パターンφから抽出された特徴量$u(\varphi, \ell)$のfuzzy単調変換

鈴木　昇一

A Fuzzy Monotone Transformation of Extracted Features from Patterns

Shoichi Suzuki

あらまし

パターンφから抽出される各特徴量として，測度的ユニタリ不変量を採用すると，このパターンφの代りとなるパターンモデル$T\varphi$を生成するモデル構成作用素Tが構成され得，写像Tの下で不変な最大類似度認識法が説明される．この認識法を固定して，入力パターンφの変形の程度を評価できるfuzzy半順序$\bullet\!\!<$を単調に反映する非負量としてのパターンエントロピー$etpy(\varphi)$が，拡散方程式の時間的発展の下で単調に減少する事実が証明されている．

任意の非零実数値パターンφに直交するパターン$A\varphi$が具体的に構成されており，この構成法を適用して，パターンφの変形過程が論じられるが，この変形過程に対比して，拡散方程式の解を原パターンφの大局的構造を反映するパターンとして採用する基礎も研究されている．また，拡散方程式の解が平均類似度値を一定に保ったままで，パターンエントロピーを最大にしようとする時得られることも証明されている．

キーワード

（1）半順序　（2）測度的ユニタリ不変量　（3）パターンエントロピー
（4）パターンモデル　（5）拡散方程式　（6）最大類似度法　（7）直交元
（7）統計作用素

Abstract

We use metrically unitary invariants as features extracted from patterns. Then a model-construction operator T that can generate a corresponding pattern-model of a pattern in question is able to be constructed. For most practiral application we contrive a maximum similarity-method for pattern-recognition invariant with respect to the mapping T. We prove that an entropy $etpy(\varphi)$ of pattern which monotonically can reflect a proposed fuzzy partial ordering that represents a degree of deformation of φ fixing the method of recognition is decreasing monotonically according as a diffusion equation become evolutionary.

We can construct an element $A\varphi$ which orthogorize any non-zero real-valued pattern φ, which tells us how to deform a norm-normalized pattern $\frac{\varphi}{\|\varphi\|}$ to $\frac{A\varphi}{\|A\varphi\|}$. We deal mainly with a solution of the diffusion equation which can reflect a general situation of φ as compared with this deformation-process.Moreover it is proven that the solution maximize the pattern-entropy provided that a average similarity measure is constant.

Key Words: (1) partial ordering (2) metrically unitary invariants (3) pattern entropy (4) pattern model (5) diffusion equation (6) maximum similarity method of recognition (7) orthogonal element (8) statistical operator

1. まえがき

パターンとしての画像$\varphi=\varphi(x)$をどの程度の荒っぽさで眺め特徴抽出するかはパターン情報処理の場面では，基本的に重要なことである［5］．例えば，画像φをガウス核を持つ積分作用素で一旦ぼかしてから［15］，［17］，［18］，2階微分（ラプラシアン）を行うと，ノイズによる偽のエッジを除去できるからである［14］，［43］．それのみならず，周波数帯域が圧縮され，いわゆるシャノンの標本化定理が適用され得，画像の標本化が可能になり，画像演算が容易になる利点が生じて来る［18］，［19］，［23］．

パターンφから抽出された特徴量（測度的ユニタリ不変量［16］，［17］，［19］～［24］，［29］，［41］）$u(\varphi,k)$（第$k\in L$番目の特徴量））の組

$$\vec{u}(\varphi)\equiv\{u(\varphi,k)\mid k\in L\} \tag{1}$$

を用いて，パターンφの再生［21］～［25］，［30］，［34］，連想［31］，［32］，［39］，認識・識別［17］，［33］，［36］，［37］，［38］，［42］，［43］を行う場合，ガウス核を持つ積分作用素による“ぼかし（the blurring-process）”が$\vec{u}(\varphi)$にどのような影響を与えるかを検討することは，これまで全くなされていなかった．本研究は，式（1）の特徴量の組$\vec{u}(\varphi)$を採用する最大類似度認識法［35］，［36］，［42］，［43］（付録A）に関し，この検討を行ったものであり，$\vec{u}(\varphi)$をfuzzy的に単調変換するものであることを明らかにしたものである．

