに、系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ の各成分 $\psi_\ell = \psi_{\langle k_1, q_1 \rangle \langle k_2, q_2 \rangle}(x_1, x_2)$ については

$$\begin{aligned} \psi'_{\langle k_1, q_1 \rangle}(x_1) &\text{は、式 (3.36) の } \phi_{k,q}(x) \text{ において、} \\ k_1 = k, q_1 = q, x_1 = x \end{aligned} \quad (3.45)$$

とにおいて得られるものであり、また、 $\psi''_{\langle k_2, q_2 \rangle}(x_2)$ は、式 (3.36) の $\phi_{k,q}(x)$ において、

$$k_2 = k, q_2 = q, x_2 = x \quad (3.46)$$

とにおいて得られるものである。式 (3.36) と3式 (3.38) ~ (3.40) とを使って、等式

$$(\psi_{\langle k_1, q_1 \rangle \langle k_2, q_2 \rangle}, \psi_{\langle \ell_1, r_1 \rangle \langle \ell_2, r_2 \rangle}) =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{if } \langle k_1, q_1 \rangle \neq \langle \ell_1, r_1 \rangle \vee \langle k_2, \ell_2 \rangle \neq \langle \ell_2, r_2 \rangle \\ \frac{(b' - a')}{2n_1} \cdot c_{k_1, q_1} \cdots \frac{(b'' - a'')}{2n_2} \cdot c_{k_2, q_2} & \text{if } \langle k_1, q_1 \rangle = \langle \ell_1, r_1 \rangle \vee \langle k_2, \ell_2 \rangle = \langle \ell_2, r_2 \rangle \end{cases} \quad (3.47)$$

が成り立ち， $\{\phi_\ell\}_{\ell \in L}$ は直交系である．

3.3 ハル関数系

3.3.1 会話音声の場合

会話音声信号を， $\varphi = \varphi(x) \in \mathfrak{S}$ ， $a' \leq x < b'$ とし，6式 (3.1) ~ (3.6) を導入しておく．

ハル関数系 (Haar function) $har_{\langle p, q \rangle}(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) は，

$$har_{\langle p, q \rangle}(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = q = 0 \\ \sqrt{2^p} & \text{for } \frac{2k-2}{2^{p+1}} \leq t < \frac{2k-1}{2^{p+1}} \\ -\sqrt{2^p} & \text{if } \frac{2k-1}{2^{p+1}} \leq t < \frac{2k}{2^{p+1}} \end{cases} \quad p = 0, 1, 2, \dots, q = 1, 2, \dots, 2^p \quad (3.48)$$

と定義される．正規直交性

$$\int_0^1 dt har_{\langle p, q \rangle}(t) \cdot har_{\langle r, s \rangle}(t) = 1 \quad \text{if } p = r \wedge q = s, = 0 \quad \text{if } p \neq r \vee q \neq s \quad (3.49)$$

が成り立ち，フーリエ式展開 (完全性)

$$\forall t (0 \leq t \leq 1), \varphi(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2^p} \left[\int_0^1 ds \varphi(s) \cdot har_{\langle p, q \rangle}(s) \right] \cdot har_{\langle p, q \rangle}(t) \quad (3.50)$$

も成立する．区間 $z \in [0, 1)$ と区間 $x \in [a'(k), a'(k+1))$ との間の 1 対 1 を与える微分可能な関数 $z = g_k(x)$ は，

$$z = g_k(x) = \frac{1}{a'(k+1) - a'(k)} \cdot (x - a'(k)) = \frac{n}{b' - a'} \cdot (x - a'(k)) \quad (3.51)$$

であり，

$$\phi_{k, \langle p, q \rangle}(x) \equiv har_{\langle p, q \rangle}(g_k(x)) \quad \text{if } a'(k) \leq x < a'(k+1), = 0 \quad \text{otherwise} \quad (3.52)$$

とおくと，任意の積分可能な関数 $f(z)$ ($0 \leq z \leq 1$) について，

$$\int_{a'(k)}^{a'(k+1)} dx f(g_k(x)) = [a'(k+1) - a'(k)] \cdot \int_0^1 dz f(z) = \frac{b' - a'}{n} \cdot \int_0^1 dz f(z) \quad (3.53)$$

が成り立つことと，2式 (3.49)，(3.52) とを使うと，

$$\begin{aligned} (\phi_{k, \langle p, q \rangle}, \phi_{\ell, \langle r, s \rangle}) &= \\ \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq \ell \vee \langle p, q \rangle \neq \langle r, s \rangle \\ \frac{b' - a'}{n} & \text{if } k = \ell \wedge \langle p, q \rangle = \langle r, s \rangle \end{cases} \end{aligned} \quad (3.54)$$

が得られ，系

$$\{\phi_{k, \langle p, q \rangle}\}_{k=0, 1, 2, \dots, n-1; p=0, 1, 2, \dots; q=1, 2, \dots, 2^p} \quad (3.55)$$

は可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(\{x | a' \leq x < b'\}; dx)$ において完全直交系である。この完全直交系 $\{\phi_\ell\}_{\ell \in L}$ の添え字 ℓ の集合 L を、

$$L = \{\ell = \langle k, \langle p, q \rangle \rangle | k = 0, 1, 2, \dots, n-1; p = 0, 1, 2, \dots; q = 1, 2, \dots, 2^p\} \quad (3.56)$$

と選んでいることに注意しておく。

3.3.2 動画像関数の場合

動画像関数を、 $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$, $a' \leq x_1 < b'$, $a'' \leq x_2 < b''$ とし、6式(3.11) ~ (3.16)を導入しておく。

系 $\{\phi_\ell\}_{\ell \in L}$ の添え字 ℓ の集合 L を、

$$L = \{\ell = \langle \langle k_1, \langle p_1, q_1 \rangle \rangle \langle k_2, \langle p_2, q_2 \rangle \rangle \rangle | k_1 = 0, 1, 2, \dots, n_1-1; k_2 = 0, 1, 2, \dots, n_2-1; p_1 = 0, 1, 2, \dots; p_2 = 0, 1, 2, \dots; q_1 = 1, 2, \dots, 2^{p_1}; q_2 = 1, 2, \dots, 2^{p_2}\} \quad (3.57)$$

と選ぶと、1次独立な系

$$\begin{aligned} \phi_{\langle k_1, \langle p_1, q_1 \rangle \rangle \langle k_2, \langle p_2, q_2 \rangle \rangle}(x_1, x_2) &\equiv \phi'_{\langle k_1, \langle p_1, q_1 \rangle \rangle}(x_1) \cdot \phi''_{\langle k_2, \langle p_2, q_2 \rangle \rangle}(x_2) \\ k_1 = 0, 1, 2, \dots, n_1-1; k_2 = 0, 1, 2, \dots, n_2-1, \\ p_1 = 0, 1, 2, \dots, p_2 = 0, 1, 2, \dots, q_1 = 1, 2, \dots, 2^{p_1}; q_2 = 1, 2, \dots, 2^{p_2} \\ a' \leq x_1 < b', a'' \leq x_2 < b'' \end{aligned} \quad (3.58)$$

が設定される。ここに、系 $\{\phi_\ell\}_{\ell \in L}$ の各成分

$$\begin{aligned} \phi_\ell &= \phi_{\langle k_1, \langle p_1, q_1 \rangle \rangle \langle k_2, \langle p_2, q_2 \rangle \rangle}(x_1, x_2) \text{ については,} \\ \phi'_{\langle k_1, \langle p_1, q_1 \rangle \rangle}(x_1) &\text{ は, 式(3.52)の } \phi_{k, \langle p, q \rangle}(x) \text{ において,} \\ k_1 = k, p_1 = p, q_1 = q, x_1 = x \end{aligned} \quad (3.59)$$

とにおいて得られるものであり、また、 $\phi''_{\langle k_2, \langle p_2, q_2 \rangle \rangle}(x_2)$ は、式(3.52)の $\phi_{k, \langle p, q \rangle}(x)$ において、

$$k_2 = k, p_2 = p, q_2 = q, x_2 = x \quad (3.60)$$

とにおいて得られるものである。式(3.54)を使って、等式

$$\begin{aligned} &(\phi_{\langle k_1, \langle p_1, q_1 \rangle \rangle \langle k_2, \langle p_2, q_2 \rangle \rangle}, \phi_{\langle \ell_1, \langle r_1, s_1 \rangle \rangle \langle \ell_2, \langle r_2, s_2 \rangle \rangle}) = \\ &\begin{cases} 0 & \text{if } \langle \langle k_1, \langle p_1, q_1 \rangle \rangle \rangle \langle \ell_1, \langle r_1, s_1 \rangle \rangle \vee \langle \langle k_2, \langle p_2, q_2 \rangle \rangle \rangle \neq \langle \ell_2, \langle r_2, s_2 \rangle \rangle \\ \frac{(b' - a')}{n_1} \cdot \frac{(b'' - a'')}{n_2} & \text{if } \langle \langle k_1, \langle p_1, q_1 \rangle \rangle \rangle \langle \ell_1, \langle r_1, s_1 \rangle \rangle \wedge \langle \langle k_2, \langle p_2, q_2 \rangle \rangle \rangle = \langle \ell_2, \langle r_2, s_2 \rangle \rangle \end{cases} \end{aligned} \quad (3.61)$$

が成り立ち、 $\{\phi_\ell\}_{\ell \in L}$ は直交系である。

3.4 離散コサイン変換系

3.4.1 離散コサインによるフーリエ展開

離散コサイン関数 (discrete cosine function) の系 $\{\phi_k\}_{k=0, 1, 2, \dots, m-1}$ の各成分 ϕ_k は、

$$\begin{aligned} \phi_k(i) &= \\ &\begin{cases} 1/\sqrt{m} & \text{if } k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \cos\left\{\frac{(2i+1)}{2m} \cdot k\pi\right\} & \text{if } k = 1, 2, \dots, m-1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.62)$$

と定義される。2つの実数値関数

$$f = \{f(i) | i = 0, 1, 2, \dots, m-1\}, g = \{g(i) | i = 0, 1, 2, \dots, m-1\}$$

の内積 $\langle f, g \rangle$ と、関数 f のノルム $|f|$ を各々、

鈴木昇一：原パターンを近似できるという拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの，会話音声・動画像処理への応用

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{m-1} f(i) \cdot g(i), |f| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (3.63)$$

と導入する．正規直交性

$$\langle \phi_k, \phi_\ell \rangle = 1 \quad \text{if } k = \ell, = 0 \quad \text{if } k \neq \ell \quad (3.64)$$

が成立し，完全性

$$\langle f, \phi_k \rangle = 0, k = 0, 1, 2, \dots, m-1 \Rightarrow \langle f, f \rangle = 0 \quad (3.65)$$

が成立することが知られている．2式 (3.64), (3.65) を利用すると，フーリエ式展開

$$f(i) = \sum_{k=0}^{m-1} \langle f, \phi_k \rangle \cdot \phi_k(i), i = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (3.66)$$

も成り立つ．

$$\langle f, \phi_k \rangle, k = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (3.67)$$

は， f の離散コサイン変換(DCT; discrete cosine transform)といわれ， f の逆離散コサイン変換(IDCT; inverse discrete cosine transform)とは f のフーリエ式展開式 (3.66) のことである．(文献 [A1] の7.4節 離散コサイン変換を参照)．

3.4.2 会話音声の場合

前項3.4.1の離散コサイン変換を利用することを考えよう．

会話音声信号を， $\varphi = \varphi(x) \in \mathfrak{S}$ ， $a' \leq x < b'$ とし，5式 (3.1) ~ (3.3)，(3.5)，(3.6) を導入しておく．

会話音声信号 φ の， $x = a'(k, q)$ のときの値

$$\varphi[k, q] \equiv \varphi(a'(k, q)), k = 0, 1, 2, \dots, n-1; q = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (3.68)$$

を導入する．

以後， $\varphi = \varphi(x) \in \mathfrak{S}$ ， $a' \leq x < b'$ は式 (3.68) のサンプル関数値 $\varphi[k, q]$ の集合

$$\{\varphi[k, q]\}_{k=0, 1, 2, \dots, n-1; q=0, 1, 2, \dots, m-1} \quad (3.69)$$

と同一視される．内積 (φ, η) ，ノルム $\|\varphi\|$ をも

$$(\varphi, \eta) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} \varphi[k, q] \cdot \eta[k, q], \|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \quad (3.70)$$

と導入しておく．任意の添え字 $k = 0, 1, 2, \dots, n-1, q = 0, 1, 2, \dots, m-1$ について，関数

$$\psi_{(k, q)} = \{\psi_{(k, q)}[\ell, r] \mid \ell = 0, 1, 2, \dots, n-1; r = 0, 1, 2, \dots, m-1\} \quad (3.71)$$

を，

$$\psi_{(k, q)}[\ell, r] = \begin{cases} 0 \cdots k \neq \ell \text{ のとき} \\ 1/\sqrt{m} \cdots k = \ell \wedge q = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \cos\left\{\frac{(2r+1)}{2m} \cdot q\pi\right\} \cdots k = \ell \wedge q = 1, 2, \dots, m-1 \text{ のとき} \end{cases} \\ \ell = 0, 1, 2, \dots, n-1; r = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (3.72)$$

と定義する．

正規直交性

$$(\psi_{(k, q)}, \psi_{(\ell, r)}) =$$

$$\begin{cases} 0 \cdots k \neq \ell \vee q \neq r \text{ のとき} \\ 1 \cdots k = \ell \wedge q = r \text{ のとき} \end{cases} \quad (3.73)$$

と、完全性

$$(\varphi, \psi_{\langle k, q \rangle}) = 0, k = 0, 1, 2, \dots, n-1; q = 0, 1, 2, \dots, m-1 \Rightarrow \|\varphi\| = 0 \quad (3.74)$$

が成り立つ。サンプル関数値 $\varphi[k, q]$ の、式 (3.69) の集合のフーリエ式展開

$$\varphi[\ell, r] = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} (\varphi, \psi_{\langle k, q \rangle}) \cdot \psi_{\langle k, q \rangle}[\ell, r], \ell = 0, 1, 2, \dots, n-1; r = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (3.75)$$

が成り立つ。系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ の添え字 ℓ の集合 L を、

$$L = \{\ell = \langle k, q \rangle \mid k = 0, 1, 2, \dots, n-1; q = 0, 1, 2, \dots, m-1\} \quad (3.76)$$

とすると、系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ は完全正規直交系である。

3.4.3 動画関数の場合

動画関数を、 $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$, $a' \leq x_1 < b'$, $a'' \leq x_2 < b''$ とし、9式 (3.11), (3.13) ~ (3.15), (3.17) ~ (3.21) を導入しておく。

$$\begin{aligned} \varphi[\langle k_1, q_1 \rangle, \langle k_2, q_2 \rangle] &\equiv \varphi(a' \langle k_1, q_1 \rangle, a'' \langle k_2, q_2 \rangle) \\ k_1 = 0, 1, 2, \dots, n_1-1; k_2 = 0, 1, 2, \dots, n_2-1; q_1 = 0, 1, 2, \dots, m_1-1; q_2 = 0, 1, 2, \dots, m_2-1 \end{aligned} \quad (3.77)$$

を導入する。

以後、 $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$, $a' \leq x_1 < b'$, $a'' \leq x_2 < b''$ は式 (3.77) のサンプル関数値 $\varphi[\langle k_1, q_1 \rangle, \langle k_2, q_2 \rangle]$ の集合

$$\begin{aligned} &\{\varphi[\langle k_1, q_1 \rangle, \langle k_2, q_2 \rangle]\} \\ &k_1 = 0, 1, 2, \dots, n_1-1; k_2 = 0, 1, 2, \dots, n_2-1; q_1 = 0, 1, 2, \dots, m_1-1; q_2 = 0, 1, 2, \dots, m_2-1 \end{aligned} \quad (3.78)$$

と同一視される。内積 (φ, η) , ノルム $\|\varphi\|$ をも

$$(\varphi, \eta) = \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \sum_{q_1=0}^{m_1-1} \sum_{q_2=0}^{m_2-1} \varphi[\langle k_1, q_1 \rangle, \langle k_2, q_2 \rangle] \cdot \eta[\langle k_1, q_1 \rangle, \langle k_2, q_2 \rangle], \|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \quad (3.79)$$

と導入しておく。

1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ の添え字 ℓ の集合 L は、式 (3.21) で与えられる。

任意の添え字

$$k_1 = 0, 1, 2, \dots, n_1-1; k_2 = 0, 1, 2, \dots, n_2-1; q_1 = 0, 1, 2, \dots, m_1-1; q_2 = 0, 1, 2, \dots, m_2-1 \quad (3.80)$$

について、関数

$$\begin{aligned} &\psi_{\langle k_1, q_1 \rangle, \langle k_2, q_2 \rangle} \\ &= \{\psi_{\langle k_1, q_1 \rangle, \langle k_2, q_2 \rangle}[\langle \ell_1, r_1 \rangle, \langle \ell_2, r_2 \rangle]\} \\ &\ell_1 = 0, 1, 2, \dots, n_1-1; \ell_2 = 0, 1, 2, \dots, n_2-1; r_1 = 0, 1, 2, \dots, m_1-1; r_2 = 0, 1, 2, \dots, m_2-1 \end{aligned} \quad (3.81)$$

が、

$$\psi_\ell[\langle \ell_1, r_1 \rangle, \langle \ell_2, r_2 \rangle] \equiv \psi_{\langle \ell_1, q_2 \rangle, \langle k_2, q_2 \rangle}[\langle \ell_1, r_1 \rangle, \langle \ell_2, r_2 \rangle] \equiv \psi'_{\langle k_1, q_1 \rangle}[\langle \ell_1, r_1 \rangle] \cdot \psi''_{\langle k_2, q_2 \rangle}[\langle \ell_2, r_2 \rangle] \quad (3.82)$$

と設定される。ここに、系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ の各成分 $\psi_\ell = \psi_{\langle k_1, q_1 \rangle, \langle k_2, q_2 \rangle}$ については

$$\begin{aligned} &\psi'_{\langle k_1, q_1 \rangle}[\langle \ell_1, r_1 \rangle] \text{ は、式 (3.72) の } \psi_{k, q}[\ell, r] \text{ において、} \\ &k_1 = k, q_1 = q, \ell_1 = \ell, r_1 = r \end{aligned} \quad (3.83)$$

とにおいて得られるものであり、また、 $\psi''_{\langle k_2, q_2 \rangle}[\langle \ell_1, r_1 \rangle]$ は、式 (3.72) の $\psi_{k, q}[\ell, r]$ において、

$$k_2 = k, q_2 = q, \ell_2 = \ell, r_2 = r \quad (3.84)$$

とにおいて得られるものである。式 (3.73) を使って、正規直交性

$$\begin{aligned}
 & (\psi_{\langle k_1, q_1 \rangle, \langle k_2, q_2 \rangle}, \psi_{\langle \ell_1, r_1 \rangle, \langle \ell_2, r_2 \rangle}) = \\
 & \begin{cases} 1 & \text{if } \langle k_1, q_1 \rangle \neq \langle \ell_2, r_1 \rangle \vee \langle k_2, q_2 \rangle \neq \langle \ell_2, r_2 \rangle \\ 0 & \text{if } \langle k_1, q_1 \rangle = \langle \ell_1, r_1 \rangle \wedge \langle k_2, q_2 \rangle = \langle \ell_2, r_2 \rangle \end{cases} \quad (3.85)
 \end{aligned}$$

が成り立ち， $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ は完全正規直交系であり，実は， $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ は完全系でもあり，その結果，サンプル関数値 $\varphi[k, q]$ の，式 (3.69) の集合のフーリエ展開

$$\begin{aligned}
 \varphi[\langle \ell_1, r_1 \rangle, \langle \ell_2, r_2 \rangle] &= \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{m_2-1} \sum_{q_1=0}^{m_2-1} \sum_{q_2=0}^{m_2-1} (\varphi, \psi_{\langle k_1, q_1 \rangle, \langle k_2, q_2 \rangle}) \cdot \psi_{\langle k_1, q_1 \rangle, \langle k_2, q_2 \rangle} [\langle \ell_1, r_1 \rangle, \langle \ell_2, r_2 \rangle] \\
 & , \ell_1 = 0, 1, 2, \dots, n_1-1; \ell_2 = 0, 1, 2, \dots, n_2-1; r_1 = 0, 1, 2, \dots, m_1-1; r_2 = 0, 1, 2, \dots, m_2-1 \quad (3.86)
 \end{aligned}$$

が成り立つ。

3.5 三角関数系

3.5.1 三角関数系によるフーリエ展開

パターン

$$\varphi(t), \quad -p < t < +p \quad (p > 0) \quad (3.87)$$

を考える。内積 (φ, η) ，ノルム $\|\varphi\|$ を

$$(\varphi, \eta) = \int_{-p}^{+p} dt \varphi(t) \cdot \bar{\eta}(t), \quad \|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \quad (3.88)$$

と導入する。添え字 ℓ の集合 L を

$$L = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad (3.89)$$

として，系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ の各成分 ψ_ℓ を

$$\phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \quad (3.90)$$

$$\phi_q(t) = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \cos\left(\frac{\pi q}{p} \cdot t\right), \quad q = 1, 2, \dots \quad (3.91)$$

$$\phi_{-q}(t) = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \sin\left(\frac{\pi q}{p} \cdot t\right), \quad q = 1, 2, \dots \quad (3.92)$$

と定義する。正規直交性

$$(\phi_q, \phi_s) = 1 \quad \text{if } q = s, = 0 \quad \text{if } q \neq s \quad (3.93)$$

が成り立ち，完全性

$$(\varphi, \phi_q) = 0, \quad q = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow \|\varphi\| = 0 \quad (3.94)$$

も成り立つ。よって，パターン $\varphi = \varphi(t)$ のフーリエ展開

$$\varphi(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (\varphi, \phi_q) \cdot \phi_q(t), \quad -\infty < t < +\infty \quad (3.95)$$

が成り立つ。

3.5.2 会話音声の場合

会話音声信号を， $\varphi = \varphi(x) \in \mathfrak{F}$ ， $a' \leq x < b'$ とし，5式 (3.1) ~ (3.5) を導入しておく。区間 $z \in [-p, +p]$ と区間 $x \in [a'(k), a'(k+1))$ との間の1対1を与える微分可能な関数 $z = g_k(x)$ は，

$$z = g_k(x) = \frac{2p}{a'(k+1) - a'(k)} \cdot (x - a'(k)) - p = \frac{2p}{(b' - a')/n} \cdot (x - a'(k)) - p \quad (3.96)$$

であり,

$$\phi_{k,q}(x) \equiv \phi_q(g_k(x)) \quad \text{if } a'(k) \leq x < a'(k+1), = 0 \quad \text{otherwise} \quad (3.97)$$

とおくと, 任意の積分可能な関数 $f(z)$ ($-p \leq z < -p$) について,

$$\int_{a'(k)}^{a'(k+1)} dx f(g_k(x)) = \frac{a'(k+1) - a'(k)}{2p} \cdot \int_{-p}^{+p} dz f(z) = \frac{1}{2p} \cdot \frac{b' - a'}{n} \cdot \int_{-p}^{+p} dz f(z) \quad (3.98)$$

が成り立つことと, 式 (3.93) を使うと,

$$(\phi_{k,q}, \phi_{\ell,s}) = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq \ell \vee q \neq s \\ \frac{1}{2p} \cdot \frac{b' - a'}{n} & \text{if } k = \ell \wedge q = s \end{cases} \quad (3.99)$$

が得られ, 系

$$\{\phi_{k,q}\}_{k=0,1,2,\dots,n-1; q=0,\pm 1,\pm 2,\dots} \quad (3.100)$$

は可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(\{x | a' \leq x < b'\}; dx)$ において完全直交系である. この完全直交系 $\{\phi_{\ell}\}_{\ell \in L}$ の添え字 ℓ の集合 L を,

$$L = \{\ell = \langle k, q \rangle | k = 0, 1, 2, \dots, n-1; q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad (3.101)$$

と選んでいることに注意しておく.

