線形方程式の制約条件下での，残差法によるパターンモデル

鈴木　昇一

The Pattern Model by the Residual Method under the Constraint of a Linear Equation

Shoichi Suzuki

あ　ら　ま　し

S. Suzukiにより提案されている認識システムRECOGNITRONは任意の認識の働きをシミュレートできるという意味で万能である．RECOGNITRONは入力パターンφに対し，そのパターンモデル$T\varphi$を確保し，φの代りに使う．写像Tはモデル構成作用素と呼ばれる．処理の対象とするパターンφの集合Φも導入される．表象付き連想形多段階認識を行うRECOGNITRONは入力パターンφに対し，連想形認識方程式を多段階帰納推理を行いながら解く形で，多段階認識過程を生成し，φの帰属するカテゴリ並びに，φから想起される表象（そのカテゴリの持つ諸性質を典型的に代表する代表パターンのモデル）を求める．

本論文では，観測後のパターン$\varphi \in \Phi$を決定する線形観測方程式$B\eta = \varphi$の解$\eta = \Phi$を1次独立な系$\{\psi_k\}_{k \in L}$の1次結合$\eta = \sum_{k \in L} c_k \cdot \psi_k$の形で残差法を適用し求める．得られた1次結合の各係数$c_k\,(k \in L)$を使って，axiom 1の（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）の3後半，並びに，（ⅳ）を満たすパターンモデル$T\varphi = \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell) \cdot B\psi_\ell$を決定する．ここに，$\mu(\varphi, \ell) \in Z$（複素数全体の集合）はパターン$\varphi \in \Phi$から抽出される第$\ell \in L$番目の特徴量である．その後，パターン集合$\Phi$と残差法によるモデル構成作用素$T$とからなる順序対$[\Phi, T]$を確保する．この対$[\Phi, T]$はaxiom 1を満たす．

その後，(1) 離散コサイン変換　(2) 標本化定理　(3) 光学的流れ　(4) 作用素についてのフーリェ変換　(5) 作用素についてのラプラス変換などを使い，各々の場合に作用素B, 1次独立な系$\{\psi_k\}_{k \in L}$を決定している．

本論文で得られたパターンモデル$T\varphi = \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell) \cdot B\psi_\ell$は，パターン情報処理分野で広範囲に有効に応用できるものである．

キーワード

（1）認識システムRECOGNITRON　（2）モデル構成作用素　（3）残差法
（4）線形観測方程式　（5）多段階帰納推理　（6）表象付き連想形認識

（7）離散コサイン変換　（8）標本化定理　（9）光学的流れ
（10）作用素フーリエ変換　（11）作用素ラプラス変換

Abstract

The recognition system RECOGNITRON proposed by S. Suzuki is universal in the meaning that the work of arbitrary recognition can be carried out. RECOGNITRON secures a corresponding model $T\varphi$ for an input pattern φ. RECOGNITRON uses the pattern model $T\varphi$ as a substitute for φ. Mapping T is called a model-construction operator.

Pattern set Φ $(\ni \varphi)$ made into the object of processing is introduced.

RECOGNITRON which performs an associative multi-stage recognition with representation solves an associated type recognition equation having $T\varphi$ as an initial condition by making an effective use of multi-stage inductive inference, and as its result a multi-stage recognition process is generated.

RECOGNITRON worked too hard, with the result that RECOGNITRON could ask for the category to which an input pattern φ belongs, and a representation pattern (which represents typically many character which the category has) recalled from input pattern φ

With this paper, solving a linear observation equation $B\eta = \varphi$ which determines a pattern $\varphi \in \Phi$ after observation with the help of the residual method, $\eta \in \Phi$ can be expressed in a linear combination form $\eta = \sum_{k \in L} c_k \cdot \psi_k$ where $\{\psi_k\}_{k \in L}$ is a linearly independent system.

We determine a pattern-model $T\varphi = \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell) \cdot B\psi_\ell$ which satisfies the 3 second halves of (i), (ii), (iii) of axiom 1 suggested by S. Suzuki and (iv) of axiom 1 by utilizing the obtained each coefficient c_k $(k \in L)$. A $\mu(\varphi, \ell) \in Z$ (set of the whole complex number) is the ℓ $(\in L)$-th amount of the feature extracted from the input pattern $\varphi \in \Phi$.

An order pair $[\Phi, T]$ of pattern set Φ and model-construction operator T can be secured by the residual method. This pair $[\Phi, T]$ fills axiom 1.

Then, (1) discrete cosine transformation (2) sampling theorems (3) optic flow (4) Operator–theoretical Fourier transformation (5) Operator-theoretical Laplace transformation etc. are used and, in each case, operator B and the linearly independent system $\{\psi_k\}_{k \in L}$ are determined.

Pattern model $T\varphi = \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell) \cdot B\psi_\ell$ obtained in this paper is effectively applicable broadly in a pattern information processing field.

Key Words: (1) recognition system RECOGNITRON (2) model-construction operator (3) residual method (4) linear observation equation (5) multi-stage induction reasoning (6) associative recognition with representation (7) discrete cosine transformation (8) sampling theorem (9) optic flow (10) operator–theoretical Fourier transformation (11) operator–theoretical Laplace transformation

1. まえがき

本章では，本研究の位置付け，意義，新規性，有効性，信頼性がS. Suzukiが構築したパターン認識の数学的理論（SS理論［B3］，［B4］）の観点から説明される．

1.1 パターン認識システムとは？

似た者同士を集め，形成された各々の集団にそれぞれ，区別し得る名前（カテゴリ名；category）を与えることを分類（classification）という．分類後，個々のパターンはカテゴリ名で呼ばれることになる．

分類の対象となる非言語の情報表現をパターン（pattern）といい，パターン φ を分類する機能を備えたシステムをパターン認識システム（recognizer）という［B1］．

1.2 パターン連想型認識システムRECOGNITRON

S. Suzukiのパターン知能情報論によれば，パターン認識システム（多段階連想型認識システム）

$$\text{RECOGNITRON} = < \Phi_B, T, SM, BSC > \tag{1.1}$$

が構成されている． 4 要素 Φ_B, T, SM, BSC が与えられれば，このRECOGNITRONは 4 要素 Φ_B, T, SM, BSC のみから定まることを式（1.1）は記号化して表している．

パターンと判明している φ の集合（基本領域；basic domain）$\Phi_B\,(\subset \Phi)$ が与えられたとしよう．処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ とモデル構成作用素（model-construction operator）T の順序対 $[\Phi, T]$ はaxiom 1を満たさなければならない．集合 Φ は，

$$\Phi = R^{++} \cdot (\Phi_B \cup \cdot \Phi_B) \tag{1.2}$$

と表される．$T\varphi \in \Phi$ は $\varphi \in \Phi$ の代りとなるパターン（パターンモデル）であり，RECOGNITRONはモデル $T\varphi \in \Phi$ を見たり聞いたりしたならば，原パターン $\varphi \in \Phi$ と同じように見えたり聞こえたりするようなものである（$T\varphi \in \Phi$ と $\varphi \in \Phi$ との間の同一知覚原理）．モデル構成作用素 T は Φ の元 φ を Φ の唯 1 つの元 $T\varphi$ に対応させる写像であり，

$$T : \Phi \to \Phi \tag{1.3}$$

と表される．

公理axiom2, 3を各々，満たさなければならない類似度関数 SM，大分類関数 BSC が導入されている．SM は，Φ の元 φ が，代表パターン ω_j（第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の持つ諸性質を典型的に代表しているパターン）の集合（ 1 次独立な系）

$$\Omega = \{\omega_j \mid j \in J\} \tag{1.4}$$

内の任意の代表パターン ω_j と似ているか，ω_j からどの程度異なっているかを 1 より大きくない非負実数の形で計量する働きを備えており，また，BSC は，パターンが帰属している複数のカテゴリの候補を出力する働きを備えている．

公理axiom 4を満たさなければならないカテゴリ選択関数 CSF は類似度関数 SM，大分類関数 BSC が与えれば，決まる．CSF は，パターンが帰属している複数のカテゴリの候補を更に絞り込む働きを備えている．

候補カテゴリの番号リスト $\mu \in 2^J$ を助変数に持つ構造受精作用素

$$A\,(\mu) : \Phi \to \Phi, \quad \text{where} \quad \mu \in 2^J \tag{1.5}$$

も用いられる．ここに，2^J はすべてのカテゴリの番号を集めて得られる集合 J の，すべての部分集合

から成る集合である．式（1.4）の代表パターンの集合 $\Omega=\{\omega_j \mid j\in J\}$ を式（1.3）のモデル構成作用素 T で変換して得られる代表パターンモデルの集合

$$T\cdot\Omega=\{T\omega_j \mid j\in J\} \tag{1.6}$$

と，類似度関数 SM，大分類関数 BSC さえ与えられれば，写像 $A\,(\mu)$ も決まる．

式（1.6）の代表パターンモデルの集合 $T\cdot\Omega$ は 1 次独立な系であるように，式（1.3）のモデル構成作用素 T が選ばれていなければならない．

本論文の目的は，式（1.3）の 1 つのモデル構成作用素 T を残差法（residual method）で決定することであり，更に，その適用諸例を与えることである．

1.3　本論文でのパターンモデル $T\varphi$ の概要

本論文では，線形方程式 $B\eta=\varphi$ で表される制約条件（constraint）を課したパターンモデル $T\varphi$ が残差法を適用し構成される．

内積 (φ,η)，ノルム $\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi,\varphi)}$ を採用する可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ を考える．パターン φ は $\mathfrak{H}$ の元であるが，逆には $\mathfrak{H}$ の元はパターンであるとは限らない．$\mathfrak{H}$ が備えている代数構造，幾何学構造，解析的構造の内 1 部を採用するに過ぎない．

パターン $\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$ が観測されたとき，線形方程式

$$B\eta=\varphi \tag{1.7}$$

を解いて，線形作用素 B により変形される前のパターン（観測をもたらす原因のパターン）$\eta\in\Phi\subset\mathfrak{H}$ を求めることを考えよう．

可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の元 ϕ_k からなる系 $\{\phi_k\}_{k\in L}$ は 1 次独立であるとしよう． 各 $\phi_\ell\,(\ell\in L)$ は，処理の対象とするパターン $\varphi\in\Phi$ を 1 次結合係数 $C_\ell\,(\ell\in L)$ を持つ 1 次展開 $\sum_{\ell\in} c_\ell\cdot\phi_\ell$ として再表現するとき必要とされ，もうこれ以上分解できない極小の形状であるという意味でパターン形状素（pattern primitive）と呼ばれる．

パターン φ に対応しその代りとなるパターンモデル $T\varphi$ として，各 $\mu\,(\varphi,\ell)\in Z$（複素数全体の集合）を 1 次結合係数にもつ 1 次展開

$$T\varphi=\sum_{\ell\in L} u\,(\varphi,\ell)\cdot B\phi_\ell \tag{1.8}$$

を採用する式（1.3）の写像（モデル構成作用素）T は，パターン $\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$ から抽出される第 $\ell\in L$ 番目の特徴量 $u\,(\varphi,\ell)\in Z$ を決めると，定まる．

モデル $T\varphi$ 内の特徴量 $u\,(\varphi,\ell)\in Z$ の決め方を説明すると，次のようになる．

残差

$$e=\varphi-B\eta \tag{1.9}$$

を最小にするパターン $\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$ を 1 次展開

$$\eta=\sum_{k\in L} c_k\cdot\phi_k \tag{1.10}$$

の形で求め，各 1 次展開係数 $c_k\,(k\in L)$ はパターン $\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$ から決まるという意味で，各係数 c_k を $c_k\,(\varphi)$ と書こう．このとき，特徴量 $u\,(\varphi,\ell)\in Z$ は次のように決められる：

$u\,(\varphi,\ell)=$

$$\begin{cases} 0 \cdots \sup_{k \in L} | c_k(\varphi) | = 0 \text{ のとき} \\ \dfrac{c_k(\varphi)}{\sup_{k \in L} | c_k(\varphi) |} \cdots \sup_{k \in L} | c_k(\varphi) | > 0 \text{ のとき}. \end{cases} \tag{1.11}$$

□

1.4　本研究の新規性・有効性・信頼性

本研究が新規性・有効性・信頼性を備えているかどうかを説明しよう．

パターンηがBという作用を受けて，パターンφが観測された場合，観測後のパターンφから原パターンηを決定することを，パターン復元（pattern restoration）といって，特に，パターンが静止画像である場合が十分なほど研究されており，有用な画像復元技術がこれまで多数，確保されている．

線形方程式（1.7）の解ηを反映し，SS 理論［B3]，［B4］のaxiom 1を満たすようなたパターンモデル$T\varphi$を構成した研究論文は存在しない（新規性）．

本研究では，原パターンηの持つ情報を反映した形で，φのモデル$T\varphi$の形で復元する．モデル$T\varphi$は観測後のパターンφに存在している雑音，変形が除去されている可能性が大であるパターンといえよう（有効性）．

もともと，刺激としてのパターンから今１つの記憶しているパターンを連想する機能は，，刺激としてのパターン内にある雑音，変形が除去されている形でのパターン復元機能である．このモデル$T\varphi$を使うパターン認識システムRECOGNITRONでは，入力パターンφが帰属するであろ候補カテゴリに関し多段階帰納推理を行い，表象付き連想形認識の働きで，或るカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターンω_jのモデル$T\omega_j$として原パターンηを復元することになる．認識システムRECOGNITRONにより正しく復元された場合，カテゴリ$\mathfrak{C}_j$は原パターンηが帰属するカテゴリとなっている．このように正しく復元された場合，観測にひっかかったパターンφ内に存在している雑音，変形が完全に除去されているといえよう．

SS 公理系（４axiom 1～4）を背景としたパターン復元機能を提案しており，本研究成果を取り入れこれまでの計算機シミュレーション［B35]，［B38]，［B39］をやり直すことができる（信頼性）．

2.　多段階連想形認識システムRECOGNITRON$=<\Phi_B, T, SM, BSC>$の動作概要

本章では，ある連想型認識方程式を解いている過程は，S. Suzukiが提唱した多段階連想形認識システムRECOGNITRON$=<\Phi_B, T, SM, BSC>$が入力パターン$\varphi \in \Phi$を認識する過程であることなどが説明される．

2.1　パターンφの標準形$T\varphi$

情報の表現法として，大きく分けて，パターン（pattern），記号（symbol）の２種類がある．

意味と形式（表現）とが分離していない感性的表現としてのパターンは，意味と形式とが分離している言語的表現としての記号と異なり，変形を受けているのが通常である．非言語的表現としてのパターンは，次の４種類（1)～(4）の如き変形を受けている：

(1) その構造の1部分が他のパターンに隠されて欠落している．

(2) 変質して構造の1部が崩れている．

(3) 不規則な雑音が加わり変質している．

(4) 規則的，或いは，不規則な座標変換がなされている．□

このような変形を受ける以前の状態に戻すことをパターン正規化（normalization）という．パターンφに対し正規化で得られたパターンをパターンモデル（pattern-model）といい，$T\varphi$で表す．モデル構成作用素と呼ばれる写像Tが少なくとも満たさなければならない4性質（イ），（ロ），（ハ），（ニ）は，SS理論によれば，次の通りである：

（イ）（零パターンの不動点性）$\varphi = 0$のとき$T\varphi = 0$.

（ロ）（モデルの，正定数不変性）aを任意の正実定数として，任意のパターンφに対し，
$\eta = a \cdot \varphi$について，$T\eta = \varphi$.

（ハ）（モデル化の完結性）任意のパターンφに対し，$\eta = T\varphi$について，$T\eta = \eta$.

（ニ）（写像Tの非零性）$T\varphi \neq 0$を満たすパターンφが処理の対象とする問題のパターンの集合Φ内に存在する．□

4性質（イ），（ロ），（ハ），（ニ）の持つ効果などを説明しておこう：

性質（イ）は，背景すら存在しない無のパターン$\varphi = 0$のモデル$T\varphi$はやはり無であることを要請している．この性質（イ）により，パターンφに多少の雑音が加わっていても作用素Tにより除去出来ることになる．

性質（ロ）は，一様にその振幅が伸縮されたパターン$\eta = a \cdot \varphi$が伸縮されていないパターンφと同一のモデル$T\varphi$を持つことを保証する．知覚された刺激の一様な強さに依存しないパターン認識の働きが確保されることになる．

性質（ハ）は，モデル$T\varphi$のモデル$T(T\varphi)$は元のモデル$T\varphi$であること，つまり，1度モデル$T\varphi$を求めると，もうそれ以上モデル化を行う必要はないというモデル化

$$\varphi \to T\varphi \tag{2.1}$$

の完結性を要請している．φが知覚されると，モデル$T\varphi$が原パターンφの代りに認識システムRECOGNITRON内に知覚的に確保されるという想定からは，$T\varphi$，φの知覚物は各々，$T(T\varphi)$, $T\varphi$であるから，$T\varphi$とφとの間に同一知覚原理

$$T(T\varphi) = T\varphi \tag{2.2}$$

が成立することになる．

性質（ニ）は，パターンの集合Φ内のパターンφがすべて，背景すら存在しないパターン$\varphi = 0$に変換されることを阻止する．□

パターン認識の働きは，変形を受けているであろうパターンが帰属する正しいカテゴリを変形に依存しないで，決定することである．このためには，先ず，変形を受けているパターンφが，変形を受けていないパターンηと，

$$T\varphi = T\eta \tag{2.3}$$

というように，同一のパターンモデルを持つことが必要とされる．このような性質を備えたパターンモデル$T\varphi$はパターンφの標準形（canonical form）と称されてよいだろう．

2.2　多段階パターン変換過程を採用した多段階認識法が，最大類似度を決定し，単段階で認識する方法（最大類似度法）に対し持つ優位性

2.2.1　パターンモデルは原パターンと同じ類似度を与えること（同一知覚原理）

パターン集合Φの任意の元φに対し，$T\varphi$を見たり聞いたりしたならば，パターンφと同じに見えたり聞こえたりするパターンモデル$T\varphi \in \Phi$を確保したあと（同一知覚原理），axiom 2を満たすという意味で類似度関数（similarity-measure function）と呼ばれる関数

$$SM : \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \le s \le 1\} \tag{2.4}$$

を使い，全カテゴリ集合

$$\mathfrak{C}(J) \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid j \in J\} \tag{2.5}$$

と１対１の対応関係にある代表パターン集合

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} \tag{2.6}$$

の中から歪み測度（distortion measure）

$$dtm\,(T\varphi, \omega) \equiv 1 - SM\,(T\varphi, \omega) \tag{2.7}$$

を最小にする$\omega \in \Omega\,(\subset \Phi)$のモデル$T\omega \in \Phi$を$\varphi \in \Phi$に対応させるのが自然である．$SM\,(T\varphi, \omega)$はモデル$T\varphi \in \Phi$が代表パターン$\omega$と似ている程度を表す１より大きくない非負実数である．

