

1パラメータLie座標変換群と そのパターン正規化への応用

鈴木 昇一

One-Parameter Lie Group of Coordinate-Transformations and Its Application to Pattern Normalization

Shoichi Suzuki

要 約

パターンが記号と異なるのは、変形に耐え、その意味を保持できることにある。このため、少なくとも、位置ずれ、大きさの変動、回転（1パラメータLie座標ユニタリ変換群の典型的な諸例）などもたらず規則的な変形に無関係なごとく認識処理することは、パターン認識技術の初期の研究段階から重要視されてきた。本論文は、パターン構造の再生、パターン認識、パターン連想などに関して、効率的なパターン情報処理機能を獲得するための基礎として、1パラメータLie座標ユニタリ変換群 $\{\exp(tA)\}_{-\infty < t < +\infty}$ の下で不変な“原パターン φ の代りとなる正規化パターンとしてのパターンモデル $T\varphi$ ”の一般的構成法を主として、研究したものである。

本論文では、1パラメータLie座標ユニタリ変換群によるパターンの変形を吸収できる正規化・識別に関連し、次の4事柄が研究されている：

(一) 1実パラメータのLie座標変換群をユニタリ化する密度関数 $\rho(x)$ の満たす偏微分方程式を、その無限小変換 A に関連し導くこと。

(二) 1実パラメータのLie座標変換ユニタリ作用素群が作用する前の状態に戻す処理が、モデル構成作用素 T を用いて、可能なこと。

(三) 2つのモデル構成作用素の積合成が再び、モデル構成作用素となるための条件の1つがモデル構成作用素の可換性であること。

(四) 1次独立なパターンの系を用い、特徴抽出する機能を持つ特徴抽出写像を構成した後、最大類似度認識法に役立つようなモデル構成作用素、類似度関数の構成法。

□

キーワード

- (1) Lie座標変換群 (2) 無限小変換 (3) 標準座標系 (4) 1, 2次モーメント
(4) パターンモデル (5) 類似度関数法

Abstract

A pattern differs from a symbol in maintaining its meaning even when the pattern is a little deformed. It has been emphasized so far that a recognizer should have the ability to perform the classification in a rotation, scaling, and translation (which respectively constitute one-parameter Lie groups) invariant manner. In this paper, we shall investigate a method of constructing a corresponding model (a normalized pattern) of the input pattern as a foundation of a reproduction, a recognition, and an association of patterns even when they are deformed by one-parameter Lie unitary group $\{\exp(tA)\}_{-\infty < t < +\infty}$ of coordinate-transformations.

The content of this research for a normalization and a classification which can absorb kinds of deformations of input patterns is as follows:

(一) A sufficient condition which a density function must satisfy that enables the one-parameter Lie group to become a unitary group can be derived as a partial differential equation related to its infinitesimal transformation A .

(二) There is a model-construction operator T (suggested by S. Suzuki) to maintain invariance under any one-parameter Lie unitary group.

(三) A sufficient condition for operator $T_1 T_2$ to be a model-construction operator, when a given pattern φ will be mapped to $T_1(T_2\varphi)$ using the two model-construction operators T_1 and T_2 .

(四) A feature-extracting mapping obtained by using a set of mutually independent patterns can aid a great deal in the construction of a model-construction operator and a similarity-measure function for a recognition method of maximum similarity-measure.

Key Words: (1) Lie group of coordinate-transformations (2) infinitesimal transformation (3) canonical coordinates (4) first-or second-order moment (4) pattern-model (5) method of similarity-measure function

1. まえがき

パターン (pattern) [11] が記号 (symbol) と異なるのは、変形に耐え、その意味を保持できることにある。

パターンとは、ある種のユニタリ座標変換 (基本的なパターン変換) からある程度の変形を受けても (定理2の系1を参照), ある程度の雑音による変形が加わっても (付録Aの式 (A19) を参照), その意味が保存されるような情報である [12]. そのために、パターンというものは、冗長な表現形態を備えざるを得ない. それ故、パターン構造の再生 [15], [17], [20], パターン認識 [23], [27], パターン連想 [21], [26] などに関して、効率的なパターン情報処理機能を獲得するためには、冗長な表現形態を備え、処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ に対し、その代りとなる“加わっているある種の雑音を取り去るような簡潔な構造形式を備えており、然も、その指示する類概念 (category) がある種のユニタリ座標変換の下で不変であるようなパターンモデル [18], [19] $T\varphi \in \Phi$ ”を求めることが必要とされる. ここに、 Φ は零元を含み、処理の対象とするパターン φ の集合である (付録Aの式 (A35) を参照) [18], [28].

位置ずれ, 大きさの変動, 回転 (1パラメータLie座標変換群の典型的な3例) などに無関係なごとく認識処理することは, パターン認識技術の初期の研究段階から重要視されてきた [11]. パターン φ をあたかも量子力学の波動関数とみなして, 量子力学的2次汎関数 (測度的ユニタリ不変量) の直交直和分解を利用して [13], 付録A, A3章での4性質①~④を満たす式 (A9) のモデル構成作用素 [18] T を構成し [12], [14], 位置ずれ, 大きさの変動, 回転の各々の下でのユニタリ座標変換不変性を, 認識の働きに取り入れられる試みもなされている [15], [17], [20].

その構成要素が連続無限個ある座標変換の集合 (連続的座標変換群) に含まれている全ての実変数に関し, 微分可能な変換群

$$\exp(tA), -\infty < t < +\infty \tag{1}$$

をLie座標変換群 [29], [30] というが, 平行移動群, 縮小・拡大 (大きさの変動) 群, 回転群は, 無限小変換

$$A \equiv A(x_1, x_2) \tag{2}$$

が各々,

$$A = -\partial/\partial x_1 - \partial/\partial x_2 \tag{3}$$

$$A = -x_1 \cdot \partial/\partial x_1 - x_2 \cdot \partial/\partial x_2 \tag{4}$$

$$A = x_2 \cdot \partial/\partial x_1 - x_1 \cdot \partial/\partial x_2 \tag{5}$$

と表される典型的な場合である.

これまでのパターン認識技術 [7], [8], [10] では,

(一) そのノルムが $\|\cdot\|$ で表される可分な [1], [2] ヒルベルト (Hilbert) 空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dp(x))$ での, 式 (1) の1実パラメータ t のLie座標変換群を,

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H}, \|\exp(tA)\varphi\| = \|\varphi\| \text{ for any real number } t \tag{6}$$

を満たすように, ユニタリ作用素化する密度関数

$$p(x), x \in M \tag{7}$$

の存在が明確に指摘されていないこと

を考慮し, 本論文では, この問題を解決し (付録Bの定理B1, その系1を参照),

(二) 1実パラメータ t に関しても微分可能なLie群と呼ばれる“ユニタリ作用素 U_t の作る座標変換連続群

$$\{U_t\}_{-\infty < t < +\infty}, \text{ここに, } U_t \equiv \exp(tA) \tag{8}$$

が作用する前の状態に戻す処理, いわゆる通常の意味の正規化が, 付録A, A3章での4性質①~④を満たす式 (A9) のモデル構成作用素 T を用いて, 可能なこと

が示され (第3章; 文献 [28] の第25, 26部), その後,

(三) 2つのモデル構成作用素 T_1, T_2 の積合成 $T_1 \cdot T_2$ が再び, 1つのモデル構成作用素 T_3 となるための諸条件

(四) 1次独立な \mathfrak{H} の元 ψ_k からなる系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ を使い, 処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ から特徴抽出する機能を持つ特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \rightarrow Z \text{ (複素数の集合)} \tag{9}$$

を構成した後, この写像 u を用い, 付録A, A7章の最大類似度認識法に役立つように, 別の種類のモデル構成作用素 T , 類似度関数 SM を構成すること

が研究される.

パターン認識技術を確保しようとする歴史はパターンの変形に対する攻略法研究の歴史でもある.

パターン φ を認識処理する場合、変形されているかもしれないパターン φ を、誤認識が生じない程度に、変形されていないパターン η として再生した後、後続の特徴抽出処理、カテゴリ決定処理を行う必要がある。従来の諸研究 [7], [8], [10] では、1パラメータのLie群でさえ、明確な形でユニタリ作用素群として取り扱ってはいないが、この特徴抽出 [18]・カテゴリ決定の2処理の場面において、上記(一)での解決は、基本的に重要な役割を果たすことに注意しておく必要がある。上記の(二)、(三)は、この様な変形されていないパターン η として、 φ に対応するパターンモデル $T\varphi$ を構成する手法を研究しているこれまでの諸研究 [11]~[28]に続くものである。処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ に含まれている変形は通常不規則であり、パターン全体にわたる単一の規則的変換(ユニタリ座標変換)、例えば、平行移動 [13], [15], [22], 縮小拡大 [16], [17], 回転 [20]では表され得ないが、(二)、(三)は、少なくとも、単一の規則的変換を $\varphi \in \Phi$ から除去できる手法を提供する。手書き漢字 [15]~[17], [20], 日本語単独母音 [21], [23], [27]のパターン構造再生、パターン認識、パターン連想に関し、計算機シミュレーション済みのパターンモデル(いわゆるパターン認識分野での、原パターン $\varphi \in \Phi$ の、式(A15)の形式を持つ正規化パターン) $T\varphi \in \Phi$ の改良を目指し、 $\varphi \in \Phi$ の代りとなる新たなパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ を、定理2のごとく、提案するものである。このモデル $T\varphi \in \Phi$ は付録A, A7章の最大類似度認識法 [23]での $T\varphi \in \Phi$ に用いることができる。

2. Lie座標変換群の定義と表現

本章では、まず、1実パラメータ t のLie座標変換群の典型的な3例が2次元で説明された(2.1.1項)後、2.2.1.2の内容を一般化し、微分方程式系

$$dy_j/dt = F_j(y_1, y_2, \dots, y_n), j = 1 \sim n \quad (10)$$

で記述される1実パラメータ t のLie座標変換群が、その無限小変換(3式(47), (48), (49)を参照) A によって式(8)のごとく、表現されることが指摘され(2.1.3項)、更に、1実パラメータLie座標変換群の標準形が平行移動群であることが指摘され(2.2節)、最後に、多実パラメータLie座標変換群の構造について簡単に解説される(2.3節)。

2.1 1実パラメータのLie群と微分方程式系

2.1.1 Lie座標変換群の3例

直交座標系 x を、1実パラメータ t を含む直交座標系 y へと変換することを考えよう：

$$x \equiv \langle x_1, x_2 \rangle \in M \quad (11)$$

$$\rightarrow y \equiv \langle y_1, y_2 \rangle \in M. \quad (12)$$

□

まず、3例1~3を以下に示す。

[例1] (平行移動群) [13], [15], [22]

$$y_1 = x_1 - t, y_2 = x_2 - t \quad (13)$$

については、微分方程式系

$$dy_1/dt = -1, dy_2/dt = -1 \quad (14)$$

が成り立つ。

□

[例2] (縮小・拡大群) [16], [17]

$$y_1 = \exp(-t) \cdot x_1, y_2 = \exp(-t) \cdot x_2 \quad (15)$$

については、微分方程式系

$$dy_1/dt = -y_1, dy_2/dt = -y_2 \quad (16)$$

が成り立つ。 □

[例3] (回転群) [20]

$$y_1 + \sqrt{-1} \cdot y_2 = (x_1 + \sqrt{-1} \cdot x_2) \cdot \exp(-\sqrt{-1} \cdot t) \quad (17)$$

つまり、

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \cdot \cos t + x_2 \cdot \sin t \\ y_2 &= -x_1 \cdot \sin t + x_2 \cdot \cos t \end{aligned} \quad (18)$$

について、微分方程式系

$$dy_1/dt = y_2, dy_2/dt = -y_1 \quad (19)$$

が成り立つ。 □

上記の3例1～3においては、式(12)での座標系 $y \equiv \langle y_1, y_2 \rangle \in M$ は1実パラメータ t に関し微分可能であって、Lie座標変換群の典型的なものである。

2.1.2 2次元Lie座標変換群の無限小変換 A

1つの実数 t 、並びに、2つの実数値関数 $F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2)$ を導入し、式(12)での座標系 $y \equiv \langle y_1, y_2 \rangle \in M$ を、

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + F_1(x_1, x_2) \cdot t + (t \text{ の 2 次 以上 の 項}) \\ y_2 &= x_2 + F_2(x_1, x_2) \cdot t + (t \text{ の 2 次 以上 の 項}) \end{aligned} \quad (20)$$

とにおいて、微分可能な関数 $\varphi(y_1, y_2)$ をテーラー展開すると、

$$\begin{aligned} \varphi(y_1, y_2) &= \varphi(x_1, x_2) + t \cdot \frac{d\varphi(y_1, y_2)}{dt} \Big|_{t=0} + t^2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2\varphi(y_1, y_2)}{dt^2} \Big|_{t=0} + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

が成り立つ。ここで、式(20)を考慮すると、

$$y_j \Big|_{t=0} = x_j, y_2 \Big|_{t=0} = x_2 \quad (22)$$

$$\therefore \frac{dy_j}{dt} \Big|_{t=0} = F_j(x_1, x_2) \quad (j = 1, 2) \quad (23)$$

$$\frac{\partial \varphi(y_1, y_2)}{\partial y_j} \Big|_{t=0} = \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2) \quad (24)$$

であることに注意する。よって、

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(y_1, y_2)}{dt} \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \varphi(y_1, y_2) \Big|_{t=0} \\ &= \left[\sum_{j=1}^2 \frac{dy_j}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \right] \varphi(y_1, y_2) \Big|_{t=0} \end{aligned} \quad (25)$$

$$= \left[\sum_{j=1}^2 F_j(x_1, x_2) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \varphi(x_1, x_2) \quad (26)$$

であるから、線形作用素 A を、

$$(A\varphi)(x_1, x_2) \equiv \frac{d\varphi(y_1, y_2)}{dt} \Big|_{t=0} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} &= \left[\sum_{j=1}^2 F_j(x_1, x_2) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \varphi(x_1, x_2) \\ &= \left[\sum_{j=1}^2 F_j(x_1, x_2) \cdot \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

と定義すると、式(21)内の各階微分係数は、

$$= \frac{d\varphi(y_1, y_2)}{dt} \Big|_{t=0} = (A\varphi)(x_1, x_2) \quad (29)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d^2\varphi(y_1, y_2)}{dt^2} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \varphi(y_1, y_2) \Big|_{t=0} \\ &= \left[\sum_{j=1}^2 F_j(x_1, x_2) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^2 F_j(x_1, x_2) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \varphi(y_1, y_2) \Big|_{t=0} \\ &= (A^2\varphi)(x_1, x_2) \quad (30) \\ &\dots \end{aligned}$$

が得られる。よって、式(30), (31), ...を可微分パターン φ のテーラ展開式(21)に代入すると、表現

$$\begin{aligned} &\varphi(y_1, y_2) \\ &= \varphi(x_1, x_2) + t \cdot (A\varphi)(x_1, x_2) + t^2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot (A^2\varphi)\varphi(x_1, x_2) + \dots \quad (31) \end{aligned}$$

$$= [\exp(t \cdot A)\varphi](x_1, x_2) \quad \because \text{式(B2)} \quad (32)$$

$$= (U_t\varphi)(x_1, x_2) \quad \because \text{式(10)} \quad (33)$$

が成立することがわかる。この2式(33), (34)が2式(11), (12)によって引き起こされるパターンの変換

$$\varphi(x_1, x_2) \rightarrow \eta(x_1, x_2) \equiv \varphi(y_1, y_2) \quad (34)$$

である。

φ の任意性を考慮すると、2式(33), (34)から、特に、式(12)での移動後の座標点 $y = \langle y_1, y_2 \rangle \in M$ は、

$$y = \langle y_1, y_2 \rangle = \exp(t \cdot A) \langle x_1, x_2 \rangle = U_t \langle x_1, x_2 \rangle \in M \quad (35)$$

と表現されることがわかる。

3式(27)~(29)の作用素 A は、Lie座標変換群の無限小変換(infinitesimal transformation)、或いは、生成作用素(infinitesimal generator)と呼ばれる。

明らかに、2.1.1項の例1においては、

$$\begin{aligned} &(A)\varphi(x_1, x_2) \\ &= (-1) \cdot \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1} + (-1) \cdot \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2} \quad (36) \end{aligned}$$

$$\therefore F_j(x_1, x_2) = -1 \quad (j = 1, 2) \quad (37)$$

であり、例2においては、

$$(A)\varphi(x_1, x_2) = (-x_1) \cdot \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1} + (-x_2) \cdot \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2} \quad (38)$$

$$\therefore F_j(x_1, x_2) = -x_j \quad (j = 1, 2) \quad (39)$$

であり、例3においては、

$$(A)\varphi(x_1, x_2) = x_2 \cdot \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1} + (-x_1) \cdot \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2} \quad (40)$$

$$\therefore F_1(x_1, x_2) = x_2, F_2(x_1, x_2) = -x_1 \quad (41)$$

であることがわかる (3式(3), (4), (5)を参照).

2.1.3 n次元への一般化

一般に、可測集合 $M (\subseteq R^n (n \text{次元ユークリッド空間}))$ は可微分多様体 [30] としよう. LG を変換群 (Lie座標変換群) とし、 $LG \times M$ から M への可微分写像

$$f(g, x) \equiv f_g(x): LG \times M \rightarrow M \quad (42)$$

は、2性質

I) LG の群演算を \cdot と表すと、 $f(h \cdot g, x) = f(h, f(g, x))$

II) LG の単位元 e については、 $f(e, x) = x$

を、 M に対し満たしていなければならない.

座標変換、移動変換による座標点の移動

$$x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in M \rightarrow y = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle \in M \quad (43)$$

が、初期条件

$$y = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle |_{t=0} = x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \quad (44)$$

を満たすとし、式(43)の座標点 y は、式(10)の微分方程式系

$$\frac{dy_j}{dt} = F_j(y), j = 1 \sim n, -\infty < t < +\infty \quad (45)$$

に従って、移動するとしよう (例えば、3式(14), (16), (19)を参照). このとき、可微分パターン $\varphi = \varphi(x)$ は

$$\varphi(x) \rightarrow \eta(x) \equiv \varphi(y) \quad (46)$$

というように、パターン $\eta(x)$ へと変形されることになる. 無限小変換

$$(A\varphi)(x) \equiv \frac{d\varphi(y)}{dt} |_{t=0} \quad (47)$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{dy_j}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_j} |_{t=0} \quad (48)$$

$$= \sum_{j=1}^n F_j(x) \cdot \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} \quad (49)$$

を用意すると、2式(43), (46)に関し、

$$y = \exp(tA)x \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \eta(x) &\equiv \varphi(y) \\ &= (\exp(tA)\varphi)(x) = \varphi(\exp(tA)x) \end{aligned} \quad (51)$$

と書けることが知られている. 式(50)は式(51)において、特に、 $\eta = y_j$ と置いて得られる.