3.5.3 動画像関数の場合

動画像関数を, $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$, $a' \leq x_1 < b'$, $a'' \leq x_2 < b''$ とし, 6式 (3.11) ~ (3.16) を導入しておく.

系 $\{\phi_{\ell}\}_{\ell \in L}$ の添え字 ℓ の集合 L を,

$$L = \{\ell = \langle \langle k_1, q_1 \rangle \langle k_2, q_2 \rangle \rangle | k_1 = 0, 1, 2, \dots, n_1 - 1; k_2 = 0, 1, 2, \dots, n_2 - 1; q_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, q_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad (3.102)$$

と選ぶと, 1次独立な系

$$\begin{aligned} \phi_{\langle k_1, q_1 \rangle \langle k_2, q_2 \rangle}(x_1, x_2) &\equiv \phi'_{\langle k_1, q_1 \rangle}(x_1) \cdot \phi''_{\langle k_2, q_2 \rangle}(x_2) \\ k_1 = 0, 1, 2, \dots, n_1 - 1; k_2 = 0, 1, 2, \dots, n_2 - 1, & a' \leq x_1 < b', a'' \leq x_2 < b'' \\ q_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; q_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots & \end{aligned} \quad (3.103)$$

が設定される. ここに, 系 $\{\phi_{\ell}\}_{\ell \in L}$ の各成分 $\phi_{\ell} = \phi_{\langle k_1, q_1 \rangle \langle k_2, q_2 \rangle}(x_1, x_2)$ については, $\phi'_{\langle k_1, q_1 \rangle}(x_1)$ は, 式 (3.97) の $\phi_{k,q}(x)$ において,

$$k_1 = k, q_1 = q, x_1 = x \quad (3.104)$$

とおいて得られるものであり, また, $\phi''_{\langle k_2, q_2 \rangle}(x_2)$ は, 式 (3.97) の $\phi_{k,q}(x)$ において,

$$k_2 = k, q_1 = q, x_2 = x \quad (3.105)$$

とおいて得られるものである. 式 (3.99) を使って, 等式

$$(\phi_{\langle k_1, q_1 \rangle \langle k_2, q_2 \rangle}, \phi_{\langle \ell_1, r_1 \rangle \langle \ell_2, r_2 \rangle}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \langle k_1, q_1 \rangle \neq \langle \ell_1, r_1 \rangle \vee \langle k_2, q_2 \rangle \neq \langle \ell_2, r_2 \rangle \\ \frac{1}{2p} \cdot \frac{(b' - a')}{n_1} \cdot \frac{1}{2p} \cdot \frac{(b'' - a'')}{n_2} & \text{if } \langle k_1, q_1 \rangle = \langle \ell_1, r_1 \rangle \wedge \langle k_2, q_2 \rangle = \langle \ell_2, r_2 \rangle \end{cases} \quad (3.106)$$

が成り立ち， $\{\phi_\ell\}_{\ell \in L}$ は直交系である．

3.6 区分的1次関数系

3.6.1 会話音声の場合

会話音声信号を， $\varphi = \varphi(x) \in \mathfrak{S}$ ， $a' \leq x < b'$ とし，6式 (3.1) ～ (3.6) を導入しておく．

図3.3にその形状が示されている4関数

$$\phi_0(z), \phi_1(z), \phi_2(z), \phi_3(z) (0 \leq z < 2) \quad (3.107)$$

を次のように導入する．

$$\textcircled{1} \phi_0(z) = \begin{cases} 0 \cdots z < 0 \text{ のとき} \\ 1 \cdots 1 \leq z < 2 \text{ のとき} \\ 0 \cdots 2 \leq z \text{ のとき} \end{cases} \quad (3.108)$$

$$\textcircled{2} \phi_1(z) = \begin{cases} 0 \cdots z < 0 \text{ のとき} \\ 1 - z \cdots 0 \leq z < 1 \text{ のとき} \\ 0 \cdots 1 \leq z \text{ のとき} \end{cases} \quad (3.109)$$

$$\textcircled{3} \phi_2(z) = \begin{cases} 0 \cdots z < 0 \text{ のとき} \\ z \cdots 0 \leq z < 1 \text{ のとき} \\ 2 - z \cdots 1 \leq z < 2 \text{ のとき} \\ 0 \cdots 2 \leq z \end{cases} \quad (3.110)$$

$$\textcircled{4} \phi_3(z) = \begin{cases} 0 \cdots z < 1 \text{ のとき} \\ z - 1 \cdots 1 \leq z < 2 \text{ のとき} \\ 0 \cdots 2 \leq z \text{ のとき} \end{cases} \quad (3.111)$$

を用意し (②, ③, ④) については文献 [A2] の6.3節のk-1次のB-スプラインを用いた双スプラインを参照)，会話音声 φ の中に，

水平線の形状の $\phi_0(z) = \text{———}$

右下がり直線 + 水平線の形状 $\phi_1(z) = \text{———}$

山型の形状 $\phi_2(z) = \text{———}$

水平線 + 右上がり直線の形状 $\phi_3(z) = \text{———}$ (3.112)

を知覚することを考えよう．系 $\{\phi_q\}_{q=0,1,2,3}$ は1次独立な系である．因みに，3つの合成関数

$$\phi_4(z) \equiv \phi_1(z) + \phi_2(z), \phi_5(z) \equiv \phi_1(z) + \phi_3(z), \phi_6(z) \equiv \phi_2(z) + \phi_3(z) (0 \leq z < 2) \quad (3.113)$$

の形状は，図3.4に示されている．

$$\langle \varphi, \eta \rangle \equiv \int_0^2 dz \varphi(z) \cdot \eta(z) \quad (3.114)$$

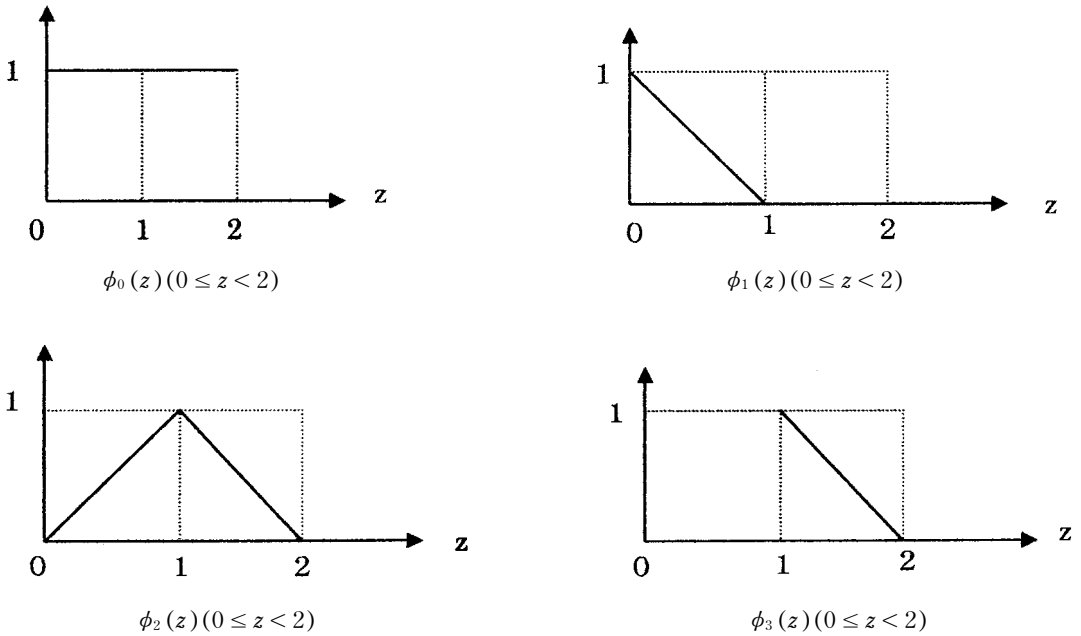


図3.3 4つの関数の形状 $\phi_0(z)$, $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$, $\phi_3(z)$ ($0 \leq z < 2$)
 Fig.3.3 Four configurations of four functions $\phi_0(z)$, $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$, $\phi_3(z)$ ($0 \leq z < 2$)

を導入し,

$$c_{pq} \equiv (\phi_p, \phi_q) \tag{3.115}$$

を計算すると,

$$\begin{aligned} c_{00} &= 2, c_{01} = 1/2, c_{02} = 1, c_{03} = 1/2 \\ c_{11} &= 1/3, c_{12} = 1/6, c_{13} = 0 \\ c_{22} &= 4/3, c_{23} = 1/6 \\ c_{33} &= 1/3 \end{aligned} \tag{3.116}$$

である.

区間 $z \in [0, 2)$ と区間 $x \in [a'(k), a'(k+1))$ との間の1対1を与える無限回微分可能な関数 $z = h_k(x)$ は

$$z = h_k(x) = \frac{2 \cdot [x - a'(k)]}{a'(k+1) - a'(k)} = \frac{2n[x - a'(k)]}{b' - a'} \tag{3.117}$$

である.

会話音声信号を, $\varphi = \varphi(x) \in \mathfrak{S}$, $a' \leq x < b'$ とし, 5式(3.1) ~ (3.5)を導入しておく.

$$\psi_{(k,q)}(x) \equiv \phi_q(h_k(x)) \quad \text{if } a'(k) \leq x < a'(k+1), = 0 \quad \text{otherwise,} \tag{3.118}$$

$$L = \{\ell = \langle k, q \rangle \mid k = 0, 1, 2, \dots, n-1, q = 0, 1, 2, \dots, m-1\} \tag{3.119}$$

を導入して, 連立1次方程式(2.20)の解 $a_{(k,q)}(\varphi) \equiv a_\ell(\varphi)$ を求めたしよう. 式(2.38)のパター

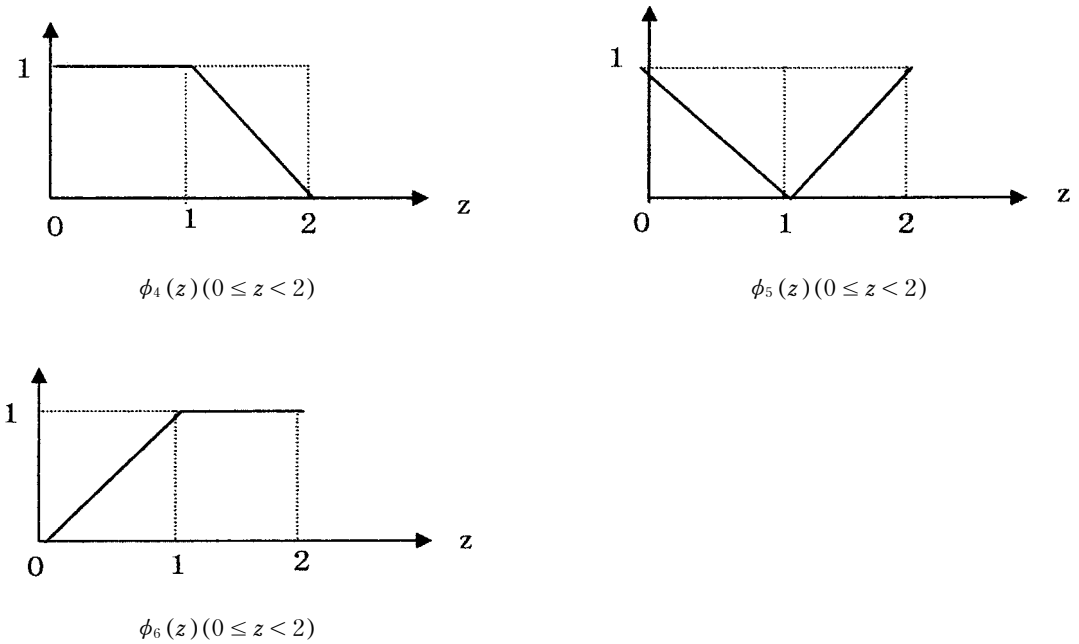


図3.4 3つの関数

$\phi_4(z) \equiv \phi_1(z) + \phi_2(z)$, $\phi_5(z) \equiv \phi_1(z) + \phi_3(z)$, $\phi_6(z) \equiv \phi_2(z) + \phi_3(z)$ ($0 \leq z < 2$)の形状

Fig.3.4 Three configurations of three functions

$\phi_4(z) \equiv \phi_1(z) + \phi_2(z)$, $\phi_5(z) \equiv \phi_1(z) + \phi_3(z)$, $\phi_6(z) \equiv \phi_2(z) + \phi_3(z)$ ($0 \leq z < 2$)

ンモデル $(T\varphi)(x)$ 内の，式 (2.36) の特徴量（1次結合係数）

$$u(\varphi, \ell) = u(\varphi, \langle k, q \rangle) = a_{\langle k, q \rangle}(\varphi) / \sup_{\langle k, q \rangle \in L} |a_{\langle k, q \rangle}(\varphi)| \quad (3.120)$$

は，小区間 $[a'(k), a'(k+1)] \equiv \{x \mid a'(k) \leq x < a'(k+1)\}$ において，パターン $\varphi \in \Phi$ と形状素 ϕ_q との相関の程度を表している。

連立1次方程式 (2.20) の解 $a_{\langle k, q \rangle}(\varphi)$ を求めるためには，事前に

$$(\psi_{\langle k, q \rangle}, \psi_{\langle \ell, r \rangle}), k, \ell = 0, 1, 2, \dots, n-1, q, r = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (3.121)$$

を求めておくとよい。まず，

$$(\psi_{\langle k, q \rangle}, \psi_{\langle \ell, r \rangle}) = 0 \quad \text{if} \quad k \neq \ell \quad (3.122)$$

に注意する。

任意の積分可能な関数 $f(z)$ ($0 \leq z < 1$) について，

$$\int_{a'(k)}^{a'(k+1)} dx f(h_k(x)) = \frac{a'(k+1) - a'(k)}{2} \cdot \int_0^2 dz f(z) = \frac{b' - a'}{2n} \cdot \int_0^2 dz f(z) \quad (3.123)$$

が成り立つことと，2式 (3.116) とを使うと，

$$(\psi_{\langle k, q \rangle}, \psi_{\langle \ell, r \rangle}) =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{if } k \neq \ell \\ \frac{b' - a'}{2n} \cdot c_{qr} & \text{if } k = \ell \end{cases} \quad (3.124)$$

が得られ、系

$$\{\psi_\ell\}_{\ell \in L} = \{\psi_{\langle k, q \rangle}\}_{k=0, 1, 2, \dots, n-1; q=0, 1, 2, 3} \quad (3.125)$$

は可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(\{x \mid a' \leq x < b'; dx\})$ において1次独立な系である。

3.6.2 動画像関数の場合

動画像関数を、 $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$, $a' \leq x_1 < b'$, $a'' \leq x_2 < b''$ とし、6式(3.11) ~ (3.16)を導入しておく。

式(3.107)の4関数 $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ から得られる式(3.124)の1次独立な系 $\{\psi_{\langle k, q \rangle}\}_{k=0, 1, 2, \dots, n-1; q=0, 1, 2, 3}$ を用意し、系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ の添え字 ℓ の集合 L を、

$$L = \{\langle k_1, q_1 \rangle \langle k_2, q_2 \rangle \mid k_1 = 0, 1, 2, \dots, n_1 - 1; k_2 = 0, 1, 2, \dots, n_2 - 1; q_1 = 0, 1, 2, 3; q_2 = 0, 1, 2, 3\} \quad (3.126)$$

と選ぶと、1次独立な系

$$\begin{aligned} \psi_\ell(x_1, x_2) &\equiv \psi_{\langle k_1, q_1 \rangle \langle k_2, q_2 \rangle}(x_1, x_2) \equiv \psi'_{q_1}(h_{k_1}(x_1)) \cdot \psi''_{q_2}(h_{k_2}(x_2)) \\ k_1 &= 0, 1, 2, \dots, n_1 - 1; k_2 = 0, 1, 2, \dots, n_2 - 1, \quad a' \leq x_1 < b', \quad a'' \leq x_2 < b'' \\ q_1 &= 0, 1, 2, 3; q_2 = 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.127)$$

を導入できる。系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ の各成分 $\psi_\ell = \psi_{\langle k_1, q_1 \rangle \langle k_2, q_2 \rangle}(x_1, x_2)$ については

$$\begin{aligned} \psi'_{\langle k_1, q_1 \rangle}(x_1) &\text{は、式(3.118)の}\psi_{\langle k, q \rangle}(x)\text{において、} \\ k_1 &= k, q_1 = q, x_1 = x \end{aligned} \quad (3.128)$$

とにおいて得られるものであり、また、 $\psi''_{\langle k_2, q_2 \rangle}(x_2)$ は、式(3.118)の $\psi_{\langle k, q \rangle}(x)$ において、

$$k_2 = k, q_2 = q, x_2 = x \quad (3.129)$$

とにおいて得られるものである

連立1次方程式(2.20)の解 $a_{\langle \langle k_1, q_1 \rangle \langle k_2, q_2 \rangle \rangle}(\varphi) \equiv a_\ell(\varphi)$ を求めることを考えよう。

式(2.38)のパターンモデル $(T\varphi)(x)$ 内の式(2.36)の特徴量(1次結合係数)

$$\begin{aligned} u(\varphi, \ell) &= u(\varphi, \langle \langle k_1, q_1 \rangle, \langle k_2, q_2 \rangle \rangle) \\ &= a_{\langle \langle k_1, q_1 \rangle, \langle k_2, q_2 \rangle \rangle}(\varphi) / \sup_{\langle \langle k_1, q_1 \rangle, \langle k_2, q_2 \rangle \rangle \in L} |a_{\langle \langle k_1, q_1 \rangle, \langle k_2, q_2 \rangle \rangle}(\varphi)| \end{aligned} \quad (3.130)$$

は、小区間

$$\begin{aligned} &[a'(k_1), a'(k_1+1)] \otimes [a''(k_2), a''(k_2+1)] \\ &\equiv \{(x_1, x_2) \mid a'(k_1) \leq x_1 < a'(k_1+1), a''(k_2) \leq x_2 < a''(k_2+1)\} \end{aligned} \quad (3.131)$$

において、パターン $\varphi \in \Phi$ と形状素 $\psi_{q_1} \cdot \psi_{q_2}$ との相関の程度を表している。

連立1次方程式(3.20)の解 $a_{\langle \langle k_1, q_1 \rangle, \langle k_2, q_2 \rangle \rangle}(\varphi)$ を求めるために、事前に

$$\begin{aligned} &(\psi_{\langle k_1, q_1 \rangle \langle k_2, q_2 \rangle}, \psi_{\langle \ell_1, r_1 \rangle \langle \ell_2, r_2 \rangle}), k_1, \ell_1 = 0, 1, 2, \dots, n_1 - 1; k_2, \ell_2 = 0, 1, 2, \dots, n_2 - 1; \\ &q_1, r_1 = 0, 1, 2, 3; q_2, r_2 = 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.132)$$

を求めておくとよい。まず、

$$(\psi_{\langle k_1, q_1 \rangle \langle k_2, q_2 \rangle}, \psi_{\langle \ell_1, r_1 \rangle \langle \ell_2, r_2 \rangle}) = 0 \quad \text{if } k_1 \neq \ell_1 \vee k_2 \neq \ell_2 \quad (3.133)$$

に注意する。そして、式(3.124)を考慮すれば、

$$(\psi_{\langle k_1, q_1 \rangle \langle k_2, q_2 \rangle}, \psi_{\langle k_1, r_1 \rangle \langle \ell_2, r_2 \rangle}) =$$

$$= \frac{[a'(k_1+1) - a'(k_1)] \cdot [a''(k_2+1) - a''(k_2)]}{2n_1 \cdot 2n_2} \cdot c_{q_1, r_1} \cdot c_{q_2, r_2}$$

$$k_1 = 0, 1, 2, \dots, n_1 - 1, k_2 = 0, 1, 2, \dots, n_2 - 1,$$

$$q_1, r_1 = 0, 1, 2, 3, q_2, r_2 = 0, 1, 2, 3$$
(3.134)

であるから、計算式 (3.116) を使って求めることができる。

3.7 ベルンスタイン多項式系

3.7.1 ベルンスタイン多項式の系 $\{\phi_\ell\}_{\ell \in L}$ によるパターン $\varphi = \varphi(z)$ ($0 \leq z < 1$) の展開

Bernsteinは、単位区間 $[0, 1] \equiv \{z \mid 0 \leq z \leq 1\}$ での定義された実数値連続関数 $y = f(z)$ に対して、ベルンスタイン多項式 ϕ_k^n の系

$$\phi_k^n(z) \equiv \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot (1-z)^{n-k} \cdot z^k, \quad 0 \leq z < 1, k = 0, 1, 2, \dots, n$$
(3.135)

を使い、

$$(B_n f)(z) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \phi_k^n(z)$$
(3.136)

によって構成した (文献 [A2], 節6.5p.125, p.135を参照). ここに、2項係数 $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ が用いられている. 式 (3.135) のベルンスタイン多項式 $\phi_k^n(z)$ については、

$$(イ) \quad \forall z (0 \leq z < 1), 0 \leq \phi_k^n(z)$$
(3.137)

$$(ロ) \quad \forall z (0 \leq z < 1), \sum_{k=0}^n \phi_k^n(z) = 1$$
(3.138)

が成立している.

$\{\phi_k^n\}_{k=0, 1, 2, \dots, n}$ は 1次独立な系である.

3.7.2 会話音声の場合

以後、

$$n = 2, k = 0, 1, 2$$
(3.139)

の場合得られる 3つの関数

$$\phi_0^2(z), \phi_1^2(z), \phi_2^2(z) (0 \leq z < 1)$$
(3.140)

を各々、

$$\phi_0(z), \phi_1(z), \phi_2(z) (0 \leq z < 1)$$
(3.141)

と表現すると、実は、

$$\phi_0(z) = (1-z)^2 = z^2 - 2z + 1$$
(3.142)

$$\phi_1(z) = 2z(1-z) = -2z^2 + 2z$$
(3.143)

$$\phi_2(z) = z^2$$
(3.144)

であり、3つの関数 $\phi_0(z), \phi_1(z), \phi_2(z)$ ($0 \leq z < 1$) の形状は図3.5に示されている.

