正規直交性を満たす類似度関数SMに積分核が存在するか？

鈴木　昇一

Is There a Density Function by Which an Orthonormal Similarity-Measure Function SM Can Be Represented as an Integral Form?

Shoichi Suzuki

あらまし

パターン情報処理においては，パターン間の類似性を測る物差しが必要である．この種の物差しとしての類似度関数SMが厳密・綿密に構成されるが，SMが密度核関数を持っていることがこれまでの諸研究と異なっている．正規直交性・規格化性・モデル構成作用素の下での不変性の3性質を満たすように，これまでの類似度関数を見直し，改良する余地をもたらすようなSMが，内積相関，２次元ガウス確率分布，カテゴリ事後確率分布，最小自乗規準を利用し，密度核関数で積分表現され得る４例が得られている．構成された類似度関数SMの4例はパターン同士が似ているかどうかを詳細に計量でき，複雑な構造を備えているパターンの認識に適切である．構成された4例は処理の対象とする実際のパターン集合に対し，より良いSMを設計する際，参考になる．

キーワード

（1）類似度関数　（2）内積相関　（3）２次元ガウス確率密度
（4）カテゴリ事後確率　（5）最小自乗規準　（6）密度核関数　（7）正規直交性
（8）規格化性　（9）モデル構成作用素の下での不変性

Abstract

It is necessary to measure a degree SM of similarity between an input pattern and each of memorized representative patterns. SM constructed strictly and minutely here has an integral nuclear function, which is different from traditional similarities. We costruct four kinds of SM s which must satisfy three properies of an orthonomality, a nomalization and an invariance under a model-construction operator, from points of view of an inner product, a gaussian probability density, a categorical a-posteriori probability and a least square criterion. SM s presented here are useful for

recognizing patterns that are complicated in structure, which are of value for reference in designing similarity-measure functions which are able to be used to good effect for patterns in question to be recognized.
Key Words: (1) similarity-measure function (2) correlation defined by an inner product (3) two -dimensional gaussian probability density (4) categorical a-posteriori probability density (5) least square criterion (6) density function of similarity (7) orthonormality (8) normalization (9) invariance under model-construction operator

1. はじめに

マルチメディア情報学［1］におけるパターン認識［4］，［6］，［7］，パターン連想［5］，［13］，画像データベースからの検索［2］，［3］の働きを設定するには，入力パターンφのモデル$T\varphi$と記憶されている各パターンω_jのモデル$T\omega_j$との照合が基本的に必要とされ，それには，$T\varphi$が$T\omega_j$に似ている程度を与える類似度関数（similarity-measure function）$SM(T\varphi, T\omega_j)$を設計しなければならない．類似度関数SMに関する組織的な研究はS. Suzukiの知る限り，これまで殆ど，なされていない（付録2を参照）．S. Suzukiは，類似度関数SMの満たさなければならない3性質からなる

公理（正規直交性・規格化性・$T-$不変性）　(1)

を指摘し，このような研究を開始している［6］，［7］．

本論文では，正規直交性，規格化性，$T-$不変性の3性質を満たすこのようなSMが，

(a) 内積相関，(b) 2次元ガウス確率分布，

(c) カテゴリ事後確率分布，(d) 最小自乗規準　(2)

を利用し，ある密度核関数数$SD_j(\varphi)(x)(x \in M)$により積分表現されることを厳密，かつ，綿密な構成の下で示す．この構成結果は，カテゴリの代表パターン間に正規直交性を満たす類似度関数は容易に構成されないという従来の思い込みを打ち破っている．

本論文の内容は4著書［4］〜［7］と，3論文［8］〜［10］を基盤としたものであり，7論文［14］，［17］，［22］，［23］，［30］〜［32］で計算機シミュレーション済の，正規直交性・規格化性・$T-$不変性の3性質を満たしている類似関数$SM(\cdot, \omega_j)$を見直し，改良するのに役立つものである．

最大類似度値を与える代表パターンω_jを単段階で決定し，その代表パターンω_jの帰属するカテゴリに入力パターンが帰属すると認識する最大類似度法では，

2つの任意の類似度値$SM(\cdot, \omega_i), SM(\cdot, \omega_j)$間の大小に関する序列　(3)

のみが利用して，入力パターンφが帰属するカテゴリを決定するが，類似度値間の大小に関する序列のみならず，

任意の2つの類似度値$SM(\cdot, \omega_i), SM(\cdot, \omega_j)$の大小の値そのもの　(4)

をも利用して，多段階にわたって入力パターンφをあるカテゴリ（第$j \in J$番目のカテゴリ）$\mathfrak{C}_j$の代表パターンω_jのモデル$T\omega_j$へと変換するような場面（多段階パターンモデル変換に基づく認識；付録1を参照）［6］，［7］においては，SMが正規直交性を備えている故に，類似度値の大小関係がパターンモデル変換の異なる段階で劇的に入れ替ることを可能にし，その結果入力パターンが最終認識段階で正しく認識されること［17］を可能にする式（45）の類似度関数$SM(\cdot, \omega_j)$の，4種類の積分核$SD_j(\varphi)(\cdot)$を研究したものになっている．

単段階でパターン認識を行う SVM（support vector machine）の識別関数は核表現されるけれども［25］，識別関数とは異なる役割を持つ上述の類似度関数 SM のこのような密度関数 $SD_j(\varphi)(\cdot)$ の存在を明らかにした研究を，著者は知らない．正規直交性，規格化性，$T-$ 不変性の3性質を満たす SM が必ずしも密度関数を持つとは限らないのであるが，得られた密度関数 $SD_j(\varphi)(\cdot)$ の形状を見て，

パターン $\varphi(x)$ の存在領域 $M(\ni x)$ での形状が崩れていて，各代表パターン $\omega_j\ (j\in J)$ とのパターン整合が良好に何故とれないのかを検討できる余地 (5)

をもたらすために，密度関数を持つ SM の方が複雑な構造を持つパターン同士の類似性を測るのに有効である．例えば，定理1から定理2への，定理4から定理5への，定理6から定理7への各変更を，SM に備わっている正規直交性の観点から検討すれば，この種の改良性が理解できよう．

2. パターン集合 Φ，代表パターン ωj の集合 Ω，代表パターンモデル集合 $T\cdot\Omega$，モデル構成作用素 T，類似度関数 SM

本章では，処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ，各カテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン $\omega_j\ (j\in J)$ の集合 Ω の1次独立性，パターン φ モデル $T\varphi$ を出力するモデル構成作用素 T の満たさなければならない4性質①～④，代表パターンモデル集合 $T\cdot\Omega$ の1次独立性，並びに類似度関数 SM の満たさなければならない公理，その結果生じる SM の性質について，説明される．

2.1 パターン集合 Φ，代表パターン ω_j の集合 Ω，代表パターンモデル集合 $T\cdot\Omega$，モデル構成作用素 T

2.1.1 パターン集合 Φ，代表パターン ω_j の集合 Ω，代表パターンモデル集合 $T\cdot\Omega$

処理の対象となる問題のパターン φ は通常，カテゴリ（類概念）の有限集合

$$\mathfrak{C}(J)=\{\mathfrak{C}_j \mid |J|\geq 2,\ j\in J\} \tag{6}$$

内の1つのカテゴリ（第 $j\in J$ 番目のカテゴリ）$\mathfrak{C}_j$ に帰属しているものとし，$\mathfrak{C}_j$ の諸性質を典型的に代表している代表パターンを ω_j とする．訓練パターン系列を使って適応的に各 ω_j を決定する手法は，文献［6］の付録IにおいてKohonenにより提唱されている学習ベクトル量子化アルゴリズムを多少簡単化した形で解決済みであり，有声破裂音，風景画像の理解に関する計算機シミュレーションなどでもその有効性が実証されている［19］，［30］～［32］．

確率性質

$$\forall j\in J,\ 0<p(\mathfrak{C}_j)<1\wedge\sum_{j\in J}p(\mathfrak{C}_j)=1 \tag{7}$$

を満たす各カテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の出現確率 $p(\mathfrak{C}_j)$ をも導入しておく．代表パターン ω_j の集合を

$$\Omega\equiv\{\omega_j \mid j\in J\} \tag{8}$$

と表そう．ベクトル空間（可分なヒルベルト空間［4］）$\mathfrak{H}$ の元 ω_j の集合 Ω は1次独立な系でなければならないし，ω_j のパターンモデル $T\omega_j$ の系

$$T\cdot\Omega\equiv\{T\omega_j \mid j\in J\} \tag{9}$$

も1次独立であるように，Ω，T が選ばれていなければならない．因みに，$T\cdot\Omega$ が1次独立であるとは，

複素定数 a_j の組 $\{a_j \mid j\in J\}$ について

$$\sum_{j\in J} a_j\cdot T\omega_j=0 \text{ が成り立つならば，すべての } a_j \text{ が } 0 \text{ である} \tag{10}$$

が成り立つことをいい，これは

$$J=\{1, 2, \cdots, m\}\ （カテゴリ番号の有限集合） \tag{11}$$

の場合，よく知られているように，グラム行列

$$G=(g_{ij})_{1\le i,j\le m},\ ここに，g_{ij}\equiv(T\omega_i, T\omega_j) \tag{12}$$

の行列式$\det(G)$が零でないことと同値である．

パターンφのモデルを$T\varphi$とする．$T\varphi$は従来のパターン認識分野では，原パターンφを圧縮したパターン，座標変換前の状態に戻されたパターン，整形化されたパターンなどの総称である．このようなパターンモデル$T\varphi$については多数存在し［4］～［24］，計算機シミュレーションでも求められており［10］～［14］，［17］，［22］，［23］，可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$上で動作するニューラルネットを構成する場合にも用いられる［5］，［24］．φの集まりを$(\mathfrak{H}\supset)\Phi\ (\supset\Omega)$と表す．尚，$\Phi$についての詳細な説明は文献［6］，［7］にある．

2.1.2　モデル構成作用素T

式（9）に登場しているパターン集合ΦからΦへの写像

$$T:\Phi\to\Phi \tag{13}$$

は次の4性質①～④を満たしていなければならない［6］，［7］：

①（零点不動点性）$\varphi=0\in\Phi$については，$T\varphi=0$.

②（正定数倍不変性）任意の正実数aに対し，

$\forall\varphi\in\Phi,\ T(a\cdot\varphi)=T\varphi.$

③（ベキ等性）$\forall\varphi\in\Phi,\ T(T\varphi)=T\varphi.$

④（非零写像性）$\exists\varphi\in\Phi,\ T\varphi\ne 0.$ □

上述の4性質①～④を満たす写像Tはモデル構成作用素と呼ばれる．

パターンモデル$T\omega_i, T\omega_j$間の非一致条件

$$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},\ \|T\omega_i-T\omega_j\|>0 \tag{14}$$

を要請する．ここに，φのノルム$\|\varphi\|\equiv\sqrt{(\varphi, \varphi)}$が導入されている．

例えば，式（56）で定義される式（57）の$T'(=T)$は上述の4性質①～④を満たすことを確かめることができる．

2.2　類似度関数SMが満たさなければならない公理と，この公理から導かれるSMの性質

類似度関数SMが満たさなければならない公理を説明しよう．

上述の2.1.2項のTを導入したとき，類似度関数

$$SM:\Phi\times\Omega\to\{s\mid 0\le s\le 1\} \tag{15}$$

は次のaxiomを満たさなければならないものとする．

Axiom（類似度関数SMの満たすべき公理［6］，［7］

（ⅰ）（正規直交性）$\forall i, \forall j\in J,\ SM(\omega_i, \omega_j)=\delta_{ij}.$

（ⅱ）（規格化性）$\forall\varphi\in\Phi,\ \sum_{j\in J} SM(\varphi, \omega_j)=1.$

（ⅲ）（写像Tの下での不変性）

$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall j\in J,\ SM(T\varphi, \omega_j)=SM(\varphi, \omega_j).$ □

上述のaxiomの（ i ）では，クロネッカーのδ 記号

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{if} \quad i = j, = 0 \quad \text{if} \quad i \neq j \tag{16}$$

が導入されている．

上述のaxiomの（ i ）〜（iii）について簡単に説明しておこう．

$SM(\varphi, \omega_j) = 1, 0$ に従って，パターン$\varphi \in \Phi$ は各々，ω_j と確定的な類似関係，相違関係にあり，また，$0 < SM(\varphi, \omega_j) < 1$ の場合は，曖昧な類似・相違関係にある

と，SM を解釈しよう．（ i ）は，相異なるカテゴリの代表パターン同士は確定的な相違関係にあり，同一カテゴリの代表パターン同士は確定的な類似関係にあることを要請している．（ii）は，任意のパターンφ について，すべてのカテゴリについての類似度の総和は 1 であることを要請している．ということは，$SM(\varphi, \omega_j)$ はパターン$\varphi \in \Phi$ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属する確率であると解釈できることを意味している．（iii）は，パターンモデル$T\varphi$ は原パターンφ と任意のカテゴリについて同一類似度を持つことを要請している．ということは，パターンモデル$T\varphi$ を見たり，聞いたりするならば，原パターンφ と同じように見えたり，聞こえたりすること（同一知覚原理）を保証していることになる．

これまで，上述のaxiomを満たす類似度関数SM は多数構成されており[6], [7], [18], [21]〜[24], その有効性についても計算機シミュレーション済［14]，［17]，［30]〜[32］である．