指数写像 (exponential mapping)

$$U_t \equiv \exp(tA) : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G} \quad (52)$$

の性質 [30]

$$\begin{aligned} \forall n \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad \frac{d^n \exp(tA)}{dt^n} &= A^n \cdot \exp(tA) \\ \therefore \frac{d^n \exp(tA)}{dt^n} \Big|_{t=0} &= A^n \end{aligned} \quad (53)$$

に注意しておく．ここに， \mathfrak{G} は処理の対象とするパターン φ の集合 Φ を含む可分なヒルベルト空間 $L_2(M; dm)$ である (付録A, A1章)．

2式(50), (51)が2式(8), (52)での1実パラメータLie座標変換群 LG の表現である．

2.2 1実パラメータLie群の標準形

2.2.1 座標変換による無限小変換 A の形式の保存性から従うパターン φ の近似

一般に，式(43)の2つの座標系 x, y に関し，

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial y_\ell}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial}{\partial y_\ell} \quad (54)$$

が成り立っているから，式(49)の無限小変換 A は，

$$A = \sum_{\ell=1}^n (Ay_\ell) \cdot \frac{\partial}{\partial y_\ell} \quad (55)$$

と，表現される．1実パラメータLie群は2.1.3項で説明されたように，2式(51), (52)の如く，3式(47), (48), (49)の無限小変換 A で一意に決まる． x から y への座標系の変換によって，この A の形式が，式(55)のように保存される．

上述の座標変換による無限小変換 A の形式の保存性から，式(51)での2つのパターン φ, η に対し，次の解釈を少なくとも，与えることができよう：

- (一) η は φ の近似である．
- (二) η は φ の要約である．
- (三) φ は η の情報を含む．
- (四) φ は η に変形されている．

□

2.2.2 標準座標系でのLie群の形式

$$\begin{aligned} \exists k_1, \exists k_2, \dots, \exists k_m \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ F_{k_1}(x) = F_{k_2}(x) = \dots = F_{k_m}(x) = -1 \\ \wedge \\ [\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} - \{k_1, k_2, \dots, k_m\}, F_j(x) = 0] \end{aligned} \quad (56)$$

が満たされていれば，或いは，座標系 z を座標系 x に対し，

$$\begin{aligned} \exists k_1, \exists k_2, \dots, \exists k_m \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ Az_{k_1}(x) = Az_{k_2}(x) = \dots = Az_{k_m}(x) = -1 \\ \wedge \\ [\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} - \{k_1, k_2, \dots, k_m\}, Az_j(x) = 0] \end{aligned} \quad (57)$$

と選んでおけば，式(49)の無限小変換 A は，2式(49), (55)からわかるように，

$$A = \sum_{i=1}^m (-1) \cdot \frac{\partial}{\partial z_{k_i}} \tag{58}$$

と表され、この式 (58) の A は以下の標準座標系 z で表示された無限小変換である。

$$\begin{aligned} &2 \text{式 (50), (51) からわかるように, Lie座標変換群 } \{\exp(tA)\}_{-\infty < t < +\infty} \text{の表現} \\ &(\exp(tA)\varphi)(z) = \varphi(z') \end{aligned} \tag{59}$$

ここに、

$$\begin{aligned} &[\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, z'_{k_i} = z_{k_i} - t] \\ &\wedge [\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} - \{k_1, k_2, \dots, k_m\}, z'_j = z_j] \end{aligned} \tag{60}$$

が成り立つ。

以後、式 (57) を満たす座標系 z を座標系 x に対し、選定できると仮定しよう。

標準座標系 (canonical coordinates) [8], [10], [19]

$$z = \langle z_1, z_2, \dots, z_n \rangle \tag{61}$$

を導入すると、1パラメータ t のLie群の各座標 z_j が、2.1.1項の例1のごとく、 t の1次式、或いは t を含まない式で表される [30]。標準座標系でのLie群は式 (60) の平行移動群である。

例えば、2.1.1項での例2の縮小・拡大群の標準座標系 $z = \langle z_1, z_2 \rangle$ は、

$$z_1 = \log_e u_1, z_2 = u_2 \tag{62}$$

ここに、

$$u_1 \equiv [x_1^2 + x_2^2]^{1/2}, u_2 \equiv \tan^{-1}[x_2/x_1] \tag{63}$$

である。何故ならば、

式 (15) の y_1, y_2 について、

$$\exp(-t)u_1 = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \tag{64}$$

$$u_2 = \tan^{-1} \frac{y_2}{y_1} \tag{65}$$

であるから、

$$\log_e \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = z_1 - t \tag{66}$$

$$\tan^{-1} \frac{y_2}{y_1} = z_2 \tag{67}$$

が成り立っているからである。

2.3 多パラメータのLie座標変換群

多パラメータを備えているLie群の構造は単位元の近傍の性質によって決まってしまう。即ち、各 t_j を無限小の実パラメータとして、単位の近傍の要素を

$$\exp\left(\sum_{j=1}^n t_j \cdot A_j\right) \tag{68}$$

と表すと、各無限小変換 A_j の相互関係

$$A_j A_k - A_k A_j = \sum_{\ell=1}^n c_{jk}^{\ell} \cdot A_{\ell} \tag{69}$$

を満たす構造定数 [30] c_{jk}^{ℓ} の組により、多パラメータLie群の大局的構造以外のことは決まってしまうのである。本研究では、多パラメータLie群 [7]~[10] は取り扱わない。

3. Lie群による正規化方法の実現

本章の以降では、処理の対象とするパターン φ は実数値とする。 φ を位置ずれ、大きさの変動、回転などに無関係なごとく認識処理することは、パターン認識技術の初期の研究段階から重要視されてきた。本章では、Lie座標変換の特別なものとして、平行移動、大きさの変動（縮小・拡大）、回転が表現されたことに注意し、2付録A, Bの知識を前提とし、Lie座標変換前の状態に戻す処理、いわゆる通常の意味の正規化（normalization）が、付録A, A3章の4性質①～④を満たす式（A9）のモデル構成作用素 T を用いて可能なこと（文献 [28] の第25, 26部を参照）が示される。

3.1 モデル構成作用素 T

式（A6）の全カテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J)$ 内のいずれか1つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j (j \in J)$ に帰属すると考えられる処理対象パターン $\varphi \in \Phi$ は、認識システムによって $T\varphi \in \Phi$ に変換され、後続の認識処理においては、認識システムは、 $T\varphi \in \Phi$ を原パターン $\varphi \in \Phi$ と錯覚するものとすれば、このような $T\varphi \in \Phi$ は原パターン $\varphi \in \Phi$ のモデル、又は正規化パターン（normalized pattern）と呼ばれる [11], [12], [14], [18]。処理対象パターン $\varphi \in \Phi$ の集合 Φ と式（A.9）の写像 $T: \Phi \rightarrow \Phi$ との組 $[\Phi, T]$ は付録A, A3章の4性質①～④を満たすものとしよう。このとき、式（A9）の写像 T はモデル構成作用素と呼ばれる [18]。

可分なヒルベルト空間 \mathfrak{H} をパターン φ の表現空間として採用し、このような写像 T を用いると、処理対象パターン φ の集合 Φ は、

$$0 \in \Phi \subset \mathfrak{H} \wedge T \cdot \Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \subset \Phi \quad (\text{a property of the embedded structure}) \quad (70)$$

を満たすように設定できること（埋込性質；embedding）が、文献（28）の第24部で明らかにされている。

3.2 標準座標系と規格化1次モーメント

以後、本章では、付録A, A1章での可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ の元としての、実数値パターン $\varphi = \varphi(x)$ を処理の対象としよう。 $\exp(tA)$ による、式（50）の座標変換“ $x \rightarrow y$ ”に注意し、

$$\begin{aligned} z' &\equiv \exp(tA)z \\ \wedge [\exists k \in \{1, 2, \dots, n\}, z'_k &= z_k - t] \\ \wedge [\forall \ell \in \{1, 2, \dots, n\}, z'_\ell &= z_\ell] \end{aligned} \quad (71)$$

が成立する式（61）の標準座標系 $z = \langle z_1, z_2, \dots, z_n \rangle$ を選ぶ。

元来、正規化というのは、式（51）での“ $\varphi(x) \rightarrow \varphi(y)$ ”で典型的に代表される“配置空間 M での原パターン φ の再配置（rearrangement）”にあることを考慮して、次の定義1を設けよう。

【定義1】（パターン φ の基準形 $S\varphi$ ）

式（71）の標準座標系 z での、第 k 番目の軸 z_k 方向のずれ量

$$\begin{aligned} &NFOM(k; \varphi) \\ &\equiv \frac{\int_M dm(y) y_k \cdot \varphi(y)}{\int_M dm(y) \varphi(y)} \quad \text{if } \int_M dm(z) \varphi(z) \neq 0 \end{aligned} \quad (72)$$

を導入して定義されるパターン

$$(S\varphi)(y) \equiv \varphi(y')$$

$$\text{ここに、} y' \equiv \exp(-NFOM(k; \varphi) \cdot A)y = Sy \quad (73)_1$$

を, Lie座標変換 $\exp(NFOM(\varphi) \cdot A)$ による, 原パターン φ の再配置パターンとしての基準形 (normalized form) という.

式 (71) から,

$$[\exists k \in \{1, 2, \dots, n\}, y'_k = y_k + NFOM(k; \varphi)] \wedge [\forall \ell \in \{1, 2, \dots, n\} - \{k\}, y'_\ell = y_\ell] \quad (73)_2$$

であることに注意しておく. また,

$$\int_M dm(x) \varphi(x) = 0 \text{ のとき, } NFOM(k; \varphi) = 0 \quad (73)_3$$

と約束しておく. □

本研究では, 常に, ヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ の正值測度 dm が式 (B4) のように, 密度関数 ρ が選定されており, しかも, ρ が, 微分方程式 (B11) を満たすように, 選定されているとしよう. それ故, 付録B1の系1 (保測定理) が成り立っており, 2式 (71), (73) に登場する座標変換 $\exp(tA)$ はユニタリ作用素である. これらの事実から, 次の定理1は証明される.

定理1の (iii) は, 次の事実を指摘している: パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ の, 規格化1次モーメント (the normalized first-order moment) と称されてよい式 (72) の $NFOM(k; \varphi)$ について, そのモーメント変換過程

$$NFOM(k; \varphi) \rightarrow NFOM(k; S\varphi) \quad (74)$$

を考えると, 式 (68) の基準形 $S\varphi$ の規格化1次モーメント $NFOM(k; S\varphi)$ が0になるように基準化され, パターン変換過程

$$\varphi \rightarrow S\varphi \quad (75)$$

は正に, パターン φ の再配置をもたらす正規化過程である. □

式 (71) の標準座標系 z での, 第 k 番目の座標軸 z_k の回りの2次中心モーメント (the second-order central moment) $SOCS(k; \varphi, t)$ とは,

$$SOCS(k; \varphi, t) \equiv \int_M dm(z) \cdot [z_k - t]^2 \cdot \varphi(z) \quad (76)$$

と定義される.

式 (B4) の密度関数 ρ が, 微分方程式 (B11) を満たすように, 選定されているとしよう.

[定理1] (1パラメータLie群 $\{\exp(t \cdot A)\}_{-\infty < t < +\infty}$ に関する規格化1次モーメント定理1)

このとき, 任意の実数値パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ について, 次の (i), (ii), (iii) が成り立つ:

$$\int_M dm(x) \varphi(x) \neq 0$$

とする.

(i) 式 (76) の2次中心モーメント $SOCS(k; \varphi, t)$ を最小にする実数値 t は式 (72) の規格化1次モーメント $NFOM(k; \varphi)$ であり, $t = NFOM(k; \varphi)$ が成立する.

(ii) 式 (73) で定義される基準形 $S\varphi$ の, Lie座標変換群 $\{\exp(t \cdot A)\}_{-\infty < t < +\infty}$ の下での不変性) 配置空間 M での, $A\varphi, \varphi$ の双方の全積分値は等しくて,

$$\int_M dm(z) (S\varphi)(z) = \int_M dm(z) \varphi(z).$$

(iii) 式 (73) の再配置パターン $S\varphi$ の規格化1次モーメントは実は, 0であり, $NFOM(k; S\varphi) = 0$ が成り立つ.

[定理1の系1] $\int_M dm(x)\varphi(x)=0$ のときも、本定理1の(ii),(iii)は成り立つ。

(証明) 変数 t のある1つの値が式(76)のSOCS($k; \varphi, t$)を最小にするとすれば、 t に関する方程式

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \text{SOCS}(k; \varphi, t)}{\partial t} \\ &= (-2) \cdot \int_M dm(z) \cdot [z_k - t] \cdot \varphi(z) \end{aligned} \quad (77)$$

が成り立つ。この方程式を解けば、助変数 t の値は、

$$t = \text{NFOM}(k; \varphi) \quad (78)$$

と求められ、(i)が示された。

次に、(ii)を示そう。基準座標系 z に関し、

$$Sz = y \quad \therefore \quad z = S^{-1}y \quad (79)$$

において、2式(50),(51)を勘案すれば、

$$\forall z \in M, (S\varphi)(z) = \varphi(Sz) \quad (80)$$

が成立し、よって、 φ として、式(B22)の φ_N を採用すると、

$$\begin{aligned} m(N) &= \int_M dm(z)\varphi_N(z) \\ &= \int_M dm(z)|\varphi(z)|^2 \quad \because \quad \varphi_N(z) \in \{0, 1\} \\ &= \|\varphi_N(z)\|^2 \end{aligned} \quad (81)$$

が成立している故に、変換 V による集合 N の変換

$$V_N \equiv \{Vz \mid z \in N\} \quad (82)$$

を用意し、定理B1の系1を適用すれば、

$$\begin{aligned} m(S^{-1}N) &= \|\varphi_{S^{-1}N}\|^2 = \|S^{-1}\varphi_N\|^2 \\ &= \|\varphi_N\|^2 \quad \because \quad \text{定理B1の系1より, } S^{-1} \text{ はユニタリ作用素} \\ &= m(N) \end{aligned} \quad (83)$$

が得られる。ここで、 $m(N) \rightarrow 0$ とすれば、

$$\forall y \in M, dm(S^{-1}y) = dm(y) \quad (84)$$

が得られる。従って、

$$\begin{aligned} &\int_M dm(z)(S\varphi)(z) \\ &= \int_{SM} dm(S^{-1}y)(S\varphi)(S^{-1}y) \quad \because \quad \text{式(79)} \\ &= \int_{SM} dm(S^{-1}y)(\varphi)(SS^{-1}y) \\ &= \int_{SM} dm(S^{-1}y)\varphi(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{SM} dm(y) \varphi(y) \quad \because \text{式 (84)} \\
 &= \int_M dm(y) \varphi(y) \quad \because SM = M \\
 &= \int_M dm(z) \varphi(z) \tag{85}
 \end{aligned}$$

が成り立つ。

最後に、(iii) を示そう。

$NFOM(k; S\varphi)$ の分子

$$\begin{aligned}
 &= \int_M dm(z) z_k \cdot (S\varphi)(z) \quad \because \text{式 (72) の定義} \\
 &= \int_M dm(z) z_k \cdot \varphi(\exp(-NFOM(k; \varphi) \cdot A)z) \\
 &= \int_M dm(z) [z'_k - NFOM(k; \varphi)] \cdot \varphi(\exp(-NFOM(k; \varphi) \cdot A)z) \\
 &\quad \because z' = \exp(-NFOM(k; \varphi) \cdot A)z \text{ とすると, 式 (73)}_2 \text{ より} \\
 &\quad [\exists k \in \{1, 2, \dots, n\}, z'_k = z_k + NFOM(k; \varphi)] \wedge [\forall \ell \in \{1, 2, \dots, n\} - \{k\}, z'_\ell = z_\ell] \\
 &= \int_M dm(z) z'_k \cdot \varphi(\exp(-NFOM(k; \varphi) \cdot A)z) \\
 &\quad - NFOM(k; \varphi) \cdot \int_M dm(z) \varphi(\exp(-NFOM(k; \varphi) \cdot A)z) \\
 &= \int_M dm(z) z'_k \cdot \varphi(z') \\
 &\quad - NFOM(k; \varphi) \cdot \int_M dm(z) (S\varphi)(z) \quad \because \text{式 (73)}_1 \\
 &= \int_M dm(z') z'_k \cdot \varphi(z') \\
 &\quad - NFOM(k; \varphi) \cdot \int_M dm(z) (S\varphi)(z) \quad \because \text{式 (84) より, } \forall x \in M, dm(x) = dm(Sx) \\
 &= \int_M dm(z) z_k \cdot \varphi(z) \\
 &\quad - NFOM(k; \varphi) \cdot \int_M dm(z) \varphi(z) \quad \because \text{本定理の (ii)} \tag{86}
 \end{aligned}$$

であることがわかり、この式 (86) を使えば、

$$\begin{aligned}
 &NFOM(k; S\varphi) \\
 &= \frac{\int_M dm(z) z_k \cdot (S\varphi)(z)}{\int_M dm(z) \varphi(z)} \\
 &= NFOM(k; \varphi) - NFOM(k; \varphi) \\
 &= 0 \tag{87}
 \end{aligned}$$

を得て，証明が終わった．

(定理1の系1の証明)

$\int_M dm(x)\varphi(x)=0$ とすると，式(73)₃より， $NFOM(k;\varphi)=0$ である．方程式(77)の解 t は無い．よって，(i)は成立しない．

(ii)については，上述の証明を追えば，同様に成立することがわかる．

(iii)については，(ii)から， $\int_M dm(z)(S\varphi)(z)=\int_M dm(z)\varphi(z)=0$ を得，式(73)₃の約束より， $NFOM(k;S\varphi)=0$ である． □

3.3 パターン φ の再配置形としてのパターンモデル $T\varphi$ と不変パターン

以下の式(92)などからわかるように，パターン φ の再配置を行う2式(73)₁，(73)₂で定義される写像

$$S:\Phi\rightarrow\Phi \tag{88}$$

は，付録A，A3章の3性質①，③，④を満たすが，性質②を満たさないので，モデル構成作用素ではない．

結局，次の定理2での，式(89)のごとく，式(88)の写像 S を変更しなければならない．

[定理2] (1パラメータLie群 $\{\exp(t\cdot A)\}_{-\infty<t<+\infty}$ に関するモデル構成定理1)

$$(T\varphi)(z)=\begin{cases} 0\cdots\int_M dm(x)\varphi(x)=0\text{のとき} \\ \frac{(S\varphi)(z)}{\int_M dm(x)\varphi(x)}\cdots\int_M dm(x)\varphi(x)\neq 0\text{のとき} \end{cases} \tag{89}$$

と定義される式(A9)の写像 T は，付録A，A3章の4性質①～④を満たすモデル構成作用素である．

[定理2の系1] (1パラメータLie群に関するパターンモデル $T\varphi$ の S -不変性)

$$\forall\varphi\in\Phi, S(S\varphi)=S\varphi\wedge S(T\varphi)=T\varphi.$$

(証明) 定理1，(ii)，(iii)に注意しておく．

付録A，A3章の4性質①の成立の確かめ：

$$\varphi=0\text{のとき，}\int_M dm(x)\varphi(x)=0\text{を得，}T\text{の定義式(89)より，}T\varphi=0\text{がいえる.}$$

付録A，A3章の4性質②の成立の確かめ： a を任意の正定数とし， $\eta\equiv a\cdot\varphi$ を導入する．

$$(イ) \int_M dm(x)\varphi(x)=0 \tag{90}$$

$$\text{であれば，}\int_M dm(x)\eta(x)=0\text{を得，}$$

$$\forall z\in M, (T\varphi)(z)=(T\eta)(z)(=0)$$

が得られた．

$$(ロ) \int_M dm(x)\varphi(x)\neq 0 \tag{91}$$

であれば、 $\int_M dm(x)\eta(x) \neq 0$ を得、*NFOM* の定義式 (72) から、

$$NFOM(k; \eta) = NFOM(k; \varphi)$$

がいえる。よって、*S* の定義式 (73)₁ から

$$S\eta = S(a \cdot \varphi) = a \cdot S\varphi \tag{92}$$

が成り立つ。よって、*T* の定義式 (89) から、

$$T\eta = T\varphi$$

が成り立つ。

付録A, A3章の4性質③の成立の確かめ：

$\eta = T\varphi$ を導入する。

(イ) 式 (90) が成立していれば、性質①より、 $\eta = T\varphi = 0$ である。

$\int_M dm(x)\eta(x) = 0$ を得、性質①より、 $T\eta = T(T\varphi) = 0$ である。よって、

$$T\eta = \eta (= 0)$$

を得た。

(ロ) 式 (91) が成立しているとする。*T* の定義式 (89) より、

$$\eta(z) = (T\varphi)(z) = \frac{(S\varphi)(z)}{\int_M dm(x)\varphi(x)} \tag{93}$$

である。

ここで、式 (73)₁ の $S\varphi$ について、*NFOM* ($k; S\varphi$) を計算すれば、定理1, (iii) より、*NFOM* ($k; S\varphi$) = 0 である。よって、

$$S(S\varphi) = S\varphi \tag{94}_1$$

が成り立つ。よって、

$$NFOM(k; b \cdot \varphi) = NFOM(k; \varphi) \quad \text{for any real number } b (\neq 0) \tag{94}_2$$

$$\therefore S(b \cdot \varphi) = b \cdot S\varphi \quad \text{for any real number } b (\neq 0) \tag{94}_3$$

に注意して、また、等式

$$\begin{aligned} & \int_M dm(x)\eta(x) \\ &= \int_M dm(z)(S\varphi)(z) / \int_M dm(x)\varphi(x) \quad \because \text{式 (93)} \\ &= \int_M dm(z)\varphi(z) / \int_M dm(x)\varphi(x) \quad \because \text{定理1, (ii)} \\ &= 1 \neq 0 \end{aligned}$$

に注意すれば、*T* の定義式 (89) より、

$$\begin{aligned} \forall z \in M, (T\eta)(z) &= \frac{(S\eta)(z)}{\int_M dm(x)\eta(x)} \\ &= \frac{(S(S\varphi))(z)}{\int_M dm(x)(S\varphi)(x)} \quad \because \text{式 (93)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(S\varphi)(z)}{\int_M dm(x)(S\varphi)(x)} \quad \because \text{式 (94)}$$

$$= \frac{(S\varphi)(z)}{\int_M dm(x)\varphi(x)}$$

$$\because \text{定理 1, (ii) より, } \int_M dm(x)(S\varphi)(x) = \int_M dm(x)\varphi(x) \neq 0$$

$$= \eta(z) \quad \because \text{式 (93)}$$

を得, $T(T\varphi) = T\varphi$ の成立が示された.