条件式 (3.139) の下での 2式 (3.137), (3.138) が成立しており、 $\{\phi_q\}_{q=0, 1, 2}$ は 1次独立な系である.

$$\langle \varphi, \eta \rangle \equiv \int_0^1 dz \varphi(z) \cdot \eta(z)$$
(3.145)

を導入し、

$$c_{pq} \equiv \langle \phi_p, \phi_q \rangle$$
(3.146)

を計算すると、

$$c_{00} = 1/5, c_{01} = 19/10, c_{02} = 1/30$$

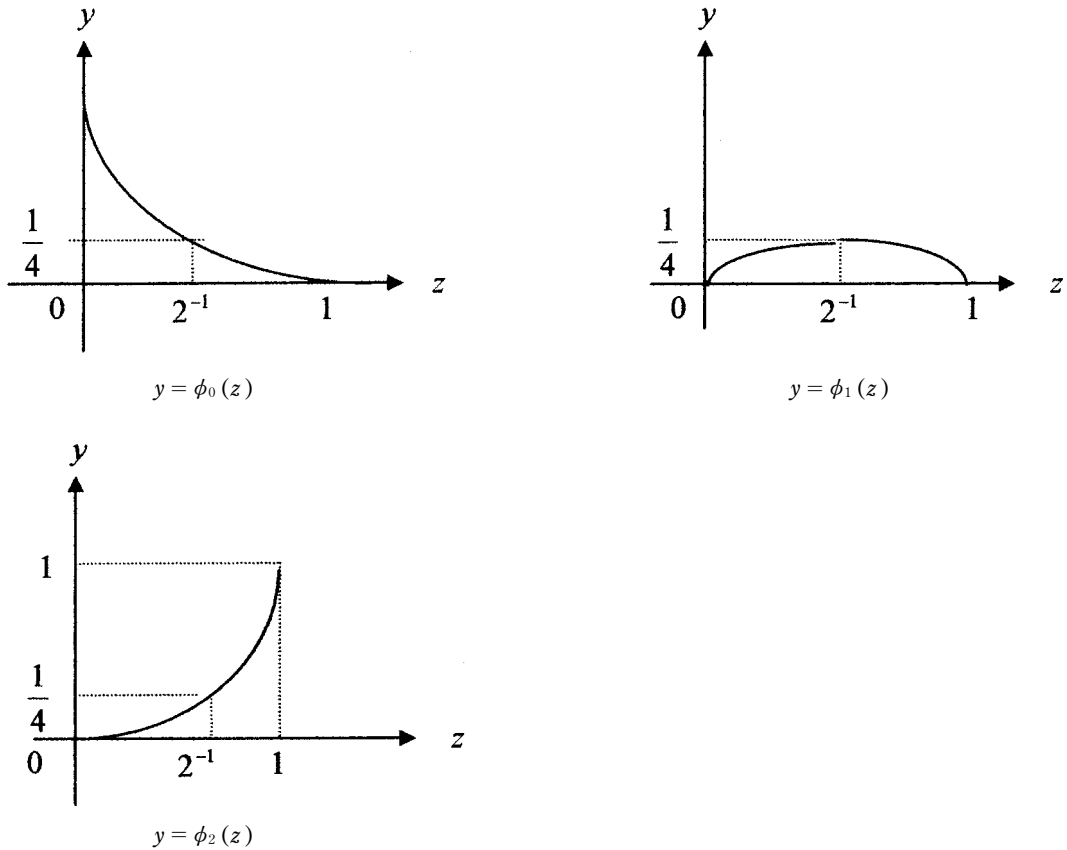


図3.5 3つの関数 $\phi_0(z)$, $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ ($0 \leq z < 1$) の形状
 Fig.3.5 Three configurations of three functions $\phi_0(z)$, $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ ($0 \leq z < 1$)

$$c_{11} = 2/15, c_{12} = 1/10$$

$$c_{22} = 1/15$$

(3.147)

である。

会話音声信号を, $\varphi = \varphi(x) \in \mathfrak{G}, a' \leq x < b'$ とし, 5式 (3.1) ~ (3.5) を導入しておく.
 区間 $z \in [0, 1)$ と区間 $x \in [a'(k), a'(k+1))$ との間の1対1を与える式 (3.51) の微分可能な関数を使って,

$$\psi_{(k,q)}(x) \equiv \phi_q(g_k(x)) \quad \text{if } a'(k) \leq x < a'(k+1), = 0 \quad \text{otherwise} \quad (3.148)$$

とおくと, 任意の積分可能な関数 $f(z)$ ($0 \leq z < 1$) について, 式 (3.53) が成り立つことと, 式 (3.147) とを使うと,

$$(\psi_{(k,q)}, \psi_{(l,r)}) =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{if } k \neq \ell \\ \frac{b' - a'}{n} \cdot c_{qr} & \text{if } k = \ell \end{cases} \quad (3.148)$$

が得られ、可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(\{x \mid a' \leq x < b'\}; dx)$ において 1 次独立な系

$$\{\psi_{(k, q)}\}_{k=0, 1, 2, \dots, n-1; q=0, 1, 2} \quad (3.149)$$

が得られた。この 1 次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ の添え字の集合を、

$$L = \{\ell = \langle k, q \rangle \mid k = 0, 1, 2, \dots, n-1; q = 0, 1, 2\} \quad (3.150)$$

と選んでいることに注意しておく。

3.7.3 動画像関数の場合

動画像関数を、 $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$, $a' \leq x_1 < b'$, $a'' \leq x_2 < b''$ とし、8 式 (3.11) ~ (3.18) を導入しておく。

系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ の添え字 ℓ の集合 L を、

$$\begin{aligned} L = \{ \ell = \langle \langle k_1, q_1 \rangle \rangle \langle \langle k_2, q_2 \rangle \rangle \\ \mid k_1 = 0, 1, 2, \dots, n_1 - 1; k_2 = 0, 1, 2, \dots, n_2 - 1; q_1 = 0, 1, 2, \dots; q_2 = 0, 1, 2, \dots \} \end{aligned} \quad (3.151)$$

と選ぶと、1 次独立な系

$$\begin{aligned} & \psi_{\langle \langle k_1, q_1 \rangle \rangle \langle \langle k_2, q_2 \rangle \rangle}(x_1, x_2) \\ & \equiv \psi'_{\langle k_1, q_1 \rangle}(x_1) \cdot \psi''_{\langle k_2, q_2 \rangle}(x_2) \\ & \quad k_1 = 0, 1, 2, \dots, n_1 - 1; k_2 = 0, 1, 2, \dots, n_2 - 1; q_1 = 0, 1, 2, \dots; q_2 = 0, 1, 2, \dots \\ & \quad a' \leq x_1 < b', a'' \leq x_2 < b'' \end{aligned} \quad (3.152)$$

が設定される。ここに、系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ の各成分 $\psi_\ell = \psi_{\langle \langle k_1, q_1 \rangle \rangle \langle \langle k_2, q_2 \rangle \rangle}(x_1, x_2)$ については、

$$\psi'_{\langle k_1, q_1 \rangle}(x_1) \text{ は、式 (3.148) の } \psi_{(k, q)}(x) \text{ において、} \quad (3.153)$$

$$k_1 = k, q_1 = q, x_1 = x$$

とにおいて得られるものであり、また、 $\psi''_{\langle k_2, q_2 \rangle}(x_2)$ は、式 (3.148) の $\psi_{(k, q)}(x)$ において、

$$k_2 = k, q_2 = q, x_2 = x \quad (3.154)$$

とにおいて得られるものである。式 (3.148) を使って、等式

$$\begin{aligned} & (\psi_{\langle \langle k_1, q_1 \rangle \rangle \langle \langle k_2, q_2 \rangle \rangle}, \psi_{\langle \langle \ell_1, r_1 \rangle \rangle \langle \langle \ell_2, r_2 \rangle \rangle}) = \\ & \begin{cases} 0 & \text{if } k_1 \neq \ell_1 \vee k_2 \neq \ell_2 \\ \frac{(b' - a')}{n_1} \cdot c_{q_1 r_1} \cdot \frac{(b'' - a'')}{n_2} \cdot c_{q_2 r_2} & \text{if } k_1 = \ell_1 \wedge k_2 = \ell_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.155)$$

が成り立ち、 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ は 1 次独立な系である。

4. モデル構成作用素 T の離散化 T' と、2 つの写像 $T \cdot T'$, $T' \cdot T$

写像 T の役割は、原パターン φ を簡素化し、ある程度相違しているパターンを一層相違しているように、また、ある程度似ているパターンを一層似ているように、原パターン φ を表現し直すことである。本章では、この役割を一層強化したモデル構成作用素 T' を T から得る手法と、2 つの写像 $T \cdot T'$, $T' \cdot T$ に関し $T \cdot T' = T'$ が成立する十分条件、並びに、 $T' \cdot T$ がモデル構成作用素となるため

の十分条件が研究される。

4.1 最小自乗ノルム近似モデル $T\varphi$ の離散化 $T'\varphi$

式 (D1.70) の $u(\varphi, \langle k, \ell \rangle)$ の代りに式 (2.36) の $u(\varphi, \ell)$ を採用し、付録Dの節D1.7と同様に議論を進めることができ、3補助定理4.1~4.3が成立し、axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半、並びに (iv) を満たす式 (2.38) の如く定義される式 (A1.8) の T から、その値域が離散量であるような式 (D1.71) のその離散化写像 T' が得られる。つまり、次の定理4.1が成り立つ。

例えば、特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \rightarrow R \quad (\text{実数全体の集合}) \tag{4.1}$$

を用いて、系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ として1次独立なパターン形状素の系を採用すれば、パターン η に対応するパターンモデル

$$T\eta = \sum_{\ell \in L} u(\eta, \ell) \cdot \psi_\ell \tag{4.2}$$

が得られる。ここに、このパターンモデル $T\eta$ で定義される式 (A1.8) の写像 T は axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半、並びに (iv) を満たすものである。

まず、不等式

$$\begin{aligned} -1 &= e_{2p+1}^-(\ell) < e_{2p}^- < \dots < e_2^-(\ell) \\ &< e_1^-(\ell) < 0 < e_1^+(\ell) \\ &< e_2^+(\ell) < \dots < e_{2p}^+(\ell) < e_{2p+1}^+(\ell) = 1, \ell \in L \end{aligned} \tag{4.3}$$

を満たす閾値の組

$$e_k^\pm(\ell), k = 1, 2, \dots, 2p+1, \ell \in L \tag{4.4}$$

を用意する。1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ を採用し得られた各 a_ℓ を実定数として定義されるパターン

$$\eta = \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell + \eta_\perp \quad \text{for some } \eta_\perp \in \mathfrak{S} \tag{4.5}$$

に対し、0値の計算規則

$$a_\ell / \sup_{q \in L} |a_q| = 0 \quad \text{if} \quad \sup_{q \in L} |a_q| = 0 \tag{4.6}$$

の下で、パターン $\eta \in \Phi$ から抽出される第番目の実数値特徴量 $u'(\eta, \ell)$ を

$$u'(\eta, \ell) = \begin{cases} u_k^+(\ell) \dots e_{k-1}^+(\ell) < \frac{a_\ell}{\sup_{q \in L} |a_q|} \leq e_k^+(\ell) \quad (2 \leq k \leq 2p+1) \text{ のとき} \\ 0 \dots e_1^-(\ell) \leq \frac{a_\ell}{\sup_{q \in L} |a_q|} \leq e_1^+(\ell) \text{ のとき} \\ u_k^-(\ell) \dots e_k^-(\ell) < \frac{a_\ell}{\sup_{q \in L} |a_q|} < e_{k-1}^-(\ell) \quad (2 \leq k \leq 2p+1) \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.7}$$

と定義する。ここに、各離散値 $u_k^\pm(\ell)$ は、

$$\forall \ell \in L, u_{2p+1}^+(\ell) = +1, u_{2p+1}^-(\ell) = -1 \tag{4.8}$$

$$\forall \ell \in L, e_{k-1}^+(\ell) < u_k^+(\ell) \leq e_k^+(\ell), 2 \leq k \leq 2p+1 \tag{4.9}$$

鈴木昇一：原パターンを近似できるという拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの、会話音声・動画処理への応用

$$\forall \ell \in L, e_k^-(\ell) \leq u_k^-(\ell) < e_{k-1}^-(\ell), 2 \leq k \leq 2p+1 \quad (4.10)$$

と選ばれるものとする．具体的には，例えば，

$$\forall \ell \in L, u_k^+(\ell) = 2^{-1} \cdot [e_{k-1}^+(\ell) + e_k^+(\ell)], 2 \leq k \leq 2p+1 \quad (4.11)$$

$$\forall \ell \in L, u_k^-(\ell) = 2^{-1} \cdot [e_k^-(\ell) + e_{k-1}^-(\ell)], 2 \leq k \leq 2p+1 \quad (4.12)$$

と選べばよい．

式 (4.5) のパターン η について，

$$T'\eta = \sum_{\ell \in L} u'(\eta, \ell) \cdot \phi_\ell \quad (4.13)$$

と定義される写像

$$T': \Phi \rightarrow \Phi \quad (4.14)$$

を考えよう．

そうすると，式 (D1.71) の如く定義される式 (A1.8) の写像 T' が axiom 1 の (i), (ii), (iii) の 3 後半，並びに (iv) を満たすことが下の 3 補助定理 4.1~4.3 を使って証明され，次の定理 4.1 が得られる．

[定理 4.1] ($T\eta = \sum_{\ell \in L} u(\eta, \ell) \cdot \phi_\ell$ の離散化 $T'\eta = \sum_{\ell \in L} u'(\eta, \ell) \cdot \phi_\ell$ のモデル化定理)

1 次独立な系 $\{\phi_\ell\}_{\ell \in L}$ を採用し得られた各 1 次結合係数 a_ℓ の組 $\{a_\ell\}_{\ell \in L}$ で式 (4.5) のように定義されたパターン $\eta \in \Phi$ について，式 (4.13) のように定義される式 (4.14) の写像 T' は，4 性質

$$(イ) T'0 = 0 \quad (4.15)$$

$$(ロ) \forall \eta, T'(a \cdot \eta) = T'\eta \quad \text{for any positive real number } a \quad (4.16)$$

$$(ハ) \forall \eta, T'(T'\eta) = T'\eta \quad (4.17)$$

$$(ニ) \exists \eta, T'\eta \neq 0 \quad (4.18)$$

を満たす．つまり，式 (D1.71) の如く定義される式 (A1.8) の写像 T' も，axiom 1 の (i), (ii), (iii) の 3 後半，並びに (iv) を満たし，モデル構成作用素である． \square

上述の定理 4.1 を証明するために，3 補助定理 4.1~4.3 を用意する．

[補助定理 4.1] (離散 0-モデル定理)

式 (4.5) のパターン η について，式 (2.36) の特徴量 $u(\eta, \ell)$ を採用している式 (2.38) のモデル $T\eta = \sum_{\ell \in L} u(\eta, \ell) \cdot \phi_\ell$ に対し式 (4.7) の如く定義される $u'(\eta, \ell)$ を採用して得られる式 (4.13) のモデル $T'\eta = \sum_{\ell \in L} u'(\eta, \ell) \cdot \phi_\ell$ について，

$$\forall \ell \in L, e_1^-(\ell) \leq \frac{a_\ell}{\sup_{q \in L} |a_q|} \leq e_1^+(\ell) \quad (4.19)$$

$$\Leftrightarrow T'\eta = 0. \quad (4.20)$$

(証明) 式 (4.19) $\Rightarrow \forall \ell \in L, u'(\eta, \ell) = 0 \quad \therefore$ 式 (4.7)

$$\Rightarrow T'\eta = \sum_{\ell \in L} u'(\eta, \ell) \cdot \phi_\ell \quad \therefore \text{式 (4.13)}$$

$$= 0$$

を得， \Rightarrow が示された．逆に，

$$\text{式 (4.20)} \Rightarrow \sum_{\ell \in L} u'(\eta, \ell) \cdot \phi_\ell = 0$$

$$\Rightarrow \forall \ell \in L, u'(\eta, \ell) = 0 \quad \therefore \text{系 } \{\phi_\ell\}_{\ell \in L} \text{ は 1 次独立}$$

$$\Rightarrow \text{式 (4.19)} \quad \therefore \text{式 (4.7)}$$

が得られ，証明が終わる． \square

【補助定理4.2】 (形状素 ϕ_ℓ の不動点離散モデル定理)

式 (4.5) のパターン η について, 式 (2.36) の特徴量 $u(\eta, \ell)$ を採用している式 (2.38) のモデル $T\eta = \sum_{\ell \in L} u(\eta, \ell) \cdot \phi_\ell$ に対し式 (4.7) の如く定義される $u'(\eta, \ell)$ を採用して得られる式 (4.13) のモデル $T'\eta = \sum_{\ell \in L} u'(\eta, \ell) \cdot \phi_\ell$ について,

$$\exists k \in L, \eta = \phi_k \tag{4.21}$$

$$\Rightarrow T'\eta = \eta. \tag{4.22}$$

(証明) 式 (4.5) の η を考慮すれば,

$$a_\ell = 1 \quad \text{if } \ell = k, = 0 \quad \text{if } \ell \neq k \quad \because \text{系 } \{\phi_\ell\}_{\ell \in L} \text{ は 1 次独立} \tag{4.23}$$

であり, よって,

$$\sup_{q \in L} |a_q| = 1 \tag{4.24}$$

を得,

$$u'(\eta, \ell) = 1 \quad \text{if } \ell = k, = 0 \quad \text{if } \ell \neq k \quad \because \text{3 式 (4.3), (4.7), (4.8)} \tag{4.25}$$

が成り立つ. 式 (4.13) のモデル $T'\eta$ について, 式 (4.22) が成り立つ. □

【補助定理4.3】 (不動点離散モデル定理)

$$\eta_\perp = 0 \tag{4.26}$$

であるような式 (4.5) のパターン η について, 式 (2.36) の特徴量 $u(\eta, \ell)$ を採用している式 (2.38) のモデル $T\eta = \sum_{\ell \in L} u(\eta, \ell) \cdot \phi_\ell$ に対し式 (4.7) の如く定義される $u'(\eta, \ell)$ を採用して得られる式 (4.13) のモデル $T'\eta = \sum_{\ell \in L} u'(\eta, \ell) \cdot \phi_\ell$ について,

$$\forall \ell \in L, a_\ell \in \{0\} \cup \{u_k^\pm(\ell) \mid 2 \leq k \leq 2p+1\} \tag{4.27}$$

$$\wedge \sup_{q \in L} |a_q| \in \{0, 1\} \tag{4.28}$$

$$\Rightarrow T'\eta = \eta. \tag{4.29}$$

(証明) (a) $\forall \ell \in L, a_\ell = 0$ のとき

$$\sup_{q \in L} |a_q| = 0 \wedge \eta = \eta_\perp = 0 \quad \because \text{2 式 (4.5), (4.26)} \tag{4.30}$$

$$\forall \ell \in L, a_\ell / \sup_{q \in L} |a_q| = 0 \quad \because \text{式 (4.6)} \tag{4.31}$$

を得,

$$\forall \ell \in L, u'(\eta, \ell) = 0 \quad \because \text{式 (4.7)} \tag{4.32}$$

が成り立つ. よって,

$$T'\eta = 0 = \eta \quad \because \text{2 式 (4.13), (4.30)} \tag{4.33}$$

が得られた.

(b) $\exists \ell \in L, \exists k \in \{2, 3, \dots, 2p+1\}, a_\ell \in \{u_k^+, u_k^-\}$ のとき

式 (4.28) から, 式 (4.24) が成り立つ. よって,

$$\forall \ell \in L, \exists k \in \{2, 3, \dots, 2p+1\}, a_\ell / \sup_{q \in L} |a_q| = a_q \in \{u_k^-, 0, u_k^+\} \tag{4.34}$$

を得,

$$\forall \ell \in L, \exists k \in \{2, 3, \dots, 2p+1\}, u'(\eta, \ell) = a_\ell \in \{u_k^-, 0, u_k^+\} \quad \because \text{式 (4.7)} \tag{4.35}$$

が成り立つ. よって,

$$T'\eta = \eta \quad \because \text{2 式 (4.13), (4.26)} \tag{4.36}$$

が得られ, 証明が終わる. □

このとき, 定理4.1は, 次のように証明される.

(定理4.1の証明)

(イ) の証明:式 (4.5) において,

$$\forall \ell \in L, a_\ell = 0 \wedge \eta_\perp = 0 \quad (4.37)$$

とおけば, $\eta = 0$ を得, 補助定理4.1を適用して, $T'\eta = 0$ が得られる.

(ロ) の証明: a を任意の正定数として, 式 (4.5) のパターン η を考え, ϕ を,

$$\phi \equiv a \cdot \eta = \sum_{\ell \in L} a \cdot a_\ell \cdot \phi_\ell + a \cdot \eta_\perp \quad (4.38)$$

とおく.

(ロ-1) $\forall \ell \in L, a_\ell = 0$ のとき

補助定理4.1を適用して, $T'\eta = 0 = T'\phi$ が得られる.

(ロ-2) $\exists \ell \in L, a \neq 0$ のとき

$$\sup_{q \in L} |a_q| > 0 \quad (4.39)$$

であり,

$$\forall \ell \in L, a \cdot a_\ell / \sup_{q \in L} |a \cdot a_q| = a_\ell / \sup_{q \in L} |a_\ell| \quad (4.40)$$

を得, 式 (4.7) の特徴抽出写像 u' の定義式 (4.7) から

$$\forall \ell \in L, u'(\phi, \ell) = u'(\eta, \ell) \quad (4.41)$$

が成り立ち,

$$T'\phi = T'\eta \quad (4.42)$$

が得られ, 証明が終わる.

(ハ) の証明: ϕ を,

$$\begin{aligned} \phi &\equiv T'\eta \\ &= \sum_{\ell \in L} u'(\eta, \ell) \cdot \phi_\ell = \sum_{\ell \in L} b_\ell \cdot \phi_\ell, \quad \text{ここに, } b_\ell = u'(\eta, \ell) (\ell \in L) \end{aligned} \quad (4.43)$$

とおく. 補助定理4.3を適用して,

$$T'\phi = \phi \quad (4.44)$$

が得られ, 証明が終わる.

(二) の証明:補助定理4.2から明らか. □

4.2 $T \cdot T'$ がモデル構成作用素となる場合の, $T' \cdot T$ がモデル構成作用素となるための十分条件

前節では, 離散化モデル構成作用素 T' を離散化されているとは限らないモデル構成作用素 T から得る手法が研究された. 本節では, この研究成果を基盤にして, 2つの写像 $T \cdot T'$, $T' \cdot T$ に関し

(1%) $T \cdot T' = T'$ が成立する十分条件,

(2%) $T' \cdot T$ がモデル構成作用素となるための十分条件

が研究される. T' は T を簡素化したものであるから, 1度簡素化したもの T' を T で精密化しようとしても, できなくてもとの簡素化したもの T' しか得られないことを (1%) は明らかにしており, (2%) の十分条件と (1%) の十分条件とは一致することが示される.

上述を指摘するの次の定理4.2が成り立つ.