類似度関数SMがモデル構成作用素と呼ばれる写像Tに不変であること，つまり，

$$\forall\varphi \in \Phi,\ \forall\omega \in \Omega,\ SM\,(T\varphi, \omega) = SM\,(\varphi, \omega) \tag{2.8}$$

が成り立っている様に２つの写像T, SMが構成されている（SS理論のaxiom 2の（iii））ことが，$T\varphi \in \Phi$を見たり聞いたりしたならば$\varphi \in \Phi$と同じに見えたり聞こえたりするという同一知覚原理を保証できる源泉を与える．

2.2.2　最大類似度（の選定に伴うパターン認識）法

パターン$\varphi \in \Phi$を分類し，認識するためには，式（2.7）の歪み測度$dtm\,(T\varphi, \omega)$を最小にするような，或いは同等であるが，類似度$SM\,(T\varphi, \omega)$を最大にするような代表パターン

$$\Omega \ni \omega \tag{2.9}$$

$$= \arg\min_{\omega \in \Omega} dtm\,(T\varphi, \omega) \tag{2.10}$$

$$= \arg\max_{\omega \in \Omega} SM\,(T\varphi, \omega) \tag{2.11}$$

を決定すればよい．このとき，

刺激としての入力パターン$\varphi \in \Phi$から，$\omega \in \Omega$をその典型的な表現事例とするカテゴリの，記憶しておいた代表パターン$\omega \in \Omega$が想起される　(2.12)

という．

３式（2.9），（2.10），（2.11）が成立していることに注目した“最大類似法というパターン認識の働き”を説明しよう．

入力パターン$\varphi \in \Phi$についての類似度分布

$$SM\,(T\varphi, \omega_i),\ i \in J \tag{2.13}$$

内の最大値$SM\,(T\varphi, \omega_k)$を選び，このようなカテゴリ番号$k \in J$の内最も若いカテゴリ番号

$$j = \arg\max_{i \in J} SM\,(T\varphi, \omega_i) \in J \tag{2.14}$$

を見つけ，

入力パターン$\varphi \in \Phi$を第$j \in J$番目のカテゴリ（category；類概念）$\mathfrak{C}_j$に対応させる働き (2.15)

が最大類似度（の選定に伴うパターン認識）法である．このとき，

入力パターン$\varphi \in \Phi$は，$\omega_j \in \Omega$をその典型的な表現事例とする第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j \in \mathfrak{C}(J)$に認識される (2.16)

という．この対応を与える写像は，２式（2.10），（2.12）においては，

$$AT : \Phi \to \Omega \tag{2.17}$$

で表わされ，２式（2.11）（2.14），或いは，式（2.16）においては，

$$RG : \Phi \to \mathfrak{C}(J) \tag{2.18}$$

と表わされる．

式（2.14）の写像ATは連想システム（associator）とも呼ばれ，連想する側associatorにおいては処理の対象であったパターン$\varphi \in \Phi$は最終的に$T\omega_j$であるように見える．

式（2.18）の写像RGは認識システム（recognizer）とも呼ばれる．

SS 理論は，連想と認識とは，互いに補完しあえる機能であることを多段階変換を介し明らかにし，システムの中間的作業短期記憶状態を反映している順序対

＜パターン，このパターンが帰属するカテゴリの候補の番号のリスト＞ (2.19)

としてのカテゴリ帰属知識を多段階にわたり変換していく帰納推論構造を具備しているような，２式（2.17），（2.18）双方の機能を備えた連想形認識システム（associative recognition system）

$$\text{RECOGNITRON} = < \Phi_B, T, SM, BSC > \tag{2.20}$$

の構成原理を提供している．

2.2.3 最大類似度（の選定に伴うパターン認識）法を多段階にわたり改良としてゆくタイプとしての，RECOGNITRONの多段階パターン変換過程

入力パターンが帰属するであろうカテゴリを決定するという働きについては，この決定を１段解法（single-step method）ではなく，多段解法（multi-step method），或いは，逐次法（step by step method）で実行するのがよい．多段解法，逐次法では，前段階で得られている近似解を改良できるからである．即ち，1段解法で犯すかも知れない誤った決定内容を修正できるという利点を備えているからである．

上述の最大類似度法は，１段解法であり，単段階パターン変換

$$(\varphi \to)\, \psi_0 \equiv T\varphi \to \psi_1 \equiv T\omega_j \tag{2.21}$$

を行っていると考えることができる．このパターン変容

$$\text{“}T\varphi \to T\omega_j\text{”} \tag{2.22}$$

は突然変容である．，

“$T\varphi$”から“$T\omega_j$”への変容が唐突でなく漸次的にするためには，単段階パターン変容“$T\varphi \to T\omega_j$”を，以下の式（2.27）の如く，多段解法を採用し，多段階パターン変容

$$\text{“}T\varphi \to \cdots \to T\omega_j\text{”} \tag{2.23}$$

を成し遂げる認識の働きに設定し直す必要がある．設定し直されたこの認識の働きがSS 理論での，式（2.20）の多段階連想形認識システムRECOGNITRONである．

$\eta = T\omega_j$のとき，$SM(\eta, \omega_i) =$

$$\begin{cases} 1 \cdots i = j \text{ のとき} \\ 0 \cdots i \neq j \text{ のとき} \end{cases} \tag{2.24}$$

という正規直交性が成立しているように，類似度関数SMは構成されている（axiom 2の（ｉ），（iii））故，

$$\eta = T\omega_j \text{ のとき，} J \ni j = \arg\max_{k \in J} SM\,(T\varphi, \omega_k) \tag{2.25}$$

が成立し，$T\varphi$が$T\omega_j$に変換されたとき，最大類似度法でいう最大類似度$SM\,(T\varphi, \omega_j)$が得られていることに注意しておく．

それのみならず，

単段階（で，突然的に生じる）パターン変容から，多段階（にわたり次第に変換されていく）パターン変容への変革　　(2.26)

は，知の内部メカニズムを解明しようとする認知科学の観点，或いは，“少なくとも人間の知を下回らない知”の構成を目的とする人工知能学の観点からも，次の利点をもたらす：

最大類似度法では，認識の働きが誤ったとき，その原因を２つの写像T, SMの構造に求めることしか出来ない．誤認識をもたらす諸原因を詳細に検討でき，その結果，学習（learning）の働きが有効に働き，認識の誤謬から正認識へと修正できる調整の余地の機能を備えた認識の働きの１つを設定するには，入力パターン$\varphi \in \Phi$をある代表パターンω_jのモデル$T\omega_j$に帰納推理で多段階にわたって，変換する過程（多段階パターン変換過程）を採用すればよい．多段階パターン変換過程を介し，人間の脳内部での認識の働きの内部メカニズムを推察できる（認知科学への貢献）かも知れないし，正しい認識結果を得る様に途中の多段階変換を操作できる知能的アルゴリズムを開発できる（人工知能学への貢献）かも知れないからである．　□

2.3　多段階帰納推理の働きによる表象付き連想形認識の働き

連想型認識システムRECOGNITRONに内蔵されている多段階帰納推理の働きによる表象付き連想形認識の働きを説明しよう．ここで，表象とは，多段階帰納推理の各段階で得られるパターンモデルのことである．つまり，RECOGNITRONが，T, SM, BSCを使い，入力パターンをパターンモデル付き多段階にわたり変形しながら認識することが説明される．

2.3.1　カテゴリ帰属知識を変換する認識システムRECOGNITRON

帰納推理の働きで多段階パターン変換

$$\exists j \in J,\ (\varphi \to)\,\psi_0 \equiv T\varphi \to \psi_1 \to \psi_2 \to \cdots \to \psi_{t-1} \to \psi_t \equiv T\omega_j \tag{2.27}$$

を行い，

①$\varphi \in \Phi$に$T\omega_j$に対応させ（$\varphi \in \Phi$から$T\omega_j$を検索，或いは，連想し），

②入力パターン$\varphi \in \Phi$を第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に分類する（$\varphi \in \Phi$を認識する）

という連想型認識処理を遂行する認識システムRECOGNITRON［B3］，［B4］が，S. Suzukiにより考案されている．

今少し詳しく説明しよう．代数構造として加法演算が導入された集合$\mathfrak{H}$は内積，ノルムを各々，$(\varphi, \eta), \|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)}$とするある可分なヒルベルト空間としよう．２つの集合Φ, 2^Jは，

（一）$\Phi\,(\ni 0)\,(\subset \mathfrak{H})$：処理の対象とする問題のパターン$\varphi$の集合（パターン集合）　　(2.28)

（二）$2^J \equiv \{\gamma \mid \gamma \subseteq J\}$：（パターン$\varphi \in \Phi$の帰属するかも知れない）カテゴリ$\mathfrak{C}_j$の添え字（カテゴリ番号）を要素とするすべての部分集合γ（カテゴリ番号集合）の集合　　(2.29)

としよう．集合2^Jの元γは順序の付いた要素の並びとして，集合の今１つの表現であるリスト（list）として表されることがある．

処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ について，

φ が，有限個のカテゴリ $\mathfrak{C}_i\ (i \in \gamma)$ からなる集合

$$\mathfrak{C}(\gamma) \equiv \{\ \mathfrak{C}_i \mid i \in \gamma \in 2^J\} \tag{2.30}$$

の内の何れか 1 つのカテゴリに帰属している可能性があるというカテゴリ事前知識 (2.31)

を認識システムRECOGNITRONが持っている場合，このカテゴリ事前知識を

$$<\varphi, \gamma> \tag{2.32}$$

と表わす．順序対 $<\varphi, \gamma>$ はRECOGNITRONがパターン $\varphi \in \Phi$ についての持つカテゴリ帰属知識（categorical membership-knowledge）と呼ばれる．すべての $<\varphi, \gamma>$ の集まり

$$<\Phi, 2^J> (\ni <\varphi, \gamma>) \tag{2.33}$$

はカテゴリ帰属知識空間（space of categorical membership-knowledges）と呼ばれており，その代数的・幾何学的・解析的な諸性質は既に明らかにされている［B3]，［B4]．

$<\Phi, 2^J>$ 上の同値関係 $=_\Delta$ は

$$<\varphi, \gamma> =_\Delta (\eta, \mu) \Leftrightarrow \varphi = \eta \wedge \gamma = \mu \tag{2.34}$$

と定義される．$<\Phi, 2^J>$ 上の半順序（partial order）$\leq^*_\Delta$ の定義［B4］は少し込み入っているので，割愛される．

半順序 $\leq^*_\Delta$ に関するカテゴリ帰属知識の部分集合 $<\Psi, \Gamma> (\subseteq <\Phi, 2^j>)$ の上限（supremum），最小上界（least upper bound）は

$$\sqcup^*_\Delta <\Psi, \Gamma> \tag{2.35}$$

と表される．$<\Psi, \Gamma>$ が 2 つの元 $\{\varphi, \gamma>, <\eta, \mu> \in <\Phi, 2^j>$ からなる集合のときの

$$\sqcup^*_\Delta \{<\varphi, \gamma>, <\eta, \mu>\} \tag{2.36}$$

は，

$$<\varphi, \gamma> \sqcup^*_\Delta <\eta, \mu> \tag{2.37}$$

と表されることがある．

カテゴリ番号リスト $\mu \in 2^J$ を助変数に持つ構造受精作用素（structural-fertilization operator）と呼ばれる写像

$$A\ (\mu): \Phi \to \Phi \tag{2.38}$$

が，式（1.6）の，1 次独立な代表パターンモデル集合 $T \cdot \Omega$，並びに，

$$類似度関数 SM : \Phi \times \Omega \to \{s \mid \leq s \leq 1\} \tag{2.39}$$

$$大分類関数 BSC : \Phi \times J \to \{0, 1\} \tag{2.40}$$

を使って導入され，更に，この $A\ (\mu)$ の両側にaxiom 1を満たす式（1.3）のモデル構成作用素 T を配置した写像

$$TA\ (\mu)\ T : \Phi \to \Phi \tag{2.41}$$

を考えることができる．式（2.41）の写像 $TA\ (\mu)\ T$ は，その定義域，値域が Φ である写像であるが，類似度関数 SM，大分類関数 BSC を使って定義されるカテゴリ選択関数（category-selection function）

$$CSF : \Phi \times 2^J \to 2^J \tag{2.42}$$

を導入し，定義域，値域がパターン空間 Φ ではなく，カテゴリ帰属知識空間 $<\Phi, 2^J>$ である写像

$$TA\ (\mu)\ T <\varphi, \gamma> \in <\Phi, 2^J> \tag{2.43}$$

に拡張できる．それには，

$$TA\ (\mu)\ T <\varphi, \gamma> =_\Delta <TA\ (\mu \cap \gamma)\ T\varphi,\ CSF\ (\varphi, \mu \cap \gamma)> \in <\Phi, 2^J> \tag{2.44}$$

と定義すればよくて，この結果，式（2.41）の構造受精写像$TA\,(\mu)\,T:\Phi\to\Phi$ は，構造受精変換と呼ばれる写像

$$TA\,(\mu)\,T:<\Phi,\,2^J>\to<\Phi,\,2^J> \tag{2.45}$$

に拡張される．式（2.41）の写像$TA\,(\mu)\,T$ はパターンをパターンへ変換するが，拡張された式（2.45）の写像$TA\,(\mu)\,T$ はカテゴリ帰属知識をカテゴリ帰属知識へ変換することに留意しておく．

認識システムRECOGNITRONは，初期状態のカテゴリ帰属知識$<T\varphi,\gamma>\in<\Phi,\,2^J>$を多段階にわたり次第に変換して行き，通常の場合，最終的に$<T\omega_j,\,[j]>\in<\Phi,\,2^J>$に到達したとき，入力パターン$\varphi\in\Phi$ の連想形認識が終了する．この通常の場合，RECOGNITRONは，

入力パターン$\varphi\in\Phi$ は$T\omega_j$ に再生され，第$j\in J$番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属する　(2.46)

という連想形認識結果を出力するこになる．この場合は，

（１＃）（認識可能）入力パターン$\varphi\in\Phi$ の帰属するする候補カテゴリは唯１つの$\mathfrak{C}_j$ である事態をもたらしている．この認識可能事態の他に，次の2.3.2項に説明されているように，（２＃）認識不能事態，（３＃）認識不定事態の２つの事態が存在する．

2.3.2　連想形認識方程式の求解過程としてのパターン認識過程

処理の対象とする問題のパターン（入力パターン）$\varphi\in\Phi$ に関し，

$T\varphi$ belongs at least to one category $\mathfrak{C}_j$ of category-set $\mathfrak{C}(\gamma)\equiv\{\mathfrak{C}_j\mid j\in\gamma\}$　(2.47)

と，認識システムRECOGNITRONは知っているものとしよう．入力パターン$\varphi\in\Phi$ は同一知覚原理に従い，そのモデル

$$T\varphi\in\Phi=R^{++}\cdot(\Phi_B\cup T\cdot\Phi_B) \tag{2.48}$$

に置き換えられている（式（3.1）を参照）．それで，RECOGNITRONの持っているこのカテゴリ帰属知識は，

$$<T\varphi,\gamma>\in<\Phi,\,2^J> \tag{2.49}$$

と表される．この$<T\varphi,\gamma>$をRECOGNITRONが行う認識作業（不動点を求める認識計算）での，最初の記憶状態として採用しよう．

以上の準備の下で，実は，カテゴリ番号リスト$\mu\in 2^J$を帰納推理の働きで選んだ後，連想形認識方程式

$$<\psi,\lambda>=_\Delta<T\varphi,\gamma>\sqcup^*_\Delta TA\,(\mu)\,T\cdot<\psi,\lambda>\in<\Phi,\,2^J> \tag{2.50}$$

を解く過程の典型的なものが，多段階帰納推理認識システムRECOGNITRON［B3］,［B4］が原パターン$\varphi\in\Phi$ を認識する過程

$$<\psi_0,\lambda_0>,<\psi_2,\lambda_2>,\,\cdots,\,<\psi_{t-1},\lambda_{t-1}>,<\psi_t,\lambda_t> \tag{2.51}$$

where

$$<\psi_0,\lambda_0>=_\Delta<T\varphi,\gamma>\in<\Phi,\,2^J>\ \text{(initial condition)} \tag{2.52}$$

$$TA\,(\mu)<\psi_{s-1},\lambda_{s-1}>=_\Delta<\psi_s,\lambda_s>,\ s=1,\,2,\,\cdots,\,t-1,\,t\ \text{(recursive process)} \tag{2.53}$$

である．終了条件（terminal condition）は，半順序$\leq^*_\Delta$に関する最小不動点（least fixed point）$<\psi_t,\lambda_t>$を解に持つ不動点方程式（fixed-point equation）

$$TA\,(\mu)\,T<\psi_t,\lambda_t>=_\Delta<\psi_t,\lambda_t> \tag{2.54}$$

の成立である．このとき，$<\varphi,\gamma>$のエネルギー（SS ポテンシャル；SS -potential）

$$E\,(\varphi,\gamma):\Phi\times 2^J\to R^+\ \text{（非負実数全体の集合）} \tag{2.55}$$

を定義すれば，類似度関数SM に関する直交条件［B4］の下で，エネルギー不等式

$$E\,(\psi_{s-1},\,\lambda_{s-1}) \geq E\,(\psi_s,\,\lambda_s),\ s = 1,\,2,\,\cdots,\,t-1,\,t \tag{2.56}$$

が成立する．類似度関数SMに関するミックスチュア条件［B4］の下で，

$$\exists j \in J,\ < \psi_t,\ \lambda_t > =_{\Delta} < T\omega_j,\ [j] > \tag{2.57}$$

が成立し（認識可能事態），このとき，RECOGNITRONにより，入力パターン$\varphi \in \Phi$ は

（１％）$T\omega_j$ として再生され（パターン連想），

（２％）第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$ に分類・認識される（パターン認識）

ということになる．

尚，直交条件が成立していない類似度関数SMを採用しているRECOGNITRON$=< \Phi_B,\,T,\,SM,\,BSC >$においては，入力パターン$\varphi \in \Phi$ の多段階連想形認識過程が有限の段階で終了するとは限らない．また，ミックスチュア条件が成立していない類似度関数SMを採用している$=< \Phi_B,\,T,\,SM,\,BSC >$においては，入力パターン$\varphi \in \Phi$ の多段階連想形認識過程が有限の段階で終了した場合でも，

