

曖昧さに関する半順序 \preceq を単調に保つモデル構成作用素 T

鈴木 昇一

Model-Construction Operator T That monotonously preserves the partial order \preceq about ambiguity

Shoichi Suzuki

あらまし

処理の対象とする問題のパターンの集合 Φ は、或る可分なヒルベルト空間 \mathfrak{H} の部分集合であるとして、パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ から抽出される第 $k \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, k) \in R$ が与えられたとして、S. Suzukiの提案したaxiom 1の(i), (ii), (iii)の3後半、並びに、(iv)を、を満たす写像 T の出力であるパターンモデル $T\varphi$ の形式として、正規直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ による1次形式(抽出された各特徴量 $u(\varphi, k) (k \in L)$ を1次展開係数に持つ構造形式)

$$T\varphi = \sum_{k \in L} u(\varphi, k) \cdot \psi_k$$

をも導入する。同じ意味を表すのに見かけ上異なる同値ないくつかのパターンが存在するから、このようなパターンに同値なパターンがパターン φ のパターンモデル $T\varphi$ である。事実、等式

$$\forall k \in L, u(T\varphi, k) = u(\varphi, k)$$

が成立し、このように、パターンモデル $T\varphi$ は原パターン φ と同じ特徴量 $u(\varphi, k)$ の組

$$\vec{u}(\varphi) = \{u(\varphi, k) \mid k \in L\}$$

を備えたパターンである。

パターン集合 Φ 上の同値関係(抽出される特徴量間に等号関係が存在するという2パターン $\varphi, \eta \in \Phi$ 間の関係) \sim を導入する。更に、パターン集合 Φ 上の半順序 \preceq が、抽出される特徴量間に2種類の不等式のいずれかが成立するという2パターン $\varphi, \eta \in \Phi$ 間の関係として定義される。

正規直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ 内の第 $\ell \in L$ 番目のパターン形状素 ψ_ℓ の定数倍 $\delta\varphi \equiv \varepsilon \cdot \psi_\ell$ だけ、パターン $\varphi \in \Phi$ を $\varphi' \equiv \varphi + \delta\varphi = \varphi + \varepsilon \cdot \psi_\ell$ へと変形させる操作がパターン集合 Φ 上の半順序 \preceq を単調に保つ特徴量 $u(\varphi, k)$ の組 $\vec{u}(\varphi)$ の3例が、研究されている。

半順序関係 \preceq の關係に、2つのパターン $\varphi, \eta \in \Phi$ があれば、その2つのパターンモデル $T\varphi, T\eta \in \Phi$ も同様な關係にあり、逆も成り立つことも示されている。

半順序関係 \preceq を反映する特徴情報量 $FI(\varphi)$ も提案される。情報量 $FI(\varphi)$ を用いれば、2パターン $\varphi, \eta \in \Phi$ 間に半順序関係 $\varphi \preceq \eta$ が成立しないかどうかの判定ができて便利である

2つのパターン $\varphi, \eta \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ が

$\varphi \blacktriangleleft \eta$ 或いは, $FI(\varphi) \leq FI(\eta)$

という関係にあれば, $\eta \in \Phi$ のほうが $\varphi \in \Phi$ より正規直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ 内の, より少ない個数のパターン形状素 ψ_ℓ の集合を用いて表されていると考えられ, $\eta \in \Phi$ のほうが $\varphi \in \Phi$ より少ない段数で, 認識システム RECOGNITRON の多段階想起認識過程が終了することが期待される.

キーワード

- (1) パターンモデル (2) 半順序 (3) パターン変形
 (4) 同値関係 (5) 特徴情報量 (6) 直交系 (7) SS理論

Abstract

Let a set Φ of patterns in question to be a subset of a separable Hilbert space \mathfrak{H} . Assume that the k th features $u(\varphi, k) \in R$ (a set of real numbers) extracted from pattern $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ are given. A mapping T which must satisfying three second halves of (i), (ii), and (iii), and (iv) of axiom 1 suggested by S.Suzuki has the capability which makes the corresponding model $T\varphi$ of a pattern φ . We can consider a linear combination

$$T\varphi = \sum_{k \in L} u(\varphi, k) \cdot \psi_k$$

using an orthonormal system $\{\psi_k\}_{k \in L}$ as structural form of mapping T . $T\varphi$ has a corresponding extracted feature $u(\varphi, k) (k \in L)$ as each linear coefficient. There are some patterns equivalent to a given pattern. Some seemingly different equivalent patterns exist in expressing the same meaning. A simplified pattern $T\varphi$ equivalent to all of such two or more patterns is a corresponding model of an original pattern φ . The equality

$$\forall k \in L, u(T\varphi, k) = u(\varphi, K)$$

, such as a fact, are materialized. $T\varphi$ is a pattern model of the original pattern φ in this way. $T\varphi$ is the pattern equipped with the group of the same amount of the features as the amount of the features extracted from φ .

We can define an equivalence relation \sim on Φ which is a relation between two patterns that an equal mark relation exists between the amounts of the features extracted.

Furthermore, a partial ordering \blacktriangleleft on Φ can be defined in such a way that either of two kinds of inequality exists between the amounts of the features extracted.

There are three examples of the groups of the amount of the features such that a operation made to transform pattern $\varphi \in \Phi$ into $\varphi' \equiv \varphi + \delta\varphi = \varphi + \varepsilon \cdot \psi_\ell$ only the constant twice $\delta\varphi \equiv \varepsilon \cdot \psi_\ell$ of $\ell (\in L)$ th pattern primitive element ψ_ℓ in the orthonormal system $\{\psi_k\}_{k \in L}$ may keep the partial order on Φ monotonous. Such three examples are studied here.

If two patterns $\varphi \in \Phi$ and $\eta \in \Phi$ have a partial order-related relation, it is also shown that the two pattern models $T\varphi, T\eta \in \Phi$ have the same relation, and that its contrary is also realized. The feature amount $FI(\varphi)$ of information reflecting a partial order relation \blacktriangleleft is also proposed.

If the amount of information is used, the judgment of whether a partial order relation between two patterns $\varphi \in \Phi$ and $\eta \in \Phi$ is materialized or not is possible, and therefore it is convenient.

If two patterns $\varphi \in \Phi$ and $\eta \in \Phi$ have the relation $\varphi \bullet \ll \eta$ or $FI(\varphi) \leq FI(\eta)$, $\eta \in \Phi$ will be considered to be expressed using a set of pattern primitive elements of the fewer number in the orthonormal system $\{\psi_k\}_{k \in L}$ than $\varphi \in \Phi$. In the case, it is expected that the multi-stage associative recognition process of a recognition system RECOGNITION of pattern $\eta \in \Phi$ is completed with the number of stages fewer than the multi-stage associative recognition process of pattern $\varphi \in \Phi$.

Key Words: (1) pattern model (2) partial order (3) deformation of patterns (4) equivalence relation (5) information amount of features (6) orthogonal system (7) SS theory

1. まえがき

認識情報システムは、パターン情報処理を開始するにあたり、パターンの標準的な表現形式（本論文では、パターン φ のモデル $T\varphi$ ）を定めておく必要がある。何故ならば、複数のパターン間には同値な関係（本論文では、パターンから抽出される各特徴量が一致するという同値関係 \sim ）が存在することは、同じ意味を表すのに見かけ上相異なるいくつかのパターンが存在するからである。

論理式を使って記号による後ろ向き推論を開始するにあたり、推論言語情報システムとしての人工知能システムPrologが、論理式を節形式（clausal form）という連言標準形（conjunctive canonical form）に変換しておくことを要求するのは、同じ意味を表すのに見かけ上相異なる同値ないくつかの論理式（同一の意味を持っている複数の論理式）が存在する [6] からである。一般問題解決システム（general solver）としての知識工学上のproduction systemについてもこの間の事情は同じであり、if-then型の、production memory内の知識表現単位は無論として、与えられた問題を解決するために用意する作業記憶の初期状態（質問の表現）は、予め決められている標準的な表現形式を備えた知識で埋められていなければならない。

SS理論 [3], [4] では、情報システム（パターン情報処理システム）に、処理の対象とする問題の入力パターン $\varphi \in \Phi$ をその標準形 $T\varphi \in \Phi$ に変換することを要求する。

その内積、ノルムを (φ, η) , $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ と表す可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} を導入し、 Φ をその部分集合とする。

パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ から抽出される第 $k \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, k) \in R$ を導入する本論文では、抽出される特徴量間に大小関係が存在するという2パターン $\varphi, \eta \in \Phi$ 間の関係 $\varphi \bullet \ll \eta$ を

$$\begin{aligned} \varphi \bullet \ll \eta &\Leftrightarrow \\ \forall k \in L, u(\eta, k) \leq u(\varphi, k) &\leq th^-(k) \vee th^-(k) \leq u(\varphi, k) \leq u(\eta, k) \leq 0 \\ \vee 0 \leq u(\eta, k) \leq u(\varphi, k) &\leq th^+(k) \vee th^+(k) \leq u(\varphi, k) \leq u(\eta, k) \end{aligned} \quad (1.1)$$

と定義すると、この半順序関係 $\bullet \ll$ は、2パターン $\varphi, \eta \in \Phi$ 間の関係（抽出される特徴量間に等号関係が存在するという2パターン $\varphi, \eta \in \Phi$ 間の関係） \sim を分解した形式

$$\varphi \bullet \ll \eta \text{ かつ } \eta \bullet \ll \varphi \text{ ならば, } \varphi \sim \eta \quad (1.2)$$

を満たすような

$$\varphi \sim \eta \Leftrightarrow \forall k \in L, u(\varphi, k) = u(\eta, k) \quad (1.3)$$

と定義される同値関係 \sim が得られることに注目する。パターン集合 Φ 上のこの同値関係 \sim を導入した

後、正規直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ 内の第 $\ell \in L$ 番目のパターン形状素 ψ_ℓ の定数倍 $\delta\varphi \equiv \varepsilon \cdot \psi_\ell$ だけ、パターン $\varphi \in \Phi$ を変形させるパターン変形

$$\varphi \rightarrow \varphi' \equiv \varphi + \delta\varphi, \text{ where } \delta\varphi \equiv \varepsilon \cdot \psi_\ell \quad (1.4)$$

について、パターンモデル $T\varphi$ の形式として、正規直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ による1次形式（抽出された各特徴量 $u(\varphi, k) (k \in L)$ を1次展開係数に持つ構造形式）

$$T\varphi = \sum_{k \in L} u(\varphi, k) \cdot \psi_k \quad (1.5)$$

内の、特徴量 $u(\varphi, k)$ の組

$$\vec{u}(\varphi) = \{u(\varphi, k) \mid k \in L\} \quad (1.6)$$

の3種類が半順序を単調に保つための諸条件が研究される。

半順序関係 \bullet を反映する特徴情報量 $FI(\varphi)$ も提案され、定理7.2, (iii)の対偶

不等式 $FI(\varphi) \leq FI(\eta)$ が成立しなければ、半順序関係 $\varphi \bullet \eta$ は成立しない

を適用すれば、2パターン $\varphi, \eta \in \Phi$ 間に半順序関係 $\varphi \bullet \eta$ が成立しないかどうかの判定ができて便利である。

半順序関係 \bullet の関係に、2つのパターン $\varphi, \eta \in \Phi$ があれば、その2つのパターンモデル $T\varphi, T\eta \in \Phi$ も同様な関係にあり、逆も成り立つことも示されている。

S. Suzukiによって提案された認識システムRECOGNITRON [3], [4], [13], [17]~[19]がモデル $T\varphi \in \Phi$ を見たり聞いたりしたならば($T\varphi$ を感性的に受け取ったならば)、原パターン $\varphi \in \Phi$ と同じように見えたり聞こえたりすること(原パターン φ と錯覚し原パターン φ と同じように感性的に受容すること; 同一知覚原理)だと、解釈可能なモデル $T\varphi \in \Phi$ がどのように変容するかが判明し、その結果、RECOGNITRONによる認識の働きがどの程度のパターン変形に耐えられるかなどが解明され、RECOGNITRONの認識性能を改良する余地が展開される契機となるという効能が生じる。

5付録A~Eが設けられており、各々簡単に説明しておこう。

付録Aでは、 Φ を認識システムRECOGNITRONが処理の対象とする問題のパターンの集合とすると、SS公理系(axiom 1~4)のaxiom 1を満たす対 $[\Phi, T]$ が説明されている。

付録Bでは、特徴抽出写像 u が与えられたとき、axiom 1を満たすモデル構成作用素 T に不変なように、特徴抽出写像 u' を構成し、axiom 1を満たす対 $[\Phi, T]$ から、axiom 1を満たす新たな“ u と T とを特性付ける対 $[\Phi, T]$ ”が構成される。

付録Cでは、SS公理系(axiom 1~4)のaxiom 2を満たす類似度関数 SM が、The Davies-Bouldin indexからhintを得、similarity-based clustering methodの性質を備えているように、一般的に構成される。

付録Dでは、SS公理系(axiom 1~4)のaxiom 2を満たす類似度関数 SM が、相違性逆数構成法により、一般的に構成される。

付録Eでは、付録Bの3定理B.1~B.3が適用可能なように、音声波形 φ から特徴量 $u(\varphi, \ell)$ の組 $\vec{u}(\varphi) = \{u(\varphi, \ell) \mid \ell \in L\}$ を抽出する方法が研究される。

2. パターン集合 Φ 上の同値関係 \sim と半順序 \bullet

本章では、パターン集合 Φ 上に同値関係 \sim と半順序 \bullet を導入する。

特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \rightarrow R \quad (\text{実数全体の集合}) \tag{2.1}$$

を導入する。パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{S}$ から抽出される第 $k \in L$ 番目の特徴量が $u(\varphi, k) \in R$ ということになる。

2つのパターン φ, η から抽出された特徴量の組

$$\vec{u}(\varphi) = \{u(\varphi, k) \mid k \in L\}, \vec{u}(\eta) = \{u(\eta, k) \mid k \in L\} \tag{2.2}$$

が同一であるという2元関係 \sim を、次の定義2.1で導入する。

[定義2.1] (Φ 上の2元関係 \sim)

2つのパターン $\varphi, \eta \in \Phi \subset \mathfrak{S}$ について、

$$\varphi \sim \eta \Leftrightarrow \forall k \in L, u(\varphi, k) = u(\eta, k) \tag{2.3}$$

□

2元関係 \sim は同値関係であることは、次の命題2.1からわかる。

[命題2.1] (Φ 上の同値関係 \sim)

パターン集合 Φ の2項関係 \sim は同値関係 (equivalence relation) であり、次の (1), (2), (3) が成り立つ：

(1) (反射律； reflexive law) $\varphi \sim \varphi$.

(2) (対称律； symmetric law) $\varphi \sim \eta$ ならば、 $\eta \sim \varphi$.

(3) (推移律； transitive law) $\varphi \sim \eta$ かつ $\eta \sim \psi$ ならば、 $\varphi \sim \psi$. □

固定したパターン φ について、同値関係 $\varphi \sim \eta$ を満たすパターン η を求めることが出来たとき、パターン η がパターン φ より簡素な構造を備えていれば、求められた η は固定された φ の代りに採用でき、 φ のモデル (a corresponding model of pattern φ) と解釈できよう。

2つのパターン φ, η から抽出された特徴量の組 $\vec{u}(\varphi), \vec{u}(\eta)$ の各成分 $u(\varphi, k), u(\eta, k) (k \in L)$ 間に大小関係があるという半順序関係 $\bullet\subset$ を次の定義2.2で導入する。

[定義2.2] (Φ 上の2元関係 $\bullet\subset$)

不等式

$$-1 < th^-(k) < 0 < th^+(k) < +1 (k \in L) \tag{2.4}$$

を満たす2種類の閾値 $th^-(k), th^+(k)$ の2つの組 $\{th^-(k)\}_{k \in L}, \{th^+(k)\}_{k \in L}$ を用意・固定し、2つのパターン $\varphi, \eta \in \Phi \subset \mathfrak{S}$ について、

$$\varphi \bullet\subset \eta \Leftrightarrow$$

$$\forall k \in L, u(\eta, k) \leq u(\varphi, k) \leq th^-(k) \vee th^-(k) \leq u(\varphi, k) \leq u(\eta, k) \leq 0$$

$$\vee 0 \leq u(\eta, k) \leq u(\varphi, k) \leq th^+(k) \vee th^+(k) \leq u(\varphi, k) \leq u(\eta, k) \tag{2.5}$$

□

2元関係 $\bullet\subset$ は半順序関係であることは、次の命題2.2からわかる。

[命題2.2] (Φ 上の半順序関係 $\bullet\subset$)

パターン集合 Φ の2項関係 $\bullet\subset$ は半順序関係 (partial ordering) であり、次の (1), (2), (3) が成り立つ：

(1) (反射律； reflexive law) $\varphi \bullet\subset \varphi$.

(2) (反対称律； antisymmetric law) $\varphi \bullet\subset \eta$ かつ $\eta \bullet\subset \varphi$ ならば、 $\varphi \sim \eta$.

(3) (推移律； transitive law) $\varphi \bullet\subset \eta$ かつ $\eta \bullet\subset \psi$ ならば、 $\varphi \bullet\subset \psi$. □

$\varphi \bullet\subset \eta$ が成り立つとき、 η は φ を整形化したパターンであるという。より詳細には、 $\varphi \bullet\subset \eta$ について、次の4解釈 (一) ~ (四) が可能であると考えよう：

- (一) $\varphi \in \Phi$ は $\eta \in \Phi$ の近似である.
- (二) $\varphi \in \Phi$ は $\eta \in \Phi$ に要約される.
- (三) $\eta \in \Phi$ は $\varphi \in \Phi$ の情報を含む.
- (四) $\eta \in \Phi$ は $\varphi \in \Phi$ に変形されている.

□

3. パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ の, 正規直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ による直交展開

本章では, 3 種類のパターンモデル $T\varphi$ を定義するために, 正規直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ による $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ の直交展開が説明される.

$$(a \cdot \varphi, \eta) = a \cdot (\varphi, \eta) \text{ for any complex number } a \quad (3.1)$$

であるような内積, ノルムを各々 $(\varphi, \eta), \|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ とする可分な一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の元 ψ_k の系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ は, 正規直交の性質

$$(\psi_k, \psi_\ell) = 0 \text{ if } k \neq \ell, = 1 \text{ if } k = \ell \quad (3.2)$$

を満たしているという意味で, 正規直交系に選ぶ. 系は $\{\psi_k\}_{k \in L}$, 完全性

$$\forall k \in L, (\varphi, \psi_k) = 0 \Rightarrow \|\varphi\| = 0 \quad (3.3)$$

を満たしているとは限らないとしよう. 近似誤差 $\varphi - \sum_{k \in L} a_k \cdot \psi_k$ の自乗ノルム

$$\left\| \varphi - \sum_{k \in L} a_k \cdot \psi_k \right\|^2 \quad (3.4)$$

を最小ならしめる各 1 次結合係数 $a_k(\varphi) \ k \in L$ は, 正規直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ は 1 次独立な系であることを考慮すれば, 最小二乗法によれば,

$$a_k(\varphi) = (\varphi, \psi_k), \ k \in L \quad (3.5)$$

である. このとき, 直交関係

$$\forall k \in L, (\varphi_\perp, \psi_k) = 0 \quad (3.6)$$

を満たす \mathfrak{H} の元 φ_\perp が存在して, $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ の直交 1 次展開

$$\varphi = \sum_{k \in L} a_k(\varphi) \cdot \psi_k + \varphi_\perp \quad (3.7)$$

が成り立つ. φ_\perp は $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ の直交展開の残差 (residue) といわれるものである.

4. 3 種類のパターンモデル $T\varphi$ の構造形式と, 処理の対象とする問題の パターン φ の集合 (パターン集合) Φ の構成性

本章では, ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の部分集合 Φ と写像とのなす順序対 $[\Phi, T]$ は axiom 1 を満たすように求める.