文献［27］～［29］の研究内容の一部を新しい観点から再現したこの明らかにされた事実によって，局所的なパターン構造の変化が抽出される特徴量の変化としてよく捕らえられ，どの程度ぼかしても誤認識が生じないかが予想できそうといえることになったと思われる（付録AのA6節を参照）．

先ず，第2章では，本研究内容と関連した従来の諸研究が解説されている．次に，第3章では，fuzzy半順序$\multimapdotbothA$に関連した諸定義と，$\multimapdotbothA$を反映した非負量としてのエントロピー$etpy(\varphi)$などが説明される（命題4の（iii）を参照）．第4章では，パターンφから抽出される特徴量の組$\vec{u}(\varphi)$を，$\multimapdotbothA$に関しfuzzy単調変換する線形作用素の族$\{B_t(\ell)\}_{\ell\in L}$が，具体的に線形拡散方程式［5］，［7］，［8］，［13］と関連し研究される．更に，第5章では，任意のノルム規格化パターンから任意のノルム規格化パターンへと変形可能な事実［40］と関連し，線形拡散方程式の解を与えるガウス形積分作用素による従来のパターン変換に対比して，付録Bでの直交元を使った“パターンからの大局的構造の抽出法”などが論じられる．最後に，第6章のむすびでは，非線形拡散方程式［9］～［11］を研究することの重要性などが強調される．

付録Aでは，式（1）の特徴量の組 $\vec{u}(\varphi)$ を使ったパターン認識法の1つとしての最大類似法［36］が，モデル構成作用素［24］T の下で不変な類似度関数［43］を使用し説明されている．付録Bでは，パターン φ から抽出される各特徴量 $u(\varphi, k)$ をfuzzy単調変換する作用素は，平均類似度［16］，［17］，［32］，［35］，［36］，［41］，［42］を一定に保った条件の下でエントロピー［17］，［19］，［24］，［27］，［43］を最大にするものであり，ある自己共役作用素 G の規格化指数関数であることが明らかにされている．付録Cでは，第4章での各補助定理，各命題，各定理などが証明されている．

2.　拡散方程式，零交差と測度的ユニタリ不変量

本章では，自己共役作用素 G の指数関数

$$\exp(-t\cdot G) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t\cdot G)^n}{n!}, \; where \quad 0 \leq t \tag{2}$$

がガウス核を持つ積分作用素で表される場合を中心として，本研究で導入されるfuzzy単調変換が従来の諸研究と如何に関連を持っているかを検討する．

2.1　簡単な拡散方程式

境界条件

$$\varphi(x;t)|_{t=0} = \varphi(x;t)|_{x=L} = 0 \tag{3}$$

を満たす1次元拡散方程式（diffusion equation）

$$\frac{\partial \varphi(x;t)}{\partial t} = a\cdot\frac{\partial^2 \varphi(x;t)}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq L)\text{，ここに，}a\text{ は拡散係数} \tag{4}$$

の解 $\varphi(x;t)$ は，初期条件から決まる定数 C_n を用いて，

$$\varphi(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \exp\left[-a\cdot\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\cdot t\right]\cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}\cdot x\right) \tag{5}$$

である［6］．この解 $\varphi(x;t)$ は指数関数の形で拡散されていく事実を示している．本研究では，式(1)の特徴量 $\vec{u}(\varphi)$ が同様な拡散方程式の示す挙動によりfuzzy単調的に拡散していくことが証明される（定理2）．

2.2　パターン復元に関連したガウス核とパラメータ付きパターン変形

S.Suzuki等の研究［40］によれば，次の事実が示されている：

パターン $\varphi(x)$ と，変形パラメータ α を持つ $\varphi_\gamma(x;\alpha)$ との間に，

停留性，最大性，復元性

が成り立つとすれば，$\varphi_\gamma(x;\alpha)$ は，ガウス形関数

$$g_\gamma(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\frac{1}{\gamma}}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\gamma\cdot\alpha^2\right) \tag{6}$$

を用意すると，

ある正定数 C が存在して，

$$\varphi_\gamma(x;\alpha) = C\cdot\varphi(x)\cdot g_\gamma(\alpha - x) \tag{7}$$

であればよいことが示され，この$\varphi_\gamma(x; \alpha)$については，

$\gamma \to \infty$に対し，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \varphi_\gamma(x; \alpha) \to C \cdot \varphi(x) \qquad \text{（第 1 種復元性）}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi_\gamma(x; \alpha) \to C \cdot \varphi(x) \qquad \text{（第 2 種復元性）}$$