（２＃）（認識不能）

$$\exists j \in J,\ < \psi_t,\ \lambda_t > =_{\Delta} < 0,\ \phi > \tag{2.58}$$

が成立している事態，つまり，

入力パターン$\varphi \in \Phi$ の帰属するする候補カテゴリは唯１つも存在しない事態

或いは，

（３＃）（認識不定）

$$\exists j_1,\,j_2,\,\cdots,\,j_p \in J\ (p \geq 2),\ < \psi_t,\ \lambda_t > =_{\Delta} < \psi_t,\ [j_1\quad j_2\quad \cdots\quad j_4] > \tag{2.59}$$

が成立している事態，つまり，

入力パターン$\varphi \in \Phi$ の帰属するする候補カテゴリは複数個存在する事態のいずれかが生じることがある．

類似度関数SMがaxiom 2を満たしていても，式（2.20）のRECOGNITRON$=< \Phi_B,\,T,\,SM,\,BSC >$は，不動点方程式（2.54）が成立する認識段階番号$t\ (=1,\,2,\,\cdots)$が存在しなくて，式（2.51）の認識過程の代りに，

$$< \psi_0,\,\lambda_0 >,\ < \psi_2,\,\lambda_2 >,\ \cdots,\ < \psi_{t-1},\,\lambda_{t-1} >,\ < \psi_t,\,\lambda_t >,\ < \psi_{t+1},\,\lambda_{t+1} >,\ < \psi_{t+2},\,\lambda_{t+2} >,\ \cdots \tag{2.60}$$

というように，振動過程，或いは周期２（つまり，$\psi_{t+2} = \psi_t,\ \lambda_{t+2} = \lambda_t$ が成立すること）以上の循環過程となることがある［B39］．

3. 順序対$[\Phi,\,T]$の決定

本章では，パターン集合Φ とモデル構成作用素T とからなるようなaxiom 1を満たす順序対$[\Phi,\,T]$を確保する．つまり，零パターン$0 \in \mathfrak{H}$を含む基本領域Φ_Bから処理の対象とする問題のパターン$\varphi \in \mathfrak{H}$の集合Φ を得る方法を介して，パターン集合Φ とモデル構成作用素T とからなるaxiom 1を満たす順序対$[\Phi,\,T]$を確保しよう．

3.1 順序対$[\Phi,\,T]$の満たさなければならないaxiom 1

処理の対象とするパターンφ の集合Φ はある可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の，零元0を含むある部分集合であり，このΦ，並びに式（1.3）の写像T は次のaxiom 1を満たさなければならない．このとき，写像T はモデル構成作用素と呼ばれ，$T\varphi \in \Phi$ はパターン$\varphi \in \Phi$ の代りとなり得るという意味で，パ

ターン$\varphi \in \Phi$のモデル（model），パターンモデルと呼ばれる．

Axiom 1（パターン集合Φとモデル構成作用素Tとの対【Φ, T】の満たすべき公理）

（ｉ）(零元０の$\Phi-$包含性と，零元０の$T-$不動点性；fixed-point property of zero element under mapping T）

$0 \in \Phi \wedge T0 = 0.$

（ⅱ）（Φの錐性，Tの正定数倍吸収性；cone property）

$\forall \varphi \in \Phi,\ a \cdot \varphi \in \Phi \wedge T(a \cdot \varphi) = T\varphi$

for any positive real number $a \in R^{++}$.

（ⅲ）（Φの埋込性（embeddedness），Tのベキ等性（idempotency））

$\forall \varphi \in \Phi,\ T\varphi \in \Phi \wedge T(T\varphi) = T\varphi.$

（iv）（写像Tの非零写像性；non-zero mapping property of T）

$\exists \varphi \in \Phi,\ T\varphi \neq 0.$ □

3.2　パターンの基本領域Φ_B，パターン集合Φ，モデル構成作用素T，並びに，順序対$[\Phi, T]$

パターンと判明しているφの集合（基本領域；basic domain）$\Phi_B\ (\ni 0)$と，すべての正実定数の集合R^{++}とを用意する．

次の定理3.1は，axiom 1を満たす順序対$[\Phi, T]$を決定している．

［定理3.1］（パターン集合Φとモデル構成作用素Tとの順序対【Φ, T】の基本構成定理）

式（1.3）の写像Tがaxiom 1の（ｉ），（ⅱ），（ⅲ）の３後半，並びに，（iv）を満たすとしよう．このとき，次の（イ），（ロ）が成り立つ：

（イ）処理の対象とする問題のパターンの集合Φを，

$$\Phi = R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B) = R^{++} \cdot \Phi_B \cup R^{++} \cdot T \cdot \Phi_B$$
$$\text{, where } R^{++} \cdot \Phi_B \equiv \{ r^{++} \cdot \Phi_B \mid r^{++} \in R^{++},\ \Phi_B \in \Phi_B \}$$
$$R^{++} \cdot T \cdot \Phi_B \equiv \{ r^{++} \cdot T\varphi_B \mid r^{++} \in R^{++},\ \varphi_B \in \Phi_B \} \tag{3.1}$$

の如く設定すれば，

$$\Phi_B \supset \{0\} \wedge \tag{3.2}$$
$$R^{++} \cdot \Phi = \Phi \wedge \tag{3.3}$$
$$T \cdot \Phi = T \cdot \Phi_B\ (\subset \Phi) \tag{3.4}$$

が成立し，axiom 1の（ｉ），（ⅱ），（ⅲ）の３前半をΦは満たし，結局，順序対$[\Phi, T]$はaxiom 1を満たす．

（ロ）逆に，$\Phi_B\ (\ni 0)$を部分集合に持つΦがaxiom 1の（ｉ），（ⅱ），（ⅲ）の３前半を満たすとすれば，

$$\Phi \supseteq \Phi_B \cup R^{++} \cdot \Phi \cup T \cdot \Phi \tag{3.5}$$

が成立するが，ここで，特に，等号が成立するような最小のΦを採用すれば，つまり，Φの集合論的再帰領域方程式（set-theoretic reflective domain equation）

$$\Phi = \Phi_B \cup R^{++} \cdot \Phi \cup T \cdot \Phi \tag{3.6}$$

の成立を仮定すれば，axiom 1を満たす対$[\Phi, T]$のΦは式（3.1）のように表され，２式（3.3），（3.4）も成立する．

（証明）（イ）は文献［B4］，付録１の定理A1.1である．（ロ）は文献［B3］，pp.64－66（2.4節）で証明されている． □

4.　残差法による線形観測方程式下のパターンモデル$T\varphi$の決定

前章では，，パターン集合Φとモデル構成作用素Tとからなるようなaxiom 1を満たす順序対$[\Phi, T]$が確保された．本章では，線形方程式$B\eta=\varphi$に残差法を適用し，解ηの持つ情報を使い，パターンモデル$T\varphi$を決定する．

今少し詳しく，説明すれば次のようになる．

観測後のパターン$\varphi \in \Phi$を決定する線形方程式$B\eta=\varphi$の解$\eta \in \Phi$を1次独立な系$\{\psi_k\}_{k\in L}$による1次展開$\eta = \sum_{k\in L} c_k \cdot \psi_k$の形で残差法で求め，この得られた1次展開（1次結合）の各係数$c_k\ (k \in L)$を使って，axiom 1の（i），（ii），（iii）の3後半，並びに，（iv）を満たすパターンモデル$T\varphi = \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell)\cdot B\psi_\ell$を決定する．ここに，$u(\varphi, \ell) \in Z$（複素数全体の集合）はパターン$\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$から抽出される第$\ell \in L$番目の特徴量である．

このようにして，パターン集合Φと残差法によるモデル構成作用素Tとからなるようなaxiom 1を満たす順序対$[\Phi, T]$が確保されることになる．

4.1　線形観測方程式$B\eta=\varphi$の解η内の各1次係数c_kの決定

4.1.1　線形観測方程式$B\eta=\varphi$の求解に残差法を適用して導かれる各1次係数c_kを決定する連立1次方程式

内積(φ, η)，ノルム$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$を採用する可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$を考える．$\mathfrak{H}$はパターンの表現空間である．

作用素Bが線形とは，

$$B(a\cdot\varphi + b\cdot\eta) = a\cdot B\varphi + b\cdot B\eta \tag{4.1}$$

が，任意の2つの複素定数a, bと任意の2つの$\mathfrak{H}$の元φ,ηについて成り立つことをいう．例えば，簡単な例では，$\mathfrak{H} = L_2(R_{[a,b]}, dx)$では，

$$(B\varphi)(x) = -\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) + \varphi(x),\ a \le x \le b \tag{4.2}$$

$$(B\varphi)(x) = \int_a^x dy\cdot \exp\left[-\frac{x-y}{c}\right]\cdot\varphi(y),\ a \le x \le b,\ c > 0 \tag{4.3}$$

などで定義されるBは線形作用素である．ここに，$R_{[a,b]}$は不等式$a \le x \le b$を満たす実数x全体の集合である．

パターン$\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$が観測されたとき，線形方程式

$$B\eta = \varphi \tag{4.4}$$

を解いて，線形作用素Bにより変形される前のパターン$\eta \in \Phi \subset \mathfrak{H}$を求めることを考えよう．

例えば，式（4.2）の作用素Bについては，線形方程式$B\eta=\varphi$は，線形微分方程式

$$-\frac{d^2}{dx^2}\eta(x) + \eta(x) = \varphi(x) \tag{4.5}$$

である．

可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元ψ_kからなる系$\{\psi_k\}_{k\in L}$は，各1次複素定数係数c_kについて

$$\sum_{k\in L} c_k\cdot\psi_k = 0 \Rightarrow \forall k \in L,\ c_k = 0 \tag{4.6}$$

が成り立っているという意味で，1次独立であるとしよう．各$\psi_\ell\,(\ell \in L)$は，処理の対象とするパターン$\varphi \in \Phi$をモデルとして再表現するとき必要なパターン形状素である．

ここで，系$\{B_k\}_{k \in L}$も，系$\{\psi_k\}_{k \in L}$と同様に，1次独立であるとしよう．系$\{B_k\}_{k \in L}$が1次独立であるように，系$\{\psi_k\}_{k \in L}$が選ばれていなければならないとしていることに注意する．

パターンφに対応するパターンモデル$T\varphi$として，式（1.8）の$T\varphi$を採用する．

式（1.3）の写像（モデル構成作用素）Tは，パターン$\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$から抽出される第$\ell \in L$番目の特徴量$u(\varphi, \ell) \in Z$（複素数全体の集合）を決めると，定まる．

特徴量$u(\varphi, \ell) \in Z$の決め方を説明すると，次のようになる．

残差

$$e = \varphi - B\eta \tag{4.7}$$

を最小にするパターン$\eta \in \Phi \subset \mathfrak{H}$を，1次独立な系$\{\psi_k\}_{k \in L}$による1次形式

$$\eta = \sum_{k \in L} c_k \cdot \psi_k \tag{4.8}$$

の形で求めよう．各1次係数c_kは複素定数である．

残差法（residual method）に従うと，誤差eを最小にするパターン$\eta \in \Phi \subset \mathfrak{H}$を求めることは，

$$\forall \ell \in L,\ (e, \psi_\ell) = 0 \tag{4.9}$$

を満たす各1次係数c_kを決定することである．

次の定理4.1は，各1次係数c_kが連立1次方程式を解いて得られることを示している

［定理4.1］（線形観測方程式$B\eta = \varphi$の解η内の残差法による各1次係数c_kの決定定理）

式（4.9）を満たす式（4.8）のパターンη内の各1次係数$c_k\,(k \in L)$は，連立1次方程式（system of simultaneous linear equations）

$$\sum_{k \in L} a_{\ell k} \cdot c_k = b_\ell,\ \ell \in L \tag{4.10}$$

, where

$$a_{\ell k} \equiv (B\psi_k, \psi_\ell)\,(k \in L),\ b_\ell = (\varphi, \psi_\ell)\,(\ell \in L) \tag{4.11}$$

を満たす．

（証明）作用素Bは線形であるから，

$$B\eta = \sum_{k \in L} c_k \cdot B\psi_k \quad \because \quad \text{式（4.8）} \tag{4.12}$$

である．よって，

$$\forall \ell \in L,\ 0 = (e, \psi_\ell)$$

$$= (\varphi - B\eta, \psi_\ell) \quad \because \quad \text{式（4.7）} \tag{4.13}$$

$$= (\varphi, \psi_\ell) - (B\eta, \psi_\ell)$$

$$= (\varphi, \psi_\ell) - \sum_k c_k \cdot (B\psi_k, \psi_\ell) \quad \because \quad \text{式（4.12）} \tag{4.14}$$

を得，

$$\sum_k c_k \cdot (B\psi_k, \psi_\ell) = (\varphi, \psi_\ell),\ \ell \in L \tag{4.15}$$

が成立し，証明が終わる．　□

4.1.2　定理4.1の連立１次方程式の解 $c_k\ (k\in L)$ の存在

$\{\psi_k\}_{k\in L}$ は１次独立であるが，連立１次方程式の解 $c_k\ (k\in L)$ が必ず，求まるためには．

$$a_{\ell k}\equiv(B\psi_k,\ \psi_\ell)(k\in L,\ \ell\in L)\quad \because\quad \text{式（4.11）} \tag{4.16}$$

を第 $\ell\in L$ 行第 $k\in L$ 列とする行列（Gram matrix）の行列式は非零であらねばならない．系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ は１次独立であると仮定されているが，このためには，今１つのの系 $\{B\psi_k\}_{k\in L}$ も１次独立であることが最低限，必要である．

この事態を詳細に研究しよう．

各 $B\psi_k\ (k\in L)$ を１次独立な系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ で展開し，

$$B\psi_k=\sum_{m\in L}b_{km}\cdot\psi_m+\eta,\ \text{where}\quad \forall\ell\in L,\ (\eta,\ \psi_\ell)=0 \tag{4.17}$$

であるとしよう．各 $a_{\ell k}\ (k\in L,\ \ell\in L)$ は，

$$a_{\ell k}=\sum_{m\in L}b_{km}\cdot(\psi_m,\ \psi_\ell)+(\eta,\ \psi_\ell)$$

$$=\sum_{m\in L}b_{km}\cdot(\psi_m,\ \psi_\ell)(k\in L,\ \ell\in L) \tag{4.18}$$

と表される．

u_{pq} を第行第列の要素とする行列を $(u_{pq})_{p,\,q\in L}$ と表し，その行列式を $\det((u_{pq})_{p,\,q\in L})$ と表すと，次の定理4.2が成立し，定理4.1の連立１次方程式の解 $c_k\ (k\in L)$ が存在することがわかる．

［定理4.2］（線形観測方程式 $B\eta=\varphi$ の解 η 内の残差法によって得られた定理4.1の連立１次方程式（4.10）の解 $c_k\ (k\in L)$ の存在定理）

$$\det((b_{km})_{k,\,m\in L})\neq 0 \tag{4.19}$$

であれば，定理4.1の連立１次方程式の解 $c_k\ (k\in L)$ が存在する．

（証明）各 $a_{\ell k}\ (k\in L,\ \ell\in L)$ の展開式（4.18）は，

$$(a_{k\ell})_{k,\,\ell\in L}\ \text{の転置行列}=(b_{km})_{k,\,m\in L}\cdot(c_{m\ell})_{m,\,\ell\in L},\ \text{where}\quad c_{m\ell}\equiv(\psi_m,\ \psi_\ell)(m\in L,\ \ell\in L) \tag{4.20}$$

を意味する．２つの行列の積の行列式の値は各行列の行列式の値の積に等しくて，転置行列の行列式の値はもとの行列の行列式の値に等しいから，

$$\det((a_{\ell k})_{k,\,\ell\in L})=\det((b_{km})_{k,\,m\in L})\cdot\det((c_{m\ell})_{m,\,\ell\in L}) \tag{4.21}$$

が成立する．$\{\psi_k\}_{k\in L}$ は１次独立であると仮定されているから，

$$\det((c_{m\ell})_{m,\,\ell\in L})\neq 0 \tag{4.22}$$

が成立している．よって

$$\det((b_{km})_{k,\,m\in L})\neq 0\Rightarrow\det((a_{\ell k})_{k,\,\ell\in L})\neq 0 \tag{4.23}$$

が成立し，定理4.1の連立１次方程式の解 $c_k\ (k\in L)$ が存在する．□

4.1.3　線形観測作用素 B が恒等作用素 I である場合のモデル構成作用素 S と，I でない場合のモデル構成作用素 T との情報処理機能の違い

最小二乗法を適用すれば，$B\psi_k$ の展開式（4.17）内の各１次結合係数

$$b'_m\equiv b_{km}\ (m\in L) \tag{4.24}$$

は，連立１次方程式（添え字 $(k\in L)$ は固定されていることに注意）

$$\sum_{m\in L}b'_m\cdot(\psi_m,\ \psi_\ell)=(B\psi_k,\ \psi_\ell),\ \ell\in L \tag{4.25}$$

の解として求められることに注意する［B3］，［B4］.