[定理4.2] (モデル $T\varphi$ の離散化 $T'(T\varphi)$ のモデル化定理)

1次独立な系 $\{\phi_\ell\}_{\ell \in L}$ を採用し,

式 (4.5) のパターン η について, 式 (2.36) の特徴量 $u(\eta, \ell)$ を採用している式 (2.38) のモデル

$T\eta = \sum_{\ell \in L} u'(\eta, \ell) \cdot \phi_\ell$ に対し式 (4.7) の如く定義される $u'(\eta, \ell)$ を採用して得られる式 (4.13) のモデル $T'\eta = \sum_{\ell \in L} u(\eta, \ell) \cdot \phi_\ell$ について、考えよう。

モデル構成作用素 T ，特徴抽出写像 u は、2条件

$$(1\#) \quad \forall k \in L, T\psi_k = \phi_k \tag{4.45}$$

$$(2\#) \quad \forall k \in L, a_\ell \in \{0\} \cup \{u_k^\pm(\ell) \mid 2 \leq k \leq 2p+1\} \tag{4.46}$$

$$\wedge \sup_{q \in L} |a_q| \in \{0, 1\} \tag{4.47}$$

$$\Rightarrow \forall \ell \in L, u\left(\sum_{m \in L} a_m \cdot \phi_m + \eta_\perp, \ell\right) = a_\ell. \tag{4.48}$$

を満たす。この2条件 (1#), (2#) の下で、

$$T \cdot T' = T' \tag{4.49}$$

が成立し、

$$T'' \equiv T' \cdot T \tag{4.50}$$

を構成すれば、

$$(イ) \quad \eta = 0 \in \Phi \text{ について, } T''\eta = \eta \tag{4.51}$$

$$(ロ) \quad \forall \eta \in \Phi, T''(a \cdot \eta) = T''\eta \quad \text{for any positive real number } a \tag{4.52}$$

$$(ハ) \quad \forall \eta \in \Phi, T''(T''\eta) = T''\eta \tag{4.53}$$

$$(ニ) \quad \exists \eta \in \Phi, T''\eta \neq 0 \tag{4.54}$$

が成り立ち、対 $[\Phi, T'']$ は axiom 1 を満たす。

(証明) 式 (4.45) の成立は補助定理4.2で示されている。

式 (4.48) の成立について考えよう。

先ず、

$$\forall \varphi \in \Phi T(T\varphi) = T\varphi \quad \because \text{式 (2.45)} \tag{4.55}$$

が成立しているから、式 (4.1) の u ，式 (4.2) の T を用いて、この式 (4.55) を書き直せば、

$$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{\ell \in L} u(T\varphi, \ell) \cdot \phi_\ell = \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell) \cdot \phi_\ell \tag{4.56}$$

であり、系 $\{\phi_\ell\}_{\ell \in L}$ は1次独立なので、式 (4.56) は

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \ell \in L, u(T\varphi, \ell) = u(\varphi, \ell) \tag{4.57}$$

と同等になる。更に、式 (4.2) の T を用いて、この式 (4.57) を書き直せば、

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \ell \in L, u\left(\sum_{m \in L} u(\varphi, m) \cdot \phi_m, \ell\right) = u(\varphi, \ell) \tag{4.58}$$

となる。ここで、

$$\forall \ell \in L, u(\varphi, \ell) = a_\ell \in \{0\} \cup \{u_k^\pm(\ell) \mid 2 \leq k \leq 2p+1\} \tag{4.59}$$

$$\wedge \sup_{q \in L} |a_q| \in \{0, 1\} \tag{4.60}$$

であるように、パターン $\varphi \in \Phi$ をとれば、

$$\forall \ell \in L, u\left(\sum_{m \in L} a_m \cdot \phi_m, \ell\right) = a_\ell \tag{4.61}$$

が得られる。明らかに、系 $\{\phi_\ell\}_{\ell \in L}$ は1次独立なので、式 (2.36) で定義される式 (4.1) の特徴抽出写像 u について、

鈴木昇一：原パターンを近似できるという拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの，会話音声・動画像処理への応用

$$\forall \ell \in L, u \left(\sum_{m \in L} a_m \cdot \phi_m + \eta_{\perp}, \ell \right) = u \left(\sum_{m \in L} a_m \cdot \phi_m, \ell \right) \quad (4.62)$$

が成立しているから，式 (4.48) は

$$\forall \ell \in L, u \left(\sum_{m \in L} a_m \cdot \phi_m + \eta_{\perp}, \ell \right) = a_{\ell}. \quad (4.63)$$

が得られ，式 (4.48) が成立することがわかる。

条件式 (4.59) を考慮して，式 (4.61) を使えば，式 (4.13) のように定義される式 (4.14) の T' から，

$$\forall \varphi \in \Phi, T(T'\varphi) = T'\varphi \quad (4.64)$$

を得，式 (4.49) の成立が判明した。

残っているのは，定理A2.1の (イ) を適用すればわかるように，式 (4.50) の写像 $T'' \equiv T' \cdot T$ が 4 性質 (イ)，(ロ)，(ハ)，(ニ) を満たすことの証明である。

以下の証明では，2 定理2.2, 4.1を随時，使う。

(イ) の証明： $T0 = 0$ から， $T'(T0) = 0$ が得られる。

(ロ) の証明：任意の正定数 a について，任意のパターン $\varphi \in \Phi$ につき， $T(a \cdot \varphi) = T\varphi$ が成立し，よって， $T'(T(a \cdot \varphi)) = T' \cdot T\varphi$ が従う。

(ハ) の証明：任意のパターン $\varphi \in \Phi$ につき，

$$\begin{aligned} T''\varphi &= T' \cdot T\varphi = T' \cdot T' \cdot T\varphi \\ &= T' \cdot (T \cdot T') \cdot T\varphi \quad \because \text{式 (4.49)} \\ &= T'' \cdot T''\varphi \end{aligned} \quad (4.65)$$

が成立した。

(ニ) の証明： $\varphi = \phi_k$ について，

$$T\varphi = \varphi \quad \because \text{式 (2.52)} \quad (4.66)$$

が成立するから，

$$T' \cdot T\varphi = T'\varphi = \varphi \neq 0 \quad \because \text{補助定理4.2}$$

が従う。□

以下では，動画像，会話音声の処理に役立つように，付録Aの axiom 1, 2, 3を各々満たさなければならぬ類似度関数 SM ，大分類関数 BSC を設計してみよう。

5. 類似度関数 SM の選定

付録Bでの SM を採用すればよい。

6. 大分類関数 BSC の選定

付録Cでの BSC を採用すればよい。

7. 想起認識 (associative recognition)

本章では、認識システムRECOGNITRON [B3], [B4] による想起認識の働きが説明され、その後、予測の働きを取り入れたパターン系列を処理する連想形認識器SPATEMTRON [B33] の構成に本パターンモデルが使われてよいことが説明される。

単一のパターンを処理する上述の認識システムRECOGNITRONを会話音声・動画像などのパターン系列を処理する認識システムへ、SPATEMTRONを用いて拡張する方法については、文献 [B1] ~ [B4] にある。

[RECOGNITRON, SPATEMTRONによる想起認識]

処理の対象とする問題のパターンを $\varphi \in \Phi$ とする。

外部から入力された稼動時刻 $t+1$ に入力されたパターン

$$\eta_{(t+1)} = T\varphi \tag{7.1}$$

について、前時刻 t に入力されたパターン $\eta_{(t)}$ を用いて予測されたパターンを用い、 $\eta_{(t+1)}$ に対応し再生されたパターン $T\omega_j$ とその帰属するカテゴリ \mathfrak{C}_j が求めるのがSPATEMTRONによる想起認識 (associative recognition) の働きである。

付録AのA5章で説明されているカテゴリ帰属知識

$$\langle T\varphi, J \rangle \in \langle \Phi, 2' \rangle \tag{7.2}$$

を入力とするRECOGNITRONで、想起認識すれば、カテゴリ帰属知識出力

$$\langle T\omega_j, [j] \rangle \in \langle \Phi, 2' \rangle \tag{7.3}$$

が得られ、入力 $\eta_{(t+1)}$ の帰属するカテゴリ \mathfrak{C}_j がわかる。更に、RECOGNITRONからの再生されたパターン $T\omega_j$ も判明する。□

8. むすび

写像 T の役割は、原パターン φ を簡素化し、ある程度相違しているパターンを一層相違しているように、また、ある程度似ているパターンを一層似ているように、原パターン φ を表現し直しすることである。

近似条件付き自乗ノルムの最小化問題として、見慣れた形状であり、実現しやすく、更に、形状にまとまりがあるパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ を決定するのが、本研究の第一目的であったし、パターンモデル $T\varphi \in \Phi$ を動画像、会話音声を的確に処理することに利用できるように、パターンモデル $T\varphi \in \Phi$ 内の1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ を構成するのが第2目的であった。

形状は全体として形態的に秩序あるまとまりをなそうとする傾向、つまり、心理学のプレグナンツの傾向に注目し、エネルギー（ノルムの自乗）が小さいパターンモデルほど見慣れた形状であり、実現しやすく、更に、形状にまとまりがあると想定した。そして、1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ の1次結合 $\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell$ で原パターン $\varphi \in \Phi$ を最小自乗近似するときの近似誤差 $\varphi - \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell$ の自乗ノルム $\|\varphi - \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell\|^2$ を一定に保ったとき、エネルギー $\|\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell\|^2$ の最小となるパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ をSS理論 [B1] ~ [B4] のaxiom 1を満たすように、求めた。1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ が直交系の場合、拘束条件無しの場合と全く同じパターンモデルが得られたことは、 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ を直交系でない1次独立な系を選定することの意義を示している。1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ による本研究でのパターンモデ

鈴木昇一：原パターンを近似できるという拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの，会話音声・動画像処理への応用

ル $T\varphi \in \Phi$ の構成 8 例は正に，その事実をあらわにしている。

パターン φ を処理するにあたり， φ を同一の構造形式を備えたパターン $T\varphi$ に変換しておくこと，以後の処理が容易になったり，原パターン φ にあるかも知れない変形を取り除けたりする。

パターンモデル $T\varphi$ は原パターン φ の持つ情報を反映させて得られた合成パターンである。

本論文では，拘束条件（近似誤差の自乗ノルムがある与えられた一定値であるという条件）が付いており，原パターン φ を近似するモデル $T\varphi$ の定数倍の自乗ノルムを最小とするような φ の近似モデル（近似条件付自乗ノルムの最小化モデル） $T\varphi$ が，会話音声・動画像の処理場面において，役立つように求められた。このようなパターンモデルを研究した論文はこれまで，存在していない。S.Suzuki が研究したこれまでのパターンモデル [B1] ～ [B4]，[B34]，[B35] に比べても，形状がブレグマンツの傾向を持つかもしれないという意味で，冗長性が排除されたパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ （最要約化パターンモデル）が求められたといえる。

予測の働きを取り入れたパターン系列を処理する連想形認識器 SPATEMTRON [B33] のシミュレーション構成に本パターンモデル $T\varphi$ を用いて，その有用性を確かめる必要がある。特に，1 次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ による本研究でのパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ の構成 8 例の内，どれが特定の会話音声の集合，特定の動画像関数の集合に適切であるかをシミュレーションを介し，見極める必要がある。

参 考 文 献 A

- [A 1] 酒井幸市：“デジタル画像処理入門”，コロナ社，Aug.1998
- [A 2] 桜井明，石井好，吉村和美，高山文雄：“スプライン関数入門”，東京電機大学，May 1991
- [A 3] 柘植覚，獅子堀正幹，黒岩眞吾，北研二：“サポートベクターマシンによる適合性フィードバックを用いた情報検索”，情報処理学会論文誌，vol.44，no.1，pp.59-67，Jan.2003
- [A 4] 川島宏彰，松山隆司：“連続状態モデル間の相互作用に基づく多視点動作認識”，電子情報通信学会論文誌D-II，vol.J85-D-II，no.12，pp.1801-1812，Dec.2002

参 考 文 献 B

- [B 1] 鈴木昇一：“認識工学”，柏書房，Feb.1975
- [B 2] 鈴木昇一：“ニューラルネットの新数理”，近代文芸社，Sept.1996
- [B 3] 鈴木昇一：“パターン認識問題の数理的一般解決”，近代文芸社，June 1997
- [B 4] 鈴木昇一：“認識知能情報論の新展開”，近代文芸社，Aug.1998
- [B 5] 鈴木昇一，佐久間拓也：“パターンモデルを用いた不動点探索形連想システム方程式”，情報研究（文教大学・情報学部），no.15，pp97-128，Dec.1994
- [B 6] 鈴木昇一：“手書き漢字の側抑制効果的の分解とその計算機シミュレーション”，情報処理学会誌，vol.15，no.12，pp.927-934，Dec.1974
- [B 7] 鈴木昇一：“画像情報量とその手書き漢字への応用”，画像電子学会誌，vol.4，no.1，pp.4-12，Apr.1975
- [B 8] 鈴木昇一：“抽出された特徴による手書き漢字構造の再生”，情報処理学会誌，vol.18，no.11，pp.1115-1122，Nov.1977

- [B9] 鈴木昇一：“回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.4, pp.36-56, Dec.1983
- [B10] 鈴木昇一：“連想形記憶N器MEMOTRONと日本語単独母音系列の再生に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.7, pp.14-29, Dec.1986
- [B11] 鈴木昇一：“多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.10, pp.35-49, Dec.1989
- [B12] 鈴木昇一：“帰属係数法に基づく類似度、帰属関係あいまい度、認識情報量の計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.11, pp.51-68, Dec.1990
- [B13] 鈴木昇一：“構造受精法と日本語単独母音の認識”，情報研究（文教大学・情報学部），no.18, pp.17-51, Dec.1998
- [B14] 鈴木昇一，前田英明：“有声破裂音の代表パターンの学習的決定と，その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.20, pp.77-95, Dec.1998
- [B15] 鈴木昇一，前田英明：“変動エントロピーによる有声破裂音の順序付けと，その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.21, pp.51-78, Mar.1999
- [B16] 鈴木昇一：“平均顔を用いた顔画像の2値化、並びに、目・鼻・口の抽出と、その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.22, pp.65-150, Dec.1999
- [B17] 鈴木昇一：“界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の，顔画像処理に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.23, pp.109-182, Mar.2000
- [B18] 鈴木昇一：“風景画から知識を抽出し，解釈するシステムの，ファジィ推論ニューラルネットによる構成”，情報研究（文教大学・情報学部），no.23, pp.183-265, Mar.2000
- [B19] 鈴木昇一：“各個人の感性を反映した認識システムRECOGNITRON”，情報研究（文教大学・情報学部），no.24, pp.185-257, Dec.2000
- [B20] 鈴木昇一：“プロダクション・システムとしてのファジィ・マルチメディア・コンピュータと、空間多重パターンファジィ推論系”，情報研究（文教大学・情報学部），no.24, pp.105-183, Dec.2000
- [B21] 鈴木昇一：“SS大分類関数BSCの適応的構成への、計算論的学習理論の適用”，情報研究（文教大学・情報学部），no.25, pp.185-236, Mar.2001
- [B22] 鈴木昇一：“量子力学の諸原理，多段階量子認識系と，心理状態を取り入れた想起に基づく部分空間認識法”，情報研究（文教大学・情報学部），no.25, pp.237-282, Mar.2001
- [B23] 鈴木昇一：“Support Vector Machineを利用した大分類関数の構成”，情報研究（文教大学・情報学部），no.26, pp.1-62, Dec.2001
- [B24] 鈴木昇一：“2カテゴリ分類困難度の情報理論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.26, pp.63-160, Dec.2001
- [B25] 鈴木昇一：“一般化類似度関数を用いた“導出原理による第1階述語推論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.27, pp.27-71, Mar.2002
- [B26] 鈴木昇一，川俣博司，大概善樹：“風景画の理解に関するJAVA言語によるRECOGNITRONの計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.27, pp.73-109, Mar.2002
- [B27] 鈴木昇一：“遺伝的アルゴリズムにおける適合度比例選択戦略を利用した進化方程式の，パターン多段階変換に基づく認識への応用”，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.37-67, Dec.2002

鈴木昇一：原パターンを近似できるという拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの，会話音声・動画像処理への応用

- [B28] 鈴木昇一：“近傍を利用した音素認識のためのモデル構成作用素 T ，類似度関数 SM ，大分類関数 BSC の諸構成と，SS不動点探索型多段階想起認識”，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.69-141, Dec.2002
- [B29] 鈴木昇一：“JAVA言語で実装化された画像理解システムIUSの動作概要と，その稼動方法”，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.143-165, Dec.2002
- [B30] 鈴木昇一，川俣博司，大概善樹：“JAVA言語による計算機シミュレーションで生じた風景画像の理解場面での多段階連想形認識過程の異常現象”，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.123-166, Jul.2003
- [B31] 鈴木昇一：“パターン情報処理（モデル構成作用素，誤差逆伝播学習2層ニューラルネット）と，論理的含意とによる非単調的知識推論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.75-121, Jul.2003
- [B32] 鈴木昇一：“可分な一般抽象ヒルベルト空間でのK-L直交系の理論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.41-73, Jul.2003
- [B33] 鈴木昇一：“パターン系列（動画像，会話音声）の，dynamical systemによる連想理論と，連想器SPATEMTRON”，情報研究（文教大学・情報学部），no.30, pp.139-186, Jan.2004
- [B34] 鈴木昇一：“測度的不変量検出形認識系の構成理論”，電子通信学会論文誌（D），vol.55-D, no.8, pp.513-538, Aug.1972
- [B35] 鈴木昇一：“パターンのエントロピーモデル”，電子情報通信学会論文誌（D-II），vol.J77-D-II, no.10, pp.2220-2238, Nov.1994
- [B36] 鈴木昇一：“認識行為に向けての，効用最大化原理”，情報研究（文教大学・情報学部），no.22, pp.151-210, Dec.1999
- [B37] 鈴木昇一：“入出力例の系列を用いた“対連想問題・その擬逆問題”の一般解”，情報研究（文教大学・情報学部），no.30, pp.81-137, Jan.2004
- [B38] 鈴木昇一：1パラメータLie座標変換群とそのパターン正規化への応用，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.21-74, Jan.2005
- [B39] 鈴木昇一：曖昧さに関する半順序を単調に保つモデル構成作用素 T ，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.75-126, Jan.2005
- [B40] 鈴木昇一：パターン ϕ から抽出された特徴量 $u(\phi, \ell)$ のfuzzy単調変換，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.127-168, Jan.2005
- [B41] 鈴木昇一：パターンモデル（パターンの標準形）の一般形，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.169-218, Jan.2005
- [B42] 鈴木昇一：類似度関数の密度を用いた，画素毎のパターン認識処理（パターン理解処理）の方法，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.219-285, Jan.2005

付録A. Axiom1~4を各々，満たさなければならないパターン集合 Φ ，モデル構成作用素 T の対 $[\Phi, T]$ ，類似度関数 SM ，大分類関数 BSC ，カテゴリ選択関数 CSF

本付録Aでは，SS公理系（axiom 1~4）が解説されている。

本付録Aでは，処理の対象となる問題のパターン ϕ の集合 ϕ ，モデル構成作用素 T ，類似度関数

SM , カテゴリ選択関数 CSF について説明される. 対 $[\Phi, T]$ の満たされなければならない axiom 1 と, 類似度関数 SM の満たされなければならない axiom 2 も説明され, Φ の表示が明らかにされ, Φ が構成的集合であることが指摘される. 更に, 大分類関数 BSC の満たされなければならない axiom 3 も説明される. カテゴリ選択関数 CSF が満たされなければならない axiom 4 も説明され, CSF の構造が SM , BSC を用いて決定される.

A1. axiom 1 とパターン集合 Φ , モデル構成作用素 T

一般に, 処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ は或る可分な [B1] な (separable) 一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の零元 0 を含む或る部分集合である. 例えば, $\bar{\eta}$ を η の複素共役として,

$$M : q \text{ 次元ユークリッド空間 } R^q \text{ の可測部分集合} \tag{A1.1}$$

$$dm(x) : \text{ 正值ルベーグ・スティルチェス式測度} \tag{A1.2}$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_q) \in M (\subseteq R^q) : \text{ 実数値 } q \text{ 変数直交座標系} \tag{A1.3}$$

を導入し, その内積 (φ, η) , ノルム $\|\varphi\|$ を,

$$(\varphi, \eta) = \int_M dm(x) \varphi(x) \cdot \bar{\eta}(x) \tag{A1.4}$$

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \tag{A1.5}$$

とする線形空間 (ベクトル空間) としての可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ の特別な場合として,

$$M = R^2 \text{ (2次元全平面)} \tag{A1.6}$$

$$dm(x) = [x_1^2 + x_2^2]^{-1} \cdot dx_1 dx_2 \tag{A1.7}$$

を選ぶことができる [B7], [B9].

このような Φ , 並びに, 写像

$$T : \Phi \rightarrow \Phi \tag{A1.8}$$

は次の axiom 1 を満たさなければならない. このとき, 写像 T はモデル構成作用素 (model-construction operator) と呼ばれ, $T\varphi \in \Phi$ は $\varphi \in \Phi$ の代りとなり得るという意味で, パターン $\varphi \in \Phi$ のモデル (model) と呼ばれる.

下記の axiom 1 からわかるように, パターン集合 Φ は, 埋込性

$$T \cdot \Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \subset \Phi \tag{A1.9}$$

を満たし, 原点 (= 0) を始点とし, Φ の任意の点を通る半直線を含むような集合, つまり, 錐であらねばならない. 下記の式 (A1.14) による Φ の表示が正に Φ が錐であることを明らかにしている.