(8)

が成り立つことが証明され，然も，$\varphi_\gamma(x, \alpha)$の近似値が

$$\varphi_\gamma(x, \alpha) \approx \begin{cases} \varphi(x) \cdot [1 - \dfrac{(\alpha - x)^2}{2\sigma^2}] & \text{if} \quad x - \sqrt{2\sigma^2} \le \alpha \le x + \sqrt{2\sigma^2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここに，$\gamma = \dfrac{1}{\sigma^2}$ (9)

であることが示されている．□

パターン復元式（8）からわかるように，ガウス核を持つ積分作用素の“変形パターンの復元場面における重要性”が理解できよう．

2.3 処理の対象とするパターンφの集合Φ

本研究では，これまでの設定通り，パターンφはある可分な（separable）［1］ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元としよう．例えば

$\overline{\eta}$をηの複素共役として，

M ：q 次元ユークリッド空間の可測部分集合

$dm(x)$：正値ルベーグ・スティルチェス式測度

$x = < x_1, x_2, \cdots, x_q > \in M \ (\subseteq R^q)$：実数値$q$ 変数の直交座標系

を導入し，その内積(φ, η)，ノルム$\|\varphi\|$を，

$$(\varphi, \eta) = \int_M dm(x) \varphi(x) \cdot \overline{\eta}(x)$$

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \qquad (10)$$

とする線形空間（ベクトル空間）としての可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$を考えておけばよい．$\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$の特別な場合として，

$M = R^2$（2 次元全平面）

$$dm(x) = dm(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 dx_2$$

を選ぶことができる．この可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H} = L_2(R^2 : \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 dx_2)$では，

$$T_t \varphi(x_1, x_2) = \varphi(e^{-t} \cdot x_1, e^{-t} \cdot x_2), \ -\infty < t < +\infty$$

$$\text{for any} \ \ \varphi \in \mathfrak{H} = L_2(R^2 : \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 dx_2)$$

と定義される縮小・拡大の線形作用素 $T_t\ (-\infty < t < +\infty)$ は，

$$\forall\varphi, \forall\eta \in \mathfrak{H} = L_2\left(R^2 : \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 dx_2\right),\ (T_t\varphi,\ T_t\eta) = (\varphi,\ \eta)$$

が成立していることから，ユニタリ作用素であることがわかる．

処理するパターン φ の集合 Φ は，可分なヒルベルト（Hilbert）空間 $\mathfrak{H}$ の（零元を含む）ある部分集合（部分空間とは限らない）である［24］．

今１つ，簡単な可分な実ヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ を挙げておこう．

$$M = \{1, 2, \cdots, n\},\ dm\,(x) = 1 \quad if \quad x \in M, = 0 \quad if \quad x \notin M \tag{11}$$

とすると，内積 (φ, η) は，

$$(\varphi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} a_k \cdot b_k \tag{12}$$

ここに，

$\varphi = col\ (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)$（実数列としての列ベクトル）

$\eta = col\ (b_1\ b_2\ \cdots\ b_n)$

(13)

と表わされ，この内積 (φ, η) を採用する n 次元ユークリッド空間 R^n は可分な実ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ であることに注意しておく．

2.4　平均零交差回数の，測度的ユニタリ不変量による表現

例えば，R を実数全体として，

$$(\varphi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi\,(x) \cdot \overline{\eta}\,(x) \tag{14}$$

を内積とする可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(R; dx)$ では，パターン $\varphi = \varphi(x)$ を，分散 t，平均値０の１次元正規分布の各確率密度（規格化ガウス形関数）で変換して得られるパターン［2］

$$(B_t\varphi)(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2t}\right] \cdot \varphi\,(y) & \text{if} \quad \mathrm{t} > 0 \\ \varphi\,(x) & \text{if} \quad t = 0 \end{cases} \tag{15}$$

は，半正値自己共役作用素

$$G = \left(\sqrt{-1} \cdot \frac{d}{dx}\right)^2 = -\frac{d^2}{dx^2} \tag{16}$$

の指数関数として，

$$(B_t\varphi)(x) = \left(\exp\left(-\frac{1}{2} \cdot t \cdot G\right) \varphi\right)(x) \tag{17}$$