処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ (パターン集合) Φ を導入し, 写像

$$T: \Phi \rightarrow \Phi \quad (4.1)$$

を考える. 2 章の正規直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$, 並びに, 2 章の実数値特徴抽出写像 u を導入し, 直交展開式 (3.7) を勘案し, モデル構造の形式 (パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ から抽出される第 $k \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, k) \in R$ を 1 次展開係数に持つような正規直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ を基底とする 1 次形式)

$$T\varphi = \sum_{k \in L} u(\varphi, k) \cdot \phi_k \tag{4.2}$$

を考えよう。 $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ の直交展開式 (3.7) を勘案すれば、3種類のパターンモデル $T\varphi$ について、原パターン φ と、そのモデル $T\varphi$ の正或いは零の定数倍 $C(\varphi) \cdot T\varphi$ との違いは φ の残差 φ_{\perp} に過ぎないという関係

$$\forall \varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}, \exists C(\varphi) \geq 0, \varphi - C(\varphi) \cdot T\varphi = \varphi_{\perp} \tag{4.3}$$

が成り立つことがわかるであろう。

さて、SS理論 [2], [3] は4つの公理 axiom 1~4から組み立てられている。そのうちの最初の次の axiom 1に目を向けよう。

Axiom 1 (パターン集合 Φ とモデル構成作用素 T との対 $[\Phi, T]$ の満たすべき公理)

(i) (零元 0 の Φ -包含性と、零元 0 の不動点性; fixed-point property of zero element under mapping T)

$$0 \in \Phi \wedge T0 = 0.$$

(ii) (Φ の錐性, T の正定数倍吸収性; cone property)

$$\forall \varphi \in \Phi, a \cdot \varphi \in \Phi \wedge T(a \cdot \varphi) = T\varphi$$

for any positive real number $a \in R^{++}$

(iii) (Φ の埋込性 (embeddedness) と, T のベキ等性 (idempotency))

$$\forall \varphi \in \Phi, T\varphi \in \Phi \wedge T(T\varphi) = T\varphi.$$

(iv) (写像 T の非零写像性; non-zero mapping property of T) □

$$\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0$$

次の定理4.1は、axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半, 並びに, (iv) を, を満たす写像 T の3種類が構成されることを明らかにしている。

[定理4.1] (モデル構成作用素 T の構成定理) [2], [3]

以下の7, 8, 9章で採用された3種類の実数値特徴抽出写像 u を採用した写像 T は, axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半, 並びに, (iv) を満たす。 □

axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半, 並びに, (iv) を満たす写像 T を考える。パターンと判明している元の集合 (基本領域; basic domain) (axiom 1の (i) の前半から, $0 \in \Phi_B$, 並びに, 正実数全体の集合 R^{++} を導入し, 処理の対象とする問題のパターン φ の集合 (パターン集合) Φ を,

$$\Phi = R^{++} \cdot [\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B] \tag{4.4}$$

の如く設定すれば, 2式

$$(a) T \cdot \Phi = T \cdot \Phi_B \subset \Phi \quad (\text{パターンモデル } T \cdot \Phi \text{ 集合の基本領域のモデル集合 } T \cdot \Phi_B \text{ への還元性}) \tag{4.5}$$

$$(b) R^{++} \cdot \Phi = \Phi \quad (\text{錐性}) \tag{4.6}$$

が成立し, 次の定理4.2が成立する。

[定理4.2] (対 $[\Phi, T]$ の構成定理) [2], [3]

axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半, 並びに, (iv) を, を満たす写像 T について, 処理の対象とする問題のパターン φ の集合 (パターン集合) Φ を式 (4.4) のように設定すれば, axiom の (i), (ii), (iii) の3前半を Φ は満たし, 結局, 順序対 $[\Phi, T]$ は axiom 1を満たす。 □

処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \mathfrak{H}$ の集合 $\Phi (\subset \mathfrak{H})$ は任意ではなく, 基本領域 Φ_B と T とが与えられれば, 構築され, 式 (4.4) のように表される構成的集合であることに注意する。

このとき, 式 (4.1) の写像 T をモデル構成作用素という。

5. 同値関係 \sim ，半順序関係 $\bullet\circ$ をモデル構成作用素 T は保存する

2つのパターン $\varphi, \eta \in \Phi \subset \mathfrak{P}$ が定義2.2の2元関係 $\varphi \bullet\circ \eta$ にあれば， $\eta \in \Phi$ のほうが $\varphi \in \Phi$ よりより少ない段数で，RECOGNITRON [3]，[4]の多段階想起認識過程が終了することが期待される．その理由は， $\eta \in \Phi$ のほうが $\varphi \in \Phi$ より正規直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ 内の，より少ない個数のパターン形状素 ψ_k の集合を用いて表されるからである．

本章では，

- (1) モデル構成作用素 T のべき等性 (axiom 1, (iii)の後半)が，特徴抽出写像 u がモデル構成作用素 T の下で不変であることと同値であること (定理5.1)
- (2) 同値関係 \sim が，モデル構成作用素 T の下で保存されること (定理5.2)
- (3) 半順序関係 $\bullet\circ$ が，モデル構成作用素 T の下で保存されること (定理5.3)

が証明される．

パターンモデル $T\varphi$ のモデル $T(T\varphi)$ は元のパターンモデル $T\varphi$ であるということは，

2つのパターン $T\varphi$ ， φ から抽出された特徴量の組 $\vec{u}(T\varphi)$ ， $\vec{u}(\varphi)$ の各成分 $u(T\varphi, k)$ ， $u(\varphi, k)(k \in L)$ が一致すること

と同じ内容であるということが，次の定理5.1よりわかる．

前半はモデル構成作用素 T のべき等性 (axiom 1, (iii)の後半)を表しており，後半は特徴抽出写像 u が T の下で不変であることを表しており，この両性質が同値であることを定理5.1は指摘している．

[定理5.1] (モデル構成作用素 T のべき等性と，特徴抽出写像 u の T -不変性との同値定理)

$$T(T\varphi) = T\varphi \quad (\text{axiom 1, (iii)の後半}) \quad (5.1)$$

\Leftrightarrow

$$\forall k \in L, u(T\varphi, k) = u(\varphi, k) \quad (5.2)$$

(証明) T の構造式 (4.2)を用い，axiom 1, (iii)の後半の後半 $T(T\varphi) = T\varphi$ を書き直すと，

$$\sum_{k \in L} u(T\varphi, k) \cdot \psi_k = \sum_{k \in L} u(\varphi, k) \cdot \psi_k \quad (5.3)$$

である．ここで，正規直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ が1次独立であることを考慮すれば，

$$\forall k \in L, u(T\varphi, k) = u(\varphi, k) \quad (5.4)$$

が成り立つことがわかる．逆も成り立つことも，上述の論を逆にたどれることからわかる．

□

同値関係 \sim の關係に，2つのパターン $\varphi, \eta \in \Phi$ があれば，その2つのパターンモデル $T\varphi, T\eta \in \Phi$ も同様な關係にあり，逆も成り立つことは，次の定理5.2からわかる．

[定理5.2] (同値関係 \sim の，モデル構成作用素 T に関する保存定理)

$$\forall \varphi, \eta \in \Phi, \varphi \sim \eta \Leftrightarrow T\varphi \sim T\eta \quad (5.5)$$

(証明) 定理5.1を適用する．

$$\varphi \sim \eta \quad (5.6)$$

\Leftrightarrow

$$\forall k \in L, u(\varphi, k) = u(\eta, k) \quad (5.7)$$

\Leftrightarrow

$$\forall k \in L, u(T\varphi, k) = u(T\eta, k) \quad (5.8)$$

⇔

$$T\varphi \bullet\circ T\eta. \tag{5.9}$$

□

半順序関係 $\bullet\circ$ の関係に、2つのパターン $\varphi, \eta \in \Phi$ があれば、その2つのパターンモデル $T\varphi, T\eta \in \Phi$ も同様な関係にあり、逆も成り立つことは、次の定理5.3からわかる。

[定理5.3] (半順序関係 $\bullet\circ$ の、モデル構成作用素 T に関する保存定理)

$$\forall \varphi, \eta \in \Phi, \varphi \bullet\circ \eta \Leftrightarrow T\varphi \bullet\circ T\eta \tag{5.10}$$

(証明) 定理5.1を適用する。

$$\varphi \bullet\circ \eta \tag{5.11}$$

⇔

$$\begin{aligned} \forall k \in L, u(\eta, k) \leq u(\varphi, k) \leq th^-(k) \vee th^-(k) \leq u(\varphi, k) \leq u(\eta, k) \leq 0 \\ \vee 0 \leq u(\eta, k) \leq u(\varphi, k) \leq th^+(k) \vee th^+(k) \leq u(\varphi, k) \leq u(\eta, k). \end{aligned} \tag{5.12}$$

⇔

$$\begin{aligned} \forall k \in L, u(T\eta, k) \leq u(T\varphi, k) \leq th^-(k) \vee th^-(k) \leq u(T\varphi, k) \leq u(T\eta, k) \leq 0 \\ \vee 0 \leq u(T\eta, k) \leq u(T\varphi, k) \leq th^+(k) \vee th^+(k) \leq u(T\varphi, k) \leq u(T\eta, k) \end{aligned} \tag{5.13}$$

⇔

$$T\varphi \bullet\circ T\eta. \tag{5.14}$$

□

6. パターンの変形 $\varphi \rightarrow \varphi' \equiv \varphi + \delta\varphi$, where $\delta\varphi \equiv \varepsilon \cdot \psi_\ell$

本章では、素で微小な変形 $\delta\varphi$ を実定数 ε 、添え字 $\ell \in L$ をその都度選び多数回繰り返すと、一般的な変形が得られるように、正規直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ 内の第 $\ell \in L$ 成分 ψ_ℓ の ε 倍 $\delta\varphi \equiv \varepsilon \cdot \psi_\ell$ を選んで、パターン $\varphi \in \Phi$ の変形パターン $\varphi' \equiv \varphi + \delta\varphi \in \Phi$ を以後の7, 8, 9章において考察の対象とすることが説明される。

ε を十分小さい実定数とする。正規直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ 内の第 $\ell \in L$ 成分 ψ_ℓ の ε 倍

$$\delta\varphi \equiv \varepsilon \cdot \psi_\ell \tag{6.1}$$

をパターン $\varphi \in \Phi$ に加えて得られるパターン

$$\varphi' \equiv \varphi + \delta\varphi \in \Phi \tag{6.2}$$

へ、パターン $\varphi \in \Phi$ を変形させよう：

$$\varphi \rightarrow \varphi' \equiv \varphi + \delta\varphi \tag{6.3}$$

□

変形させる仕方としては、正規直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ 内の添え字 $\ell \in L$ を固定して、最も簡素なもの1つ $\delta\varphi \equiv \varepsilon \cdot \psi_\ell$ を選んでいることに注意する。十分小さい実定数 ε 、添え字 $\ell \in L$ をその都度選び多数回繰り返すと、一般的な変形

$$\varphi' = \varphi + \sum_{\ell \in L} \sum_{\varepsilon_\ell} [\varepsilon_\ell \cdot \psi_\ell] \tag{6.4}$$

が得られることに注意する。それで、第 $\ell \in L$ 番目のパターン形状素 ψ_ℓ の定数倍 $\delta\varphi \equiv \varepsilon \cdot \psi_\ell$ だけ、パターン $\varphi \in \Phi$ を変形させて得られるパターン

$$\varphi' \equiv \varphi + \delta\varphi \quad (6.5)$$

$$= \varphi + \varepsilon \cdot \delta\varphi \quad (6.6)$$

$$= [a_\ell(\varphi) + \varepsilon] \cdot \psi_\ell + \sum_{k \in L - \{\ell\}} a_k(\varphi) \cdot \psi_k + \varphi_\perp$$

$$\therefore \varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H} \text{ の直交展開式 (3.7)} \quad (6.7)$$

を以後の 7, 8, 9 章において考察の対象としよう.

そうすれば, $\varphi' \equiv \varphi + \delta\varphi \in \Phi$ の各 1 次結合係数 $a_k(\varphi')$ は,

$$a_k(\varphi') \equiv \begin{cases} a_k(\varphi) + \varepsilon & \text{if } k = \ell \\ a_k(\varphi) & \text{if } k \neq \ell \end{cases} \quad (6.8)$$

であることがわかり, $\varphi' \equiv \varphi + \delta\varphi \in \Phi$ の直交展開式

$$\varphi' = \sum_{k \in L} a_k(\varphi') \cdot \psi_k + \varphi_\perp \quad (6.9)$$

が成り立つ.

以下の 7, 8, 9 章では, φ から φ' へ変化させたとき, $\varphi \bullet \varphi'$ が成り立つ意味で半順序 \bullet は保存されるかを研究する. つまり, 半順序 \bullet が保存されるような特徴量 $u(\varphi, k)$ の, 3 種類の組 $\vec{u}(\varphi) = \{u(\varphi, k) \mid k \in L\}$ が研究される.

以後, 可分な一般抽象ヒルベルト空間 [19] \mathfrak{H} が実ヒルベルト空間である場合を考察する.

7. 半順序 \bullet を単調変換する実数値特徴量 $u(\varphi, k)$ の組 $\vec{u}(\varphi) = \{u(\varphi, k) \mid k \in L\}$ の例 1

本章では, パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ から抽出される第 $k \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, k) \in R$ の 1 番目の例を示し, Φ 上の定義 2.2 の半順序関係 \bullet を保存するパターン $\eta \in \Phi$ をパターン $\varphi \in \Phi$ に対し, 具体的に構成し, 半順序関係 $\varphi \bullet \eta$ が成り立っていれば, 不等式 $FI(\varphi) \leq FI(\eta)$ が成り立つような特徴情報量 $FI(\varphi)$ を定義する.

7.1 パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ から抽出される第 $k \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, k) \in R$ の例 1 (絶対値の上限による規格化)

パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ から抽出される第 $k \in L$ 番目の実数値特徴量 $u(\varphi, k) \in R$ を

$$u(\varphi, k) = \begin{cases} 0 \cdots \forall k \in L, a_k = 0 \text{ のとき} \\ \frac{a_k(\varphi)}{\sup_{\ell \in L} |a_\ell(\varphi)|} \cdots \exists k \in L, a_k \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (7.1)$$

と定義する. 原パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ と axiom 1 の (i), (ii), (iii) の 3 後半, 並びに, (iv) を満たすそのモデル $T\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ との関係を表す等式 (4.3) を満たす定数 $C(\varphi)$ は,

$$C(\varphi) = 0 \vee C(\varphi) = \frac{1}{\sup_{\ell \in L} |a_\ell(\varphi)|} \quad (7.2)$$

と選ばれていることがわかる。式 (7.1) に登場している定数 $\sup_{\ell \in L} |a_\ell(\varphi)|$ は、絶対値 $|a_\ell(\varphi)|$ の、 $\ell \in L$ に関する上限であることに注意する。

以後、パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ から抽出される式 (7.1) の特徴量 $u(\varphi, k)$ の、式 (2.2) の組 $\vec{u}(\varphi)$ は、規格化条件

$$\forall k \in L, -1 < u(\varphi, k) < +1 \wedge \sup_{k \in L} |u(\varphi, k)| \in \{1, 0\} \tag{7.3}$$

を満たす。このとき、各特徴量 $u(\varphi, k)$ の絶対値 $|u(\varphi, k)|$ が最小値 0 或いは、最大値 1 に近い値をとる程、曖昧さ (fuzziness, ambiguity) が少ないと言え、2 元関係 \bullet_c は曖昧さに関する半順序関係と称されてよい。パターン $\varphi_t \in \Phi$ の、上に有界な列 $\{\varphi_t\}_{t=0,1,2,\dots}$ の極限は曖昧さが減少するにつれて、2 元関係 \bullet_c の上限 (supremum)、即ち、最小上界 (least upper bound)

$$\exists k \in L, |u(\eta, k)| = 1 \wedge [\forall \ell \in L - \{k\}, |u(\eta, \ell)| = 0] \tag{7.4}$$

を満たすパターン $\eta \in \Phi$ に近づくと見えよう。

7.2 半順序関係 \bullet_c を保存するパターン変形 $\varphi \rightarrow \varphi' \equiv \varphi + \delta\varphi$, where $\delta\varphi \equiv \varepsilon \cdot \psi_\ell$

本節では、先ず、6章のパターン変形式 (6.7) について、式 (7.1) の特徴量 $u(\varphi, k)$ がどのように変動するかを検討するため、以下の解析を用意しよう。つまり、式 (6.7) のパターン変形

$$\varphi \rightarrow \varphi' \equiv \varphi + \delta\varphi, \text{ where } \delta\varphi \equiv \varepsilon \cdot \psi_\ell \tag{7.5}$$

について、 $\varphi \bullet_c \varphi'$ というように定義 (2.2) の半順序関係 \bullet_c が保存されることを指摘する定理7.1を証明するために、以下の解析を用意する。

$\{x_k \mid k \in L\}$ を $|L|$ 個の実数値変数 x_k の組とし、 $\{x_k \mid k \in L\}$ の関数

$$F_k \equiv F_k(x_1, x_2, \dots, x_\ell, \dots, x_{|L|}) \equiv \frac{x_k}{\sup_{m \in L} |x_m|} \equiv \begin{cases} \frac{x_k}{\sup_{m \in L} |x_m|} & \text{if } \sup_{k \in L} |x_k| > 0 \\ 0 & \text{if } \sup_{k \in L} |x_k| = 0 \end{cases} \tag{7.6}$$

を考える。

$$[\forall k \in L, -1 \leq F_k \leq +1] \wedge \sup_{k \in L} |F_k| \in \{0, 1\} \tag{7.7}$$

が成り立っていることに注意する。更に、十分小さい実数 ε と、

$$x'_k \equiv \begin{cases} x_\ell + \varepsilon & \text{if } k = \ell \\ x_k & \text{if } k \neq \ell \end{cases} \tag{7.8}$$

とを用意しておいて、

$$F'_k \equiv F_k(x_1, x_2, \dots, x_\ell + \varepsilon, \dots, x_{|L|}) =$$

$$\begin{cases} \frac{x'_\ell}{\sup_{k \in L} |x'_k|} = \frac{x_\ell + \varepsilon}{\sup\{|x_\ell + \varepsilon|, \sup_{m \in L - \{\ell\}} |x_m|\}} & \text{if } k = \ell \\ \frac{x'_k}{\sup_{k \in L} |x'_k|} = \frac{x_k}{\sup\{|x_\ell + \varepsilon|, \sup_{m \in L - \{\ell\}} |x_m|\}} & \text{if } k \neq \ell \end{cases} \quad (7.9)$$

を導入しておく.

場合 (1) $\sup_{k \in L - \{\ell\}} |x_k| \leq |x_\ell + \varepsilon| \leq x_\ell$ のとき

$$F'_\ell = \frac{x_\ell + \varepsilon}{|x_\ell + \varepsilon|} \in \{-1, 0, +1\} \quad (7.10)$$

$$\therefore (x_\ell + \varepsilon) \cdot x_\ell > 0 \text{ のとき } F'_\ell = \frac{x_\ell}{|x_\ell|} = F_\ell \in \{-1, +1\}. \quad (7.11)$$

$$\forall k \in L - \{\ell\}, F'_k = \frac{x_k}{|x_\ell + \varepsilon|}$$

$$\begin{cases} \geq \frac{x_k}{|x_\ell|} = F_k & \text{if } x_k > 0 \\ = \frac{x_k}{|x_\ell|} = 0 = F_k & \text{if } x_k = 0 \\ \leq \frac{x_k}{|x_\ell|} = F_k & \text{if } x_k < 0 \end{cases} \quad (7.12)$$

場合 (2) $\sup_{k \in L - \{\ell\}} |x_k| \leq x_\ell \leq |x_\ell + \varepsilon|$ のとき

$$F'_\ell = \frac{x_\ell + \varepsilon}{|x_\ell + \varepsilon|} \in \{-1, 0, +1\}$$

$$\therefore (x_\ell + \varepsilon) \cdot x_\ell > 0 \text{ のとき } F'_\ell = \frac{x_\ell}{|x_\ell|} = F_\ell \in \{-1, +1\} \quad (7.13)$$

$$\forall k \in L - \{\ell\}, F'_k = \frac{x_k}{|x_\ell + \varepsilon|} \quad (7.14)$$

$$\begin{cases} \leq \frac{x_k}{|x_\ell|} = F_k & \text{if } x_k > 0 \\ = \frac{x_k}{|x_\ell|} = 0 = F_k & \text{if } x_k = 0 \\ \geq \frac{x_k}{|x_\ell|} = F_k & \text{if } x_k < 0 \end{cases} \quad (7.15)$$

場合 (3) $\exists q \in L - \{\ell\}, |x_\ell| \leq \sup_{k \in L - \{\ell\}} |x_k| = |x_q| \leq |x_\ell + \varepsilon|$ のとき

$$F'_\ell = \frac{x_\ell + \varepsilon}{|x_\ell + \varepsilon|} \in \{-1, 0, +1\}, F_\ell = \frac{x_\ell}{|x_q|} \quad (7.16)$$

$$\therefore F'_\ell = \frac{x_\ell + \varepsilon}{|x_q|} \cdot \frac{|x_q|}{|x_\ell + \varepsilon|} = (F_\ell + \frac{\varepsilon}{|x_q|}) \cdot \frac{|x_q|}{|x_\ell + \varepsilon|} \quad (7.17)$$

$$\begin{cases} \leq F_\ell + \frac{\varepsilon}{|x_q|} & \text{if } F_\ell + \frac{\varepsilon}{|x_q|} \geq 0 \\ \geq F_\ell + \frac{\varepsilon}{|x_q|} & \text{if } F_\ell + \frac{\varepsilon}{|x_q|} \leq 0 \end{cases} \quad (7.18)$$

$$\forall k \in L - \{\ell\}, F'_k = \frac{x_k}{|x_\ell + \varepsilon|} \quad (7.19)$$

$$\begin{cases} \leq \frac{x_k}{|x_q|} = F_k & \text{if } x_k > 0 \\ = \frac{x_k}{|x_q|} = 0 = F_k & \text{if } x_k = 0 \\ \geq \frac{x_k}{|x_q|} = F_k & \text{if } x_k < 0 \end{cases} \quad (7.20)$$

場合 (4) $\exists q \in L - \{\ell\}$, $|x_\ell| \leq |x_\ell + \varepsilon| \leq \sup_{k \in L - \{\ell\}} |x_k| = |x_q|$ のとき

$$F'_\ell = \frac{x_\ell + \varepsilon}{|x_q|} = \frac{x_\ell}{|x_q|} + \frac{\varepsilon}{|x_q|}, F_\ell = \frac{x_\ell}{|x_q|} \quad (7.21)$$

$$\therefore F'_\ell = F_\ell + \frac{\varepsilon}{|x_q|} \quad (7.22)$$

$$\begin{cases} \geq F_\ell & \text{if } \varepsilon \geq 0 \\ \leq F_\ell & \text{if } \varepsilon \leq 0 \end{cases} \quad (7.23)$$

$$\forall k \in L - \{\ell\}, F'_k = \frac{x_k}{|x_q|} = F_k \quad (7.24)$$

場合 (5) $\exists q \in L - \{\ell\}$, $|x_\ell + \varepsilon| \leq |x_\ell| \leq \sup_{k \in L - \{\ell\}} |x_k| = |x_q|$ のとき

$$F'_\ell = \frac{x_\ell + \varepsilon}{|x_q|} = \frac{x_\ell}{|x_q|} + \frac{\varepsilon}{|x_q|}, F_\ell = \frac{x_\ell}{|x_q|} \quad (7.25)$$

$$\therefore F'_\ell = F_\ell + \frac{\varepsilon}{|x_q|} \quad (7.26)$$

$$\begin{cases} \geq F_\ell & \text{if } \varepsilon \geq 0 \\ \leq F_\ell & \text{if } \varepsilon \leq 0 \end{cases} \quad (7.27)$$

$$\forall k \in L - \{\ell\}, F'_k = \frac{x_k}{|x_q|} = F_k \quad (7.28)$$

□

上述の解析から、次の定理E1が成り立つことがわかる。

[定理7.1] (半順序定理1)

式 (7.5) のパターン変形 $\varphi \rightarrow \varphi' \equiv \varphi + \delta\varphi$, where $\delta\varphi \equiv \varepsilon \cdot \psi_\ell$ を考えよう。

上述の場合 (1) ~ (5) において、

$$x_k = a_k(\varphi), k \in L \quad (7.29)$$

とおいたとき、上述の場合 (1) ~ (5) はすべての場合をつくしている。規格化条件式 (7.3) を満たすパターン $\varphi \in \Phi$ について、各閾値 $th^-(k)$, $th^+(k)$ ($k \in L$) について、不等式 (2.4) の成立を要請する。このとき、次の (i) ~ (iv) が成立する。

(i) $u(\varphi, \ell) \leq th^-(\ell)$ のとき

$$\exists q \in L - \{\ell\}, |a_\ell(\varphi) + \varepsilon| \leq |a_\ell(\varphi)| \leq \sup_{k \in L - \{\ell\}} |a_k(\varphi)| = |a_q(\varphi)|$$

であれば、

$$(i-1) \varepsilon \leq 0 \text{ であれば, } u(\varphi, \ell) + \frac{\varepsilon}{|a_q(\varphi)|} = u(\varphi + \delta\varphi, \ell) \leq u(\varphi, \ell)$$

$$(i-2) \forall k \in L - \{\ell\}, u(\varphi, k) = u(\varphi + \delta\varphi, k)$$