Axiom 1 を満たすパターン集合 Φ は実は, 構成的集合 (constructible set) である. S.Suzuki はパターンというものが満たされなければならない帰納的定義から Φ の集合論的再帰領域方程式 (A1.10) (axiom 1 を満たす最小の Φ の表現式; set-theoretic reflective domain equation) を提案し, この方程式を解き, Φ の構造を明らかにしている (文献 [B3] の 2.4 節.) その結果は次のとおりである:

パターンと判明している元の集合 (基本領域; basic domain) (axiom 1 の (i) の前半から, $0 \in \Phi_B$) を導入して, 集合論的再帰領域方程式

$$\Phi = \Phi_B \cup T \cdot \Phi \cup R^{++} \cdot \Phi \tag{A1.10}$$

ここに,

$$T \cdot \Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \tag{A1.11}$$

$$R^{++} \text{ は正実数全体の集合} \tag{A1.12}$$

$$R^{++} \cdot \Phi \equiv \{r^{++} \cdot \varphi \mid r^{++} \in R^{++}, \varphi \in \Phi\} \tag{A1.13}$$

の解 Φ は

$$\Phi = R^{++} \cdot [\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B] \quad (\text{A1.14})$$

と表示される（文献 [B3] の式 (2.56) を参照）． Φ の表示式 (A1.14) から，明らかに，2つの等式

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad T \cdot \Phi &= T \cdot \Phi_B \subseteq \Phi \\ &\because \text{axiom 1 の (ii), (iii) の 2 後半} \end{aligned} \quad (\text{A1.15})$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad R^{++} \cdot \Phi &= \Phi (= R^{++} \cdot \Phi_B \cup R^{++} T \cdot \Phi_B) \\ &\because \text{axiom 1 の (ii) の後半} \end{aligned} \quad (\text{A1.16})$$

が成り立つ．

Axiom 1 (パターン集合 Φ とモデル構成作用素 T との対 $[\Phi, T]$ の満たすべき公理)

(i) (零元の Φ -包含性と，零元の T -不動点性；fixed-point property of zero element under mapping T)

$$0 \in \Phi \wedge T0 = 0$$

(ii) (Φ の錐性， T の正定数倍吸収性；cone property)

$$\forall \varphi \in \Phi, a \cdot \varphi \in \Phi \wedge T(a \cdot \varphi) = T\varphi \quad \text{for any positive real number } a.$$

(iii) (Φ の埋込性 (embeddedness) と， T のベキ等性 (idempotency))

$$\forall \varphi \in \Phi, T\varphi \in \Phi \wedge T(T\varphi) = T\varphi.$$

(iv) (写像 T の非零写像性；non-zero mapping property of T)

$$\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0. \quad \square$$

A2. 処理の対象となる問題のパターン φ の集合 Φ とモデル構成作用素 T との対 $[\Phi, T]$ の基本構成と，モデル $T\varphi$ と φ との間の同一知覚原理

原パターン $\varphi \in \Phi$ が如何なる意味を備えているか，つまり， φ が如何なる類概念 (category) を表しているかを決定する働きをもつのが，認識システム RECOGNITRON である．RECOGNITRON がモデル $T\varphi$ を見たり聞いたりしたならば，原パターン $\varphi \in \Phi$ と同じに見えたり聞こえたりすること ($T\varphi$ と) だと，解釈可能な対 $[\Phi, T]$ について説明しよう．

パターンモデル $T\varphi$ を出力する式 (A1.8) の写像 T に要求されるのは，次の 4 性質 ①～④である [B3], [B4], [B6] :

① (零元不動点性；axiom 1 の (i))

$$\varphi = 0 \in \Phi \text{ については, } T\varphi = 0.$$

② (正定数倍不変性；axiom 1 の (ii) の後半)

任意の正実定数 a に対し，

$$\forall \varphi \in \Phi, T(a\varphi) = T\varphi.$$

③ (ベキ等性；axiom 1 の (iii) の後半)

$$\forall \varphi \in \Phi, T(T\varphi) = T\varphi.$$

④ (非零写像性；axiom 1 の (iv))

$$\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0. \quad \square$$

上述の ①～④は各々，A1 章の axiom 1 の (i), (ii) の後半, (iii) の後半, (iv) である．零元 $\varphi = 0 \in \Phi$ は背景も何も無いパターンである．

Φ は処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ であり， $T\varphi \in \Phi$ は $\varphi \in \Phi$ に対応するパターンモデルであって，原パターン $\varphi \in \Phi$ と同じ空間 Φ に埋め込まれている．モデル $T\varphi$ は， $T\varphi \in \Phi$ を見たり聞いたりしたならばあたかも原パターン $\varphi \in \Phi$ かのように見えたり聞こえたりするようなものであ

る(同一知覚原理)。この同一知覚原理を達成するために、SS理論 [B1] ~ [B6] では、式 (A1.8) の写像 T であるモデル構成作用素 T が導入され、対 $[\Phi, T]$ はA1章のaxiom 1を満たしていなければならないことになる。このとき、写像 T はモデル構成作用素と呼ばれ、 $T\varphi \in \Phi$ は $\varphi \in \Phi$ の代りとなり得るという意味で、パターン $\varphi \in \Phi$ のモデルと呼ばれる。

処理の対象とするパターン φ の集合 Φ は或る可分なヒルベルト空間 \mathfrak{H} の、零元 0 を含む或る部分集合であり、この Φ 、並びに、式 (A1.8) の写像 T の対 $[\Phi, T]$ は上記の4性質①~④ ((ii), (iii) の2後半、並びに (i), (iv)) を含む形で、A1章のaxiom 1をみたさなければならない。

次の定理A2.1は、axiom 1を満たす対 $[\Phi, T]$ を決定している。

[定理A2.1] (パターン集合 Φ とモデル構成作用素 T との対 $[\Phi, T]$ の構成定理)

パターンと判明している φ 集合 (基本領域) $\Phi_B (\ni 0)$ と、すべての正実定数の集合 R^{++} とを用意する。

式 (A1.8) の写像 T がaxiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半、並びに、(iv) を満たすとしてよう。このとき、次の (イ), (ロ) が成り立つ：

(イ) 処理の対象とする問題のパターンの集合 Φ を、式 (A1.14) の如く設定すれば、2式 (A1.15), (A1.16) が成立し、axiomの (i), (ii), (iii) の3前半を Φ は満たし、結局、対 $[\Phi, T]$ はaxiom 1を満たす。

(ロ) 逆に、 $(0 \in) \Phi_B$ を部分集合に持つ Φ がaxiom 1の (i), (ii), (iii) の3前半を満たすとすれば、

$$\Phi \ni \Phi_B \cup R^{++} \cdot \Phi \cup T \cdot \Phi \tag{A2.1}$$

が成立するが、ここで、特に、包含式 (A2.1) において等号が成立するような最小の Φ を採用すれば、つまり、領域方程式 (A1.10) の成立を仮定すれば、axiom 1を満たす対 $[\Phi, T]$ のは式 (A2.14) のように表され、2式 (A1.15), (A1.16) も成立する。

(証明) (イ) は文献 [B4], 付録1の定理A1.1である。(ロ) は文献 [B3], pp.64-66 (2.4節) で証明されている。□

A3. axiom 2と類似度関数SM

任意のパターン $\varphi \in \Phi$ が記憶されている代表的なパターンからなる有限個の元からなる集合内の任意の代表パターンとどの程度似ているか、違っているかを計量する手段を設定することが、認識の働きを確保するために必要とされる。類似性計量のための手段が類似度関数SMである。

“正常なパターン”(well-formed pattern) は、ある1つのカテゴリ (category) \mathfrak{C}_j (第 $j \in J$ 番目の類概念) のみに帰属しているものとし、このような \mathfrak{C}_j の集まり (有限集合)

$$\mathfrak{C} = \{\mathfrak{C}_j | j \in J\} \tag{A3.1}$$

を想定する。 \mathfrak{C}_j の備えている性質を典型的に持っている代表パターン (prototypical pattern) $\omega_j (\neq 0)$ を1つ選定する。 \mathfrak{C}_j は、典型 (prototype) としての代表パターン ω_j を中心とした緩やかなカテゴリであることを仮定したことに注意しておく。ここに、

$$\Omega \equiv \{\omega_j | j \in J\} \subset \Phi \tag{A3.2}$$

が式 (A3.1) の全カテゴリ集合 \mathfrak{C} に対応する代表パターンの集合である。式 (A3.2) の系 Ω は、

$$\text{複素定数 } a_j \text{ の組 } \{a_j | j \in J\} \text{ について } \sum_{j \in J} a_j \cdot \omega_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J, a_j = 0 \tag{A3.3}$$

が成立しているという意味で、1次独立 (linearly independent) でなければならない。 Ω を視察で決定できる場合があるが、訓練パターン系列から Ω を適応的に決定する方法については、文献 [B3] の

付録 I で説明されている。

Axiom 1 を満たす式 (A1.1) のモデル構成作用素 T によって，式 (A3.2) の代表パターン集合 Ω が変換されて得られる系

$$T \cdot \Omega \equiv \{T\omega \mid \omega \in \Omega\} = \{T\omega_j \mid j \in J\} \quad (\text{A3.4})$$

も 1 次独立であると要請する。このとき，類似度関数 (similarity-measure function)

$$SM : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \quad (\text{A3.5})$$

を導入し，

$$SM(\varphi, \omega_j) = 1, 0 \text{ に従って，パターン } \varphi \in \Phi \text{ は各々，} \omega_j \text{ と確定的な類似度関係，相違関係にあり，}$$

$$\text{また，} 0 < SM(\varphi, \omega_j) < 1 \text{ の場合は，あいまいな類似・相違関係にある} \quad (\text{A3.6})$$

と， SM を解釈しよう。

式 (A3.5) の関数 SM は次の axiom 2 を満たすように構成されねばならない。Axiom 2 の (i) では，クロネッカー (Kronecker) の δ 記号

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{if } i = j, = 0 \quad \text{if } i \neq j \quad (\text{A3.7})$$

が導入されているが，特に axiom 2 の (i) なるこの直交性は，候補カテゴリの分離・抽出が効果的に行われ，

$$\text{候補カテゴリの鋭利な削減 (a sharp reduction)} \quad (\text{A3.8})$$

をもたらすために要請されている。

Axiom 2 (類似度関数 SM の満たすべき公理)

(i) (正規直交性；orthonormality)

$$\forall_i, \forall_j, SM(\omega_i, \omega_j) = \delta_{ij}.$$

(ii) (規格化条件，確率性，正規性；probability condition, normalization)

$$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} SM(\varphi, \omega_j) = 1.$$

(iii) (写像 T の下での不変性；invariance under mapping T)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j). \quad \square$$

上述の axiom 2 の (i) ~ (iii) について簡単に説明しておこう。

SM の解釈式 (A3.6) の下で，(i) は，相異なるカテゴリの代表パターン同士は確定的な相違関係にあり，同一カテゴリの代表パターン同士は確定的な類似度関係にあることを要請している。(ii) は，任意のパターン φ について，すべてのカテゴリについての類似度の総和は 1 であることを要請している。(iii) は，パターンモデル $T\varphi$ は原パターン φ と任意のカテゴリについて同一類似度を持つことを要請している。ということは，パターンモデル $T\varphi$ を見たり，聞いたりするならば，原パターン φ と同じように見えたり，聞こえたりすること (同一知覚原理；A2章を参照) を要請していることになる。

尚，第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j の生起確率である非負実数 $p(\mathfrak{C}_j)$ を，2 条件

$$[\forall j \in J, 0 < p(\mathfrak{C}_j) < 1] \wedge [\sum_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) = 1] \quad (\text{A3.9})$$

を満たすものとして導入しておく。

A4. axiom 3 と大分類関数

本章では，ある 1 つのカテゴリに帰属するかどうかを決定する 2 カテゴリ分類器としての大分類関数 BSC は，axiom 3 を満たすように構成されなければならないことが説明される。

式 (A3.5) の類似度関数 SM が式 (A3.8) でいう “候補カテゴリの鋭利な削減” を持つためには, axiom 2, (i) の正規直交性を満たす必要があることがA3.で指摘されたが, $SM(\varphi, \omega_j)$ の代りに $SM(\varphi, \omega_j) \cdot BSC(\varphi, j)$ を用いれば, パターン φ が帰属するかも知れない候補カテゴリを益々、鋭利に削減できると期待される.

大分類関数 (rough classifier, binary-state classifier) と呼ばれる 2 値関数

$$BSC : \Phi \times J \rightarrow \{0, 1\} \quad (\text{A4.1})$$

を, 次の axiom 3 を満たすものとして導入し、解釈

パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属する候補カテゴリの 1 つが第 $j \in J$ 番目の \mathfrak{C}_j であるならば,

$$BSC(\varphi, j) = 1 \text{ であることが望ましい} \quad (\text{A4.2})$$

を採用しよう. この際, 注意すべきは,

$BSC(\varphi, j) = 0$ であっても, パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属する候補カテゴリの 1 つは, 第 $j \in J$ 番目の \mathfrak{C}_j でないとは限らない (A4.3)

としていることである. また, axiom 3 の (i) からわかるように, カテゴリ間の相互排除性 (the mutual exclusion of the one category from the other categories)

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, BSC(\omega_j, i) = 0 \quad (\text{A4.4})$$

を公理として要請していない事実に注意しておこう. この事実を補うのが実は, 式 (A3.5) の類似度関数 SM が満たさなければならないとしている axiom 2 の (i) (正規直交性) である.

Axiom 3 (大分類関数 BSC の満たすべき公理)

(i) (カテゴリ抽出能力; category separability)

$$\forall j \in J, BSC(\omega_j, j) = 1.$$

(ii) (写像 T の下での不変性; invariance under mapping T)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, BSC(T\varphi, j) = BSC(\varphi, j) \quad \square$$

A5. axiom 4 と, カテゴリ選択関数 CSF の構造形式

認識システム RECOGNITRON がパターン $\varphi \in \Phi$ に対し,

「パターン $\varphi \in \Phi$ が, 式 (A3.1) の全カテゴリ集合 \mathfrak{C}_j の部分集合

$$\mathfrak{C}(\varphi) \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid j \in \gamma\} \quad (\text{A5.1})$$

内の何れか 1 つのカテゴリ \mathfrak{C}_j に帰属する可能性がある」 (A5.2)

という “パターン $\varphi \in \Phi$ のカテゴリ帰属知識 (categorical membership-knowledge)” を持っているとする. この知識を,

$$\langle \varphi, \gamma \rangle \in (\Phi, 2^J) \quad (\text{A5.3})$$

と表す.

$$\langle \Phi, 2^J \rangle \equiv \{ \langle \varphi, \gamma \rangle \mid \varphi \in \Phi, \gamma \in 2^J \} \quad (\text{A5.4})$$

は, カテゴリ帰属知識空間 (categorical membership-knowledge space) と呼ばれ, すべてのパターン $\varphi \in \Phi$ と, すべてのカテゴリ番号のリスト $\gamma \in 2^J$ とのなす順序の付いた対リスト (an ordered pair list) $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の集合である.

カテゴリ選択関数 (category-selection function) と呼ばれる写像

$$CSF : \Phi \times 2^J \rightarrow 2^J \quad (\text{A5.5})$$

は, 包含関係 (inclusion relation)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \gamma \in 2^J, CSF(\varphi, \gamma) \subseteq \gamma \subseteq J \subseteq 2^J \quad (\text{A5.6})$$

を満たし、然も、次のaxiom 4を満たすものとして、設定されるとしよう。

Axiom 4 (カテゴリ選択関数CSFの満たすべき公理)

(i) $\varphi = 0 \vee \gamma = \phi$ の場合

如何なるカテゴリ番号 $k \in \gamma$ も $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリの番号ではない。

(ii) $SM(\varphi, \omega_k) = 0 \wedge BSC(\varphi, k) = 0$ の場合

カテゴリ番号 $k \in \gamma$ は、 $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリの番号ではない

(iii) $\sum_{k \in \gamma} BSC(\varphi, k) = 0$ の場合

$BSC(\varphi, k) = 0$ であっても、 $SM(\varphi, \omega_k) > 0$ であるようなカテゴリ番号 $k \in \gamma$ は、 $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリの番号である。

(iv) $\sum_{k \in \gamma} BSC(\varphi, k) > 0$ の場合

(iv-1) $BSC(\varphi, k) = 0$ なるカテゴリ番号 $k \in \gamma$ は、 $SM(\varphi, \omega_k) > 0$ であっても、 $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリの番号ではない。

(iv-2) $SM(\varphi, \omega_k) = 0$ なるカテゴリ番号 $k \in \gamma$ は、 $BSC(\varphi, k) = 1$ であっても、 $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリの番号ではない。 □

次の定理A4.1では、式 (A5.1) の写像CSFは、式 (A2.5) の類似度関数SM、式 (A3.1) の大分類関数BSCを使用する形式で、

その定義域が $\Phi \times 2^J$ であり、その値域が、パターン $\varphi \in \Phi$ のカテゴリ帰属知識 $\langle \varphi, \gamma \rangle$

$\in (\Phi, 2^J)$ の“有効な”候補カテゴリの番号リスト (a list of significant category-numbers) の集合である (A5.7)

の如く、構成されている。

次の定理A4.1は、axiom 4を満たすように、式 (A5.5) のカテゴリ選択関数CSFの構造を決定したものである。

[定理A4.1] (カテゴリ選択関数CSFの構成定理)

次のように定義される式 (A5.5) の1つの写像CSFは式 (A5.6) と上述のaxiom 4を満たす：

(i) $\varphi = 0 \vee \gamma = \phi$ の場合

$$CSF(\varphi, \gamma) = \phi. \tag{A5.8}$$

(ii) $\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ の場合

$$CSF(\varphi, \gamma) =$$

$$\left\{ \{k \in \gamma \mid SM(\varphi, \omega_k) > 0\} \quad \text{if} \quad \sum_{k \in \gamma} BSC(\varphi, k) = 0 \right. \tag{A5.9}$$

$$\left. \{k \in \gamma \mid SM(\varphi, \omega_k) > 0 \wedge BSC(\varphi, k) = 1\} \quad \text{if} \quad \sum_{k \in \gamma} BSC(\varphi, k) > 0 \right. \tag{A5.10}$$

(証明) 文献 [B3] の定理E1である。 □

定理A4.1の写像CSFについて、次のように解釈できる：

処理の対象とするパターン $\varphi \in \Phi$ がカテゴリ \mathfrak{C}_j , $j \in \gamma$ の何れか1つに帰属する可能性があると思定した場合、その内のカテゴリ \mathfrak{C}_j , $j \in CSF(\varphi, \gamma) \subseteq \gamma$ の何れか1つに帰属する可能性があると思定できる機能を備え、その出力CSF(φ, γ)はパターン $\varphi \in \Phi$ の有効な候補カテゴリの番号のリストを与えている。 (A5.11)

付録B. パターンモデル間の相関検出写像 COR_j の族 $\{COR_j\}_{j \in J}$ を用いた類似度関数 SM の再帰的構成

本付録Bでは、2つのパターンモデル $T\varphi, T\psi$ 間の相関検出写像 COR_j の族を用い、axiom 2を満たすように類似度関数 SM が再帰的に構成されている。再帰的に得られたこの類似度関数 SM は、1つのカテゴリに複数個の代表パターンを設けたのと同様な効果をもたらしている。

B1. 相関検出写像 COR_j の定義とその諸性質

2つのパターンモデル集合

$$T \cdot \Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\}, T\Psi \equiv \{T\psi \mid \psi \in \Psi\} \tag{B1.1}$$

を導入して、相関検出写像 (correlation detector) COR_j の族

$$COR_j : T \cdot \Phi \times T \cdot \Psi \rightarrow R^+ \text{ (非負実数全体の集合)}, j \in J \tag{B1.2}$$

を考える。式 (A3.4) の代表パターンモデル集合 $T \cdot \Omega$ に関し、2条件

$$(イ) \text{ (非零条件)} \forall j \in J, \|T\omega_j\| > 0 \tag{B1.3}$$

$$(ロ) \text{ (分離条件)} \forall j \in J, \forall i \in J, 1 > |(T\omega_i, T\omega_j)|^2 / [\|T\omega_i\|^2 \cdot \|T\omega_j\|^2] \tag{B1.4}$$

を仮定する。ここで、サンプルパターンの集合

$$\Psi = \{\phi[1], \phi[2], \dots, \phi[n]\} \supset \Psi_j, j \in J \tag{B1.5}$$

を導入する。更に、 Ψ の部分集合 Ψ_j の族

$$\Psi_j = \{\phi \in \Psi \mid \forall i \in J - \{j\}, COR_j(T\omega_j, T\phi) > COR_j(T\omega_i, T\phi)\}, j \in J \tag{B1.6}$$

を定義する。ここで、式 (B1.2) の、第 $j \in J$ 番目の相関検出写像 COR_j を、

$$COR_j(T\varphi, T\psi) = \sigma_j^2 \cdot (T\varphi, T\psi) / [\|T\varphi\| \cdot \|T\psi\|]^2, \sigma_j^2 > 0 \tag{B1.7}$$

と定義する。サンプルパターン $\phi[k] \in \Psi$ の部分集合 Ψ_j について、

$$\exists j \in J, \exists \ell \in \{1, 2, \dots, n\}, \phi[k] = \phi[j, \ell] \tag{B1.8}$$

であるような $\phi[k]$ について、 Ψ_j を

$$\Psi_j = \{\phi[j, 1], \phi[j, 2], \dots, \phi[j, n_j]\} \tag{B1.9}$$

と表しておく。式 (B1.7) の $COR_j(T\varphi, T\psi)$ 内の正定数 σ_j^2 を、

$$\sigma_j^2 \equiv \|T\omega_j\|^2 \tag{B1.10}$$

とおく。このとき、次の①, ②, ③が成り立つ。

$$\textcircled{1} \forall j \in J, COR_j(T\omega_j, T\omega_j) = \sigma_j^2 > 0.$$

$$\textcircled{2} \forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, COR_j(T\omega_j, T\omega_j) > COR_j(T\omega_i, T\omega_j).$$

$$\textcircled{3} \forall j \in J, \exists i \in J - \{j\}, \exists k \in J - \{j\}, COR_j(T\omega_i, T\omega_k) > COR_j(T\omega_j, T\omega_k). \quad \square$$

そうすると、次の命題B.1が成り立つ。

[命題B.1]

$$\forall j \in J, \forall k \in J - \{j\}, \omega_j \in \Psi_j \subset \Psi$$

$$\wedge \omega_k \notin \Psi_j. \quad \square$$

B2. 相関検出写像 COR_j の族 $\{COR_j\}_{j \in J}$ を用いた類似度関数 SM を再帰的に構成してえられる類似度関数 SM'

Axiom 2を満たす式 (A3.5) の類似度関数 SM を導入して、

$$q_j(\varphi) \equiv \sum_{\eta \in \Psi_j} COR_j(T\varphi, T\eta) \cdot SM(\eta, \omega_j) \tag{B2.1}$$

を定義する。 $\eta \in \Psi_j$ についての、 $T\varphi$ と $T\eta$ との間の相関 $COR_j(T\varphi, T\eta)$ が大であればあるほど、かつ

鈴木昇一：原パターンを近似できるという拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの，会話音声・動画像処理への応用

η が ω_j と似ている程度 $SM(\eta, \omega_j)$ が大であればあるほど， $q_j(\varphi)$ の値は大きい値になることがわかる。
次の補助定理B.1が成り立つ。

[補助定理B.1]

$$(i) \quad \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, q_j(\varphi) \geq COR_j(T\varphi, T\omega_j). \quad (B2.2)$$

$$(ii) \quad \forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, q_j(\omega_j) \geq COR_j(T\omega_j, T\omega_j) (> 0) > COR_j(T\omega_i, T\omega_j). \quad (B2.3)$$

□

更に，

$$q'_j(\varphi) \equiv q_j(\varphi) - \max_{i \in J - \{j\}} q_j(\omega_i) \quad (B2.4)$$

を定義する。そうすると，次の補助定理B.2が成り立つ。

[補助定理B.2]

$$(i) \quad \forall j \in J, \forall k \in J - \{j\}, q'_j(\omega_k) \leq 0. \quad (B2.5)$$

$$(ii) \quad \forall j \in J, q'_j(\omega_j) > 0. \quad (B2.6)$$

□

その後， $p_j(\varphi)$ を，

$$p_j(\varphi) = \begin{cases} q'_j(\varphi) & \text{if } q'_j(\varphi) > 0 \\ 0 & \text{if } q'_j(\varphi) \leq 0 \end{cases} \quad (B2.7)$$

と定義する。以上の準備をして，

$$SM'(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} p(\mathfrak{C}_j) \cdot p_j(\varphi) / \sum_{k \in J} p(\mathfrak{C}_k) \cdot p_k(\varphi) \cdots \sum_{k \in J} p(\mathfrak{C}_k) \cdot p_k(\varphi) > 0 \text{ のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \sum_{k \in J} p(\mathfrak{C}_k) \cdot p_k(\varphi) = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (B2.8)$$

と定義される関数

$$SM' : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leq s \leq 1\}$$

を定義する。この関数 SM' が相関検出画像 COR_j の族 $\{COR_j\}_{j \in J}$ を用い，類似度関数 SM を再帰的に構成したものであることが，次の定理B.1よりわかる。

[定理B.1] (相関検出画像 COR_j の族 $\{COR_j\}_{j \in J}$ を用いた類似度関数 SM の再帰的構成定理)

式 (B2.8) のように定義された関数 SM' は axiom 2 を満たす。 □

axiom 2 を満たす式 (B2.1) 内の SM の例を構成しておこう。

先ず，規格化内積 (normalized inner product)

$$nip(\varphi, \eta) = \begin{cases} \frac{(\varphi, \eta)}{\|\varphi\| \cdot \|\eta\|} & \text{if } \|\varphi\| \cdot \|\eta\| > 0 \\ 0 & \text{if } \|\varphi\| \cdot \|\eta\| = 0 \end{cases} \quad (B2.9)$$

を定義して，

$$SM(\varphi, \omega_j) =$$

$$\begin{cases} \log_e \frac{1}{\sqrt{1-|nip(T\varphi, T\omega_j)|^2}} \cdots \text{sum } \log(\varphi) > 0 \text{ のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \text{sum } \log(\varphi) = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{B2.10})$$

ここに,

$$\text{sum } \log(\varphi) = \sum_{k \in J} \log_e \frac{1}{\sqrt{1-|nip(T\varphi, T\omega_k)|^2}} \quad (\text{B2.11})$$

と定義される式 (A3.5) の類似度関数 SM は axiom 2 を満たすことが直ちにわかる.