付録A, A3章の4性質④の成立の確かめ: 式 (91) が成り立っているとき,

$$\exists z \in M, (S\varphi)(z) \neq 0$$

であれば, T の定義式 (89) より, $(T\varphi)(z) \neq 0$ がいえる.

(定理 2 の系 1 の証明)

(イ) 式 (90) が成立していれば, $NFOM$ の定義式 (73)₃ より, $NFOM(k; \varphi) = 0$ であり, よって, S の定義式 (73)₁ より, $S\varphi = \varphi$ である. よって, 定理 2 の系 1 の前半 $S(S\varphi) = S\varphi = \varphi$ が得られた.

一方, T の定義式 (89) より, $T\varphi = 0$ である. $NFOM$ の定義式 (73)₃ より, $NFOM(k; T\varphi) = 0$ であり, よって, S の定義式 (73)₁ より, 定理 2 の系 1 の後半 $S(T\varphi) = T\varphi$ が得られた.

(ロ) 式 (91) が成立しているとする.

定理 2 の系 1 の前半は式 (94)₁ で示されている.

$T\varphi$ は, 式 (93) で示されているが, $S(T\varphi)$ を求めてみよう. 定理 1, (iii) より,

$$\begin{aligned} & NFOM(k; T\varphi) \\ &= NFOM(k; S\varphi) \quad \because \text{式 (72)} \\ &= 0 \quad \because \text{定理 1, (iii)} \end{aligned}$$

であるから, S の定義式 (73)₁ より, 定理 2 の系 1 の後半

$$S(T\varphi) = T\varphi$$

が成立する. □

式 (73)₁ の $S\varphi$ は, 原パターン φ の再配置パターンであり, 式 (88) の写像 S はユニタリ座標変換を行う再配置写像と呼ばれてもよいのであるが, 定理 2 の系 1 からわかるように, この $S\varphi$ を付録A, A3章のベキ等性質③が成り立つように改良した再配置パターンが式 (89) のパターンモデル $T\varphi$ であることになる.

尚, 式 (72) の $NFOM(k; \varphi)$ の代りに,

$$\begin{aligned} & NFOM(k; \varphi) \\ & \equiv \frac{\int_M dm(y) y_k \cdot |\varphi(y)|^2}{\int_M dm(y) |\varphi(y)|^2} \quad \text{if } \int_M dm(z) |\varphi(z)|^2 \neq 0 \end{aligned} \quad (95)_1$$

但し, 式 (73)₃ の約束の代りに,

$$\int_M dm(x) |\varphi(x)|^2 = 0 \text{ のとき, } NFOM(k; \varphi) = 0 \quad (95)_2$$

を採用し, $S\varphi$ を同じく, 式 (73)₁ の如く定義した後, 式 (89) の $T\varphi$ の代りに,

$$(T\varphi)(z) = \begin{cases} 0 \cdots \int_M dm(x) |\varphi(x)|^2 = 0 \text{ のとき} \\ \frac{(S\varphi)(z)}{\sqrt{\int_M dm(y) |\varphi(y)|^2}} \cdots \int_M dm(x) |\varphi(x)|^2 \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (96)$$

を採用しても、付録A, A3章の4性質①～④を満たし、然も、定理2の系1が成り立つことの証明は、付録Fに任される。

次の定理3は、2式(50), (51)での1パラメータLie座標変換群 $\{\exp(t \cdot A)\}_{-\infty < t < +\infty}$ に不変な、式(97)を満たすパターン φ が無限小変換 A によって零元0に変換されること(式(98)), 並びに、その逆の成立をも指摘している。

[定理3] (1パラメータLie群 $\{\exp(t \cdot A)\}_{-\infty < t < +\infty}$ に関する不変パターンの存在定理)

$$\forall t \in R \text{ (実数の集合)}, \exp(t \cdot A)\varphi = \varphi \quad (97)$$

$$\Leftrightarrow A\varphi = 0. \quad (98)$$

(証明) 先ず、式(51)の $\varphi(y)$ について、式(B2)から、

$$\begin{aligned} \varphi(y) - \varphi(x) &= (\exp(tA)\varphi)(x) - \varphi(x) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} t^j \cdot (j!)^{-1} \cdot (A^j\varphi)(x) \end{aligned} \quad (99)$$

が成立していることに注意しておく。

\Rightarrow の証明: 式(97)が成立しているとする、式(99)から、

$$\begin{aligned} \forall t \in R, F(t; x) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} t^j \cdot (j!)^{-1} \cdot (A^j\varphi)(x) = 0 \quad \text{for any } x \in M \end{aligned} \quad (100)$$

が成立することになるが、この $F(t; x)$ を t の関数とみると、各 t^j の係数は0でなければならないから、

$$\forall j \in \{1, 2, \dots\}, (j!)^{-1} \cdot (A^j\varphi)(x) = 0 \quad \text{for any } x \in M \quad (101)$$

を得て、特に、 $j=0$ の場合を考えると、式(98)が言えた。

\Leftarrow の証明: 式(98)が成立しているとする、3式(47)～(49)での無限小変換 A は線形であるから、式(101)が成立することがわかる。よって、式(99)から、式(97)が得られる。□

例えば、2.1.1項での例2(縮小・拡大群)では、式(63)の2変数 u_1, u_2 を使って、

$$\begin{aligned} 0 &= (A\varphi)(x_1, x_2) \\ &= -x_1 \cdot \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1} - x_2 \cdot \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ &= -u_1 \cdot \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial u_1} \end{aligned} \quad (102)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x_1, x_2) \text{ は変数 } u_1 \text{ を含まなくて、変数 } u_2 \text{ のみの関数} \quad (103)$$

が成立している。

3.4 縮小・拡大群に不変なパターンモデル $T\varphi$

1例として、モデル形成過程 [18]

$$“\varphi \rightarrow T\varphi” \quad (104)$$

によって、パターン $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ のスケールは規格化され、縮小・拡大に不変な認識処理が可能であるように(付録Aの3節A5~A7を参照)、縮小・拡大群に不変なモデル構成作用素 T を構成し、縮小・拡大を矯正可能な式(A9)の正規化パターンモデル $T\varphi$ を説明しよう。

2.1.1項、例2の縮小・拡大群 $\{\exp(t \cdot A)\}_{-\infty < t < +\infty}$ について、考えよう。

式(B11)の微分方程式

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial (F_1 \cdot p)}{\partial x_1} + \frac{\partial (F_2 \cdot p)}{\partial x_2} \\ &= -\frac{\partial (x_1 \cdot p)}{\partial x_1} - \frac{\partial (x_2 \cdot p)}{\partial x_2} \quad \because F_1 = -x_1, F_2 = -x_2 \\ &= -\left[2p + x_1 \cdot \frac{\partial p}{\partial x_1} + x_2 \cdot \frac{\partial p}{\partial x_2}\right] \end{aligned}$$

を解けば、 C を正定数として、

$$p \equiv \hat{p}(x_1, x_2) = C \cdot \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \quad (106)$$

が得られる。以後、 $C = 1$ ととる。

そうすると、式(A1)の内積 (φ, η) については、式(B4)から、

$$\begin{aligned} (\varphi, \eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \varphi(x_1, x_2) \cdot \eta(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (107)$$

と与えられる可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(R^2; \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot dx_1 dx_2)$ が得られた。

実数値パターン $\varphi = \varphi(x_1, x_2) \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ の、式(62)の $z_1 = \log_e u_1 = \log_e [x_1^2 + x_2^2]^{1/2}$ に関する、式(72)の z_1 方向のずれ量

$$\begin{aligned} NFOM(1; \varphi) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \varphi(x_1, x_2) \cdot \log_e \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ & / \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \varphi(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (108)$$

を計算した後、式(62)の標準座標系 $z = \langle z_1, z_2 \rangle$ を使って(2式(66), (71)を参照)、式(73)の再配置パターンとしての基準形 $S\varphi$ は、

$$\begin{aligned} (S\varphi)(x_1, x_2) &= \varphi(\exp(z_1 + NFOM(1; \varphi)) \cdot \cos z_2, \exp(z_1 + NFOM(1; \varphi)) \cdot \sin z_2) \\ &= \varphi(\exp(NFOM(1; \varphi)) \cdot x_1, \exp(NFOM(1; \varphi)) \cdot x_2) \end{aligned} \quad (109)$$

と表される(定理1を参照)。定理1、(i)によれば、式(76)の2次中心モーメント $SOCS(k; \varphi, t)$ を最小にする実数値 t は式(109)の規格化1次モーメント $NFOM(k; \varphi)$ であり、 $t = NFOM(k; \varphi)$ が成立する。

このようにして、式(88)の写像 S が用意され、式(89)のモデル構成作用素 T が、定理2の系1

を満たすように構成された。つまり、写像 $T\varphi$ は付録Aでのaxiom1の4性質①～④を満たすのである。モデル $T\varphi$ は原パターン φ の大きさを規格化したパターンであり、縮小・拡大の下でのユニタリ座標変換不変性 [16], [17] (unitary invariance about expansion-and-contraction around origin) を備えている。

4. モデル構成作用素の合成

本章では、2つのモデル構成作用素 T_1, T_2 の積 (を使つての) 合成 $T_3 \equiv T_1 T_2$ が再び、モデル構成作用素となるための諸条件を検討し (4.1節)、その1適用例として2.1.1項での2例2, 3をまとめる形で、大きさの変動、回転双方に不変なパターンモデル $T_3\varphi$ を構成する (4.2節)。

4.1 2つのモデル構成作用素の積合成

処理対象パターン φ の、2つの集合 $\Phi_1, \Phi_2 (\subset \mathfrak{H})$ と2つの写像 $T_1: \Phi_1 \rightarrow \Phi_2, T_2: \Phi_2 \rightarrow \Phi_2$ との組

$$[\Phi_1, T_1], [\Phi_2, T_2] \tag{110}$$

は共に、付録A, A3章の4性質①～④、並びに、埋込性質を表す式 (A35) を満たすものとしよう。

このとき、

$$\Phi_3 \equiv \Phi_1 \tag{111}$$

$$T_3 \equiv T_1 T_2: \Phi_3 \rightarrow \Phi_3 \tag{112}$$

の組

$$[\Phi_3, T_3] \tag{113}$$

が付録A, A3章の4性質①～④、並びに、埋込性質を表す式 (A35) を満たすかどうかを研究しよう。

次の定理4は、4性質①～④、並びに、式 (A35) を満たす十分条件の1つが2つの写像 T_1, T_2 の可換性 (commutativity)

$$(a) \Phi_1 \subseteq \Phi_2 \subseteq \mathfrak{H}$$

$$(b) \forall \varphi \in \Phi_1, T_2\varphi \in \Phi_1 \wedge T_1 T_2\varphi = T_2 T_1\varphi$$

であることを指摘している。

【定理4】(モデル構成作用素の合成定理)

式 (110) の2つの組 $[\Phi_1, T_1], [\Phi_2, T_2]$ が付録A, A3章の4性質①～④、並びに、埋込性質を表す式 (A35) を満たすものとしよう。このとき、2条件 (a), (b) が成り立つならば、しかも、条件

$$(c) \exists \varphi (\neq 0) \in \Phi_1, T_1\varphi \neq 0 (\in \Phi_1) \wedge T_2 T_1\varphi \neq 0 (\in \Phi_2)$$

が成り立っているならば、式 (113) の $[\Phi_3, T_3]$ が、付録A, A3章の4性質①～④、並びに、埋込性質を表す式 (A35) を満たす。

(証明) 性質①について: $\varphi = 0 \in \Phi_1 = \Phi$ とすれば、

$$\varphi \in \Phi_2 \text{ であり (条件 (a)), } T_2\varphi = 0 \text{ (性質①) を得、} T_3\varphi = T_1 T_2\varphi = 0 \text{ (性質①)}$$

が成立することがわかった。

②について: a 正実定数とする。 $\varphi \in \Phi_1 = \Phi$ とすれば、式 (A35) より、

$$a \cdot \varphi \in \Phi_1 = \Phi$$

を得、また、性質②より、 $T_2(a \cdot \varphi) = T_2\varphi$ が成り立っているから、

$$T_3(a \cdot \varphi) = T_1 T_2(a \cdot \varphi) = T_1 T_2\varphi$$

がわかった。

③について： $\varphi \in \Phi_1 = \Phi$ とすれば、条件式 (b) より、

$$T_2\varphi \in \Phi_1 \wedge T_3\varphi = T_1T_2\varphi = T_2T_1\varphi \in \Phi_1 \quad (114)$$

が知れ、よって、

$$\begin{aligned} T_3T_3\varphi &= T_1T_2(T_1T_2\varphi) \\ &= T_1T_2(T_2T_1\varphi) \quad \because \text{式 (114)} \\ &= T_1T_2T_1\varphi \quad \because \text{性質③} \\ &= T_2T_1T_1\varphi \quad \because \text{式 (114)} \\ &= T_2T_1\varphi \quad \because \text{性質③} \\ &= T_3\varphi \in \Phi_1 = \Phi \end{aligned}$$

がわかつた。

④について：条件式 (c) より、

$$\exists \varphi (\neq 0) \in \Phi_1 = \Phi, T_3\varphi = T_1T_2\varphi = T_2T_1\varphi \neq 0$$

がわかる。 □

尚、 I を恒等写像として、和合成 $T_1 + T_2$ 、補元合成 $I - T$ がモデル構成作用素となるための諸条件の決定は、付録A、A3章の性質②からわかるように、式 (A9) のモデル構成作用素 T は非線形であるからして、困難である。

4.2 縮小・拡大と回転との合成

大きさの変動、回転などに無関係なごとく認識処理するための基礎を、4.1節の定理4を適用して研究しよう。

2.1.1項、例3の回転群について、考えよう。

3.4節の内積 (φ, η) の下で、写像

$$S_2 : \Phi_2 \rightarrow \Phi_2 \quad (115)$$

が、実数値パターン $\varphi = \varphi(x_1, x_2) \in \Phi_2 \subset \mathfrak{H} = L_2(R^2; \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 dx_2)$ について、

$$\begin{aligned} (S_2\varphi)(x_1, x_2) \\ \equiv \varphi(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \cos(\tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} + NFOM(2; \varphi)), \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sin(\tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} + NFOM(2; \varphi))) \end{aligned} \quad (116)$$

と用意されるところ (定理1を参照)。ここに、式 (62) の標準座標系 $z = \langle z_1, z_2 \rangle$ を考慮して、 $NFOM(2; \varphi)$ は、

$$\begin{aligned} NFOM(2; \varphi) \\ \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \varphi(x_1, x_2) \cdot \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} \\ / \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \varphi(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (117)$$

と定義されている (式 (72) を参照)。

$$(T_2\varphi)(x_1, x_2) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdots \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \varphi(x_1, x_2) = 0 \text{ のとき} \\ \frac{(S_2\varphi)(x_1, x_2)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \varphi(x_1, x_2)} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \varphi(x_1, x_2) \neq 0 \text{ のとき} \end{array} \right. \quad (118)$$

と定義される写像 $T_2: \Phi_2 \rightarrow \Phi_2$ は、付録A, A3章の4性質①～④を満たす(定理2を参照)。

備考: 2.1.1項の例3においては、式(B11)の微分方程式として、

式(B11)の微分方程式

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial (F_1 \cdot p)}{\partial x_1} + \frac{\partial (F_2 \cdot p)}{\partial x_2} \\ &= \frac{\partial (x_2 \cdot p)}{\partial x_1} - \frac{\partial (x_1 \cdot p)}{\partial x_2} \quad \because F_1 = x_2, F_2 = -x_1 \\ &= x_2 \cdot \frac{\partial p}{\partial x_1} - x_1 \cdot \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{aligned}$$

が得られ、この微分方程式を解けば、2.1.1項の例2と同じ解が得られる。つまり、 C を正定数として、式(106)の $p \equiv p(x_1, x_2)$ が得られる。この例3においても、例2と同様に、 $C=1$ を採用している。□

2.4節での式(108)の $NFOM(1; \varphi)$ を使って、式(109)のごとく構成された式(88)の写像 S を S_1 と表記し直し、式(89)で定義された写像 T を $T_1: \Phi_1 \rightarrow \Phi_1$ と採用すれば、式(112)の写像 $T_3 \equiv T_1 T_2$ は、

$$\begin{aligned} (T_3\varphi)(x_1, x_2) &\equiv (T_1 T_2\varphi)(x_1, x_2) = \\ &\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \varphi(x_1, x_2) = 0 \text{ のとき} \\ \varphi(\exp(NFOM(1; \varphi)) \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \cos(\tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} + NFOM(2; \varphi)), \\ \exp(NFOM(1; \varphi)) \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sin(\tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} + NFOM(2; \varphi)) \\ \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \varphi(x_1, x_2) \neq 0 \text{ のとき} \end{array} \right. \quad (119) \end{aligned}$$

と表され、付録A, A3章の4性質①～④を満たすことが定理4よりわかる。式(112)の写像 $T_3: \Phi_3 \rightarrow \Phi_3$ は、実数値パターン $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ の大きさ、回転を是正する正規化作用素である。

5. むすび

パターン認識技術を確保しようとする歴史はパターンの変形に対する攻略法研究の歴史でもある。本論文は、平行移動、縮小拡大、回転などで代表される1パラメータのLie座標変換群の変形効果を取り除いて、パターンを復元する技術が研究された。

パターン φ を認識処理する場合、変形されているパターン φ を、誤認識が生じない程度に、変形されていないパターン η として再生した後、後続の特徴抽出処理、カテゴリ決定処理を行う必要がある。1章の(二)、(三)は、この様なパターン η として、 φ に対応するパターンモデル $T\varphi$ を構成する手法を研究しているこれまでの諸研究 [11]~[28] に続くものである。処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ に含まれている変形は通常不規則であり、パターン全体にわたる単一の規則的変換(ユニタリ座標変換)、例えば、平行移動 [13], [15], [22], 縮小拡大 [16], [17], 回転 [20] では表され得ないが、(二)、(三)は、少なくとも、単一の規則的変換を $\varphi \in \Phi$ から除去できる手法を提供する。手書き漢字 [15]~[17], [20], 日本語単独母音 [21], [23], [27] のパターン構造再生、パターン認識、パターン連想に関し、計算機シミュレーション済みのパターンモデル(いわゆるパターン認識分野での、原パターン φ の正規化パターン) $T\varphi$ の改良を目指し、 φ の代りとなる新たなパターンモデル $T\varphi$ を提案するものである。このモデル $T\varphi$ は付録A, A7章の最大類似度認識法 [23] での $T\varphi$ の代りに用いることができる。

パターン構造の再生、パターン認識、パターン連想などのパターン情報処理の公理的取り扱いの端緒となったパターン認識の数学的理論 [32], [33] で明確かつ一般的に登場した“モデル構成作用素 T の構造形式”は、多様性を備えており、それ故に、統一的取り扱いを困難にしていることは、本研究内容からも理解できよう。写像 T の存在はこれまで、多数指摘・構成されており [11]~[28], [31]~[34], そのパターン情報構造の復元の有様が計算機シミュレーション [13], [15]~[17], [20]~[23], [27], [35] で明らかにされている。

原パターン φ の代りとなり φ に含まれているなんらかの規則的・不規則的変形とか座標変換とか、雑音を取り除いて得られるパターンモデル $T\varphi$ を出力する“パターン認識分野での、式(A9)の正規化写像 T ”を研究することは、現在に至っても、魅力を失っていない。

パターンモデルとは、或る観点からパターンのある側面を抽象化し表現したものである。パターンモデルはパターンのすべての側面を忠実に表現していない。仮に、もし、そうだとすると、それはモデルではなく、対象のパターンそのものであるからである。また、同じパターンに対し、どの観点、どの側面を取り上げるか、どのような表現法を採用するかによって複数の種類のパターンモデルが存在することになる。同じパターンについての、複数の種類のパターンモデルを使い合成して、実世界の環境に適応できるような認識方法が必要とされる。