(ii) $th^-(\ell) \leq u(\varphi, \ell) \leq 0$ のとき

$u(\varphi + \delta\varphi, \ell) \leq 0$ であるとしよう。

$\exists q \in L - \{\ell\}, |a_\ell(\varphi)| \leq |a_\ell(\varphi) + \varepsilon| \leq \sup_{k \in L - \{\ell\}} |a_k(\varphi)| = |a_q(\varphi)|$
 であれば、

$$(ii-1) \quad \varepsilon \geq 0 \text{ であれば, } u(\varphi, \ell) \leq u(\varphi, \ell) + \frac{\varepsilon}{|a_q(\varphi)|} = u(\varphi + \delta\varphi, \ell)$$

$$(ii-2) \quad \forall k \in L - \{\ell\}, u(\varphi, k) = u(\varphi + \delta\varphi, k)$$

$$(iii) \quad 0 \leq u(\varphi, \ell) \leq th^+(\ell) \text{ のとき}$$

$0 \leq u(\varphi + \delta\varphi, \ell)$ であるとしよう。

$\exists q \in L - \{\ell\}, |a_\ell(\varphi) + \varepsilon| \leq |a_\ell(\varphi)| \leq \sup_{k \in L - \{\ell\}} |a_k(\varphi)| = |a_q(\varphi)|$
 であれば、

$$(iii-1) \quad \varepsilon \leq 0 \text{ であれば, } u(\varphi, \ell) + \frac{\varepsilon}{|a_q(\varphi)|} = u(\varphi + \delta\varphi, \ell) \leq u(\varphi, \ell)$$

$$(iii-2) \quad \forall k \in L - \{\ell\}, u(\varphi, k) = u(\varphi + \delta\varphi, k)$$

$$(iv) \quad th^+(\ell) \leq u(\varphi, \ell) \text{ のとき}$$

$\exists q \in L - \{\ell\}, |a_\ell(\varphi)| \leq |a_\ell(\varphi) + \varepsilon| \leq \sup_{k \in L - \{\ell\}} |a_k(\varphi)| = |a_q(\varphi)|$
 であれば、

$$(iv-1) \quad \varepsilon \geq 0 \text{ であれば, } u(\varphi, \ell) \leq u(\varphi, \ell) + \frac{\varepsilon}{|a_q(\varphi)|} = u(\varphi + \delta\varphi, \ell)$$

$$(iv-2) \quad \forall k \in L - \{\ell\}, u(\varphi, k) = u(\varphi + \delta\varphi, k)$$

が成り立ち、いずれの場合 (i) ~ (iv) でも、

$$\forall \varphi \in \Phi, \varphi \circledast \varphi' (\equiv \varphi + \delta\varphi \in \Phi). \quad (7.30)$$

(証明) (i) は場合 (5) を適用したものである。(ii) は場合 (4) を適用したものである。(iii) は場合 (5) を適用したものである。(iv) は場合 (4) を適用したものである。□

7.3 半順序関係 \circledast を反映する特徴情報量 $FI(\varphi)$

規格化条件式 (7.3) を満たすパターン $\varphi \in \Phi$ について、各閾値 (threshold value) $th(k)$ について、不等式 (2.4) の成立を要請し、非負量

$$FI(k) \equiv$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{4} \cdot \log_e \frac{1 - th^+(k)}{1 - u(\varphi, k)} & \text{if } 0 < th^+(k) < u(\varphi, k) \\ 0 & \text{if } th^+(k) = u(\varphi, k) \\ \frac{1}{4} \cdot \log_e \frac{th^+(k) - 0}{u(\varphi, k) - 0} & \text{if } th^+(k) > u(\varphi, k) \\ \frac{1}{4} \cdot \log_e \frac{0 - th^-(k)}{0 - u(\varphi, k)} & \text{if } th^-(k) < u(\varphi, k) \leq 0 \\ 0 & \text{if } th^-(k) = u(\varphi, k) \\ \frac{1}{4} \cdot \log_e \frac{th^-(k) - (-1)}{u(\varphi, k) - (-1)} & \text{if } u(\varphi, k) < th^-(k) < 0 \end{array} \right. \quad (7.31)$$

を用意し、その総和としての特徴情報量 (amount of feature information) と称される非負量

$$FI(\varphi) \equiv \sum_{k \in L} FI(\varphi, k) \tag{7.32}$$

を定義する。このとき、容易にその成立がわかる次の定理7.2から、各非負量 $FI(\varphi, k)$ 、その総和 $FI(\varphi)$ は、半順序関係 $\bullet\blacktriangleleft$ を反映する非負量であるといえよう。

[定理7.2] (特徴情報量 FI の最小値, 最大値, 増加性)

(i) (特徴情報量 FI の最小値)

$$\forall k \in L, u(\varphi, k) = th^-(k) \vee u(\varphi, k) = th^+(k) \Rightarrow FI(\varphi, k) = 0 = \inf_{\varphi \in \Phi} FI(\varphi, k). \tag{7.33}$$

(ii) (特徴情報量 FI の最大値)

$$\exists \ell \in L, [u(\eta, k) = 1 \vee u(\eta, k) = -1] \vee [\forall k \in L - \{\ell\}, u(\eta, k) = 0] \tag{7.34}$$

が成り立っていれば,

$$\forall m \in L, FI(\eta, m) = \infty = \sup_{\varphi \in \Phi} FI(\varphi, m) \tag{7.35}$$

(iii) (特徴情報量 FI の増加性)

$$\varphi \bullet\blacktriangleleft \eta \tag{7.36}$$

$$\Rightarrow \forall k \in L, FI(\varphi, k) \leq FI(\eta, k) \tag{7.37}$$

$$\Rightarrow FI(\varphi) \leq FI(\eta) \tag{7.38}$$

□

$\varphi, \eta \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ が2元関係 $\varphi \in \eta$ にあれば、 $\eta \in \Phi$ のほうが $\varphi \in \Phi$ よりより少ない段数で、RECOGNITRONの多段階想起認識過程が終了することが期待される。その理由は、 $\eta \in \Phi$ のほうが $\varphi \in \Phi$ より正規直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ 内の、より少ない個数のパターン形状素 ψ_ℓ の集合を用いて表されるからである。

上述の定理7.2によれば、 $\varphi, \eta \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ が不等式 (7.38) が成り立つ関係にあれば、 $\eta \in \Phi$ のほうが $\varphi \in \Phi$ より正規直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ 内の、より少ない個数のパターン形状素 ψ_ℓ の集合を用いて表されていると考えられ、 $\eta \in \Phi$ のほうが $\varphi \in \Phi$ よりより少ない段数で、RECOGNITRONの多段階想起認識過程が終了することが期待される。

8. 半順序 $\bullet\blacktriangleleft$ を単調変換する実数値特徴量 $u(\varphi, k)$ の組 $\vec{u}(\varphi) = \{u(\varphi, k) \mid k \in L\}$ の例 2

本章では、パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ から抽出される第 $k \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, k) \in R$ の2番目の例を示し、 Φ 上の定義2.2の半順序関係 $\bullet\blacktriangleleft$ を保存するパターン $\eta \in \Phi$ をパターン $\varphi \in \Phi$ に対し、具体的に構成し、半順序関係 $\varphi \bullet\blacktriangleleft \eta$ が成り立っていれば、不等式 $FI(\varphi) \leq FI(\eta)$ が成り立つような特徴情報量 $FI(\varphi)$ を定義する。

8.1 ユークリッド形ノルムによる規格化特徴量 $u(\varphi, k) \in R$

パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ から抽出される第 $k \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, k) \in R$ を

$$u(\varphi, k) =$$

$$\begin{cases} 0 \cdots \forall k \in L, a_k = 0 \text{ のとき} \\ \frac{a_k(\varphi)}{[\sum_{\ell \in L} a_\ell(a)^2]^{1/2}} \cdots \exists k \in L, a_k \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (8.1)$$

と定義する．原パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ と axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半, 並びに, (iv) を満たすそのモデル $T\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ との関係を表す等式 (4.3) を満たす定数 $C(\varphi)$ は,

$$C(\varphi) = 0 \vee C(\varphi) = \frac{1}{[\sum_{\ell \in L} a_\ell(a)^2]^{1/2}} \quad (8.2)$$

と選ばれていることがわかる．式 (8.2) に登場している定数 $[\sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi)^2]^{1/2}$ は, 各 $a_\ell(\varphi)$ を成分とするベクトルのユークリッド形ノルムであることに注意する．定数 $[\sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi)^2]^{1/2}$ は, 各 $a_\ell(\varphi)$ を1次結合係数とするベクトル $\sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi) \cdot \psi_\ell$ の定数倍が, 各 $\psi_q \in \mathfrak{H}(q \in \mathcal{Q})$ を直交軸とする座標系の, 半径0 或いは1の球面上の点にするための規格化定数として使われていることに注意する．

以後, パターンから抽出される式 (8.1) の特徴量 $u(\varphi, k)$ の組 $\bar{u}(\varphi)$ は, 規格化条件

$$\forall k \in L, -1 \leq u(\varphi, k) \leq +1 \wedge \sum_{k \in L} u(\varphi, k)^2 \in \{1, 0\} \quad (8.3)$$

を満たす．このとき, 各特徴量 $u(\varphi, k)$ の絶対値 $|u(\varphi, k)|$ が最小値0 或いは, 最大値1に近い値をとる程, 曖昧さが少ないと言え, 2元関係は \blacklozenge 曖昧さに関する半順序関係と称されてよい．パターン $\varphi_t \in \Phi$ の, 上に有限な列 $\{\varphi_t\}_{t=0,1,2,\dots}$ の極限は曖昧さが減少するにつれて, 2元関係 \blacklozenge の, 式(7.4)の上限, 即ち, 最小上界を満たすパターン $\eta \in \Phi$ に近づくと見えよう．

8.2 半順序関係 \blacklozenge を保存するパターン変形 $\varphi \rightarrow \varphi' \equiv \varphi + \delta\varphi$, where $\delta\varphi \equiv \varepsilon \cdot \psi_\ell$

本節では, 先ず, 6章のパターン変形式 (6.7) について, 式 (8.1) の特徴量 $u(\varphi, k)$ がどのように変動するかを検討するため, 以下の解析を用意しよう．つまり, 式 (6.7) のパターン変形式 (7.5) について, $\varphi \blacklozenge \varphi'$ というように定義 (2.2) の半順序関係 \blacklozenge が保存されることを指摘する定理8.1を証明するために, 以下の解析を用意する．

$\{x_k \mid k \in L\}$ を $|L|$ 個の実数値変数 x_k の組とし, $\{x_k \mid k \in L\}$ の関数

$$F_k \equiv \begin{cases} \frac{x_k}{\sqrt{\sum_{k \in L} x_k^2}} \cdots \sqrt{\sum_{k \in L} x_k^2} > 0 \text{ のとき} \\ 0 \cdots \sqrt{\sum_{k \in L} x_k^2} = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (8.4)$$

を定義する．

$$[\forall k \in L, -1 \leq F_k \leq +1] \wedge \sum_{k \in L} F_k^2 \in \{0, 1\} \quad (8.5)$$

が成り立っていることに注意する．

各の増減関係を調べよう．2つの場合 (1), (2) に分けられる．

$$\text{場合 (1) } \forall m \in L - \{\ell\}, \frac{\partial F_m}{\partial x_\ell} = -F_m \cdot F_\ell \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_{k \in L} x_k^2}} \quad (8.6)$$

よって,

$$\text{場合 (1-1)} \quad x_m \cdot x_\ell > 0 \Rightarrow \frac{\partial F_m}{\partial x_\ell} < 0 \tag{8.7}$$

$$\text{場合 (1-2)} \quad x_m \cdot x_\ell = 0 \Rightarrow \frac{\partial F_m}{\partial x_\ell} = 0 \tag{8.8}$$

$$\text{場合 (1-3)} \quad x_m \cdot x_\ell < 0 \Rightarrow \frac{\partial F_m}{\partial x_\ell} > 0 \tag{8.9}$$

$$\text{場合 (2)} \quad \frac{\partial F_\ell}{\partial x_\ell} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k \in L} x_k^2}} \cdot [1 - F_\ell^2] \tag{8.10}$$

ここで,

$$\forall k \in L, 0 \leq F_k^2 \leq 1 \tag{8.11}$$

が成り立っている.

$$x_\ell \neq 0 \text{ のとき, } F_\ell^2 < 1 \Leftrightarrow \exists k \in L - \{\ell\}, x_k \neq 0 \tag{8.12}$$

$$x_\ell \neq 0 \text{ のとき, } F_\ell^2 = 1 \Leftrightarrow \forall k \in L - \{\ell\}, x_k = 0 \tag{8.13}$$

であることに注意する.

よって,

$$\frac{\partial F_\ell}{\partial x_\ell} \geq 0, \text{ それ故, } x_\ell \neq 0 \text{ のとき, } \exists k \in L - \{\ell\}, x_k \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial F_\ell}{\partial x_\ell} > 0 \tag{8.14}$$

が成り立つ. □

上述の解析から, 次の定理8.1が成り立つことがわかる.

【定理8.1】 (半順序定理2)

式 (7.5) のパターン変形 $\varphi \rightarrow \varphi' \equiv \varphi + \delta\varphi$, where $\delta\varphi \equiv \varepsilon \cdot \psi_\ell$ を考えよう.

上述の場合 (1), (2) において, 各 $x_k (k \in L)$ を式 (7.29) の如くおいたとき, 上述の場合 (1), (2) はすべての場合をつくしている. 規格化条件式 (8.3) を満たすパターン $\varphi \in \Phi$ について, 各閾値 $th^-(k), th^+(k) (k \in L)$ について, 不等式 (2.4) の成立を要請する. このとき, 次の (i)~(iv) が成立する.

(i) $u(\varphi, \ell) \leq th^-(\ell)$ のとき

場合 (2) より,

$$u(\varphi + \delta\varphi, \ell) < u(\varphi, \ell) \leq th^-(\ell)$$

は成立しない.

$$u(\varphi + \delta\varphi, \ell) = u(\varphi, \ell) \leq th^-(\ell)$$

が成立するのは, 2式 (8.10), (8.11), (8.13) より,

$$u(\varphi, \ell) = -1, \text{ つまり, } a_\ell(\varphi) < 0 \wedge [\forall k \in L - \{\ell\}, a_k(\varphi) = 0]$$

のときに限る.

場合 (1-2) が生じ,

$$\forall k \in L - \{\ell\}, u(\varphi + \delta\varphi, k) = u(\varphi, k) = 0$$

が成立する.

(ii) $th^-(\ell) \leq u(\varphi, \ell) \leq 0$ のとき

$$u(\varphi + \delta\varphi, \ell) \leq 0 \text{ であるとしよう.}$$

$$u(\varphi, \ell) < 0$$

であれば, 式 (8.14) により,

$$u(\varphi, \ell) \leq u(\varphi + \delta\varphi, \ell)$$

が成立する。場合 (1-1), (1-2) より,

$$\forall k \in L - \{\ell\}, u(\varphi, k) \geq u(\varphi + \delta\varphi, k)$$

が成立する。

(iii) $0 \leq u(\varphi, \ell) \leq th^+(\ell)$ のとき

$$0 \leq u(\varphi + \delta\varphi, \ell) \text{ であるとしよう.}$$

場合 (2) より,

$$u(\varphi + \delta\varphi, \ell) < u(\varphi, \ell) \leq th^-(\ell)$$

は成立しない。

$$u(\varphi + \delta\varphi, \ell) = u(\varphi, \ell) \leq th^-(\ell)$$

が成立するのは, 2式 (8.10), (8.11), (8.13) より,

$$u(\varphi, \ell) = +1, \text{ つまり, } a_\ell(\varphi) > 0 \wedge [\forall k \in L - \{\ell\}, a_k(\varphi) = 0]$$

のときに限る。

場合 (1-2) が生じ,

$$\forall k \in L - \{\ell\}, u(\varphi + \delta\varphi, k) = u(\varphi, k) = 0$$

が成立する。

(iv) $th^+(\ell) \leq u(\varphi, \ell)$ のとき

$$u(\varphi, \ell) > 0$$

であれば, 式 (8.14) により,

$$u(\varphi, \ell) \leq u(\varphi + \delta\varphi, \ell)$$

が成立する。場合 (1-1), (1-2) より,

$$\forall k \in L - \{\ell\}, u(\varphi, k) \geq u(\varphi + \delta\varphi, k)$$

が成立する。

よって, いずれの場合 (i) ~ (iv) でも,

$$\forall \varphi \in \Phi, \Phi \bullet \varphi' (\equiv \varphi + \delta\varphi, k) \tag{7.30}$$

(証明) 明らか。 □

8.3 半順序関係 \bullet を反映する特徴情報量 $FI(\varphi)$

規格化条件式 (8.3) を満たすパターン $\varphi \in \Phi$ について, 各閾値 $th^-(k), th^+(k) (k \in L)$ について, 不等式 (2.4) の成立を要請し, 式 (7.31) の非負量 $FI(k)$ を用意し, その総和としての特徴情報量と称される式 (7.32) の非負量 $FI(\varphi) \equiv \sum_{k \in L} FI(\varphi, k)$ を定義する。このとき, 容易にその成立がわかる定理7.2から, 各非負量 $FI(\varphi, k)$, その総和 $FI(\varphi)$ は, 半順序関係 \bullet を反映する非負量であるといえよう。

9. 半順序 \bullet を単調変換する実数値特徴量 $\bar{u}(\varphi, k)$ の組 $u(\varphi) = \{u(\varphi, k) \mid k \in L\}$ の例3

本章では, パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{S}$ から抽出される第 $k \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, k) \in R$ の3番目の例を示し, Φ 上の定義2.2の半順序関係 \bullet を保存するパターン $\eta \in \Phi$ をパターン $\varphi \in \Phi$ に対し, 具体的に構成し, 半順序関係 $\varphi \bullet \eta$ が成り立っていれば, 不等式 $FI(\varphi) \leq FI(\eta)$ が成り立つような特徴情報量

$FI(\varphi)$ を定義する.

9.1 平面形ノルムによる規格化特徴量 $u(\varphi, k) \in R$

次の定理9.1は文献 [21] の付録4, 定理[A4.1] であり, そこで証明されている.

[定理9.1] (パターンの平面化定理)

可分なヒルベルト空間 \mathfrak{H} の元としての有限個のパターン $\eta_q \in \mathfrak{H}(q \in Q)$ からなる集合

$$\eta_q \in \mathfrak{H}, q \in Q \tag{9.1}$$

は, \mathfrak{H} の1次独立な系としよう. 各 $\eta_q \in \mathfrak{H}(q \in Q)$ を頂点とする多角形を含む平面上の任意の点 $\varphi \in \mathfrak{H}$ は, 等式

$$\sum_{q \in Q} a_q = 1 \tag{9.2}$$

を満たす実定数 $a_q (q \in Q)$ を1次結合係数とする1次結合

$$\varphi = \sum_{q \in Q} a_q \cdot \eta_q \in \mathfrak{H} \tag{9.3}$$

として表される. □

上述の定理9.1を考慮し, パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ から抽出される第 $k \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, k) \in R$ を

$$u(\varphi, k) = \begin{cases} 0 \cdots \forall k \in L, a_k = 0 \text{ のとき} \\ \frac{a_k(\varphi)}{\sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi)} \cdots \exists k \in L, a_k \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{9.4}$$

と定義する. 原パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ と axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半, 並びに, (iv) を満たすそのモデル $T\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ との関係を表す等式 (4.3) を満たす定数 $C(\varphi)$ は,

$$C(\varphi) = 0 \vee C(\varphi) = \frac{1}{\sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi)} \tag{9.5}$$

と選ばれていることがわかる. 式 (9.5) に登場している定数 $\sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi)$ は, 各 $a_\ell(\varphi)$ を1次結合係数とするベクトル $\sum_{k \in L} a_k(\varphi) \cdot \psi_k$ の定数倍が, 各 $\psi_k \in \mathfrak{H}(q \in Q)$ を頂点とする多角形を含む平面上の点にするための規格化定数として使われていることに注意する.

以後, パターンから抽出される式 (9.4) の特徴量 $u(\varphi, k)$ の組 $\vec{u}(\varphi)$ は, 規格化条件

$$\forall k \in L, u(\varphi, k) \in R \wedge \sum_{k \in L} u(\varphi, k) \in \{1, 0\} \tag{9.6}$$

を満たす. このとき, 各特徴量 $u(\varphi, k)$ の絶対値 $|u(\varphi, k)|$ が最小値0或いは, 最大値1に近い値をとる程, 曖昧さが少ないと言え, 2元関係 \bullet_c は曖昧さに関する半順序関係と称されてよい. パターン $\varphi_t \in \Phi$ の, 上に有界な列 $\{\varphi_t\}_{t=0,1,2,\dots}$ の極限は曖昧さが減少するにつれて, 2元関係 \bullet_c の上限, 即ち, 最小上界

$$\exists k \in L, u(\eta, k) = 1 \wedge [\forall \ell \in L - \{k\}, u(\eta, \ell) = 0] \tag{9.7}$$

を満たすパターン $\eta \in \Phi$ に近づくと言えよう.