上述のaxiomから導かれるSM の性質については，付録 3 で研究されている．

3.　代表パターン間の正規直交性を満たす意味ある類似度関数は無数に存在する

2.2.1項での“類似度関数SM の満たすべき公理の（ i ）正規直交性”について，検討しておこう．

類似度関数に対し，カテゴリの代表パターン間に正規直交性を要求することは現実にそぐわないということはない．代表パターン間で正規直交性を満たすような意味ある類似度関数は以下で明らかにするように，無数に存在するのである．

先ず，簡単な 3 例を構成し，この間の事情を明らかにしておこう．

非一致条件

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \| \omega_i - \omega_j \| > 0 \tag{17}$$

をも要請すると，例えば， 3 種類（あ)，(い)，(う)，(え）の，φ がω_j に似ている程度を与える非負実数値関数$sm(\varphi, \omega_j)$ は，カテゴリの代表パターン間の正規直交式（27）を満たしていることを容易に確かめることができる：

（あ)（ノルム距離形類似度）

$$sm(\varphi, \omega_j) = \frac{\left\| \dfrac{\varphi}{\|\varphi\|} - \dfrac{\omega_j}{\|\omega_j\|} \right\|^{-2}}{\displaystyle\sum_{i \in J} \left\| \dfrac{\varphi}{\|\varphi\|} - \dfrac{\omega_i}{\|\omega_i\|} \right\|^{-2}} \tag{18}$$

（い)（内積形類似度）

$(\cdot,\cdot)$ は内積として，

$$sm(\varphi, \omega_j) = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-\left|\left(\dfrac{\varphi}{\|\varphi\|}, \dfrac{\omega_j}{\|\omega_j\|}\right)\right|^2}}}{\displaystyle\sum_{i \in J} \dfrac{1}{\sqrt{1-\left|\left(\dfrac{\varphi}{\|\varphi\|}, \dfrac{\omega_i}{\|\omega_i\|}\right)\right|^2}}} \tag{19}$$

（う）（ノルム・内積形類似度）

$$sm(\varphi, \omega_j) = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{\|\varphi\|^2 \cdot \|\omega_j\|^2 - |(\varphi, \omega_j)|^2}}}{\displaystyle\sum_{i \in J} \dfrac{1}{\sqrt{\|\varphi\|^2 \cdot \|\omega_i\|^2 - |(\varphi, \omega_i)|^2}}} \tag{20}$$

（え）（情報量形類似度）

$$sm(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} \dfrac{\log_e \dfrac{1}{\sqrt{1-\left|\left(\dfrac{\varphi}{\|\varphi\|}, \dfrac{\omega_j}{\|\omega_i\|}\right)\right|^2}}}{\displaystyle\sum_{i \in J} \log_e \dfrac{1}{\sqrt{1-\left|\left(\dfrac{\varphi}{\|\varphi\|}, \dfrac{\omega_i}{\|\omega_i\|}\right)\right|^2}}} & \cdots \exists i \in J, (\varphi, \omega_j) \neq 0 \text{ の場合} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \forall i \in J, (\varphi, \omega_j) = 0 \text{ の場合} & \end{cases} \tag{21}$$

□

正規直交性を満たすこのような無意味でない類似度関数smは無数に存在し，例えば，式（18）のsmは式（114）のSMに変換すれば良いように，無数に存在するsmは容易に2.2.1項のaxiomを満たす式 (15) の類似度関数SMに意味を失わないように，変換され得ることが明らかになっている [6]，[7]．

今１つ，式（18）のsmに似た構成例をあげておけば，正定数a_jの系$\{a_j\}_{j \in J}$を選定して

（お）（指数関数・ノルム距離形類似度）

$$sm(\varphi, \omega_j) = \frac{\dfrac{1}{1-\exp\left[-\dfrac{1}{a_j} \cdot \left\| \dfrac{\varphi}{\|\varphi\|} - \dfrac{\omega_j}{\|\omega_j\|} \right\|^2\right]}}{\displaystyle\sum_{i \in J} \dfrac{1}{1-\exp\left[-\dfrac{1}{a_i} \cdot \left\| \dfrac{\varphi}{\|\varphi\|} - \dfrac{\omega_i}{\|\omega_i\|} \right\|^2\right]}} \tag{22}$$

と定義される非負実数値関数も正規直交式（27）を満たす．

4. カテゴリの代表パターン間に正規直交性を満たすように，任意の類似度関数を変換できるか？

前章では，類似度関数SMに対し，カテゴリの代表パターン間に正規直交性を要求することは現実にそぐわないことはない事実を，SMの５構成例を介し，明らかにしたが，本章では，カテゴリの代表パターン間に正規直交性を満たすように，任意の類似度関数を変換できることを示し，2.2.1項のaxiom,（ⅰ）を要請することは非現実的ではないことを確固たるものにしておく.

パターンφが第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターンω_jと似ている度合いを表している非負実数値関数としての類似度関数$sm(\varphi, \omega_j)$を考えよう．この種の$sm(\varphi, \omega_j)$が，分離条件

$$\forall j \in J, \max_{i \in J-\{j\}} sm(\omega_i, \omega_j) < sm(\omega_j, \omega_j) \tag{23}$$

を満たすとするのは，無理なことではない．何故ならば，各$sm(\varphi, \omega_j)(j \in J)$が不等式（23）を満たさないものであれば，そもそも，各ω_jを代表パターンと称することが不可能になるからである.

例えば，次の典型的な３種類（イ），（ロ），（ハ）の類似度$sm(\varphi, \omega_j)$については，分離条件式（23）を満たす代表パターンω_jの，式（8）の系Ωを考えることができる：

（イ）（内積類似度）

$$sm(\varphi, \omega_j) = \left|\left(\frac{\varphi}{\|\varphi\|}, \frac{\omega_j}{\|\omega_j\|}\right)\right|^2 \tag{24}$$

（ロ）（ガウス形距離類似度）

$$sm(\varphi, \omega_j) = \exp\left[-\frac{1}{a_j}\cdot\left\|\frac{\varphi}{\|\varphi\|} - \frac{\omega_j}{\|\omega_j\|}\right\|^2\right]$$

$$\text{ここに，} a_j > 0 \ (j \in J) \tag{25}$$

（ハ）（コーシー形距離類似度）

$$sm(\varphi, \omega_j) = \frac{a_j^2}{a_j^2 + \left\|\frac{\varphi}{\|\varphi\|} - \frac{\omega_j}{\|\omega_j\|}\right\|^2}$$

$$\text{ここに，} a_j > 0 \ (j \in J) \tag{26}$$

□

$sm(\varphi, \omega_j)$は正規直交性

$$sm(\varphi, \omega_j) = \delta_{ij} \tag{27}$$

を満たすとは限らないとしよう．事実，３式（24），（25），（26）の$sm(\varphi, \omega_j)$は，正規性

$$\forall j \in J, sm(\omega_j, \omega_j) = 1$$

を満たすが，直交性

$$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}, sm(\omega_i, \omega_j) = 0$$

を一般に満たさない.

分離条件式（23）から，容易に不等式

$$\forall j \in J, \max_{i \in J-\{j\}} sm(\omega_i, \omega_j) \leq s_0(j) < s_1(j) \leq sm(\omega_j, \omega_j) \tag{28}$$

を満たす２つの閾値$s_0(j), s_1(j)$を見つけることができる．このとき，先ず，$sm(\varphi, \omega_j)$を

$$sm(\varphi,\omega_j)=\begin{cases}1 \cdots s_1(j)\le sm(\varphi,\omega_j)\text{ の場合}\\ \dfrac{sm(\varphi,\omega_j)-s_0(j)}{s_1(j)-s_0(j)} \cdots s_0(j)< sm(\varphi,\omega_j)< s_1(j)\text{ の場合}\\ 0 \cdots sm(\varphi,\omega_j)\le s_0(j)\text{ の場合}\end{cases} \tag{29}$$

へと，区分的線形変換を使い変換すると，

$$SM(\varphi,\omega_j)=\begin{cases}\dfrac{s(\varphi,\omega_j)}{\sum_{i\in J} s(\varphi,\omega_j)} \cdots \sum_{i\in J} s(\varphi,\omega_i)>0\text{ の場合}\\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \sum_{i\in J} s(\varphi,\omega_i)=0\text{ の場合}\end{cases} \tag{30}$$

と定義される非負実数値関数関数$SM(\varphi,\omega_j)$は$sm(\varphi,\omega_j)$の性質を受け継いでおり，2.2.1のaxiom，（ｉ）の正規直交性を満たしていることが直ちにわかる．

多段階パターンモデル変換に基づいた認識において類似度関数SMを利用する方法については，付録1で説明されている．

5. パターン分類の規準を定めるのは類似度関数SMである

パターンがどのカテゴリに入るかをあいまいにしてあったり，異なる2つのカテゴリに同じようなパターンが入ったりすることを許さないパターン分類の規準を設ければ良い．この意味で，パターンとして意味のないものを分類する必要はなくて，既に知っており既に見つかったパターン集合Φ内のパターンφに対し，分類の規準を適切に設定すれば良いことに，先ず気付く．

1つの類似度関数SMが決まると，処理の対象とする問題のパターンφの集合Φについてのパターン分類の1つの規準が確保される．どんなパターンを同じカテゴリに入れるかというパターン分類の規準を，実際に構成され採用された類似度関数SMが規定することになる．

この間の事情を説明しておこう．

第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターンω_jから大きく崩れているパターンφが与えられたとしよう．このとき，正整数N_jを十分大に選び，$\eta_{t,j}$を

$$\eta_{t,j}=\varphi\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{N_j}\right)+\omega_j\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{N_j}\right) \tag{31}$$

と設定すると，φから代表パターンω_jへの多段階変換

$$\eta_{0,j}(=\varphi)\to\eta_{1,j}\to\eta_{2,j}\to\cdots\to\eta_{N_j-2,j}\to\eta_{N_j-1,j}\to\eta_{N_j,j}(=\omega_j) \tag{32}$$

が成立する．このとき，不等式

$$0\le\delta_j<\frac{1}{2} \tag{33}$$

を満たす非負数δ_jを選ぶと，不等式

$$1-\delta_j \leq SM(\eta_{t,j}, \omega_j) \Rightarrow$$

$$\max_{i \in J-\{j\}} SM(\eta_{t,j}, \omega_i) \leq \delta_j < \frac{1}{2} < 1-\delta_j \leq SM(\eta_{t,j}, \omega_j)$$

∵付録２の２定理A2.1，A2.2　(34)

が成立するから，

（一）$N_{0,j}(\varphi;\delta_j) \equiv \{t \mid \max_{i \in J-\{j\}} SM(\eta_{t,j}, \omega_i) \leq \delta_j\}$

を導入すると，

$t \in N_{0,j}(\varphi;\delta_j)$

$\Rightarrow \eta_{t,j}$ は第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属しない　(35)

（二）$N_{1,j}(\varphi;\delta_j) \equiv \{t \mid 1-\delta_1 \leq SM(\eta_{t,j}, \omega_j)\}$

を導入すると

$t \in N_{1,j}(\varphi;\delta_j)$

$\Rightarrow \eta_{t,j}$ は第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属する

(36)

という帰属解釈が可能である．このとき，すべてのカテゴリ番号 $j \in J$ について，不等式

$$0 \leq t_{0,j}(\varphi;\delta_j) < t_{1,j}(\varphi;\delta_j) \leq N_j \tag{37}$$

が成り立つような非負整数 $t_{0,j}(\varphi;\delta_j)$, $t_{1,j}(\varphi;\delta_j)$ が存在し，しかも $N_{0,j}(\varphi;\delta_j)$, $N_{1,j}(\varphi;\delta_j)$ が

$$N_{0,j}(\varphi;\delta_j) = \{t \mid 0 \leq t \leq t_{0,j}(\varphi;\delta_j)\} \tag{38}$$

$$N_{1,j}(\varphi;\delta_j) = \{t \mid t_{1,j}(\varphi;\delta_j) \leq t \leq N_j\} \tag{39}$$

と表されるような“2.2.1のaxiomを満たす類似度関数 SM ”のみが１つのパターン分類規準を定めるといえよう．無論，差

$$t_{1,j}(\varphi;\delta_j) - t_{0,j}(\varphi;\delta_j) > 0 \tag{40}$$

が小さいほど，類似度関数 SM は代表パターン ω_j からのパターン変形に耐えるといえる．

この意味でパターン分類規準を定めるように構成された無数の類似度関数 SM の内，どの類似度関数が最適かを決める数理的方法は，現在の時点では見つかっていない［7］．例えば，集中度合いを表す式（111）のファジィクラスタリング汎関数 F を最小にする式（114）の類似度関数 SM が他の類似度関数 SM' より良い認識の働きをもたらすどうかはパターン集合 Φ に依存していると，言えるのみである．恐らく，将来研究が進展してもこの種の数理的方法が見つからないだろうことは，2.2のaxiomを満たす類似度関数 SM が各個人の感性に応じ構成できる事実［27］からして，予見できる．

唯，処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ に応じ，用途を考慮し，良いと思われる類度関数 SM を選択するというより他はないが，選定された類似度関数 SM を訓練パターンの系列を用いてパターン分離機能に関し改良する学習法は存在する［7］．

尚，付録４には，axiomを満たす類似度関数 SM を構成するときに無制限といって良いほどの任意性があることが説明されている．付録４の２定理A4.1，A4.2は，パターン集合 Φ に最適な類似度関数 SM を選定するのが困難であることを明らかにしていると，いえよう．しかしながら，6. 以降で構成された類似度関数 SM がパターン集合 Φ に適切であるどうかを検証する手法が付録５で説明されている．

6.　内積相関類似度関数SMの密度関数

パターン認識の働きを実現しようというとき，先ず，用いられたのは以下の式(46)を使ったパターンマッチングという技術であった．この種のパターンマッチング技術は現在にいたっても，single-step methodの範疇で改良され続けられている．SS理論［5]，[6]，[7］は，single-step methodを特別な場合とみなされるmulti-step method（step by step method）の範疇に入る万能性認識技術を提供しているのであるが.