以上の記述の一般論, 詳細は文献 [B20] の付録Aにある.

付録C. 1次ニューラルネットによる大分類関数 BSC の再帰的構成

本付録Cでは, 1次ニューラルネット (パーセプトロン) を使用し, axiom 3 を満たすように大分類関数 BSC を構成する. その後, BSC を再帰的に構成し直し, axiom 3 を満たす今1つの大分類関数 BSC' を決定する.

C1. 特徴間距離 $Fdis$ による類似性の度合いの定義と2つのパターン集合 Φ_j^+, Φ_j^-

1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ と, 複素数値特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \rightarrow Z \text{ (複素数全体の集合)} \quad (\text{C1.1})$$

とを用意し, 原パターン $\varphi \in \Phi$ の標準形としてのパターンモデル

$$T\varphi = \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell) \cdot \psi_\ell \in \Phi \quad (\text{C1.2})$$

内の各特徴量 $u(\varphi, \ell)$ を用い, その値が1より大きくない非負量としての, 規格化非負特徴量

$$u'(\varphi, \ell) = \begin{cases} \frac{|u(\varphi, \ell)|}{\sup_{k \in L} |u(\varphi, k)|} \cdots \sup_{k \in L} |u(\varphi, k)| > 0 \text{ のとき} \\ 0 \cdots \sup_{k \in L} |u(\varphi, k)| = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{C1.3})$$

を定義する. 特徴抽出写像

$$u' : \Phi \times L \rightarrow R^+ \text{ (非負実数全体の集合)} \quad (\text{C1.4})$$

を定義したことになる. この特徴抽出写像 u' を用いて, 特徴間距離 (distance between two pattern-models $T\varphi$ and $T\eta$)

$$Fdis(T\varphi, T\eta) = \left[\sum_{\ell \in L} w_\ell \cdot |u'(T\varphi, \ell) - u'(T\eta, \ell)|^2 \right]^{1/2} \quad (\text{C1.5})$$

を導入する. この式 (C1.5) の特徴間距離 $Fdis$ を使い, 2つのパターンモデル $T\varphi, T\eta$ 間の類似性の度合いを

$$g(\varphi, \eta) \equiv \sum_{\ell \in L} w_\ell - Fdis(T\varphi, T\eta)^2 \quad (\text{C1.6})$$

と定義する. その後, 2つの量

鈴木昇一：原パターンを近似できるという拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの、会話音声・動画像処理への応用

$$G_j^+(\varphi) \equiv \sum_{\eta \in \Phi_j^+} g(\varphi, \eta) \quad (\text{C1.7})$$

$$G_j^-(\varphi) \equiv \sum_{\eta \in \Phi_j^-} g(\varphi, \eta) \quad (\text{C1.8})$$

を用意する．ここに，2つのパターン集合 Φ_j^+ ， Φ_j^- は，条件

$$\forall j \in J, \omega_j \in \Phi_j^+ \subset \Phi \wedge [\forall i \in J - \{j\}, \omega_i \in \Phi_j^- \subset \Phi] \quad (\text{C1.9})$$

を満たすものであり，

Φ_j^+ ：第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j に帰属すると，判明している事例パターン η の有限集合

Φ_j^- ：第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j 以外のカテゴリ \mathfrak{C}_i ($i \in J - \{j\}$) に帰属すると，判明している事例パターン η の有限集合

$$(\text{C1.10})$$

である．

C2. 1次ニューラルネットによる大分類関数 *BSC* の構成

3つの実パラメータ a_j ， b_j ， c_j で，

$$Q_j(\varphi) = a_j \cdot G_j^+(\varphi) - b_j \cdot G_j^-(\varphi) - c_j \quad (\text{C2.1})$$

と定義される量を考える．実は，事例パターンの2つの集合 Φ_j^+ ， Φ_j^- については， Φ_j^+ ， Φ_j^- を，

$$\textcircled{1} \varphi \in \Phi_j^+ \text{ のとき, } G_j^+(\varphi) \text{ は大, } G_j^-(\varphi) \text{ は小} \quad (\text{C2.2})$$

$$\textcircled{2} \varphi \in \Phi_j^- \text{ のとき, } G_j^+(\varphi) \text{ は小, } G_j^-(\varphi) \text{ は大} \quad (\text{C2.3})$$

であるように決めなければならない．

$$\textcircled{3} \varphi \in \Phi_j^+ \text{ のとき, } Q_j(\varphi) > 0 \quad (\text{C2.4})$$

$$\textcircled{4} \varphi \in \Phi_j^- \text{ のとき, } Q_j(\varphi) < 0 \quad (\text{C2.5})$$

が満たされるとする．実変数 u の 0，1 への2値関数

$$\text{psn}(u) = 1 \quad \text{if } u \geq 0, = 0 \quad \text{if } u < 0 \quad (\text{C2.6})$$

を導入しておく．

[補助定理C.1] (関数 $Q_j(\cdot)$ の T -不変性)

$$\forall j \in J, \forall \varphi \in \Phi, Q_j(T\varphi) = Q_j(\varphi). \quad (\text{C2.7})$$

(証明) 先ず，axiom 1の (iii) の後半から，式 (C1.5) の特徴間距離 $Fdis$ の T -不変性

$$\forall j \in J, \forall \varphi \in \Phi, Fdis(T(T\varphi), T(T\eta)) = Fdis(T\varphi, T\eta). \quad (\text{C2.8})$$

が成立し，よって，式 (C1.5) の特徴間距離 $g(\cdot, \cdot)$ の T -不変性，2式 (C1.7)，(C1.8) の $G_j^+(\cdot)$ ， $G_j^-(\cdot)$ の T -不変性が成立し，式 (C2.1) の $Q_j(\cdot)$ の T -不変性が成立する。□

そうすると，以上の準備の基に，次の定理C.1が成り立ち，パーセプトロンで代表される1次ニューラルネット [B2] により，大分類関数 *BSC* が構成されたことがわかる。

[定理C.1] (1次ニューラルネットを用いた大分類関数 *BSC* の構成定理)

(i) 1次ニューラルネットによる表現

$$Q_j(\varphi) = \sum_{\ell \in L} w_{\ell} \cdot y_{\ell j} + d_j \quad (\text{C2.9})$$

が成り立つ．ここに， $y_{\ell j}$ ， d_j は，

$$y_{\ell j} = a_j \cdot |\Phi_j^+| - b_j \cdot |\Phi_j^-| \quad (\text{C2.10})$$

$$d_j = -a_j \cdot \sum_{\eta \in \Phi_j^+} Fdis(T\varphi, T\eta)^2 + b_j \cdot \sum_{\eta \in \Phi_j^-} Fdis(T\varphi, T\eta)^2 + c_j \quad (\text{C2.11})$$

である。

$$(ii) \ BSC(\varphi, j) = psn(Q_j(\varphi)), j \in J \quad (C2.12)$$

と定義される式 (A4.1) の関数は, axiom 3を満す. 然も, カテゴリ間の相互排除性

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, BSC(\omega_i, j) = 0 \quad (C2.13)$$

も成り立つ. □

以上の記述の詳細は文献 [B18] の付録Gにある.

C3. 1次ニューラルネットによるT-不変性を備えた関数psn(Q_j(φ))による, axiom 3を満す式(A4.1)の大分類関数の再帰的構成

C3.1 1次ニューラルネットによる大分類関数BSCの再帰的構成

以上の準備を基に, 1次ニューラルネットによるT-不変性を備えた式 (C2.1) の関数 Q_j(·) を使って, axiom 2を満す式 (A4.1) の大分類関数 BSC' を構成できることが, 次の定理C.2よりわかる.

[定理C.2] (1次ニューラルネットによる大分類関数BSCの再帰構成定理)

axiom 3を満す式 (A4.1) の大分類関数BSCを持ち出すと,

$$BSC'(\varphi, j) = \max\{BSC(\varphi, j), psn(Q_j(\varphi))\} \quad (C3.1)$$

と定義される式 (A4.1) の関数 BSC' は axiom 3を満す. もし, 大分類関数 BSC がカテゴリ間の相互排除性を表す式 (C2.13) を満せば, 大分類関数 BSC' もカテゴリ間の相互排除性も満す. □

Axom 3を満す式 (A4.1) の大分類関数 BSC を1つ, 構成しておかねばならないが, 文献 [B33] の式 (5.88) での大分類関数を採用すればよいが, 次節で, 2例を構成しておこう.

C3.2 大分類関数BSCの構成2例

検索対象とする文書, 検索質問を多次元ベクトルで表現するベクトル空間モデル (vector space model) において support vector machine (SVM) の手法を適用し, World Wide Webなどで使用可能な情報検索システムが構築されているが [A3], 以下の2式 (C3.2), (C3.14) での, 写像 B_j は, SVM内の線形識別関数の重みの形式から, 思いついたものである. 恐らく, 構成された2式 (C3.8), (C3.29) の大分類関数 BSC は, SVMに負けない分類性能を備えていることが期待される.

Axiom 2を満す式 (A3.5) の類似度関数 SM を導入して,

$$B_j\varphi = \sum_{k \in J} y_j(k) \cdot SM(\varphi, \omega_k) \cdot \|T\omega_k\|^{-1} \cdot T\omega_k \quad (C3.2)$$

と定義されるカテゴリ番号 j ∈ J を助序変数に持つ写像

$$B_j : \Phi \rightarrow \Phi \quad (C3.3)$$

を導入する. ここに, 2値関数 y_j(k) ∈ {−1, +1} は,

$$y_j(k) = +1 \quad \text{if } k = j, \quad -1 \quad \text{if } k \neq j \quad (C3.4)$$

と定義されている. 以後, 規格化内積 (normalized inner product)

$$nip(\varphi, \eta) = \frac{(\varphi, \eta)}{\|\varphi\| \cdot \|\eta\|} \quad \text{if } \|\varphi\| \cdot \|\eta\| > 0 \quad (C3.5)$$

を導入し, 0-値計算則

$$nip(\varphi, \eta) = 0 \quad \text{if } \|\varphi\| \cdot \|\eta\| = 0 \quad (C3.6)$$

を約束する. 明らかに, 等式

$$\begin{aligned} & \left(\frac{T\varphi}{\|T\varphi\|}, B_j\varphi \right) \\ &= \sum_{k \in J} y_j(k) \cdot SM(\varphi, \omega_k) \cdot \left(\frac{T\varphi}{\|T\varphi\|}, \frac{T\omega_k}{\|T\omega_k\|} \right) \end{aligned}$$

鈴木昇一：原パターンを近似できるという拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの，会話音声・動画像処理への応用

$$= SM(\varphi, \omega_j) \left(\frac{T\varphi}{\|T\varphi\|}, \frac{T\omega_j}{\|T\omega_j\|} \right) - \sum_{k \in J - \{j\}} SM(\varphi, \omega_k) \cdot \left(\frac{T\varphi}{\|T\varphi\|}, \frac{T\omega_k}{\|T\omega_k\|} \right) \quad (\text{C3.7})$$

が成立している。

このとき，次の定理C.3により，

$$BSC(\varphi, j) = psn \left(\left(\frac{T\varphi}{\|T\varphi\|}, B_j\varphi \right) \right) \quad (\text{C3.8})$$

と定義される式 (A4.1) の大分類関数 BSC が式 (A3.5) の類似度関数 SM を使い構成されたことになる。

[定理C.3] (類似度関数 SM を用いた大分類関数 BSC の構成定理)

axiom 2 を満たす式 (A3.5) の類似度関数 SM を持ち出すと，式 (C3.8) の如く定義される式 (A4.1) の関数 BSC は axiom 3 を満たす。然も，この大分類関数 BSC も式 (C2.13) のカテゴリ間の相互排除性も満たす。

(証明) axiom 3 の (ii) の T -不変性が成立することは，

$$\forall j \in J, \forall \varphi \in \Phi, B_j T\varphi = B_j \varphi \quad (\text{C3.9})$$

が，axiom 2 の (iii) の， SM の T -不変性からわかる。また，axiom 2 の (i) の， SM の正規直交性より，

$$\left(\frac{T\varphi}{\|T\varphi\|}, B_j \varphi \right) = +1 \quad \text{if } \varphi = \omega_j, = -1 \quad \text{if } \varphi = \omega_i (i \in J - \{k\}) \quad (\text{C3.10})$$

が判明し，前者から，axiom 3 の (i) が成立する。後者から，(C2.13) のカテゴリ間の相互排除性が成立する。□

定理C.3を一般化しよう。

$$\forall j \in J, \exists k \in K_j, \eta_k = \omega_k \quad (\text{C3.11})$$

が満たされるようなサンプルパターンの集合

$$\eta_k, k \in K_j, j \in J \quad (\text{C3.12})$$

を考えよう。但し， $k \in K_j$ を持つサンプルパターン η_k は，第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j に帰属しているとす。2 値関数 $q_j(k) \in \{-1, +1\}$ は，

$$q_j(\eta_k) = \begin{cases} +1 \cdots \eta_k \text{ が第 } j \in J \text{ 番目のカテゴリ } \mathfrak{C}_j \text{ に帰属しているとき} \\ -1 \cdots \eta_k \text{ が第 } j \in J \text{ 番目のカテゴリ } \mathfrak{C}_j \text{ 以外の第 } i \in J - \{j\} \text{ 番目の} \\ \text{カテゴリ } \mathfrak{C}_i \text{ に帰属しているとき} \end{cases} \quad (\text{C3.13})$$

と定義されている。ここで，カテゴリ番号 $j \in J$ を助序変数に持つ式 (C3.3) の写像 B_j を，

$$B_j \varphi = \sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} q_j(\eta_k) \cdot sm(T\varphi, T\eta_k) \cdot \frac{T\eta_k}{\|T\eta_k\|} \quad (\text{C3.14})$$

$$= \sum_{k \in K_j} sm(T\varphi, T\eta_k) \cdot \frac{T\eta_k}{\|T\eta_k\|} - \sum_{j \in J - \{j\}} \sum_{k \in K_j} sm(T\varphi, T\eta_k) \cdot \frac{T\eta_k}{\|T\eta_k\|} \quad (\text{C3.15})$$

と，定義する。式 (C3.15) に登場している $sm(T\varphi, T\eta_k)$ は，パターンモデル $T\varphi$ が第 k 番目のサンプルパターンモデルと似ている程度を表す規格化類似度であり，

$$\forall \varphi \in \Phi, [\forall k, 0 \leq sm(T\varphi, T\eta_k) = \frac{sim(T\varphi, T\eta_k)}{\sum_{i \in J} \sum_{k \in K_i} sim(T\varphi, T\eta_k)} \leq 1] \quad (\text{C3.16})$$

$$\bigwedge_{i \in J} \sum_{k \in K_j} sm(T\varphi, T\eta_k) = 1 \tag{C3.17}$$

を満たしているものである。式 (C3.12) のサンプルパターン集合は、性質

$$\sum_{i \in J} \sum_{k \in K_j} sm(T\varphi, T\eta_k) > 0 \tag{C3.18}$$

を満たしているものとする。

式 (C3.15) に登場している $sim(T\varphi, T\eta_k)$ は、パターンモデル $T\varphi$ が第 k 番目のサンプルパターンモデルと似ている程度を表す非規格化類似度であり、不等式

$$0 \leq sim(T\varphi, T\eta_k) \tag{C3.19}$$

を満たさなければならない。 $sim(T\varphi, T\eta_k)$ を、以下に、6例、構成しておこう。

$$[例 1] \quad sim(T\varphi, T\eta_k) = \exp[-a_k \cdot \|T\varphi - T\eta_k\|^2], \quad a_k > 0 \tag{C3.20}$$

$$[例 2] \quad sim(T\varphi, T\eta_k) = |nip(T\varphi, T\eta_k)|^2 \tag{C3.21}$$

$$[例 3] \quad sim(T\varphi, T\eta_k) = \frac{1}{\|T\varphi - T\eta_k\|^2} \tag{C3.22}$$

$$[例 4] \quad sim(T\varphi, T\eta_k) = \frac{1}{\sqrt{1 - |nip(T\varphi, T\eta_k)|^2}} \tag{C3.23}$$

$$[例 5] \quad sim(T\varphi, T\eta_k) = \exp[a_k \cdot \frac{1}{\|T\varphi - T\eta_k\|^2}], \quad a_k > 0 \tag{C3.24}$$

$$[例 6] \quad sim(T\varphi, T\eta_k) = \log_c \frac{1}{\sqrt{1 - |nip(T\varphi, T\eta_k)|^2}} \tag{C3.25}$$

□

2式 (C3.14), (C3.15) を使って, $(\frac{T\varphi}{\|T\varphi\|}, B_j\varphi)$ を計算すれば,

$$(\frac{T\varphi}{\|T\varphi\|}, B_j\varphi) = \sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} q_j(\eta_k) \cdot sm(T\varphi, T\eta_k) \cdot (\frac{T\varphi}{\|T\varphi\|}, \frac{T\eta_k}{\|T\eta_k\|}) \tag{C3.26}$$

$$= \sum_{k \in K_j} sm(T\varphi, T\eta_k) \cdot (\frac{T\varphi}{\|T\varphi\|}, \frac{T\eta_k}{\|T\eta_k\|}) - \sum_{j \in J - \{j\}} \sum_{k \in K_j} sm(T\varphi, T\eta_k) \cdot (\frac{T\varphi}{\|T\varphi\|}, \frac{T\eta_k}{\|T\eta_k\|}) \tag{C3.27}$$

となる。ここで、不等式

$$\max_{i \in J - \{j\}} (\frac{T\omega_i}{\|T\omega_i\|}, B_j\omega_i) < c_j \leq (\frac{T\omega_j}{\|T\omega_j\|}, B_j\omega_j) \tag{C3.28}$$

を満たすように、各 $c_j (j \in J)$ を選ぶ。

そうすると、式 (C3.29) のように、axiom 3を満たす式 (A4.1) の関数 BSC が、次の定理C.4により、得られた。

[定理C.4] (大分類関数 BSC の構成定理)

2式 (C3.16), (C3.17) を満たす規格化類似度関数 $sm(T\varphi, T\eta_k)$ を持ち出すと、

$$BSC(\varphi, j) = psn((\frac{T\varphi}{\|T\varphi\|}, B_j\varphi) - c_j), \quad j \in J \tag{C3.29}$$

の如く定義される式 (A4.1) の関数 BSC は axiom 3を満たす。然も、この大分類関数 BSC も式 (C2.13) のカテゴリ間の相互排除性も満たす。

(証明) axiom 3の (ii) の T -不変性が成立することは、式 (C3.9) が、axiom 2の (iii) の、 SM の T -不変性からわかる。また、不等式 (C3.28) を考慮すれば、

鈴木昇一：原パターンを近似できるという拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの，会話音声・動画像処理への応用

$$\varphi \text{ が } \omega_j \text{ のとき, } \left(\frac{T\varphi}{\|T\varphi\|}, B_j\varphi \right) \geq c_j \quad (\text{C3.30})$$

が判明し， axiom 3の (i) が成立する．更に，不等式 (C3.28) を考慮すれば，

$$\varphi \text{ が } \omega_i \text{ (} i \in J - \{j\} \text{) のとき, } \left(\frac{T\varphi}{\|T\varphi\|}, B_j\varphi \right) < c_j \quad (\text{C3.31})$$

が判明し，式 (C2.13) のカテゴリ間の相互排除性が成立する。□

付録D. サンプル振幅値の系列が与えられた場合の，パターンモデル $T\varphi$ の構成

本付録Dでは，サンプル振幅値の系列のみ与えられたパターン $\varphi \in \Phi$ のモデル $T\varphi \in \Phi$ を axiom 1の (i) (ii) (iii) の3後半，並びに，(iv) が満たされるように，決定されている。

D1. Lagrange多項式系によるパターンモデル $T\varphi$

D1.1 音声信号 $\varphi = \varphi(x)$, $a' \leq x \leq b'$ の場合

$$1 \text{ 次元直線座標系 } x, a' \leq x \leq b' \quad (\text{D1.1})$$

上のパターン

$$\varphi = \varphi(x), a' \leq x \leq b' \quad (\text{D1.2})$$

について，座標値のサンプル c_i の n 個からなる集合 $\{c_i\}_{i=1 \sim n}$ が，不等式

$$a' \leq c_1 < c_2 < \dots < c_i < c_{i+1} < \dots < c_n \leq b' \quad (\text{D1.3})$$

を満たすとする．各サンプル座標値 $x = c_i$ 上での，振幅 $\varphi(c_i)$ が

$$\varphi(c_i) = d_i, i = 1 \sim n \quad (\text{D1.4})$$

と与えられたとする．パターン $\varphi \in \Phi$ について得られる情報は，式 (D1.4) の振幅サンプル値の集合 $d_i, i = 1 \sim n$ のみであるの場合， axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半，並びに (iv) を満たすそのパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ を構成してみよう．構成結果は，定理D.2に示される。

まず，補間して，式 (D1.2) のパターンは，次の定理D.1の式 (D1.5) で与えられることに注意しよう。

【定理D.1】 (次元のLagrangeの公式)

補間条件式 (D1.4) を満たす式 (D1.2) のパターン φ は

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i(x)}{p_i(c_i)} \cdot d_i = \sum_{\ell=L} d_\ell \cdot \psi_\ell(x), a' \leq x < b' \quad (\text{D1.5})$$

と， $(n-1)$ 次 の x のLagrange多項式で与えられる．ここに，

$$P(x) = \prod_{i=1}^n (x - c_i), a' \leq x < b' \quad (\text{D1.6})$$

$$P_i(x) = P(x) / (x - c_i) = \prod_{j=1(j \neq i)}^n (x - c_j), a' \leq x < b', i \in L \quad (\text{D1.7})$$

$$\psi_i(x) = \frac{p_i(x)}{p_i(c_i)}, a' \leq x < b', i \in L \quad (\text{D1.8})$$

$$L = \{1, 2, \dots, n\} \quad (\text{D1.9})$$

である。□

定理D.1は，文献 [A2] の2.1節の定理2.1 (p.14) である．その証明は，等式

$$\frac{p_i(c_i)}{p_j(c_j)} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (\text{D1.10})$$