9.2 半順序関係 \bullet_c を保存するパターン変形 $\varphi \rightarrow \varphi' \equiv \varphi + \delta\varphi$, where $\delta\varphi \equiv \varepsilon \cdot \psi_t$

本節では, 先ず, 6章のパターン変形式 (6.7) について, 式 (9.4) の特徴量 $u(\varphi, k)$ がどのよう

に変動するかを検討するため、以下の解析を用意しよう。つまり、式 (6.7) のパターン変形式 (7.5) について、 $\varphi \circledast \varphi'$ というように定義 (2.2) の半順序関係 \circledast が保存されることを指摘する定理9.1を証明するために、以下の解析を用意する。

$\{x_k \mid k \in L\}$ を $|L|$ 個の実数値変数 x_k の組とし、 $\{x_k \mid k \in L\}$ の関数

$$F_k \equiv \begin{cases} \frac{x_k}{\sum_{k \in L} x_k} \cdots \sum_{k \in L} x_k > 0 \text{ のとき} \\ 0 \cdots \sum_{k \in L} x_k = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (9.8)$$

を定義する。

$$\sum_{k \in L} F_k = 0 \cdots \sum_{k \in L} x_k = 0 \text{ のとき} \quad (9.9)$$

$$\sum_{k \in L} F_k \in \{0, 1\} \quad (9.10)$$

が成り立っていることに注意する。ここに、

$$F_\ell = \begin{cases} \frac{1}{1 + \sum_{k \in L - \{\ell\}} \frac{x_k}{x_\ell}} = 1 \cdots x_\ell \neq 0 \wedge [\forall k \in L - \{\ell\}, x_k = 0] \text{ のとき} \end{cases} \quad (9.11)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{1 + \sum_{k \in L - \{\ell\}} \frac{x_k}{x_\ell}} > 1 \cdots x_\ell \neq 0 \wedge \sum_{k \in L - \{\ell\}} \frac{x_k}{x_\ell} < 0 \wedge \sum_{k \in L - \{\ell\}} \frac{x_k}{x_\ell} > -1 \text{ のとき} \end{cases} \quad (9.12)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{1 + \sum_{k \in L - \{\ell\}} \frac{x_k}{x_\ell}} = -1 \cdots x_\ell \neq 0 \wedge \sum_{k \in L - \{\ell\}} \frac{x_k}{x_\ell} = -2 \text{ のとき} \end{cases} \quad (9.13)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{1 + \sum_{k \in L - \{\ell\}} \frac{x_k}{x_\ell}} < -1 \cdots x_\ell \neq 0 \wedge \sum_{k \in L - \{\ell\}} \frac{x_k}{x_\ell} > -2 \wedge \sum_{k \in L - \{\ell\}} \frac{x_k}{x_\ell} < -1 \text{ のとき} \end{cases} \quad (9.14)$$

$$\begin{cases} 0 \cdots x_\ell = 0 \wedge [\exists k \in L - \{\ell\}, x_k \neq 0] \text{ のとき} \end{cases} \quad (9.15)$$

であり、更に

$$0 < F_k = \frac{1}{1 + \sum_{k \in L - \{\ell\}} \frac{x_k}{x_\ell}} < 1 \cdots x_\ell \neq 0 \wedge \sum_{k \in L - \{\ell\}} \frac{x_k}{x_\ell} > 0 \text{ のとき} \quad (9.16)$$

$$-1 < F_k = \frac{1}{1 + \sum_{k \in L - \{\ell\}} \frac{x_k}{x_\ell}} < 0 \cdots x_\ell \neq 0 \wedge \sum_{k \in L - \{\ell\}} \frac{x_k}{x_\ell} < -2 \text{ のとき} \quad (9.17)$$

である。不等式

$$\forall k \in L, -1 \leq F_k \leq +1 \text{ が成り立っていない} \quad (9.18)$$

ことに注意する。何故ならば、

$$\textcircled{1} \sum_{k \in L} x_k \neq 0 \text{ のとき, } F_\ell = \frac{x_\ell}{\sum_{k \in L} x_k} = -1 \Leftrightarrow 2x_\ell + \sum_{k \in L - \{\ell\}} x_k = 0 \quad (9.19)$$

$$\textcircled{2} \sum_{k \in L} x_k > 0 \text{ のとき, } F_\ell = \frac{x_\ell}{\sum_{k \in L} x_k} < -1 \Leftrightarrow 2x_\ell + \sum_{k \in L - \{\ell\}} x_k < 0 \quad (9.20)$$

$$\textcircled{3} \sum_{k \in L} x_k < 0 \text{ のとき, } F_\ell = \frac{x_\ell}{\sum_{k \in L} x_k} < -1 \Leftrightarrow 2x_\ell + \sum_{k \in L-\{\ell\}} x_k > 0 \quad (9.21)$$

$$\textcircled{4} \sum_{k \in L} x_k > 0 \text{ のとき, } F_\ell = \frac{x_\ell}{\sum_{k \in L} x_k} > -1 \Leftrightarrow 2x_\ell + \sum_{k \in L-\{\ell\}} x_k > 0 \quad (9.22)$$

$$\textcircled{5} \sum_{k \in L} x_k < 0 \text{ のとき, } F_\ell = \frac{x_\ell}{\sum_{k \in L} x_k} > -1 \Leftrightarrow 2x_\ell + \sum_{k \in L-\{\ell\}} x_k < 0 \quad (9.23)$$

であるから、

以上を考慮して、次の場合 (1)、場合 (2) がいえる。

$$\text{場合 (1) } \forall m \in L-\{\ell\}, \frac{\partial F_m}{\partial x_\ell} = -\frac{x_m}{[\sum_{k \in L} x_k]^2} = -F_m \cdot \frac{1}{\sum_{k \in L} x_k} \quad (9.24)$$

を得、よって、

任意の $m \in L-\{\ell\}$ について

$$\text{場合 (1-1) } \sum_{k \in L} x_k \neq 0 \wedge x_m > 0 \Rightarrow \frac{\partial F_m}{\partial x_\ell} < 0 \quad (9.25)$$

$$\text{場合 (1-2) } \sum_{k \in L} x_k \neq 0 \wedge x_m = 0 \Rightarrow \frac{\partial F_m}{\partial x_\ell} = 0 \quad (9.26)$$

$$\text{場合 (1-3) } \sum_{k \in L} x_k \neq 0 \wedge x_m < 0 \Rightarrow \frac{\partial F_m}{\partial x_\ell} > 0 \quad (9.27)$$

$$\text{場合 (2) } \frac{\partial F_\ell}{\partial x_\ell} = \frac{1}{\sum_{k \in L} x_k} \cdot [1 - F_\ell] = \frac{\sum_{k \in L-\{\ell\}} x_k}{[\sum_{k \in L} x_k]^2} \quad (9.28)$$

を得、よって、

$$\frac{\partial F_\ell}{\partial x_\ell} \begin{cases} > 0 \cdots \sum_{k \in L} x_k \neq 0 \wedge \sum_{k \in L-\{\ell\}} x_k > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (9.29)$$

$$\begin{cases} = 0 \cdots \sum_{k \in L} x_k \neq 0 \wedge \sum_{k \in L-\{\ell\}} x_k = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (9.30)$$

$$\begin{cases} < 0 \cdots \sum_{k \in L} x_k \neq 0 \wedge \sum_{k \in L-\{\ell\}} x_k < 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (9.31)$$

が成り立つ。 □

上述の解析から、次の定理9.2が成り立つことがわかる。

[定理9.2] (半順序定理3)

式 (7.5) のパターン変形 $\varphi \rightarrow \varphi' \equiv \varphi + \delta\varphi$, where $\delta\varphi \equiv \varepsilon \cdot \psi_\ell$ を考えよう。

上述の場合 (1)、(2) において、各 x_k ($k \in L$) を式 (7.29) の如くおいたとき、上述の場合 (1)、(2) はすべての場合をつくしている。規格化条件式 (9.6) を満たすパターン $\varphi \in \Phi$ について、各閾値 $th^-(k), th^+(k)$ ($k \in L$) について、不等式 (2.4) の成立を要請する。このとき、次の (i) ~ (iv) が成立する。

まず、任意の $k \in L-\{\ell\}$ について、場合 (1-1)、場合 (1-2)、場合 (1-3) が生じ、

(a) $u(\varphi, k) \leq th^-(k)$ のとき

$u(\varphi + \delta\varphi, k) > u(\varphi, k)$ が生じてしまい、これは不都合である。

(b) $th^-(k) \leq u(\varphi, k) \leq 0$ のとき

$u(\varphi + \delta\varphi, k) > u(\varphi, k)$ が生じる。

(c) $0 \leq u(\varphi, k) \leq th^+(k)$ のとき

$u(\varphi + \delta\varphi, k) < u(\varphi, k)$ が生じる。

(d) $th^+(k) \leq u(\varphi, k)$ のとき

$u(\varphi + \delta\varphi, k) < u(\varphi, k)$ が生じてしまい、これは不都合である。

(i) $u(\varphi, \ell) \leq th^-(\ell)$ のとき

場合 (2) より, $\sum_{k \in L - \{\ell\}} a_k(\varphi) \leq a_\ell(\varphi)$ であれば,

$$u(\varphi + \delta\varphi, \ell) \leq u(\varphi, \ell) \leq th^-(\ell)$$

が成立する。

結局, 任意の $k \in L - \{\ell\}$ について, (b), 或いは, (c) の場合が生じれば, $\varphi \bullet \varphi' (\equiv \varphi + \delta\varphi \in \Phi)$.

(ii) $th^-(\ell) \leq u(\varphi, \ell) \leq 0$ のとき

$u(\varphi + \delta\varphi, \ell) \leq 0$ であるとしよう。

$$\sum_{k \in L} a_k(\varphi) \geq a_\ell(\varphi)$$

であれば,

$$u(\varphi, \ell) \leq u(\varphi + \delta\varphi, \ell)$$

が成立する。

結局, 任意の $k \in L - \{\ell\}$ について, (b), 或いは, (c) の場合が生じれば, $\varphi \bullet \varphi' (\equiv \varphi + \delta\varphi \in \Phi)$.

(iii) $0 \leq u(\varphi, \ell) \leq th^+(\ell)$ のとき

$0 \leq u(\varphi + \delta\varphi, \ell)$ であるとしよう。

$$\sum_{k \in L} a_k(\varphi) \leq a_\ell(\varphi)$$

であれば,

$$u(\varphi + \delta\varphi, \ell) \leq u(\varphi, \ell)$$

が成立する。

結局, 任意の $k \in L - \{\ell\}$ について, (b), 或いは, (c) の場合が生じれば, $\varphi \bullet \varphi' (\equiv \varphi + \delta\varphi \in \Phi)$.

(iv) $th^+(\ell) \leq u(\varphi, \ell)$ のとき

$u(\varphi, \ell) > 0$

であれば,

$$\sum_{k \in L} a_k(\varphi) \geq a_\ell(\varphi)$$

であれば,

$$(\varphi, \ell) \leq u(\varphi + \delta\varphi, \ell)$$

が成立する。

結局, 任意の $k \in L - \{\ell\}$ について, (b), 或いは, (c) の場合が生じれば, $\varphi \bullet \varphi' (\equiv \varphi + \delta\varphi \in \Phi)$.

(証明) 明らか. □

9.3 半順序関係 \bullet を反映する特徴情報量 $FI(\varphi)$

規格化条件式 (9.6) を満たすパターン $\varphi \in \Phi$ について、各閾値 $th^-(k), th^+(k) (k \in L)$ について、不等式 (2.4) の成立を要請し、式 (7.31) の非負量 $FI(k)$ を用意し、その総和としての特徴情報量と称される式 (7.32) の非負量 $FI(\varphi) \equiv \sum_{k \in L} FI(\varphi, k)$ を定義する。このとき、容易にその成立がわかる定理7.2から、各非負量 $FI(\varphi, k)$ 、その総和 $FI(\varphi)$ は、半順序関係 \bullet を反映する非負量であるといえよう。

10. 結び

本研究の3定理7.1, 8.1, 9.2を粗略に説明すれば、次のようになる：
パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{P}$ の、式 (3.7) の直交1次展開

$$\varphi = \sum_{k \in L} a_k(\varphi) \cdot \psi_k + \varphi_{\perp}$$

に注目し、任意であるが固定した $\ell \in L$ を選定した後、 $\varphi \in \Phi$ の変形パターン $\varphi' \equiv \varphi + \delta\varphi \in \Phi$ の微小変形分 $\delta\varphi$ として、 ε を十分小さな実定数とし、

$$\delta\varphi = \varepsilon \cdot \psi_{\ell}$$

を選んだ。1次結合係数 $a_{\ell}(\varphi)$ が正のとき増大し、1次結合係数 $a_{\ell}(\varphi)$ が負のとき減少すれば、かつ、任意の $k \in L - \{\ell\}$ について、1次結合係数 $a_k(\varphi)$ が正のとき負にならない範囲で減少し、1次結合係数 $a_k(\varphi)$ が負のとき正にならない範囲で増加すれば、 $\varphi \bullet \varphi' (\equiv \varphi + \delta\varphi \in \Phi)$ が成立するという常識的な結論が得られた。□

2つのパターン $\varphi, \eta \in \Phi \subset \mathfrak{P}$ が2元関係 $\varphi \bullet \eta$ にあれば、 $\eta \in \Phi$ のほうが $\varphi \in \Phi$ よりより少ない段数で、RECOGNITRONの多段階想起認識過程が終了することが期待される。その理由は、 $\eta \in \Phi$ のほうが $\varphi \in \Phi$ より正規直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ 内の、より少ない個数のパターン形状素 ψ_{ℓ} の集合を用いて表されるからである。本研究意欲はこの事実から生まれた。

パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{P}$ から抽出される第 $k \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, k)$ を導入し、axiom 1の(i), (ii), (iii)の3後半、並びに、(iv)を、を満たす写像 T の出力であるパターンモデル $T\varphi$ の形式として、正規直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ による1次形式 (抽出された各特徴量 $u(\varphi, k) (k \in L)$ を1次展開係数に持つ、式 (4.2) の構造形式

$$T\varphi = \sum_{k \in L} u(\varphi, k) \cdot \psi_k$$

が考察の対象とされた。同じ意味を表すのに見かけ上異なる同値ないくつかのパターンが存在するから、このようなパターンに同値なパターンがパターン φ のパターンモデル $T\varphi$ である。事実、式 (5.2) の等式

$$\forall k \in L, u(T\varphi, k) = u(\varphi, k)$$

が成立し、このように、パターンモデル $T\varphi$ は原パターン φ と同じ特徴量の、式 (2.2) の組

$$\vec{u}(\varphi) = \{u(\varphi, k) | k \in L\}$$

を備えたパターンである。

パターン集合 Φ 上の、式 (2.3) の同値関係 (抽出される特徴量間に等号関係が存在するという2パターン $\varphi, \eta \in \Phi$ 間の関係) \sim を導入した後、正規直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ 内の第 $\ell \in L$ 番目のパターン形状

素 ψ_k の定数倍 $\delta\varphi \equiv \varepsilon \cdot \psi_k$ だけ，パターン $\varphi \in \Phi$ を $\varphi' \equiv \varphi + \delta\varphi = \varphi + \varepsilon \cdot \psi_k$ へと変形させる操作がパターン集合 Φ 上の，式(2.5)の半順序 \bullet (抽出される特徴量間に大小関係が存在するという2パターン $\varphi, \eta \in \Phi$ 間の関係 $\varphi \bullet \eta$)を単調に保つ特徴量 $u(\varphi, k)$ の組 $\vec{u}(\varphi)$ の3例について，半順序 \bullet を単調に保つ諸条件が明らかにされた。

半順序関係 \bullet を反映する特徴情報量 $FI(\varphi)$ も提案されたが，定理7.2, (iii)の対偶不等式 $FI(\varphi) \leq FI(\eta)$ が成立しなければ，半順序関係 $\varphi \bullet \eta$ は成立しない。を適用すれば，2パターン $\varphi, \eta \in \Phi$ 間に半順序関係 $\varphi \bullet \eta$ が成立しないかどうかの判定ができて便利である。

半順序関係 \bullet の関係に，2つのパターン $\varphi, \eta \in \Phi$ があれば，その2つのパターンモデル $T\varphi, T\eta \in \Phi$ も同様な関係にあり，逆も成り立つことも示されている。

パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{P}$ から抽出される第 $k \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, k) \in R$ の組 $\vec{u}(\varphi)$ として代表的な3種類を選び，解析を行ったが，他の $\vec{u}(\varphi)$ ，例えば， $\vec{u}(\varphi)$ が離散化されている場合について同様な解析をすることが残されている。また，系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ として正規直交系を選んだが，より一般的な1次独立な系を選び，同様な解析をすることが望まれる。

文 献

- [1] 鈴木昇一：“認識工学”，柏書房，Feb.1975
- [2] 鈴木昇一：“ニューラルネットの新数理”，近代文芸社，Sept.1996
- [3] 鈴木昇一：“パターン認識問題の数理的一般解決”，近代文芸社，June 1997
- [4] 鈴木昇一：“認識知能情報論の新展開”，近代文芸社，Aug.1998
- [5] 鈴木昇一：“パターンのエントロピーモデル”，電子情報通信学会論文誌(D-II)，vol.J77-D-II，no.11，pp.2220-2238，Nov.1994
- [6] 太原育夫：“人工知能の基礎”，近代科学社，Sept.1988
- [7] 鈴木昇一：“測度的不変量検出形認識系の構成理論”，電子(情報)通信学会論文誌(D)，vol.55-D，no.8，pp.531-538，Aug.1972
- [8] 鈴木昇一：“画像情報量とその手書き漢字への応用”，画像電子学会誌，vol.4，no.1，pp.4-12，Apr.1975
- [9] 鈴木昇一：“パターン認識における構造化モデルの4性質とその応用”，電子(情報)通信学会論文誌(D)，vol.J60-D，no.9，pp.710-717，Sept.1977
- [10] 鈴木昇一：“抽出された特徴による手書き漢字構造の再生”，情報処理(情報処理学会誌)，vol.18，no.11，pp.1115-1122，Nov.1977
- [11] 鈴木昇一：“パターンのエントロピーモデル”，電子情報通信学会論文誌(D-II)，vol.J77-D-II，no.11，pp.2220-2238，Nov.1994
- [12] 鈴木昇一：“連想形記憶器MEMOTRONと日本語母音系列の再生に関する計算機シミュレーション”，情報研究(文教大学情報学部)，no.7，pp.14-29，Dec.1986
- [13] 鈴木昇一：“構造受精法と日本語単独母音の認識”，情報研究(文教大学情報学部)，no.18，pp.17-51，Dec.1997
- [14] 鈴木昇一：“パターン認識の数学的理論”，電子情報通信学会技術研究報告[パターン認識と学習，パターン認識と理解]，PRL84-6(第1部)，PRL84-30，PRL84-38，PRL85-27，PRU86-8，PRU86-35，PRU86-69，PRU87-1，PRU87-28，PRU88-30，PRU89-1，PRU89-27，PRU89-40，PRU89-66，PRU89-

- 77, PRU89-136, PRU90-5, PRU90-15, PRU90-29, PRU90-125, PRU91-1, PRU91-29, PRU91-42, PRU92-1, PRU92-18, PRU92-25, PRU92-89, PRU92-102 (第28部), May 1984~Jan.1993
- [15] 鈴木昇一, 川俣博司, 大槻善樹: “風景画の理解に関するJAVA言語によるRECOGNITRONの計算機シミュレーション”, 情報研究 (文教大学・情報学部), no.27, pp.73-109, Mar.2002
- [16] 鈴木昇一: “JAVA言語で実装化された画像理解システムIUSの動作概要と, その稼動方法”, 情報研究 (文教大学・情報学部), no.28, pp.143-165, Dec.2002
- [17] 鈴木昇一, 川俣博司, 大槻善樹: “JAVA言語による計算機シミュレーションで生じた風景画像の理解場面での多段階連想形認識過程の異常現象”, 情報研究 (文教大学・情報学部), no.29, pp.123-166, July 2003
- [18] 鈴木昇一: “パターン系列 (動画像, 会話音声) の, dynamical systemによる連想理論と, 連想器SPATEMTRON”, 情報研究 (文教大学・情報学部), no.30, pp.139-186, Jan. 2004
- [19] Angus E.Taylor, David C.Lay: “Introduction to function analysis”, p.251, John Wiley Sons, Inc., New York, 1980
- [20] 向殿政男: “Fuzzy論理における2, 3の性質について”, 電子情報通信学会論文誌 (D), vol.58-D, no.3, pp.150-157, Mar.1975
- [21] 鈴木昇一: “界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の, 顔画像処理に関する計算機シミュレーション”, 情報研究 (文教大学・情報学部), no.23, pp.109-182, Mar.2003
- [22] Malay K.Pakhira, Sanghamitra Bandyopadhyay, Ujjwal Maulik: “Validity index for crisp and fuzzy clusters”, Pattern Recognition, vol.37, pp.487-501, 2004
- [23] 鈴木昇一: “パターン情報処理 (モデル構成作用素, 誤差逆伝播学習2層ニューラルネット) と論理的含意とによる非単調知識推論”, 情報研究 (文教大学情報学部), no.29, pp.75-121, July 2003
- [24] Miin-Shen Yang, Kuo-Lung Wu: “A similarity-based robust clustering method”, IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.26, no.4, pp.434-448, April 2004
- [25] Luciano da F.Costa, Sérgio F.dos Reis, Renata A.T.Aranes, Ana C.R.Alves, GianCarlo Mutinari: “Biological shape analysis by digital curvature”, Pattern Recognition, vol.37, pp.515-524, 2004

付録A. SS-公理系 (axiom1~4) のaxiom 1 [3], [4], [14] を満たさなければならないパターン集合 Φ , モデル構成作用素 T の対 $[\Phi, T]$

本付録Aでは, 処理の対象となる問題のパターン φ の集合 Φ , モデル構成作用素 T について説明される. 対 $[\Phi, T]$ のみたされなければならないaxiom 1が説明される.