以後，パターン$\varphi(x)$の存在領域M $(\ni x = < x_1, x_2, \cdots, x_q >)$は，$q$次元ユークリッド空間$R^q$の可測部分集合としよう．そして，２つのパターン$\varphi(x), \eta(x)$間に内積$(\varphi, \eta)$が定義できるとしよう．例えば,

$$(\varphi, \eta) = \int_M dm(x) \cdot \varphi(x) \cdot \overline{\eta}(x) \tag{41}$$

を考えておけばよい．ここに，$\overline{\eta}$はηの複素共役であり，$dm(x)$は正値ルベーグ・スティルチェス式測度である．φのノルム$\|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)}$を導入しておく.

正測度有界条件

$$0 < \int_M dm(x) < \infty \tag{42}$$

を常に仮定する.

例えば，$M = \{1, 2, \cdots, q\}$とし，$dm(x)$を

$$dm(x) = 1 \quad \text{if} \quad x \in M, = 0 \quad \text{if} \quad x \notin M \tag{43}$$

設定すれば，内積$(\cdot, \eta)$は

$$(\varphi, \eta) = \sum_{x \in M} \varphi(x) \cdot \overline{\eta}(x) \tag{44}$$

と表される．ここに，$x \notin M$は元xが集合Mに属さないことの意である.

以後，2.2.1のaxiomを満たす式（15）の類似度関数SMが

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(\varphi, \omega_j) = \int_M dm(x) \cdot SD_j(\varphi)(x) \tag{45}$$

と表現されるような密度関数（density of similarity-measure）$SD_j(x)$の存在を４例で示そう．本章では内積相関を使って，SMが密度関数を持つ例と，持たない例が示され（定理２），後続の章では残りの３例が示される（３定理3, 5, 7).

6.1　類似度関数SMが密度関数を持たない１例

内積相関$COR(T\varphi, T\omega_j)$を使って，類似度関数SMが密度関数$SD_j(x)$を持たない場合があることをまず，示そう.

任意の$j \in J$について，２つの実数値パターンモデル$T\varphi, T\omega_j$の間の内積相関（correlation based on the inner product）

$$(-1 \leq) COR(T\varphi, T\omega_j) = \left(\frac{T\varphi}{\|T\varphi\|}, \frac{T\omega_j}{\|T\omega_j\|}\right) (\leq 1) \tag{46}$$

が実数値であるとしよう．非一致条件式（14）を要請していることに注意し,

$$c_j(\Omega) \equiv \max_{i \in J-\{j\}} COR(T\omega_i, T\omega_j) \tag{47}$$

について，不等式

$$1 \geq a_j > c_j(\Omega) \tag{48}$$

を満たす実数a_j $(j \in J)$ を選ぶ．各$COR(T\varphi, T\omega_j)$ を

$$COR'(T\varphi, T\omega_j) \equiv$$
$$\begin{cases} 1 \cdots 1 \geq COR(T\varphi, T\omega_j) \geq a_j \text{ のとき} \\ COR(T\varphi, T\omega_j) \cdots a_j > COR(T\varphi, T\omega_j) > c_j(\Omega) \text{ のとき} \\ 0 \cdots c_j(\Omega) \geq COR(T\varphi, T\omega_j) \geq -1 \text{ のとき} \end{cases} \tag{49}$$

へと，変更する．このとき，次の定理 1 が成り立ち，構成されたSM はその積分表現式（45）でいう密度関数$SD_j(\varphi)(x)$ を持たない．

［**定理 1** ］（内積相関による類似度SM の構成定理）

$$SM(\varphi, \omega_j) \equiv$$
$$\begin{cases} \dfrac{|COR'(T\varphi, T\omega_j)|}{\sum_{i \in J} |COR'(T\varphi, T\omega_i)|} \cdots \sum_{i \in J} |COR'(T\varphi, T\omega_i)| > 0 \text{ のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \sum_{i \in J} |COR'(T\varphi, T\omega_i)| = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{50}$$

と定義される式（15）の関数SM は，axiomを満たす．

（証明）明らかに，不等式（48）から，

$$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\},$$
$$COR(T\omega_j, T\omega_j) = 1 \geq a_j > c_j(\Omega) \geq COR(T\omega_i, T\omega_j) \geq -1 \tag{51}$$

がいえ，よって，COR' の設定式（49）から，

$$\forall j \in J, COR'(T\omega_j, T\omega_j) = 1 \tag{52}$$
$$\wedge [\forall i \in J-\{j\}, COR'(T\omega_i, T\omega_j) = 0] \tag{53}$$

が成立し，これからaxiomの（ i ）が成立する．

axiomの（ ii ）の成立は，SM の定義式（50）より明らかである．

axiomの（iii）の成立は，2.1.2の③から明らかである．　□

6.2　類似度関数SM が密度関数$SD_j(\varphi)(x)$ を持つ例

次に，内積相関$COR(T' \cdot T\varphi, T' \cdot T\omega_j)$ を使って，類似度関数SM がその積分表現式（45）でいう密度関数$SD_j(\varphi)(x)$ を持つ場合があることを示そう．

振幅有界条件

$$0 \leq \sup_{x \in M} |\varphi(x)| < \infty \tag{54}$$

が満たされる実数値パターン$\varphi \in \Phi$ について，最大振幅差

$$si(\varphi) \equiv \sup_{x \in M} \varphi(x) - \inf_{x \in M} \varphi(x) \tag{55}$$

を用意し，

$$(T'\varphi)(x) \equiv \begin{cases} \dfrac{\varphi(x) - \inf_{x \in M} \varphi(x)}{si(\varphi)} \cdots si(\varphi) > 0 \text{ の場合} \\ 0 \cdots si(\varphi) = 0 \text{ の場合} \end{cases} \tag{56}$$

と定義される写像

$$T' : \Phi \to \Phi \tag{57}$$

を導入する．写像T'はパターンφの振幅をより大きくない非負実数値に変換する機能を備えており，

$$\forall x \in M,\ 0 \leq (T'\varphi)(x) \leq 1 \quad \text{for any} \quad \varphi \in \Phi$$

が成立している．実は，T'は2.1.2の4性質①〜④を満たし，モデル構成作用素の1種である［7］．

まず，非一致条件

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J - \{j\},\ \| T'T\omega_j - T'T\omega_i \| > 0 \tag{58}$$

を仮定しておく．

1より大きくない2つの非負実数値パターン$T'T\varphi$, $T'T\omega_j$についての相関値$COR(T'T\varphi, T'T\omega_j)$を

$$COR(T'T\varphi, T'T\omega_j) \equiv \left(\frac{T'T\varphi}{\| T'T\varphi \|}, \frac{T'T\omega_j}{\| T'T\omega_j \|}\right) \geq 0 \tag{59}$$

と定義し，その後，

$$c_j(T'T\Omega) \equiv \max_{i \in J - \{j\}} COR(T'T\omega_i, T'T\omega_j) \tag{60}$$

について，不等式

$$1 \geq b_j \geq c_j(\Omega) \tag{61}$$

を満たす実数b_jを選ぶ．$COR(T'T\varphi, T'T\omega_j)$を

$$COR'(T'T\varphi, T'T\omega_j) \equiv \begin{cases} 1 \cdots COR(T'T\varphi, T'T\omega_j) \geq b_j \text{ のとき} \\ COR(T'T\varphi, T'T\omega_j) \cdots b_j > COR(T'T\varphi, T'T\omega_j) > c_j(T'T\Omega) \text{ のとき} \\ 0 \cdots c_j(T'T\Omega) \geq COR(T'T\varphi, T'T\omega_j) \geq 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{62}$$

へと変更する．

更に，関数$SD_j(\varphi)$を次の（一），（二）のように設定する：

（一）$\sum_{j \in J} COR'(T'T\varphi, T'T\omega_j) > 0$の場合

$$SD_j(\varphi)(x) \equiv$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\dfrac{1}{\int_M dm(x)}}{\sum\limits_{i\in J} COR'(T'T\varphi, T'T\omega_i)} \cdots 1 \geq COR(T'T\varphi, T'T\omega_j) \geq b_j \text{ のとき} \\[3ex]
\dfrac{\dfrac{(T'T\varphi)(x)}{\| T'T\varphi \|} \cdot \dfrac{(T'T\omega_j)(x)}{\| T'T\omega_j \|}}{\sum\limits_{i\in J} COR'(T'T\varphi, T'T\omega_j)} \cdots b_j > COR(T'T\varphi, T'T\omega_j) > c_j(T'T\Omega) \text{ のとき} \\[3ex]
\dfrac{\dfrac{0}{\int_M dm(x)}}{\sum\limits_{i\in J} COR'(T'T\varphi, T'T\omega_i)} = 0 \cdots c_j(T'T\Omega) \geq COR(T'T\varphi, T'T\omega_j) \geq 0 \text{ のとき}
\end{cases}
$$

（二）$\sum\limits_{j\in J} COR'(T'T\varphi, T'T\omega_j) = 0$ の場合

$$SD_j(\varphi)(x) \equiv p(\mathfrak{C}_j) / \int_M dm(x) \qquad \square$$

このとき，次の定理 2，その系 1 が成り立ち，SM の積分表現式（45）を満たす密度関数 $SD_j(\varphi)(x)$ が存在することになる．

［定理 2］（内積相関に基づく密度関数 $SD_j(\cdot)(x)$, $x \in M$, $j \in J$ を持つ類似度 SM の構成定理）

$$
SM(\varphi, \omega_j) \equiv
\begin{cases}
\dfrac{COR(T'T\varphi, T'T\omega_j)}{\sum\limits_{i\in J} COR(T'T\varphi, T'T\omega_i)} \cdots \sum\limits_{i\in J} COR(T'T\varphi, T'T\omega_i) > 0 \text{ のとき} \\[3ex]
p(\mathfrak{C}_j) \cdots \sum\limits_{i\in J} COR(T'T\varphi, T'T\omega_i) = 0 \text{ のとき}
\end{cases}
\tag{63}
$$

と定義される式（15）の類似度関数 SM はaxiomを満たし，式（41）の内積 $(\cdot,\cdot)$ の採用下では，2 式（一），（二）で定義される $SD_j(\varphi)(x)$ を核関数に採用すれば，SM の積分表現式（45）が成り立つ．

［定理 2 の系 1］（密度関数 $SD_j(\varphi)(x)$ の $T-$ 不変性）

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \forall x \in M, SD_j(T\varphi)(x) = SD_j(\varphi)(x). \tag{64}$$

（定理 2 の証明）式（63）で定義される式（15）の類似度関数 SM がaxiom2を満たすことは，定理1の証明とほぼ，同様にして示される．

2 式（一），（二）の $SD_j(\varphi)(x)$ を核関数とする SM の積分表現式（45）が成り立つことは次のⅠ，Ⅱのように示される：

Ⅰ．$\sum\limits_{j\in J} COR'(T'T\varphi, T'T\omega_j) > 0$ の場合

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \int_M dm(x) \cdot SD_j(\varphi)(x) =$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sum\limits_{i\in J} COR'(T'T\varphi,\ T'T\omega_i)} \cdots 1 \geq COR(T'T\varphi,\ T'T\omega_j) \geq b_j \text{ のとき} \\ \dfrac{COR(T'T\varphi,\ T'T\omega_j)}{\sum\limits_{i\in J} COR'(T'T\varphi,\ T'T\omega_i)} \cdots b_j > COR(T'T\varphi,\ T'T\omega_j) > c_j(T'T\Omega) \text{ のとき} \\ \dfrac{0}{\sum\limits_{i\in J} COR'(T'T\varphi,\ T'T\omega_i)} = 0 \cdots c_j(T'T\Omega) \geq COR(T'T\varphi,\ T'T\omega_j) \geq 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{65}$$

$$= \frac{COR'(T'T\varphi,\ T'T\omega_j)}{\sum\limits_{i\in J} COR'(T'T\varphi,\ T'T\omega_i)} \tag{66}$$

$$= SM(\varphi,\ \omega_j).$$

Ⅱ．$\sum\limits_{j\in J} COR'(T'T\varphi,\ T'T\omega_j) = 0$ の場合

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall j\in J,\ \int_M dm(x)\cdot SD_j(\varphi)(x)$$

$$= \int_M dm(x)\cdot[\,p(\mathfrak{C}_j)/\int_M dm(x)\,] \tag{67}$$

$$= p(\mathfrak{C}_j) \tag{68}$$

$$= SM(\varphi,\ \omega_j).$$

（定理 2 の系 1 の証明）2.1.2の③より，$T'T\varphi,\ T'T\omega_j$ がT の下で不変であることから明らか．

□

7. ガウス確率類似度関数SMの密度関数

本章では，2 次元ガウス確率分布を考慮し，密度関数$SD_j(\varphi)(x)$を持つSMが構成される．

まず，次の仮定7.1を設ける．

［仮定7.1］（モデル間ノルム規格化内積の実数値性）

その絶対値が 1 より大きくない 2 つのパターンモデル$T\varphi,\ T\omega_j$ 間の，式（46）の相関値

$$\rho_j(\varphi) \equiv COR(T\varphi,\ T\omega_j) \tag{69}$$

が実数値である．　□

以後，式（41）の内積$(\cdot,\cdot)$を採用する．式（69）の$\rho_j(\varphi)$を用いて，非負量

$$\sigma_j(\varphi)$$
$$\equiv \| T\omega_j \| \cdot \sqrt{1-\rho_j(\varphi)^2}$$
$$= \sqrt{\left|\left(\frac{T\omega_j}{\| T\omega_j \|},\ T\omega_j\right)\right|^2 - \left|\left(\frac{T\varphi}{\| T\varphi \|},\ T\omega_j\right)\right|^2} \tag{70}$$