式（1.8）のパターンモデル $T\varphi$ は，

$$S\varphi \equiv \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell)\cdot\psi_\ell \tag{4.26}$$

と定義されるパターン $S\varphi$（線形観測作用素 B が恒等作用素 I である場合のモデル構成作用素 T）と異なり，

$$T\varphi \equiv \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell)\cdot B\psi_\ell$$

$$= \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell)\cdot b_{\ell\ell}\cdot\psi_\ell + \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell)\cdot \sum_{m \in L-\{\ell\}} b_{\ell m}\cdot\psi_m + [\sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell)]\cdot\eta \quad \because \quad \text{式（4.17）} \tag{4.27}$$

$\therefore$

$$T\varphi - S\varphi = \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell)\cdot[B\psi_\ell - \psi_\ell]$$

$$= \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell)\cdot[b_{\ell\ell} - 1]\cdot\psi_\ell + \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell)\cdot \sum_{m \in L-\{\ell\}} b_{\ell m}\cdot\psi_m + [\sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell)]\cdot\eta \tag{4.28}$$

からわかるように，$B\psi_k$ の展開式（4.17）内の各 1 次結合係数 b_{km} $(m \in L)$ については，線形観測作用素 B が恒等作用素 I でないための 3 条件

（ 1 ¥）$[\exists k \in L, b_{k_k} \neq 1]\vee$ (4.29)

（ 2 ¥）$[\forall k \in L, \exists m \in L-\{k\}, b_{km} \neq 0]\vee$ (4.30)

（ 3 ¥）$\eta \neq 0$ (4.31)

が成立する場合の条件（ 2 ¥）が満たされていれば，パターンモデル $S\varphi$ の第 $\ell \in L$ 番目の特徴成分が

$$u(\varphi, \ell)\cdot\psi_\ell \tag{4.32}$$

であることに対比して，パターンモデル $T\varphi$ の第 $\ell \in L$ 番目の特徴成分は，他の ψ_m $(m \in L-\{\ell\})$ からの成分

$$u(\varphi, \ell) \sum_{m \in L-\{\ell\}} b_{\ell m}\cdot\psi_m \tag{4.33}$$

が備わっており，結局，

$$u(\varphi, \ell), b_{\ell\ell}\cdot\psi_\ell + u(\varphi, \ell)\cdot \sum_{m \in L-\{\ell\}} b_{\ell m}\cdot\psi_m \tag{4.34}$$

であることに留意しておく．条件式 (4.29）が成り立っていれば，式 (4.34）内の成分 $u(\varphi, \ell)\cdot b_{\ell\ell}\cdot\psi_\ell$ について，

$$u(\varphi, \ell)\cdot b_{\ell\ell}\cdot\psi_\ell \neq u(\varphi, \ell)\cdot\psi_\ell \tag{4.35}$$

である．更に，条件式（4.31）が成り立っていれば，パターンモデル $T\varphi$ には，パターンモデル $S\varphi$ と異なり，$B\psi_k$ の展開式（4.17）での残差 η の，特徴量の総和倍

$$[\sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell)]\cdot\eta \tag{4.36}$$

が存在していることにも留意しておく．

4.2　パターンモデル$T\varphi$ 内の各特徴量$u(\varphi, \ell) \in Z$ の決定

パターン$\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ から抽出される第$\ell \in L$ 番目の特徴量$u(\varphi, \ell) \in Z$ を決めよう．

残差法で得られた連立 1 次方程式(4.10)の解として求められた各 1 次係数c_k はパターン$\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ から決まるという意味で，各 1 次係数c_k を$c_k(\varphi)$と書こう．このとき，式（4.8）の$\eta = \sum_{k \in L} c_k \cdot \psi_k$ は，

$$\eta = \sum_{k \in L} c_k(\varphi) \cdot \psi_k \tag{4.37}$$

と求められ，ここで，式（4.7）の残差e を改めて，

$$\varphi_{\perp} \equiv \varphi - B\eta \tag{4.38}$$

とおけば，式（4.13）より

$$\forall \ell \in L, (\varphi_{\perp}, \psi_{\ell}) = 0 \tag{4.39}$$

であり，結局，パターン$\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ は，

$$\varphi = B\eta + \varphi_{\perp} \tag{4.40}$$

$$= \sum_{\ell \in L} c_{\ell}(\varphi) \cdot B\psi_{\ell} + \varphi_{\perp} \tag{4.41}$$

と表される．

以上パターン$\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ の 1 次展開を整理しておくと，次の定理4.3が得られる．

［定理4.3］（パターン$\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ の 1 次展開定理）

式（4.7），（4.38）の残差$e = \varphi_{\perp}$ の各$\psi_{\ell}(\ell \in L)$との直交条件式（4.39）を満たす$\varphi_{\perp} \in \mathfrak{H}$ が存在して，パターン$\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ は式（4.41）の如く，と展開される．　□

4.3　axiom 1を満たす順序対$[\Phi, T]$の決定

以上の残差法を適用し，本節では，線形方程式の制約条件（constraint）を満たすパターンモデル$T\varphi$ が構成される．

4.3.1　残差法による決定された写像T の不動点

式（1.8）で定義された式（1.3）の写像T 内の特徴量$u(\varphi, \ell) \in Z$ は式（1.11）のように定義される．

次の定理4.4は，各パターン形状素ψ_m を線形観測作用素B で変換して得られる各$B\psi_m$ が写像T の不動点であることを指摘している．

［定理4.4］（式（1.8）で定義された式（1.3）の写像T の不動点定理）

$$\forall m \in L, T(B\psi_m) = B\psi_m. \tag{4.42}$$

（証明）任意に，$m \in L$ を固定し，パターンφ として，

$$\varphi = B\psi_m \tag{4.43}$$

をとる．連立 1 次方程式（4.10）を解いて，

$$c_k(\varphi) = c_k(B\psi_m) = \begin{cases} 1 \cdots k = m \text{ のとき} \\ 0 \cdots k \neq m \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.44}$$

が求まる．よって，特徴量$u(\varphi, \ell \in Z)$の定義式（1.11）から，

$$u(\varphi, k) =$$

$$\begin{cases} 1\cdots k = m \text{ のとき} \\ 0\cdots k \neq m \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.45}$$

を得，モデル構成作用素 T の定義式（1.8）から，式（4.42）が得られる． □

次の定理4.5は，任意のパターン $\varphi \in \Phi$ の残差 $\varphi_\perp$ のモデル $T\varphi_\perp$ が零パターン，つまり，背景も前景のないパターンであることを指摘している．

［定理4.5］（零パターンモデル定理）

$$\forall\varphi \in \Phi,\ T\varphi_\perp = 0. \tag{4.46}$$

（定理4.4の証明）パターン φ が，

$$\varphi = \varphi_\perp \tag{4.47}$$

の場合を考えると，式（4.39），即ち，

$$\forall\ell \in L,\ b_\ell = 0 \tag{4.48}$$

であるから，連立 1 次方程式（4.10）を解いて，

$$\forall k \in L,\ c_k(\varphi_\perp) = 0 \tag{4.49}$$

を得，特徴量 $u(\varphi, \ell) \in Z$ の定義式（1.11），並びに，モデル構成作用素 T の定義式（1.8）から，

$$\forall k \in L,\ u(\varphi_\perp, k) = 0 \quad \therefore \quad T\varphi_\perp = 0. \tag{4.50}$$

□

次の定理4.5の系 1 は，式（1.8）で定義された式（1.3）のモデル構成作用素 T が零パターン $\varphi = 0$ を不動点に持つことを指摘している．

［定理4.5の系 1 ］（零パターンモデルの不動点定理）

$\varphi = 0$ について，$T\varphi = 0.$ (4.51)

（定理4.5の系 1 の証明）定理4.4において，$\varphi_\perp = 0$ の場合がこの系 1 である．念のため，直接照明しておこう．

$$\varphi = 0 \tag{4.52}$$

とおく．式（4.11）から，式（4.48）を得，よって，連立 1 次方程式（4.10）を解いて，

$$\forall k \in L,\ c_k(\varphi) = 0 \tag{4.53}$$

を得，特徴量 $u(\varphi, \ell) \in Z$ の定義式（1.11），並びに，モデル構成作用素 T の定義式（1.8）から，

$$\forall k \in L,\ u(\varphi, k) = 0 \quad \therefore \quad T\varphi = 0. \tag{4.54}$$

□

4.3.2　残差法によるaxiom 1を満たす順序対 $[\Phi, T]$ の決定

定理3.1によれば，axiom 1を満たす順序対 $[\Phi, T]$ を決定するには，式（1.8）で定義された式（1.3）の写像 $T : \Phi \to \Phi$ がaxiom 1の（ｉ），（ii），（iii）の 3 後半，並びに，（iv）を満たせばよい．

次の定理3.7は，残差法によってaxiom 1を満たす順序対 $[\Phi, T]$ が得られることを示している．本論文が得た主要な理論的研究成果である．

［定理4.6］（残差法による順序対 $[\Phi, T]$ の決定定理）

2 つの仮定

系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ が 1 次独立である

系 $\{B\psi_k\}_{k \in L}$ が 1 次独立である

を採用し，非零条件式（4.19）が成立しているとしよう．

式（1.8）で定義された式（1.3）の写像 $T : \Phi \to \Phi$ がaxiom 1の（ｉ），（ii），（iii）の 3 後半，並び

に，（iv）を満たす．つまり，次の①，②，③，④が成り立つ：

①$\varphi = 0$のとき$T\varphi = 0$.

②aを任意の正定数とする．このとき，$\forall\varphi \in \Phi,\ T(a \cdot \varphi) = T\varphi$.

③$\forall\varphi \in \Phi,\ T(T\varphi) = T\varphi$.

④$\exists\varphi \in \Phi,\ T\varphi \neq 0$.

このようにして，定理3.1を適用でき，パターン集合Φと，式（1.8）で定義された式（1.3）の写像Tとの対$[\Phi, T]$はaxiom 1を満たす．

（定理4.6の証明）①の証明：定理4.5の系1で示されている．

②の証明：先ず，連立1次方程式（4.10）の性質から，

$$\forall k \in L,\ c_k(a \cdot \varphi) = c_k(\varphi) \tag{4.55}$$

が成り立っている．

②－1　$\sup_{k \in L} |c_k(\varphi)| = 0$のとき

$$\forall k \in L,\ u(\varphi, k) = 0 \quad \therefore \quad T\varphi = 0$$

を得る．一方，式（4.55）を適用して，

$$\sup_{k \in L} |c_k(a \cdot \varphi)| = 0$$

が成立し，

$$\forall k \in L,\ u(a \cdot \varphi, k) = 0 \quad \therefore \quad T(a \cdot \varphi) = 0$$

を得る．よって，

$T(a \cdot \varphi) = 0 = T\varphi$.

②－2　$\sup_{k \in L} |c_k(\varphi)| > 0$のとき

式（4.55）を適用して，

$$\sup_{k \in L} |c_k(a \cdot \varphi)| = a \cdot \sup_{k \in L} |c_k(\varphi)| > 0$$

が成り立つから，特徴量$u(\varphi, \ell)$の定義式（1.11）を適用して，

$$\forall k \in L,\ u(a \cdot \varphi, k) = \frac{c_k(a \cdot \varphi)}{\sup_{k \in L} |c_k(a \cdot \varphi)|} = \frac{c_k(\varphi)}{\sup_{k \in L} |c_k(\varphi)|} = u(\varphi, k)$$

$$\therefore \quad T(a \cdot \varphi) = 0$$

を得，

$$T(a \cdot \varphi) = T\varphi.$$

③の証明：

特徴量$u(\varphi, \ell)$の定義式（1.11）の性質より，

$$\sup_{k \in L} |u((\varphi, k)| \in \{0, 1\} \tag{4.56}$$

である．更に，連立1次方程式（4.10）において，φの代りに，定義式（1.8）の$T\varphi$を考えれば，

連立1次方程式（4.10）の左辺$= (T\varphi, \psi_\ell)$

$$= \sum_{m \in L} u(\varphi, m) \cdot (B\psi_m, \psi_\ell)$$

連立１次方程式（4.10）の右辺$= \sum_{k \in L} c_k(T\varphi) \cdot (B\psi_k, \psi_\ell)$

であるから，

$$\forall k \in L,\ c_k(T\varphi) = u(\varphi, k) \tag{4.57}$$

が成り立つ．

③－１ $\sup_{k \in L} |u((\varphi, k)| = 0$ のとき

$$\forall k \in L,\ u(\varphi, k) = 0 \quad \therefore \quad T\varphi = 0$$

である．また，式（4.57）より，

$$\sup_{k \in L} |c_k(T\varphi)| = 0$$

であるから，$u(\varphi, \ell)$の定義式（1.11）を適用して，

$$\forall k \in L,\ u(T\varphi, k) = 0 \quad \therefore \quad T(T\varphi) = 0$$

を得，

$$T(T\varphi) = 0 = T\varphi.$$

③－２ $\sup_{k \in L} |u((\varphi, k)| = 1$ のとき

式（4.57）を適用して，

$$\sup_{k \in L} |c_k(T\varphi)| = \sup_{k \in L} |u(\varphi, k)| = 1$$

が成り立つから，$u(\varphi, \ell)$の定義式（1.11）を適用して，

$$\forall k \in L,\ u(T\varphi, k) = \frac{c_k(T\varphi)}{\sup_{k \in L} |c_k(T\varphi)|} = c_k(T\varphi) = u(\varphi, k) \quad \because \quad 式（4.57）$$

を得，

$$T(T\varphi) = T\varphi.$$

④の証明：定理4.4から明らかである．つまり，系$\{B\psi_k\}_{k \in L}$が１次独立であるから，

$$\forall m \in L,\ T(B\psi_m) = B\psi_m \neq 0. \qquad \square$$

5.　可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}=L_2(M, dm)$

位相空間 (topological space) X が稠密 (dense) な可算部分集合を持つとき，X を可分な空間 (separable space) であるという［A2］.

内積 (φ, η)，ノルム $\|\varphi\|\equiv\sqrt{(\varphi, \varphi)}$ (5.1)

が導入されている一般抽象ヒルベルト空間（加法＋が導入されている群としての線形ベクトル空間）$\mathfrak{H}$ は距離

$dis(\varphi, \eta)\equiv\|\varphi-\eta\|$ (5.2)

が導入され得る距離空間であり，この距離で位相が定義された位相空間である．パターン φ を内積 (φ, η)，ノルム $\|\varphi\|\equiv\sqrt{(\varphi, \varphi)}$ とする可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の元とする．$\mathfrak{H}$ が可分 (separable) とは，稠密な（dense）可算部分集合が $\mathfrak{H}$ に存在することを指す［A2］.

完全な正規直交系が高々可算個からなっていれば、ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ は可分である．また，文献［A21］の5.1節（p. 25）の定理5.2では，

可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ には，高々可算個からなる完全な正規直交系を作ることができる (5.3)

ことが証明されている．よって，一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ で高々可算個からなる完全な正規直交系が存在することと，一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ が可分なこととは同値であることに注意しておこう．

ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ とは内積が定義された無限次元であってよいベクトル空間（内積が定義され得る線形空間）のことであり，有限次元の場合を含む．４性質

（イ）$(\varphi, \varphi)\geq 0$ かつ，「$\varphi=0\Leftrightarrow(\varphi, \varphi)=0$」 (5.4)

（ロ）(η, φ) は (φ, η) の共役複素数 (5.5)

（ハ）$(\varphi_1+\varphi_2, \eta)=(\varphi_1, \eta)+(\varphi_2, \eta)$ (5.6)

（ニ）任意の複素定数 a について，

$(a\cdot\varphi, \eta)=a\cdot(\varphi, \eta)$ (5.7)

を満たすだけの（文献［A21］のpp.1－2の４式（1.9)～(1.12))、複素数値を与える内積 (φ, η) というものが定義でき、高々可算個からなる完全な正規直交系が存在するというだけのヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ が可分な一般抽象という意味である．

例えば，$\overline{\eta}$ を η の複素共役として，

M : q 次元ユークリッド空間 R^q の可測部分集合 (5.8)

$dm(x)$: 正値ルベーグ・スティルチェス式測度 (5.9)

$x=<x_1, x_2, \cdots, x_q>\in M\ (\subseteq R^q)$: 実数値 q 変数の直交座標系 (5.10)

を導入し，その内積 (φ, η)，ノルム $\|\varphi\|$ が,

$$(\varphi, \eta)=\int_M dm(x)\ \varphi(x)\cdot\overline{\eta}(x) \tag{5.11}$$

$$\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi, \varphi)} \tag{5.12}$$

と与えられる線形空間（ベクトル空間）$\mathfrak{H}$ が，$\mathfrak{H}=L_2(M, dm)$ である．

一般に，SS 理論［B3］,［B4］では，処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ は或る可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の零元 0 を含む或る部分集合であるが，構成的集合として，式（3.1）の如く設定される．

6.　適用例1（線形観測方程式$B\eta=\varphi$の線形作用素B，1次独立な系$\{\psi_k\}_{k\in L}$）

式（1.8）で定義された式（1.3）の写像Tは前章で完全に決定された．以後，式（1.7）の線形観測方程式$B\eta=\varphi$の線形作用素B，並びに，1次独立な系$\{\psi_k\}_{k\in L}$の諸例を示す．この結果，式（1.8）で定義された式（1.3）の写像$T:\Phi\to\Phi$が広範囲に使われるモデル構成作用素であることになる．

本章では，

$$B\eta=\varphi,\ \{\psi_k\}_{k\in L} \tag{6.1}$$

の簡単な例を先ず，示す．

$$R_{[a,\,a+n-1]}\equiv\{x\mid a\leq x\leq a+n-1\},\ \text{正整数}\,n\ \text{は}\,n\geq 3 \tag{6.2}$$

として，

$$dm(x)=\begin{cases}(2x^2)^2\cdots x=a,\ a+1,\ a+2,\ \cdots,\ a+n-1\ \text{のとき}\\ 0\cdots otherwise\end{cases} \tag{6.3}$$

を導入し，ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$として，

$$\mathfrak{H}=L_2(R_{[a,\,a+n-1]},\ dm(x)) \tag{6.4}$$

を導入できる．

このとき，内積(φ,η)は

$$(\varphi,\eta)=\sum_{x=a}^{a+n-1}(2x^2)^2\cdot\varphi(x)\cdot\eta(x) \tag{6.5}$$

となる．微分作用素

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{d^2}{dx^2} \tag{6.6}$$

のディジタル近似は，

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}\cdot\frac{d}{dx}\varphi(x)&\approx-\frac{1}{4}[\{\varphi(x+1)-\varphi(x)\}-\{\varphi(x)-\varphi(x-1)\}]\\ &=\frac{1}{2}\cdot\varphi(x)-\frac{1}{4}\cdot\varphi(x+1)-\frac{1}{4}\cdot\varphi(x-1)\end{aligned} \tag{6.7}$$

であるから，線形観測作用素Bは，

$$(B\varphi)(x)=\begin{cases}0\cdots x=a\ \text{のとき}\\ -\dfrac{1}{4}\cdot[\varphi(x+1)+\varphi(x-1)-2\cdot\varphi(x)]\cdots a+1\leq x\leq a+n-2\ \text{のとき}\\ 0\cdots x=a+n-1\ \text{のとき}\end{cases} \tag{6.8}$$

と定義される．線形観測作用素Bは，パターンφの凹凸を，

①$\varphi(x-1)>\varphi(x)<\varphi(x+1)$（$\varphi$は座標点$x$において凹）であれば，$(B\varphi)(x)<0$

②$\varphi(x-1)<\varphi(x)>\varphi(x+1)$（$\varphi$は座標点$x$において凸）であれば，$(B\varphi)(x)>0$

の形で検出する．

1次独立な系$\{\psi_k\}_{k\in L}$の添え字ℓの集合Lとして，

$$L=\{a+1,\ a+2,\ \cdots,\ a+n-2\} \tag{6.9}$$

を採用し，$k\in L$についての，$\psi_k(x)$を

$$\psi_k(x)=\begin{cases}0\cdots a\le x\le k-2\ \text{のとき}\\ -2x^2\cdots x=k-1,\ k,\ k+1\ \text{のとき}\\ 0\cdots k+2\le x\le x+n-1\ \text{のとき}\end{cases} \tag{6.10}$$