A1. axiom 1とパターン集合 Φ , モデル構成作用素 T

一般に, 処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ は或る可分な (separable) 一般抽象ヒルベルト空間 \mathfrak{H} の零元0を含む或る部分集合である. 例えば, $\bar{\eta}$ を η の複素共役として,

$$M : q \text{ 次元ユークリッド空間 } R^q \text{ の可測部分集合} \quad (\text{A1.1})$$

$$dm(x) : \text{正値ルベグ・スタイルチェス式測度} \quad (\text{A1.2})$$

$$x = \langle x_1, x_2, \dots, x_q \rangle \in M (\subseteq R^q) : \text{実数値 } q \text{ 変数の直交座標系} \quad (\text{A1.3})$$

を導入し, その内積 (q, η) , ノルム $\|\varphi\|$ を,

$$(\varphi, \eta) = \int_M dm(x) \varphi(x) \cdot \overline{\eta(x)} \quad (\text{A1.4})$$

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \quad (\text{A1.5})$$

とする線形空間（ベクトル空間）としての可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ の特別な場合として、

$$M = R^2 \text{ (2次元全平面)} \quad (\text{A1.6})$$

$$dm(x) = dm(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 dx_2 \quad (\text{A1.7})$$

を選ぶことができる。この可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(R^2; \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 dx_2)$ では、
 $T_t \varphi(x_1, x_2) = \varphi(e^{-t} \cdot x_1, e^{-t} \cdot x_2)$, $-\infty < t < +\infty$

$$\text{for any } \varphi \in \mathfrak{H} = L_2(R^2; \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 dx_2)$$

と定義される縮小・拡大の線形作用素 T_t ($-\infty < t < +\infty$) は、

$$\forall \varphi, \forall \eta \in \mathfrak{H} = L_2(R^2; \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 dx_2), (T_t \varphi, T_t \eta) = (\varphi, \eta)$$

が成立していることから、ユニタリ作用素であることがわかる。

このような Φ 、並びに、写像

$$T: \Phi \rightarrow \Phi \quad (\text{A1.8})$$

は次の axiom 1 を満たさなければならない。このとき、写像 T はモデル構成作用素 (model-construction operator) と呼ばれ、 $T\varphi \in \Phi$ は $\varphi \in \Phi$ の代りとなり得るという意味で、パターン $\varphi \in \Phi$ のモデル (model)、或いは、パターンモデルと呼ばれる。

下記の axiom 1 からわかるように、パターンモデル $T\varphi$ の集合

$$T \cdot \Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \quad (\text{A1.9})$$

は、原パターン φ の集合 Φ への埋込性

$$T \cdot \Phi \subset \Phi \quad (\text{A1.10})$$

を満たし、 Φ は原点 (=0) を始点とし、 Φ の任意の点を通る半直線を含むような集合、つまり、錐 (cone) であらねばならない。下記の式 (A1.14) による Φ の表示が正に Φ が錐であることを明らかにしている。

Axiom 1 を満たすパターン集合 Φ は実は、構成的集合 (constructible set) である。S.Suzuki は形式と意味とが互いに非分離であるようなパターンというものが満たされなければならない帰納的定義 (再帰的定義) から Φ の集合論的再帰領域方程式 (axiom 1 を満たす最小の Φ の表現式; set-theoretic reflective domain equation) を提案し、この方程式を解き、 Φ の構造、構成方法を明らかにしている (文献 [3] の 2.4 節、並びに、文献 [4] の 2.2 節)。その結果は次のとおりである：

パターンと判明している元の集合 (基本領域; basic domain) (axiom 1 の (axiom 1 の (i)) の前半から、 $0 \in \Phi_B$ を導入して、集合論的再帰領域方程式

$$\Phi = \Phi_B \cup T \cdot \Phi \cup R^{++} \cdot \Phi \quad (\text{A1.11})$$

ここに、

$$R^{++} : \text{正実数全体の集合} \quad (\text{A1.12})$$

$$R^{++} \cdot \Phi \equiv \{r^{++} \cdot \varphi \mid r^{++} \in R^{++}, \varphi \in \Phi\} \quad (\text{A1.13})$$

の解 Φ は

$$\Phi = R^{++} \cdot [\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B] \quad (\text{A1.14})$$

と表示される (文献 [3] の式 (2.56) を参照). Φ の表示式 (2.14) から, 明らかに, 2つの等式

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & T \cdot \Phi = T \cdot \Phi_B \subset \Phi \\ \therefore \quad & \text{axiom 1 の (ii), (iii) の 2 後半} \end{aligned} \quad (\text{A1.15})$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & R^{++} \cdot \Phi = \Phi \\ \therefore \quad & \text{axiom 1 の (ii) の後半} \end{aligned} \quad (\text{A1.16})$$

が成り立つ.

Axiom 1 (パターン集合 Φ とモデル構成作用素 T との対 $[\Phi, T]$ の満たすべき公理)

(i) (零元 0 の Φ -包含性と, 零元 0 の T -不動点性; fixed-point property of zero element under mapping T)

$$0 \in \Phi \wedge T0 = 0.$$

(ii) (Φ の錐性, T の正定数倍吸収性; cone property)

$$\forall \varphi \in \Phi, a \cdot \varphi \in \Phi \wedge T(a \cdot \varphi) = T\varphi$$

for any positive real number $a \in R^{++}$

(iii) (Φ の埋込性 (embeddedness) と, T のべき等性 (idempotency))

$$\forall k \in \Phi, T\varphi \in \Phi \wedge T(T\varphi) = T\varphi.$$

(iv) (写像 T の非零写像性; non-zero mapping property of T)

$$\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0. \quad \square$$

A2. 処理の対象となる問題のパターン φ の集合 Φ とモデル構成作用素 T との対 $[\Phi, T]$ の基本構成と, パターンモデル $T\varphi$ とパターン φ との間の同一知覚原理

原パターン $\varphi \in \Phi$ が如何なる意味を備えているか, つまり, φ が如何なる類概念 (category) を表しているかを決定する働きをもつのが, 認識システム RECOGNITRON である.

RECOGNITRON がモデル $T\varphi \in \Phi$ を見たり聞いたりしたならば ($T\varphi$ を感性的に受け取ったならば), 原パターン $\varphi \in \Phi$ と同じに見えたり聞こえたりすること (原パターン φ と錯覚し原パターン φ と同じように感性的に受容すること) だと, 解釈可能な対 $[\Phi, T]$ について説明しよう.

パターンモデル $T\varphi$ を出力する式 (A1.8) の写像 T に要求されるのは, 次の4性質①~④である:

① (零元不動点性; axiom 1 の (i))

$$\varphi = 0 \in \Phi \text{ については, } T\varphi = \varphi$$

② (正定数倍不変性; axiom 1 の (ii) の後半)

任意の正実定数に対し,

$$\forall \varphi \in \Phi, T(a \cdot \varphi) = T\varphi$$

③ (べき等性; axiom 1 の (iii) の後半)

$$\forall \varphi \in \Phi, T(T\varphi) = T\varphi$$

④ (非零写像性; axiom 1 の (iv))

$$\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0. \quad \square$$

上述の①~④は各々, 2.1節の axiom 1 の (i), (ii) の後半, (iii) の後半, (iv) である. 零元 $\varphi = 0 \in \Phi$ は背景も何も無いパターンである.

Φ は処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ であり, $T\varphi \in \Phi$ は $\varphi \in \Phi$ に対応するパターンモデルであって, 原パターン $\varphi \in \Phi$ と同じ空間 Φ に埋め込まれている. モデル $T\varphi$ は, $T\varphi \in \Phi$ を見たり聞いたりしたならば ($T\varphi$ を感性的に受け取ったならば), あたかも原パターン $\varphi \in \Phi$ かのよう

見えたり聞こえたりする（原パターン φ と錯覚し原パターン φ と同じように感性的に受容する）ようなものである（ $T\varphi$ と φ との間の同一知覚原理）．この同一知覚原理を達成するために，SS理論 [1]～[4]，[14]では，式(A1.8)の写像であるモデル構成作用素 T が導入され，対 $[\Phi, T]$ はA1章のaxiom 1を満たしていなければならないことになる．このとき，写像 T はモデル構成作用素と呼ばれ， $T\varphi \in \Phi$ は $\varphi \in \Phi$ の代りとなり得るという意味で，パターン $\varphi \in \Phi$ のパターンモデルと呼ばれる．

処理の対象とするパターン φ の集合 Φ は或る可分なヒルベルト空間 \mathfrak{H} の，零元 0 を含む或る部分集合であり，この Φ ，並びに，式(2.8)の写像 T の対 $[\Phi, T]$ は上記の4性質①～④ ((ii), (iii)の2後半，並びに(i), (iv))を含む形で，A1節のaxiom 1をみたさなければならない．

次の定理A.1は，axiom 1を満たす対 $[\Phi, T]$ を決定している．

[定理A.1] (パターン集合 Φ とモデル構成作用素 T との対 $[\Phi, T]$ の構成定理)

パターンと判明している φ の集合（基本領域） $\Phi_B (\ni 0)$ と，すべての正実定数の集合 R^{++} とを用意する．

式(A1.8)の写像 T がaxiom 1の(i), (ii), (iii)の3後半，並びに，(iv)を満たすとしよう．このとき，次の(イ)，(ロ)が成り立つ：

(イ) 処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ を，式(A1.14)の如く設定すれば，2式(A1.15)，(A1.16)が成立し，axiomの(i), (ii), (iii)の3前半を Φ は満たし，結局，対 $[\Phi, T]$ はaxiom 1を満たす．

(ロ) 逆に， $(0 \in) \Phi_B$ を部分集合に持つ Φ がaxiom 1の(i), (ii), (iii)の3前半を満たすとすれば，

$$\Phi \supseteq \Phi_B \cup R^{++} \cdot \Phi \cup T \cdot \Phi \tag{A2.1}$$

が成立するが，ここで，特に，包含式(A2.1)において等号が成立するような最小の Φ を採用すれば，つまり，領域方程式(A1.11)の成立を仮定すれば，axiom 1を満たす対 $[\Phi, T]$ の Φ は式(A1.14)のように表され，2式(A1.15)，(A1.16)も成立する．

(証明) (イ)は文献[B4]，付録1の定理A1.1である．(ロ)は文献[B3]，pp.64-66 (2.4節)で証明されている． □

付録B. モデル構成作用素 T ， \mathfrak{H} の1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ によって， 特徴抽出写像 u に意味づけられるパターン

本付録Bでは，任意に特徴抽出写像 u が与えられたとき，任意の(モデル構成作用素) T について， T -不変性が成立する特徴抽出写像 u' が得られることが示され，この u' を使って，axiom 1を満たす対 $[\Phi, T]$ が得られることが示される．処理の対象とする問題の，新しいパターン集合 Φ が得られる．

B1. 特徴抽出写像 u を使った対 $[\Phi, T]$ の構成

\mathfrak{H} を可分なヒルベルト空間とする．零元 0 を含む \mathfrak{H} の部分集合 $\Psi \subseteq \mathfrak{H}$ を選ぶ． $\Psi = \mathfrak{H}$ でもよい．

4条件 (axiom 1において $\Phi = \Psi$ とした場合のaxiom 1)

(1) (零元 0 の T -不動点性)

$$0 \in \Psi \wedge T0 = 0$$

(2) (T の正定数倍吸収性)

$$\forall \varphi \in \Psi, a \cdot \varphi \in \Psi \wedge T(a \cdot \varphi) = T\varphi \text{ for any positive real number } a$$

(3) (T のベキ等性)

$$\forall \varphi \in \Psi, T\varphi \in \Psi \wedge T(T\varphi) = T\varphi$$

(4) (T の非零写像性) $\exists \varphi \in \Psi, T\varphi \neq 0$

を満たす写像 $T: \Psi \rightarrow \Psi$ を用意する. \mathfrak{H} の 1 次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ を選び, 固定する. 特徴抽出写像

$$u: \Psi \times L \rightarrow Z \quad (\text{複素数全体の集合}) \quad (\text{B1.1})$$

が発見されたとする. $u(\eta, \ell) \in Z$ はパターン $\eta \in \Psi \subseteq \mathfrak{H}$ から抽出される第 $\ell \in L$ 番目の特徴量である.

$T\eta \in \Psi \subseteq \mathfrak{H}$ から抽出された特徴量 $u(T\eta, \ell)$ の組

$$\vec{u}(T\eta) \equiv \{u(T\eta, \ell) \mid \ell \in L\} \quad (\text{B1.2})$$

を持つパターンとして,

$$\varphi' \equiv \sum_{\ell \in L} u(T\eta, \ell) \cdot \psi_\ell \quad (\text{B1.3})$$

を導入する. φ' は, 写像 T と, \mathfrak{H} の 1 次独立な系と $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ によって, 特徴抽出写像 u を意味づけて得られるパターンである.

写像 u' を

$$\forall \eta \in \Psi, \forall \ell \in L, u'(\eta, \ell) = u(T\eta, \ell) \quad (\text{B1.4})$$

と定義すると, 上述の条件 (3) から, 次の定理 B.1 が成り立つ. 必ずしも, T の下で不変でない特徴抽出写像 u から, T の下で不変な特徴抽出写像

$$u': \Psi \times L \rightarrow Z \quad (\text{B1.5})$$

が得られたことに注意しておく.

[定理 B.1] (特徴抽出写像 u' の T -不変定理)

写像 u' の T -不変性

$$\forall \eta \in \Psi \subseteq \mathfrak{H}, \forall \ell \in L, u'(T\eta, \ell) = u'(\eta, \ell) \quad \because \text{条件 (3)} \quad (\text{B1.6})$$

が成り立つ. □

ここで,

$$\exists \eta \in \Psi \subseteq \mathfrak{H}, \varphi' \equiv \sum_{\ell \in L} u(T\eta, \ell) \cdot \psi_\ell \quad (\text{B1.7})$$

であるようなパターン $\varphi' \in \Psi \subseteq \mathfrak{H}$ のすべての集合を Φ' で表す:

$$\Phi' \equiv \{\varphi' \equiv \sum_{\ell \in L} u(T\eta, \ell) \cdot \psi_\ell \mid \eta \in \Psi \subseteq \mathfrak{H}\} \quad (\text{B1.8})$$

□

パターン集合 Φ' は, 各 a_ℓ を複素定数として, 1 次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ を固定して,

$$\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell \quad (\text{B1.9})$$

という線形 1 次結合を, 各 a_k を変えて得られる集合の部分集合である. 式 (A1.14) に倣って, 2 つの集合

$$R^{++} \cdot \Phi' \equiv \{a \cdot \varphi' \mid a \in R^{++}, \varphi' \in \Phi'\} \quad (\text{B1.10})$$

$$R^{++} \cdot T\Phi' \equiv \{a \cdot T\varphi' \mid a \in R^{++}, \varphi' \in \Phi'\} \quad (\text{B1.11})$$

を導入し, 集合 $\Phi \subset \mathfrak{H}$ を

$$\Phi \equiv R^{++} \cdot [\Phi' \cup T\Phi'] = R^{++} \cdot \Phi' \cup R^{++} \cdot T\Phi' \quad (\text{B1.12})$$

と定義する. ここに, R^{++} はすべての正の実定数のなす集合である.

$$\begin{aligned} \forall \varphi = a \cdot T\varphi' \in R^{++} \cdot T\Phi' \subset \Phi, T\varphi &= T(a \cdot T\varphi') \\ &= T(T\varphi') \quad \because \text{条件 (2)} \\ &= T\varphi' \quad \because \text{条件 (3)} \end{aligned}$$

が成立し,

$$T \cdot R^{++} \cdot T\Phi' = T \cdot \Phi' \tag{B1.13}$$

が成り立つことがわかる. 同様に,

$$T \cdot \Phi = T \cdot \Phi' \tag{B1.14}$$

$$R^{++} \cdot \Phi = \Phi \tag{B1.15}$$

も成立する.

式 (B1.15) の成立は Φ の設定式 (B1.12) から明らかである.

式 (B1.14) の成立については,

$$T \cdot \Phi = T \cdot R^{++} \cdot \Phi' \cup T \cdot R^{++} \cdot T \cdot \Phi' \quad \because \text{式 (B1.12)} \tag{B1.16}$$

$$= T \cdot \Phi' \cup T \cdot T \cdot \Phi' \quad \because \text{条件 (2)}$$

$$= T \cdot \Phi' \cup T \cdot \Phi' \quad \because \text{条件 (3)}$$

$$= T \cdot \Phi'.$$

と示された.

このとき, 次の定理B.2が成立し, 処理の対象とする問題のパターン $\eta \in \mathfrak{H}$ を, 3要素 $T, \{\psi_\ell\}_{\ell \in L}, u$ を使って, 常に, φ' に変換しておくとするれば, 式 (B1.12) の $\Phi \subset \mathfrak{H}$ は, 処理の対象とする問題のパターンの集合と考えることができる根拠を定理B.1が与えている.

[定理B.2] (写像 T と, \mathfrak{H} の 1次独立な系と $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ によって, 特徴抽出写像 u を意味づけて得られるパターン集合 Φ' の 4性質定理)

3要素 $T, \{\psi_\ell\}_{\ell \in L}, u$ について, 3条件

$$\text{条件イ } \eta = 0 \in \Psi \subseteq \mathfrak{H} \text{ については, } \forall \ell \in L, u(\eta, \ell) = 0$$

$$\text{条件ロ } \exists \eta \in \Psi \subseteq \mathfrak{H}, \exists \ell \in L, u(T\eta, \ell) > 0 \wedge [\forall k \in L - \{\ell\}, u(T\eta, k) = 0]$$

$$\text{条件ハ } \forall \ell \in L, T\psi_\ell \neq 0$$

を課する. このとき, 4性質 (axiom 1

$$\textcircled{1} \text{ (零元 } 0 \text{ の } T\text{-不動点性)} \exists 0 \in \Phi, T0 = 0$$

$$\textcircled{2} \text{ (} T \text{ の正定数倍吸収性)} \forall \varphi \in \Phi, a \cdot \varphi \in \Phi \wedge T(a \cdot \varphi) = T\varphi \text{ for any positive real number } a$$

$$\textcircled{3} \text{ (} T \text{ のベキ等性)} \forall \varphi \in \Phi, T\varphi \in \Phi \wedge T(T\varphi) = T\varphi$$

$$\textcircled{4} \text{ (} T \text{ の非零写像性)} \exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0$$

が成立する.

(証明) $\textcircled{1}$ の成立: 条件 1 を適用する. $\eta = 0 \in \Psi \subseteq \mathfrak{H}$ とすれば,

$$\Phi' \ni \varphi' \equiv \sum_{\ell \in L} u(T\eta, \ell) \cdot \psi_\ell \quad \because \text{式 (B1.7)}$$

$$= \sum_{\ell \in L} u(T0, \ell) \cdot \psi_\ell$$

$$= \sum_{\ell \in L} u(0, \ell) \cdot \psi_\ell \quad \because \text{条件 (1)}$$

$$= \sum_{\ell \in L} 0 \cdot \psi_\ell \quad \because \text{条件 (イ)}$$

$$= 0 \tag{B1.17}$$

を得, 任意 $a \in R^{++}$ のについて,

$$\Phi \supset R^{++} \cdot T \cdot \Phi' \ni a \cdot T\varphi' \quad \because \text{式 (B1.11)}$$

$$= a \cdot T0 = a \cdot 0 \quad \because \text{条件 (1)}$$

$$= 0$$

を得,

$$T(a \cdot T\varphi') = T0 = 0 \quad \because \text{条件 (1)}.$$

②任意の正定数を b とする.

$$\exists \eta \in \Psi \subseteq \mathfrak{H}, \Phi \supset R^{++} \cdot T \cdot \Phi' \ni \varphi = b \cdot T\varphi' \equiv b \cdot T \left[\sum_{\ell \in L} u(T\eta, \ell) \cdot \psi_\ell \right]$$

$$\because \text{2式 (B1.11), (B1.8)} \tag{B1.18}$$

について, 任意の正定数 a に対し,

$$a \cdot \varphi = a \cdot b \cdot T\varphi' \equiv c \cdot T \left[\sum_{\ell \in L} u(T\eta, \ell) \cdot \psi_\ell \right] \in R^{++} \cdot T \cdot \Phi' \subset \Phi$$

$$\because c = a \cdot b \wedge \text{2式 (B1.11)} \tag{B1.19}$$

を得る. また, φ が,

$$\varphi = b \cdot \varphi' \in R^{++} \cdot \Phi' \subset \Phi \tag{B1.20}$$

のとき

$$a \cdot \varphi = a \cdot b \cdot \varphi' = c \cdot \varphi' \in R^{++} \cdot \Phi \subset \Phi \tag{B1.21}$$

である. 最後に,

$$T(a \cdot \varphi) = T\varphi \quad \because \text{条件 (2)} \tag{B.22}$$

が成り立つ.

③式 (B.18) の $\varphi = b \cdot T\varphi' \in R^{++} \cdot T \cdot \Phi' \subset \Phi$ について,

$$T\varphi = T(b \cdot T\varphi')$$

$$= T(T\varphi') \quad \because \text{条件 (2)}$$

$$= T\varphi' \quad \because \text{条件 (3)}$$

$$\in T \cdot \Phi' \subset R^{++} \cdot T \cdot \Phi' \subset \Phi \quad \because \text{式 (B1.11)} \tag{B1.23}$$

を得, また, 式 (B.20) の φ について,

$$T\varphi = T(b \cdot \varphi')$$

$$= T\varphi' \quad \because \text{条件 (2)}$$

$$\in T \cdot \Phi' \subset R^{++} \cdot T \cdot \Phi' \subset \Phi \quad \because \text{式 (B1.11)} \tag{B1.24}$$

である. 最後に,

$$T(T\varphi) = T\varphi \quad \because \text{条件 (3)} \tag{B1.25}$$

が成り立つ.

④式 (B1.18) の $\varphi = b \cdot T\varphi' \equiv b \cdot T \left[\sum_{m \in L} u(T\eta, m) \cdot \psi_m \right] \in R^{++} \cdot T \cdot \Phi' \subset \Phi$ について, $\eta \in \Psi \subseteq \mathfrak{H}$ を条件 (口) を満たすように, $\eta \in \Psi \subseteq \mathfrak{H}$ を選べば,

$$\Phi \supset R^{++} \cdot T \cdot \Phi' \ni \varphi = b \cdot T\varphi' \equiv b \cdot T \left[\sum_{m \in L} u(T\eta, m) \cdot \psi_m \right]$$

$$= b \cdot T \left[u(T\eta, \ell) \cdot \psi_\ell \right]$$

$$= b \cdot T\psi_\ell \quad \because \text{条件 (2)}$$

$$\neq 0 \quad \because \quad \text{条件 (ハ)} \tag{B1.26}$$

□

性質①～④はaxiom 1, (i), (ii), (iii), (iv) に対応するものであり, 明らかに, 次の定理B.3 が成り立つことがわかる.

[定理B.3] (対 $[\Phi, T]$ の構成定理)

4条件 (1) ~ (4) を満たす写像 $T: \Psi \rightarrow \Psi$ について, 発見された式 (B1.1) の特徴抽出写像 u を用い, 式 (B1.8) のパターン集合 Φ' を定義した後, 式 (B1.12) の集合 Φ を構成する. そうすれば, 2式 (B1.14), (B1.15) は各々, 2式 (A1.15), (A1.16) に対応しており, 対 $[\Phi, T]$ はaxiom 1 を満たす. □

よって, 式 (B1.8) のパターン集合 Φ' を用い, 基本領域 Φ_B を

$$\Phi_B = \Phi' \tag{B1.27}$$

ととれば, 式 (B1.12) の Φ について, SS理論 [3], [4] が適用できることになった.

B2. 写像 T が $T \equiv \sum_{\ell \in L} u(\cdot, \ell) \cdot \psi_\ell$ の場合

特に, B1章の4条件 (1) ~ (4) を満たす写像 $T: \Psi \rightarrow \Psi$ が

$$T \cdot = \sum_{\ell \in L} u(\cdot, \ell) \cdot \psi_\ell \tag{B2.1}$$

と与えられる場合, 次の3事項 (a), (b), (c) が成立する:

$$(a) \quad \Phi' = T \cdot \Psi \wedge T \cdot \Phi' = \Phi' \tag{B2.2}$$

$$(b) \quad R^{++} \cdot \Phi' = R^{++} \cdot T \cdot \Psi \wedge R^{++} \cdot T \cdot \Phi' = R^{++} \cdot \Phi' \tag{B2.3}$$

$$(c) \quad \Phi = R^{++} \cdot \Phi' = R^{++} \cdot T \cdot \Psi \tag{B2.4}$$

□

(a), (b), (c) を証明しておこう.