を導入する．2 次元ガウス確率密度を考慮し，$S_j(\varphi)(x), S(\varphi)(x)$を

$$S_j(\varphi)(x)$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j(\varphi)^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_j(\varphi)^2} \cdot |\{(T\omega_j)(x) - \| T\omega_j \|\}\right.$$

$$\left. - \rho_j(\varphi) \cdot \frac{\| T\omega_j \|}{\| T\varphi \|} \cdot \{(T\varphi)(x) - \| T\varphi \|\}|^2\right] \geq 0 \tag{71}$$

$$S(\varphi)(x) \equiv \sum_{k \in J} S_k(\varphi)(x) \geq 0 \tag{72}$$

と定義すると，次の補助定理 1 が成立する．

［補助定理 1 ］

以下の各 $T\omega_j$ $(j \in J)$ の絶対値自乗振幅有限条件式（80）が成立しているとしよう．

$$\exists j \in J, \exists M_j, \int_{M_j} dm(x) > 0 \tag{73}$$

$$\wedge [\forall x \in M_j, |(T\varphi)(x)|^2 = +\infty] \tag{74}$$

が成立するならば，然も，

$$\| T\varphi \|^2 = \int dm(x) \cdot |(T\varphi)(x)|^2 < \infty \tag{75}$$

が成立するならば，式（72）の $S(\varphi)(x)$ の積分に関し，

$$\int dm(x) \cdot S(\varphi)(x) > 0. \tag{76}$$

（証明） 2 式（71），（72）の各 $S_j(\varphi)(x)$, $S(\varphi)(x)$ の性質から，正測度有界条件式（42）と各 $T\omega_j$ $(j \in J)$ の絶対値自乗振幅有限条件式（80）とを考慮すれば，

$$\int_m dm(x) \cdot S(\varphi)(x) = 0 \tag{77}$$

$$\Rightarrow \forall j \in J, \int_M dm(x) \cdot S_j(\varphi)(x) = 0$$

$$\Rightarrow 2\text{式（73），（74）} \tag{78}$$

$$\Rightarrow \| T\varphi \|^2 = \int dm(x) \cdot |(T\varphi)(x)|^2 = \infty \tag{79}$$

が成立し，この対偶が証明したいことであった．　□

次の仮定7.2をも設けよう．

［仮定7.2］

各 $T\omega_j$ $(j \in J)$ の絶対値自乗振幅有限条件

$$\forall j \in J, \forall x \in M, |(T\omega_j)(x)|^2 < \infty \tag{80}$$

が成り立ち，かつ，式（75）が成立し，式（72）の $S(\varphi)$ の積分有限条件

$$\int_M dm(x) \cdot S(\varphi)(x) < \infty \tag{81}$$

が満たされる．　□

このとき，次の定理 3 と，その系 1 が成り立ち，axiomを満たす式（15）の類似度関数 SM が得られた．

［定理 3 ］（ 2 次元ガウス確率分布に基づく密度関数 $SD_j(\varphi)(x)$, $x \in M$, $j \in J$ を持つ類似度 SM の構成定理）

2 仮定7.1，7.2の下で考えよう．条件

$$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}, \int_M dm(x) \cdot S_j(\omega_i)(x) < \infty \tag{82}$$

の下で，2 式（71），（72）のS_j, Sを使って定義された関数の系

$$SD_j(\varphi)(x) \equiv \frac{S_j(\varphi)(x)}{\int_M dm(x) \cdot S(\varphi)(x)} = \frac{S_j(\varphi)(\varphi)}{\sum_{k \in J} \int_M dm(x) \cdot S_k(\varphi)(x)} \quad (x \in M), j \in J \tag{83}$$

を用い，式（45）のように定義された式（15）の類似度関数SMはaxiomを満たす．

［**定理３の系１**］（密度関数$SD_j(\varphi)$の系$SD_j(\varphi)(x)(x \in M), j \in J$の$T-$不変性）

密度関数$SD_j(\varphi)$の系$SD_j(\varphi)(x)(x \in M), j \in J$の$T-$不変式（64）が成り立つ．

（定理 3 と，その系 1 の証明）

仮定7.2と補助定理 1 より，$\|\varphi\|^2 \equiv (\varphi, \varphi) < \infty$なる任意の$\varphi \in \Phi$について，式（76）と式（81）が成り立っている．よって，式（83）の$SD_j(\varphi)$を用い，式（45）の如く定義されたSMは，axiomの（ⅱ）を満たすことがわかる．

axiomの（ⅲ）の成立は，任意の$\varphi \in \Phi$について，2.1.2のTのべき等性③より成立する$T-$不変性

$$\forall j \in J, \rho_j(T\varphi) = \rho_j(\varphi) \wedge \sigma_j(T\varphi) = \sigma_j(\varphi) \tag{84}$$

$$\forall j \in J, \forall x \in M, S_j(T\varphi)(x) = S_j(\varphi)(x) \tag{85}$$

$$\wedge SD_j(T\varphi)(x) = SD_j(\varphi)(x) \tag{86}$$

から，明らかである．式（86）は系 1 である．

axiomの（ⅰ）の成立を示そう．

先ず，$\rho_j(\varphi), \sigma_j(\varphi)$の 2 定義式（69），（70）を思い起こす．そうすると，

$\|\varphi - \omega_j\| \to 0$であれば，

$$\rho_j(\varphi) \to 1 \quad \therefore \quad \sigma_j(\varphi) \to 0 \tag{87}$$

$$\therefore \quad \exists M_j \subset M, \int_{M_j} dm(x) > 0 \tag{88}$$

$$\wedge S_j(\varphi)(x) \to \infty \quad \text{for any} \quad x \in M_j \tag{89}$$

$$\therefore \quad \int_M dm(x) \cdot S_j(\varphi)(x) \to \infty \tag{90}$$

$$\therefore \quad \forall j \in J, SM(\varphi, \omega_j) = \frac{1}{1 + \sum_{k \in J-\{j\}} \frac{\int_M dm(y) \cdot S_k(\varphi)(y)}{\int_M dm(y) \cdot S_j(\varphi)(y)}} \to 1 \quad \because \quad 3\text{ 式（45），（82），（83）} \tag{91}$$

が成り立つ．次に，任意$i \in J-\{j\}$のについて

$\|\varphi - \omega_i\| \to 0$であれば，

$SM(\varphi, \omega_i)$

$$= \frac{\int_M dm(y)\cdot S_j(\varphi)(y)}{\int_M dm(y)\cdot S_i(\varphi)(y) + \sum_{k\in J-\{j\}} \int_M dm(y)\cdot S_k(\varphi)(y)} \tag{92}$$

$$\to 0 \quad \because \quad 2\text{ 式（82），（90）} \tag{93}$$

がわかる． □

8.　カテゴリ事後確率類似度関数 SM の密度関数

本章では，カテゴリ事後確率分布を利用し，密度関数 $SD_j(\varphi)(x)$ を持たない SM，持つ SM が構成される．

8.1　SM が密度関数を持たない例

パターンモデル $T\varphi$ が与えられたとき，第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ が出現する事後条件件確率

$$p(\mathfrak{C}_j / T\varphi) \tag{94}$$

がカテゴリ番号 $j\in J$ にわたり，与えられたとしよう．但し，正条件

$$\forall j\in J,\ p(\mathfrak{C}_j / T\varphi) > 0 \tag{95}$$

が満たされているとしよう．

非一致条件

$$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},\ p(\mathfrak{C}_j / T\varphi) \neq p(\mathfrak{C}_i / T\varphi) \tag{96}$$

を仮定し，

$$p_j(\Omega) \equiv \max_{i\in J-\{j\}} p(\mathfrak{C}_j / T\omega_i) \tag{97}$$

について，最大確率条件

$$\forall j\in J,\ 1\geq q_j > p_j(\Omega) \tag{98}$$

を満たす正定数 q_j の系を用意する．

正条件式（95）を満たす式（94）の事後条件件確率 $p(\mathfrak{C}_j / T\varphi)$ の典型的な1例は，

$p(\mathfrak{C}_j / T\varphi)$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}}\cdot \exp\left[-\frac{\| T\varphi - T\omega_j \|^2}{2\sigma_j^2}\right]}{\sum_{i\in J} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}}\cdot \exp\left[-\frac{\| T\varphi - T\omega_i \|^2}{2\sigma_i^2}\right]} \tag{99}$$

と与えられ，2条件式（96），（98）を満たする正定数 $\sigma_j\ (j\in J)$ が，非一致条件式（14）の下で存在することは容易にわかる．この各 $p(\mathfrak{C}_j / T\varphi)$ を

$p'(\mathfrak{C}_j / T\varphi) \equiv$

$$\begin{cases} 1 & \cdots 1 \geqq p(\mathfrak{C}_j/T\varphi) \geq q_j \text{ のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j/T\varphi) & \cdots q_j > p(\mathfrak{C}_j/T\varphi) > p_j(\Omega) \text{ のとき} \\ 0 & \cdots p_j(\Omega) \geq p(\mathfrak{C}_j/T\varphi) \geqq 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{100}$$

へと変更すると，定理 1 とほぼ同様にして証明される次の定理 4 が成り立つ．

［定理 4］（カテゴリ事後確率分布$p(\mathfrak{C}_j/T\varphi), j\in J$による類似度関数$SM$の構成定理 1）

2 条件式（96），（98）の下で，

$$SM(\varphi, \omega_j) =$$

$$\begin{cases} p'(\mathfrak{C}_j/T\varphi)/\sum_{i\in J} p'(\mathfrak{C}_i/T\varphi) \cdots \sum_{i\in J} p'(\mathfrak{C}_i/T\varphi) > 0 \text{ のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \sum_{i\in J} p'(\mathfrak{C}_i/T\varphi) = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{101}$$

と定義される式（15）の関数SMはaxiomを満たす． □

8.2 SMが密度関数$SD_j(\varphi)(x)$を持つ例

上述の定理 4 を応用し，式（45）の密度関数$SD_j(\varphi)(x)(x\in M)$を構成しよう．

式（94）の$p(\mathfrak{C}_j/T\varphi)$が，

$$p(\mathfrak{C}_j/T\varphi) = \int_M dm(x)\cdot pd_j(T\varphi)(x) \tag{102}$$

と積分表現されるとしよう．密度関数$pd_j(T\varphi)(x)(x\in M)$の典型的な 1 例は，正定数$\nu_j$の系を選定・固定し，

$$pd_j(T\varphi)(x)$$

$$= \frac{\exp[-\frac{1}{\nu_j}\cdot|(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|^2]}{\sum_{i\in J}\int_M dm(y)\exp[-\frac{1}{\nu_i}\cdot|(T\varphi)(y)-(T\omega_i)(y)|^2]} \tag{103}$$

と与えられる．

各パターンモデル$T\omega_j$について，

$$\forall j\in J, \forall i\in J-\{j\},$$

$$\exists M_{ij}\subset M, \int_{M_{ij}} dm(x) > 0 \tag{104}$$

$$\wedge[\forall x\in M_{ij}, (T\omega_j)(x) \neq (T\omega_i)(x) \tag{105}$$

を仮定し， 2 条件式（96），（98）の下で，$p(\mathfrak{C}_j/T\varphi)$を式（100）の$p'(\mathfrak{C}_j/T\varphi)$に変更する．

その後，次の関数$SD_j(\varphi)(x)$を設ける：

（一）$\sum_{i\in J} p'(\mathfrak{C}_i/T\varphi) > 0$のとき

$$SD_j(\varphi)(x) \equiv$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\int_M dm\,(x)} / \sum_{i \in J} \quad p'(\mathfrak{C}_i / T\varphi) \cdots 1 \geqq p\,(\mathfrak{C}_j / T\varphi) \geq q_j \text{ のとき} \\ pd_j\,(T\varphi)(x) / \sum_{i \in J} \quad p'(\mathfrak{C}_i / T\varphi) \cdots q_j > p\,(\mathfrak{C}_j / T\varphi) > p_j\,(\Omega) \text{ のとき} \\ \dfrac{0}{\int_M dm\,(x)} / \sum_{i \in J} \quad p'(\mathfrak{C}_i / T\varphi) = 0 \cdots p_j\,(\Omega) \geqq p\,(\mathfrak{C}_j / T\varphi) \geqq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

（二）$\sum_{j \in J} \quad p'(\mathfrak{C}_i / T\varphi) = 0$ の場合

$$SD_j\,(\varphi)(x) \equiv p\,(\mathfrak{C}_j) / \int_M dm\,(x)$$

□

以上の準備の下で，次の定理５と，その系１が成り立つ．

［定理５］（カテゴリ事後確率分布 $p\,(\mathfrak{C}_j / T\varphi), j \in J$ による類似度関数 SM の構成定理２）

上記の（一），（二）の如く呈される $SD_j\,(\varphi)(x)$ を用い，２条件式（96），（98）の下で，式（100）の $p'(\mathfrak{C}_i / T\varphi)$ を用い，式（101）のように定義される式（15）の関数 SM はaxiomを満たし，しかも，SM の積分表現式（45）が成り立つ．