と表現できる［2］，［13］．このとき，$(B_t\varphi)(x)$ は，式（4）と同様な形式を持つ拡散方程式

$$\frac{\partial\,(B_t\varphi)(x)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \cdot G\,(B_t\varphi)(x) \tag{18}$$

を満たしていること［7］，［8］，［13］に注意しておく．

パターンφに作用素B_tを作用させるということは，ガウスフィルタ（Gaussian filter）によるφの処理に他ならないが，このようなガウスフィルタがスケールt（正規分布の分散）の増加に対し，新たな零交差点（変曲点）を発生させないという“零交差の単調減少性［5］，［7］”はよく知られており，日本語単独母音の連想［32］，認識［42］の計算機シミュレーションにおいて利用された次の事実も興味あることである．

ある1次元区間内の値をとる変数xのパターン$\varphi(x)$の，凸から凹への，あるいは，凹から凸への変化回数，つまり，零交差回数は，

$$(G\varphi)(x) = -\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \text{ の零点の総数であること［32］，［35］，［36］，［40］，［42］} \tag{19}$$

並びに，

$$\forall t\ (\geq 0),\ (B_t\varphi)(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow (G\varphi)(x) = -\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = 0 \tag{20}$$

の成立に留意し，

$$\frac{d^2(B_t\varphi)(x)}{dx^2} = 0 \tag{21}$$

の零点の集合を求め，パターンφのedge候補として採用するのが，

Marrらのthe Laplacian of Gaussian（LOG） filter

である［40］．

記述式（19）などを考慮すると，パターン$\varphi(x)$の平均零交差回数（mean zero-crossing rate）$MZCR(\varphi)$は，式(16)の自己共役作用素Gと$\varphi(x)$との規定する測度的ユニタリ不変量［16］，［17］，［20］

$$\sqrt{\frac{(G\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)}} \geq 0 \tag{22}$$

の値に比例し［32］，［35］，［36］，［42］，，この値は，式（16）のGの固有ベクトルφに対しては完全に一致する今1つの測度的ユニタリ不変量

$$\frac{(\sqrt{G}\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \tag{23}$$

で近似される［27］．

本論文では，式（17）の作用素値指数関数（operator-valued exponential function）B_tを直交分解して，そのfuzzy単調変換性を定義する（第4章を参照）．

3.　曖昧さに関する半順序関係を反映した特徴情報量，$FI(\varphi)$パターンエントロピー$etpy(\varphi)$

本章では，パターンφから抽出される各特徴量$u(\varphi, k)$を用いて，パターン集合Φ上に同値関係$\sim$，並びに，曖昧さの半順序関係$\propto$を定義し（3.1, 3.2節），この半順序関係$\propto$を単調に変換する線形作用素$B(\ell)$が第2章の拡散方程式の解の直交分解から得られる事実を指摘するため（第4章），付録Aで説明されている最大類似度認識法での認識の働きがどの程度のパターン変形に耐えられるかが推

測できる基礎としての半順序関係$\bullet\!\!<$を定義できるための，条件式（24）を指摘し，半順序関係$\bullet\!\!<$を反映した２つの非負量としての特徴情報量$FI(\varphi)$，パターンエントロピー$etpy(\varphi)$を提案する（3.3，3.4節）．尚，文献［4］では，任意のfuzzy論理関数は同様な曖昧さの半順序関係について，単調性を満たしていることが示されている．

以後，３付録A，B，Cの緒説明を前提として，論を進める．

3.1　パターン集合Φ上の同値関係～

式（A13）の特徴抽出写像uを用意し，パターン$\varphi \in \Phi$から抽出される式（1）の特徴量$u(\varphi, k)$の組$\vec{u}(\varphi)$を用いて，処理の対象とする問題のパターン集合Φ上に，次の同値関係～を導入する．

［定義１］（Φの同値関係～）

２つのパターン$\varphi, \eta \in \Phi \subset \mathfrak{H}$について，

$$\varphi \sim \eta \Leftrightarrow \forall k \in L,\ u(\varphi, k)^2 = u(\eta, k)^2. \qquad \square$$