処理の対象とする問題のパターン φ と、そのパターンモデル $T\varphi$ に対し、次の五解釈を少なくとも、与えることができよう：

- (一) $T\varphi$ は φ の近似である。
- (二) $T\varphi$ は φ の要約である。
- (三) $T\varphi$ の持つ情報は φ の持つ情報の1部である。
- (四) $T\varphi$ は φ の整形化である。
- (五) $T\varphi$ は恰も φ であるかの様に錯覚される。 □

認識システムRECOGNITRONは、処理の対象とする問題のパターン φ に関する知識を先ず、パターンモデル $T\varphi$ に変換した後、段階的に複数回の変換を経て、 φ を認識する。認識システムRECOGNITRONは、プロトタイプに基づくカテゴリ化の能力を備えている。つまり、或るカテゴリの典型的な事例(即ち、プロトタイプ)と類似する入力事例が存在する場合、後者の入力事例を典型例からの拡張例として取り込んでいく能力を備えている。

SS理論 [31]~[33] (S. Suzukiの構築したパターン認識の数学的理論) は、公理主義的であり、然

も、パターン φ の意味をあるカテゴリ \mathfrak{C}_j のプロトタイプパターン（代表パターン） ω_j のパターンモデル $T\omega_j$ に多段階的に還元する還元主義的なアプローチ（ φ から $T\omega_j$ を多段階的に連想するアプローチ）を前提している。

次の3能力（1）、（2）、（3）は、RECOGNITRONの“パターン認知能力”の中核部分である。

（1）ある複数のパターンの中に類似性を認めそこに共通の特徴構造を抽出していく能力（式（9）の特徴抽出写像 u の形成能力、或いは、式（D20）の類似度関数 SM の形成能力）

（2）一般的な特徴構造を背景にして、この特徴構造を満たすパターンを事例同一化する能力（パターンの事例を学習する能力）

（3）プロトタイプ（代表パターン）を基盤としてこれに関連する拡張事例（変形している入力パターン）を取り込んで理解してゆく能力（パターンを認識する能力） □

パターン（pattern）[11]が記号（symbol）と異なるのは、変形に耐え、その意味を保持できることにある。

パターンとは、ある種のユニタリ座標変換（基本的なパターン変換）からある程度の変形を受けても、ある程度の雑音による変形が加わっても、その意味が保存されるような情報である [12]。そのために、パターンというものは、冗長な表現形態を備えざるを得ない。よって、パターン構造の再生 [15], [17], [20], パターン認識 [23], [27], [35], パターン連想 [21], [26] などに関して、効率的なパターン情報処理機能を獲得するためには、処理の対象とする問題の、冗長な表現形態を備えているパターン $\varphi \in \Phi$ に対し、その代りとなる“加わっているある種の雑音を取り去るような簡潔な構造形式を備えており、然も、その指示する類概念（category）がある種のユニタリ座標変換の下で不変であるようなパターンモデル [18], [19]” $T\varphi \in \Phi$ が求められる。ここに、 Φ は処理の対象とするパターン φ の集合である（付録A） [18], [28]。位置ずれ、大きさの変動、回転などに無関係なごとく認識処理することは、パターン認識技術の初期の研究段階から重要視されてきた [11]。パターン φ をあたかも量子力学の波動関数とみなして、量子力学的2次汎関数（測度的ユニタリ不変量）の直交直和分解を利用して [13], 付録A, A3章での4性質①~④を満たす式（A9）のモデル構成作用素 [18] T を構成し [12], [14], 位置ずれ、大きさの変動、回転の各々の下でのユニタリ座標変換不変性を、認識の働きに取り入れられる試みもなされている [15], [17], [20]。

その構成要素が連続無限個ある座標変換の集合（連続的座標変換群）に含まれているパラメータに関し、微分可能な変換群をLie座標変換群 [29], [30] というが、平行移動群、縮小・拡大（大きさの変動）群、回転群（2.1.1の例1, 例2, 例3）は各々、その典型的な場合である。

これまでのパターン認識技術 [7], [8], [10] では、

（一）1実パラメータ t のLie座標変換群をユニタリ化する式（7）の密度関数 $p(x)$, $x \in M$ の存在が明確に指摘されていないこと

を考慮し、本論文では、この問題を解決し（付録Bの定理B1, その系1を参照）、

（二）1実パラメータ t に関し微分可能という意味でLie群と呼ばれる“ユニタリ作用素 U_t の作る式（8）の座標変換連続群 $\{U_t\}_{-\infty < t < +\infty}$, where $U_t \equiv \exp(tA)$ が作用する前の状態に戻す処理、いわゆる通常の意味の正規化が、付録A, A3章での4性質①~④を満たす式（A9）のモデル構成作用素 T を用いて、可能なこと

が示され（第3章；文献 [28] の第25, 26部）、その後、

（三）2つのモデル構成作用素 T_1, T_2 の積合成 $T_1 \cdot T_2$ が再び、1つのモデル構成作用素 T_3 となるための諸条件

(四) 1次独立な \mathfrak{G} の元 ψ_k からなる系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ を使い、処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{G}$ から特徴抽出する機能を持つ式 (9) の特徴抽出写像 u を構成した後、この写像 u を用い、付録A、A7章の最大類似度認識法に役立つように、別の種類のモデル構成作用素 T 、類似度関数 SM を構成すること
が研究された。

各カテゴリの代表パターンモデルの非負1次結合（その非負1次結合係数は類似度値）を変換して行き、ある1つのカテゴリの代表パターンのモデルを得ることで連想的認識の働きを実現しようとする不動点探索形構造受精変換認識技術 [27], [28], [32], [33] では、付録A、A5章での3性質（直交性、確率性、 T -不変性）を備えた式 (A23) の類似度関数 SM が用いられるが、本研究で得られた2式 (89), (96) の2つのモデル構成作用素 T と式 (A23) の類似度関数 SM とを使い、付録A、A7章での最大類似度法の一般化としてのこの不動点探索形構造受精変換認識技術の研究も進め、日本語単独母音、風景画の認識・連想に関し一部そのシミュレーション [27], [35] でその有効性が確かめられている認識・連想技術を、画像内の対象抽出処理、文字認識、文書内文章認識処理、言語音声処理、会話音声処理、顔表情の判断、顔表情による人物同定、指紋同定、身体動作の認識処理などにおける各種のパターンに適用し、次第に実際のパターン情報処理技術分野に占めるSS理論 [32], [33] の役割を鮮明にすることが望まれる。

文 献

- [1] 吉田耕作：“近代解析（基礎数学講座20）”，pp.171-196，共立出版，Dec.1963
- [2] 吉田耕作：“ヒルベルト空間論（共立全書49）”，pp.76-84，共立出版，Aug.1957
- [3] Angus E.Taylor, David C.Lay: “Introduction to function analysis”, p.251, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1980
- [4] M.A.ナイマルク：“関数解析入門・（共立全書530）”，pp.235-264，功刀金二郎・井関清志・笠原章郎共訳，共立出版，Jan.1965
- [5] 青木利夫，高橋渉：“集合・位相空間要論”，p.82，培風館，Sept.1979
- [6] Ingrid Daubechies: “Orthonormal bases of compactly supported wavelets”, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol.XL I , pp.909-996, 1988
- [7] Mario Ferraro: “Relationship between integral transform invariances and Lie group theory”, J.Opt.Soc. Am.A, vol.5, no.5, May 1988
- [8] Joseph Segman, Jacob Rubinstein, and Yehoshua Y. Zeevi: “The canonical coordinates method for pattern deformation: Theoretical and computational considerations”, IEEE Trans. Pattern Anal. & Mach. Intell., vol.14, no.12, pp.1171-1183, Dec.1992
- [9] Charles A. Michelli: “Interpolation of scattered data-distance matrices and conditionally positive definite functions”, Constructive Approximation, vol.2, pp.11-22, 1986
- [10] Naomi Blatt and Jacob Rubinsten: “The canonical coordinates method for pattern recognition-II. Isomorphisms with affine transformations”, Pattern Recognition, vol.27, no.1, pp.99-107, Jan.1994
- [11] 鈴木昇一：“認識工学（上）”，柏書房，Feb.1975
- [12] 鈴木昇一：“測度的不変量検出形認識系の構成理論”，電子（情報）通信学会論文誌（D），vol.55

- D, no.8, pp.531-538, Aug.1972
- [13] 鈴木昇一：“画像情報量とその手書き漢字への応用”，画像電子学会，vol.4, no.1, pp.4-12, 1975
- [14] 鈴木昇一：“パターン認識における構造化モデルの4性質とその応用”，電子（情報）通信学会論文（D）, vol.J60-D, no.9, pp.710-717, Sept.1977
- [15] 鈴木昇一，斎藤静昭，奥野治雄，太田芳雄：“画像の復元とその計算機シミュレーション”，工学院大学研究報告，vol.39, pp.198-206, Jan.1976
- [16] 鈴木昇一：“手書き漢字の側抑制効果の分解とその計算機シミュレーション”，情報処理，vol.15, no.12, pp.927-934, Dec.1974
- [17] 鈴木昇一：“抽出された特徴による手書き漢字構造の再生，情報処理（情報処理学会誌），vol.18, no.11, pp.1115-1122, Nov.1977
- [18] 鈴木昇一：“パターンのエントロピーモデル”，電子（情報）通信学会論文誌（D-II）, vol.J77-D-II, no.11, pp.2220-2238, Nov.1994
- [19] 鈴木昇一，柴山秀雄，古田晋吾：“移動的ウニタリ座標変換群の下で不変な簡易化構造モデルの標準形”，芝浦工業大学研究報告理工系編，vol.22, no.2, pp.29-38, Sept.1978
- [20] 鈴木昇一：“回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学情報学部），no.4, pp.36-56, Dec.1983
- [21] 鈴木昇一：“連想形記憶器MEMOTRONと日本語母音系列の再生に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学情報学部），no.7, pp.14-29, Dec.1986
- [22] 鈴木昇一：“収縮写像の構成用空間回路とその計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学情報学部），no.9, pp.17-28, Dec.1988
- [23] 鈴木昇一：“帰属係数法に基づく類似度，帰属関係あいまい度，認識情報量の計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学情報学部），no.11, pp.51-68, Dec.1990
- [24] 鈴木昇一：“新しい情報の測度とパターン情報処理，情報研究（文教大情報学部），no.13, pp.273-358, Dec.1992
- [25] 鈴木昇一：“マイクロ経済学におけるワルラスの法則とパターン類似度関数のホップフィールドニューラルネット形調整”，情報研究（文教大情報学部），no.14, pp.211-236, Dec.1993
- [26] 鈴木昇一，佐久間拓也：“パターンモデルを用いた不動点探索形連想記憶システム方程式”，情報研究（文教大情報学部），no.15, pp.97-128, Dec.1994
- [27] 鈴木昇一：“平均類似度を用いた構造受精法を用いた日本語単独母音の認識”，電子（情報）通信学会技術研究報告，vol.82, no.31, PRL82-4, pp.25-32, May 1982
- [28] 鈴木昇一：“パターン認識の数学的理論”，電子（情報）通信学会技術研究報告 [パターン認識と学習，パターン認識と理解]，PRL84-6(第I部)，PRL84-30, PRL84-38, PRL85-27, PRU86-8, PRU86-35, PRU86-69, PRU87-1, PRU87-28, PRU88-30, PRU89-1, PRU89-27, PRU89-40, PRU89-66, PRU89-77, PRU89-136, PRU90-5, PRU90-15, PRU90-29, PRU90-125, PRU91-1, PRU91-29, PRU91-42, PRU92-1, PRU92-18, PRU92-25, PRU92-89, PRU92-102（第28部），May 1984～Jan.1993
- [29] A.Cohen: “リー群論の応用（コーエンの微分方程式）”，高野一夫訳，pp.8-15, pp.22-24, 森北出版，May 1971
- [30] 松島与三：“多様体入門（数学選書5）”，p.24, p.27, pp.72-73, p.173, p.178, pp.184-190, p.222, 裳華房，May 1966
- [31] 鈴木昇一：“ニューラルネットの新数理”，近代文芸社，Sept.1996

- [32] 鈴木昇一：“パターン認識問題の数理的一般解決”，近代文芸社，June 1997
 [33] 鈴木昇一：“認識知能情報論の新展開”，近代文芸社，Aug.1998
 [34] 新谷虎松：“Javaによる知能プログラミング”，コロナ社，Oct.2002
 [35] 鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：“風景画の理解に関するJAVA言語によるRECOGNITRONの計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学情報学部），no.27, pp.73-109, Mar.2002

付録A（モデル構成作用素 T ，類似度関数 SM と，最大類似度認識法）

本付録Aでは，モデル構成作用素 T ，類似度関数 SM の満たすべき緒性質とその各々の1構成例を指摘し，簡単な認識法としての最大類似度法 [23]～[25]，[28] が説明される。

A1. 処理の対象とするパターン φ の集合 Φ

本研究では，これまでの設定通り，一般に，処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ は或る可分な [1] な (separable) 一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の，零元 0 を含む或る部分集合（部分空間とは限らない）である。例えば， $\bar{\eta}$ を η の複素共役として，

M : q 次元ユークリッド空間 R^q の可測部分集合

$dm(x)$: 正値ルベグ・スティルチェス式測度

$x = \langle x_1, x_2, \dots, x_q \rangle \in M (\subseteq R^q)$: 実数値 q 変数直交座標系

を導入し，その内積 (φ, η) ，ノルム $\|\varphi\|$ を，

$$(\varphi, \eta) = \int_M dm(x) \varphi(x) \cdot \bar{\eta}(x)$$

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \tag{A1}$$

とする線形空間（ベクトル空間）としての可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ の特別な場合として，

$$M = R^2 \text{ (2次元全平面)}$$

$$dm(x) = dm(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 dx_2 \tag{A2}$$

を選ぶことができる。

例えば，簡単な可分な実ヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ を挙げておこう。

$$M = \{1, 2, \dots, n\} \tag{A3}$$

$$dm(x) = 1 \text{ if } x \in M, = 0 \text{ if } x \notin M$$

とすると，内積 (φ, η) は，

$$(\varphi, \eta) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k \tag{A4}$$

ここに，

$$\varphi = \text{col}(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \text{ (実数列としての列ベクトル)}$$

$$\eta = \text{col}(b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n) \tag{A5}$$

と表わされ，この内積 (φ, η) を採用する n 次元ユークリッド空間 R^n は可分な実ヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ であることに注意しておく。

A2. 代表パターン集合 Ω

Φ の任意の元であるパターン φ は、カテゴリ集合

$$\mathfrak{C}(J) \equiv \{ \mathfrak{C}_j \mid j \in J \} \tag{A6}$$

のいずれか1つに帰属しているとし、第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j の代表パターン ω_j の集合

$$\Omega \equiv \{ \omega_j \mid j \in J \} \tag{A7}$$

を導入する。式 (A6) のカテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J)$ は以後、常に、2つ以上の要素を持つと仮定する。また、確率条件式

$$\forall j \in J, 0 < p(\mathfrak{C}_j) \wedge \sum_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) = 1 \tag{A8}$$

を満たす各カテゴリ \mathfrak{C}_j の生起確率 $p(\mathfrak{C}_j)$ をも導入しておく。

初めて目にする事物にそれに相応しいラベルを与えると云った場面に含まれる認知機能を、心理学ではカテゴリ作用 (categorization) と呼ぶが、本研究ではパターン認識 (pattern recognition) と呼ぶ [11]。本研究では、典型 (prototype) を中心として事例パターン集合が序列づけられたカテゴリ構造を持つと想定して、以後、論を進めるとすれば、式 (A7) の代表パターン集合 Ω が、このような典型の集合である。

尚、各代表パターン ω_j の適応的決定法は、文献 [28] の第21部、付録1にある。

A3. パターンモデル $T\varphi$ の満たすべき4性質

入力 $\varphi \in \Phi$ に対するその出力がそのパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ であるような写像

$$T: \Phi \rightarrow \Phi \tag{A9}$$

は、次の4性質①~④を満たさなければならない [14], [18], [28] としてみよう。

性質②, ③は各々、正定数倍、 T (がもたらす) 作用というパターン変形の下で、パターンという意味概念が保存されることを要請している。

① (零元不動点性) $\varphi = 0 \in \Phi \subset \mathfrak{C}$ について $T\varphi = \varphi \in \Phi$

② (正定数倍不変性) $\forall a \in \Phi, T(a \cdot \varphi) = T\varphi \in \Phi$ for any positive real number a .

③ (ベキ等性) $\forall \varphi \in \Phi, T(T\varphi) = T\varphi$.

④ (非零写像性) $\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0 \in \Phi$. □

4性質①~④を満たすという意味でモデル構成作用素と呼ばれる式 (A9) の写像 T を導入することの1つの意義は、実際に処理の対象とするパターン φ というものの帰納的定義が可能になり、パターン認識システムの自己組織化が精密に論じられることである [28]。直接的には、パターンモデル $T\varphi \in \Phi$ を、変形前に戻された処理対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ の近似としての正規化パターンと想定すると、パターン認識分野におけるいわゆる式 (A9) の正規化写像 T が最小限満たさなければならない4性質①~④を指摘していることである [14], [17], [18]。

A4. パターンモデル $T\varphi \in \Phi$ の1例

前節の4性質①~④を満たす式 (A9) の写像 T はこれまで、多数指摘されており [11], [12], [14], [18], [19], 特に、その空間回路の基礎付け [13], [16], [22], パターン構造の再生 [15], [17], [20], パターン認識 [28] への応用 [23], [27], パターン連想 [26] への応用 [21] に関し計算機シミュレーション済みである。本付録Aでは、紙面の都合上、次の例A1で示されている T のみを指摘しておこう。

[例A1] (1次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ によるパターンモデル $T\varphi \in \Phi$)

可分なヒルベルト空間 \mathfrak{H} の元 ϕ_k の組 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ は、

$$\sum_{k \in L} a_k \cdot \phi_k = 0 \Rightarrow \forall k \in L, a_k = 0 \quad (\text{A10})$$

を満たすという意味で、1次独立としよう。このような1次独立な各 ϕ_k は例えば、wavelet展開法[6]、Radial Based Functions法 [9]に見つけることができる。このとき、

$$\left\| \varphi - \sum_{k \in L} a_k \cdot \phi_k \right\|^2 \rightarrow \min \quad (\text{A11})$$

ならしめる各複素係数 a_k は、連立1次方程式

$$\sum_{k \in L} a_k \cdot (\phi_k, \psi_\ell) = (\varphi, \psi_\ell), \ell \in L \quad (\text{A12})$$

を解くことで求められる。連立1次方程式 (A12) の解 $a_k, k \in L$ を、

$$a_k(\varphi), k \in L \quad (\text{A13})$$

と表すとき、パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ は、

$$\exists \varphi_\perp \in \mathfrak{H} \quad \text{such that} \quad \forall k \in L, (\varphi_\perp, \phi_k) = 0 \quad \wedge$$

$$\varphi = \sum_{k \in L} a_k(\varphi) \cdot \phi_k + \varphi_\perp \in \Phi \subset \mathfrak{H} \quad (\text{A14})$$

と、1次展開される。式 (A14) のように展開されたパターン $\varphi \in \Phi$ の近似として、パターン

$$T\varphi = \sum_{k \in L} u(\varphi, k) \cdot \phi_k \in \Phi \subset \mathfrak{H} \quad (\text{A15})$$

を用意しよう。ここに、各 $a_k(\varphi)$ は実数値と仮定して、式 (9) の特徴抽出写像 u での各 $u(\varphi, k)$ (パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出される第 $k \in L$ 番目の特徴量)は、次のように定義される：

$$c_k(\varphi) \equiv \begin{cases} 0 \cdots \forall k \in L, a_k(\varphi) = 0 \text{ のとき} \\ \frac{a_k(\varphi)}{\sup_{\ell \in L} |a_\ell(\varphi)|} \cdots \exists k \in L, a_k(\varphi) \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{A16})$$

として、 $2m$ 個の各閾値 ε_k^\pm を、不等式

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^-(m-1) &\equiv -1 < \varepsilon_k^-(m-2) < \cdots < \varepsilon_k^-(0) < 0 \\ < \varepsilon_k^+(0) < \cdots < \varepsilon_k^+(m-2) < \varepsilon_k^+(m-1) &\equiv +1 \end{aligned} \quad (\text{A17})$$