などからなされている。

以下では、0 値の計算則

$$\frac{d_\ell}{\sup_{k \in L} |d_\ell|} = 0 \quad \text{if} \quad \sup_{k \in L} |d_k| = 0 \quad (\text{D1.11})$$

と約束する。次の定理D.2は、式 (D1.5) のパターン $\varphi \in \Phi$ のモデルが、式 (D1.13) の $T\varphi \in \Phi$ であることを指摘している。

[定理D.2] (1次元サンプルパターンのモデル構成定理)

形式 (D1.) のパターン φ について、

$$(T\varphi)(x) = T\left(\sum_{i=1}^n d_i \cdot \psi_i(x)\right) = \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\sup_{k=1 \sim n} |d_k|} \cdot \psi_i(x) \quad (\text{D1.12})$$

$$= \sum_{\ell \in L} \frac{d_\ell}{\sup_{k \in L} |d_\ell|} \cdot \psi_\ell(x), \quad a' \leq x < b' \quad (\text{D1.13})$$

と定義される式 (A1.8) の写像 T は axiom 1 の (i), (ii), (iii) の3後半、並びに (iv) を満たし、モデル構成作用素である。□

定理D.2を証明する前に、次の補助定理D.1を証明しておく。

[補助定理D.1] (サンプルパターンモデルの不動点定理)

振幅のサンプル値の絶対値の上限の“1, 0 性質”

$$\sup_{k \in L} |d_k| \in \{0, 1\} \quad (\text{D1.14})$$

を満たす式 (D1.5) のパターン $\varphi \in \Phi$ について、不動点方程式

$$T\varphi = \varphi \quad (\text{D1.15})$$

が成り立つ。

(証明) (i) $\sup_{k \in L} |d_k| = 0$ のとき

$$\forall k \in L, d_k = 0 \quad (\text{D1.16})$$

を得、

$$\varphi = 0 \quad \because \text{式 (D1.5)}$$

$$= T\varphi. \quad \because \text{2式 (D1.11), (D1.13)} \quad (\text{D1.17})$$

(ii) $\sup_{k \in L} |d_k| = 1$ のとき

$$(T\varphi)(x) = \sum_{\ell \in L} \frac{d_\ell}{\sup_{k \in L} |d_\ell|} \cdot \psi_\ell(x) \quad \because \text{定義式 (D1.13)}$$

$$= \sum_{\ell \in L} d_\ell \cdot \psi_\ell(x) \quad \because \text{式 (D1.14)}$$

$$= \varphi(x), \quad a' \leq x \leq b'. \quad \because \text{式 (D1.5)} \quad (\text{D1.18})$$

□

補助定理D.1を使い，定理D.2が次のように証明される．

(定理D.2の証明)

axiom 1の (i) の後半の証明： $\varphi = 0$ が成り立っているとしよう．式 (D1.5) の φ の表現より， $\{\phi_\ell\}_{\ell \in L}$ が 1 次独立な系であることから， $\varphi = 0$ と同値な条件は，

$$\forall \ell \in L, d_\ell = 0 \quad (\text{D1.19})$$

である．よって，式 (D1.11) の 0 値の計算則を考慮すれば， T の定義式 (D1.13) から， $T\varphi = 0$ が成り立つ．

axiom 1の (ii) の後半の証明： a を正の定数とし， η を，

$$\eta = a \cdot \varphi = \sum_{\ell \in L} a \cdot d_\ell \cdot \phi_\ell \quad (\text{D1.20})$$

と定義しよう．2つの場合 (ii-1)，(ii-2) に分けて，証明する．

(ii-1) 式 (D1.19) が成り立つとき

このとき， $\varphi = 0$ であり，また，

$$\forall \ell \in L, a \cdot d_\ell = 0 \quad (\text{D1.21})$$

が成り立つことより， $\eta = 0$ である．よって，式 (D1.11) の 0 値の計算則を考慮すれば， T の定義式 (D1.13) から， $T\eta = 0$ が成り立つ．同様に考えて， $T\eta = 0$ を得，

$$T\eta = T\varphi \quad (\text{D1.22})$$

が成り立つことになる．

(ii-2) 式 (D1.19) が成り立たないとき，

$$\forall \ell \in L, a \cdot d_\ell / \sup_{k \in L} |a \cdot d_k| = d_\ell / \sup_{k \in L} |d_k| \quad (\text{D1.23})$$

であるから， T の定義式 (D1.13) から，式 (D1.22) が成り立つことになる．

axiom 1の (iii) の後半の証明： η を，

$$\eta = T\varphi = \sum_{\ell \in L} \frac{d_\ell}{\sup_{k \in L} |d_k|} \cdot \phi_\ell = \sum_{\ell \in L} e_\ell \cdot \phi_\ell \quad (\text{D1.24})$$

と定義しよう．ここに，

$$e_\ell = \frac{d_\ell}{\sup_{k \in L} |d_k|}, \ell \in L \quad (\text{D1.25})$$

である．

2つの場合 (iii-1)，(iii-2) に分けて，証明する．

(iii-1) 式 (D1.19) が成り立つとき

このとき，

$$\forall \ell \in L, e_\ell = 0 \quad (\text{D1.26})$$

が成り立つことより， $\eta = 0$ である．よって，(i) を適用して， $T\eta = 0$ が成り立つ．よって，式 (D1.22) が成り立つことになる．

(iii-2) 式 (D1.19) が成り立たないとき，

このとき，

$$\forall \ell \in L, e_\ell / \sup_{k \in L} |e_k| = e_\ell \quad \because \quad \sup_{k \in L} |e_k| = 1 \quad (\text{D1.27})$$

であるから， T の定義式 (D1.13) から，式 (D1.22) が成り立つことになる．

axiom 1の (iv) の証明：

$$\sup_{k \in L} |d_k| = 1 \tag{D1.28}$$

のとき、補助定理D1.1を適用して、

$$T\varphi = \varphi \neq 0. \tag{D1.29}$$

D1.2 特徴抽出写像 u を導入しての、1次元サンプルパターンモデル $T\varphi$ の表現

式 (D1.5) のパターン $\varphi \in \Phi$ から抽出される第 $\ell \in L$ 番目の実数値特徴量 $u(\varphi, \ell)$ を

$$u(\varphi, \ell) = \frac{d_\ell}{\sup_{k \in L} |d_k|}, \ell \in L \tag{D1.30}$$

とおくと、特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \rightarrow R \text{ (実数全体の集合)} \tag{D1.31}$$

が得られ、このとき、式 (D1.13) のパターンモデル $T\varphi$ は、

$$T\varphi = \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell) \cdot \psi_\ell \tag{D1.32}$$

と表されることに注意しておく。

D1.3 1次元区間 $[a', b']$ を等分割しての、一層精密な1次元サンプルパターンモデル $T\varphi$

一層精密なパターンモデル $T\varphi$ を得るには、次のように考え直せばよい。

全区間

$$[a', b'] = \{x \mid a' \leq x \leq b'\} \tag{D1.33}$$

を q 等分すると、その各等分点の座標 $a'(k)$ は、

$$a'(k) = a' + \frac{(b' - a')}{q} \cdot k, k = 0, 1, 2, \dots, q \tag{D1.34}$$

と表されるが、 $a'(k) \leq x < a'(k+1)$ を満たす x に対し、直線上の座標値のサンプル点 $c_\ell(k)$ を考え、不等式 (D1.3) の代りに、不等式

$$a'(k) \leq c_1(k) < c_2(k) < \dots < c_\ell(k) < c_{\ell+1}(k) < \dots < c_{n(k)}(k) < a'(k+1) \tag{D1.35}$$

を満たす座標値 $c_\ell(k)$ の集合

$$c_\ell(k), \ell \in L(k) = \{0, 1, 2, \dots, n(k)\}, k = 0, 1, 2, \dots, q-1 \tag{D1.36}$$

を採用して、与えられた座標値、関数値の対 $(c_\ell(k), d_\ell(k))$ の集合

$$(c_\ell(k), d_\ell(k)), \ell \in L(k) = \{1, 2, \dots, n(k)\}, k = 0, 1, 2, \dots, q-1 \tag{D1.37}$$

について補間条件

$$\varphi(c_\ell(k)) = d_\ell(k), \ell \in L(k) = \{1, 2, \dots, n(k)\}, k = 0, 1, 2, \dots, q-1 \tag{D1.38}$$

を満たすパターン $(n(k)-1)$ 次の区分的多項式

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{\ell \in L(k)} d_\ell(k) \cdot \psi_{(k, \ell)}(x), a' \leq x < b' \tag{D1.39}$$

に対応して、定理D.2と同様なパターンモデル $(n(k)-1)$ 次の区分的多項式

$$(T\varphi)(x) = \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{\ell \in L(k)} \frac{d_\ell(k)}{\sup_{k \in L(k)} |d_\ell(k)|} \cdot \psi_{(k, \ell)}(x), a' \leq x < b' \tag{D1.40}$$

を考えることもできる。この式 (D1.40) のごとく定義される式 (A1.8) の写像 T も、axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半、並びに (iv) を満たし。モデル構成作用素である (1元サンプルパターンの

区分的モデル構成定理). ここに, $\phi_{(k, \ell)}(x)$ は,

$$\phi_{(k, \ell)}(x) = \frac{\prod_{i=1(i \neq \ell)}^{n(k)} (x - c_i(k))}{\prod_{i=1(i \neq \ell)}^{n(k)} (c_\ell(k) - c_i(k))}, \quad a'(k) \leq x < a'(k+1) \quad (D1.41)$$

$$\phi_{(k, \ell)}(x) = \theta_{=1(i \neq \ell)} \quad x < a'(k) \vee a'(k+1) \leq x \quad (D1.42)$$

と定義される.

D1.4 動画像関数 $\varphi(x_1, x_2)$, $a' \leq x_1 < b'$, $a'' \leq x_2 < b''$ の場合

2次元平面座標系 $x = \langle x_1, x_2 \rangle$, $a' \leq x_1 < b'$, $a'' \leq x_2 < b''$ 上のパターン

$$\varphi(x_1, x_2), \quad a' \leq x_1 < b', \quad a'' \leq x_2 < b'' \quad (D1.43)$$

について, 平面上の座標値のサンプル点 $c_\ell = c_{(\ell_1, \ell_2)} = \langle c'_{\ell_1}, c''_{\ell_2} \rangle$ を考え, 不等式

$$a' \leq c'_1 < c'_2 < \dots < c'_{\ell_1} < \dots < c'_{n_1} \leq b' \quad (D1.44)$$

$$a'' \leq c''_1 < c''_2 < \dots < c''_{\ell_2} < \dots < c''_{n_2} \leq b'' \quad (D1.45)$$

を満たすとする. 各サンプル座標値 $x = \langle c_{\ell_1}, c_{\ell_2} \rangle$ 上での, 振幅 $\varphi(c'_{\ell_1}, c''_{\ell_2})$ が

$$\varphi(c_\ell(k)) = \varphi(c'_{\ell_1}, c''_{\ell_2}) = d_\ell = d_{(\ell_1, \ell_2)}, \ell \in L \equiv \{(\ell_1, \ell_2) \mid \ell_1 = 1, 2, \dots, n_1, \ell_2 = 1, 2, \dots, n_2\} \quad (D1.46)$$

と与えられたとする. このとき,

$$P'_{\ell_1}(x_1) = \prod_{i_1=1(i_1 \neq \ell_1)}^{n_1} (x_1 - c'_{i_1}) \quad (D1.47)$$

$$\phi'_{\ell_1}(x_1) = P'_{\ell_1}(x_1) / P'_{\ell_1}(c_{\ell_1}) \quad (D1.48)$$

$$P''_{\ell_2}(x_2) = \prod_{i_2=1(i_2 \neq \ell_2)}^{n_2} (x_2 - c''_{i_2}) \quad (D1.49)$$

$$\phi''_{\ell_2}(x_2) = P''_{\ell_2}(x_2) / P''_{\ell_2}(c_{\ell_2}) \quad (D1.50)$$

$$\phi_\ell(x) = \phi_{(\ell_1, \ell_2)}(x_1, x_2) = \phi'_{\ell_1}(x_1) \cdot \phi''_{\ell_2}(x_2) \quad (D1.51)$$

を用意し, パターン $\varphi \in \Phi$ について得られる情報は, 式 (D1.46) の振幅サンプル値の集合のみであるの場合, axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半, 並びに (iv) を満たすそのパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ を構成してみよう. 構成結果は, 定理D.4に示される.

まず, 補間して, 式 (D1.46) のパターン φ は, 次の定理D.3の式 (D1.52) で与えられることに注意しよう.

[定理D.3] (2次元のLagrangeの公式)

補間条件式 (D1.46) を満たす式 (D1.43) のパターン φ は

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2) = \sum_{\ell_1=0}^{n_1-1} \sum_{\ell_2=0}^{n_2-1} d_{(\ell_1, \ell_2)} \cdot \phi_{(\ell_1, \ell_2)}(x_1, x_2), \quad x = \langle x_1, x_2 \rangle, \quad a' \leq x_1 < b', \quad a'' \leq x_2 < b'' \quad (D1.52)$$

と, $(n_1 - 1)$, $(n_2 - 1)$ 次の x_1 , x_2 のLagrange多項式で与えられる. □

定理D.4が証明するために, 次の補助定理D.2を用意する.

[補助定理D.2] (サンプルパターンモデルの不動点定理)

振幅のサンプル値の絶対値の上限の“1, 0性質”である式 (D1.14) を満たす式 (D1.52) のパターン $\varphi \in \Phi$ について, 式 (D1.15) の不動点方程式が成り立つ. □

次の定理D.4は, 式 (D1.52) のパターン $\varphi \in \Phi$ のモデルが, 式 (D1.53) の $T\varphi \in \Phi$ であることを指摘している.

[定理D.4] (2次元サンプルパターンモデル構成定理)

形式 (D1.52) のパターン φ について,

$$(T\varphi)(x) = (T\varphi)(x_1, x_2) = \sum_{\ell_1=0}^{n_1-1} \sum_{\ell_2=0}^{n_2-1} \frac{d_{\langle \ell_1, \ell_2 \rangle}}{\sup_{\langle k_1, k_2 \rangle \in L} |d_{\langle k_1, k_2 \rangle}|} \cdot \phi_{\langle \ell_1, \ell_2 \rangle}(x_1, x_2)$$

$$, x = \langle x_1, x_2 \rangle, a' \leq x_1 < b', a'' \leq x_2 < b' \tag{D1.53}$$

と定義される式 (A1.8) の写像 T は axiom 1 の (i), (ii), (iii) の3後半, 並びに (iv) を満たし、モデル構成作用素である。□

D1.5 特徴抽出写像 u を導入しての、2次元サンプルパターンモデル $T\varphi$ の表現

式 (D1.52) のパターン $\varphi \in \Phi$ から抽出される第番目の実数値特徴量 $u(\varphi, \ell)$ を

$$u(\varphi, \ell) = \frac{d_{\langle \ell_1, \ell_2 \rangle}}{\sup_{k \in L} |d_k|}, \ell = \langle \ell_1, \ell_2 \rangle \in L \tag{D1.54}$$

とおくと、式 (D1.31) の特徴抽出写像 u が得られ、このとき、式 (D1.53) のパターンモデル $T\varphi$ は、式 (D1.32) の如く、表されることに注意しておく。

D1.6 2次元区間 $[a', b'] \otimes [a'', b'']$ を等分割しての、一層精密な2次元サンプルパターンモデル $T\varphi$ 全区間

$$[a', b'] \otimes [a'', b''] = \{x_1 \mid a' \leq x_1 \leq b'\} \otimes \{x_2 \mid a'' \leq x_2 \leq b''\} \tag{D1.55}$$

を各々、 q_1, q_2 等分すると、その各等分点の座標 $a'(k_1), a''(k_2)$ は、

$$a'(k_1) = a' + \frac{(b' - a')}{q_1} \cdot k_1, k_1 = 0, 1, 2, \dots, q_1 \tag{D1.56}$$

$$a''(k_2) = a'' + \frac{(b'' - a'')}{q_2} \cdot k_2, k_2 = 0, 1, 2, \dots, q_2 \tag{D1.57}$$

と表される。 $a'(k_1) \leq x_1 < a'(k_1 + 1), a''(k_2) \leq x_2 < a''(k_2 + 1)$ を満たす $x = \langle x_1, x_2 \rangle$ に対し、不等式

$$a'(k_1) \leq c'_{\ell_1}(k_1) < c'_{\ell_2}(k_1) < \dots < c'_{\ell_1}(k_1) < \dots < c'_{n_1(k_1)}(k_1) < a'(k_1 + 1) \tag{D1.58}$$

$$a''(k_2) \leq c''_{\ell_1}(k_2) < c''_{\ell_2}(k_2) < \dots < c''_{\ell_2}(k_2) < \dots < c''_{n_2(k_2)}(k_2) < a''(k_2 + 1) \tag{D1.59}$$

を満たす平面上の座標値のサンプル点 $c_\ell(k) = c_{\langle \ell_1, \ell_2 \rangle}(k) = \langle c'_{\ell_1}(k_1), c''_{\ell_2}(k_2) \rangle$ を考える。ここに、 k は $\langle k_1, k_2 \rangle$ であることに注意しておく。

各サンプル座標値 $x = \langle c_{\ell_1}(k_1), c_{\ell_2}(k_2) \rangle$ 上で、振幅 $\varphi(c'_{\ell_1}(k_1), c''_{\ell_2}(k_2))$ が

$$\varphi(c_\ell(k)) = \varphi(c'_{\ell_1}(k_1), c''_{\ell_2}(k_2)) = d_\ell(k) = d_{\langle \ell_1, \ell_2 \rangle}(k_1, k_2)$$

$$, \ell \in L(k) = L(k_1, k_2) = \{\langle \ell_1, \ell_2 \rangle \mid \ell_1 = 1, 2, \dots, n_1(k_1), \ell_2 = 1, 2, \dots, n_2(k_2)\},$$

$$k_1 = 0, 1, 2, \dots, q_1 - 1, k_2 = 0, 1, 2, \dots, q_2 - 1, \tag{D1.60}$$

と与えられたとする。このとき、

$$P'_{\langle k_1, \ell_1 \rangle}(x_1) = \prod_{i_1=1}^{n_1(k_1)} (x_1 - c'_{i_1}(k_1)) \tag{D1.61}$$

$$\phi'_{\langle k_1, \ell_1 \rangle}(x_1) = P'_{\langle k_1, \ell_1 \rangle}(x_1) / P'_{\langle k_1, \ell_1 \rangle}(c'_{\ell_1}(k_1)) \tag{D1.62}$$

$$\phi'_{\langle k_1, \ell_1 \rangle}(x_1) = 0 \quad \text{if} \quad x_1 < a'(k_1) \vee a'(k_1 + 1) \leq x_1 \tag{D1.63}$$

$$P''_{\langle k_2, \ell_2 \rangle}(x_2) = \prod_{i_2=1}^{n_2(k_2)} (x_2 - c''_{i_2}(k_2)) \tag{D1.64}$$

$$\phi''_{\langle k_2, \ell_2 \rangle}(x_2) = P''_{\langle k_2, \ell_2 \rangle}(x_2) / P''_{\langle k_2, \ell_2 \rangle}(c''_{\ell_2}(k_2)) \tag{D1.65}$$

$$\phi''_{\langle k_2, \ell_2 \rangle}(x_2) = 0 \quad \text{if} \quad x_2 < a''(k_2) \vee a''(k_2 + 1) \leq x_2 \tag{D1.66}$$

$$\phi_{\langle k, \ell \rangle}(x) = \phi_{\langle \langle k_1, \ell_1 \rangle, \langle k_2, \ell_2 \rangle \rangle}(x_1, x_2) = \phi'_{\langle k_1, \ell_1 \rangle}(x_1) \cdot \phi''_{\langle k_2, \ell_2 \rangle}(x_2)$$

$$k = \langle k_1, k_2 \rangle, \ell = \langle \ell_1, \ell_2 \rangle \quad (\text{D1.67})$$

を用意し，パターン $\varphi \in \Phi$ について得られる情報は，式 (D1.58) の振幅サンプル値の集合 d_ℓ ， $\ell \in L$ のみであるの場合，axiom 1の (i)，(ii)，(iii) の3後半，並びに (iv) を満たすそのパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ を構成してみよう．構成結果は，式 (D1.69) で表される．

まず，補間して，式 (D1.68) のパターン φ は，次の定理D.5の式 (D1.68) で与えられることに注意しよう．

[定理D.5] (2次元のLagrangeの区分的公式)

補間条件式 (D1.60) を満たす式 (D1.43) のパターン φ は

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x_1, x_2) \\ &= \sum_{k_1=0}^{q_1-1} \sum_{\ell_1=1}^{n_1(k_1)} \sum_{k_2=0}^{q_2-1} \sum_{\ell_2=1}^{n_2(k_2)} d_{\langle \ell_1, \ell_2 \rangle}(k_1, k_2) \cdot \psi_{\langle \langle k_1, \ell_1 \rangle, \langle k_2, \ell_2 \rangle \rangle}(x_1, x_2), \quad x = \langle x_1, x_2 \rangle, \quad a' \leq x_1 < b', \quad a'' \leq x_2 < b'' \end{aligned} \quad (\text{D1.68})$$

と， $(n_1(k_1)-1)$ ， $(n_2(k_2)-1)$ 次の x_1 ， x_2 のLagrange多項式の区分的式で与えられる． \square

補間条件式 (D1.60) を満たす式 (D1.43) のパターン φ は式 (D1.68) の如く，表示されるが，この表現式 (D1.68) のパターン φ に対応して，定理D.4と同様なパターンモデル

$$\begin{aligned} (T\varphi)(x) &= (T\varphi)(x_1, x_2) \\ &= \sum_{k_1=0}^{q_1-1} \sum_{\ell_1=1}^{n_1(k_1)} \sum_{k_2=0}^{q_2-1} \sum_{\ell_2=1}^{n_2(k_2)} \frac{d_{\langle \ell_1, \ell_2 \rangle}(k_1, k_2)}{\sup_{\langle k, \ell \rangle \in L} |d_\ell(k)|} \cdot \psi_{\langle \langle k_1, \ell_1 \rangle, \langle k_2, \ell_2 \rangle \rangle}(x_1, x_2), \quad x = \langle x_1, x_2 \rangle, \quad a' \leq x_1 < b', \quad a'' \leq x_2 < b'' \end{aligned} \quad (\text{D1.69})$$

を考えることもできる．この式 (D1.69) の如く定義される式 (A1.8) の写像 T も，axiom 1の (i)，(ii)，(iii) の3後半，並びに (iv) を満たし．モデル構成作用素である (2次元サンプルパターンの区分的モデル構成定理)

D1.7 離散モデル

区分的多項式で表される式 (D1.40) のパターンモデル $T\varphi$ の場合，パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出される第 $\langle k, \ell \rangle$ 番目の実数値特徴量 $u(\varphi, \langle k, \ell \rangle)$ を

$$u(\varphi, \langle k, \ell \rangle) = \frac{d_\ell(k)}{\sup_{k \in L(k)} |d_\ell(k)|}, \quad \langle k, \ell \rangle \in L = \{ \langle k, \ell \rangle \mid \ell \in L(k) = \{1, 2, \dots, n(k)\}, k = 0, 1, 2, \dots, q-1 \} \quad (\text{D1.70})$$