［命題１］

パターン集合Φの２項関係～は同値関係（equivalence relation）であり，次の（1），（2），（3）が成り立つ：

（1）（反射律；reflexive law）$\varphi \sim \varphi$．

（2）（対称律；symmetric law）$\varphi \sim \eta$ならば，$\eta \sim \varphi$．

（3）（推移律；transitive law）$\varphi \sim \eta$かつ$\eta \sim \psi$ならば，$\varphi \sim \psi$．　$\square$

3.2　パターン集合Φ上の半順序関係$\bullet\!\!<$

パターン集合Φ上に，次の半順序関係$\bullet\!\!<$を導入する．異なる半順序関係も導入されている［4]，[37]．

［定義２］（Φの半順序関係$\bullet\!\!<$）

閾値$th(k)$の組$\{th(k)\}_{k \in L}$を用意・固定し，２つのパターン$\varphi, \eta \in \Phi \subset \mathfrak{H}$について，

$$\varphi \bullet\!\!< \eta \Leftrightarrow$$
$$\forall k \in L,\ u(\eta, k)^2 \leq u(\varphi, k)^2 \leq th(k) \vee th(k) \leq u(\varphi, k)^2 \leq u(\eta, k)^2. \qquad \square$$

［命題２］

パターン集合Φの２項関係$\bullet\!\!<$は半順序関係（partial ordering）であり，次の（1），（2），（3）が成り立つ：

（1）（反射律；reflexive law）$\varphi \bullet\!\!< \varphi$．

（2）（反対称律；antisymmetric law）$\varphi \bullet\!\!< \eta$かつ$\eta \bullet\!\!< \varphi$ならば，$\varphi \sim \eta$．

（3）（推移律；transitive law）$\varphi \bullet\!\!< \eta$かつ$\eta \bullet\!\!< \psi$ならば，$\varphi \bullet\!\!< \psi$．　$\square$

以後，パターンから抽出される式（1）の特徴量$u(\varphi, k)$の組$\vec{u}(\varphi)$は，規格化条件

$$\forall k \in L,\ 0 \leq u(\varphi, k)^2 \wedge \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell)^2 \in \{0, 1\} \qquad (24)$$

を満たすとしよう．もし，式（24）を満たしていない各$u(\varphi, k)$に対しては，

$$\frac{u(\varphi, k)}{\sqrt{\sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell)^2}}$$

を改めて，$u(\varphi, k)$と採用すればよい．但し，

$$\sqrt{\sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell)^2} = 0 \text{ ならば，} \frac{u(\varphi, k)}{\sqrt{\sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell)^2}} = 0 \quad for \quad any \quad k \in L$$

と約束する．このとき，各特徴量$u(\varphi, k)$が最小値0或いは，最大値1に近い値をとる程，曖昧さ（fuzziness, ambiguity）が少ないと言え，２元関係$\propto$は曖昧さに関する半順序関係と称されてよい．パターン$\varphi_t \in \Phi$の，上に有界な列$\{\varphi_t\}_{t=0,1,2,\cdots}$の極限は曖昧さが減少するにつれて，２元関係$\propto$の上限（supremum），即ち，最小上界（least upper bound）

$$\exists k \in L, u(\eta, k)^2 = 1 \wedge [\forall \ell \in L - \{k\}, u(\eta, \ell)^2 = 0] \tag{25}$$

を満たすパターン$\eta \in \Phi$に近づくと言えよう．

3.3 半順序関係$\propto$を反映する特徴情報量$FI(\varphi)$

規格化条件式（24）を満たすパターン$\varphi \in \Phi$について，各閾値（threshold value） th（k）について，不等式

$$\forall k \in L, 0 < th(k) < 1 \tag{26}$$

の成立を要請し，非負量

$$FI(k) \equiv$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \log_e \frac{1 - th(k)}{1 - u(\varphi, k)^2} & if \quad 0 < th(k) < u(\varphi, k)^2 \\ 0 \quad if \quad th(k) = u(\varphi, k)^2 \\ \frac{1}{2} \cdot \log_e \frac{th(k) - 0}{u(\varphi, k)^2 - 0} & if \quad u(\varphi, k)^2 < th(k) < 1 \end{cases}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 【psn(th(k) - u(\varphi, k)^2) \cdot \log_e \frac{u(\varphi, k)^2}{th(k)}$$

$$+ psn(u(\varphi, k)^2 - th(k)) \cdot \log_e \frac{1 - u(\varphi, k)^2}{1 - th(k)}】 \tag{27}$$