を満たすように設定しておいて、

$$u(\varphi, k) \equiv \begin{cases} \varepsilon_k^-(m-1) \cdots \varepsilon_k^-(m-1) \leq c_k(\varphi) < \varepsilon_k^-(m-2) \text{ のとき} \\ \varepsilon_k^-(m-2) \cdots \varepsilon_k^-(m-2) \leq c_k(\varphi) < \varepsilon_k^-(m-3) \text{ のとき} \\ \cdots \\ 0 \cdots \varepsilon_k^-(0) \leq c_k(\varphi) \leq \varepsilon_k^-(0) \text{ のとき} \\ \cdots \\ \varepsilon_k^+(m-2) \cdots \varepsilon_k^+(m-3) < c_k(\varphi) \leq \varepsilon_k^+(m-2) \text{ のとき} \\ \varepsilon_k^+(m-1) \cdots \varepsilon_k^+(m-2) < c_k(\varphi) \leq \varepsilon_k^+(m-1) \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{A18})$$

□

このとき、式 (A15) で定義される式 (A9) の写像 T は、A3章の4性質①～④を満たすことが容易に知れる。

パターン $\varphi \in \Phi$ の1次展開式 (A14) について、

$$T(\sum_{k \in L} a_k(\varphi) \cdot \psi_k + \psi_{\perp}) = T(\sum_{k \in L} a_k(\varphi) \cdot \psi_k) \in \Phi \subset \mathfrak{H} \quad (\text{A19})$$

が成立し、パターン $\varphi \in \Phi$ の主要成分

$$\sum_{k \in L} a_k(\varphi) \cdot \psi_k \in \Phi \subset \mathfrak{H} \quad (\text{A20})$$

に直交している加法的雑音 $\psi_{\perp} \in \mathfrak{H}$ を除去して、パターンモデル $T\varphi$ が得られていることがわかる。

このとき、A3章の③より、モデル $T\varphi$ が原パターン φ から抽出された式 (A18) という特徴量の組

$$\vec{u}(\varphi) \equiv \{u(\varphi, k) | k \in L\} \quad (\text{A21})$$

を保存している事実、つまり、

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall k \in L, u(T\varphi, k) = u(\varphi, k) \quad (\text{A22})$$

が成り立っていることは、パターン形状素 ψ_k の組 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ の1次独立性より直ちに確かめられる。

□

A5. 類似度関数 SM の満たすべき3性質

本章では、A3章の4性質①～④を満たしているパターンモデル $T\varphi$ を生成する式 (A9) のモデル構成作用素 T の下で不変な類似度関数

$$SM : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s | 0 \leq s \leq 1\} \quad (\text{A23})$$

について考察する。

式 (A23) の写像 SM が少なくとも、次の3性質 (直交性、確率性、 T -不変性) を満たすとしてみよう。1より大きくない非負量 $SM(\eta, \omega_j)$ は、パターン $\eta \in J$ が第 j 目のカテゴリ \mathfrak{C}_j の代表パターン $\omega_j \in \Omega \subset \Phi$ と似ている程度を表しているとしよう。最大値1に近い値を持つほど、似ていると考える訳である：

$$\begin{aligned} (\text{イ}) \text{ (直交性)} \quad & SM(\omega_i, \omega_j) \\ & = 1 \quad \text{if } i=j, = 0 \quad \text{if } i \neq j. \end{aligned}$$

$$(\text{ロ}) \text{ (確率性; 総和規格性)} \quad \forall \eta \in \Phi, \sum_{j \in J} SM(\eta, \omega_j) = 1.$$

$$(\text{ハ}) \text{ (} T \text{-不変性)} \quad \forall \eta \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\eta, \omega_j) = SM(\eta, \omega_j). \quad \square$$

上述の (イ)、(ロ)、(ハ) の効用について解説しておこう。

(イ) は、式 (A7) での各代表パターン $\omega_i, \omega_j (i \neq j)$ が、カテゴリ帰属情報を全く共有しないことを要請している。

次に、(ロ) は、 $SM(\eta, \omega_j)$ は処理の対象としている問題のパターン $\eta \in \Phi$ が代表パターン ω_j を表している確率と解釈できることを要求している。

パターン変換機能を持つモデル構成作用素 T が各カテゴリ \mathfrak{C}_j について、類似度 SM の値を保存することを要請している (ハ) は、パターンモデル $T\eta \in \Phi$ とその原パターン $\eta \in \Phi$ とが各カテゴリ \mathfrak{C}_j の代表パターン $\omega_j \in \Omega \subset \Phi$ に対し、同一の類似度 SM の値を備えていることを要求している。

以上で (イ)、(ロ)、(ハ) について解説が終わった。上記の3性質 (直交性、確率性、 T -不変性) を満たす類似度関数 SM はこれまで多数指摘されているが [23], [25], [27], [28], 次節では、このような SM を1つ構成しよう。

A6. 類似度関数 SM の1構成

A6節の3性質 (イ), (ロ), (ハ) を満たす式 (A23) の写像 SM はこれまで多数構成されている。本章では, 新たに, 次の例A2のごとく, 1例だけを構成しよう。

[例A2] (パターンモデル間相関値に基づいた SM の構成)

処理の対象とするパターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{S}$ に対し,

$$(T\varphi, \omega_j), j \in J \text{ が実数値である}$$

である場合を考えよう。各代表パターンモデル $T\omega_j \in T \cdot \Omega \subset \Phi$ 間の分離条件

$$\forall j \in J, \max_{i \in J - \{j\}} (T\omega_i, T\omega_j) \leq r_j < (T\omega_j, T\omega_j) \quad (\text{A24})$$

が満たされる各実定数 r_j が存在するとしよう。不等式 (A24) は容易に満たされる分離条件であろう。

$$SM(\varphi, \omega_j) \equiv$$

$$\begin{cases} \max\{(T\varphi, T\omega_j) - r_j, 0\} \cdots \exists k \in J, (T\varphi, T\omega_k) > r_k \text{ のとき} \\ \sum_{i \in j} \max\{(T\varphi, T\omega_i) - r_i, 0\} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \forall k \in J, (T\varphi, T\omega_k) \leq r_k \text{ のとき} \end{cases}$$

(A25)

と置けば, 直ちに, A5章, (ロ) の成立がわかる (式 (A8) を参照)。また, A3章, ③のベキ等性より, A5章, (ハ) の成立もわかる。更に, 分離条件式 (A24) より,

$$\forall j \in J, \max\{(T\omega_j, T\omega_j) - r_j, 0\} > 0$$

$$\wedge [\forall i \in J - \{j\}, \max\{(T\omega_i, T\omega_j) - r_j, 0\} = 0] \quad (\text{A26})$$

が成立しており, よって, A5章, (イ) の成立もわかり, 式 (A25) のように定義される関数 SM は, A3節の3性質 (直交性, 確率性, T -不変性) を満たす式 (A23) の類似度関数である。

明らかに, 2カテゴリ $\mathfrak{C}_j, \mathfrak{C}_i$ に対し, 入力パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{S}$ の, 類似性の望ましい性質

$$\exists k \in J, (T\varphi, T\omega_k) > r_k \text{ のとき}$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, SM(\varphi, \omega_j) > SM(\varphi, \omega_i)$$

$$\Leftrightarrow \max\{(T\varphi, T\omega_j) - r_j, 0\} > \max_{i \in J - \{j\}} \max\{(T\varphi, T\omega_i) - r_i, 0\} \quad (\text{A27})$$

が成り立っている。

A7. 最大類似度 (を求めて認識する方法)

パターン集合 Φ から式 (A1) のカテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J)$ への多対1の写像としての認識写像 (recognizer)

$$RG: \Phi \rightarrow \mathfrak{C}(J) \quad (\text{A28})$$

を設定するには, 簡単には, 最大類似度法, つまり, A3節の類似度関数 SM の3性質 (直交性, 確率性, T -不変性) に注目して,

パターン $\varphi \in \Phi$ について,

The pattern $\varphi \in \Phi$ is then determined to belong to the same category to which the nearest ω_j belongs such that

$$\max_{k \in J - \{j\}} SM(T\varphi, \omega_k) \leq SM(T\varphi, \omega_j) \quad (\text{A29})$$

という認識推断を行う機能を考えれば良い。

このとき、同値関係 $s \sim$ が、

$$\varphi_s \sim \eta \Leftrightarrow$$

$$\max_{k \in J-(j)} SM(T\varphi, \omega_k) \leq SM(T\varphi, \omega_j) \wedge \max_{k \in J-(j)} SM(T\eta, \omega_k) \leq SM(T\eta, \omega_j) \quad (\text{A30})$$

と定義され、 $\eta \in \Phi$ を含む認識同値類と称されて良い集合 $\{\eta\}$ は、

$$\{\eta\} = \{\varphi \in \Phi \mid \varphi_s \sim \eta\} \subset \Phi \quad (\text{A31})$$

と表されることに注意する．認識同値類 $\{\eta\}$ は、パターン η と同一のカテゴリに帰属すると認識推断されるパターン $\varphi \in \Phi$ の集合である．A5章の、 SM の T -不変性より、写像 T による同値関係 $s \sim$ の保存則

$$\forall \eta \in \Phi, T\eta \in \{\eta\} \quad (\text{A32})$$

が成立しており、パターン $\eta \in \Phi$ のモデル $T\eta \in \Phi$ に対し、 T により正規化がなされた形で、最大類似度法という認識の働きが達成されている．

尚、A3章の3性質①、②、③より、処理の対象とするパターン φ の集合 Φ は、

$$R^{++} \cdot \Phi \equiv \{a \cdot \varphi \mid a \in R^{++}, \varphi \in \Phi\}, \text{ここに、} R^{++} \text{は正実数全体の集合} \quad (\text{A33})$$

$$T \cdot \Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \quad (\text{A34})$$

として、埋込性質

$$\{0\} \cup R^{++} \cdot \Phi \cup T \cdot \Phi \subset \Phi \quad (\text{A35})$$

を備えていなければならないが、この埋込性質を表わす式 (A35) を満たす Φ の逐次的構成法は、文献 [28] の第24部にある [18]．

付録B (1パラメータLie座標変換群の、ユニタリ表現)

1パラメータLie座標変換群が、群性質

$$(b1) \text{ (群性質)} \quad U_t \cdot U_s = U_{t+s}, U_0 = I \text{ (恒等作用素)}$$

$$(b2) \text{ (強連続性)} \quad \forall \varphi \in \mathfrak{H}, \lim_{t \rightarrow s} \|U_t \varphi - U_s \varphi\| = 0.$$

を満たす可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ でのユニタリ作用素 U_t の作る群 $\{U_t\}_{-\infty < t < +\infty}$ とみなされるための諸条件について研究しよう．

ここに、作用素 B の定義域 $Domain(B)$ は、

$$Domain(B) \equiv \{\varphi \in \mathfrak{H} \mid \|B\varphi\| < \infty\} \subseteq \mathfrak{H} \quad (\text{B1})$$

と定義されており、

$$Domain(B) = \mathfrak{H} \text{ であるとき、}$$

$$\|B\varphi\| \leq N \cdot \|\varphi\| \text{ for any } \varphi \in \mathfrak{H}$$

を満たす非負実数 N の上限を B のノルムといい、 $\|B\|$ と表している [1]~[3]．

まず、線形作用素 tA の指数関数 $\exp(tA)$ とは、

$$\exp(tA) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k (j!)^{-1} \cdot (tA)^j \quad (\text{B2})$$

と定義される．ここに、 t は任意の実数である．

任意に $\varphi \in \mathfrak{H}$ を選んで、1実パラメータ t のLie座標変換群 (移動変換群) S_t に対し、

$$(U_t \varphi)(x) \equiv \varphi(S_t x) \quad \text{for any } x \in M \quad (\text{B3})$$

と定義される作用素 U_t は、線形作用素であることに、注意しておく。実は、2式 (50), (51) からわかるように、本研究では、

$$U_t = S_t = \exp(tA)$$

である。少なくとも、実数のある集合 M は、 n 次元ユークリッド空間 R^n の或る開集合と局所的には同相 [5] な近傍を持つ位相多様体 (topological manifold) [30] でなければならない。

内積 (φ, η) が式 (A1) で与えられる可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ における正值測度 $dm(x)$ について、表現

$$dm(x) = p(x) dx \quad \text{for any } x \in M \quad (\text{B4})$$

を許す式 (A1) での密度関数 $p(x)$ が存在するとしよう。

初期条件式 (44) の下で、式 (45) の微分方程式系が成立としているとしよう。更に、座標点

$$x \equiv \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in M \quad (\text{B5})$$

の実数値関数 $F_j(x)$ の系

$$F_j \equiv F_j(x) \equiv F_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad j = 1 \sim n \quad (\text{B6})$$

は、次の2条件 (b3), (b4) を満たしているとする：

(b3) $F_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ は、 M 上で1階までの連続な偏導関数を持つ。

$$(b4) \quad \forall x \in M, \quad \sum_{j=1}^n |F_j(x)|^2 \neq 0. \quad \square$$

このとき、次の定理B1が証明され、無限小変換 A が3式 (47)～(49) で与えられる2式 (8), (52) のLie群 $\{U_t\}_{-\infty < t < +\infty}$ をユニタリ化する式 (7) の密度関数 $p(x)$ を決定できる方程式 (B7) が指摘されている。

[定理B1] (Lie座標変換群のユニタリ化定理)

2条件 (b3), (b4) の下で、次の3命題 (b i), (b ii), (b iii) は互いに同値である：

$$(b \text{ i}) \quad \forall x \in M, \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial [F_j \cdot p]}{\partial x_j} = 0. \quad (\text{B7})$$

$$(b \text{ ii}) \quad A \equiv A(x) \equiv A(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \sum_{j=1}^n F_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \\ = \sum_{j=1}^n \sqrt{-1} \cdot F_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (\sqrt{-1})^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (\text{B8})$$

の指数関数 $U_t \equiv \exp(tA)$ は任意の実数 t について、ユニタリ作用素である。

$$(b \text{ iii}) \quad G \equiv \sqrt{-1} \cdot A$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1) \cdot F_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (\sqrt{-1})^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \\ = \sum_{j=1}^n \sqrt{-1} \cdot F_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (\text{B9})$$

は自己共役作用素である。

[定理B1の系1] (保測定理)

式 (8) の線形作用素 A の指数関数 $U_t = \exp(tA)$ は、式 (B3) で定義される1実パラメータ t のLie座標変換群 $S_t \equiv \exp(tA)$ を引き起こし、

$$\forall \varphi \in L_2(M; dm), \quad \forall t (-\infty < t < +\infty), \quad \|U_t \varphi\| = \|\varphi\| \quad (\text{B10})$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in M, \sum_{k=1}^n \frac{\partial [F_k \cdot p]}{\partial x_k} = 0. \tag{B11}$$

(証明) 系1の保測定理は、2式(50), (51)を考慮すると、ユニタリ作用素[3]の定義に基づいて、(b i) \Leftrightarrow (b ii)を書き換えたものに過ぎない。

(b ii) \Leftrightarrow (b iii)は、ストーン(Stone)の定理(文献[2]の定理25.1, 定理25.2)そのものである。

(b i) \Leftrightarrow (b ii)を示す前に、次のI, IIに注意しておく。

I. 関数系

$$z_j = g_j(x_1, x_2, \dots, x_n), j = 1 \sim n \tag{B12}$$

は、式(B5)を座標点を持つ領域Mにおいて定義されているものとしよう。Mの如何なる部分領域においても恒等的に0とならないn変数の z_1, z_2, \dots, z_n の関数 $Q(z_1, z_2, \dots, z_n)$ に対し、関係式

$$Q(g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0 \tag{B13}$$

が成り立つとき、式(B12)の関数系はMにおいて関数的に従属であるという。また、式(B12)の関数系が x_1, x_2, \dots, x_n のとり値の各々の組の近傍において任意に独立の値をとって変化し得るとき、式(B12)の関数系は関数的に独立であるという。

行列 $B = (b_{ij})$ に対し、その行列式を $\det(b_{ij})$ と書くことにしよう。

次の補助定理B1はよく知られている。

[補助定理B1]

式(B12)の関数 $z_j (j = 1 \sim n)$ 、及び、その1階までの偏導関数がすべて連続とすれば、次の(一)、(二)は同値である：

(一) 式(B12)の関数系はMにおいて関数的に従属である。

(二) 関数行列式(Jacobian)

$$\det(\partial g_j / \partial x_i) \equiv \partial(g_1, g_2, \dots, g_n) / \partial(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{B14}$$

はMにおいて恒等的に0である。 □

II. 初期条件として、式(44)を考え、式(45)の微分方程式系 y_j の解を、

$$y_j = g_j(x_1, x_2, \dots, x_n; t), j = 1 \sim n \tag{B15}$$

と書こう。式(B6)の関数系に対する2条件(b3), (b4)を考慮すれば、式(B15)の如く表現できる解 $y_j, j = 1 \sim n$ は唯1つしか存在しなくて、然も、各 g_j は式(44)の初期値 $x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ について1階までの連続な偏導関数を持つ関数であることが示せる。それで、次の結論が得られる：

初期条件式(44)から、

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n; t)|_{t=0} = x_j, j = 1 \sim n \tag{B16}$$

が満たされている。また、関数系

$$g_j, j = 1 \sim n \tag{B17}$$

は、 x_1, x_2, \dots, x_n について独立な関数系であり、補助定理B1を適用して、

$$\partial(g_1, g_2, \dots, g_n) / \partial(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0 \tag{B18}$$

も成立していることが知れ、式(B15)を逆に解いて、 y_1, y_2, \dots, y_n から x_1, x_2, \dots, x_n を得ることができ、式(B15)の逆変換が存在しているから、即ち、微分方程式系(45)の解が一意的であることから、式(B15)で定まる式(B17)の座標変換はM上の1対1の変換であることが知れ、更に、すべての2実数 t_1, t_2 に対し、群性質(group property)

$$\begin{aligned} & g_j(g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1), g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1), \dots, g_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1); t_2) \\ & = g_j(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + t_2), j = 1 \sim n \end{aligned} \quad (\text{B19})$$

を満たしている. このようにして, 式 (B15) は多様体 M の 1パラメータ変換群 [30] を定義している.

式 (B6) の関数系に対する 2条件 (b3), (b4) の下では, 式 (45) の微分方程式系の解である式 (B15) から定まる式 (B17) の関数系は,

M 上の 1対1の変換としての, 1パラメータ t の移動変換群を定義することになる. □

このようにして, 式 (B5) の座標点 $x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in M$ が式 (45) の微分方程式系に従って運動し, 今1つの座標点

$$y = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle \in M \quad (\text{B20})$$

に移動した場合,

$$\text{処理対象としてのパターン } \varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ は } \varphi(y) = \varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ に変換された} \quad (\text{B21})$$

と考えることができる.

(b i) \Leftrightarrow (b ii) の証明に入ろう.

任意に可測部分集合 $N \subseteq M$ をとり, 関数 $\varphi_N(x)$ を,

$$\varphi_N(x) = 1 \quad \text{if } x \in N, = 0 \quad \text{if } otherwise \quad (\text{B22})$$

と定義し, 式 (50) を用意し,

$$\exp(tA)N = \{y \mid y = \exp(tA)x, x \in N\} \quad (\text{B23})$$

を定義する.