と定義する．

このとき，

$$(B\psi_k)(x)=\begin{cases}0\cdots x=a\ \text{のとき}\\ 1\cdots x=a+1,\ a+2,\ \cdots,\ a+n-1\\ 0\cdots x=a+n-1\ \text{のとき}\end{cases} \tag{6.11}$$

と，計算される．

7. 適用例2

$$M=R_{[a,\,b]},\ R_{[a,\,b]}=\{x\mid a\le x\le b\},\ a<b \tag{7.1}$$

$$dm(x)=dx \tag{7.2}$$

として，ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$として，

$$\mathfrak{H}=L_2(M,\ dm) \tag{7.3}$$

を導入する．線形観測作用素Bとして，

$$(B\eta)(x)\equiv\frac{d\eta(x)}{dx}+P(x)\cdot\eta(x) \tag{7.4}$$

を導入する．線形観測方程式$B\eta=\varphi$の解ηは，

$$\eta(x)=C\cdot\exp[-\int_q^x dz\cdot P(z)]+\int_q^x dz\cdot h(x,\ z)\cdot R(z),\ h(x,\ z)\equiv\exp[-\int_z^x dv\cdot P(v)] \tag{7.5}$$

である．ここに，

$$\eta(q)=C \tag{7.6}$$

であることがわかる．特に，

$$a=-p,\ b=+p\ (p>0) \tag{7.7}$$

と設定してみよう．直交系であれば，1次独立な系であることを利用して，このとき，三角関数系

$$\phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2p}} \tag{7.8}$$

$$\phi_k(x)=\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\cos(\frac{\pi k}{p}\cdot x),\ k=1,2,\cdots \tag{7.9}$$

$$\phi_{-k}(x)=\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\sin(\frac{\pi k}{p}\cdot x),\ k=1,2,\cdots \tag{7.10}$$

を導入すると，この$\{\phi_k\}_{k=0,\pm1,\pm2,\cdots}$は

①（正規直交性）$(\phi_k,\phi_\ell)=$

$$\begin{cases}1\cdots k=\ell \text{ のとき}\\ 0\cdots k\neq\ell \text{ のとき}\end{cases} \tag{7.12}$$

②（完全性）

$$\left\|\varphi-\sum_{k=-i}^{+j}(\varphi,\phi_k)\cdot\phi_k\right\|\to 0\,(i,j\,(\geq 0)\to\infty) \tag{7.13}$$

を満たし，完全正規直交系である．

1 次独立な系$\{\phi_k\}_{k\in L}$の添え字ℓの集合Lとして，

$$L=\{k\mid -\infty<i<k<j<+\infty\} \tag{7.14}$$

を採用すればよい．

8.　適用例 3

ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$として，

$$\mathfrak{H}=L_2(R_{[a,b]},dx),\ \text{where}\ \ R_{[a,b]}\equiv\{x\mid a<x<b\} \tag{8.1}$$

を選び，線形観測作用素Bを，

$$(B\varphi)(x)=-\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)+q(x)\cdot\varphi(x)$$

$$,\ \forall x\in R_{[a,b]}\equiv\{x\mid a<x<b\},\ q(x)\geq 0 \tag{8.2}$$

と設定できる．

$$a=-\infty,\ b=+\infty \tag{8.3}$$

の場合，今 1 つの 1 次独立な系$\{\phi_k\}_{k=0,\pm1,\pm2,\cdots}$を選んでみよう．

$$\phi_k(x)=\sqrt{2W}\cdot\frac{\sin(2\pi Wx-k\pi)}{2\pi Wx-k\pi},\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{8.4}$$

と定義すれば，正定数$W>0$を助変数にもつ標本化関数系$\{\phi_k\}_{k=0,\pm1,\pm2,\cdots}$を選ぶことができる．
標本化関数系$\{\phi_k\}_{k=0,\pm1,\pm2,\cdots}$は正規直交系であり，角周波数が$2\pi W$以下に制限されているという低域制限条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\exp[-\sqrt{-1}\lambda x]\cdot\varphi(x)=0\quad\text{if}\quad|\lambda|>2\pi W \tag{8.5}$$

の下で，パターン$\varphi(x)$は，

$$\varphi(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2W}}\cdot\varphi\left(\frac{k}{2W}\right)\cdot\psi_k(x),\ -\infty<x<+\infty \tag{8.6}$$

と1意的に表現される（Shannnonの標本化定理［A17］）．ここに，

$$(\varphi,\psi_k)=\frac{1}{\sqrt{2W}}\cdot\varphi\left(\frac{k}{2W}\right),\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{8.7}$$

が成り立っている．

9. 適用例 4

9.1　ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$，線形観測作用素 B

$\mathfrak{H}=L_2(R_{[a,b]},dm(x))$ を第8章と同じように選ぶ．

線形観測作用素 B を，

$$(B\varphi)(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\varphi(x-c_k)，\text{各 } a_k,c_k \text{ は実定数} \tag{9.1}$$

$$\text{条件 } c_k\neq c_\ell\ (k\neq\ell) \tag{9.2}$$

と選んでみよう．但し，

$$\forall x\in R_{[a,b]},\ \exists k\in\{1,2,\cdots,n\},\ x-c_k\notin R_{[a,b]} \text{ の場合，} (B\varphi)(x)=0 \tag{9.3}$$

と約束する．

特に，規格化条件

$$[\forall k\in L,\ 0\leq|a_k|\leq1]\wedge\sum_{k=1}^{n}|a_k|=1 \tag{9.4}$$

を設けることができる．

このようなは既に登場している．つまり，2実定数 a,b が整数値である場合，規格化条件式（9.3）を満たす例として，

式（6.6）の2階微分作用素の定数倍 $-\frac{1}{4}\cdot\frac{d^2}{dx^2}$ の近似として，式（6.8）と同じように，B を

$$(B\varphi)(x)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)\approx-\frac{1}{4}[\{\varphi(x+1)-\varphi(x)\}-\{\varphi(x)-\varphi(x-1)\}]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\varphi(x)-\frac{1}{4}\cdot\varphi(x+1)-\frac{1}{4}\cdot\varphi(x-1)\quad\text{if}\quad a<x<b \tag{9.5}$$

と選ぶことができる．

但し，式（9.3）から，

$$(B\varphi)(x)=0\quad\text{if}\quad x=a\vee x=b \tag{9.6}$$

と定義しておく．

規格化条件式（9.4）を満たす今1つの例として，

定数 $h>0$ を選び，Simpsonの公式［A8］を用いた $\frac{1}{2h}\cdot\int_x^{x+2h}dy\varphi(y)$ の近似として，

$$(B\varphi)(x) \approx \frac{1}{2h} \cdot \int_{x}^{x+2h} dy\varphi(y) \tag{9.7}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \varphi(x) + \frac{2}{3} \cdot \varphi(x+h) + \frac{1}{6} \cdot \varphi(x+2h) \tag{9.8}$$

を採用できる．但し，式（9.3）から，

$$(B\varphi)(x) = 0 \quad \text{if} \quad x = a,\ a+h \vee x = b-h,\ b \tag{9.9}$$

と定義しておく．

$$h = 1 \tag{9.10}$$

を採用するのがよい．

9.2　1 次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$

離散コサイン変換を導入するため，

$$a = 0,\ b = N-1 \tag{9.11}$$

の場合を考えよう．

音声波形データ（音声パターン）

$$\varphi = \{\varphi(0), \varphi(1), \cdots, \varphi(N-1)\} \tag{9.12}$$

が得られたとする．N を 1 より小さくない整数とする．

$$\mathfrak{H} = L_2(M, dm) \tag{9.13}$$

where

$$M = R_{[0, N-1]},\ \text{ここに，}\ R_{[0, N-1]} = \{x \mid 0 \leq x \leq N-1\} \tag{9.14}$$

$$dm(x) = \begin{cases} 1 \cdots x \in \{0, 1, 2, \cdots, N-1\} \\ 0 \cdots x \notin \{0, 1, 2, \cdots, N-1\} \end{cases} \tag{9.15}$$

を導入する．内積 (φ, η) は，

$$(\varphi, \eta) = \int_M dm(x)\varphi(x) \cdot \overline{\eta}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \varphi(k) \cdot \overline{\eta}(k) \tag{9.16}$$

と表される．音声パターン φ に対し，

$$(DCT \quad \varphi)(\ell) = (\varphi, \phi_\ell),\ \ell = 0, 1, 2, \cdots, N-1 \tag{9.17}$$

$$(IDCT \quad DCT \quad \varphi)(k) = \sum_{\ell=0}^{N-1} (DCT \quad \varphi)(\ell) \cdot \phi_\ell(k) \tag{9.18}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{N-1} (\varphi, \phi_\ell),\ \phi_\ell(k),\ k = 0, 1, 2, \cdots, N-1 \tag{9.19}$$

を求める．ここに，各 ϕ_ℓ は次のように定義される：

$$\phi_\ell = \{\phi_\ell(k) \mid k = 0, 1, 2, \cdots, N-1\},\ \ell = 1, 2, \cdots, N-1 \tag{9.20}$$

として，

①$\psi_0(k)=\sqrt{\dfrac{1}{N}},\ k=0,1,2,\cdots,N-1$ (9.21)

②$\ell=1,2,\cdots,N-1$として，

$$\psi_\ell(k)=\sqrt{\frac{2}{N}}\cdot\cos\frac{(2k+1)\cdot\ell\cdot\pi}{2N},\ k=1,2,\cdots,N-1 \tag{9.22}$$

□

$$(DCT\quad\varphi)=\{(DCT\quad\varphi)(\ell)\mid\ell=0,1,2,\cdots,N-1\} \tag{9.23}$$

をφの離散コサイン変換DCT（discrete cosine transformation）［A10］といい，

$$(IDCT\quad DCT\quad\varphi)=\{(IDCT\quad DCT\quad\varphi)(k)\mid k=0,1,2,\cdots,N-1\} \tag{9.24}$$

を，$(DCT\quad\varphi)$の離散コサイン逆変換IDCT（inverse discrete cosine transformation）という．

等式

$$\forall\varphi,\ \varphi=(IDCT\quad DCT\quad\varphi) \tag{9.25}$$

が成り立ち，$\{\psi_\ell\}_{\ell=1,2,\cdots,N-1}$は，完全な正規直交系である．

10.　適用例5

10.1　線形観測作用素Bの設定

$$\mathfrak{H}=L_2(M,dx_1dx_2) \tag{10.1}$$

$$M=R_{[a,b]}\times R_{[c,d]},\ R_{[a,b]}\times R_{[c,d]}\equiv\{<x_1,x_2>\mid a\le x_1\le b,\ c\le x_2\le d\} \tag{10.2}$$

$$dm(x)=dm(x_1,x_2)=dx_1dx_2,\ x=<x_1,x_2> \tag{10.3}$$

と，設定し，線形観測作用素Bを，

$$(B\varphi)(x)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{m}a_{k,\ell}\cdot\varphi(x_1-c_k,x_2-d_\ell)，\ 各a_{k,\ell},c_k,d_\ell は実定数 \tag{10.4}$$

$$条件 c_k\ne c_{k'}(k\ne k'),\ d_\ell\ne d_{\ell'}(\ell\ne\ell') \tag{10.5}$$

と設定してみよう．但し，

$$\forall x=<x_1,x_2>\in R_{[a,b]}\times R_{[c,d]},\ \exists k\in\{1,2,\cdots,m\},\ \exists\ell\in\{1,2,\cdots,n\},$$
$$<x_1-c_k,x_2-d_\ell>\notin R_{[a,b]}\times R_{[c,d]}\ の場合,\ (B\varphi)(x)=0 \tag{10.6}$$

と約束する．

特に，規格化条件

$$[\forall k,\forall\ell,\ 0\le|a_{k,\ell}|\le1]\wedge\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n}|a_{k,\ell}|=1 \tag{10.7}$$

を設けることができる．

規格化条件を満たす例を考えよう．

$\dfrac{1}{8}\cdot\left(-\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)$のディジタル近似として，線形観測作用素を，

$$(B\varphi)(x_1,x_2)\approx\frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{8}[\varphi(x_1+1,x_2)+\varphi(x_1-1,x_2)-2\varphi(x_1,x_2)]$$

$$-\frac{1}{8}[\varphi(x_1, x_2+1)+\varphi(x_1, x_2-1)-2\varphi(x_1, x_2)]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\varphi(x_1, x_2)-\frac{1}{8}\cdot\varphi(x_1+1, x_2)-\frac{1}{8}\cdot\varphi(x_1-1, x_2)-\frac{1}{8}\cdot\varphi(x_1, x_2+1)-\frac{1}{8}\cdot\varphi(x_1, x_2-1) \tag{10.8}$$

と，設定できる．但し，式（10.6）から，

$$(B\varphi)(x_1, x_2)=0 \quad \text{if} \quad x_1=a,\ b \vee x_2=c,\ d \tag{10.9}$$

と定義しておかなかればならない．

今１つ，規格化条件を満たす例として，線形観測作用素 B を，

$$\frac{1}{\frac{h_1}{3}\cdot\frac{h_2}{3}}\cdot\frac{1}{36}\int_{x_2}^{x_2+2h_2} dy_2 \int_{x_1}^{x_1+2h_1} dy_1\varphi(y_1, y_2)=\frac{1}{4h_1h_2}\cdot\int_{x_2}^{x_2+2h_2} dy_2 \int_{x_1}^{x_1+2h_1} dy_1\varphi(y_1, y_2)$$

ここに，$h_1>0,\ h_2>0$　(10.10)

の，Simpsonの公式を用いた近似として，設定してみよう．

$$f(x_2)=\int_{x_1}^{x_1+2h_1} dy_1\varphi(y_1, x_2) \tag{10.11}$$

の近似は，

$$f(x_2)\approx\frac{h_1}{3}\cdot\varphi(x_1, x_2)+\frac{4h_1}{3}\cdot\varphi(x_1+h_1, x_2)+\frac{h_1}{3}\cdot\varphi(x_1+2h_1, x_2) \tag{10.12}$$

であるから，

$$\int_{x_2}^{x_2+2h_2} dy_2 \int_{x_1}^{x_1+2h_1} dy_1\varphi(y_1, y_2)$$

$$=\int_{x_2}^{x_2+2h_2} dy_2 f(y_2)$$

$$\approx\frac{h_1}{3}\cdot\int_{x_2}^{x_2+2h_2} dy_2\varphi(x_1, y_2)+\frac{4h_1}{3}\cdot\int_{x_2}^{x_2+2h_2} dy_2\varphi(x_1+h_1, y_2)+\frac{h_1}{3}\cdot\int_{x_2}^{x_2+2h_2} dy_2\varphi(x_1+2h_1, y_2)$$

$$\begin{aligned}\approx\frac{h_1}{3}\cdot\frac{h_2}{3}\cdot[&\varphi(x_1, x_2)+4\varphi(x_1, x_2+h_2)+\varphi(x_1, x_2+2h_2)\\ &+4\varphi(x_1+h_1, x_2)+16\varphi(x_1+h_1, x_2+h_2)+4\varphi(x_1+h_1, x_2+2h_2)\\ &+\varphi(x_1+2h_1, x_2)+4\varphi(x_1+2h_1, x_2+h_2)+\varphi(x_1+2h_1, x_2+2h_2)]\end{aligned} \tag{10.13}$$

が得られる．よって，

$$(B\varphi)(x_1, x_2)$$

$$=\frac{1}{\frac{h_1}{3}\cdot\frac{h_2}{3}}\cdot\frac{1}{36}\int_{x_2}^{x_2+2h_2} dy_2 \int_{x_1}^{x_1+2h_1} dy_1\varphi(y_1, y_2)$$

$$\approx \frac{1}{36}\cdot\varphi(x_1, x_2) + \frac{1}{9}\cdot\varphi(x_1, x_2+h_2) + \frac{1}{36}\cdot\varphi(x_1, x_2+2h_2)$$

$$+\frac{1}{9}\cdot\varphi(x_1+h_1, x_2) + \frac{4}{9}\cdot\varphi(x_1+h_1, x_2+h_2) + \frac{1}{9}\cdot\varphi(x_1+h_1, x_2+2h_2)$$

$$+\frac{1}{36}\cdot\varphi(x_1+2h_1, x_2) + \frac{1}{9}\cdot\varphi(x_1+2h_1, x_2+h_2) + \frac{1}{36}\cdot\varphi(x_1+2h_1, x_2+2h_2) \tag{10.14}$$

と求められる．但し，式（10.6）から，

$$(B\varphi)(x_1, x_2) = 0 \quad \text{if} \quad x_1 = b-h,\, b \vee x_2 = d-h,\, d \tag{10.15}$$

と定義しておかなければならない．

$$h_1 = 1,\ h_2 = 1 \tag{10.16}$$

を採用するのがよい．

10.2　1 次独立な系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ の設定

10.2.1　三角関数系

$$\mathfrak{H} = L_2(M,\, dx_1dx_2) \tag{10.17}$$

$$M = \{< x_1, x_2 > \mid q_1 < x_1 < r_1,\ q_2 < x_2 < r_2\} \tag{10.18}$$

$$q_1 = -p_1,\ r_1 = +p_1,\ q_2 = -q_2,\ r_2 = +p_2,\ p_1, p_2 > 0 \tag{10.19}$$

のとき，三角関数系

$$\psi_{k,\ell}(x_1, x_2) \equiv \psi(1)_k(x_1)\cdot\psi(2)_\ell(x_2),\ k, \ell = 0, \pm1, \pm2, \cdots \tag{10.20}$$

ここに，$j = 1, 2$ として，

$$\psi(j)_0(x_j) = \frac{1}{\sqrt{2p_j}} \tag{10.21}$$

$$\psi(j)_k(x_j) = \frac{1}{\sqrt{p_j}}\cdot\cos\left(\frac{\pi k}{p_j}\cdot x_j\right),\ k = 1, 2, \cdots \tag{10.22}$$

$$\psi(j)_{-k}(x_j) = \frac{1}{\sqrt{p_j}}\cdot\sin\left(\frac{\pi k}{p_j}\cdot x_j\right),\ k = 1, 2, \cdots \tag{10.23}$$

この $\{\psi_{k,\ell}\}_{k,\ell=0,\pm1,\pm2,\cdots}$ は完全正規直交系である［A4］．

10.2.2　離散コサイン変換で使われる関数

動画像データ

$$\begin{aligned}\varphi = \{&\varphi(0,0), \varphi(0,1), \varphi(0,2), \cdots, \varphi(0, N_2-1),\\ &\varphi(1,0), \varphi(1,1), \varphi(1,2), \cdots, \varphi(1, N_2-1),\\ &\varphi(2,0), \varphi(2,1), \varphi(2,2), \cdots, \varphi(2, N_2-1),\\ &\cdots, \varphi(N_1-1, 0), \varphi(N_1-1, 1), \varphi(N_1-1, 2), \cdots, \varphi(N_1-1, N_2-1)\end{aligned} \tag{10.24}$$