ここに，

$$psn(u) = 1 \quad if \quad u \geq 0, = 0 \quad if \quad u < 0 \tag{28}$$

を用意し，その総和としての特徴情報量（amount of feature information）と称される非負量

$$FI(\varphi) \equiv \sum_{k \in L} FI(\varphi, k) \tag{29}$$

を定義する．このとき，容易にその成立がわかる次の命題3から，各非負量$FI(\varphi, k)$，その総和$FI(\varphi)$は，半順序関係$\propto$を反映する非負量であるといえよう．

［命題３］

（ⅰ）（特徴情報量FIの最小値）

$$\forall k \in L, u(\varphi, k)^2 = th(k) \Rightarrow FI(\varphi, k) = 0 = \inf_{\varphi \in \Phi} FI(\varphi, k).$$

（ⅱ）（特徴情報量FIの最大値）

式（25）が成り立っていれば，

$$\forall m \in L, FI(\eta, m) = \infty = \sup_{\varphi \in \Phi} FI(\varphi, m).$$

（iii）（特徴情報量 FI の増加性）

$$\varphi \bullet\!\!\propto \eta$$
$$\Rightarrow \forall k \in L, FI(\varphi, k) \le FI(\eta, k)$$
$$\Rightarrow FI(\varphi) \le FI(\eta). \qquad \square$$

次章で，条件式（24）を満たし，Φ 上の定義2の半順序関係 $\bullet\!\!\propto$ をみたすパターン $\eta \in \Phi$ をパターン $\varphi \in \Phi$ に対し，具体的に構成する．

3.4　パターン $\varphi \in \Phi$ のエントロピー $etpy(\varphi)$

確率条件式（24）を満たす式（A13）の特徴抽出写像 u を考えているから，付録Cの式（C15）と同様に，パターン $\varphi \in \Phi$ のエントロピー（entropy）と称される非負量

$$etpy(\varphi) \equiv -\sum_{k \in L} u(\varphi, k)^2 \cdot \log_e u(\varphi, k)^2 \tag{30}$$

を定義できる［17］，［19］，［24］．但し，$0 \cdot \log_e 0 = 0$ を約束している．

式（30）のエントロピー $etpy(\varphi)$ の連続化としての微分エントロピーを定義すると，ヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(R; dx)$ では，量子力学的期待値［16］，［17］の分散が一定の下ではガウス形関数パターン $\varphi(x)$ が微分エントロピーに最大値を与えることが証明されている［27］．

エントロピー関数 $-x \cdot \log_e x\ (0 \le x \le 1)$ に関し，次の補助定理1が成り立つことは，良く知られている．

［補助定理1］（エントロピーの減少定理）

確率条件

$$[\forall q \in K, 0 \le x_q \le 1] \wedge \sum_{q \in K} x_q = 1$$

の下では，

相異なる $k, m \in K$ に対し，ある非負実数 δ が存在して，

$$0 \le x_k \le x_m \le 1 \wedge$$
$$0 \le x'_k \equiv x_k - \delta \le x'_m \equiv x_m + \delta \le 1 \wedge$$
$$[\forall q \in K - \{k, m\}, x'_q \equiv x_q]$$

であれば，不等式

$$-\sum_{q \in K} x'_q \cdot \log_e x'_q \le -\sum_{q \in K} x_q \cdot \log_e x_q$$

が成り立つ．等号が成り立つのは，$\delta = 0$ のときに限る．　$\square$

上の補助定理1を複数回適用すれば，次の命題4の成立がわかり，式（29）の特徴情報量 $FI(\varphi)$ と同様に，式（30）のパターンエントロピー $etpy(\varphi)$ は，半順序関係 $\bullet\!\!\propto$ を反映する非負量であることがわかる．尚，一般に，集合 K に含まれる要素の総数を $|K|$ と表している．

［命題4］

（i）（エントロピーetpyの最大値）

$$\forall k \in L, u(\varphi, k)^2 = \frac{1}{|L|} \Rightarrow etpy(\varphi) = \log_e |L| = \sup_{\varphi \in \Phi} etpy(\varphi).$$