(a) の証明: 式 (B1.3) の φ' は,

$$\varphi' = T(T\eta) = T\eta \quad \because \quad \text{条件 (3)} \tag{B2.5}$$

とかけるから, 式 (B1.8) の Φ' は

$$\Phi' = \{\varphi' = T\eta \mid \eta \in \Psi\} = T \cdot \Psi \tag{B2.6}$$

ということになる. また,

$$T \cdot \Phi' = T \cdot T \cdot \Psi = T \cdot \Psi \quad \because \quad \text{条件 (3)}$$

$$= \Phi' \tag{B2.7}$$

も得られる.

(b) の証明: (a) から明らか.

(c) の証明: $\Phi = R^{++} \cdot \Phi' \quad \because \quad \text{式 (B1.12), (a)}$

$$= R^{++} \cdot T \cdot \Psi \quad \because \quad (a)$$

□

B3. 式 (B1.12) のパターン集合 Φ の導出

Φ の設定式 (B1.12) がどのようにしてえられたかを説明しておこう.

まず, パターンというものを次のように定義しよう.

[パターン (pattern) の帰納的定義]

① (初期段階) $\varphi' \in \Phi'$ はパターンである.

② (帰納段階) φ がパターンなら, $a \cdot \varphi$, $T\varphi$ は共にパターンである. ここに, a は任意の正定数である.

③ (終了段階) 以上の①, ②より, パターンと判明するもののみがパターンである. □

上述の帰納的定義から, Φ の再帰領域方程式

$$\Phi = \Phi' \cup R^{++} \cdot \Phi \cup T \cdot \Phi \tag{B3.1}$$

が得られる. この集合論的方程式 (B.35) を解けば, Φ は

$$\Phi = R^{++} \cdot (\Phi' \cup T \cdot \Phi') \supset \Phi' \cup T \cdot \Phi' \tag{B3.2}$$

$$\begin{cases} \supset \Phi' \\ \supset T \cdot \Phi' \end{cases} \tag{B3.3}$$

であることがわかる. このとき, 2つの等式 (B1.14), (B1.15) が成立している.

そして, 対 $[\Phi, T]$ はaxiom 1を満たす.

2式 (B.14), (B.15) を証明した後, 式 (B3.2) の Φ が方程式 (B3.1) を満たすことを示そう.

式 (B1.14) の証明: $T \cdot \Phi =$

$$\begin{aligned} &= T \cdot R^{++} \cdot (\Phi' \cup T \cdot \Phi') \quad \because \text{式 (B3.2)} \\ &= T \cdot (\Phi' \cup T \cdot \Phi') \quad \because \text{条件 (2)} \\ &= T \cdot \Phi' \cup T \cdot T \cdot \Phi' \\ &= T \cdot \Phi' \cup T \cdot \Phi' \quad \because \text{条件 (3)} \\ &= T \cdot \Phi' \end{aligned}$$

式 (B1.15) の証明: $R^{++} \cdot \Phi = R^{++} \cdot R^{++} \cdot (\Phi' \cup T \cdot \Phi') \quad \because \text{式 (B3.2)}$

$$\begin{aligned} &= R^{++} \cdot (\Phi' \cup T \cdot \Phi') \quad \because R^{++} = R^{++} \\ &= \Phi \quad \because \text{式 (B3.2)} \end{aligned}$$

式 (B3.2) の Φ が方程式 (B3.1) を満たすことの証明:

$$\begin{aligned} &\Phi' \cup R^{++} \cdot \Phi \cup T \cdot \Phi \\ &= \Phi' \cup \Phi \cup T \cdot \Phi' \quad \because \text{2式 (B1.14), (B1.15)} \\ &= \Phi \cup T \cdot \Phi' \quad \because \text{式 (B3.3) } \Phi \supset \Phi' \\ &= \Phi \quad \because \text{式 (B3.3) より, } \Phi \supset T \cdot \Phi' \end{aligned}$$

□

付録C. カテゴリ間の距離を基準にしたaxiom 2を満たす類似度関数SMの構成

パターン認識システムを構成するときに先ず, 考慮しなければならないのは, パターン間の類似性をどう定義するかである. このために設定するのが類似度関数SMである. SS理論 [3], [4] では, 2つのパターン φ , ω_j が似ている程度を与える類似度関数値はSM(φ , ω_j)で表されるが, このとき, 類似度関数SMはaxiom 2を満たさなければならない.

本付録Cでは, the Davies-Bouldin index DBが $R_{i,qt}$ の添え字*i*に関する算術平均値で与えられることに注目し, $R_{i,qt}$ の持つ意味を考慮し, axiom 2を満たす類似度関数SMを構成する.

結果的には, カテゴリ間の距離を基準にしているような, axiom 2を満たす類似度関数SMが得られる.

C1. axiom 2と類似度関数 SM

任意のパターン $\varphi \in \Phi$ が、記憶されている代表的なパターンからなる有限個の元からなる集合 Ω 内の任意の代表パターン ω_j とどの程度似ているか、違っているかを計量する手段を設定することが、認識の働きを確保するために必要とされる。類似性計量のための手段が類似度関数 SM である。

“正常なパターン” (well-formed pattern) は、ある1つのカテゴリ (category) \mathfrak{C}_j (第 $j \in J$ 番目の類概念) のみに帰属しているものとし、このような \mathfrak{C}_j の集まり (有限集合)

$$\mathfrak{C}(J) = \{\mathfrak{C}_j \mid j \in J\} \quad (C1.1)$$

を想定する。 \mathfrak{C}_j の備えている性質を典型的に持っている (第 $j \in J$ 番目の) 代表パターン (prototypical pattern) $\omega_j (\neq 0)$ を1つ選定する。 \mathfrak{C}_j は、典型 (prototype) としての代表パターン ω_j を中心とした緩やかな (第 $j \in J$ 番目の) カテゴリであることを仮定したことに注意しておく。ここに、

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} \subset \Phi \quad (C1.2)$$

が式 (C1.1) の全カテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J)$ に1対1に対応する代表パターンの集合である。式 (C1.2) の系 Ω は、

$$\text{複素定数 } a_j \text{ の組 } \{a_j \mid j \in J\} \text{ について } \sum_{j \in J} a_j \cdot \omega_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J, a_j = 0 \quad (C1.3)$$

が成立しているという意味で、1次独立 (linearly independent) でなければならない。 Ω を視察で決定できる場合があるが、訓練パターン系列から Ω を適応的に決定する方法については、文献 [3] の付録Iで説明されている。

Axiom 1を満たす式 (A1.8) のモデル構成作用素 T によって、式 (C1.2) の代表パターン集合 Ω が変換されて得られる系

$$T \cdot \Omega \equiv \{T\omega \mid \omega \in \Omega\} = \{T\omega_j \mid j \in J\} \quad (C1.3)$$

も1次独立であると要請する。このとき、類似度関数 (similarity-measure function)

$$SM : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \quad (C1.4)$$

を導入し、

$SM(\varphi, \omega_j) = 1, 0$ に従って、パターン $\varphi \in \Phi$ は各々、 ω_j と確定的な類似度関係、相違関係にあり、また、 $0 < SM(\varphi, \omega_j) < 1$ の場合は、あいまいな類似・相違関係にある (C1.5) と、 SM を解釈しよう。

式 (C1.5) の関数 SM は次のaxiom 2を満たすように構成されねばならない。Axiom 2の (i) では、クロネッカー (Kronecker) の δ 記号

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{if } i = j, = 0 \quad \text{if } i \neq j \quad (C1.6)$$

が導入されているが、特にaxiom 2の (i) なるこの正規直交性は、候補カテゴリの分離・抽出が効果的に行われ、

候補カテゴリの鋭利な削減 (a sharp reduction) (C1.7) をもたらすために要請されている。

Axiom 2 (類似度関数 SM の満たすべき公理)

(i) (正規直交性; orthonormality)

$$\forall i, \forall j, SM(\omega_i, \omega_j) = \delta_{ij}.$$

(ii) (規格化条件, 確率性, 正規性; probability condition, normalization)

$$\forall \varphi \in \Phi, \sum SM(\varphi, \omega_j) = 1.$$

(iii) (写像 T の下での不変性; invariance under mapping T)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j). \quad \square$$

上述の axiom 2 の (i) ~ (iii) について簡単に説明しておこう。

SM の解釈式 (C1.5) の下で, (i) は, 異なるカテゴリの代表パターン同士は確定的な相違関係にあり, 同一カテゴリの代表パターン同士は確定的な類似度関係にあることを要請している。

(ii) は, 任意のパターン φ について, すべてのカテゴリについての類似度の総和は 1 であることを要請している。つまり, パターン φ は少なくとも 1 つのカテゴリ \mathfrak{C}_j に帰属していることを要請している。(iii) は, パターンモデル $T\varphi$ は原パターン φ と任意のカテゴリについて同一類似度を持つことを要請している。ということは, パターンモデル $T\varphi$ を見たり, 聞いたりするならば, 原パターン φ と同じように見えたり, 聞こえたりすること (同一知覚原理; A2章を参照) を要請していることになる。

次の定理 A2 は, axiom 2 を満たす類似度関数 SM がパターン $\varphi \in \Phi$ の正定数倍 $a \cdot \varphi \in \Phi$ に対し, 元の類似度を保存することを示している。

[定理 A2] (正定数倍の下での, 類似度関数 SM の不変性)

$$\forall a \in R^{++}, \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(a \cdot \varphi, \omega_j). \quad (C1.8)$$

□

尚, 第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j の生起確率である非負実数 $p(\mathfrak{C}_j)$ を, 2 条件

$$[\forall j \in J, 0 < p(\mathfrak{C}_j) < 1] \wedge [\sum_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) = 1] \quad (C1.9)$$

を満たすものとして導入しておく。

C2. the Davies-Bouldin index DB が $R_{i,qt}$ からヒントを得た相違度関数 $dissim$ の構成

C2.1 the Davies-Bouldin index DB 内の, 他のすべてのクラスタから眺めたクラスタ i の, クラスタ間距離を基準に選んだ散逸の度合い $R_{i,qt}$

文献 [22] の 3.3 節の 1 部は次の通りである:

3.3 Comparison with other indices

The Davies-Bouldin index: This index is a function of the ratio of the sum of within-cluster scatter to between-cluster separation. The scatter within the i th cluster is computed as

$$S_{i,q} = \left(\frac{1}{|C_i|} \sum_{x \in C_i} \|x - z_i\|_2^q \right)^{1/q} \quad (12)$$

and the distance between cluster C_i and C_j is defined as

$$d_{ij,t} = \left(\sum_{s=1}^p |z_{is} - z_{js}|^t \right)^{1/t} = \|z_i - z_j\|_t. \quad (13)$$

$S_{i,q}$ is the q th root of the q th moment of the points in cluster i with respect to their mean, and is a measure of the dispersion of the points in cluster i . Specifically, $S_{i,1}$, used in this article, is the average Euclidean distance of the vectors in class i to the centroid of class i . $d_{ij,t}$ is the Minkowski distance of order t between the centroids that characterize cluster i and j . Subsequently we compute

$$R_{i,qt} = \max_{j, j \neq i} \frac{S_{i,q} + S_{j,q}}{d_{ij,t}} \quad (14)$$

The Davies-Bouldin (DB) index is then defined as

$$DB = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K R_{i,qt}. \quad (15)$$

The objective is to minimize the DB index for achieving proper clustering. □

各 z_k は

z_k is the center of the k th cluster

と定義されているから、クラスタ i 内の点の散逸の度合い (the dispersion of the points in cluster i) が $S_{i,q}$ であり、 $R_{i,qt}$ は他のすべてのクラスタ j ($\in K - \{i\}$) から眺めたクラスタ i の、クラスタ間距離 $d_{ij,t}$ を基準に選んだ散逸の度合いである。

C2.2 距離関数 dis' の変換

Φ を処理の対象とする問題のパターンの集合とし、 $\varphi, \eta, \psi \in \Phi$ とする。

4 性質

$$(i) \quad d(\varphi, \varphi) = 0 \quad (\text{反射性}) \quad (C2.1)$$

$$(ii) \quad \varphi = \eta \text{ ならば } d(\varphi, \eta) > 0 \quad (\text{正值性}) \quad (C2.2)$$

$$(iii) \quad d(\varphi, \eta) = d(\eta, \varphi) \quad (\text{対称性}) \quad (C2.3)$$

$$(iv) \quad d(\varphi, \psi) \leq d(\varphi, \eta) + d(\eta, \psi) \quad (3 \text{ 角不等式}) \quad (C2.4)$$

を満たす距離関数

$$d : \Phi \times \Phi \rightarrow R^+ \quad (\text{非負実数全体の集合}) \quad (C2.5)$$

が存在するとしよう。文献 [23] の付録Gで証明されており、距離関数 d から今1つの距離関数 d^* を得る手段を与えている次の定理C.1は、 d から今1つの距離関数 d^* を得ることができ、無数に上述の4性質 (i) ~ (iv) を満たす距離関数が存在することがわかる。

[定理C.1] (距離関数の変換定理)

3 性質

$$(イ) \quad f(0) = 0 \quad (\text{零不動点性}) \quad (C2.6)$$

$$(ロ) \quad df(u)/du > 0 \quad (f \text{ は単調増加}) \quad (C2.7)$$

$$(ハ) \quad d^2f(u)/du^2 < 0 \quad (f \text{ は上に凸}) \quad (C2.8)$$

を満たす関数

$$f : R^+ \rightarrow R^+ \quad (C2.9)$$

の下で、

$$d^*(\varphi, \eta) = f(d(\varphi, \eta)) \quad (C2.10)$$

と定義される関数

$$d^* : \Phi \times \Phi \rightarrow R^+ \quad (C2.11)$$

は、4性質 (i) ~ (iv) を満たし、距離関数である。

[定理C.1の系1]

$$d^*(\varphi, \eta) = \log_e(1 + d(\varphi, \eta)) \quad (C2.12)$$

と定義される式 (C2.11) の関数 d^* は、4性質 (i) ~ (iv) を満たし、距離関数である。 □

4 性質を満たす距離関数

$$dis' : \Phi \times \Phi \rightarrow R^+ \quad (C2.13)$$

が存在するとしよう。例えば、ノルム距離

$$dis'(T\varphi, T\eta) = \|T\varphi - T\eta\| \quad (C2.14)$$

が選べる。その後、定理C.1に従い、

$$dis(T\varphi, T\eta) \equiv f(dis'(T\varphi, T\eta)) \tag{C2.15}$$

と変換された距離関数

$$dis : \Phi \times \Phi \rightarrow R^+ \tag{C2.16}$$

を求めることができる。

C2.3 相違度関数 *dissim* の構成

第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j を形成するパターンのクラスタ

$$(\omega_j \in) \Phi(j) (\neq \phi) \equiv \{\varphi_{j,q} \mid q \in K_j\} (\subset \Phi) \tag{C2.17}$$

を考える。2条件

(#1) (非交差条件) $T \cdot \Phi(i) \cap T \cdot \Phi(j) \neq \varphi (i \neq j)$

(#2) (1次独立性) $T \cdot \Phi(j), j \in J$ は1次独立な系である

を課する。

例えば、式 (C2.15) の距離関数を使った $dis(T\varphi, T\varphi_{j,q})$ は、 $T\varphi$ と $T\varphi_{j,q}$ との距離であり、 $\min_{\ell \in K_i} dis(T\varphi, T\varphi_{i,\ell})$ は、 $T\varphi$ とクラスタ $\Phi(j)$ との距離である。

次の補助定理C.1を証明しよう。

[補助定理C.1]

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \forall q \in K_j,$$

$$\begin{aligned} & \min_{q \in K_j} dis(T\varphi, T\varphi_{j,q}) + \min_{\ell \in K_i} dis(T\varphi, T\varphi_{i,\ell}) \\ & \geq \min_{q \in K_j, \ell \in K_i} dis(T\varphi_{j,q}, T\varphi_{i,\ell}) \end{aligned} \tag{C2.18}$$

が成り立つ。

(証明) 先ず、3角不等式

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \forall q \in K_j, \forall \ell \in K_i, \quad \because \quad 2 \text{ 式 (C2.3), (C2.4)}$$

$$dis(T\varphi, T\varphi_{j,q}) + dis(T\varphi, T\varphi_{i,\ell}) \geq dis(T\varphi_{j,q}, T\varphi_{i,\ell})$$

$$\begin{aligned} & \geq \min_{\ell \in K_i} dis(T\varphi_{j,q}, T\varphi_{i,\ell}) \\ & \geq \min_{q \in K_j, \ell \in K_i} dis(T\varphi_{j,q}, T\varphi_{i,\ell}) \end{aligned} \tag{C2.19}$$

が得られ、よって、

$$\begin{aligned} & \forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \forall q \in K_j, \forall \ell \in K_i, \\ & \min_{q \in K_j} dis(T\varphi, T\varphi_{j,q}) + \min_{\ell \in K_i} dis(T\varphi_{j,q}, T\varphi_{i,\ell}) \\ & \geq \min_{q \in K_j, \ell \in K_i} dis(T\varphi_{j,q}, T\varphi_{i,\ell}) \end{aligned} \tag{C2.20}$$

□

よって、補助定理C.1から、不等式

$$g(j; T\varphi; i) \equiv \frac{\min_{q \in K_j} dis(T\varphi, T\varphi_{j,q}) + \min_{\ell \in K_i} dis(T\varphi, T\varphi_{i,\ell})}{\min_{q \in K_j, \ell \in K_i} dis(T\varphi_{j,q}, T\varphi_{i,\ell})} - \frac{\min_{\ell \in K_i} dis(T\varphi, T\varphi_{i,\ell})}{\min_{q \in K_j, \ell \in K_i} dis(T\varphi_{j,q}, T\varphi_{i,\ell})} \geq 0$$

$$\because \text{条件 (\#1) より分母は正の量} \quad (\text{C2.21})$$

が成り立つ。この不等式 (C2.20), 並びに, C2.1節の

the Davies-Bouldin index DB 内の, 他のすべてのクラスタから眺めたクラスタ i の, クラスタ間距離を基準に選んだ散逸の度合い $R_{i, qt}$

からヒントを得て, 写像

$$dissim : \Phi \times \Omega \rightarrow R^+ \quad (\text{C2.22})$$

を,

$$\begin{aligned} & dissim(\varphi, \omega_j) \\ &= \max_{i \in J - \{j\}} g(j; T\varphi; i) \\ &= \max_{i \in J - \{j\}} \left[\frac{\min_{q \in K_j} dis(T\varphi, T\varphi_{j,q}) + \min_{q \in K_i} dis(T\varphi, T\varphi_{i,\ell})}{\min_{q \in K_j, \ell \in K_i} dis(T\varphi_{j,q}, T\varphi_{i,\ell})} - \frac{\min_{\ell \in K_i} dis(T\varphi, T\varphi_{i,\ell})}{\min_{q \in K_j, \ell \in K_i} dis(T\varphi_{j,q}, T\varphi_{i,\ell})} \right] \end{aligned} \quad (\text{C2.23})$$

と定義する。 $dissim(\varphi, \omega_j)$ は, 他のすべてのクラスタ $T \cdot \Phi(i), i \in J - \{j\}$ から眺めたクラスタ $T \cdot \Phi(j)$ の, クラスタ間距離を基準に選んだ散逸の度合いを表しており, φ が ω_j と相違している程度を与えていると解釈できることは, 次の補助定理C.2から理解できる。

[補助定理C.2]

$$(\$1) \quad \forall j \in \Phi, \forall j \in J, dissim(\varphi, \omega_j) \geq 0 \quad (\text{C2.24})$$

が成り立つ。更に,

$$(\$2) \quad \forall j \in J, dissim(\omega_j, \omega_j) = 0 \quad (\text{C2.25})$$

$$(\$3) \quad \forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, dissim(\omega_i, \omega_j) = 0 \quad (\text{C2.26})$$

が成り立つ。

(証明) 先ず, (\$1) については, 不等式 (C2.21) から明らかである。

(\$2) を示そう。式 (C2.17) から, $T\omega_j \in T \cdot \Phi(j)$ であり, $\varphi = \omega_j$ のとき,

$$\exists p \in K_j, \omega_j = \omega_{j,p} \quad (\text{C2.27})$$

であり, よって,

$$\forall i \in J - \{j\}, g(j; T\varphi; i) = \frac{0 + \min_{\ell \in K_i} dis(T\varphi, T\varphi_{i,\ell})}{\min_{q \in K_j, \ell \in K_i} dis(T\varphi_{j,q}, T\varphi_{i,\ell})} - \frac{\min_{\ell \in K_i} dis(T\varphi, T\varphi_{i,\ell})}{\min_{q \in K_j, \ell \in K_i} dis(T\varphi_{j,q}, T\varphi_{i,\ell})} = 0 \quad (\text{C2.28})$$

が成り立ち, (\$2) が従う。

(\$3) 任意に, カテゴリ番号 $j \in J$ と, カテゴリ番号 $m \in J - \{j\}$ を選び, 固定する。

$\varphi = \omega_m$ のとき,

$$\min_{q \in K_j} dis(T\varphi, T\varphi_{j,q}) > 0 \quad \because \text{式 (2.16), (\#1)}$$

$$\min_{q \in K_m} dis(T\varphi, T\varphi_{m,\ell}) = 0 \quad \because \text{式 (2.17), (\#1)}$$

$$\forall i \in J - \{j, m\}, \min_{\ell \in K_i} dis(T\varphi, T\varphi_{i,\ell}) > 0 \quad \because \text{式 (2.16), (\#1)}$$

であるから,

$$\forall i \in J - \{j\}, g(j; T\varphi; i) =$$

$$\frac{\min_{q \in K_j} \text{dis}(T\varphi, T\varphi_{j,q}) + \min_{\ell \in K_i} \text{dis}(T\varphi, T\varphi_{i,\ell})}{\min_{q \in K_j} \min_{\ell \in K_i} \text{dis}(T\varphi_{j,q}, T\varphi_{i,\ell})} - \frac{\min_{\ell \in K_i} \text{dis}(T\varphi, T\varphi_{i,\ell})}{\min_{q \in K_j} \min_{\ell \in K_i} \text{dis}(T\varphi_{j,q}, T\varphi_{i,\ell})} > 0$$

が成り立ち、(3) が従う。 □

C3. 類似度関数 SM の構成

パターン $\varphi \in \Phi$ について、式 (C2.23) の相違度関数値 $\text{dissim}(\varphi, \omega_j)$ の組

$$\text{dissim}(\varphi, \omega_j), j \in J \tag{C3.1}$$

を使って、次の定理C.2の如く、axiom 2を満たす式 (C1.4) の類似度関数 SM を構成できる。

[定理C.2] (カテゴリ間の距離を反映した類似度関数 SM の構成)

$$SM(\varphi, \omega_j) = \frac{\text{dissim}(\varphi, \omega_j)^{-1}}{\sum_{i \in J} \text{dissim}(\varphi, \omega_i)^{-1}}, j \in J, \varphi \in \Phi \tag{C3.2}$$