が得られたとする．N_1, N_2 を共に 1 より小さくない整数とする．

$$\mathfrak{H} = L_2(M,\, dm) \tag{10.25}$$

$$M = \{< x_1, x_2 > \mid 0 \le x_1 \le N-1,\ 0 \le x_2 \le N_2-1\} \tag{10.26}$$

$$x = < x_1, x_2 > \tag{10.27}$$

$$dm(x) =$$

$$\begin{cases} 1\cdots x\in\{<k,\ell>|\ k=0,1,2,\cdots,N_1-1,\ \ell=0,1,2,\cdots,N_2-1\} \\ 0\cdots \text{otherwise} \end{cases} \tag{10.28}$$

を採用して，内積(φ,η)は，

$$(\varphi,\eta)=\int_M dm(x)\varphi(x)\cdot\overline{\eta}(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{\ell=0}^{N_2-1}\varphi(k,\ell)\cdot\overline{\eta}(k,\ell) \tag{10.29}$$

と与えられる．

$p=0,1,2,\cdots,N_1-1,\ q=0,1,2,\cdots,N_2-1$に対し，

$$\psi_{pq}(k,\ell)\equiv\psi(1)_p(k)\cdot\psi(2)_q(\ell),\ k=0,1,2,\cdots,N_1-1,\ \ell=0,1,2,\cdots,N_2-1 \tag{10.29}$$

ここに，$\psi(1)_p(k),\psi(2)_q(\ell),\ k=0,1,2,\cdots,N_1-1,\ \ell=0,1,2,\cdots,N_2-1$は次のように定義される：$j=1,2$に対し，

$$\psi(j)_0=\{\psi(1)_0(k)\ |\ k=0,1,2,\cdots,N_1-1\}, \tag{10.30}$$

ここに，$\psi(j)_0(k)=\sqrt{\dfrac{1}{N_j}}$ (10.31)

$$\psi(j)_p=\{\psi(j)_p(k)\ |\ k=0,1,2,\cdots,N_1-1\}, \tag{10.32}$$

ここに，$\psi(j)_p(k)=\sqrt{\dfrac{2}{N_j}}\cdot\cos\dfrac{(2k+1)\cdot p\cdot\pi}{2N_j},\ \ell=1,2,\cdots,N_j-1$ (10.33)

□

10.2.2　標本化関数系

今1つ，1次独立な系$\{\psi_{k,\ell}\}_{k,\ell=0,\pm1,\pm2,\cdots}$を選んでみよう．

$$\mathfrak{H}=L_2(M,dx_1x_2) \tag{10.34}$$

$$M=\{<x_1,x_2>|\ -\infty\le x_1\le\pm\infty,\ -\infty<x_2<+\infty\} \tag{10.35}$$

のとき，次の様に，標本化関数系$\{\psi_{k,\ell}\}_{k,\ell=0,\pm1,\pm2,\cdots}$を選ぶことができる．

$$\psi_{k,\ell}(x_1,x_2)\equiv\psi(1)_k(x_1)\cdot\psi(2)_\ell(x_2),\ k,\ell=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{10.36}$$

ここに，$j=1,2$として，正定数$W_j>0$を選び，

$$\psi_k(j)(x_j)=\sqrt{2W_j}\cdot\frac{\sin(2\pi W_jx_j-k\pi)}{2\pi W_jx_j-k\pi},\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{10.37}$$

標本化関数系$\{\psi_{k,\ell}\}_{k,\ell=0,\pm1,\pm2,\cdots}$は正規直交系であり，角周波数が$x_j$に関し$2\pi W_j$以下に制限されているという低域制限条件$(j=1,2)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx_2\exp[-\sqrt{-1}\lambda_2x_2]\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}dx_1\exp[-\sqrt{-1}\lambda_1x_1]\cdot\varphi(x_1,x_2)=0\quad\text{if}\quad|\lambda_j|>2\pi W_j\ (j=1,2) \tag{10.38}$$

の下で，パターン$\varphi(x_1,x_2)$は，

$$\varphi(x_1,x_2)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2W_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2W_2}}\cdot\varphi\left(\frac{k}{2W_1},\frac{\ell}{2W_2}\right)\cdot\psi_{k,\ell}(x_1,x_2),\ -\infty<x_1,x_2<+\infty \tag{10.39}$$

と1意的に表現される（Shannnonの標本化定理［A17］）．ここに，

$$(\varphi, \psi_{k,\ell}) = \frac{1}{\sqrt{2W_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2W_2}} \cdot \varphi\left(\frac{k}{2W_1}, \frac{\ell}{2W_2}\right), k, \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{10.40}$$

が成り立っている．

11.　適用例 6

11.1　ユニタリ作用素の作る 1 パラメータ群

H を自己共役作用素として，作用素 A は

$$A = \sqrt{-1} \cdot H \tag{11.1}$$

と表されるとしよう．

$$\exp[y] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot y^n \tag{11.2}$$

が成り立っているから，このとき，作用素論的方程式

$$\frac{d}{dt} \exp[tA]\eta = A \cdot \exp[tA]\eta \tag{11.3}$$

が成り立つ［A21］．

$\mathfrak{H} = L_2(M, dm(x)), x = < x_1, x_2 >$ において考えよう．つまり，

$$\varphi(x_1, x_2; t) \equiv (\exp[tA]\eta)(x_1, x_2) \tag{11.4}$$

とおくと，方程式（11.3）は

$$\frac{d}{dt} \varphi(x_1, x_2 : t) = (A\varphi)(x_1, x_2 : t) \tag{11.5}$$

と書き直される．方程式（11.5）の，t が十分小さい実定数である時の近似

$$\varphi(x_1, x_2 : t + \Delta t) = \varphi(x_1, x_2 : t) + (\Delta t) \cdot (A\varphi)(x_1, x_2 : t) \tag{11.6}$$

を採用すると，

$$\varphi(x_1, x_2 : t + \Delta t) = [1 + (\Delta t) \cdot A]\varphi(x_1, x_2 : t) \tag{11.7}$$

である．

$$\varphi \equiv \varphi(x_1, x_2 : t + \Delta t) \tag{11.8}$$

$$\eta \equiv \varphi(x_1, x_2 : t) \tag{11.9}$$

とおくと，観測方程式

$$[1 + (\Delta t) \cdot A]\eta = \varphi \tag{11.10}$$

が得られることに注意する．このようにして，

$B \equiv 1 + tA$，ここに，t はその絶対値が十分小さい実数　(11.11)

として，観測方程式

$$B\eta = \varphi \tag{11.12}$$

を考えることが可能となる．近似

$$\exp[y] \approx 1 + y \tag{11.13}$$

を採用すると，

$$\exp[tA] = \exp[\sqrt{-1}tH] \fallingdotseq 1 + \sqrt{-1}tH \ (= 1 + tA) \tag{11.14}$$

が成り立っているから，観測方程式（11.12）は

$$B\eta \fallingdotseq \exp[tA]\eta = \varphi \tag{11.15}$$

と書き直される． 1 パラメータ t の作用素 $\exp[tA](=\exp[\sqrt{-1}tH])$ の作る群

$$\{\exp[tA]\}_{-\infty<t<+\infty} \tag{11.16}$$

は，等式

$$\forall\varphi\in\mathfrak{H}, \|\exp\{tA]\varphi\|=\|\varphi\| \quad \text{for any real number} \quad t \tag{11.17}$$

が成り立つという意味で，ユニタリ作用素 $\exp[tA]$ の作る 1 パラメータ群である．

11.2　観測方程式内の助変数 t の決め方

式（11.11）の助変数 t を決めよう．

$$\varphi(x_1, x_2; t) = cons\tan t$$

$$\Leftrightarrow$$

$$0 = \frac{d}{dt}\varphi(x_1, x_2; t) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{11.18}$$

であるから，

$$u = \frac{\partial x_1}{\partial t},\ v = \frac{\partial x_2}{\partial t} \tag{11.19}$$

とおくと，文献［A19］によれば，次の指摘がなされている：

The standard optic-flow equations are given by

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi\right)\cdot u + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi\right)\cdot v = -\left(\frac{d}{dt}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi\right) \tag{11.20}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi\right)\cdot u + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi\right)\cdot v = -\left(\frac{d}{dt}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi\right) \tag{11.21}$$

, where

$\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x_1, x_2; t), \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi(x_1, x_2; t)$　are the　x_1, x_2　derivatives of the first image and

$\frac{d}{dt}\varphi(x_1, x_2; t)$　is the temporal derivative between the two frames.　□

方程式（11.18）を勘案し， 2 式（11.11），（11.12）の $B\eta\equiv[1+tA]\eta=\varphi$ を

$$t = u = v \tag{11.22}$$

と，t は求まる．

11.3　線形観測作用素 B の設定

（1）任意の実定数 u について，

$$(\exp[\sqrt{-1}\cdot u\cdot\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{d}{dx}]\eta)(x) \tag{11.23}$$

$$= (\exp[u\cdot\frac{d}{dx}]\eta)(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot(u\frac{d}{dx})^n]\eta(x) \quad \because \quad \exp[y]\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot y^n = 1+y+\frac{1}{2}\cdot y^2+\cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!} \cdot u^n \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^n \eta(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!} \cdot [(x+u)-x]^n \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^n \eta(x) \quad \because \quad u=(x+u)-x$$

$$= \eta(x+u) \quad \because \quad \text{テーラ展開} \tag{11.24}$$

である．よって，可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M;\, dm)$ の特別な場合として，

$$\mathfrak{H} = L_2(R,\, dx)\text{，ここに，}R\text{ は実数全体の集合} \tag{11.25}$$

を選ぶば，自己共役作用素

$$H = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{d}{dx} \tag{11.26}$$

について，

$$(\exp[\sqrt{-1} \cdot u \cdot H]\eta)(x) = \eta(x+u) \quad \text{for any real number} \quad u \tag{11.27}$$

が成り立つ．

$$B = 1 + t \cdot \sqrt{-1} \cdot H$$

$$= 1 + t \cdot \frac{d}{dx} \tag{11.28}$$

t が共に十分小さい実定数ならば，

$$(B\eta)(x) \approx \exp[\sqrt{-1} t \cdot H]\eta(x) = \exp[t \cdot \frac{d}{dx}]\eta(x)$$

$$= \eta(x+t) \tag{11.29}$$

が成り立つ．

（2） 可分なヒルベルト空間

$$\mathfrak{H} = L_2(R^2,\, dx_1 dx_2),\ R^2\text{ は 2 次元平面} \tag{11.30}$$

を選べば， 2 つの自己共役作用素

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1},\ H_2 = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \tag{11.31}$$

を考えることが出来る．

$$B' = 1 + t_1 \cdot \sqrt{-1} \cdot H_1 + t_2 \cdot \sqrt{-1} \cdot H_2$$

$$= 1 + t_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + t_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \tag{11.32}$$

について，t_1, t_2 が共に十分小さい実定数ならば，

$$(B'\eta)(x_1, x_2) \approx \exp[\sqrt{-1} t_1 \cdot H_1 + \sqrt{-1} t_2 \cdot H_2]\eta(x_1, x_2) = \exp[t_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + t_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}]\eta(x_1, x_2)$$

$$= \eta(x_1 + t_1, x_2 + t_2) \tag{11.33}$$

が成り立つ．

$$t_1 = t_2 = t \tag{11.34}$$

とおけば，

$$(B\eta)(x_1, x_2) \approx \exp[\sqrt{-1} t \cdot (H_1 + H_2)]\eta(x_1, x_2) = \exp[t \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + t \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}]\eta(x_1, x_2)$$

$$= \eta(x_1 + t, x_2 + t) \tag{11.35}$$

（3）原点に関する縮小・拡大群

可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}=L_2(M;dm)$ として，

$$M=R^2\text{（2 次元全平面）} \tag{11.36}$$

$$dm(x)=dm(x_1,x_2)=\frac{1}{x_1^2+x_2^2}dx_1dx_2 \tag{11.37}$$

の場合を選ぶことができる．この可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}=L_2(R^2:\frac{1}{x_1^2+x_2^2}dx_1dx_2)$ では，

$$U_t\varphi(x_1,x_2)=\varphi(e^{-t}\cdot x_1,\ e^{-t}\cdot x_2),\ -\infty<t<+\infty$$

$$\text{for any}\quad \varphi\in\mathfrak{H}=L_2(R^2:\frac{1}{x_1^2+x_2^2}dx_1dx_2) \tag{11.38}$$

と定義される縮小・拡大の線形作用素 $U_t\,(-\infty<t<+\infty)$ は，

$$\forall\varphi,\forall\eta\in\mathfrak{H}=L_2(R^2:\frac{1}{x_1^2+x_2^2}dx_1dx_2),\ (T_t\varphi,\ T_t\eta)=(\varphi,\eta) \tag{11.39}$$

が成立していることから，ユニタリ作用素であることがわかる．

自己共役作用素

$$H=x_1\cdot\frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\cdot\frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{11.40}$$

を導入して，ユニタリ作用素 U_t は

$$U_t=\exp[-\sqrt{-1}\cdot t\cdot H] \tag{11.41}$$

と表現できる．

直角座標系 $x=<x_1,x_2>\in R^2$ は，

$$p=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,(\geq 0),\ (-\frac{\pi}{2}\leq)\,q=\tan^{-1}\frac{x_2}{x_1}\,(\leq\frac{\pi}{2}) \tag{11.42}$$

で定義される極座標系 $<p,q>$ では，式（11.40）の H は，

$$H=p\cdot\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial p} \tag{11.43}$$

と表され，

$$(B\eta)(x_1,x_2)=[1+t\cdot\sqrt{-1}H]\eta(x_1,x_2)$$

$$=\eta(x_1,x_2)+t\cdot x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\eta(x_1,x_2)+t\cdot x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\eta(x_1,x_2) \tag{11.44}$$

について，t が十分小さい実定数のとき

$$(B\eta)(x_1,x_2)\approx\exp[\sqrt{-1}\cdot t\cdot H]\eta(x_1,x_2)=\eta(\exp[t]x_1,\ \exp[t]x_2)$$

$$=\eta((\exp[t]p)\cdot\cos q,\ (\exp[t]p)\cdot\sin q) \tag{11.45}$$

11.4　1 次独立な系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ の設定

11.4.1　1 次元の場合

$$L=\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm\eta\} \tag{11.46}$$

として，

$$-\infty<a_{-n}<a_{-n+1}<\cdots<a_{-1}<a_0<a_1<\cdots<a_{n-1}<a_n<\infty \tag{11.47}$$

を選定し，1 次独立な系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ の各元 ψ_k を

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(x-a_k)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{11.48}$$

と設定できる．

11.4.2　2 次元の場合

$$L = \{<k, \ell>| \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm m, \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm n\} \tag{11.49}$$

として，

$$\begin{aligned} &-\infty < a_{-m} < a_{-m+1} < \cdots < a_{-1} < a_0 < a_1 < \cdots < a_{m-1} < a_m < \infty \\ &-\infty < b_{-n} < b_{-n+1} < \cdots < b_{-1} < b_0 < b_1 < \cdots < b_{n-1} < b_n < \infty \end{aligned} \tag{11.50}$$

を選定し，1 次独立な系$\{\psi_{<k,\ell>}\}_{<k,\ell>\in L}$の各元$\psi_{<k,\ell>}$を

$$\psi_{k,\ell}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(x_1-a_k)^2}{2\sigma^2}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(x_2-b_\ell)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{11.51}$$

と設定できる．

12.　適用例 7

12.1　作用素に対するフーリェ変換法

S. Suzukiにより提案されている作用素に対するフーリェ変換法については，文献［B1］の5.1節，並びに，文献［B6］の付録で解説されているが，この変換法は次のように，説明される．

［作用素に対するフーリェ変換法］

$$\sup_\lambda \left| f(\lambda) - \int_{-n}^{+n} du \ \exp[\sqrt{-1}u\lambda] \cdot \left[\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dq \ \exp[-\sqrt{-1}uq] \cdot f(q)\right]\right|$$

$$\to 0 \ (n \to \infty) \tag{12.1}$$

が成立するような，実変数λのBorel可測関数$f(\lambda)$を考えよう．

このとき，自己共役作用素Hの関数$f(H)$は，

$$f(H) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{+n} du \left[\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dq \ \exp[-\sqrt{-1}uq] \cdot f(q)\right] \cdot \exp[\sqrt{-1}uH] \tag{12.2}$$

と表現される．

□

さて，自己共役作用素Hの関数$f(H)$として，線形観測作用素Bを

$$B\eta \equiv f(H)\eta \tag{12.3}$$

と設定する．実数値変数λの複素数値Borel可測関数$f(\lambda)$を

$$f(\lambda) = \frac{a^2}{\lambda^2 + a^2}, \ a > 0 \tag{12.4}$$

と設定すれば，S. Suzukiの作用素に対するフーリェ変換法を適用して，線形観測作用素Bは

$$B\eta \equiv f(H)\eta = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} du\ \exp[-a\,|\,u\,|]\cdot\exp[+\sqrt{-1}\cdot u\cdot H]\eta \tag{12.5}$$

と表される．

実定数u を助変数にもつ線形作用素$\exp[\sqrt{-1}\cdot u\cdot H]$は，等式

$$\forall\varphi\in\mathfrak{H},\ \|\exp[\sqrt{-1}\cdot u\cdot H]\varphi\|=\|\varphi\| \quad \text{for any real number} \quad u \tag{12.6}$$

を満たし，ユニタリ作用素である．

12.2　定積分

式（12.2）の関数$f(\lambda)=\dfrac{a^2}{\lambda^2+a^2}$, $a>0$について，フーリェ積分

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} dq\ \exp[-\sqrt{-1}uq]\cdot f(q) = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\exp[-a\cdot|\,u\,|] \tag{12.7}$$

が成り立つ．

（証明）先ず，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq\ \exp[-\sqrt{-1}uq]\cdot f(q)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} dq\ \cos[uq]\cdot f(q) - \sqrt{-1}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} dq\ \sin[uq]\cdot f(q) \tag{12.8}$$

であるが，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq\ \cos[uq]\cdot f(q)$$

$$=2\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} dq\ \cos[uq]\cdot f(q) \quad \because \quad f(\lambda)=f(-\lambda)$$

$$=a\cdot\pi\cdot\exp[-a\cdot|\,u\,|] \tag{12.9}$$

と，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq\ \sin[uq]\cdot f(q)=0 \quad \because \quad f(\lambda)=f(-\lambda) \tag{12.10}$$