［定理５の系１］（密度関数 $SD_j\,(\varphi)(x)$ の $T-$ 不変性）

密度関数 $SD_j\,(\varphi)$ の系 $SD_j\,(\varphi)(x)\,(x \in M), j \in J$ の $-T$ 不変式（64）が成立する．

（定理５の証明）

式（101）で定義される式（15）の類似度関数 SM がaxiomを満たすことは定理１の証明とほぼ，同様にして示される．

２式（一），（二）の $SD_j\,(\varphi)(x)$ を核関数とする SM の積分表現式（45）が成り立つことは次のⅠ，Ⅱのように示される：

Ⅰ．$\sum_{i \in J} \quad p'(\mathfrak{C}_i / T\varphi) > 0$ のとき

$$\int_M dm\,(x) \cdot SD_j\,(\varphi)(x) =$$

$$\begin{cases} 1 / \sum_{i \in J} \quad p'(\mathfrak{C}_i / T\varphi) \cdots 1 \geqq p\,(\mathfrak{C}_j / T\varphi) \geq q_j \text{ のとき} \\ p\,(\mathfrak{C}_j / T\varphi) / \sum_{i \in J} \quad p'(\mathfrak{C}_i / T\varphi) \cdots q_j > p\,(\mathfrak{C}_j / T\varphi) > p_j\,(\Omega) \text{ のとき} \\ 0 / \sum_{i \in J} \quad p'(\mathfrak{C}_i / T\varphi) = 0 \cdots p_j\,(\Omega) \geqq p\,(\mathfrak{C}_j / T\varphi) \geqq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$= p'(\mathfrak{C}_j / T\varphi) / \sum_{i \in J} \quad p'(\mathfrak{C}_i / T\varphi) \tag{106}$$

$$= SM\,(\varphi, \omega_j). \tag{107}$$

Ⅱ．$\sum_{i \in J} p'(\mathfrak{C}_i / T\varphi) = 0$のとき

$$\int_M dm(x) \cdot SD_j(\varphi)(x) =$$

$$= \int_M dm(x) \cdot [p(\mathfrak{C}_j) / \int_M dm(y)]$$

$$= p(\mathfrak{C}_j) \tag{108}$$

$$= SM(\varphi, \omega_j). \tag{109}$$

（定理5の系1の証明）

系1の成立は，2.1.2のTのべき等性③を考慮すれば，式（102）の$pd_j(T\varphi)(x)$がTの下で不変であることから明らかである．□

9.　最小自乗規準類似度関数SMの密度関数

本章では，柔らかいファジィクラスタリング[6]を参考し，密度関数$SD_j(\varphi)(x)$を持たないSM，持つSMの2種類が構成される．

9.1　SMが密度関数を持たない例

$T\omega_j \in T \cdot \Omega$を中心とし，高々可算のパターン集合$\Phi_B(\subset \Phi)$内の第$j \in J$番目のクラスタにパターン$\varphi$が集中している程度（1より大きくない非負量）$s_j(\varphi)$は$j \in J$にわたり総和すれば，1になるとしよう．柔らかいファジィクラスタリング法によれば，各$s_j(\varphi)$は次の補助定理2で求められる6）．

［補助定理2］

規格化条件

$$\forall \varphi \in \Phi_B, \sum_{j \in J} s_j(\varphi) = 1 \tag{110}$$

を満たす各非負量$s_j(\varphi)$の汎関数（最小自乗規準）

$$F(s_j(\varphi), j \in J, \varphi \in \Phi_B)$$

$$\equiv \sum_{\varphi \in \Phi_B} \sum_{j \in J} s_j(\varphi) \cdot \| T\varphi - T\omega_j \|^2 \tag{111}$$

を最小にする“$\varphi \in \Phi_B$が第$j \in J$番目のクラスタに帰属する程度を表す各帰属度関数$s_j(\varphi)$”は

$$s_j(\varphi)$$

$$= \frac{\| T\varphi - T\omega_j \|^{-2}}{\sum_{i \in J} \| T\varphi - T\omega_i \|^{-2}} \tag{112}$$

と与えられ，Fの最小値$\min F$は

$$\min_{s_j(\varphi), j \in J} F(s_j(\varphi), j \in J, \varphi \in \Phi_B)$$

$$\equiv \sum_{\varphi \in \Phi_B} \frac{1}{\sum_{i \in J} \frac{1}{\| T\varphi - T\omega_i \|^2}} \tag{113}$$

と与えられる．□

上述の補助定理 2 から，次の定理 6 は容易に証明され，最小自乗基準に基づいて類似度関数SMが構成され得ることがわかる．

［定理 6 ］（最小自乗基準に基づく類似度関数SMの構成定理）

非一致条件式（14）の下で，式（112）の帰属度関数$sj(\cdot)$を用いて，

$$SM(\varphi, \omega_j) = \frac{\| T\varphi - T\omega_j \|^{-2}}{\sum_{i \in J} \| T\varphi - T\omega_i \|^{-2}} \tag{114}$$

と定義される式（15）のSMはaxiomを満たす［6］． □

9.2 SMが密度関数を持つ例

定理 6 でのSMの構造形式（114）に注目し，SMの積分表現式（45）が成り立つような密度関数$SD_j(\varphi)(x)$を持つを構成しよう．

$$x = < x_1, x_2, \cdots, x_n > \in M$$

$$|x| \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{115}$$

として，正値関数$a(x) > 0$を用意する．例えば，実定数c_jの組$\{c_j\}_{j \in J}$を用意し，

$$a_j(x) = |c_j|^2 + |x - c_j|^2 > 0 \tag{116}$$

の総和

$$a(x) = \sum_{j \in J} a_j(x) \tag{117}$$

を採用すれば良い．このとき．不等式条件

$$\forall x \in M, 0 \le \varepsilon_{1j}(x) < \varepsilon_{2j}(x) \quad (i \in J) \tag{118}$$

を満たす 2 つの正値関数$\varepsilon_{1j}(x), \varepsilon_{2j}(x)$を用意し，

$$S_j(\varphi)(x) \equiv \begin{cases} +\infty & \text{if} \quad |(T\varphi)(x) - (T\omega_j)(x)| \le \varepsilon_{1j}(x) \\ \dfrac{1}{|(T\varphi)(x) - (T\omega_j)(x)|^2} \cdot \dfrac{1}{a(x)} & \text{if} \quad \varepsilon_{1j}(x) < |(T\varphi)(x) - (T\omega_j)(x)| < \varepsilon_{2j}(x) \\ \dfrac{\varepsilon_{2j}(x)}{a(x)} & \text{if} \quad \varepsilon_{2j}(x) \le |(T\varphi)(x) - (T\omega_j)(x)| \end{cases} \tag{119}$$

$$S(\varphi)(x) \equiv \sum_{k \in J} S_k(\varphi)(x) \tag{120}$$

を導入する． 2 つの正値関数$\varepsilon_{1j}(x), \varepsilon_{2j}(x)$の選定については，例えば，各正定数$\sigma_j, \tau_j\ (j \in J)$を用意して，

$$\varepsilon_{1j}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_j^2} \cdot a_j(x)\right] \tag{121}$$

$$\varepsilon_{2j}(x)$$

$$= \varepsilon_{1j}(x) + \sum_{1 \in J} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_i^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\tau_i^2} \cdot a_i(x)\right] \tag{122}$$

と選べばよい．

式（119）の各関数$S_j(\varphi)$が，条件

$$\exists M_{ij} \subset M, \int_{M_{ij}} dm(x) > 0 \tag{123}$$

$$\wedge [\forall x \in M_{ij} \subset \{x \in M \mid dm(x) \neq 0\}, (T\omega_i)(x) \neq (T\omega_j)(x) (i \neq j) \tag{124}$$

$$\wedge [0 \leq \int_M dm(x) \cdot S_j(\omega_i)(x) < \infty (i \neq j) \tag{125}$$

を満たすとしよう．結局，SMの積分表現式（45）内の各密度関数$SD_j(\varphi)(x)$を

$$SD_j(\varphi)(x)$$

$$= \frac{S_j(\varphi)(x)}{\sum_{k \in J} \int_M dm(x) \cdot S_k(\varphi)(x)}, x \in M, j \in J \tag{126}$$

と定義すると，次の定理7と，その系1が成り立つ．

［定理７］（最小自乗基準に基づく類似度関数SMの構成定理）

関数の系

$$SD_j(\varphi)(x)$$

$$\equiv \frac{S_j(\varphi)(x)}{\sum_{k \in J} \int_M dm(x) \cdot S_k(\varphi)(x)}$$

$$\equiv \frac{S_j(\varphi)(x)}{\int_M dm(x) \cdot S(\varphi)(x)} \tag{127}$$

を用い，式（45）のように定義された式（15）の類似度関数SMは，axiomを満たし，しかも，SMの積分表現式（45）が成り立つ．

［定理７の系１］（密度関数$SD_j(\varphi)(x)$の$T-$不変性）

密度関数$SD_j(\varphi)$の系$SD_j(\varphi)(x)(x \in M), j \in J$の$T-$不変式（64）が成立する．

（定理7，並びに，系1の証明）axiomの（ⅱ）の成立は2定義式（127），（45）から明らかである．

系1の成立は2.1.2の③を考慮すれば，式（119）の$S_j(\varphi)(x)$がTの下で不変であることから明らかである．

axiomの（ⅲ）の成立は，この系1から明らかである．

axiomの（ⅰ）の成立を示そう．式（119）より，

$$\forall j \in J, \forall x \in M, S_j(\omega_j)(x) = \infty$$

$$\therefore \quad \forall j \in J, \int_M dm(x) \cdot S_j(\omega_j)(x) = \infty \tag{128}$$

であることがわかり，この式（128）と条件式（125）とから，

（イ）$\forall j \in J, SM(\omega_j, \omega_j)$

$$= \frac{1}{1+\sum_{k\in J-\{j\}} \frac{\int_M dm(x)\cdot S_k(\omega_j)(x)}{\int_M dm(x)\cdot S_j(\omega_j)(x)}} = 1 \tag{129}$$

（ロ）$\forall i \in J-\{j\}, SM(\omega_i, \omega_j)$

$$= \frac{\int_M dm(x)\cdot S_j(\omega_i)(x)}{\sum_{k\in J-\{i\}} \int_M dm(x)\cdot S_k(\omega_i)(x) + \int_M dm(x)\cdot S_i(\omega_i)(x)} = 0 \tag{130}$$

と，（ｉ）の成立がわかる．　□

10.　おわりに

現在に至っても，類似度関数に関する組織的な研究がなされていないし，ましてや，処理の対象とする問題のパターンφの集合Φに最適な類似度関数を決定する数理的な方法が研究され得ていないのは，識別関数に関する組織的な研究と異なり，困難であるからである．どのようなパターンφの集合Φに対しても最適な類似度関数の構成を可能ならしめる数理的手法は存在しないという“S. Suzukiの予想（文献［7］の1.2節）”の下になされたのが本論文である．

これまでパターン認識，パターン検索の分野で用いられている標準的な類似度関数は，式（24）の形式のsm，或いは，その 1 次結合［4］，［9］，或いは，式（46）の$COR(T\varphi, T\omega_j)$と同様な規格化内積形式の

$$sm(\varphi, \omega_j) = \left(\frac{\varphi}{\|\varphi\|}, \frac{\omega_j}{\|\omega_j\|}\right) \tag{131}$$

或いは，ノルム距離形式の

$$sm(\varphi, \omega_j) = \sqrt{4 - \left\| \frac{\varphi}{\|\varphi\|} - \frac{\omega_j}{\|\omega_j\|} \right\|^2} \tag{132}$$

などであって，これらの各smに各代表パターンω_jの間に正規直交性での直交性

$$sm(\omega_i, \omega_j) = 0 \, (i \neq j) \tag{133}$$

を要求できる式（8）の代表パターン集合Ωを選定することは，現実の場面では困難である．しかしながら，見方を少し変えれば，この困難は打破できることを3.と4.で明らかにした．本研究内容を検討すればわかるように，各代表パターンω_jの間に正規直交性を要求しない方がむしろ，パターン分離に関し不適切で，パターン認識技術の確保にとって障害となっているというのが，著者の見解である．柔らかいファジィクラスタリングにおける式（112）の帰属度関数$s_j(\varphi)$の形式からヒントを得た式（114）の類似度関数SMの正規直交性がこの見解の正しさの 1 部を支持してくれていると，思える．

本研究内容は，むしろ，各代表パターン間に正規直交性を要求することにより，パターン間の類似性を測る物差しとしての類似度関数SMの構造というものを積分形式（45）の密度関数$SD_j(\varphi)(x)$の存在で浮き彫りにしているのである．

内積相関，２次元ガウス確率分布，カテゴリ事後確率分布，最小自乗規準（４例）を利用し，これ

までの類似度関数を見直し改良する余地をもたらすように，類似関数SMの積分表現式（45）を可能にする密度核関数$SD_j(\varphi)(x)$が厳密・綿密に４定理2, 3, 5, 7で構成された．構成されたSMの４例は実際に処理の対象とする問題のパターン集合Φに応じ適切に用いられるべきである．“（ｉ）正規直交性・（ⅱ）規格化性・（ⅲ）モデル構成作用素Tの下での不変性”の３性質（2.2のaxiom）を満たす積分核$SD_j(\varphi)(x)$を持つ積分形式のこの類似度関数SMは，複雑な構造を備えているパターン同士が似ている，相違しているに関し，微細な形状に関し詳細かつ有効に計量できるかどうかをその密度核関数$SD_j(\varphi)(x)$を介し，SMの正規直交性の観点から検討できる構造を備えており，その結果，パターン分離に関しSMを改良する手段をもたらす．