（ⅱ）（エントロピーetpyの最小値）
式（25）が成り立っていれば，

$$etpy(\varphi) = 0 = \inf_{\varphi \in \Phi} etpy(\varphi).$$

（ⅲ）（エントロピーetpyの減少性）

$$\varphi \multimap \eta \Rightarrow etpy(\varphi) \geq etpy(\eta).$$ □

4. 拡散方程式の解の直交分解から得られる線形作用素$B_t(\ell)$と，fuzzy単調変換の実現

本章においても，前章と同様に，3付録A，B，Cの諸説明を前提として，論を進め，確率条件式（24）を満たす式（A13）の特徴抽出写像uの存在を指摘し，前章で定義された半順序関係$\multimap$に関し，

$$\forall\varphi \in \Phi,\ \varphi \multimap A\varphi \tag{31}$$

を満たす線形作用素Aを3種類決定する（定理1，2）.

文献［4］では，任意のfuzzy論理関数は曖昧さの半順序関係について，単調性を満たしていることが示されている．本章では，パターンφから抽出される特徴量$u(\varphi, k)$を用いて，パターン集合Φ上に同様な半順序関係$\multimap$を定義し，この半順序関係$\multimap$を単調［29］に変換する線形作用素$B(\ell)$は第2章の拡散方程式の解の直交分解から得られる事実を指摘する．併せて，付録Aで説明されている最大類似度認識法での認識の働きがどの程度のパターン変形に耐えられるかが推測できる基礎を研究する（定理3，付録AのA6節）.

4.1 第$k \in L$番目のユニタリ測度的不変量$\mathfrak{F}_k(\varphi)$とパターン形状素ψ_k

先ず，作用素Aの定義域$Domain(A)$，値域$Range(A)$を次のように導入する：

$$Domain(A) \equiv \{\varphi \in \mathfrak{H} \mid \|A\varphi\| < \infty\}. \tag{32}$$

$$Range(A) \equiv \{\eta \in \mathfrak{H} \mid \exists\varphi \in Domain(A),\ \eta = A\varphi\}. \tag{33}$$

□

自己共役作用素Hを用意する．Hの関数としての第$k \in L$番目の射影作用素$\theta_k(H)$の組$\{\theta_k(H)\}_{k \in L}$を，3条件

$$\theta_k(H) \cdot \theta_\ell(H) = \begin{cases} \theta_k(H) & \text{if} \quad k = \ell \\ 0 & \text{if} \quad k \neq \ell \end{cases} \tag{34}$$

$$\forall k \in L,\ \theta_k(H) \neq 0 \tag{35}$$

$$\forall\varphi, \forall\eta \in \mathfrak{H},\ (\theta_k(H)\varphi, \eta) = (\varphi, \theta_k(H)\eta) \tag{36}$$

を満たすように，構成する．このとき，$\theta_k(H)$の値域同士$Range(\theta_k(H))$の直交性

$$\forall\varphi \in Range(\theta_k(H)),\ \forall\eta \in Range(\theta_\ell(H)), (\varphi, \eta) = 0\ (k \neq \ell) \tag{37}$$

が成立している．非負実数値Borel可測関数$f(\lambda)$を用意する．

不等式

$$\forall\varphi \in Domain(f(H)\varphi, \varphi) \geq 0 \tag{38}$$

を満たすという意味で半正値自己共役作用素と呼ばれる線形作用素$f(H)$が定義され，Hの関数としての第$k \in L$番目の半正値自己共役作用素

$$f_k(H) \equiv \theta_k(H) \cdot f(H) \tag{39}$$

の組$\{f_k(H)\}_{k \in L}$が得られる．

$$Domain\,(f_k(H)) \subseteq Domain\,(f(H)) \tag{40}$$

が成り立っており［24］，

$$\mathfrak{F}_k(\varphi) \equiv \frac{(f_k(H)\varphi, \varphi)}{\sum_{k \in L}(\theta_k(H)\varphi, \varphi)} \tag{41}$$

と定義されるユニタリ測度的不変量［17］，［20］$\mathfrak{F}_k(\varphi)$に関し，$f(H)), \theta_k(H)$の可換性

$\varphi \in Domain\,(f(H))$ならば，

$$\forall k \in L, \theta_k(H)\varphi \in Domain\,(f(H)) \wedge f(H) \cdot \theta_k(H)\varphi = f_k(H)\varphi \tag{42}$$

が成り立っており，従って，3条件式（34）～（36）を使うと，

$$\forall k \in L, \forall \varphi \in Domain\,(f(H)), 0 \leqq \mathfrak{F}_k(\varphi) < \infty \tag{43}$$