とを代入して，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq\ \exp[-\sqrt{-1}uq]\cdot f(q)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} dq\ \cos[uq]\cdot f(q)$$

$$= a\cdot\pi\cdot\exp[-a\cdot|u|] \tag{12.11}$$

を得，これから，明らか． □

13.　適用例 8

本章では，作用素に対するラプラス変換法でそのパターン変形に関する情報処理機能が解析できるような線形観測作用素 B が説明される．S. Suzukiにより提案されている作用素に対するラプラス変換法については，文献［B48］で解説されている．

13.1　感覚神経系による「時間・空間」両情報の寄せ集めの機能

線形観測作用素 B は，

$$(B\eta)(x) \equiv (B_t\eta)(x) = \begin{cases} 0 \cdots t<0 \text{ のとき} \\ \left(\int_0^t d\tau\cdot q\,(t-\tau)\cdot G_\tau\eta\right)(x) \cdots t \geq 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{13.1}$$

と設定される．線形観測作用素 B の，$t\geq 0$ のときの，畳み込み積分

$$\left(\int_0^t d\tau\cdot q\,(t-\tau)\cdot G_\tau\eta\right)(x) \tag{13.2}$$

について，次の解釈が可能である：

実変数 t の関数 $q\,(t)$ は時間インパルス応答に相当し，作用素 G_t は t に依存する $\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{H}$ からへの線形情報処理機能（パターンからパターンへ変換する作用素）である．

$\int_0^t d\tau\cdot q\,(t-\tau)\cdots\cdot$ の機能は，情報処理領域（例えば，視覚領域）内受容野にある情報の時間的寄せ集めを表し，一方，G_t の部分は感覚神経系による空間情報の寄せ集めの機能を担当することになる． □

例えば，文献［B6］では，は次のように選ばれている：

2 次元平面 R^2 での直交座標系 $x=<x_1, x_2>$ を導入し，

$$M = R^2 \tag{13.3}$$

$$dm\,(x) = \frac{1}{x_1^2+x_2^2}dx_1dx_2 \tag{13.4}$$

を採用したヒルベルト空間 $\mathfrak{H}=L_2\,(M, dm\,(x))$ を考える．極座標系

$$p=\sqrt{x_1^2+x_2^2},\ q=\tan^{-1}\frac{x_2}{x_1} \tag{13.5}$$

を導入すれば，

$$dm\,(x)=\frac{1}{p}dpdq \tag{13.6}$$

が成り立つ．自己共役作用素

$$H = p\cdot\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial p} = x_1\cdot\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\cdot\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{19.7}$$

を使って，ユニタリ作用素$\exp[-\sqrt{-1}tH]$が定義され，原点$< 0, 0 >$に関する縮小・拡大の機能

$$(\exp[-\sqrt{-1}tH]\varphi)(x_1, x_2) = \varphi(\exp[-t]x_1, \exp[-t]x_2)$$

$$\text{for any}\quad (-\infty <)\, t\, (< +\infty) \tag{13.8}$$

が成り立つ．

1 実変数t の 2 値関数

$$Y(t) = \begin{cases} 1\cdots t \geq 0 \text{のとき} \\ 0\cdots t < 0 \text{のとき} \end{cases} \tag{13.9}$$

を使って，実変数t の関数$q(t)$，作用素G_t は，

$$q(t) =$$

$$\nu_0\cdot\exp[-\nu_0 t]\cdot\{a_0 + \frac{1}{b_0}\cdot\sin(b_0 t)\}$$

$$+ Y(t-t_1)\cdot[\nu_1\cdot\exp[-\nu_1(t-t_1)]\cdot\{a_1 + \frac{1}{b_1}\cdot\sin(b_1(t-t_1))\}] \tag{13.10}$$

$$G_t = c_0 + c_1\cdot\cos\{(t+t_1')H\} - c_2\cdot\cos(tH) \tag{13.11}$$

ここに，

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\cdot[\exp[+\sqrt{-1}\theta] + \exp[-\sqrt{-1}\theta]] \tag{13.12}$$

と導入されている．　□

13.2　作用素に対するラプラス変換$\mathfrak{L}$，ラプラス逆変換$\mathfrak{L}^{-1}$による，感覚神経系の機能の取り扱い

ラプラス変換$\mathfrak{L}$，ラプラス逆変換$\mathfrak{L}^{-1}$について説明しよう．

s を複素変数とすると，

$$\text{ラプラス変換}\ \mathfrak{L}(\int_0^1 d\tau\cdot q(t-\tau)\cdot G_\tau](s)$$

$$\equiv \int_0^{+\infty} dt\cdot\exp[-st]\cdot\int_0^t d\tau\cdot q(t-\tau)\cdot G_\tau \tag{13.13}$$

が定義される．

このラプラス変換$\mathfrak{L}$については，積の法則，つまり，

或る実数βが存在し，

$$\mathfrak{L}(\int_0^1 d\tau\cdot q(t-\tau)\cdot G_\tau](s)$$

$$= \mathfrak{L}[q(t)](s)\cdot\mathfrak{L}[G_t](s)\quad \text{if}\quad \mathrm{Re}(s)(s\text{の実部}) > \beta \tag{13.14}$$

が成り立つ．関数 $q(t)$，作用素 G_t の角周波数 s の成分 $\mathfrak{L}[q(t)](s)$，$\mathfrak{L}[G_t](s)$ が積の形 $\mathfrak{L}[q(t)](s)\cdot\mathfrak{L}[G_t](s)$ で現れ，感覚神経系 $\int_0^1 d\tau\cdot q(t-\tau)\cdot G_\tau$ の角周波数 s の成分が決まることを，式（13.14）は明らかにしている．

感覚神経系 $\int_0^1 d\tau\cdot q(t-\tau)\cdot G_\tau$ の角周波数 s の成分 $\mathfrak{L}[q(t)](s)\cdot\mathfrak{L}[G_t](s)$ を使って，感覚神経系 $\int_0^1 d\tau\cdot q(t-\tau)\cdot G_\tau$ を復元するのには，角周波数 s の成分 $\mathfrak{L}[q(t)](s)\cdot\mathfrak{L}[G_t](s)$ にラプラス逆変換 $\mathfrak{L}^{-1}$ を実行すればよいことは，次の式（13.16）が指摘している．

ラプラス逆変換 $\mathfrak{L}^{-1}$ が存在するとは限らないが，ラプラス逆変換 $\mathfrak{L}^{-1}$ が存在し，

$$[\int_0^1 d\tau\cdot q(t-\tau)\cdot G_\tau\varphi](x)$$

$$=\mathfrak{L}^{-1}[\mathfrak{L}(\int_0^1 d\tau\cdot q(t-\tau)\cdot G_\tau)(s))\varphi](x) \tag{13.15}$$

$$=[\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\cdot\int_{\gamma-\sqrt{-1}a}^{\gamma+\sqrt{-1}a} ds\cdot\exp[st]\cdot\mathfrak{L}(\int_0^1 d\tau\cdot q(t-\tau)\cdot G_\tau)(s)\varphi](x)$$

$$\text{if}\quad \gamma>\beta \tag{13.16}$$

が成り立つための，についての 2 条件 1， 2 は次のように述べられる：

［条件 1］

実変数 t の実数値関数 $q(t)$ は絶対値に関し，t の関数として有界変動であり，然も，不等式

$$|q(t)|\leq C_2\cdot\exp[\beta_2 t]\quad\text{for any}\quad t\geq 0 \tag{13.17}$$

を満たす 2 つの実数 $C_2(\geq 0)$，β_2 が存在する．

［条件 2］

t を助変数にもつ線形作用素 G_t は作用素のノルムに関し，$t\geq 0$ の作用素値関数として有界変動であり，然も，不等式

$$\|G_t\|\equiv\sup_{\|\varphi\|=1}\|G_t\varphi\|\leq C_1\cdot\exp[\beta_1 t]\quad\text{for any}\quad t\geq 0 \tag{13.18}$$

を満たす 2 つの実数 $C_1(\geq 0)$，β_1 が存在する． □

上述の式（13.16）での β は，不等式

$$\beta>\max\{\beta_1,\beta_2\}+1 \tag{13.19}$$

を満たすものである． □

2 式（13.10），（13.11）の実変数 t の関数 $q(t)$，作用素 G_t について，2 式（13.14），（13.16）を計算することは，省略される．

14.　むすび

S. Suzukiは，SS 公理系を基盤として，万能性認識システムRECOGNITRON$=<\Phi_B, T, SM, BSC>$を構成した．S. Suzukiにより提案されている認識システムRECOGNITRONは任意の認識の働きをシミュレートできるという意味で万能である．RECOGNITRONは入力パターンφに対し，そのパターンモデル$T\varphi$を確保し，φの代りに使う．写像Tはモデル構成作用素と呼ばれる．処理の対象とするパターンφの集合Φも導入される．表象付き連想形多段階認識を行うRECOGNITRONは入力パターンφに対し，連想形認識方程式を多段階帰納推理を行いながら解く形で，多段階認識過程を生成し，φの帰属するカテゴリ並びに，φから想起される表象（そのカテゴリの持つ諸性質を典型的に代表する代表パターンのモデル）を求める．

RECOGNITRONのこの構成原理は，ある半順序に関する最小上界（上限）を求める半順序情報処理原理に従い，パターン認識の働きを多段階にわたる推論過程（最小不動点を計算する過程）として捉え，従来のパターン情報処理の働きを根本的に変革している．多段階にわたる推論過程はニューラルネットの理論を適用して容易に得られるけれども，半順序情報処理原理が陽に導入されたことが，ニューラルネットの理論によるパターン認識の働きの捉え方を超えて，パターン情報処理の働きを根本的に変革している．

パターン復元の理論から主張できることは，入力パターン$\varphi\in\Phi$を第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属していると連想形認識したRECOGNITRONは，入力パターン$\varphi\in\Phi$をカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属する典型的な代表パターンω_jのパターンモデル$T\omega_j\in T\cdot\Omega\subset\Phi$として復元していることである．

本論文では，式（1.1）の認識システムRECOGNITRON$=<\Phi_B, T, SM, BSC>$内の２番目の構成要素Tを決定する１つの方法が研究された．振り返って説明すれば，次のようにまとめられる．

パターン$\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$が観測されたとき，式（4.4）の線形観測方程式$B\eta=\varphi$を解いて得られる，線形作用素$B$により変形される前の式（4.8）のパターン

$$\eta=\sum_{k\in L}c_k(\varphi)\cdot\psi_k\in\Phi\subset\mathfrak{H}\tag{14.1}$$

内の各１次係数$c_k(\varphi)(k\in L)$を使い，パターン$\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$から抽出される第$\ell\in L$番目の特徴量$u(\varphi,\ell)\in Z$（複素数全体の集合）を式（1.11）の如く定義し，φの代りとなるパターンモデル$T\varphi$として，式（1.8）の如く定義すれば，順序対$[\Phi, T]$がSS 理論（パターン認識の数学的理論）のaxiom 1（3.1節）を満たすことを証明した．ここに，式（3.6）のように表される構成的集合Φは処理の対象とする問題のパターンφの集合である．その後，線形作用素Bと，１次独立な系$\{\psi_k\}_{k\in L}$を具体的に選定し，このような写像（モデル構成作用素）Tを線形作用素Bを具体的の数例，構成した．

線形方程式$B\eta=\varphi$の解$\eta\in\mathfrak{H}$から観測後のパターン$\varphi\in\Phi$のパターンモデル$T\varphi$を決めるのが他の諸研究に見られない特徴である．

本論文では，観測後のパターン$\varphi\in\Phi$を決定する線形観測方程式$B\eta=\varphi$の解$\eta\in\Phi$を１次独立な系$\{\psi_k\}_{k\in L}$の１次結合$\eta=\sum_{k\in L}c_k\cdot\psi_k$の形で残差法を適用し求める．得られた１次結合の各係数$c_k(k\in L)$を使って，axiom 1の（ i ），（ii），（iii）の３後半，並びに，（iv）を満たすパターンモデル$T\varphi=\sum_{\ell\in L}u(\varphi,\ell)\cdot B\psi_\ell$を決定する．ここに，$u(\varphi,\ell)\in Z$（複素数全体の集合）はパターン$\varphi\in\Phi$から抽出される第$\ell\in L$番目の特徴量である．その後，パターン集合$\Phi$と残差法によるモデル構成作用素$T$とからなる順序対$[\Phi, T]$を確保する．この対$[\Phi, T]$はaxiom 1を満たす．

その後，(1) 離散コサイン変換　(2) 標本化定理　(3) 光学的流れ　(4) 作用素についてのフーリェ変換　(5) 作用素についてのラプラス変換などを使い，各々の場合に作用素B，1次独立な系$\{\psi_k\}_{k\in L}$を決定している．尚，各諸例において，定理4.2を適用して，定理4.1の連立1次方程式の解c_k $(k\in L)$が存在すことを示すことは省略されている．

本論文で得られた式 (1.8) のパターンモデル$T\varphi$は，パターン情報処理分野で広範囲に有効に応用できるものである．

会話音声を扱うのには，これまでのパターン$\varphi(t)$の代りに，

$$\varphi(t;s)+\frac{dt}{ds}\cdot\frac{\partial\varphi(t;s)}{\partial t},\ \text{ここに，}t,s\ \text{は各々，実時刻変数，仮想時刻変数} \tag{14.2}$$

を扱えばよい．また，動画像を扱うのには，これまでのパターン$\varphi(x_1,x_2)$の代りに，

$$\varphi(x_1,x_2;t)+\frac{dx_1}{dt}\cdot\frac{\partial\varphi(x_1,x_2;t)}{\partial x_1}+\frac{dx_2}{dt}\cdot\frac{\partial\varphi(x_1,x_2;t)}{\partial x_2},\ \text{ここに，}t\ \text{は時刻変数} \tag{14.3}$$

を扱えばよい．

この配慮の下で，SS 理論は，会話音声，動画像をも扱うことが可能となる．この種の研究を推し進めなければならない．

文　献　A

[A 1] 吉田耕作，河田敬義，岩村つらね：位相解析の基礎，岩波書店，May 1963

[A 2] 青木利夫，高橋渉：集合・位相空間要論，培風館，Sept.1979

[A 3] Angus E. Taylor, David C. Lay: Introduction to function analysis, John Wiley & Sons, Inc., 1980

[A 4] Gilbert G. Walter: Wavelets and other orthogonal systems with applications, CRC Press, Inc., 1994

[A 5] Andrzej Cichocki, Rolf Unbehauen: Neural networks for optimization and signal processing, John Wiley & Sons, Mar.1994

[A 6] Abhijit S. Pandya and Robert B. Macy: Pattern recognition with neural networks in C++, A CRC Book Published in Cooperation with IEEE, 1996

[A 7] Luc Devroye, Làszlo Györfi and Gàbor Lugosi: A probabilistic theory of pattern recognition, Springer-Verlag New York. Inc., 1996

[A 8] E. クライツィグ：数値解析（原著第8版），田村義保訳，近藤次郎・堀素夫監訳，培風館，Dec.2003

[A 9] 鳥脇純一郎：認識工学（－パターン認識とその応用－），コロナ社（テレビジョン学会教科書シリーズ　9），コロナ社，Mar.1993

[A10] 酒井幸市：ディジタル画像処理入門，コロナ社，Aug.1998

[A11] 福村晃夫：情報学（絵とき読本），オーム社，Mar.1996

[A12] 公文俊平：情報学がわかる．AREA Mook Asahi Shimbun Extra Report & Analysis Number 42, ASAHI SHIMBUN, 1998

[A13] 美濃導彦，西田正吾：情報メディア工学（新世代工学シリーズ），オーム社，June 1999

[A14] 安西祐一郎：認識と学習（岩波講座ソフトウェア科学16），岩波書店，Dec.2000

[A15] 安居院猛，長尾智晴：画像の処理と認識，昭晃堂，April 2000

［A16］今井聖：音声認識（情報・電子入門シリーズ⑯），共立出版，Nov.1995
［A17］瀧保夫；通信方式（電気通信講座19），コロナ社，電気通信学会編，June 1964
［A18］安西祐一郎：認知科学と人工知能（計算機科学／ソフトウェア技術講座 17），共立出版，p.17, Nov.1987
［A19］Shai Avidan: Support Vector Tracking, IEEE Trans. on pattern analysis and machine intelligence, vol. 26, no.8, pp.1064－1072, Aug.2004
［A20］石井健一郎，上田修功，前田英作，村瀬洋：わかりやすいパターン認識，オーム社（2000）
［A21］吉田耕作：近代解析，共立出版，Dec.1963

文　献　B

［B１］鈴木昇一：認識工学，柏書房，Feb.1975
［B２］鈴木昇一：ニューラルネットの新数理，近代文芸社，Sept.1996
［B３］鈴木昇一：パターン認識問題の数理的一般解決，近代文芸社，June 1997
［B４］鈴木昇一：認識知能情報論の新展開，近代文芸社，Aug.1998
［B５］鈴木昇一：パターンのエントロピーモデル，電子情報通信学会論文誌（D－Ⅱ），vol.J77-D-Ⅱ, no.10, pp.2220－2238, Nov.1994
［B６］鈴木昇一：手書き漢字の側抑制効果的分解とその計算機シミュレーション，情報処理学会誌, vol.15, no.12, pp.927－934, Dec.1974
［B７］鈴木昇一：画像情報量とその手書き漢字への応用，画像電子学会誌，vol.4,　no.1,　pp.4－12, Apr.1975
［B８］鈴木昇一：抽出された特徴による手書き漢字構造の再生，情報処理学会誌，vol.18,　no.11, pp.1115－1122, Nov.1977
［B９］鈴木昇一：回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.4, pp.36－56, Dec.1983
［B10］鈴木昇一：連想形記憶器MEMOTRONと日本語単独母音系列の再生に関する計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.7, pp.14－29, Dec.1986
［B11］鈴木昇一：多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.10, pp.35－49, Dec.1989
［B12］鈴木昇一：帰属係数法に基づく類似度，帰属関係・あいまい度，認識情報量の計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.11, pp.51－68, Dec.1990
［B13］鈴木昇一：構造受精法と日本語単独母音の認識，情報研究（文教大学・情報学部）no.18, pp.17－51, Dec.1998
［B14］鈴木昇一，前田英明：有声破裂音の代表パターンの学習的決定と，その計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.20, pp.77－95, Dec.1998
［B15］鈴木昇一，前田英明：変動エントロピーによる有声破裂音の順序付けと，その計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.21, pp.51－78, Mar.1999
［B16］鈴木昇一：平均顔を用いた顔画像の２値化，並びに，目・鼻・口の抽出と，その計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.22, pp.65－150, Dec.1999