S. Suzukiは，入力パターンの多段階パターンモデル変換を採用し，“ありとあらゆる認識の働きを模擬できる万能性認識システムRECOGNITRON”を構成することに成功している［6］，［7］．構成されたSMの４例はこのRECOGNITRONの多段階認識過程で用いられると，前認識段階から次の認識段階へと移行する場合，類似度の大小関係が最終認識段階で入力パターンが正しく認識されるように入れ替わることを，SMが正規直交性を満たしている故に可能にするという意味で，特に，有効となるものである．各カテゴリに複数の代表パターンを設定し［24］，視点の異なる物体同士間の類似度を測れるような密度関数を求めることも可能であるが，紙面の都合上割愛された．更に，統計的変動以上のパターン変形に対処可能にするのには，各カテゴリに複数の代表パターンを設定したときの類似度関数SMを構成しなければならないが，このようなSMを構成する研究も割愛された．

尚，本論文で構成された“正規直交性・規格化性・モデル構成作用素Tの下での不変性”の３性質を満たす類似度関数SMは，すべて，2.2.1の（ⅲ）の$T-$不変性よりも強い$T-$不変性

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall j\in J,$$
$$SM\,(T\varphi,\,T\omega_j)=SM\,(T\varphi,\,\omega_j)=SM\,(\varphi,\,T\omega_j)=SM\,(\varphi,\,\omega_j) \tag{134}$$

を備えていることを容易に確かめることができ，この強い$T-$不変性は，処理するパターンφをすべて，同一構造形式のパターンモデル$T\varphi$へ変換しておく認識の方法［6］，［7］が有効に機能することを助けるのであり，このことを，最後に指摘しておく．

参　考　文　献

［１］長尾真，安西祐一郎，神岡太郎，橋本周司：マルチメディア情報学の基礎（岩波講座マルチメディア情報学１），岩波書店（1999）

［２］Gerard Salton, Michael J. McGill:Introduction to modern information retrieval（McGraw-Hill Advanced Computer Science Series）, McGraw-Hill International Book Company（1983）

［３］村瀬洋：解説　古くて新しい画像認識法―固有空間法による画像認識―，会誌［情報処理］，vol.38, no.1, pp.54-60（1997）

［４］鈴木昇一：認識工学，柏書房（1975）

［５］鈴木昇一：ニューラルネットの新数理，近代文芸社（1996）

［６］鈴木昇一：パターン認識問題の数理的一般解決，近代文芸社（1997）

［７］鈴木昇一：認識知能情報論の新展開，近代文芸社（1998）

［８］鈴木昇一：パターンのエントロピーモデル，電子情報通信学会論文誌（D-Ⅱ），vol. J77-D-Ⅱ, no.10, pp.2220-2238（1994）

［ 9 ］鈴木昇一：測度的不変量検出形認識系の構成理論，電子通信学会論文誌（D), vol.55-D, no.8, pp.513-538（1972）

［10］鈴木昇一：抽出された特徴による手書き漢字構造の再生，会誌[情報処理]，vol.18, no.11, pp.1115-1122（1977）

［11］鈴木昇一，斉藤静昭，奥野治雄，太田芳雄：画像の復元とその計算機シュミレーション，工学院大学研究報告，no.39, pp.198-206（1976）

［12］鈴木昇一：回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シュミレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.4, pp.36-56（1983）

［13］鈴木昇一：連想形記億器MEMOTRONと日本語母音系列の再生に関する計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.7, pp.14-29（1986）

［14］鈴木昇一：帰属係数法に基づく類似度，帰属関係あいまい度，認識情報量の計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.11, pp.51-68（1990）

［15］鈴木昇一，佐久間拓也，前田英明：数理形態学における諸演算とモデル構成作用素，情報研究（文教大学・情報学部），no.17, pp.133-170（1996）

［16］鈴木昇一：Radial-Basis Function Networks, Wavelet-Based Networksを用いたモデル構成作用素の構成法，情報研究（文教大学・情報学部），no.17, pp.71-132（1997）

［17］鈴木昇一：構造受精法と日本語単独母音の認識，情報研究（文教大学・情報学部），no.18, pp.17-51（1998）

［18］鈴木昇一：類似度関数を用いた確率的緩和法，情報研究（文教大学・情報学部），no.20, pp.23-75（1998）

［19］鈴木昇一，前田英明：有声破裂音の代表パターンの学習的決定と，その計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.20, pp.77-95（1998）

［20］鈴木昇一：直交系によるパターンモデルの構成，情報研究（文教大学・情報学部），no.21, pp.23-49（1999）

［21］鈴木昇一：認識行為に向けての，効用最大化原理，情報研究（文教大学・情報学部），no.22, pp.151-210（1999）

［22］鈴木昇一：平均顔を用いた顔画像の 2 値化，並びに目・鼻・口の抽出と，その計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.22, pp.65-150（1999）

［23］鈴木昇一：界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の，顔画像処理に関する計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.23, pp.109-182（2000）

［24］鈴木昇一：風景画から知識を抽出し，解釈するシステムの，ファジィ推論ニューラルネットによる 1 構成，情報研究（文教大学・情報学部），no.23, pp.183-265（2000）

［25］Vladimir N. Vapnik:The nature of statistical learning theory, Springer-Verlag New York, Inc., 1995

［27］鈴木昇一：類似度関数の選定に関する適切さの検証法，情報研究（文教大学・情報学部），no.19, pp.83-119（1998）

［28］鈴木昇一：各個人の感性を反映した認識システムRECOGNITRON，情報研究（文教大学・情報学部），no.24, pp.185-257（2000）

［29］鈴木昇一：SS大分類関数BSCの適応的構成への，計算論的学習理論の適用，情報研究（文教大学・情報学部），no.25, pp.187-238（2000）

［30］鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：風景画の理解に関するJAVA言語によるRECOGNITRONの計算

機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.27, pp.73-109（2002）
［31］鈴木昇一：JAVA言語で実装化された画像理解システムIUSの動作概要と，その稼動方法，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.143-165（2002）
［32］鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：JAVA言語による計算機シミュレーションで生じた風景画像の理解場面での多段階連想形認識過程の異常現象，情報研究(文教大学・情報学部)，no.29, pp.123-166（2003）
［33］鈴木昇一：パターン系列（動画像，会話音声）の，dynamical systemによる連想理論と，連想器SPATEMTRON，情報研究（文教大学・情報学部），no.30, pp.139-186（2004）
［34］鈴木昇一：可分な一般抽象ヒルベルト空間でのK-L直交系の理論，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.41-73（2003）
［35］鈴木昇一：入出力例の系列を用いた“対連想問題・その擬逆問題”の一般解，情報研究（文教大学・情報学部），no.30, pp.81-137（2004）
［36］Doo-Qiang Zhang, Song-can Chen: A comment on “Alternative c-means clustering algorithms”, Pattern Recognition, no.37, pp.173-174（2004）
［37］鈴木昇一：１パラメータLie座標変換群とそのパターン正規化への応用，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.21-74, Jan.2005
［38］鈴木昇一：曖昧さに関する半順序を単調に保つモデル構成作用素，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.75-126, Jan.2005
［39］鈴木昇一：パターンから抽出された特徴量のfuzzy単調変換，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.127-168, Jan.2005
［40］鈴木昇一：パターンモデル（パターンの標準形）の一般形，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.169-218, Jan.2005
［41］鈴木昇一：類似度関数の密度を用いた，画素毎のパターン認識処理（パターン理解処理）の方法，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.219-285, Jan.2005

付録１． 万能性認識システムRECOGNITRON［6]，［7］における多段階パターンモデル変換を使った認識法

万能性認識システムRECOGNITRONによる認識の働きを説明し，本論文での類似度関数SMがこの認識の働きにおいて如何なる役割を演じているかを明らかにしよう．

知覚的記憶心理学のある考えによれば，表象間の類似性に基づいて，認識判断がなされるという［7］．$T\varphi, T\omega_j$を各々，入力パターンφ，第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターンω_jの表象と見なし，φをそのモデル$T\varphi$に変換した後，各認識段階で得られたパターンモデルと各$T\omega_j\ (j \in J)$との間の類似性を計量化し，多段階のパターンモデル変換を介し，その類似性の程度の最大値を持つ$T\omega_j$などから定まるパターンモデルを各段階で決定しながら，認識を行うシステムRECOGNITRONは，簡単には次のように述べられる：

処理の対象とする問題の入力パターン$\varphi \in \Phi$に対し，2.1.2の４性質①～④を満たすパターンモデル$T\varphi \in \Phi$を導入する．

パターンφが$|J|$個のカテゴリ

$$\mathfrak{C}_j,\ j \in J \qquad \text{(A1.1)}$$

の内，どの 1 つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属するかを決定しよう．2.1.1のように，第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の持つ諸性質を典型的に反映しているパターン（$\mathfrak{C}_j$ の代表パターン）を

$$\omega_j \in \Omega \qquad \text{(A1.2)}$$

と表そう．

初期段階（第 0 認識段階）のパターン $\varphi[0]$ を

$$\varphi[0] = T\varphi \qquad \text{(A1.3)}$$

と設定する．第 s (= 0, 1, 2, …) 認識段階のパターン $\varphi[s]$ から，構造受精作用素［6］，［7］

$$A : \Phi \to \Phi \qquad \text{(A1.4)}$$

の両辺にモデル構成作用素 T を配置した構造受精変換

$$TAT : \Phi \to \Phi \qquad \text{(A1.5)}$$

を使って，パターンモデルの集合

$$\exists\psi_q,\ \varphi_q[s+1] = T\psi_q[s+1],\ q = 1 \sim n_s \qquad \text{(A1.6)}$$

を派生させる．ここに，用いられた構造受精作用素 A を $A[s, q]$ と書くと，式（A1.6）内の右辺のパターンモデル $T\psi_q[s+1]$ は

$$T\psi_q[s+1] = (TA[s, q]T)\varphi[s] \qquad \text{(A1.7)}$$

と表現される．式（A1.7）の右辺に登場している写像 $TA[s, q]T$ は構造受精変換と呼ばれている．

その後，帰納推理の働きでその内の 1 つ $\varphi_r[s+1] (1 \le r \le n_s)$ を選び，第 $(s+1)$ 認識段階のパターン $\varphi[s+1]$ を

$$\varphi[s+1] = \varphi_r[s+1] \qquad \text{(A1.8)}$$

と，決定する．この決定に至る段階が第 s 認識段階から第 $(s+1)$ 認識段階への，帰納推論による探索である．

ある認識段階 t での不動点方程式

$$\varphi[t+1] = \varphi[t] \qquad \text{(A1.9)}$$

の成立が終了条件であり，不動点方程式（A1.9）の成立から，最大類似度条件

$$\exists j \in J,\ SM(\varphi[t], \omega_j) = 1 \qquad \text{(A1.10)}$$

が成り立つカテゴリ番号 $j \in J$ が見つかる．このようにして，最大類似度条件式（A1.10）を満たす第 t 段階（最終認識段階）のパターンモデル

$$\varphi[t] = T\psi[t] \qquad \text{(A1.11)}$$

を含むようなパターンモデルの系列

$$\varphi[0],\ \varphi[1],\ \varphi[2],\ \cdots,\ \varphi[t] \qquad \text{(A1.12)}$$

を求まり，帰納推論に基づいた“多段階パターンモデル変換に基づいた認識（不動点多段階想起形認識）［6］，［7］”による 2 つの情報処理結果

（イ）入力パターン φ は第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属する（パターン認識）　(A1.13)

（ロ）入力パターン φ は $\varphi[t]$ として再生される（パターン想起）　(A1.14)

が得られる．この想起形認識の働きを備えたのが，axiom1～3［6］，［7］を各々満たさなければならないモデル構成作用素 T，類似度関数 SM，大分類関数 BSC をその都度選定すればありとあらゆるパターン認識の働きをシミュレートできるという意味で万能の，認識システムRECOGNITRONである．

実は，（イ）で見つかっているカテゴリ番号 $j \in J$ を用いて，（ロ）での，想起された式（A1.14）の

パターン$\varphi[t]$は

$$\varphi[t]=T\omega_j \tag{A1.15}$$

であることが証明されている．

2.1.2の4性質①～④を含むそこでのaxiom1を満たすパターン集合Φと，モデル構成作用素Tとの対$[\Phi, T]$を選定し，axiom2（2.2のaxiom）を満たす類似度関数SM，axiom3を満たす大分類関数BSCを選定すれば，認識システムRECOGNITRONを構成できる［6］．上述のように，RECOGNITRONの認識の働きは，入力パターンφに対応するパターンモデル$T\varphi$を求め，$T\varphi$から式（A1.15）の不動点パターンモデル$\varphi[t]$を連想する形で，φの帰属するカテゴリを決定する多段階パターンモデル変換法である．この連想形認識の働きがありとあらゆるパターン認識の働きをシミュレートできることが証明されている［6］．よって，S. Suzuki理論では，ありとあらゆるパターン認識の働きよりその認識性能が劣化しない認識システムRECOGNITRONの構成法が理論的に保証されている．

式（A1.10）には2.2のaxiomを満たす類似度関数SMが登場しているが，実は，

2つの任意の類似度値$SM(\varphi[s], \omega_i)$, $SM(\varphi[s], \omega_j)$の大小の値そのもの　(A1.16)