式 (B2) の 1実パラメータ変換 $\exp(tA)$ は, 2条件 (b3), (b4) より, N と $\exp(tA)N$ との間の1対1の変換であることを考慮すれば, 先ず,

$$\begin{aligned} \|\exp(tA)N\| &= (\exp(tA)\varphi_N, \exp(tA)\varphi_N) \\ &= \int_{y \in \exp(tA)N} dy_1 dy_2 \dots dy_n p(y_1, y_2, \dots, y_n) (= m(\exp(tA)N)) \\ &= \int_{x \in N} dy_1 dy_2, \dots dx_n \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} p(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (\text{B24})$$

が成り立つ. このとき,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{dy_j}{dt} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} F_j(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad \because \text{式 (45)} \\ &= \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial y_\ell}(y_1, y_2, \dots, y_n) \cdot \frac{\partial y_\ell}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (\text{B25})$$

を満たすから, Kronecker delta記号

$$\delta_{ik} = 1 \quad \text{if } i = k, = 0 \quad \text{if } i \neq k \quad (\text{B26})$$

を導入して,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial (y_1, y_2, \dots, \frac{dy_j}{dt}, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial F_j (y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_\ell} \cdot \frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_\ell, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad \because \text{式 (B25)} \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial F_j (y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_\ell} \cdot \frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \delta_{\ell j} \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j (y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \\
 &= \frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j (y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_j}
 \end{aligned} \tag{B27}$$

と計算され、結局、式 (B27) を書き直して、

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dt} \frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \\
 &= \frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j (y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_j}
 \end{aligned} \tag{B28}$$

が成立していることがわかった。

さて、初期条件式 (44) の下では、

$$\frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \Big|_{t=0} = 1 \tag{B29}$$

であるから、式 (B28) を解けば

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \\
 &= \exp \left(\int_0^t ds \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j (y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_j} \right) > 0
 \end{aligned} \tag{B30}$$

が得られる。

よって、式 (B24) に注目すると、

$$\forall N \subset M, \forall t, \|\exp(tA) \varphi_N\|^2 = \|\varphi_N\|^2 \tag{B31}$$

$$\Leftrightarrow \forall N \subset M, \forall t, \frac{d}{dt} \|\exp(tA) \varphi_N\|^2 = 0 \tag{B32}$$

$$(\Leftrightarrow \forall x \in M, dm(\exp(tA)x) = dm(x) \quad \text{(B33)})$$

$$\Leftrightarrow \forall y = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle \in M, \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot p(y_1, y_2, \dots, y_n) \right] = 0 \tag{B34}$$

が成立しており、

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot p(y_1, y_2, \dots, y_n) \right] \\
 &= \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \right] \cdot p(y_1, y_2, \dots, y_n) + \frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \frac{d}{dt} p(y_1, y_2, \dots, y_n)
 \end{aligned}$$

∴積の微分公式

$$= \frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial y_j} \cdot p(y_1, y_2, \dots, y_n) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial p}{\partial y_j} \cdot \frac{dy_j}{dt} \right]$$

∴ 式 (B28)

$$= \frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial y_j} \cdot p(y_1, y_2, \dots, y_n) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial p}{\partial y_j} \cdot F_j \right]$$

∴ 式 (45)

$$= \frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j} [p(y_1, y_2, \dots, y_n) \cdot F_j(y_1, y_2, \dots, y_n)]$$

(B35)

を得るが、式 (B30) が正であることを考慮すれば、次の関係式 (B36) が成立する：

式 (B34)

$$\Leftrightarrow \forall y \in M, \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j} [p(y_1, y_2, \dots, y_n) \cdot F_j(y_1, y_2, \dots, y_n)] = 0.$$

∴ 式 (B35) (B36)

□

よって、初期条件式 (44) の下での、式 (45) の微分方程式系からいえる式 (51) を考慮すると、式 (B36)、つまり、(b i)

⇔ 式 (B34)

⇔ 式 (B31)

$$\Leftrightarrow \forall N \subset M, \forall t, m(\exp(tA)N) = m(N) \quad \therefore \text{式 (B33)} \quad (B37)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in M, \forall t, dm(\exp(tA)x) = dm(x) \quad (B38)$$

$$\Leftrightarrow \forall \phi, \forall t, \|\exp(tA)\phi\|^2 \quad (B39)$$

$$= (\exp(tA)\phi, \exp(tA)\phi)$$

$$= \int_M dm(x) |(\exp(tA)\phi)(x)|^2 \quad (B40)$$

$$= \int_M dm(\exp(tA)x) |(\exp(tA)\phi)(x)|^2 \quad (B41)$$

$$= \int_M dm(\exp(tA)x) |\phi(\exp(tA)x)|^2 \quad \therefore \text{式 (51)} \quad (B42)$$

$$= \int_{y \in \exp(tA)M} dm(y) |\phi(y)|^2 \quad (B43)$$

$$= \int_M dm(x) |\phi(x)|^2 (= \|\phi\|^2) \quad (B44)$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の実数 } t \text{ について, } \exp(tA) \text{ はユニタリ作用素である, つまり, (b ii)} \quad (B45)$$

を得て、(b i) ⇔ (b ii) の証明が完了した。 □

付録C. 意思決定支援システムから眺めたパターン認識

本付録Cでは、意思決定支援システムDSSで使われるAHP（階層分析法）による意思決定の考えを利用して、パターンモデルから抽出される特徴量の組を材料として、意思決定する働き、つまり、パターンが帰属するカテゴリを決定する働き（パターン認識）を考案しよう。

C.1 階層分析法AHPによる意思決定

意思決定支援システムDSS (Decision Support System) で使われるAHP（階層分析法；Analytic Hierarchy Process） [34] について、説明しよう。

n 個の項目 I_1, I_2, \dots, I_n があり、各々の項目の重要度が x_1, x_2, \dots, x_n であるとする。

n 個の案 P_1, P_2, \dots, P_n があり、各々の項目の重要度が y_1, y_2, \dots, y_n であるとする。

項目 I_j と比較して、項目 I_i は

- (1) 同程度に重要のとき、 $a_{ij} = 1$
- (2) やや重要のとき、 $a_{ij} = 3$
- (3) 重要のとき、 $a_{ij} = 5$
- (4) かなり重要のとき、 $a_{ij} = 7$
- (5) 非常に重要のとき、 $a_{ij} = 9$

(C1)

という重要度の値を、 a_{ij} に与えるとする。 n 次の行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ は一対比較行列と呼ばれる。

第 i ($= 1, 2, \dots, n$) 番目の要素 x_i が項目 I_i の重要度として、 $x = \text{col}(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ (列ベクトル) が与えられたとする。第 i ($= 1, 2, \dots, n$) 番目の案 P_i の重要度 y_i を、

$$\vec{y} = A\vec{x}, \text{ where } \vec{y} = \text{col}(y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n) \quad (\text{C2})$$

と、求める。

$$j = \arg \max_{1 \leq i \leq n} y_i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (\text{C3})$$

を求めると、次の意思決定が可能である：

評価基準ベクトル \vec{x} の下では、 n 個の案の内、第 j 番目の案 P_j を採用する。 (C4)

□

C.2 階層分析法AHPによる、理想的な場合の意思決定性質

n 個の項目 I_1, I_2, \dots, I_n があり、各々の項目の重要度が w_1, w_2, \dots, w_n であるとする。

$$x_i = w_i, \ i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{C5})$$

であり、

$$\vec{x} = \vec{w} = \text{col}(w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n) \quad (\text{C6})$$

である。方程式

$$A\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i, \ \lambda_i \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \quad (\text{C7})$$

を満たす形で、その固有値 λ_i 、固有ベクトル \vec{x}_i を求める。

一対比較行列 A の第行第 j 列の要素 a_{ij} は、理想的には、

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \quad (\text{C8})$$

であると考えられる。この場合、

$$\text{任意の行番号 } i (= 1, 2, \dots, n) \text{ について, } a_{ij} = a_{i1} \cdot a_{1j}, j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{C9})$$

が成立しているから、行列 A の第2行以下の各行は、第1行の定数倍である。よって、 A の階数は1である。行列 A の n 個の固有値については、

$$\lambda_1 \neq 0, \lambda_i = 0 (i = 2, 3, \dots, n) \quad (\text{C10})$$

である。実は、

$$A\bar{w} = n\bar{w} \quad (\text{C11})$$

が成立することが簡単に確かめられ、

$$\lambda_1 = n, \bar{x}_1 = \bar{w} \quad (\text{C12})$$

であることがわかる。

C.3 階層分析法AHPからhintを得たパターン認識法

パターン $\varphi \in \Phi$ についての、第 $i \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_i の重要度 $p_i(\varphi)$ を計算し、パターン $\varphi \in \Phi$ を認識することを考えよう。つまり、パターン $\varphi \in \Phi$ が、全カテゴリ

$$\mathfrak{C}_j, j \in J \quad (\text{C13})$$

の内、どの1つのカテゴリに帰属するかを決定しよう。

パターン $\varphi \in \Phi$ についての、第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_i の重要度 $p_i(\varphi)$ の最も大きい値を持つカテゴリ番号 $j = \arg \max_{i \in J} p_i(\varphi) \in J$ を見つけ、パターン $\varphi \in \Phi$ は第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j に帰属すると

意思決定すればよいというのが、本研究の提案である。

まず、

$$\forall j \in J, K_j \neq \phi \quad (\text{C14})$$

$$K_i \cap K_j = \phi (i \neq j) \quad (\text{C15})$$

を満たす添え字 t の集合 K_j を選定する。パターン系列

$$\eta_t \in \Phi, t \in K_j, j \in J \quad (\text{C16})$$

を、2条件

$$\forall j \in J, \exists t \in K_j, \eta_t = \omega_j \quad (\text{C17})$$

$$j \neq i \Rightarrow \forall t \in K_j, \forall s \in K_i, T\eta_t \neq T\eta_s \quad (\text{C18})$$

を満たすように選定する。 $\eta_t \in \Phi (t \in K_j)$ は第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j に帰属すると判明しているパターンである。式 (C16) のパターン系列は1次独立な系であることが望ましい。

特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \rightarrow R^+ \text{ (非負実数全体の集合)} \quad (\text{C19})$$

を導入する。 $u(\varphi, \ell) \in R$ はパターン $\varphi \in \Phi$ から抽出される第 $\ell \in L$ 番目の実数値特徴量である。

処理の対象とする問題のパターン (入力パターン) $\varphi \in \Phi$ を考え、その代りとなるパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ を導入しておく。パターン集合 Φ と写像 (モデル構成作用素)

$$T : \Phi \rightarrow \Phi \quad (\text{C20})$$

との対 $[\Phi, T]$ は、文献 [32] のaxiom 1をみたさなければならない (付録DのD.4.1を参照)。

第 $\ell \in L$ 番目の特徴量が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j に貢献する程度

$$q_{i\ell} = \frac{1}{\text{car}(K_j)} \cdot \sum_{t \in K_j} f(u(T\eta_t, \ell) - u(T\omega_j, \ell)) \quad (\text{C21})$$

を, カテゴリ番号 $j \in J$ と, 特徴量軸の番号 $\ell \in L$ にわたり, 計算する. ここに,
 $car(K_j): K_j$ に含まれる要素の総数 (基数; cardinal number) (C22)

であり,

$$\forall j \in J, \forall \ell \in L, 0 \leq q_{j\ell} \leq 1 \quad (C23)$$

を満たしている. $\omega_j (\in \Omega \subseteq \Phi \subset \mathfrak{S})$ は, 第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j の代表パターンである.

条件

$$1 \geq f(0) \geq f(u) \geq 0 \quad \text{for any } u \in R \quad (\text{実数全体の集合}) \quad (C24)$$

を満たす 1 実変数の実数値関数

$$f: R \rightarrow R \quad (C25)$$

を導入している. 関数の 3 例を以下に掲げる.

[例 1] (ガウス形)

$$f(u) = \exp(-a \cdot u^2), \quad a > 0 \quad (C26)$$

[例 2] (分数関数形)

$$f(u) = \frac{1}{u^2 + a^2}, \quad a > 0 \quad (C27)$$

[例 3] (三角形)

$$0 < c \leq 1 \quad (C28)$$

$$-\infty < a < 0 < b < +\infty \quad (C29)$$

と選び,

$$f(u) =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{if } u < a \\ -\frac{c}{a} \cdot u + c & \text{if } a \leq u < 0 \\ -\frac{c}{b} \cdot u + c & \text{if } 0 \leq u \leq b \\ 0 & \text{if } u > b \end{cases}$$

(C30)

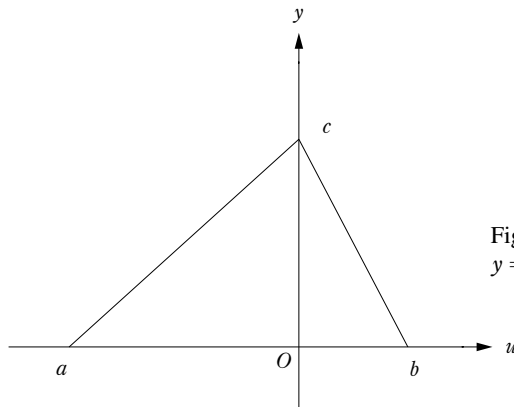


Fig.C.1 三角関数
 $y = f(u)$

□

各重要度 $q_{i\ell}$ の規格化

$$p_{i\ell} = \frac{q_{i\ell}}{\sum_{i \in J} q_{i\ell}}, j \in J, \ell \in L \quad (C31)$$

を求める．ここに、

$$\forall j \in J, \forall \ell \in L, 0 \leq p_{j\ell} \leq 1 \quad (C32)$$

$$\forall \ell \in L, \sum_{j \in J} p_{j\ell} = 1 \quad (C33)$$

が成立している．

入力パターン $\varphi \in \Phi$ について、そのパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ から、特徴量の組

$$u(T\varphi, \ell), \ell \in L \quad (C34)$$

を抽出した後、

$$p_i(\varphi) = \sum_{\ell \in L} p_{i\ell} \cdot \frac{|u(T\varphi, \ell)|}{\max_{k \in L} |u(T\varphi, k)|}, i \in J \quad (C35)$$

を計算する． $p_i(\varphi)$ はパターン $\varphi \in \Phi$ についての、第 $i \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_i の重要度である．

$p_i(\varphi)$ は文献 [32] の類似度関数 $SM(\varphi, \omega_i)$ に相当するものである（本付録DのD.4.2を参照）．

以上の準備をすれば、認識の方法は次のように述べられる：

カテゴリ番号

$$j = \arg \max_{i \in J} p_i(\varphi) \in J \quad (C36)$$

を持つカテゴリ \mathfrak{C}_j に、パターン $\varphi \in \Phi$ が帰属する． □

付録D. 関数行列式による、パターン認識に役立つaxiom 2を満たす類似度関数 SM の構成

入力パターンが帰属するカテゴリを決定する働き（パターン認識）を設定するには、通常、問題のパターンが、記憶している各カテゴリの代表パターンとどれぐらいにているかを計量する類似度関数 SM が必要である．

本付録Dでは、無限小面積要素を今1つの無限小面積要素に変換するときの係数関数として登場する関数行列式が非零であれば、座標変換の2つの関数が1次従属であることに注目して、この関数行列式を2つの関数が異なっている程度（相違度関数）に採用し、相違度関数の逆数を規格化したものを類似度関数の構成に利用する方法が研究される．

D.1 関数行列式

2次元平面上に、実数値直交座標系 $x = \langle x_1, x_2 \rangle$ を設定する．2つの関数 φ, η からなる系

$$y_1 = \varphi(x_1, x_2), y_2 = \eta(x_1, x_2) \quad (D1)$$

が1対1の座標変換

$$x = \langle x_1, x_2 \rangle \rightarrow y = \langle y_1, y_2 \rangle \quad (D2)$$

であるとすると、無限小面積要素 $dx_1 dx_2$ は、

$$dy_1 dy_2 = \frac{\partial(\varphi, \eta)}{\partial(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 \quad (D3)$$

という無限小面積要素 $dy_1 dy_2$ に変換される。式 (D3) に登場している関数

$$\frac{\partial(\varphi, \eta)}{\partial(x_1, x_2)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x_1} & \frac{\partial\eta}{\partial x_2} \end{vmatrix} \quad (D4)$$

は座標点 $x = \langle x_1, x_2 \rangle$ での関数行列式，ヤコビアン (Jacobian) と呼ばれている。任意の座標点について，2性質

$$\textcircled{1} \text{ (1次従属性) } \forall \varphi \in \Phi, \forall a \in R, \partial(a \cdot \varphi, \varphi) / \partial(x_1, x_2) = 0 \quad (D5)$$

$$\textcircled{2} \text{ (線形性) } \forall a, \forall b \in R, \forall \varphi, \forall \eta \in \Phi, \partial(a \cdot \varphi, \eta) / \partial(x_1, x_2) = a \cdot \partial(\varphi, \eta) / \partial(x_1, x_2)$$

$$\partial(\varphi, b \cdot \eta) / \partial(x_1, x_2) = b \cdot \partial(\varphi, \eta) / \partial(x_1, x_2) \quad (D6)$$

が成り立っている。

D.2 axiom 2を満たす類似度関数 SM の構成

相違度関数 $dsm(T\varphi, T\omega_j)(x_1, x_2)$ を定義して，相違度関数の逆数を規格化したものを類似度関数 $SM(\varphi, \omega_j)$ として採用するのが簡単な類似度関数の構成法の1つである。この考えの下で，以下の構成論を展開する。

SS理論 (S.Suzukiの提案しているパターン認識の数学的理論) でのAxiom1を満たす対 $[\Phi, T]$ を導入する。

第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j の代表パターン $\omega_j (\in \Omega \subseteq \Phi \subset \mathfrak{S})$ を導入する。

処理の対象とする問題のパターンを $\varphi \in \Phi$ とする。 $T\varphi, T\omega_j \in \Phi$ は各々，2つのパターン $\varphi, \omega_j \in \Phi$ の代りとなるパターンモデルである。

整数値座標系

$$x = \langle x_1, x_2 \rangle, x_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, x_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (D7)$$

を考える。

関数行列式 $\partial(T\varphi, T\omega_j) / \partial(x_1, x_2)$ の近似として，座標点 $x = \langle x_1, x_2 \rangle$ についての相違度 $dsm(T\varphi, T\omega_j)(x_1, x_2)$ を

$$dsm(T\varphi, T\omega_j)(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} (T\varphi)(x_1+1, x_2) - (T\varphi)(x_1, x_2) & (T\varphi)(x_1, x_2+1) - (T\varphi)(x_1, x_2) \\ (T\omega_j)(x_1+1, x_2) - (T\omega_j)(x_1, x_2) & (T\omega_j)(x_1, x_2+1) - (T\omega_j)(x_1, x_2) \end{vmatrix} \quad (D8)$$

$$\begin{aligned} &= (T\varphi)(x_1+1, x_2) \cdot [(T\omega_j)(x_1, x_2+1) - (T\omega_j)(x_1, x_2)] \\ &\quad - (T\varphi)(x_1, x_2+1) \cdot [(T\omega_j)(x_1+1, x_2) - (T\omega_j)(x_1, x_2)] \\ &\quad - (T\varphi)(x_1, x_2) \cdot [(T\omega_j)(x_1, x_2+1) - (T\omega_j)(x_1+1, x_2)] \end{aligned} \quad (D9)$$

と定義する。任意の座標点 $x = \langle x_1, x_2 \rangle$ について，3性質

$$\textcircled{1} \forall j \in J, dsm(T\omega_j, T\omega_j)(x_1, x_2) = 0 \quad (D10)$$

$$\textcircled{2} \forall j \in J, \forall \varphi \in \Phi, dsm(T(a \cdot \varphi), T\omega_j)(x_1, x_2)$$

$$= dsm(T\varphi, T\omega_j)(x_1, x_2) \text{ for any positive real number } a$$

$$\because \text{ axiom 1, (ii) の後半} \quad (D11)$$

$$\textcircled{3} \forall j \in J, \forall \varphi \in \Phi, dsm(T(T\varphi), T\omega_j)(x_1, x_2) \quad (D12)$$

$$= dsm(T\varphi, T\omega_j)(x_1, x_2) \quad \because \text{axiom 1, (iii) の後半} \quad (\text{D12})$$

が成り立つ (axiom 1については, 文献 [32] を参照).

2次元平面 $R^2 \equiv R \times R$ 上に, 有界な閉集合 M をとり, 2条件

$$(イ) \text{ (非空集合性)} \quad \forall k \in K, M_k \neq \phi \quad (\text{D13})$$

$$(ロ) \text{ (非交差性)} \quad M_k \cap M_\ell = \phi \quad (k \neq \ell) \quad (\text{D14})$$

を満たすように, M を

$$M \supseteq \bigcup_{k \in K} M_k \quad (\text{D15})$$

と有限分割する. 領域 M_k での, 相違度関数 $d_j(\varphi, M_k)$ を

$$d_j(\varphi; M_k) = \sum_{\langle x_1, x_2 \rangle \in M_k} |dsm(T\varphi, T\omega_j)(x_1, x_2)| \quad (\text{D16})$$

と定義する. 全領域 $\bigcup_{k \in K} M_k$ での, 相違度関数 $d_j(\varphi)$ を

$$d_j(\varphi) = \sum_{k \in K} d_j(\varphi; M_k) \quad (\text{D17})$$

と定義する.