と定義される式 (C1.4) の関数 SM は axiom 2 を満たす。

(証明) axiom 2, (i) の成立: 任意に、カテゴリ番号 $j \in J$ と、カテゴリ番号 $m \in J - \{j\}$ を選び、固定する。2式 (2), (3) を適用すれば、 $\varphi = \omega_j$ のとき、

$$SM(\varphi, \omega_j) = \frac{1}{1 + \sum_{k \in J - \{j\}} \text{dissim}(\varphi, \omega_k) / \text{dissim}(\varphi, \omega_j)} = \frac{1}{1 + 0} = 1 \tag{C3.3}$$

を得、また、 $\varphi = \omega_m$ のとき

$$SM(\varphi, \omega_j) = \frac{\text{dissim}(\varphi, \omega_j)^{-1}}{\text{dissim}(\varphi, \omega_m)^{-1} + \sum_{i \in J - \{m\}} \text{dissim}(\varphi, \omega_i)^{-1}} = \frac{\text{dissim}(\varphi, \omega_j)^{-1}}{\infty + \sum_{i \in J - \{m\}} \text{dissim}(\varphi, \omega_i)^{-1}} = 0 \tag{C3.4}$$

を得る。

axiom 2, (ii) の成立: SM の定義式 (C3.2) から明らか。

axiom 2, (iii) の成立: axiom 1, (iii) の後半 $T \cdot T = T$ を適用すると、

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall i \in J, \forall \ell \in K_i, \text{dis}(T(T\varphi), T\varphi_{i,\ell}) = \text{dis}(T\varphi, T\varphi_{i,\ell}) \tag{C3.5}$$

$$\therefore \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \text{dissim}(T\varphi, \omega_j) = \text{dissim}(\varphi, \omega_j) \tag{C3.6}$$

が成立し、これから明らか。 □

C4. 式 (C1.2) の代表パターン集合 Ω の適切性の判定

式 (C1.4) の類似度関数 SM と、axiom 3を満たす式 (C4.1) の大分類関数 BSC とを使って、式 (C1.2) の代表パターン集合 Ω が適切に選ばれているかどうかを判定する方法を説明しよう。

C4.1 大分類関数 BSC の満たすべき公理 3

大分類関数 (rough classifier, binary-state classifier) と呼ばれる 2 値関数

$$BSC : \Phi \times J \rightarrow \{0, 1\} \tag{C4.1}$$

を、次の axiom 3 を満たすものとして導入し、解釈

パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属する候補カテゴリの 1 つが第 $j \in J$ 番目の \mathfrak{C}_j であるならば、

$$BSC(\varphi, j) = 1 \text{ であることが望ましい} \tag{C4.2}$$

を採用しよう。この際、注意すべきは、

$BSC(\varphi, j) = 0$ であっても、パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属する候補カテゴリの 1 つは、第 $j \in J$ 番目の \mathfrak{C}_j でないとは限らない

$$\tag{C4.3}$$

としていることである。また、axiom 3の(i)からわかるように、カテゴリ間の相互排他性(the mutual

exclusion of the one category from the other categories)

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, BSC(\omega_i, j) = 0 \quad (C4.4)$$

を公理として要請していない事実に注意しておこう。この事実を補うのが実は、式 (C1.4) の類似度関数 SM が満たさなければならないとしている axiom 2 の (i) (正規直交性) である。

Axiom 3 (大分類関数 BSC の満たすべき公理)

(i) (カテゴリ抽出能力; category separability)

$$\forall j \in J, BSC(\omega_j, j) = 1$$

(ii) (写像 T の下での不変性; invariance under mapping T)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, BSC(T\varphi, j) = BSC(\varphi, j). \quad \square$$

C4.2 パターン系列を用い、式 (C1.2) の代表パターン集合 Ω が適切に選ばれているかどうかを判定する方法

axiom 2 を満たす式 (C1.4) の類似度関数 SM と、axiom 3 を満たす式 (C4.1) の大分類関数 BSC が共にパターン集合 (基本領域) Φ_B に対し、適切に選ばれているとしよう。

パターン系列

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_t, \dots, \varphi_n \quad (C4.5)$$

を用意する。このパターン系列には、各カテゴリに帰属するパターンが各カテゴリの出現確率に比例した形で出現しているものとする。

$$\left\| \sum_{t=1}^n T\varphi_t \cdot BSC(\varphi_t, j) \cdot SM(\varphi_t, \omega_j) - T\omega_j \right\|^2 \quad (C4.6)$$

が小であれば、式 (C1.2) の代表パターン集合 Ω が適切に選ばれていると考えることが出来よう。大であれば、そうではないと考えられよう。同様に、

$$SM\left(\sum_{t=1}^n T\varphi_t \cdot BSC(\varphi_t, j) \cdot SM(\varphi_t, \omega_j), \omega_i\right) \quad (C4.7)$$

が $i \neq j$ のとき、最小値 0 に近ければ、かつ、 $i = j$ のとき最大値 1 に近ければ、式 (C1.2) の代表パターン集合 Ω が適切に選ばれていると考えることが出来よう。

以上の判定法は、次の文章 [24] がヒントになっている：

We consider $S(x_j, z_i)$ as the similarity measure between x_j and the i th cluster z_i . Our goal is to find z_i to maximize the total similarity measure $J_S(z)$ with

$$J_S(z) = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^n f(S(x_j, z_i)) \quad (1)$$

where f is a monotone increasing function and $z = (z_1, \dots, z_c)$. Since $f(S(x_j, z_i))$ is still a reasonable similarity measure, $J_S(z)$ is a meaningful clustering objective function. (SCM; similarity-based clustering method) \square

付録D. 多種多様なパターン変形に耐え得る axiom 2 を満たす類似度関数 SM の構成

C.1 節の axiom 2 を満たす式 (C1.4) の類似度関数 SM の 1 つは、付録C で構成された。本付録D では、更にこの種の類似度関数 SM を一般的に構成する。類似度関数 SM を構成するには、まず、パター

ン間の相違性 (dissimilarity) の程度を定義して、その (規格化された) 相違性の程度の逆数として、定義するのがよい。本付録Dでは、SMのこの相違性逆数構成法に基づいて、入力パターン $\varphi \in \Phi$ のモデル $T\varphi \in \Phi$ の多種多様な変形に応じることのできるSMが構成される。

D1. 相違度関数の dsm 変換関数 $f(u)$

次章では、

$$dsm(T\varphi, T\varphi_{j,k})$$

を計算し、にわたるその最小値

$$\min_{k \in K_j} f(dsm(T\varphi, T\varphi_{j,k}))$$

を計算することになるが、相違度変換関数と呼ばれるこの場合の関数 f を求めよう。

非負実数全体の集合 R^+ を導入する。相違度変換関数

$$f: R^+ \rightarrow R^+ \tag{D1.1}$$

で、2条件

(%1) (零点の不動点性) $f(0) = 0$

(%2) (正性) $\forall u > 0, f(u) > 0$

を満たすものを選ぶ。この2条件 (%1), (%2) を満たす非負実数値関数 f として、以下に7つの構成法を提案しておこう。

(f構成例1) (1次関数) $f(u) = a \cdot u, a > 0$ (D1.2)

(f構成例2) (分数関数) $f(u) = \frac{u}{u+a}, a > 0$ (D1.3)

(f構成例3) (指数関数) $f(u) = 1 - \exp(-au), a > 0$ (D1.4)

(f構成例4) (対数関数) $f(u) = a \cdot \log(1+u), a > 0$ (D1.5)

(f構成例5) (双曲線関数)

$$f(u) = \frac{\exp(+au) - \exp(-au)}{\exp(+au) + \exp(-au)}, a > 0 \tag{D1.6}$$

(f構成例6) (シグモイド関数)

$$f(u) = \frac{1}{1 + \exp(-au)} - \frac{1}{2}, a > 0 \tag{D1.7}$$

(f構成例7) (区分的関数)

$$f(u) = \begin{cases} 0 \cdots 0 \leq u < b \text{ のとき} \\ f_1(u) \cdots b < u \leq \delta(0) \text{ のとき} \\ f_2(u) \cdots \delta(0) \leq u < \delta(1) \text{ のとき} \\ f_3(u) \cdots \delta(1) < u \leq d \text{ のとき} \\ e \cdots d \leq u \text{ のとき} \end{cases} \tag{D1.8}$$

ここに、

(条件&1) $0 < b < \delta(0) < \delta(1) < d$ (D1.9)

(条件&2) $0 < \varepsilon(0) < \varepsilon(1) < e$ (D1.10)

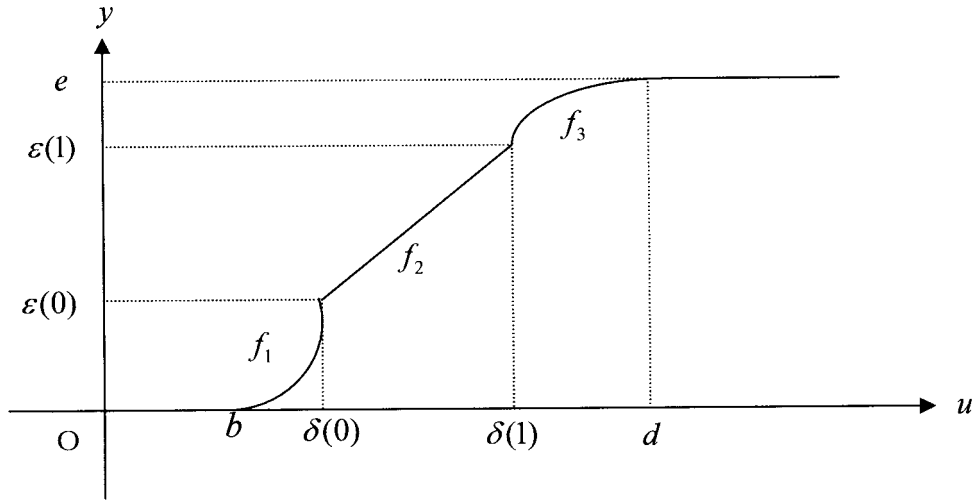


Fig.D.1 The graph of $y = f(u) (u \geq 0)$

$$\text{(条件\&3)} \quad \frac{df_1(u)}{du} (b < u \leq \delta(0)) \text{ は増加関数} \quad (\text{D1.11})$$

$$\text{(条件\&4)} \quad \frac{df_2(u)}{du} (\delta(0) < u \leq \delta(1)) \text{ は正の定数} \quad (\text{D1.12})$$

$$\text{(条件\&5)} \quad \frac{df_3(u)}{du} (\delta(1) < u < d) \text{ は減少関数} \quad (\text{D1.13})$$

と選ぶ (Fig.D.1を参照).

式 (D1.8) の関数 f が連続関数となるために, 5 境界条件

$$\text{(境界条件 1)} \quad f_1(b) = 0 \quad (\text{D1.14})$$

$$\text{(境界条件 2)} \quad f_1(\delta(0)) = f_2(\delta(0)) \quad (\text{D1.15})$$

$$\text{(境界条件 3)} \quad f_2(\delta(1)) = f_3(\delta(1)) \quad (\text{D1.16})$$

$$\text{(境界条件 4)} \quad f_3(d) = e \quad (\text{D1.17})$$

を課さねばならない.

例えば, 3 関数を

$$f_1(u) = \frac{\varepsilon(0)}{[\delta(0) - b]^2} \cdot (u - b)^2 \quad (\text{D1.18})$$

$$f_2(u) = \frac{\varepsilon(1) - \varepsilon(0)}{\delta(1) - \delta(0)} \cdot [u - \delta(0)] + \varepsilon(0) \quad (\text{D1.19})$$

$$f_3(u) = \frac{e - \varepsilon(1)}{\sqrt{d - \delta(1)}} \cdot \sqrt{u - \delta(1)} + \varepsilon(1) \quad (\text{D1.20})$$

と選ぶことができる.

D2. 相違度関数 dsm の変換後 $\min_{k \in K_j} f(dsm(T\varphi, T\varphi_{j,k}))$ の逆数による類似度関数 SM の構成

付録CのC 2.3の2条件 (#1), (#2) を満たす式 (C2.17) のパターンクラス $\Phi(j)$ の系 $\Phi(j)$,

$j \in J$ を用意する. 用意する理由は, 入力パターン $\varphi \in \Phi$ のモデル $T\varphi \in \Phi$ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ \mathfrak{C}_j に帰属するという制約の下では, カテゴリ \mathfrak{C}_j は,

$$\exists k \in K_j, T\varphi = T\varphi_{j,k} \tag{D2.1}$$

であるようなモデル $T\varphi_{j,k}$ を中心とした緩やかなカテゴリであることを実現するためである.

相違度関数 (dissimilarity function) と呼ばれてもよい関数

$$dsm : T \cdot \Phi \times T \cdot \Phi (j) \rightarrow R^+ \tag{D2.2}$$

で, 2条件

$$(dsm \text{ 条件 1}) \quad dsm(T\varphi, T\varphi_{j,k}) = 0 \text{ if and only if } \|T\varphi - T\varphi_{j,k}\| = 0$$

$$(dsm \text{ 条件 2}) \quad \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \forall k \in K_j, dsm(T\varphi, T\varphi_{j,k}) > 0$$

$$\text{if and only if } \|T\varphi - T\varphi_{j,k}\| > 0$$

を満たすものを選ぶ. 次の定理D.1は, 2条件 (%1), (%2) を満たす式 (D1.1) の関数 f と 2条件 (dsm 条件 1), (dsm 条件 2) を満たす式 (D2.2) の相違度関数 dsm と使えば, 相違度逆数構成法を適用して, C.1節の axiom 2 を満たす式 (C1.4) の類似度関数 SM が構成され得ることを指摘している.

[定理D.1] (axiom 2 を満たす類似度関数 SM 構成定理; 相違度逆数構成法)

$$SM(\varphi, \omega_j) = \frac{[\min_{k \in K_j} f(dsm(T\varphi, T\varphi_{j,k}))]^{-1}}{\sum_{i \in J} [\min_{\ell \in K_i} f(dsm(T\varphi, T\varphi_{i,\ell}))]^{-1}}, j \in J, \varphi \in \Phi \tag{D2.3}$$

と定義される式 (C1.4) の関数は axiom 2 を満たす.

(証明) 先ず,

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall i \in J, \min_{\ell \in K_i} f(dsm(T\varphi, T\varphi_{i,\ell})) \geq 0 \tag{D2.4}$$

$$\min_{\ell \in K_i} f(dsm(T\varphi_{j,k}, T\varphi_{i,\ell}))$$

$$\begin{cases} = 0 \cdots j = i \text{ のとき} \\ > 0 \cdots j \neq i \text{ のとき} \end{cases} \tag{D2.5}$$

に注意する.

axiom 2, (i) の成立: 任意に, カテゴリ番号 $j \in J$ と, カテゴリ番号 $m \in J - \{j\}$ を選び, 固定する.

式 (D2.5) を適用すれば, $\varphi = \omega_j$ のとき,

$$\begin{aligned} SM(\varphi, \varphi_j) &= \frac{1}{1 + \sum_{i \in J - \{j\}} \frac{[\min_{k \in K_j} f(dsm(T\varphi, T\varphi_{j,k}))]^{-1}}{[\min_{\ell \in K_i} f(dsm(T\varphi, T\varphi_{i,\ell}))]^{-1}}} \\ &= \frac{1}{1 + 0} = 1 \end{aligned} \tag{D2.6}$$

を得, また, $\varphi = \omega_m$ のとき

$$\begin{aligned} SM(\varphi, \omega_j) &= \frac{[\min_{k \in K_j} f(dsm(T\varphi, T\varphi_{j,k}))]^{-1}}{[\min_{k \in K_m} f(dsm(T\varphi, T\varphi_{m,k}))]^{-1} + \sum_{i \in J - \{m\}} \frac{[\min_{k \in K_j} f(dsm(T\varphi, T\varphi_{j,k}))]^{-1}}{[\min_{\ell \in K_i} f(dsm(T\varphi, T\varphi_{i,\ell}))]^{-1}}} \\ &= \frac{[\min_{k \in K_j} f(dsm(T\varphi, T\varphi_{j,k}))]^{-1}}{\infty + \sum_{i \in J - \{m\}} \frac{[\min_{k \in K_j} f(dsm(T\varphi, T\varphi_{j,k}))]^{-1}}{[\min_{\ell \in K_i} f(dsm(T\varphi, T\varphi_{i,\ell}))]^{-1}}} = 0 \end{aligned} \tag{D2.7}$$

を得る.

axiom 2, (ii) の成立: SM の定義式 (D2.3) から明らか.

axiom 2, (iii) の成立: axiom 1, (iii) の後半 $T \cdot T = T$ を適用すると,

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \min_{k \in K_j} f(dsm(T(\varphi), T\varphi_{j,k})) \\ = \min_{k \in K_j} f(dsm(\varphi, T\varphi_{j,k})) \end{aligned} \quad (D2.8)$$

が成立し, これから明らか. □

D3. 相違度関数 dsm の構成例

本節では, 2条件 (dsm 条件1), (dsm 条件2)を満たす式 (D2.2) の相違度関数 dsm を4例構成しておこう.

D3.1 dsm SS構成例1 (ノルム距離の自乗による構成)

$\|T\varphi - T\varphi_{j,k}\|^2$ は $T\varphi \in T \cdot \Phi$, $T\varphi_{j,k} \in T \cdot \Phi$ (j)間のノルム距離 (distance defined by norm; normed distance) の自乗である. このとき,

$$0 \leq dsm(T\varphi, T\varphi_{j,k}) = \frac{\|T\varphi - T\varphi_{j,k}\|^2}{\max_{i \in J} \max_{\ell \in K_i} \|T\varphi - T\varphi_{i,\ell}\|^2} \leq 1 \quad (D3.1)$$

D3.2 dsm SS構成例2 (外積による構成)

\mathfrak{H} の2つの元 φ, η を考え, φ, η の外積 (ベクトル積; vector product) $\varphi \times \eta$ を定義しよう.

φ から η へ向かう方向で測った φ, η 間の角を θ とし, $\varphi, \eta, \varphi \times \eta$ の順で右手系をなし, φ, η 双方を含む平面に垂直なノルム1の, \mathfrak{H} の元 ψ をとる. $\varphi \times \eta$ は,

$$\varphi \times \eta = \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \sin \theta \cdot \psi \quad (D3.2)$$

と定義される. φ, η の内積 (スカラー積; scalar product) (φ, η) は

$$(\varphi, \eta) = \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \cdot \cos \theta \quad (D3.3)$$

と表わされるから, $\varphi \times \eta$ のノルム $\|\varphi \times \eta\|$ の自乗 $\|\varphi \times \eta\|^2$ は,

$$\begin{aligned} \|\varphi \times \eta\|^2 &= \|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2 \cdot [1 - \sin^2 \theta] \\ &= \|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2 \cdot [1 - \left\{ \frac{(\varphi, \eta)}{\|\varphi\| \cdot \|\eta\|} \right\}^2] \\ &= \|\varphi\|^2 \cdot \|\eta\|^2 - (\varphi, \eta)^2 \end{aligned} \quad (D3.4)$$

と表わされる. ここに, シュワルツの不等式 (Schwarz's inequality)

$$|(\varphi, \eta)| \leq \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \quad (D3.5)$$

が成り立っていることに注意する. 等式

$$|(\varphi, \eta)| = \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \quad (D3.6)$$

が成り立つのは,

$$\varphi \text{ が } \eta \text{ の定数 (0 を含む) 倍になるか, } \eta \text{ が } \varphi \text{ の定数 (0 を含む) 倍になるか} \quad (D3.7)$$

の2つの場合に限る.

このとき,

$$0 \leq dsm(T\varphi, T\varphi_{j,k}) = \frac{[\|T\varphi\|^2 \cdot \|T\varphi_{j,k}\|^2 - |(T\varphi, T\varphi_{j,k})|^2]}{\max_{i \in J} \max_{\ell \in K_i} [\|T\varphi\|^2 \cdot \|T\varphi_{i,\ell}\|^2 - |(T\varphi, T\varphi_{i,\ell})|^2]} \leq 1 \quad (D3.8)$$

D3.3 dsm SS構成例3 (1次従属係数による構成)

$T\varphi$ を $\varphi_{j,k}$, $j \in J$, $k \in K_j$ の1次結合 $\sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} q_{j,k} T\varphi_{j,k}$ で近似することを考えよう。
 近似誤差

$$T\varphi - \sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} q_{j,k} \cdot T\varphi_{j,k} \tag{D3.9}$$

の自乗ノルム

$$\left\| T\varphi - \sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} q_{j,k} \cdot T\varphi_{j,k} \right\|^2 \tag{D3.10}$$

を最小ならしめることを考えればよい。最小ならしめる各1次結合係数 $q_{j,k}$ を $q_{j,k}(T\varphi)$ と書こう。各係数 $q_{j,k}(T\varphi)$ を求めよう。それには、 $\cup_{j \in J} \Phi(j)$ は1次独立な系であるから、連立1次方程式

$$\sum_{i \in J} \sum_{\ell \in K_i} q_{i,\ell} \cdot (T\varphi_{i,\ell}, T\varphi_{j,k}) = (T\varphi, T\varphi_{j,k}), \quad j \in J, k \in K_j \tag{D3.11}$$

を解けばよい。この連立1次方程式の解 $q_{j,k}(T\varphi)$, $j \in J$, $k \in K_j$ は、 $T\varphi \in T \cdot \Phi$ が $T\varphi_{j,k}$ に従属している有様を表わしているから、第 $j \in J$ 番目、第 $k \in K_j$ 番目の1次従属係数 (the coefficient of linear dependency) と呼ばれる。このとき、 $T\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ の1次結合表現

$$\exists (T\varphi)^\perp \in \mathfrak{H} \text{ such that } \forall j \in J, \forall k \in K_j, ((T\varphi)^\perp, T\varphi_{j,k}) = 0, \tag{D3.12}$$

$$T\varphi = \sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} q_{j,k}(T\varphi) \cdot T\varphi_{j,k} + (T\varphi)^\perp \tag{D3.13}$$

が成り立つ、正規直交性

$$q_{j,k}(T\varphi_{i,\ell}) = \begin{cases} 1 \cdots j = i \wedge k = \ell & \text{のとき} \\ 0 \cdots j \neq i \vee k \neq \ell & \text{のとき} \end{cases} \tag{D3.14}$$

が成り立つ。このとき、

$$0 < dsm(T\varphi, T\varphi_{j,k}) = 1 - \frac{|q_{j,k}(T\varphi)|^2}{\max_{i \in J} \max_{\ell \in K_i} |q_{i,\ell}(T\varphi)|^2} \leq 1 \tag{D3.15}$$

D3.4 dsm SS構成例4 (相互情報量による構成)

パターン $\varphi \in \mathfrak{H}$ が

$$\varphi = \psi + \eta \wedge (\psi, \eta) = 0 \tag{D3.16}$$

と、 ψ と η に直交分解されたとき、

$$I(\varphi, \psi) \equiv -\frac{1}{2} \cdot \log_e \frac{\|\eta\|^2}{\|\varphi\|^2} \tag{D3.17}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \cdot \log_e \frac{\|\varphi\|^2 - \|\psi\|^2}{\|\varphi\|^2} \quad \because \quad \|\varphi\|^2 = \|\psi\|^2 + \|\eta\|^2 \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \frac{\|\psi\|^2}{\|\varphi\|^2} \right] \end{aligned} \tag{D3.18}$$

は、S.Suzukiによれば、 φ 内に ψ が含まれている程度を表わしている情報量 (amount of information about η contained in φ) と呼ばれる。

$$\frac{(T\varphi, T\varphi_{j,k})}{\|T\varphi\| \cdot \|T\varphi_{j,k}\|} = 0 \quad \text{if} \quad \|T\varphi\| \cdot \|T\varphi_{j,k}\| = 0 \tag{D3.19}$$

と約束すれば、

$$MI(T\varphi, T\varphi_{j,k}) \equiv -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \left| \frac{(T\varphi, T\varphi_{j,k})}{\|T\varphi\| \cdot \|T\varphi_{j,k}\|} \right|^2 \right] \quad (D3.20)$$

は, S.Suzukiによれば, $T\varphi \in T \cdot \Phi$, $T\varphi_{j,k} \in T \cdot \Phi(j)$ 間の相互情報量 (amount of mutual information between $T\varphi \in T \cdot \Phi$ and $T\varphi_{j,k} \in T \cdot \Phi(j)$) である.