を利用し，第s段階で想起されたパターン$\varphi[s]$から式（A1.6）の各パターンモデル$\varphi_q[s+1]$を派生させる．この派生場面では，類似度関数SMが正規直交性を備えている故に，類似度値の大小関係が劇的に入れ替わることがシミュレーションで確かめられている［17］，［30］．本論文の4定理2, 3, 5, 7において，密度核関数で積分表現されるSMの4例は，この派生場面における類似度値の大小関係の入れ替りが有効に働き，その結果入力パターンが最終認識段階で正しく認識されること［17］，［30］を可能にするという意味で，期待されているものである．

付録2． 類似度関数SMと識別関数との違い

本付録2では，識別関数を類似度関数として使える本格的な構成法は，通常存在しないことに関連した解説を行う．

次の2定理A2.1，A2.2は，

$$|J|\geq 2 \tag{A2.1}$$

を考慮すると，容易に証明され，各々，文献［6］の付録Bの2定理B1，B2（p.157）である．

［定理A2.1］（一意的帰属に関する$SM-\delta$定理）

不等式

$$0\leq\delta<\frac{1}{2} \tag{A2.2}$$

を満たす非負数δを用意すると，不等式

$$1-\delta\leq SM(\varphi, \omega_j) \tag{A2.3}$$

が成り立つような$j\in J$は存在するとすれば，唯1つしかない．　□

［定理A2.2］（一意的帰属に関する$SM-\max$定理）

不等式（A2.2）の下で，不等式（A2.3）が成り立てば，

（ｉ）$$\sum_{k\in J-\{j\}} SM(\varphi, \omega_k)\leq\delta<\frac{1}{2}<1-\delta\leq SM(\varphi, \omega_j) \tag{A2.4}$$

（ⅱ）$SM(\varphi, \omega_j) - \max_{k \in J-\{j\}} SM(\varphi, \omega_k) \geq 1 - 2\delta > 0.$ （A2.5）

□

上述の定理A2.1によれば，

$$\exists j \in J,\ 1-\delta \leq SM(\varphi[t], \omega_j) = 1 \tag{A2.6}$$

が成立することで，不動点方程式（A1.9）の成立とみなすことができることが証明され［6］，不動点方程式(A1.9)の実質的な成立に関するこの判定条件は，日本語単独母音の認識計算機シミュレーション［17］でも採用されている．

また，２定理A2.1，A2.2によれば，

$\frac{1}{2}$より小さい与えられた非負実数δについて，パターンφが第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属しているならば，

$$\begin{aligned} &\exists j \in J,\ 1-\delta \leq SM(\varphi, \omega_j) \\ &\forall i \in J-\{j\},\ \delta \geq SM(\varphi, \omega_j) \end{aligned} \tag{A2.7}$$

が成立することが望ましい．

式(45)のように，類似度関数SMが密度関数$SD_j(\varphi)(x)$を持てば，$SD_j(\varphi)(x)$の形状を見て，SMがパターン集合Φについて適切な類似度関数かどうかが理解しやすくなる．つまり，式（A2.7）が成立しないならば，式（45）の密度関数$SD_j(\varphi)(x)$を変数$x \in M$の関数と見て，各$SD_j(\varphi)(x)(j \in J)$と，その対応する各$(T\omega_j)(x)(j \in J)$とを比較して，

各$(T\omega_j)(x)(j \in J)$と各$SD_j(\varphi)(x)(j \in J)$との関係から各$SM(\varphi, \omega_j)(j \in J)$が式（A2.7）を満たすように調整すべきである

（A2.8）

と主張できる．

類似度関数SMはパターン間で似ている程度を測るのに使われるものである．これに対し，識別関数はパターンの帰属するカテゴリを決定するのに使われるものであり，この意味で，類似度関数と識別関数とは異なるものである．唯，本論文の類似度関数SMについては，式（A2.7）が成立し，識別関数として使用可能であるが，識別関数を類似度関数として使える本格的な構成法は，通常存在しない．

パターン認識分野の大抵の著書においては，識別関数の体系的な研究，解説がなされているが，類似度関数についてはそうではない．唯，２文献［6］，［7］では，2.2のaxiom（正規直交性・規格化性・$T-$不変性）を満たす類似度関数SMの体系的な研究が１部，なされている．

これまで識別関数に関してはその体系的な研究がある．このように，識別関数の体系的な研究があるからといって，類似度関数の体系的な研究があるとはいえない．

尚，文献［6］，［7］での，２値$0, 1$のいずれかの値をとる大分類関数（two-state clssifier）BSC［24］，［27］，［28］，［30］は，

$BSC(\varphi, j) = 1$ならば，パターン$\varphi \in \Phi$の帰属するカテゴリ候補の１つは第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$である （A2.9）

を可能にするように構成され，この結果パターンφの帰属する候補カテゴリの絞り込みの機能を備えていることになり，この意味で一種の識別関数である．

付録３． モデル構成作用素Tと，類似度関数SMの諸性質

Φを処理の対象とする問題のパターンφの集合とする．モデル構成作用素Tの持つ2.1.2の４性質①〜④から，2.2のaxiomを満たす式（15）の類似度関数SMがパターン認識の働きに如何なる都合の良い性質を備えてくるかを説明しよう．

先ず，４性質①〜④の効用を説明する．

A3.1　性質①の効用

パターンφが

$$\varphi = \psi + \eta \tag{A3.1}$$

という具合に，主要成分ψと剰余成分ηとの和に分解できるとき，

$$T(\psi + \eta) \approx T\psi \tag{A3.2}$$

という“剰余成分ηの除去効果”が保証される［7］．

このとき，式（A3.2）より，

$$\forall j \in J,\ SM(\psi + \eta, \omega_j) \approx SM(\psi, \omega_j) \tag{A3.3}$$

が成り立つ．

A3.2　性質②の効用

特に，正実数aとして，φのノルム$\| \varphi \|$の逆数$\dfrac{1}{\| \varphi \|} > 0$をとれば，

$$\forall \varphi (\neq 0) \in \Phi,\ T\left(\frac{1}{\| \varphi \|} \cdot \varphi\right) = T\varphi \tag{A3.4}$$

という刺激φの規格化が得られ［7］，［8］，都合がよい．それのみならず，式（13）の写像Tの正定数倍不変性②は，Tが

$$\forall \varphi \in \Phi,\ I\varphi = \varphi \tag{A3.5}$$

を満たす恒等写像Iであることを排除することになり，Tがいわゆるパターン認識分野の正規化写像であるという考えに矛盾しない．

このとき，次の定理A3.1が成立し，類似度関数SMがパターンφの正定数倍について不変性を備えてくるようになり，都合がよい．

［定理A3.1］（類似度関数SMの正定数倍不変性定理）

任意の正実定数aに対し，

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall j \in J,\ SM(a \cdot \varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j) \tag{A3.6}$$

が成り立ち，特に，aとして，φのノルム$\| \varphi \|$の逆数$\dfrac{1}{\| \varphi \|} > 0$をとれば，

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall j \in J,\ SM\left(\frac{1}{\| \varphi \|} \cdot \varphi, \omega_j\right) = SM(\varphi, \omega_j) \tag{A3.7}$$

（証明）$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall j \in J,\ SM(a \cdot \varphi, \omega_j)$

$= SM(T(a \cdot \varphi), \omega_j)$　$\because$　axiom，（iii）

$= SM(T\varphi, \omega_j)$　$\because$　2.1.2の性質②・

$= SM(\varphi, \omega_j)$　$\because$　axiom，（iii）　□

A3.3　性質③の効用

付録 1 の多段階パターンモデル変換式（A1.12）において，モデル構成作用素T に関し不動点となる$T-$ 不動点パターンモデル$\varphi[t]$の存在が性質③より保証される．その理由は次のとおりである．

多段階パターンモデル変換式（A1.12）を考えると，性質③から

$$T\varphi[s]=\varphi[s],\ s=0,1,2,\cdots,t \quad \because \quad \text{式（A1.11）} \tag{A3.8}$$

が成立する．もともと，モデル化過程

$$\varphi[s]\to T\varphi[s],\ s=0,1,2,\cdots,t \tag{A3.9}$$

の，（モデル$T\varphi[s]$のモデル$T\,(T\varphi[s])$はモデル$T\varphi[s]$であるという）完結性［8］,［10］が性質③から成立しているのであるが，より精密に，$\varphi[s]$のモデル$T\varphi[s]$は$\varphi[s]$そのものであることになる．

この間の事情を説明しておこう．

パターンφが入力されたモデル構成作用素T からの出力であるパターンモデル$T\varphi$を見たり聞いたりするならば，原パターンφと同じように見えたり聞こえたりする（同一知覚原理）ような錯覚（illusion）をもたらすのが，写像T の役割である．従って，不動点方程式（A3.8），或いは，以下の不動点方程式（A3.10）が成立している$T-$ 不動点パターン$\varphi[s],\psi$は，$T\varphi[s],T\psi$を見たり聞いたりするならば，錯覚ではなくして，$\varphi[s],\psi$そのものを見たり聞いたりすることを保証するものである．

さて，処理の対象とする問題の入力パターンφから，そのモデル$T\varphi$を多段階にわたって変換して行き，不動点方程式

$$T\psi=\psi \tag{A3.10}$$

を満たす不動点パターンψ，つまり，式（A1.9）の不動点パターンモデル$\varphi[t]$を求めるのが，RECOGNITRONによる多段階パターンモデル変換に基づく認識の働きである．この場合，性質③からもたらされる上述のモデル化の完結性が式（A1.9）の不動点パターンモデル$\varphi[t]$の存在を保証し，有効に働く．何故ならば，

$$T\psi=\psi \Leftrightarrow \exists\eta\in\Phi,\ \psi=T\eta \tag{A3.11}$$

が性質③から成り立つ（文献10）の付録 3 の定理 2 の証明と同様に証明される）からである．

本研究の意義の 1 部を明らかにするためには，先ず， 7 文献［4］～［10］でいう正規化の操作について説明しておかなければならないだろう．

2 つのパターンφ,ψのパターンモデル$T\varphi,T\psi$が一致するという 2 元関係$\sim_T$は，

$$\varphi\sim_T\psi \tag{A3.12}$$

$$\Leftrightarrow T\varphi=T\psi \quad \text{（パターンモデル間の相等関係）} \tag{A3.13}$$

と定義され，この 2 元関係$\sim_T$は，反射律，対称律，推移律を満たし，同値関係である．パターンモデル類と呼ばれてよい“φを含む同値類”

$$[\varphi]_T\equiv\{\psi\in\Phi\mid\varphi\sim_T\psi\} \tag{A3.14}$$

が導入される．任意にとった 2 つの同値類は全く一致するか，または，共通の元を持たないことがわかる．

認識システムへの実際の入力パターンφの同値類$[\varphi]_T$から代表要素$T\varphi\,(=T\psi)\in[\Phi]_T$を取り出す操作$T$ は 2 文献［6］,［10］では，正規化と呼ばれている．本論文ではモデル構成作用素と呼ばれる式（13）の写像T が， 2 文献［6］,［10］の考えに従えば，正規化の操作と呼ばれて良い理由は次のように説明される：

式（A3.13）の等式$T\varphi=T\psi$を満たすようなこのパターンψは一般にφと異なることに注意しよう．$T\varphi$を知覚したことは，φを等式$T\varphi=T\psi$を満たすψと錯覚していることにもなる．もし，認識シス

テムがφを見たにもかかわらず，φより良い形状のパターンψを錯覚しているならば，パターンモデル$T\varphi$の形成過程

$$\varphi \to T\varphi \tag{A3.15}$$

においては，パターンψのモデルでもある$T\varphi$はψより形が崩れたパターンφの正規化パターンと考えられることになる． □

上述の定理A3.1の一般化が次の定理A3.2であり，正規化の操作Tに対し，類似度SMが不変であることを明らかにしている．同値関係$\varphi \sim_T \psi$にある２つのパターンφ, ψ，つまり，同一パターンモデルを持つ２つのパターンφ, ψは，同一に知覚されるということを保証している定理である．

［定理A3.2］（類似度関数SMの$T-$不変定理）

$$\varphi \sim_T \psi$$
$$\Rightarrow$$
$$\forall\varphi, \forall\psi \in \Phi, \forall j \in J, SM\,(\varphi, \omega_j) = SM\,(\psi, \omega_j). \tag{A3.16}$$

（証明）$\forall\varphi, \forall\psi \in \Phi, \forall j \in J, SM\,(\varphi, \omega_j)$

$= SM\,(T\varphi, \omega_j)$　∵　2.2のaxiom，（iii）

$= SM\,(T\psi, \omega_j)$　∵　２式（A3.12），（A3.13）

$= SM\,(\psi, \omega_j)$．　∵　2.2のaxiom，（iii） □

上述の定理A3.2の応用について考えよう．パターンモデル$T\varphi$の不変性

$$\forall\varphi \in \Phi,\ T\,(U\varphi) = T\varphi \tag{A3.17}$$

を満たすパターン変換Uは大抵の場合，多数存在する［4］，［6］，［10］．例えば，2.1.2項の②の任意の正実数$a\,(= U)$がそうであり，文献［10］の相似変換（原点の回りの拡大・縮小変換）などのユニタリ座標変換Uもそうである．

不変式（A3.17）に定理A3.2を適用すれば，次の定理A3.3が成り立つことがわかる．

ユニタリ座標変換Uで結ばれたある２つのパターン$\varphi, \psi = U\varphi$，ユニタリ座標変換関係で結ばれたある２つのパターンφ, ψは，同一に知覚されるということを保証している定理である．