[定理D.1] (関数行列式 $dsm(T\varphi, T\omega_j)(x_1, x_2)$ を用いた類似度関数 SM の構成)

条件

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, d_j(\omega_i) > 0 \quad (\text{D18})$$

の下で,

$$SM(\varphi, \omega_j) = \frac{\frac{1}{d_j(\varphi)}}{\sum_{i \in J} \frac{1}{d_i(\varphi)}} \quad (\text{D19})$$

と定義された関数

$$SM : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \quad (\text{D20})$$

は文献 [32] の axiom 2 を満たす.

実は, 式 (D14) の非交差性を要請しなくても, 本定理は成立する.

(証明) axiom 2, (i) の成立: 式 (D18), 並びに,

$$\forall j \in J, d_j(\omega_j) = 0 \quad (\text{D21})$$

を考慮すれば,

$\varphi = \omega_j$ のとき,

$$SM(\varphi, \omega_j) = \frac{1}{1 + \sum_{i \in J - \{j\}} \frac{d_j(\varphi)}{d_i(\varphi)}} = \frac{1}{1+0} = 1 \quad (\text{D22})$$

が得られ,

$\varphi = \omega_i$ ($i \neq j$) のとき

$$SM(\varphi, \omega_j) = \frac{\frac{1}{d_j(\varphi)}}{\frac{1}{d_i(\varphi)} + \sum_{k \in J - \{i\}} \frac{1}{d_k(\varphi)}} = \frac{\frac{1}{d_j(\varphi)}}{\infty + \sum_{k \in J - \{i\}} \frac{1}{d_k(\varphi)}} = 0 \quad (\text{D23})$$

が得られる.

axiom 2, (ii) の成立: SM の定義式 (D19) から明らかである.

axiom 2, (iii) の成立: 文献 [32] の axiom 1, (iii) の後半 $T \cdot T = T$ を適用する. つまり,

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, d_j(T\varphi; M_k) = d_j(\varphi; M_k) \quad \because \text{式 (D12)} \quad (D24)$$

$$\therefore d_j(T\varphi) = d_j(\varphi) \quad (D25)$$

を得, これから明らか. □

D.3 式 (D8) の相違度 $dsm(T\varphi, T\omega_j)(x_1, x_2)$, 式 (D16) の $d_j(\varphi; M_k)$ を規格化した場合の, axiom 2を満す類似度関数 SM の構成

(一) 各分割領域 M_k の大きさ

(二) $T\varphi$ の各差の大きさと, $T\omega_j$ の各差の大きさとの違い

を規格化すると, 式 (D19) の類似度関数 SM の持つ同化機能, 分離機能が良好になることがある. 本節では, 規格化するこの場合を論じよう.

I. 式 (D8) の相違度 $dsm(T\varphi, T\omega_j)(x_1, x_2)$ をそのまま採用して, 各分割領域 M_k の大きさを規格化しよう. つまり, 式 (D16) の $d_j(\varphi; M_k)$ を規格化して,

$$\begin{aligned} & d_j(\varphi; M_k) \\ &= \sum_{\langle x_1, x_2 \rangle \in M_k} |dsm(T\varphi, T\omega_j)(x_1, x_2)| \max_{\ell \in K} \sum_{\langle y_1, y_2 \rangle \in M_\ell} dsm(T\varphi, T\omega_j)(y_1, y_2) \end{aligned} \quad (D26)$$

と定義した場合も, 式 (D17) の $d_j(\varphi)$ をそのまま採用して, 定理D.1はそのまま成立する. 但し, 式 (D26) の相違度 $d_j(\varphi; M_k)$ の分母が零の場合, $d_j(\varphi; M_k) = 0$ と約束しておかなければならない.

II. $T\varphi$ の各差の大きさと, $T\omega_j$ の各差の大きさとの違いを規格化しよう. つまり, 式 (D8) の相違度 $dsm(T\varphi, T\omega_j)(x_1, x_2)$ を規格化して,

$$\begin{aligned} & dsm(T\varphi, T\omega_j)(x_1, x_2) \\ &= \left| \begin{array}{cc} (T\varphi)(x_1+1, x_2) - (T\varphi)(x_1, x_2) & (T\varphi)(x_1, x_2+1) - (T\varphi)(x_1, x_2) \\ (T\omega_j)(x_1+1, x_2) - (T\omega_j)(x_1, x_2) & (T\omega_j)(x_1, x_2+1) - (T\omega_j)(x_1, x_2) \end{array} \right| \\ & / \left[\sqrt{[(T\varphi)(x_1+1, x_2) - (T\varphi)(x_1, x_2)]^2 + [(T\varphi)(x_1, x_2+1) - (T\varphi)(x_1, x_2)]^2} \right. \\ & \left. \sqrt{[(T\omega_j)(x_1+1, x_2) - (T\omega_j)(x_1, x_2)]^2 + [(T\omega_j)(x_1, x_2+1) - (T\omega_j)(x_1, x_2)]^2} \right] \end{aligned} \quad (D27)$$

と定義した場合も, 式 (D16) の $d_j(\varphi; M_k)$, 式 (D17) の $d_j(\varphi)$ をそのまま採用して, 定理D.1はそのまま成立する. 但し, 式 (D27) の相違度 $dsm(T\varphi, T\omega_j)(x_1, x_2)$ の分母が零の場合, $dsm(T\varphi, T\omega_j)(x_1, x_2) = 0$ と約束しておかなければならない.

III. 上述の2つの規格化を同時に行おう. つまり, 式 (D27) の規格化相違度 $dsm(T\varphi, T\omega_j)(x_1, x_2)$ を採用し, 更に, 式 (D26) の規格化 $d_j(\varphi; M_k)$ を採用した後, 式 (D17) の $d_j(\varphi)$ をそのまま採用して, 定理D.1はそのまま成立する. □

尚, カテゴリ毎に規格化して, 式 (D17) の相違度関数 $d_j(\varphi)$ の代りに,

$$d_j(\varphi) = \frac{\sum_{k \in K} d_j(\varphi; M_k)}{\max_{i \in J} \sum_{k \in K} d_i(\varphi; M_k)} \quad (D28)$$

を採用しても, 定理D.1はそのまま成立する. 上述の I, II, III の場合についても, 定理D.1はそのま

ま成立する。但し、式 (D28) の相違度関数 $d_j(\varphi)$ の分母が零の場合、 $d_j(\varphi)=0$ と約束しておかなければならない。

D.4 文献 [32] の2つの公理axiom 1, axiom 2の説明

D.4.1 axiom1の説明

処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ 、並びに、写像

$$T: \Phi \rightarrow \Phi \quad (\text{D29})$$

は次のaxiom 1を満たさなければならない。このとき、写像 T はモデル構成作用素 (model-construction operator) と呼ばれ、 $T\varphi \in \Phi$ は $\varphi \in \Phi$ の代りとなり得るという意味で、パターン $\varphi \in \Phi$ のモデル (model)、或いは、パターンモデルと呼ばれる。

下記のaxiom 1からわかるように、パターンモデル $T\varphi$ の集合

$$T \cdot \Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \quad (\text{D30})$$

は、原パターン φ の集合 Φ への埋込性

$$T \cdot \Phi \subset \Phi \quad (\text{D31})$$

を満たし、 Φ は原点 (=0) を始点とし、 Φ の任意の点を通る半直線を含むような集合、つまり、錐 (cone) であらねばならない。下記の式 (D35) による Φ の表示が正に Φ が錐であることを明らかにしている。

Axiom 1を満たすパターン集合 Φ は実は、構成的集合 (constructible set) である。S.Suzukiは形式と意味とが互いに非分離であるようなパターンというものが満たされなければならない帰納的定義 (再帰的定義) から Φ の集合論的再帰領域方程式 (axiom 1を満たす最小の Φ の表現式; set-theoretic reflective domain equation) を提案し、この方程式を解き、 Φ の構造、構成方法を明らかにしている (文献 [32] の2.4節)。その結果は次のとおりである：

パターンと判明している元の集合 (基本領域; basic domain) (axiom 1の (i) の前半から、 $0 \in \Phi_B$ を導入して、集合論的再帰領域方程式

$$\Phi = \Phi_B \cup T \cdot \Phi \cup R^{++} \cdot \Phi \quad (\text{D32})$$

ここに、

$$R^{++}: \text{正実数全体の集合} \quad (\text{D33})$$

$$R^{++} \cdot \Phi \equiv \{r^{++} \cdot \varphi \mid r^{++} \in R^{++}, \varphi \in \Phi\} \quad (\text{D34})$$

の解 Φ は

$$\Phi = R^{++} \cdot [\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B] \quad (\text{D35})$$

と表示される (文献 [32] の式 (2.56) を参照)。 Φ の表示式 (D35) から、明らかに、2つの等式

$$(a) \quad T \cdot \Phi = T \cdot \Phi_B \subset \Phi$$

$$\because \text{axiom 1の (ii), (iii) の2後半} \quad (\text{D36})$$

$$(b) \quad R^{++} \cdot \Phi = \Phi$$

$$\because \text{axiom 1の (ii) の後半} \quad (\text{D37})$$

が成り立つ。

Axiom 1 (パターン集合 Φ とモデル構成作用素 T との対 $[\Phi, T]$ の満たすべき公理)

(i) (零元0の Φ -包含性と、零元0の T -不動点性; fixed-point property of zero element

under mapping T)

$$0 \in \Phi \wedge T0 = 0.$$

(ii) (Φ の錐性, T の正定数倍吸収性; cone property)

$$\forall \varphi \in \Phi, a \cdot \varphi \in \Phi \wedge T(a \cdot \varphi) = T\varphi$$

for any positive real number $a \in R^{++}$.

(iii) (Φ の埋込性 (embeddedness) と, T のベキ等性 (idempotency))

$$\forall \varphi \in \Phi, T\varphi \in \Phi \wedge T(T\varphi) = T\varphi.$$

(iv) (写像 T の非零写像性; non-zero mapping property of T)

$$\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0.$$

□

D.4.2 axiom 2の説明

$SM(\varphi, \omega_j) = 1, 0$ に従って, パターン $\varphi \in \Phi$ は各々, ω_j と確定的な類似度関係, 相違関係にあり, また, $0 < SM(\varphi, \omega_j) < 1$ の場合は, あいまいな類似・相違関係にある (D38)

と, 解釈される式 (D20) の関数 SM は次のaxiom 2を満たさなければならない.

Axiom 2 (類似度関数 SM の満たすべき公理)

(i) (正規直交性; orthonormality)

$$\forall i, \forall j \in J, SM(\omega_i, \omega_j) = 1 \text{ if } i = j, = 0 \text{ if } i \neq j.$$

(ii) (規格化条件, 確率性, 正規性; probability condition, normalization)

$$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} SM(\varphi, \omega_j) = 1.$$

(iii) (写像 T の下での不変性; invariance under mapping T)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j).$$

□

上述のaxiom 2の (i)~(iii) について簡単に説明しておこう.

SM の解釈式 (D38) の下で, (i) は, 相異なるカテゴリの代表パターン同士は確定的な相違関係にあり, 同一カテゴリの代表パターン同士は確定的な類似度関係にあることを要請している. (ii) は, 任意のパターン φ について, すべてのカテゴリについての類似度の総和は1であることを要請している. つまり, パターン φ は少なくとも1つのカテゴリ \mathcal{C}_j に帰属していることを要請している. (iii) は, パターンモデル $T\varphi$ が原パターン φ と任意のカテゴリについて同一類似度を持つことを要請している. ということは, パターンモデル $T\varphi$ を見たり, 聞いたりするならば, 原パターン φ と同じように見えたり, 聞こえたりすること (同一知覚原理; A 2章を参照) を要請していることになる.

付録E. 外積演算による, パターン認識に役立つaxiom 2を満たす類似度関数 SM の構成

本付録Eでは, 外積演算の意味するところに従い, 付録Dが一般化される.

E.1 2次元ベクトルの外積演算の意味

3次元ユークリッド空間 R^3 での, 2つのベクトル

$$\vec{a} = \text{cal}(a_1 \ a_2 \ 0) \text{ (列ベクトル)} \tag{E1}$$

$$\vec{b} = \text{cal}(b_1 \ b_2 \ 0) \tag{E2}$$

の外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \text{col}(0 \ 0 \ 1) = (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot \text{col}(0 \ 0 \ 1) \tag{E3}$$

と計算され、

$$\vec{a} \times \vec{b} \text{ の大きさは, } |a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1| \text{ であり, 2つの2次元ベクトル}$$

$$\vec{a}' = \text{cal}(a_1, a_2) \tag{E4}$$

$$\vec{b}' = \text{cal}(b_1, b_2) \tag{E5}$$

を2辺に持つ平行四辺形の面積 $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cdot \sin \theta$ に等しい。 θ は2つの2次元ベクトル \vec{a}' , \vec{b}' のなす(右手系で測った)角度であり、

$$\theta = \cos^{-1} \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \tag{E6}$$

で与えられる。つまり、

$$\vec{a} \times \vec{b} \text{ の大きさ} = |a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cdot \sin \theta \tag{E7}$$

が成り立っている。

E.2 整数値座標系 $x = \langle x_1, x_2 \rangle$, $x_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $x_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ での相違度 $dsm(T\varphi, T\omega_j)(x_1, x_2)$ の構成例

4変数の関数

$$f(a_1, a_2, b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \tag{E8}$$

或いは、

$$f(a_1, a_2, b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) / [\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}] \tag{E9}$$

或いは、

$$f(a_1, a_2, b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) / [\max\{|a_1|, |a_2|\} \cdot \max\{|b_1|, |b_2|\}] \tag{E10}$$

を定義する。但し、2式(E9), (E10)の $f(a_1, a_2, b_1, b_2)$ の分母が零の場合、 $f(a_1, a_2, b_1, b_2) = 0$ と約束する。

さて、式(D7)の $x = \langle x_1, x_2 \rangle$, $x_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $x_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ を採用する。4変数 a_1, a_2, b_1, b_2 の値を適切に選び、座標点についての相違度 $dsm(T\varphi, T\omega_j)(x_1, x_2)$ を、式(D8)の相違度 $dsm(T\varphi, T\omega_j)(x_1, x_2)$ の代りに、

$$dsm(T\varphi, T\omega_j)(x_1, x_2) = f(a_1, a_2, b_1, b_2) \tag{E11}$$

と定義する。

$dsm(T\varphi, T\omega_j)(x_1, x_2)$ の構成諸例を掲げよう。

[例1] $(x_1 - x_2)$ 両軸方向の変化の相関、つまり、座標変換密度を抽出する場合)

$dsm(T\varphi, T\omega_j)(x_1, x_2) =$ 式(D8)の場合であり、

$$a_1 = (T\varphi)(x_1 + 1, x_2) - (T\varphi)(x_1, x_2) \quad a_2 = (T\varphi)(x_1, x_2 + 1) - (T\varphi)(x_1, x_2)$$

$$b_1 = (T\omega_j)(x_1 + 1, x_2) - (T\omega_j)(x_1, x_2) \quad b_2 = (T\omega_j)(x_1, x_2 + 1) - (T\omega_j)(x_1, x_2)$$

[例2] (x_1) 軸方向の相関を抽出する場合)

$$a_1 = (T\varphi)(x_1, x_2) \quad a_2 = (T\varphi)(x_1 + 1, x_2)$$

$$b_1 = (T\omega_j)(x_1, x_2) \quad b_2 = (T\omega_j)(x_1 + 1, x_2)$$

[例3] (x_2) 軸方向の相関を抽出する場合)

$$a_1 = (T\varphi)(x_1, x_2) \quad a_2 = (T\varphi)(x_1, x_2 + 1)$$

$$b_1 = (T\omega_j)(x_1, x_2) \quad b_2 = (T\omega_j)(x_1, x_2 + 1)$$

[例4] (45度方向の相関を抽出する場合)

$$a_1 = (T\varphi)(x_1, x_2) \quad a_2 = (T\varphi)(x_1 + 1, x_2 + 1)$$

$$b_1 = (T\omega_j)(x_1, x_2) \quad b_2 = (T\omega_j)(x_1 + 1, x_2 + 1)$$

[例5] (x_1 軸方向と x_1 軸方向の変化の相関を抽出する場合)

1 階微分 $\frac{d}{dx}f(x)$ について,

$$\frac{d}{dx}f(x)$$

$$\begin{cases} > 0 & \text{if } f(x) \text{ is increasing} \\ < 0 & \text{if } f(x) \text{ is decreasing} \end{cases}$$

(E12)

が成立する. 2 階微分 $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ の, 整数値座標系 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ での近似は,

$$f(x+1) - f(x)$$

(E13)

であることを勘案して,

$$a_1 = (T\varphi)(x_1, x_2) \quad a_2 = (T\varphi)(x_1 + 1, x_2) - (T\varphi)(x_1, x_2)$$

$$b_1 = (T\omega_j)(x_1, x_2) \quad b_2 = (T\omega_j)(x_1 + 1, x_2) - (T\omega_j)(x_1, x_2)$$

[例6] (x_2 軸方向と x_2 軸方向の変化の相関を抽出する場合)

$$a_1 = (T\varphi)(x_1, x_2) \quad a_2 = (T\varphi)(x_1, x_2 + 1) - (T\varphi)(x_1, x_2)$$

$$b_1 = (T\omega_j)(x_1, x_2) \quad b_2 = (T\omega_j)(x_1, x_2 + 1) - (T\omega_j)(x_1, x_2)$$

[例7] (45度方向の変化の相関を抽出する場合)

$$a_1 = (T\varphi)(x_1, x_2) \quad a_2 = (T\varphi)(x_1 + 1, x_2 + 1) - (T\varphi)(x_1, x_2)$$

$$b_1 = (T\omega_j)(x_1, x_2) \quad b_2 = (T\omega_j)(x_1 + 1, x_2 + 1) - (T\omega_j)(x_1, x_2)$$

[例8] ($x_1 - x_2$ 両軸方向の累積値の相関を抽出する場合)

$$a_1 = \sum_{y_2 = a_2}^{x_2} (T\varphi)(x_1, y_2) \quad a_2 = \sum_{y_1 = a_1}^{x_1} (T\varphi)(y_1, x_2)$$

$$b_1 = \sum_{y_2 = a_2}^{x_2} (T\omega_j)(x_1, y_2) \quad b_2 = \sum_{y_1 = a_1}^{x_1} (T\omega_j)(y_1, x_2)$$

[例9] (x_1 軸方向の累積値の相関を抽出する場合)

$$a_1 = (T\varphi)(x_1, x_2) \quad a_2 = \sum_{y_1 = a_1}^{x_1} (T\varphi)(y_1, x_2)$$

$$b_1 = (T\omega_j)(x_1, x_2) \quad b_2 = \sum_{y_1 = a_1}^{x_1} (T\omega_j)(y_1, x_2)$$

[例10] (x_2 軸方向の累積値の相関を抽出する場合)

$$a_1 = (T\varphi)(x_1, x_2) \quad a_2 = \sum_{y_2 = a_2}^{x_2} (T\varphi)(x_1, y_2)$$

$$b_1 = (T\omega_j)(x_1, x_2) \quad b_2 = \sum_{y_2 = a_2}^{x_2} (T\omega_j)(x_1, y_2)$$

[例11] (x_1 軸方向の変化と x_1 軸方向の累積値の相関を抽出する場合)

$$a_1 = (T\varphi)(x_1 + 1, x_2) - (T\varphi)(x_1, x_2) \quad a_2 = \sum_{y_1 = a_1}^{x_1} (T\varphi)(y_1, x_2)$$

$$b_1 = (T\omega_j)(x_1 + 1, x_2) - (T\omega_j)(x_1, x_2) \quad b_2 = \sum_{y_1 = a_1}^{x_1} (T\omega_j)(y_1, x_2)$$

[例12] (x_2 軸方向の変化と x_2 軸方向の累積値の相関を抽出する場合)

$$a_1 = (T\varphi)(x_1, x_2 + 1) - (T\varphi)(x_1, x_2) \quad a_2 = \sum_{y_2 = a_2}^{x_2} (T\varphi)(x_1, y_2)$$

$$b_1 = (T\omega_j)(x_1, x_2 + 1) - (T\omega_j)(x_1, x_2) \quad b_2 = \sum_{y_2 = a_2}^{x_2} (T\omega_j)(x_1, y_2)$$