と考えれば，わかるように，音声信号，動画像関数の双方の場合，4式 (D1.13)，(D1.40)，(D1.53)，(D1.69) の4パターンモデルは，式 (D1.32) の形式を備えている．本節では， $u(\varphi, \ell)$ の値を離散値 (discrete value) $u'(\varphi, \ell)$ に直し，axiom 1を満たす式 (D1.32) のパターンモデル $T\varphi$ を，

$$T'\varphi = \sum_{\ell \in L} u'(\varphi, \ell) \cdot \psi_\ell \quad (\text{D1.71})$$

へと，再び，axiom 1を満たすように，直してみよう．

まず，不等式

$$\begin{aligned} -1 &= e_{2p+1}^-(\ell) < e_{2p}^- < \dots < e_2^-(\ell) \\ &< e_1^- < 0 < e_1^+(\ell) \\ &< e_2^+(\ell) < \dots < e_2^+(\ell) < e_{2p+1}^-(\ell) = 1, \quad \ell \in L \end{aligned} \quad (\text{D1.72})$$

を満たす閾値の組

$$e_k^\pm(\ell), k = 1, 2, \dots, 2p+1, \ell \in L \tag{D1.73}$$

を用意する。そして、式 (D1.11) の0値の計算規則の下で、パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出される第 ℓ 番目の実数値特徴量 $u'(\varphi, \ell)$ を

$$u'(\varphi, \ell) = \begin{cases} u_k^+(\ell) \cdots e_{k-1}^+(\ell) < \frac{u(\varphi, \ell)}{\sup_{k \in L} |u(\varphi, k)|} \leq e_k^+(\ell) & (2 \leq k \leq 2p+1) \text{のとき} \\ 0 \cdots e_1^-(\ell) \leq \frac{u(\varphi, \ell)}{\sup_{k \in L} |u(\varphi, k)|} \leq e_1^+(\ell) \\ u_k^-(\ell) \cdots e_k^-(\ell) \leq \frac{u(\varphi, \ell)}{\sup_{k \in L} |u(\varphi, k)|} < e_{k-1}^-(\ell) & (2 \leq k \leq 2p+1) \text{のとき} \end{cases} \tag{D1.74}$$

と定義する。ここに、各離散値 $u_k^\pm(\ell)$ は、

$$\forall \ell \in L, u_{2p+1}^+(\ell) = +1, u_{2p+1}^-(\ell) = -1 \tag{D1.75}$$

$$\forall \ell \in L, e_{k-1}^+(\ell) < u_k^+(\ell) \leq e_k^+(\ell), 2 \leq k \leq 2p+1 \tag{D1.76}$$

$$\forall \ell \in L, e_k^-(\ell) \leq u_k^-(\ell) < e_{k-1}^-(\ell), 2 \leq k \leq 2p+1 \tag{D1.77}$$

と選ばれるものとする。具体的には、例えば、

$$\forall \ell \in L, u_k^+(\ell) = 2^{-1} \cdot [e_{k-1}^+(\ell) + e_k^+(\ell)], 2 \leq k \leq 2p+1 \tag{D1.78}$$

$$\forall \ell \in L, u_k^-(\ell) = 2^{-1} \cdot [e_k^-(\ell) + e_{k-1}^-(\ell)], 2 \leq k \leq 2p+1 \tag{D1.79}$$

と選べばよい。

3 補助定理D.3, D4, D5を用意する。

[補助定理D.3] (サンプルパターン φ の離散0-モデル定理)

4 式 (D1.13), (D1.40), (D1.53), (D1.69) の4モデル $T\varphi$ について、

$$\forall \ell \in L, e_1^-(\ell) \leq \frac{u(\varphi, \ell)}{\sup_{k \in K} |u(\varphi, k)|} \leq e_1^+(\ell) \tag{D1.80}$$

$$\Leftrightarrow T'\varphi = 0. \tag{D1.81}$$

(証明) 4式 (D1.13), (D1.40), (D1.53), (D1.69) の4モデル $T\varphi$ について考えよう。

\Rightarrow について：式 (D1.80) が成立していれば、

$$\forall \ell \in L, u'(\varphi, \ell) = 0 \tag{D1.82}$$

がいえ、よって、式 (D1.81) が成り立つ。

\Leftarrow について：式 (D1.81) $\Rightarrow \forall \ell \in L, u'(\varphi, \ell) = 0 \quad \because$ 系 $\{\phi_\ell\}_{\ell \in L}$ は1次独立

\Rightarrow 式 (D1.80)。

□

[補助定理D.4] (サンプルパターン φ の、形状素 ϕ_ℓ の不動点離散モデル定理)

4 式 (D1.13), (D1.40), (D1.53), (D1.69) の4モデル $T\varphi$ について、

$$\forall k \in L, \varphi = \phi_k \tag{D1.83}$$

$$\Rightarrow T'\varphi = \varphi. \tag{D1.84}$$

(証明) 4式 (D1.13), (D1.40), (D1.53), (D1.69) の4モデル $T\varphi$ について、任意の $k \in L$ について、式 (D1.32) のパターンモデル $T\varphi$ の形式であり、

$\varphi = \phi_k$ のとき、

$$u(\varphi, \ell) = 1 \quad \text{if} \quad \ell = k, = 0 \quad \text{if} \quad \ell \neq k \tag{D1.85}$$

が、式 (D1.10) から、成り立つ。よって、式 (D1.74) の $u'(\varphi, \ell)$ について、

$$u'(\varphi, \ell) = 1 \quad \text{if } \ell = k, = 0 \quad \text{if } \ell \neq k \quad (\text{D1.86})$$

が成り立つ。式 (D1.85) を式 (D1.71) に代入すれば、 $T'\varphi = \varphi$ が得られる。 \square

[補助定理D.5] (サンプルパターン φ の不動点離散モデル定理)

4 式 (D1.13), (D1.40), (D1.53), (D1.69) の 4 モデル $T\varphi$ について、

$$\forall \ell \in L, d_\ell \in \{0\} \cup \{u_k^\pm(\ell) \mid 2 \leq k \leq 2p+1\} \quad (\text{D1.87})$$

$$\wedge \sup_{k \in L} |d_k| \in \{0, 1\} \quad (\text{D1.88})$$

$$\Rightarrow T'\varphi = \varphi = T\varphi \quad (\text{D1.89})$$

(証明) 4 式 (D1.13), (D1.40), (D1.53), (D1.69) の 4 モデル $T\varphi$ について、2つの場合に分けて、示す。

(イ) $\sup_{k \in L} |d_k| = 0$ のとき

このとき、各 $u(\varphi, \ell)$ の、例えば、3 式 (D1.30), (D1.54), (D1.70) などの定義から、

$$\forall \ell \in L, u(\varphi, \ell) = 0 \quad \therefore \quad T\varphi = 0 \quad (\text{D1.90})$$

であり、同時に、の 4 表現式 (D1.5), (D1.39), (D1.52), (D1.68) から、

$$\varphi = 0 \quad (\text{D1.91})$$

である。よって、 $u'(\varphi, \ell)$ の定義式 (D1.74) を考慮すれば、式 (D1.82) が成立し、

$$T'\varphi = 0 = \varphi = T\varphi. \quad (\text{D1.92})$$

(ロ) $\sup_{k \in L} |d_k| = 1$ のとき

このとき、各 $u(\varphi, \ell)$ の、例えば、3 式 (D1.30), (D1.54), (D1.70) などの定義と、式 (D1.87) とから、

$$\forall \ell \in L, u(\varphi, \ell) = d_\ell \in \{0\} \cup \{u_k^\pm(\ell) \mid 2 \leq k \leq 2p+1\} \quad (\text{D1.93})$$

$$\therefore \quad T\varphi = \varphi \quad (\text{D1.94})$$

が得られる。よって、

$$\sup_{k \in L} |u(\varphi, k)| = 1 \quad (\text{D1.95})$$

を得、 $u'(\varphi, \ell)$ の定義式 (D1.74) を考慮すれば、

$$\forall \ell \in L, u'(\varphi, \ell) = u(\varphi, \ell) \in \{0\} \cup \{u_k^\pm(\ell) \mid 2 \leq k \leq 2p+1\}$$

を得、 $T\varphi$, $T'\varphi$ の 2 定義式 (D1.32), (D1.71) を考慮すれば、

$$T'\varphi = \sum_{\ell \in L} u'(\varphi, \ell) \cdot \psi_\ell = \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell) \cdot \psi_\ell = T\varphi \quad (\text{D1.96})$$

$$= \varphi \quad \therefore \quad \text{式 (D1.94)}$$

が得られた。 \square

そうすると、式 (D1.71) の如く定義される式 (A1.8) の写像 T' が D.4 の (i), (ii), (iii) の 3 後半、並びに (iv) を満たすことが上述の 3 補助定理 D.3, D.4, D.5 を使って証明され、次の定理 D.6 が得られる。

[定理D.6] (サンプルパターン φ の離散モデル定理)

4 式 (D1.13), (D1.40), (D1.53), (D1.69) の 4 モデル $T\varphi$ について、式 (D1.71) の如く定義される式 (A1.8) の写像 T' も、axiom 1 の (i), (ii), (iii) の 3 後半、並びに (iv) を満たし、モデル構成作用素である。

(証明) axiom 1の (i) の後半の成立：補助定理D.3からも明らかである。因みに、式 (D1.91) を仮定すると、 φ の4表現式 (D1.5), (D1.39), (D1.52), (D1.68) に、系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ は1次独立であることを考慮すれば、

$$\forall \ell \in L, d_\ell = 0 \tag{D1.97}$$

を得、更に、各 $u(\varphi, \ell)$ の、例えば、3式 (D1.30), (D1.54), (D1.70) などの定義から、

$$\forall \ell \in L, u(\varphi, \ell) = 0 \tag{D1.98}$$

が成立し、 $u'(\varphi, \ell)$ の定義式 (D1.74) を考慮すれば、式 (D1.82) が成立し、 $T'\varphi = 0$ が得られた。

axiom 1の (ii) の後半の成立： a を正定数とし、 η を、

$$\eta = a \cdot \varphi \tag{D1.99}$$

とおき、2つの場合に分けて証明する。

(ii -1) $\forall k \in L, d_k = 0$ の場合

φ の4表現式 (D1.5), (D1.39), (D1.52), (D1.68) を考慮すれば、更に、各 $u(\varphi, \ell)$ の、例えば、3式 (D1.30), (D1.54), (D1.70) などの定義と、 $u'(\varphi, \ell)$ の定義式 (D1.74) とを考慮すれば、 $T'\varphi$ の定義式 (D1.71) を考慮すれば、

$$\forall k \in L, d_k = u(\varphi, k) = u'(\varphi, k) = 0 \tag{D1.100}$$

$$\forall k \in L, a \cdot d_k = u(\eta, k) = u'(\eta, k) = 0 \tag{D1.101}$$

を得、

$$T'\eta = 0 = T'\varphi. \tag{D1.102}$$

(ii -2) $\exists k \in L, d_k \neq 0$ の場合

$$\forall \ell \in L, u(\eta, \ell) = \frac{a \cdot d_\ell}{\sup_{k \in L} |a \cdot d_k|} = \frac{d_\ell}{\sup_{k \in L} |d_k|} = u(\varphi, \ell) \quad \therefore \quad u'(\eta, \ell) = u'(\varphi, \ell) \tag{D1.103}$$

を得、

$$T'\eta = T'\varphi. \tag{D1.104}$$

axiom 1の (iii) の後半の成立： η を、

$$\eta = T'\varphi = \sum_{\ell \in L} u'(\varphi, \ell) \cdot \psi_\ell \tag{D1.105}$$

とおくと、

$$\forall k \in L, u'(\varphi, k) \in \{0\} \cup \{u_k^\pm(\ell) \mid 2 \leq k \leq 2p+1\} \tag{D1.106}$$

$$\wedge \sup_{k \in L} |u'(\varphi, k)| \in \{0, 1\} \tag{D1.107}$$

が成立している。

補助定理D.5を適用でき、

$$T'\eta = \eta, \quad \text{つまり、} \quad T'(T'\varphi) = T'\varphi \tag{D1.108}$$

が成立する。

axiom 1の (iv) の成立：補助定理D.4からも明らかである。 □

D2. Shannon標本化関数系によるパターンモデル $T\varphi$

前節D1での論の展開は次の指摘で可能になっている事実に気付く：

式 (D1.8) の $\psi_\ell = \psi_\ell(x)$ からなる変数 x の $(n-1)$ 1次の多項式系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ について、

(一) $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ は1次独立である

(二) 不等式(D1.3)を満たす1次元座標値のサンプル c_i の n 個からなる集合 $\{c_i\}_{i=1 \sim n}$ が等式(D1.10)

を満たす

ことから、

(三) パターン $\varphi = \varphi(x)$ が実は，補間条件式 (D1.4) を満たす形で式 (D1.5) のように表され，
よって，

(四) 式 (D1.13) の如く定義される式 (A1.8) の写像 T が axiom 1 の (i)，(ii)，(iii) の3後半，
並びに (iv) を満たす

ことになる。 □

従って，

(イ) φ の4表現式 (D1.5)，(D1.39)，(D1.52)，(D1.68)

(ロ) 4式 (D1.13)，(D1.40)，(D1.53)，(D1.69) の4モデル $T\varphi$

(ハ) 各 $u(\varphi, \ell)$ の，例えば，3式 (D1.30)，(D1.54)，(D1.70) などの定義

(ニ) axiom 1 を満たす式 (D1.32) のパターンモデル $T\varphi$

(ホ) $u'(\varphi, \ell)$ の定義式 (D1.74) から得られ，式 (D1.71) の如く定義される式 (A1.8) の写像 T' についての論が成り立つような1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ を探すことになるが，スプライン関数(区分的多項式)の理論を適用すれば，無数に存在することがわかる。本節では，Shannon標本化関数系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ の存在を指摘して，前節D1での論が全く，そのまま成立することを研究しよう。

D2.1 標本化定理

次の定理D.7は，染谷-Shannonの標本化定理と言われ，この定理D.7での，関数系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ は1次独立であり，標本化関数系と呼ばれている。関数系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ は，2性質

$$(a) \text{ (直交性)} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_k(x) \cdot \psi_\ell(x) =$$

$$\begin{cases} (2w)^{-1} & \text{if } k = \ell \\ 0 & \text{if } k \neq \ell \end{cases} \quad (D2.1)$$

$$(b) \text{ (完全性)} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi(x) \cdot \psi_\ell(x) = 0, \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dx |\varphi(x)|^2 = 0 \quad (D2.2)$$

を満たしており，完全直交系である。

[定理D.7] (染谷-Shannonの標本化定理)

角周波数が $2\pi w$ 以下に制限されているという低域制限条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-\sqrt{-1}\lambda x) \cdot \varphi(x) = 0 \quad \text{if } |\lambda| > 2\pi w \quad (D2.3)$$

の下で，関数 $\varphi = \varphi(x)$ は実は，

$$\varphi(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{\ell}{2w}\right) \cdot \psi_\ell(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \frac{\ell}{\sqrt{2w}} \cdot \varphi\left(\frac{\ell}{2w}\right) \cdot \psi'_\ell(x), \quad -\infty < x < +\infty \quad (D2.4)$$

と表される。ここに，任意の $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ について，2つの関数 ψ_ℓ, ψ'_ℓ は

$$\psi'_\ell(x) = \sqrt{2w} \cdot \frac{\sin\left(2\pi w\left(x - \frac{\ell}{2w}\right)\right)}{2\pi w\left(x - \frac{\ell}{2w}\right)} = \sqrt{2w} \cdot \frac{\sin(2\pi wx - \ell\pi)}{2\pi wx - \ell\pi}, \quad -\infty < x < +\infty \quad (D2.5)$$

$$\psi_\ell(x) = \frac{1}{\sqrt{2w}} \cdot \psi'_\ell(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (D2.6)$$

と定義されており，

$$\psi_\ell\left(\frac{k}{2w}\right) =$$

$$\begin{cases} 1 & \text{if } k = \ell \\ 0 & \text{if } k \neq \ell \end{cases} \quad (\text{D2.7})$$

が成立している。 □

標本化関数系では、Lagrange多項式系での等式 (D1.10) に対応して、等式 (D2.7) が成り立ち、この事実が前節D1と同様な論が可能になる主たる理由である。つまり、式 (D1.9) の添え字集合 L を採用して、任意の定数 d_ℓ の組 $\{d_\ell\}_{\ell \in L}$ について、式 (D2.7) を適用すればわかるように、等式

$$\sum_{\ell \in L} d_\ell \cdot \phi_\ell\left(\frac{k}{2w}\right) = d_k, k \in L \quad (\text{D2.8})$$

が成り立つから、式 (D1.5) に対応して、パターン

$$\varphi(x) = \sum_{\ell \in L} d_\ell \cdot \phi_\ell(x), a' < x < b' \quad (\text{D2.9})$$

を考えることが意味を持つてくる。式 (D2.8) からわかるように、式 (D2.9) のパターン $\varphi = \varphi(x)$ においては、変数の値が、

$$x = \frac{\ell}{2w}, \ell \in L = \{1, 2, \dots, n\} \quad (\text{D2.10})$$

の場合のみ完全な振幅値の再現が可能であり、Lagrange多項式系での補間条件式 (D1.4) に対応して、補間条件

$$\varphi\left(\frac{\ell}{2w}\right) = d_k, k \in L = \{1, 2, \dots, n\} \quad (\text{D2.11})$$

が成り立つ。このように、標本化関数系では、式 (D2.10) の等間隔点の座標値しか採用できない。

D2.2 音声信号 $\varphi = \varphi(x)$, $a' \leq x < b'$ の場合

1次元直線座標系 x , $a' \leq x \leq b'$ を採用した場合、パターン $\varphi = \varphi(x)$, $a' \leq x \leq b'$ について、式 (D1.34) の各サンプル座標値 $a'(k)$ について、1より大きい整数 $n(k)$ を選定・固定し、等式

$$\frac{1}{2w(k)} = \frac{(b' - a')}{q} \cdot \frac{1}{n(k) + 1} \quad (\text{D2.12})$$

を満たすように、正実数値 $w(k)$ を決定する。そうすると、不等式 (D1.35) を満たす式 (D1.36) の等分点 $c_\ell(k)$ を、

$$c_\ell(k) = a'(k) + \ell \cdot \frac{1}{2w(k)}, \ell = 1, 2, \dots, n(k) \quad (\text{D2.13})$$

と定めることができる。このとき、式 (D1.39) のパターン $\varphi = \varphi(x)$ を想定でき、axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半、並びに (iv) を満たす式 (A1.8) の写像 T を、式 (D1.40) で定義できる。ここに、関数 $\psi_{(k, \ell)} = \psi_{(k, \ell)}(x)$ は、

$$\psi_{(k, \ell)}(x) = \frac{\sin\left[2\pi w(k)\left(x - \frac{\ell}{2w}\right)\right]}{2\pi w(k)\left(x - \frac{\ell}{2w}\right)} = \frac{\sin(2\pi w(k)x - \ell\pi)}{2\pi w(k)x - \ell\pi}, a'(k) \leq x < a'(k+1), \ell = 1, 2, \dots, n(k) \quad (\text{D2.14})$$

と定義されている。但し、式 (D1.42) の設定を採用しておく。

D2.3 動画像関数 $\varphi(x_1, x_2)$, $a' \leq x_1 < b'$, $a'' \leq x_2 < b''$ の場合

2次元平面座標系 $x = \langle x_1, x_2 \rangle$, $a' \leq x_1 < b'$, $a'' \leq x_2 < b''$ を採用して、パターン $\varphi = \varphi(x) = \varphi(x_1, x_2)$,

$a' \leq x_1 < b'$, $a'' \leq x_2 < b''$ を考え、式 (D1.55) ~ (D1.60) を導入しておく。

$a'(k_1) \leq x_1 < a'(k_1+1)$, $a''(k_2) \leq x_2 < a''(k_2+1)$ を満たす $x = (x_1, x_2)$ に対し、添え字

$$\langle k, \ell \rangle \in L = \{ \langle k_1, \ell_1 \rangle, \langle k_2, \ell_2 \rangle \mid k_1 = 0, 1, 2, \dots, q_1 - 1 = 1, 2, \dots, n_1(k_1),$$

$$k_2 = 0, 1, 2, \dots, q_2 - 1, \ell_2 = 1, 2, \dots, n_2(k_2) \} \quad (\text{D2.15})$$

を導入し、等式

$$\frac{1}{2w_1(k_1)} = \frac{(b' - a')}{q} \cdot \frac{1}{n_1(k_1) + 1} \quad (\text{D2.16})$$

$$\frac{1}{2w_2(k_2)} = \frac{(b'' - a'')}{q_2} \cdot \frac{1}{n_2(k_2) + 1} \quad (\text{D2.17})$$

を満たす 2 正実数 $w_1(k_1)$, $w_2(k_2)$ を選定・固定する。2 次元サンプル座標値 $x = (c_{\ell_1}(k_1), c_{\ell_2}(k_2))$ を

$$c'(k_1) = a'(k_1) + \ell_1 \cdot \frac{1}{2w_1(k_1)}, \ell_1 = 1, 2, \dots, n_1(k_1) \quad (\text{D2.18})$$

$$c''(k_2) = a''(k_2) + \ell_2 \cdot \frac{1}{2w_2(k_2)}, \ell_2 = 1, 2, \dots, n_2(k_2) \quad (\text{D2.19})$$

と定める。2式 (D1.63), (D1.66) を採用し、2式 (D1.62), (D1.65) の代わりに、

$$\phi'_{\langle k_1, \ell_1 \rangle}(x_1) = \frac{\sin(2\pi w_1 x_1 - \ell_1 \pi)}{2\pi w_1 x_1 - \ell_1 \pi}, a'(k_1) \leq x_1 < a'(k_1+1) \quad (\text{D2.20})$$

$$\phi''_{\langle k_2, \ell_2 \rangle}(x_2) = \frac{\sin(2\pi w_2(k_2) x_2 - \ell_2 \pi)}{2\pi w_2(k_2) x_2 - \ell_2 \pi}, a''(k_2) \leq x_2 < a''(k_2+1) \quad (\text{D2.21})$$

を採用し、式 (D1.67) の $\phi_{\langle k, \ell \rangle}(x) = \phi_{\langle (k_1, \ell_1), (k_2, \ell_2) \rangle}(x_1, x_2)$ を採用する。

その結果、定理D.5が成立し、式 (D1.68) の $\varphi = \varphi(x) = \varphi(x_1, x_2)$ の表現式、並びに、(D1.69) の $T\varphi = (T\varphi)(x) = (T\varphi)(x_1, x_2)$ の表現式が成り立つことになる。

D1.7節の離散モデルへの転換も同様になされることに注意しておく。

(著者 鈴木昇一、論文題目 原パターンを近似できる拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの、会話音声・動画像処理への応用、文教大学情報学部情報研究no.33 投稿論文、投稿年月日 2005年3月22日(火))