［定理A3.3］（類似度関数SMの$U-$不変定理）］

モデル構成作用素Tの$U-$不変式（A3.17）が成立していれば，

$$\forall\varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM\,(U\varphi, \omega_j) = SM\,(\varphi, \omega_j). \tag{A3.18}$$

□

A3.4　性質④の効用

もし，性質④が成り立たないとすると，Φ内のあらゆるパターンφが前景，背景もないパターンの表現である零元０に写像される．それで，多段階パターンモデル変換に基づく認識の働きによって，式（A1.9）の不動点パターンモデル$\varphi[t]$として零点しか得られないことになり，都合が悪い．

付録４．類似度関数 SM の構成における任意性

本付録４では，2.2のaxiom（正規直交性・規格化性・$T-$ 不変性）を満たす式（15）の類似度関数 SM の構造が極めて大きい多様性を秘めているかを明らかにしている２定理A4.1，A4.2を介し，

（一）パターン集合 Φ に最適な類似度関数 SM を見つける数理的な手法は考えられないこと

（二）従って，各個人の主観に従い構成された類似度関数を分析・総合して，パターン集合 Φ に適切と思われる類似度関数 SM を選定しなければならないこと

が説明される．

A4.1　正規直交性・規格化性・$T-$ 不変性（2.2のaxiom）を満たす類似度関数 SM の２構成

パターンモデル間の非一致条件

$$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}, \| T\omega_i - T\omega_j \| > 0 \tag{A4.1}$$

を要請する．

零条件

$$g_j(\varphi) = 0 \quad \text{if} \quad \| T\varphi - T\omega_j \| = 0 \tag{A4.2}$$

と，$T-$ 不変性

$$\forall \varphi \in \Phi, g_j(T\varphi) = g_j(\varphi) \tag{A4.3}$$

とを満たし，$T\varphi$ が $T\omega_j$ と異なれば異なるほど，大きいと解釈可能な非負の値をとる相違度関数

$$g_j : \Phi \to R^+ \text{（非負実数全体の集合）} \tag{A4.4}$$

の，$j \in J$ にわたる系を導入する．例えば，２つのパターンモデル $T\varphi$, $T\omega_j$ 間のノルム距離

$$g_j(\varphi) = \| T\varphi - T\omega_j \|, j \in J \tag{A4.5$_1$}$$

とか，

$$g_j(\varphi) = \frac{\| T\varphi - T\omega_j \|}{1 + \| T\varphi - T\omega_j \|}, j \in J \tag{A4.5$_2$}$$

とか

$$g_j(\varphi) = \sqrt{1 - \exp(-a_j \cdot \| T\varphi - T\omega_j \|^2)}, a_j > 0, j \in J \tag{A4.5$_3$}$$

などがそうである．式（A4.5）$_3$ の $g_j(\varphi)$ は，

$$dis(\varphi, \eta) = \sqrt{1 - \exp(-a \cdot \| \varphi - \eta \|^2)}, a > 0$$

が，ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ が有限次元のユークリッド空間で３角不等式を満たす距離関数であること[36]を利用したものである．そして，類似の測度関数

$$f_j : \Phi \to R^+ \tag{A4.6}$$

を，

$$f_j(\varphi) = \min_{k \in J-\{j\}} g_k(\varphi) \tag{A4.7}$$

と定義する．

このとき，文献［28］の付録Cの定理C1である次の定理A4.1が成立し，式（A4.6）の類似の測度関数 f_j の，$j \in J$ にわたる系を使って，2.2のaxiom（正規直交性・規格化性・$T-$ 不変性）を満たす式（15）の類似度関数 SM が構成されることがわかる．類似度関数 SM が極めて任意性をもって構成されることがこの定理A4.1から理解できよう．

パターンモデル$T\varphi$が第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$以外の，任意のカテゴリ$\mathfrak{C}_k\ (k\in J-\{j\})$の代表パターンモデル$T\omega_k$から相違していればいるほど，$T\varphi$が$T\omega_j$と類似しているという様に，$T\varphi$と$T\omega_j$との類似性を直接的ではなく，$T\omega_j$を用いないで間接的に定義し，その結果，構成された式（A4.8）の類似度$SM(\varphi, \omega_j)$が得られていることに注意しておく．

［定理A4.1］（他のカテゴリから眺めた類似の測度関数f_iの系による類似度関数SMの構成定理）

非一致条件式（A4.1）の下で，$P(\mathfrak{C}_j)$を第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の出現確率として，

$$SM(\varphi, \omega_j)=$$

$$\begin{cases} \dfrac{f_j(\varphi)}{\sum\limits_{k\in J} f_k(\varphi)} & \cdots \sum\limits_{i\in J} f_i(\varphi)>0 \text{ の場合} & \text{(A4.8)} \\[2ex] p(\mathfrak{C}_j) & \cdots \sum\limits_{i\in J} f_i(\varphi)=0 \text{ の場合} & \text{(A4.9)} \end{cases}$$

と定義される式（15）の関数SMは2.2のaxiomを満たす． □

更に，文献［27］の付録D，例D1（p.230）を一般化すれば，次の定理A4.2が成り立ち，SMの構成において，多様性が更に広がることがわかる．関数$f(x)$の選び方が3条件（A4.12)～(A4.14）だけで規制されるだけで，例えば，

$$f(x)=\log_e(1+x) \tag{A4.10}$$

と選ぶことが出来ることからわかるように，大きな任意性があることに注意する．単位区間$[0, 1]\equiv\{x\,|\,0\le x\le 1\}$を高々可算個に分割し，関数$f(x)$をその各分割区間で区分的に構成することにすれば，この種の構成上の任意性が理解できよう．また，3条件式（A4.12),（A4.13),（A4.17）を満たす非負実数値関数$f(x)$として，

$$f(x)=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right) \tag{A4.11}$$

がある．

［定理A4.2］（類似度関数SMの再帰構成定理）

変数xの非負実数値関数$f(x)$が，3条件

$$f(x)\ge 0 \quad \text{for} \quad 0\le x\le 1 \text{（非負性）} \tag{A4.12}$$

$$f(0)=0 \text{（0－不動点性）} \tag{A4.13}$$

$$f(1)>0 \text{（正値性）} \tag{A4.14}$$

を満たすとしよう．

このとき，2.2のaxiomを満たす類似度関数

$$SM':\Phi\times\Omega\to\{s\,|\,0\le s\le 1\} \tag{A4.15}$$

を導入し，

$$SM(\varphi, \omega_j)=$$

$$\begin{cases} \dfrac{f_j(SM'(\varphi, \omega_j))}{\sum\limits_{k\in J} f_k(SM'(\varphi, \omega_k))} & \cdots \sum\limits_{i\in J} f_i(SM'(\varphi, \omega_i))>0 \text{ の場合} \\[2ex] p(\mathfrak{C}_j) & \cdots \sum\limits_{i\in J} f_i(SM'(\varphi, \omega_i))=0 \text{ の場合} \end{cases} \tag{A4.16}$$

と定義される式（15）の関数SMは2.2のaxiomを満たす．

［定理A4.2の系１］

条件式（A4.14）の特別な場合として，

$f(1)=1$（1－不動点性）　（A4.17）

がある．□

A4.2　標準的な類似度関数（従って最適な）類似度関数 SM は存在しないこと

パターン認識の働きを設定するに当たって最も基本的に重要視し考えなければならないことは，処理の対象とする問題のパターン φ の集まり Φ に適切なパターン分類の規準をどう設定するかである．パターン分類の規準は2.2のaxiomを満たす式（15）の類似度関数 SM を決めれば確定する［7］というのが，本論文の主張である．

文献［7］の1.2節（p.38）では，次のことが指摘されており，本論文はこの考えに従って，書かれている：2.2のaxiomを満たす類似度関数 SM の構造をどのように設定するか，つまり，分類の規準（criterion）を決める基準（standard）は別にないのであって，処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ に応じ，個々の場合に目的など色々の事情を総合的に考慮して，良いと思われるものを選択するというより他はない．□

つまり，処理の対象とする問題のすべてのパターン φ の集まり Φ について標準的な類似度関数（従って最適な）類似度関数は存在しないと主張している．

その理由は，パターン間の類似性というものが結局は主観で決まるものだから，と本論文では考えている．文献［28］の定理3.1（p.201）では，

各個人の主観を反映した類似度関数 SM を構成できること　（A4.18）

が示されており，それ故に，任意の Φ について最適な類似度関数 SM を選ぶ方法はないと，予測できよう．

更に，2.2のaxiomを満たすとは限らない他の研究者の類似度関数については，その自由度が大きい故に，任意の Φ について最適な類似度関数を選ぶ方法はないといえるだろう．

2 定理A4.1，A4.2の意味する多様性を備えた類似度関数 SM について，そのパターン集合 Φ についての適合性を論じることは，事実上容易なことではない．しかしながら，,6．以降で構成された類似度関数 SM がパターン集合 Φ に適切であるどうかを検証する手法は，付録 5 で説明されているように辛うじて存在する．

2.2のaxiomを満たす式（15）の類似度関数 SM の構造が極めて大きい多様性を秘めているかを明らかにしている 2 定理A4.1，A4.2を考慮すれば，上述の（一），（二）を結論せざるを得ない．

付録５． SM の選定に関する適切性を検証する手法

本付録 5 では，類似度関数 SM の選定に関する適切さを検証する方法について解説する．この種の検証法として，文献［27］では 3 つの方法が研究されているが，この内，紙面の都合上 2 番目の方法を少し，修正して解説する．

処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ から任意に抜き取られた n 個のパターンからなる有限部分集合としてのパターン集合 Φ_0 を考えよう．

$\Phi_0(j)$：第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属しているパターン $\varphi\in\Phi_0$ の集合　（A5.1）

とすると，Φ_0の分割性質

$$\Phi_0=\cup_{j\in J}\Phi_0(j)$$
$$\Phi_0(j)\cap\Phi_0(i)=\phi\ (j\neq i) \tag{A5.2}$$

が成立している．2.2のaxiomを満たしている式（15）の，現在構成されている類似度関数SMを用いて，

$$s_j \equiv \frac{\frac{1}{n}\cdot\sum_{\varphi\in\Phi_0(j)}SM(\varphi,\omega_j)}{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i\in J}\sum_{\varphi\in\Phi_0(i)}SM(\varphi,\omega_j)} \tag{A5.3}$$

のように定義される各s_jに注目する．確率的性質

$$[\forall j\in J,\ 0\leq s_j\leq 1]\wedge\sum_{j\in J}s_j=1 \tag{A5.4}$$

を満たすベクトル

$$\vec{s}=\{s_j\mid j\in J\} \tag{A5.5}$$

を求められている．ここで，m_jを

$$m_j=n\cdot s_j \tag{A5.6}$$

と，式（A5.3）のs_jを用いて定義する．

類似度関数SMを用いてパターン認識の働きを実現する理想的な認識システムにおいては，m_j個のパターンは第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属すると，認識されると考えよう．

しかしながら，この類似度関数SMを用いてパターン認識の働きを実現する現実の認識システムではそうではないだろう．そこで，この現実の認識システムによって，n個のパターンの内（m_j個のパターンの内でないことに注意），n_j個が第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属すると，実際に認識されたとしよう．ここに，

$$\sum_{j\in J}n_j=n\wedge\sum_{j\in J}m_j=n \tag{A5.7}$$

が成立している．

一般に，$F(x)$を分布関数とする確率変数Xと，$F_i(x_i)$を分布関数とする確率変数X_iの列

$$X_1,X_2,\cdots,X_n \tag{A5.8}$$

とがあって，任意の2実数a,bについて，

$$\int_a^b dF_j(x_j)\rightarrow\int_a^b dF(x) \tag{A5.9}$$

が成立するとき，つまり，式（A5.8）の確率変数列の分布が確率変数Xの分布に限りなく近づくとき，式（A5.8）の確率変数列は確率変数Xに法則収束するという．ここで，

$$\chi_0^2\equiv\sum_{j=1}^{|J|}\frac{(n_j-m_j)^2}{m_j} \tag{A5.10}$$

は，自由度$|J|-1$のχ^2分布に法則収束することに注意する．

そこで，仮説

$$H_0: s_1,s_2,\cdots,s_{|J|}$$

（理論上のカテゴリ分布＜ $m_1, m_2, \cdots, m_{|J|}$ ＞と，実際のパターン認識の働きで実際に得られたカテゴリ分布＜ $n_1, n_2, \cdots, n_{|J|}$ ＞とが一致している）

（A5.11）

を用意する．仮説 H_0 の下で $\chi_0^2 > t$ が成立する条件付き確率 $prob\{\chi_0^2 > t \mid H_0\}$ に関し，

$$\alpha = prob\{\chi_0^2 > t \mid H_0\} \quad \text{(A5.12)}$$

を満たす実数 t を求めて，危険率 α で，

（ｉ）$\chi_0^2 > t$ ならば，仮説 H_0 を棄却する

（ii）$\chi_0^2 \leq t$ ならば，仮説 H_0 を棄却しない

（A5.13）

という検定を行う．

式（A5.13）で仮説 H_0 を棄却しないと結論されたならば，危険率 α で，

実際のパターン認識の働きで実際に使われた SM がパターンの有限部分集合 Φ_0 について適切に選定されている　（A5.14）

と検定できる．

（著者　鈴木昇一，論文題目　正規直交性を満たす類似度関数 SM に積分核が存在するか？，文教大学情報学部情報研究no.33　投稿論文，投稿年月日　2005年3月22日（火））