[例13] (x_2 軸方向の変化と x_1 軸方向の累積値の相関を抽出する場合)

$$a_1 = (T\varphi)(x_1, x_2 + 1) - (T\varphi)(x_1, x_2) \quad a_2 = \sum_{y_1 = a_1}^{x_1} (T\varphi)(y_1, x_2)$$

$$b_1 = (T\omega_j)(x_1, x_2 + 1) - (T\omega_j)(x_1, x_2) \quad b_2 = \sum_{y_1 = a_1}^{x_1} (T\omega_j)(y_1, x_2)$$

[例14] (x_1 軸方向の変化と x_2 軸方向の累積値の相関を抽出する場合)

$$a_1 = (T\varphi)(x_1 + 1, x_2) - (T\varphi)(x_1, x_2) \quad a_2 = \sum_{y_2 = a_2}^{x_2} (T\varphi)(x_1, y_2)$$

$$b_1 = (T\omega_j)(x_1 + 1, x_2) - (T\omega_j)(x_1, x_2) \quad b_2 = \sum_{y_2 = a_2}^{x_2} (T\omega_j)(x_1, y_2)$$

[例15] (45度方向の変化と x_2 軸方向の累積値の相関を抽出する場合)

$$a_1 = (T\varphi)(x_1 + 1, x_2 + 1) - (T\varphi)(x_1, x_2) \quad a_2 = \sum_{y_2 = a_2}^{x_2} (T\varphi)(x_1, y_2)$$

$$b_1 = (T\omega_j)(x_1 + 1, x_2 + 1) - (T\omega_j)(x_1, x_2) \quad b_2 = \sum_{y_2 = a_2}^{x_2} (T\omega_j)(x_1, y_2)$$

[例16] (45度方向の変化と x_1 軸方向の累積値の相関を抽出する場合)

$$a_1 = (T\varphi)(x_1 + 1, x_2 + 1) - (T\varphi)(x_1, x_2) \quad a_2 = \sum_{y_1 = a_1}^{x_1} (T\varphi)(y_1, x_2)$$

$$b_1 = (T\omega_j)(x_1 + 1, x_2 + 1) - (T\omega_j)(x_1, x_2) \quad b_2 = \sum_{y_1 = a_1}^{x_1} (T\omega_j)(y_1, x_2)$$

[例17] (x_1 軸方向の変化と x_1 軸方向の凹・凸の相関を抽出する場合)

2階微分 $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$ について,

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

$$\begin{cases} > 0 & \text{if } f(x) \text{ is concave (凹)} \\ < 0 & \text{if } f(x) \text{ is convex (凸)} \end{cases}$$

(E14)

が成立する。2階微分 $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$ の、整数値座標系 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ での近似は,

$$f(x+1) - 2 \cdot f(x) + f(x-1)$$

(E15)

であることを勘案して,

$$a_1 = (T\varphi)(x_1 + 1, x_2) - (T\varphi)(x_1, x_2)$$

$$a_2 = (T\varphi)(x_1 + 1, x_2) - 2(T\varphi)(x_1, x_2) + (T\varphi)(x_1 - 1, x_2)$$

$$b_1 = (T\omega_j)(x_1 + 1, x_2) - (T\omega_j)(x_1, x_2)$$

$$b_2 = (T\omega_j)(x_1 + 1, x_2) - 2(T\varphi)(x_1, x_2) + (T\omega_j)(x_1 - 1, x_2)$$

[例18] (x_2 軸方向の変化と x_2 軸方向の凹・凸の相関を抽出する場合)

$$a_1 = (T\varphi)(x_1, x_2 + 1) - (T\varphi)(x_1, x_2)$$

$$a_2 = (T\varphi)(x_1, x_2 + 1) - 2(T\varphi)(x_1, x_2) + (T\varphi)(x_1, x_2 - 1)$$

$$b_1 = (T\omega_j)(x_1, x_2 + 1) - (T\omega_j)(x_1, x_2)$$

$$b_2 = (T\omega_j)(x_1, x_2 + 1) - 2(T\omega_j)(x_1, x_2) + (T\omega_j)(x_1, x_2 - 1)$$

[例19] (x_1 軸方向の変化と x_2 軸方向の凹・凸の相関を抽出する場合)

$$a_1 = (T\varphi)(x_1 + 1, x_2) - (T\varphi)(x_1, x_2)$$

$$a_2 = (T\varphi)(x_1, x_2 + 1) - 2(T\varphi)(x_1, x_2) + (T\varphi)(x_1, x_2 - 1)$$

$$b_1 = (T\omega_j)(x_1 + 1, x_2) - (T\omega_j)(x_1, x_2)$$

$$b_2 = (T\omega_j)(x_1, x_2 + 1) - 2(T\omega_j)(x_1, x_2) + (T\omega_j)(x_1, x_2 - 1)$$

[例20] (x_2 軸方向の変化と x_1 軸方向の凹・凸の相関を抽出する場合)

$$a_1 = (T\varphi)(x_1, x_2 + 1) - (T\varphi)(x_1, x_2)$$

$$a_2 = (T\varphi)(x_1 + 1, x_2) - 2(T\varphi)(x_1, x_2) + (T\varphi)(x_1 - 1, x_2)$$

$$b_1 = (T\omega_j)(x_1, x_2 + 1) - (T\omega_j)(x_1, x_2)$$

$$b_2 = (T\omega_j)(x_1 + 1, x_2) - 2(T\omega_j)(x_1, x_2) + (T\omega_j)(x_1 - 1, x_2)$$

[例21] (45度方向の変化と x_1 軸方向の凹・凸の相関を抽出する場合)

$$a_1 = (T\varphi)(x_1 + 1, x_2 + 1) - (T\varphi)(x_1, x_2)$$

$$a_2 = (T\varphi)(x_1 + 1, x_2) - 2(T\varphi)(x_1, x_2) + (T\varphi)(x_1 - 1, x_2)$$

$$b_1 = (T\omega_j)(x_1 + 1, x_2 + 1) - (T\omega_j)(x_1, x_2)$$

$$b_2 = (T\omega_j)(x_1 + 1, x_2) - 2(T\omega_j)(x_1, x_2) + (T\omega_j)(x_1 - 1, x_2)$$

[例22] (45度方向の変化と x_2 軸方向の凹・凸の相関を抽出する場合)

$$a_1 = (T\varphi)(x_1 + 1, x_2 + 1) - (T\varphi)(x_1, x_2)$$

$$a_2 = (T\varphi)(x_1, x_2 + 1) - 2(T\varphi)(x_1, x_2) + (T\varphi)(x_1, x_2 - 1)$$

$$b_1 = (T\omega_j)(x_1 + 1, x_2 + 1) - (T\omega_j)(x_1, x_2)$$

$$b_2 = (T\omega_j)(x_1, x_2 + 1) - 2(T\omega_j)(x_1, x_2) + (T\omega_j)(x_1, x_2 - 1)$$

[例23] (45度方向の変化と $x_1 - x_2$ 両軸方向の凹・凸の相関を抽出する場合)

$$a_1 = (T\varphi)(x_1 + 1, x_2 + 1) - (T\varphi)(x_1, x_2)$$

$$b_2 = (T\varphi)(x_1, x_2 + 1) - 4 \cdot (T\varphi)(x_1, x_2) + (T\varphi)(x_1, x_2 - 1) + (T\varphi)(x_1 + 1, x_2) + (T\varphi)(x_1 - 1, x_2)$$

$$b_1 = (T\omega_j)(x_1 + 1, x_2 + 1) - (T\omega_j)(x_1, x_2)$$

$$b_2 = (T\omega_j)(x_1, x_2 + 1) - 4 \cdot (T\omega_j)(x_1, x_2) + (T\omega_j)(x_1, x_2 - 1) + (T\omega_j)(x_1 + 1, x_2) + (T\omega_j)(x_1 - 1, x_2)$$

E.3 axiom 2を満たす類似度関数 SM の構成

式 (E11) の如く、相違度 $dsm(T\varphi, T\omega_j)(x_1, x_2)$ を選定する。2条件式 (D13), (D14) を満たす領域 M_k での、相違度関数 $d_j(\varphi, M_k)$ を式 (D16), 或いは、式 (D26) の如く、定義する。2式 (D13), (D14) を満たす各 M_k からなる全領域 $\bigcup_{k \in K} M_k$ での、相違度関数 $d_j(\varphi)$ を式 (D17), 或いは、式 (D28) の如く、定義する。関数 $g(u)$ に $u = d_i(\varphi)$ を代入した値 $g(d_i(\varphi))$ の逆数 $\frac{1}{g(d_i(\varphi))}$ として、全領域

$\bigcup_{k \in K} M_k$ での，類似度 $s_j(\varphi)$ を

$$s_j(\varphi) = \frac{1}{g(d_i(\varphi))}, \varphi \in \Phi, i \in J \quad (\text{E16})$$

と用意し，この各 $s_j(\varphi)$ を規格化して，式 (D19) の $SM(\varphi, \omega_j)$ の代りに，

$$SM(\varphi, \omega_j) = \frac{s_j(\varphi)}{\sum_{i \in J} s_i(\varphi)} \quad (\text{E17})$$

を採用する．ここに，2条件

$$(0 \text{ 不動点性}) \quad g(0) = 0 \quad (\text{E18})$$

$$(正性) \quad g(u) > 0 \quad \text{if} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (\text{E19})$$

を満たす関数

$$g: \{u \mid 0 \leq u \leq 1\} \rightarrow R^+ \quad (\text{非負実数全体の集合}) \quad (\text{E20})$$

が用意されている．0不動点性・正性の2条件を満たす関数 g の，簡単な構成諸例については，

$$\textcircled{1} \quad g(u) = \log_e(1+u) \quad (\text{E21})$$

$$\textcircled{2} \quad g(u) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \quad (\text{E22})$$

$$\textcircled{3} \quad g(u) = u \quad (\text{E23})$$

$$\textcircled{4} \quad g(u) = 1 - \exp(-a \cdot u), \quad a > 0$$

$$\textcircled{5} \quad 3 \text{ 定数 } a, b, c \text{ を} \\ a < 0, b > 0, c > 0 \quad (\text{E24})$$

を満たすように選び，

$$g(u) = \begin{cases} c & \text{if } u < a \\ \frac{c}{a} \cdot u & \text{if } a \leq u \leq 0 \\ \frac{c}{b} \cdot u & \text{if } 0 \leq u \leq b \\ c & \text{if } u < b \end{cases} \quad (\text{E25})$$

などが挙げられる．そうすると，axiom 2を満たす類似度関数が次の定理E.1で構成される．

[定理E.1] (相違度 $dsm(T\varphi, T\omega_j)(x_1, x_2)$ を用いた類似度関数 SM の構成)

条件式 (D18) の下で，式 (E17) の如く定義された式 (D20) の関数 SM は文献 [32] の axiom 2 を満たす．実は，式 (D14) の非交差性を要請しなくても，本定理は成立する．

(証明) 定理D.1とはほぼ，同様にして，証明される。□

付録F. 式 (96) の $T\varphi$ が付録A, A3章の4性質①～④を満たし， 然も，定理2の系1が成り立つことの証明

3式 (95)₂, (95)₁, (96) の下で，本付録Fが述べられる．

3.3節の定理2に対応する内容は以下の通りである．

式 (B4) の密度関数 ρ が，微分方程式 (B11) を満たすように，選定されているとしよう．

[定理F.1] (1パラメータLie群 $\{\exp(t \cdot A)\}_{-\infty < t < +\infty}$ に関する規格化1次モーメント定理2)

3.2節の定理1の前提 $\int_M dm(x) \varphi(x) \neq 0$ の代わりに,

$$\int_M dm(x) |\varphi(x)|^2 \neq 0 \tag{F1}$$

を採用する.

(i) 式(76)のSOCSの代わりに,

$$SOCS(k; \varphi, t) \equiv \int_M dm(z) \cdot [z_k - t]^2 \cdot |\varphi(z)|^2 \tag{F2}$$

を採用すれば, (その証明を追えば判明するように,) 定理1, (i)は成り立つ. 更に,

(ii) (等式(84)は成立しているので, その証明を追えば判明するように,) 定理1, (ii)の代わりに,

$$\forall \varphi, \forall \eta \in \mathfrak{H} = L_2(M; dm), \int_M dm(x) (S\varphi)(x) \cdot \overline{(S\eta)(x)} = \int_M dm(x) \varphi(x) \cdot \overline{\eta(x)} \tag{F3}$$

は成り立ち, 式(88)の写像はユニタリ作用素である. 最後に,

(iii) (その証明を追えば判明するように,) 定理1, (iii)も成り立つ.

結局, 条件式(F1)の下で, 式(95)₁, (95)₂に関し, 定理1に対応することが成り立つ.

[定理F.1の系1] $\int_M dm(x) |\varphi(x)|^2 = 0$ のときも, 本定理F.1の(ii), (iii)は成り立つ.

$\int_M dm(x) |\varphi(x)|^2 = 0$ のとき, 式(F2)の2次中心モーメントSOCS(k; φ, t)を最小にする実数値 t は無数に存在するから, $t = 0$ と約束すれば, $t = NFOM(k; \varphi)$ と本定理F.1の(i)は成立する.

(定理F.1の系1の証明)

式(F2)の2次中心モーメントSOCS(k; φ, t)に注目する.

$\int_M dm(x) |\varphi(x)|^2 = 0$ とすると, 式(95)₂より, $NFOM(k; \varphi) = 0$ である. 方程式(77)に対応する方程式

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial SOCS(k; \varphi, t)}{\partial t} \\ &= (-2) \cdot \int_M dm(z) \cdot [z_k - t] \cdot |\varphi(z)|^2 \end{aligned}$$

の解 t は無数に存在する. よって, (i)は成立しない.

(ii)については, 上述の証明を追えば, 同様に成立することがわかる.

(iii)については, (ii)から, $\int_M dm(z) |(S\varphi)(z)|^2 = \int_M dm(z) |\varphi(z)|^2 = 0$ を得, 式(95)₂の約束より, $NFOM(k; S\varphi) = 0$ である. □

3.3節の定理2に対応する内容は以下の通りである.

[定理F.2] (1パラメータLie群 $\{\exp(t \cdot A)\}_{-\infty < t < +\infty}$ に関するモデル構成定理2)

式(72)のNFOM(k; φ)の代わりに, 約束式(95)₂の下で, 式(95)₁を採用し, $S\varphi$ を同じく, 式(73)₁の如く定義した後, 式(96)の如く, $T\varphi$ を定義しても, 付録A, A3章の4性質①~④を満たす.

[定理F.2の系1] 定理2の系1が成り立つ.

(証明) 定理F.1, (ii), (iii)に注意しておく.

付録A, A3章の4性質①の成立の確かめ:

$\varphi = 0$ のとき, $\int_M dm(x) |\varphi(x)|^2 = 0$ を得, T の定義式(96)より, $T\varphi = 0$ がいえる.

付録A, A3章の4性質②の成立の確かめ: a を任意の正定数とし,

$$\eta \equiv a \cdot \varphi \tag{F4}$$

と定義される η を導入する.

$$(イ) \int_M dm(x) |\varphi(x)|^2 = 0 \tag{F5}$$

であれば, $\int_M dm(x) |\eta(x)|^2 = 0$ を得,

$$\forall z \in M, (T\eta)z = (T\eta)(z) (= 0) \tag{F6}$$

が得られた.

$$(ロ) \int_M dm(x) |\varphi(x)|^2 \neq 0 \tag{F7}$$

であれば, $\int_M dm(x) |\eta(x)|^2 \neq 0$ を得, $NFOM$ の定義式(95)₁から,

$$NFOM(k; \eta) = NFOM(k; \varphi) \tag{F8}$$

がいえる. よって, S の定義式(73)₁から

$$S\eta = S(a \cdot \varphi) = a \cdot S\varphi \tag{F9}$$

が成り立つ. よって, T の定義式(96)から,

$$T\eta = T\varphi \tag{F10}$$

が成り立つ.

付録A, A3章の4性質③の成立の確かめ:

$$\eta \equiv T\varphi \tag{F11}$$

と定義される η を導入する.

(イ) 式(F5)が成立していれば, 性質①より, $\eta = T\varphi = 0$ である.

$\int_M dm(x) |\eta(x)|^2 = 0$ を得, 性質①より, $T\eta = T(T\varphi) = 0$ である. よって,

$$T\eta = \eta \tag{F12}$$

を得た.

(ハ) 式(F7)が成立しているとする. T の定義式(96)より,

$$\eta(z) = (T\varphi)(z) = \frac{(S\varphi)(z)}{\sqrt{\int_M dm(x) |\varphi(x)|^2}} \tag{F13}$$

である.

ここで, 式(73)₁の $S\varphi$ について, $NFOM(k; S\varphi)$ を計算すれば, 定理F.1, (iii)より,

$$NFOM(k; S\varphi) = 0 \tag{F14}$$

である. よって,

$$S(S\varphi) = S\varphi \tag{F15}$$

が成り立つ。よって、

$$NFOM(k; b \cdot \varphi) = NFOM(k; \varphi) \quad \text{for any positive number } b \tag{F16}$$

$$\therefore S(b \cdot \varphi) = b \cdot S\varphi \quad \text{for any positive number } b \tag{F17}$$

に注意して、また、

$$\begin{aligned} & \sqrt{\int_M dm(x) |\eta(x)|^2} \\ &= \sqrt{\int_M dm(x) |\varphi(x)|^2 / \int_M dm(x) |\varphi(x)|^2} \quad \because \text{定理F.1, (ii)} \\ &= \sqrt{1} = 1 \neq 0 \end{aligned} \tag{F18}$$

に注意すれば、 T の定義式 (96) より、

$$\begin{aligned} \forall z \in M, (T\eta)(z) &= \frac{(S\eta)(z)}{\sqrt{\int_M dm(x) |\eta(x)|^2}} \\ &= \frac{(S(S\varphi))(z)}{\sqrt{\int_M dm(x) |(S\varphi)(x)|^2}} \quad \because \text{式 (F13)} \\ &= \frac{(S\varphi)(z)}{\sqrt{\int_M dm(x) |(S\varphi)(x)|^2}} \quad \because \text{式 (F15)} \\ &= \frac{(S\varphi)(z)}{\sqrt{\int_M dm(x) |\varphi(x)|^2}} \end{aligned}$$

$$\because \text{定理 1, (ii) より, } \int_M dm(x) |(S\varphi)(x)|^2 = \int_M dm(x) |\varphi(x)|^2 \neq 0 \tag{F19}$$

$$= \eta(z) \quad \because \text{式 (F13)}$$

を得、

$$T(T\varphi) = T\varphi \tag{F20}$$

の成立が示された。

付録A, A3章の4性質④の成立の確かめ：式 (F7) が成り立っているとき、

$$\exists z \in M, (S\varphi)(z) \neq 0 \tag{F21}$$

であれば、 T の定義式 (96) より、

$$(T\varphi)(z) \neq 0 \tag{F22}$$

がいえる。

(定理F.2の系1の証明)

(イ) 式 (F5) が成立していれば、

$NFOM$ の定義式式 (95)₂ より、 $NFOM(k; \varphi) = 0$ であり、よって、 S の定義式 (73)₁ より、

$$S\varphi = \varphi \tag{F23}$$

である。

よって、定理2の系1の前半

$$S(S\varphi) = S\varphi = \varphi \tag{F24}$$

が得られた。

一方、 T の定義式 (96) より、 $T\varphi = 0$ である。NFOM の定義式 (95)₂ より、 $NFOM(k; T\varphi) = 0$ であり、よって、 S の定義式 (73)₁ より、定理 2 の系 1 の後半

$$S(T\varphi) = T\varphi \tag{F25}$$

が得られた。

(ロ) 式 (F7) が成立しているとする。

定理F.2の系 1 の前半は式 (F15) で示されている。

$T\varphi$ は、式 (F13) で示されているが、 $S(T\varphi)$ を求めてみよう。定理F.1, (iii) より、

$$\begin{aligned} & NFOM(k; T\varphi) \\ &= NFOM(k, S\varphi) \quad \because \text{式 (95)}_1 \end{aligned} \tag{F26}$$

$$= 0 \quad \because \text{定理F.1, (iii)} \tag{F27}$$

であるから、 S の定義式 (73)₁ より、定理F.2の系 1 の後半式 (F25) が成立する。

□

(著者 鈴木昇一，論文題目 1パラメータLie座標変換群とそのパターン正規化への応用，文教大学情報学部情報研究no.32 投稿論文，投稿年月日 2004年 8月23日(月))