その理由は次のとおりである:

$T\varphi$ を第 $j \in J$, $k \in K_j$ 番目のモデル $T\varphi_{j,k}$ の定数倍 $a_{j,k} \cdot T\varphi_{j,k}$ で近似することを考え, 誤差 $T\varphi - a_{j,k} \cdot T\varphi_{j,k}$ の自乗ノルム

$$\|T\varphi - a_{j,k} \cdot T\varphi_{j,k}\|^2 \quad (D3.21)$$

を最小ならしめる 1 次結合係数 $a_{j,k} \equiv a_{j,k}(T\varphi)$ は,

$$a_{j,k}(T\varphi) = \frac{(T\varphi, T\varphi_{j,k})}{(T\varphi_{j,k}, T\varphi_{j,k})} \quad (D3.22)$$

であり, $T\varphi$ の, $T\varphi_{j,k}$ による直交展開

$$\exists (T\varphi)_\perp \in \mathfrak{H} \text{ such that } ((T\varphi)_\perp, T\varphi_{j,k}) = 0, T\varphi = a_{j,k}(T\varphi) \cdot T\varphi_{j,k} + (T\varphi)_\perp \quad (D3.23)$$

が成り立つ.

$T\varphi$ 内に第 $j \in J$, $k \in K_j$ 番目のモデル $T\varphi_{j,k}$ の定数倍 $a_{j,k}(T\varphi) \cdot T\varphi_{j,k}$ が含まれている程度を表わしている情報量 $I(T\varphi, a_{j,k}(T\varphi) \cdot T\varphi_{j,k})$ を計算してみよう.

この情報量 $I(T\varphi, a_{j,k}(T\varphi) \cdot T\varphi_{j,k})$ は

$$I(T\varphi, a_{j,k}(T\varphi) \cdot T\varphi_{j,k}) \equiv -\frac{1}{2} \cdot \log_e \frac{\|T\varphi - a_{j,k}(T\varphi) \cdot T\varphi_{j,k}\|^2}{\|T\varphi\|^2} \quad (D3.24)$$

であるが, 計算してみればわかるように,

$$\|T\varphi - a_{j,k}(T\varphi) \cdot T\varphi_{j,k}\|^2 = \|T\varphi\|^2 - \frac{|(T\varphi, T\varphi_{j,k})|^2}{\|T\varphi_{j,k}\|^2} \quad (D3.25)$$

であるから, 代入すれば,

$$I(T\varphi, a_{j,k}(T\varphi) \cdot T\varphi_{j,k}) = -\frac{1}{2} \cdot \log_e \left[1 - \left| \frac{(T\varphi, T\varphi_{j,k})}{\|T\varphi\| \cdot \|T\varphi_{j,k}\|} \right|^2 \right] \quad (D3.26)$$

と表わされることがわかり, ここで,

$$I(T\varphi, a_{j,k}(T\varphi) \cdot T\varphi_{j,k}) \equiv MI(T\varphi, T\varphi_{j,k}) \quad (D3.27)$$

とおけばよい. \square

このとき,

$$0 \leq dsm(T\varphi, T\varphi_{j,k}) = 1 - \left| \frac{(T\varphi, T\varphi_{j,k})}{\|T\varphi\| \cdot \|T\varphi_{j,k}\|} \right|^2 = \exp[-2 \cdot MI(T\varphi, T\varphi_{j,k})] \leq 1 \quad (D3.28)$$

\square

尚, D3の構成例 5 では, カテゴリ間のパターン間分離

$$\forall j \in J, \max_{i \in J - \{j\}} \max_{k \in K_i} dsm(T\omega_i, T\varphi_{j,k}) \leq b \quad (D3.29)$$

$$\wedge d \leq \min_{k \in K_j} dsm(T\omega_j, T\varphi_{j,k}) \quad (D3.30)$$

であるように, 2 助変数 b, d を選定することが望ましい.

付録E. 音声波形 φ の特微量 $u(\varphi, \ell)$

本付録Eでは、付録Bの結果が適用できるように、音声波形 φ から抽出すべき特微量の組が研究される。

E1. 内積, 外積, 空間曲線, 単位接ベクトル, 曲率ベクトル

3次元ユークリッド空間で、直交している3つの単位ベクトル (unit vector)

$$\vec{e}_1 = \text{col}(1 \ 0 \ 0) (\text{列ベクトル}), \vec{e}_2 = \text{col}(0 \ 1 \ 0), \vec{e}_3 = \text{col}(0 \ 0 \ 1) \quad (\text{E1.1})$$

を導入する。2つのベクトル $\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \cdot \vec{e}_i, \vec{b} = \sum_{i=1}^3 b_i \cdot \vec{e}_i$ の内積 $[\vec{a}, \vec{b}]$ は

$$[\vec{a}, \vec{b}] \equiv \sum_{i=1}^3 a_i \cdot b_i \quad (\text{E1.2})$$

と定義され、ベクトル \vec{a} のノルム $|\vec{a}|$ は

$$|\vec{a}| \equiv \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} \quad (\text{E1.3})$$

と定義される。 \vec{a} から \vec{b} へ向かう \vec{a}, \vec{b} 間の角を θ とすると、内積 $[\vec{a}, \vec{b}]$ は

$$[\vec{a}, \vec{b}] = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta \quad (\text{E1.4})$$

と表わされる。

また、2つのベクトル $\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \cdot \vec{e}_i, \vec{b} = \sum_{i=1}^3 b_i \cdot \vec{e}_i$ の外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は

$$\vec{a} \times \vec{b} \equiv \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{bmatrix} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta \cdot \vec{n} \quad (\text{E1.5})$$

と定義される。ここに、 \vec{n} は \vec{a} を \vec{b} へ回転させたときの右手系の運動により得られる法線単位ベクトル (normal vector obtained by the motion of a right-hand screw when \vec{a} is rotated into \vec{b} ; angle of rotation less than 180°) である。

空間曲線 (space curve)

$$C : \vec{x} = \vec{x}(t) = x_1(t) \cdot \vec{e}_1 + x_2(t) \cdot \vec{e}_2 + x_3(t) \cdot \vec{e}_3, \quad a \leq t \leq b \quad (\text{E1.6})$$

について、媒介変数 t を弧長 s にとる。本付録Eでは、以下では、次の4種類の諸量 (1) ~ (4) を参考にして、付録Bの結果が適用できるように、音声波形 φ から抽出すべき特微量の組が研究される：

(*1) 単位接ベクトル (unit tangent vector) $\frac{d\vec{x}(s)}{ds}$

(*2) 曲率ベクトル (curvature vector) $\frac{d}{ds} \frac{d\vec{x}(s)}{ds}$

(*3) 単位主法線ベクトル (unit principal normal vector) $\frac{d}{ds} \frac{d\vec{x}(s)}{ds} / \left\| \frac{d}{ds} \frac{d\vec{x}(s)}{ds} \right\|$

(*4) 単位従法線ベクトル (unit subordinate normal vector) $\frac{d\vec{x}(s)}{ds} \times \left[\frac{d}{ds} \frac{d\vec{x}(s)}{ds} / \left\| \frac{d}{ds} \frac{d\vec{x}(s)}{ds} \right\| \right]$

□

E2. The digital curvature [25]

次の英文 [25] に注目する：

The digital curvature provides invariance to translations, rotations, local shape deformations, and is easily made tolerant to scaling. In addition, the bending energy, a global shape feature, can be directly estimated from the curvature values.

Let the i th of the N landmark points in a shape be represented by the vector \vec{v}_i defined with respect to an arbitrarily positioned orthogonal coordinate system.

At each landmark $i = 1, 2, 3, \dots, N-1$, it is possible to define two vectors \vec{a}_i and \vec{b}_i as indicated in Eqs. (1) and (2), respectively

$$\vec{a}_i = \frac{\vec{v}_i - \vec{v}_{i-1}}{\|\vec{v}_i - \vec{v}_{i-1}\|}, \quad (1)$$

$$\vec{b}_i = \frac{\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i}{\|\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i\|}, \quad (2)$$

In particular,

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_N}{\|\vec{v}_1 - \vec{v}_N\|}, \quad (3)$$

$$\vec{b}_2 = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\|} \quad (4)$$

and

$$\vec{a}_N = \frac{\vec{v}_N - \vec{v}_{N-1}}{\|\vec{v}_N - \vec{v}_{N-1}\|}, \quad (5)$$

$$\vec{a}_N = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_N}{\|\vec{v}_1 - \vec{v}_N\|}. \quad (6)$$

The smallest angle α_i between the vector \vec{a}_i and \vec{b}_i is therefore given in terms of their scalar product, i. e.

$$\alpha_i = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a}_i \cdot \vec{b}_i}{\|\vec{a}_i\| \cdot \|\vec{b}_i\|} \right). \quad (7)$$

This angle expresses the sharpness of the shape at each landmark point, in the sense that the larger the value of α_i , the sharper the vertex. As this measurement, which is always non-negative, corresponds to the smallest angle between the two vectors, the vector product between \vec{a}_i and \vec{b}_i has to be incorporated in order to orient the angle, i. e.

$$k_i = \text{sgn}(\vec{a}_i \times \vec{b}_i) \alpha_i \quad (8)$$

where sgn is the signum function, returning 1 for positive arguments and -1 for negative arguments. New the value k_i defined at each landmark point i can be understood as the digital curvature of the shape at that point. In case the landmarks are marked in clockwise fashion along the shape, convex and concave vertices will imply negative and positive values of k_i , respectively (the opposite is verified for counterclockwise sense). \square

E3. 増減関係（接ベクトル）を抽出するには、

継続長 $\ell(k)$ ($= 1, 2, \dots$) の時間区間 (interval), 或いは, 継続長 (continual duration)

$$I(k) \equiv \{t \mid a(k) \leq t \leq a(k) + \ell(k) - 1\} \quad (E3.1)$$

での音声波形 (speech wave)

$$\varphi' = \{\varphi'(t) \mid t \in I(k)\} \quad (E3.2)$$

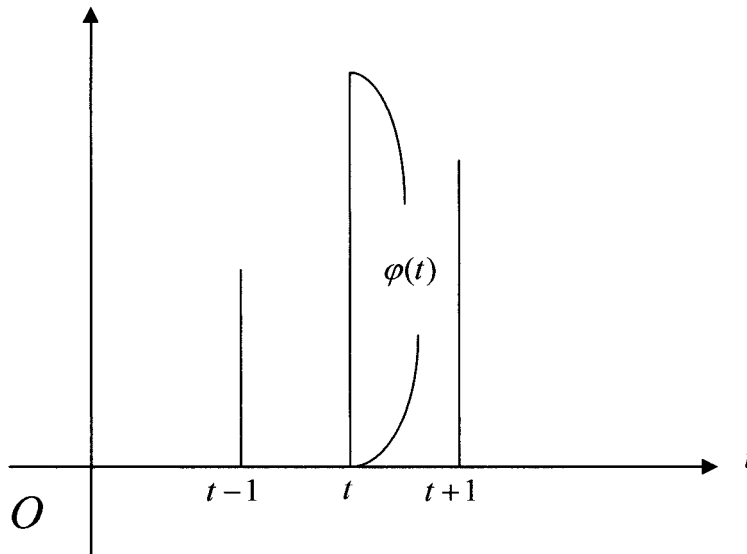


Fig.E.1 A speech sound $\varphi(t)$

について，平均値を取り除いて得られるパターン

$$\varphi(t) = \varphi'(t) - \frac{1}{\ell(k)} \cdot \sum_{s=\ell(k)}^{a(k)+\ell(k)-1} \varphi'(s), t \in I(k) \quad (\text{E3.3})$$

を求める． ($k = 1, 2, \dots$)

$$\frac{g(t)}{|g(t)|} = \begin{cases} -1 \cdots g(t) < 0 \text{ のとき} \\ 0 \cdots g(t) = 0 \text{ のとき} \\ +1 \cdots g(t) > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{E3.4})$$

を約束する．

$I(k)$ の有限分割

$$I(k) = \cup_{\ell \in L} K_{\ell} \quad (\text{E3.5})$$

を導入する．ここに，非交差性

$$K_p \cap K_q = \phi \quad (p \neq q) \quad (\text{E3.6})$$

が成立している必要はない．その後，2種類の（規格化された）差分量

$$\Delta\varphi(t)^- = \frac{\varphi(t) - \varphi(t-1)}{|\varphi(t) - \varphi(t-1)|} \quad (\text{E3.7})$$

$$\Delta\varphi(t)^+ = \frac{\varphi(t+1) - \varphi(t)}{|\varphi(t+1) - \varphi(t)|} \quad (\text{E3.8})$$

を定義する（Fig.E.1を参照）．

パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出される第 $\ell \in L$ 番目の実数値特徴量 $u(\varphi, \ell) \in R$ （実数値全体の集合）と

して,

$$u(\varphi, \ell) = \frac{\sum_{t \in K_\ell} \Delta\varphi(t)^- \cdot \Delta\varphi(t)^+}{\max_{t \in K_\ell} |\Delta\varphi(t)^-| \cdot \max_{t \in K_\ell} |\Delta\varphi(t)^+|} \quad (\text{E3.9})$$

を定義できる. ここに, $\Delta\varphi(t)^- \cdot \Delta\varphi(t)^+$ は,

$$\Delta\varphi(t)^- \cdot \Delta\varphi(t)^+ = \begin{cases} \frac{1}{|\varphi(t) - \varphi(t-1)|} \cdot \frac{1}{|\varphi(t+1) - \varphi(t)|} \cdot [\varphi(t+1) \cdot \varphi(t) + \varphi(t) \cdot \varphi(t-1) \\ \quad - \varphi(t+1) \cdot \varphi(t-1) - \varphi(t) \cdot \varphi(t)] \cdots \varphi(t+1) \neq \varphi(t) \wedge \varphi(t) \neq \varphi(t-1) \text{ のとき} \\ 0 \cdots \varphi(t+1) = \varphi(t) \vee \varphi(t) = \varphi(t-1) \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{E3.10})$$

と計算される.

$u(\varphi, \ell) \in R$ は, 時間区間 $t \in K_\ell$ でのパターン $\varphi \in \Phi$ から増減関係 (接ベクトル) を抽出している.

E4. 凹—凸関係 (曲率ベクトル) を抽出するには,

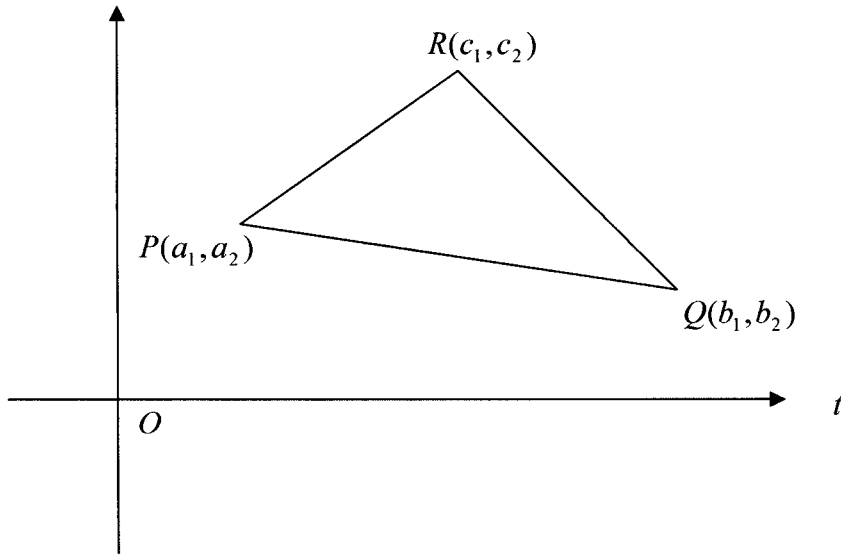


Fig.E.2 a triangle $\triangle PQR$

まず, 平面上の3点 $P(a_1, a_2)$, $Q(b_1, b_2)$, $R(c_1, c_2)$ を3頂点とする三角形 $\triangle PQR$ の面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot [(b_1 - a_1) \cdot (c_2 - a_2) - (b_2 - a_2) \cdot (c_1 - a_1)] \end{aligned} \quad (\text{E4.1})$$

であることに注意する (Fig.E.2を参照).

そうすれば、3点

$$P(t-1, \frac{\varphi(t-1)}{|\varphi(t-1)|}), Q(t, \frac{\varphi(t)}{|\varphi(t)|}), R(t+1, \frac{\varphi(t+1)}{|\varphi(t+1)|}) \quad (E4.2)$$

を3頂点とする三角形 $\triangle PQR$ の面積の、 $t \in K_\ell$ にわたる総和として、パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出される第 $\ell \in L$ 番目の実数値特微量 $u(\varphi, \ell) \in R$ (実数値全体の集合)を定義すると、

$$\begin{aligned} u(\varphi, \ell) &= \sum_{t \in K_\ell} \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{array}{l} 1 \cdot \frac{\varphi(t)}{|\varphi(t)|} - \frac{\varphi(t-1)}{|\varphi(t-1)|} \\ 2 \cdot \frac{\varphi(t+1)}{|\varphi(t+1)|} - \frac{\varphi(t-1)}{|\varphi(t-1)|} \end{array} \right| \\ &= \sum_{t \in K_\ell} \frac{1}{2} \cdot \left[\left| \frac{\varphi(t+1)}{|\varphi(t+1)|} - \frac{\varphi(t-1)}{|\varphi(t-1)|} \right| - 2 \cdot \left| \frac{\varphi(t)}{|\varphi(t)|} - \frac{\varphi(t-1)}{|\varphi(t-1)|} \right| \right] \\ &= \sum_{t \in K_\ell} \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\varphi(t+1)}{|\varphi(t+1)|} - 2 \cdot \frac{\varphi(t)}{|\varphi(t)|} + \frac{\varphi(t-1)}{|\varphi(t-1)|} \right] \end{aligned} \quad (E4.3)$$

である。ここで、2階微分

$$\frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} \quad (E4.4)$$

の近似が

$$\varphi(t+1) - 2 \cdot \varphi(t) + \varphi(t-1) \quad (E4.5)$$

であるから、 $u(\varphi, \ell) \in R$ は、 $\frac{d^2}{dt^2} \frac{\varphi(t)}{|\varphi(t)|}$ の近似の、 $t \in K_\ell$ にわたる総和として設けられていることがわかる。 $u(\varphi, \ell) \in R$ は、時間区間 $t \in K_\ell$ でのパターン $\varphi \in \Phi$ から凹-凸関係(曲率ベクトル)を抽出している。

E5. 凹-凸の増減関係を抽出するには、

先ず、3種類の(規格化された)2次差分量

$$\Delta^2 \varphi(t)^- = \frac{\varphi(t) - 2 \cdot \varphi(t-1) + \varphi(t-2)}{|\varphi(t) - 2 \cdot \varphi(t-1) + \varphi(t-2)|} \quad (E5.1)$$

$$\Delta^2 \varphi(t)^0 = \frac{\varphi(t+1) - 2 \cdot \varphi(t) + \varphi(t-1)}{|\varphi(t+1) - 2 \cdot \varphi(t) + \varphi(t-1)|} \quad (E5.2)$$

$$\Delta^2 \varphi(t)^+ = \frac{\varphi(t+2) - 2 \cdot \varphi(t+1) + \varphi(t)}{|\varphi(t+2) - 2 \cdot \varphi(t+1) + \varphi(t)|} \quad (E5.3)$$

を定義する。パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出される第 $\ell \in L$ 番目の実数値特微量 $u(\varphi, \ell) \in R$ (実数値全体の集合)として、

$$u(\varphi, \ell) = \begin{cases} \frac{\sum_{t \in K_\ell} \Delta^2 \varphi(t)^- \cdot \Delta^2 \varphi(t)^0 \cdot \Delta^2 \varphi(t)^+}{\max_{t \in K_\ell} |\Delta^2 \varphi(t)^-| \cdot \max_{t \in K_\ell} |\Delta^2 \varphi(t)^0| \cdot \max_{t \in K_\ell} |\Delta^2 \varphi(t)^+|} > 0 \text{ のとき} \\ 0 \cdot \max_{t \in K_\ell} |\Delta^2 \varphi(t)^-| \cdot \max_{t \in K_\ell} |\Delta^2 \varphi(t)^0| \cdot \max_{t \in K_\ell} |\Delta^2 \varphi(t)^+| = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (E5.4)$$

方程式

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = 0 \tag{E5.5}$$

の根が変曲点（凹から凸への、或いは、凸から凹への変る点）の座標を与えるから、 $u(\varphi, \ell) \in R$ は時間区間 $t \in K_\ell$ でのパターン $\varphi \in \Phi$ から凹—凸の増減関係を抽出した情報を与える。

（著者 鈴木昇一，論文題目 曖昧さに関する半順序 $\bullet\blacktriangleleft$ を単調に保つモデル構成作用素 T ，文教大学情報学部情報研究no.32 投稿論文，投稿年月日 2004年8月23日（月））