［B17］ 鈴木昇一：界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の，顔画像処理に関する計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.23, pp.109－182, Mar.2000

［B18］ 鈴木昇一：風景画から知識を抽出し，解釈するシステムの，ファジィ推論ニューラルネットによる構成，情報研究（文教大学・情報学部），no.23, pp.183－265, Mar.2000

［B19］ 鈴木昇一：各個人の感性を反映した認識システムRECOGNITRON，情報研究（文教大学・情報学部），no.24, pp.185－257, Dec.2000

［B20］ 鈴木昇一：プロダクション・システムとしてのファジィ・マルチメディア・コンピュータと，空間多重パターンファジィ推論系，情報研究（文教大学・情報学部），no.24,　pp.105－183, Dec.2000

［B21］ 鈴木昇一：*SS* 大分類関数 *BSC* の適応的構成への，計算論的学習理論の適用，情報研究（文教大学・情報学部），no.25, pp.185－236, Mar.2001

［B22］ 鈴木昇一：量子力学の諸原理，多段階量子認識系と，心理状態を取り入れた想起に基づく部分空間認識法，情報研究（文教大学・情報学部），no.25, pp.237－282, Mar.2001

［B23］ 鈴木昇一：測度的不変量検出形認識系の構成理論，電子通信学会論文誌（D），vol.55－D, no.8, pp.513－538, Aug.1972

［B24］ 鈴木昇一，斉藤静昭，奥野治雄，太田芳雄：画像の復元とその計算機シュミレーション，工学院大学研究報告，no.39, pp.198－206, Jan.1976

［B25］ 鈴木昇一，佐久間拓也，前田英明：数理形態学における諸演算とモデル構成作用素，情報研究（文教大学・情報学部），no.17, pp.133－170, Dec.1996

［B26］ 鈴木昇一：Radial-Basis Function Networks, Wavelet-Based Networksを用いたモデル構成作用素の構成法，情報研究（文教大学・情報学部），no.17, pp.71－132, Dec.1996

［B27］ 鈴木昇一：類似度関数を用いた確率的緩和法，情報研究（文教大学・情報学部），no.20,　pp.23－75, Dec.1998

［B29］ 鈴木昇一：直交系によるパターモデルの構成，情報研究（文教大学・情報学部），no.21,　pp.23－49, Mar.1999

［B30］ 鈴木昇一：認識行為に向けての，効用最大化原理，情報研究（文教大学・情報学部），no.22, pp.151－210, Dec.1999

［B31］ 鈴木昇一：高次認知機能における論理表現の要素，情報研究（文教大学・情報学部），no.19, pp.29－82, Mar.1998

［B32］ 鈴木昇一：Support Vector Machineを利用した大分類関数の構成，情報研究（文教大学・情報学部），no.26, pp.1－62, Dec.2001

［B33］ 鈴木昇一：２カテゴリ分類困難度の情報理論，情報研究（文教大学・情報学部），no.26,　pp.63－160, Dec.2001

［B34］ 鈴木昇一：一般化類似度関数を用いた“導出原理”による第1階述語推論，情報研究（文教大学・情報学部），no.27, pp.27－71, Mar.2002

［B35］ 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：風景画の理解に関するJAVA言語によるRECOGNITRONの計算機シミュレーション，情報研究（文教大学・情報学部），no.27, pp.73－109, Mar.2002

［B36］ 鈴木昇一：遺伝的アルゴリズムにおける適合度比例選択戦略を利用した進化方程式の，パターン多段階変換に基づく認識への応用，情報研究（文教大学・情報学部），no.28,　pp.37－67, Dec.2002

［B37］鈴木昇一：近傍を利用した音素認識のためのモデル構成作用素T，類似度関数SM，大分類関数BSCの諸構成と，SS不動点探索型多段階想起認識，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.69－141, Dec.2002
［B38］鈴木昇一：JAVA言語で実装化された画像理解システムIUSの動作概要と，その稼動方法，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.143－165, Dec.2002
［B39］鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：JAVA言語による計算機シミュレーションで生じた風景画像の理解場面での多段階連想形認識過程の異常現象，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.123－166, July.2003
［B40］鈴木昇一：パターン情報処理（モデル構成作用素，誤差逆伝播学習２層ニューラルネット）と，論理的含意とによる非単調的知識推論，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.75－121, July 2003
［B41］鈴木昇一：可分な一般抽象ヒルベルト空間での$K-L$直交系の理論，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.41－73, July 2003
［B42］鈴木昇一：パターン系列（動画像，会話音声）の，dynamical systemによる連想理論と，連想器SPATEMTRON，情報研究（文教大学・情報学部），no.30, pp.139－186, Jan.2004
［B43］鈴木昇一：入出力例の系列を用いた“対連想問題・その擬逆問題”の一般解，情報研究（文教大学・情報学部），no.30, pp.81－137, Jan.2004
［B44］鈴木昇一：共役勾配法の一般解における直交系の応用（画像復元，パターンモデルの構成，パターン集合の情報理論的次元），情報研究（文教大学・情報学部），no.30, pp.27－79, Jan.2004
［B45］鈴木昇一：２つのパターンモデル構成作用素の，λ言語論理による構成法，情報研究（文教大学・情報学部），no.31, pp.43－66, July 2004
［B46］鈴木昇一：会話音声・動画像処理への，万能性類似度関数の採用によるSS多段階認識の改良，情報研究（文教大学・情報学部），no.31, pp.67－110, July 2004
［B47］鈴木昇一：数理形態学の新しい２つのパターン変換作用素を用いた多段階想起認識，情報研究（文教大学・情報学部），no.31, pp.111－141, July 2004
［B48］鈴木昇一，太田芳雄，斉藤静昭，奥野治雄：感覚空間回路の設計と作用素に対するラプラス変換法，工学院大学研究報告，no.40. June 1976
［B49］鈴木昇一：1パラメータLie座標変換群とそのパターン正規化への応用，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.21－74, Jan.2005
［B50］鈴木昇一：曖昧さに関する半順序$\multimap$を単調に保つモデル構成作用素T，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.75－126, Jan.2005
［B51］鈴木昇一：パターンφから抽出された特徴量$u(\varphi, \ell)$のfuzzy単調変換，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.127－168, Jan.2005
［B52］鈴木昇一：パターンモデル（パターンの標準形）の一般形，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.169－218, Jan.2005
［B53］鈴木昇一：類似度関数の密度を用いた，画素毎のパターン認識処理（パターン理解処理）の方法，情報研究（文教大学・情報学部），no.32, pp.219－285, Jan.2005

付録A. 非線形不動点方程式（パターン自己想起方程式）の，残差法を適用した解法としての，逐次的近似法による逆連想

連想（association）とは，外界からの刺激としての刺激パターンから記憶しておいた今 1 つの，記憶パターンへの変換機能である．

逆連想（reverse association）とは，記憶パターンから刺激パターンを復元することである．

本付録Aでは，連想，逆連想の双方の働きを記述するパターン自己想起方程式は，候補カテゴリ番号リスト $\mu \in 2^J$ を全カテゴリ番号リスト $J \in 2^J$ としたときの，式（2.41）の構造受精変換 $TA\,(J)\,T : \Phi \to \Phi$ に関する不動点方程式であることを指摘しながら，残差法を適用して，パターン自己想起の，この非線形方程式を解く方法が研究される．

A1. 逐次的近似法による連想（問題提起）

逐次的近似法による連想の働きは次のように説明される．

パターン集合 Φ はある可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の，零元を含むある部分集合であり，式（3.1）の如く設定されているとしよう．このとき，$T \cdot \Phi$ は Φ に含まれていること，つまり，式（3.4）に留意しておく．

刺激としてのパターン $\varphi \in \Phi$ から想起されるパターン $\psi \in \Phi$ とは，一般に

$$TA\,(J)\,T\,(\varphi+\psi) \neq TA\,(J)\,T\varphi + TA\,(J)\,T\psi \tag{A1.1}$$

であるという意味で非線形な，不動点方程式

$$TA\,(J)\,T\psi = T\psi \tag{A1.2}$$

の解であるとすれば，逐次的近似法を採用し，

$$\psi_0 = T\varphi \quad \text{（初期条件）} \tag{A1.3}$$

$$\psi_{n+1} = T\psi_n - TA\,(J)\,T\psi_n + \psi_n \quad \text{（帰納法）} \tag{A1.4}$$

と求めていくことで，

$$\psi = \lim_{n \to \infty} \psi_n \tag{A1.5}$$

と得られることがある．　□

本付録Aでは，上述の，逐次法による連想写像

$$TA\,(J)\,T : \Phi \to \Phi \tag{A1.6}$$

の近似を検討しよう．

A2. 逐次的近似法による逆連想

カテゴリ集合

$$\mathfrak{C}\,(\mu) = \{\, \mathfrak{C}_j \mid j \in \mu \subseteq J \} \tag{A2.1}$$

内の 1 つのカテゴリに帰属すると判明しているパターン $\eta \in \Phi$ が与えられたとき，パターン方程式

$$TA\,(\mu)\,T\psi = T\eta \tag{A2.2}$$

を解いて，カテゴリ集合 $\mathfrak{C}(\mu)$ 内の 1 つのカテゴリに帰属するパターン $\psi \in \Phi$ を求めることを考えよう．パターン方程式（A2.2）は，

$$TA\,(\mu)\,T\,(T\psi) = T\eta \quad \because \quad \text{axiom 1の（iii）の後半} \tag{A2.3}$$

と同値であるから，パターン方程式（A2.1）は，

パターンモデル $T\psi \in \Phi$ から想起されるカテゴリ集合 $\mathfrak{C}(\mu)$ 内の 1 つのカテゴリに帰属するパターンモデルが $T\eta \in \Phi$ である事態 (A2.4)

を表している．パターン想起方程式（A2.2）を解いて，パターン $\psi \in \Phi$ を求めることは，逆連想の働きである．

$$T\eta \neq T\psi \in \Phi \tag{A2.5}$$

の場合，他想起（heteroassociation）になる場合があるが，自己想起（autoassociation）の場合，つまり，

$$T\eta = T\psi \in \Phi \tag{A2.6}$$

の場合で，然も，想起システムが帰属するカテゴリに関し無知（ignorance）である場合，つまり，

$$\mu = J \tag{A2.7}$$

の場合のパターン方程式が式（A1.2）である．この不動点方程式（A1.2）は，

パターンモデル $T\psi \in \Phi$ から想起されるカテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J)$ 内の 1 つのカテゴリに帰属するパターンモデルは $T\psi \in \Phi$ である事態 (A2.8)

を表しているが，この事態を，

初期条件式（A1.3）の下では，ψ は刺激としてのパターン $\varphi \in \Phi$ から想起されるパターンである (A2.9)

と解釈し直していることに注意しよう．

尚，完結性（conclusion nature）

$$TA(J)T\psi = T\psi \Rightarrow [TA(J)T]^t \psi (\equiv TA(J)T \cdot [TA(J)T]^{t-1}\psi) = T\psi,\ t = 1, 2, 3, \cdots$$
$$\text{, where}\quad [TA(J)T]^0 \equiv I \text{（identity operator）}\quad \because\quad \text{3.1節のaxiom 1,（iii）} \tag{A2.10}$$

が成立するから，パターン ψ は式（A1.6）の想起の働きによりもうこれ以上変質しないパターンを表している意味で，安定な（stable）パターンであることにその特異性がある．ということは，連想出力パターン ψ は，2.1節の（1），（2），（3）の意味で変形しているような刺激としてのパターン $\varphi \in \Phi$ を整形化したものになっていることを期待していることになる．

A3.　パターン他想起方程式（A2.2）の，多段階解法

列ベクトル b が与えられているとき，条件

$$\forall j,\ a_{jj} = 1 \tag{A3.1}$$

を満たす行列（線形作用素）$A = (a_{ij})$ に関する連立 1 次方程式

$$Ax = b \tag{A3.2}$$

の解を反復法で求めよう．I を恒等行列として，$I - A$ のスペクトル半径が 1 より小さいとき，任意の初期値 $x(0)$ に対し，反復法

$$x(n+1) = b + (I - A)x(n) (= b - (A - I)x(n)),\ n = 0, 1, 2, \cdots \tag{A3.3}$$

を使い，

$$x = \lim_{n \to \infty} x(n) \tag{A3.4}$$

と解けることが知られている［A8］．

行列 $A = (a_{ij})$ は線形作用素であるが，非線形な作用素

$$TA(\mu)T : \Phi,\ \mu \subseteq J \tag{A3.5}$$

に関するパターン想起方程式（A2.2）の解$\psi \in \Phi$ を求めるのに，上記の反復法を適用してみよう（多段階解法）．

パターン想起方程式（A2.2）を解いて，$\psi \in \Phi$ を求めるには，$\psi \in \Phi$ を

$$\psi = T\eta - (TA(\mu)T - I)\psi \in \Phi \tag{A3.6}$$

と表わしてから，右辺の$\psi \in \Phi$ を既知の$\psi_n \in \Phi$ と，左辺の$\psi \in \Phi$ を未知の$\psi_{n+1} \in \Phi$ とみなし，逐次近似過程

$$\psi_{n+1} = T\eta - (TA(\mu)T - I)\psi_n \in \Phi,\ n = 0, 1, 2, \cdots \tag{A3.7}$$

を導入し，

$$\psi = \lim_{n \to \infty} \psi_n = \lim_{n \to \infty} [T\eta - TA(\mu)T\psi_{n-1} + \psi_{n-1}] \in \Phi,\ n = 0, 1, 2, \cdots \tag{A3.8}$$

と求めればよいだろう．

ここで，自己想起方程式（A1.2）は他想起方程式（A2.2）の特別なものであるから，式（A3.6）において，

$$\eta = \psi \in \Phi \wedge \mu = J \tag{A3.9}$$

とおき，よって，逐次近似式（A3.7）において，

$$\eta = \psi_n \in \Phi,\ n = 0, 1, 2, \cdots \tag{A3.10}$$

とおいたものが式（A1.4）である．

A4. パターン自己想起方程式（A1.2）の，残差法を適用しての多段階解法

残差法によって，A1節の多段階解法を評価してみよう．

第$n\ (= 0, 1, 2, \cdots)$段階の残差

$$e(n) \equiv T\psi_n - TA(J)T\psi_n \tag{A4.1}$$

を最小にするパターン$TA(J)T\psi_n$ を，1次独立な系$\{T\omega_j\}_{j \in J}$ による1次展開式

$$TA(J)T\psi_n = \sum_{j \in J} c_j(n) \cdot T\omega_j \tag{A4.2}$$

の形で求めよう．残差法に従うと，誤差$e(n)$を最小にするパターン$TA(J)T\psi_n$ を求めることは，

$$\forall j \in J,\ (e(n), T\omega_j) = 0 \tag{A4.3}$$

を満たす各1次結合係数$c_j(n)\,(j \in J)$を決定することである．

式（A4.3）を計算してみよう．

$$\begin{aligned}\forall j \in J,\ 0 &= (e(n), T\omega_j)\\ &= (T\psi_n, T\omega_j) - (TA(J)T\psi_n, T\omega_j)\\ &= (T\psi_n, T\omega_j) - \sum_{i \in J} c_i(n) \cdot (T\omega_i, T\omega_j) \quad \because \text{ 式（A4.2）}\end{aligned} \tag{A4.4}$$

を得る．よって，これから得られる連立1次方程式

$$\sum_{i \in J} c_i(n) \cdot (T\omega_i, T\omega_j) = (T\psi_n, T\omega_j),\ j \in J \tag{A4.5}$$

を解けば，各1次結合係数

$$c_j(n),\ j \in J \tag{A4.6}$$

が求まり，$T\psi_n$ の表現

$$T\psi_n = TA(J)T\psi_n + e(n) \tag{A4.7}$$

$$= \sum_{j \in J} c_i(n) \cdot T\omega_j + e(n), \text{ such that } \quad \forall j \in J,\ 0 = (e(n),\ T\omega_j) \tag{A4.8}$$

が成り立つ．

式（A1.4）の ψ_{n+1} に，式（A4.1）の $e(n)$ を代入すれば，

$$\psi_{n+1} = e(n) + \psi_n \tag{A4.9}$$

が成り立っている．

さて，距離関数 dis が与えられた距離空間 X が完備（complete）であるとは，

$$dis(\varphi_m, \varphi_n) \to 0\,(n,\ m \to \infty) \tag{A4.10}$$

を満たす点列 $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\cdots}$ について，X の元 φ が存在して，

$$dis(\varphi_n, \varphi) \to 0\,(n \to \infty), \text{つまり，} \varphi = \lim_{n \to \infty} \varphi_n \tag{A4.11}$$

が満たされることをいう．

ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ はノルム距離 $dis(\varphi, \eta) \equiv \| \varphi - \eta \|$ に関し完備であることを思い出そう．

ここで，パターン集合 Φ が完備であるとしよう．このとき，

$$e(n) \equiv T\psi_n - TA(J)\,T\psi_n = \psi_{n+1} - \psi_n \to 0\,(n \to \infty) \quad \because \quad \text{式（A4.9）} \tag{A4.12}$$

であれば，

$$\psi \in \Phi \text{ が存在して，式（A1.5）の極限式} \psi = \lim_{n \to \infty} \psi_n \in \Phi \text{ が成り立つ} \tag{A4.13}$$

ことになる．

A5.　自己想起問題の解決

前節の手法で，初期条件式（A1.3）下で，パターン自己想起の非線形方程式（A1.2）の解 $\psi \in \Phi$ が求まるかどうかについて，次の結論が得られた：

連立 1 次方程式（A4.5）を解き，式（A4.6）の各 1 次結合係数 $c_j(n)(j \in J)$ を求め，式（A4.8）から従う $T\psi_n$ を式（A4.2）の $TA(J)\,T\psi_n$ で近似したときの近似誤差

$$e(n) = T\psi_n - \sum_{j \in J} c_j(n) \cdot T\omega_j \tag{A5.1}$$

を各近似段階 n で求めてゆけば，初期条件式（A1.3）下での，パターン自己想起の非線形方程式（A1.2）の解 $\psi \in \Phi$ が求まることがあるという結論が得られた．

特に，パターン集合 $\Phi\,(\subset \mathfrak{H})$ が完備であり，

$$e(n) \to 0\,(n \to \infty) \tag{A5.2}$$

であれば，解 $\psi \in \Phi$ は必ず求まる．　□

（著者　鈴木昇一，論文題目　線形方程式の制約条件下での，残差法によるパターンモデル，文教大学情報学部情報研究no33.　投稿論文，投稿年月日　2005年3月22日（火））