が成り立つ［24］が知られている．

Hと可換なといわれる任意のユニタリ作用素Uに関し，

任意の$k \in L$について，$\varphi \in Domain\,(f_k(H))$ならば，

$$U\varphi \in Domain\,(f_k(H)) \wedge f_k(H) \cdot U\varphi = U \cdot f_k(H)\varphi \tag{44}$$

が成り立ち，

Hと可換な任意のユニタリ作用素Uの下での不変性（ユニタリ座標変換不変性［17］）

$$\forall \varphi \in Domain\,(f(H)),\ \mathfrak{F}_k(U\varphi) = \mathfrak{F}_k(\varphi) \tag{45}$$

が成り立っている［23］．

式（A2）の第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の，式（A2）のΩの内の代表パターンω_jを，確率条件式（A3）を満たす$\mathfrak{C}_j$の生起確率$p(\mathfrak{C}_j)$で平均して得られ，平均化パターンと称されるパターン

$$\xi \equiv \sum_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) \cdot \frac{\omega_j}{\|\omega_j\|} \tag{46}$$

を導入する．各パターン形状素ψ_kは，次のように定義されている：3条件

$$\xi\,(\neq 0) \in Domain\,(f(H)) \tag{47}$$

$$\forall k \in L, \theta_k(H)\xi \neq 0 \tag{48}$$

$$\forall k \in L, 0 < \mathfrak{F}_k(\xi) < \infty \tag{49}$$

の下で，複素定数b_kの組$\{b_k\}_{k \in L}$を導入し，

$$\psi_k \equiv b_k \cdot \frac{\theta_k(H)\xi}{\left\| \sum_{\ell \in L} \theta_\ell(H)\xi \right\|} \tag{50}$$

ここに，

$$[\forall k \in L, b_k \neq 0] \wedge \sup_{k \in L} |b_k|^2 < 0 \tag{51}$$

□

手書き漢字，日本語単独母音に関するパターン情報処理（パターン構造の再生，パターンの認識，パターン系列の連想）に関し，使用された$H, \theta_k(H), f(\lambda), \omega_j, p(\mathfrak{C}_j), \psi_k$の緒例がある［18］，［19］，

［23］，［25］，［26］，［30］，［32］，［34］～［36］，［42］．

尚，文献［16］～［23］，［25］～［32］，［34］～［36］，［41］，［42］では，恒等条件

$$\sum_{k \in L} \theta_k(H) = I \tag{52}$$

が満たされている場合を想定しているが，上述の諸定義では，この恒等条件はパターンφの大局的構造の抽出場面などにおいて必ずしも必要ではないこと［18］，［19］，［23］が指摘されている［24］．

4.2 本論文での特徴抽出写像uの設定

以後，処理の対象とする問題のパターンφの集合Φを，少なくとも，

$$\Phi \subseteq Domain(f(H)) \tag{53}$$

であるように選ぶ．式（45）で示されるユニタリ座標変換不変性を備えている式（41）の各測度的不変量$\mathfrak{J}_k(\varphi)$を使って，第$\ell \in L$番目の規格化比測度的不変量［24］と称される1より大きくない非負量

$$\mathfrak{G}_\ell(\varphi) \equiv \begin{cases} [\mathfrak{J}_k(\varphi)/\{|b_\ell|^2 \cdot \mathfrak{J}_\ell(\xi)\}]/[\sum_{k \in L} \mathfrak{J}_k(\varphi)/\{|b_k|^2 \cdot \mathfrak{J}_k(\xi)\}] & \\ \qquad \cdots \exists k \in L,\ \mathfrak{J}_k(\varphi) > 0 \text{ の場合} & \\ 0 \qquad \cdots \forall k \in L,\ \mathfrak{J}_k(\varphi) = 0 \text{ の場合} & \end{cases} \tag{54}$$

を導入し，パターン$\varphi \in \Phi \subseteq Domain(f(H))$から抽出される第$k \in L$番目の特徴量$u(\varphi, \ell)$を，

$$u(\varphi, \ell) \equiv [\mathfrak{G}_\ell(\varphi)]^{1/2} \tag{55}$$

と定義する．そうすれば，確率条件式（24）を満たす式（A13）の特徴抽出写像uが用意出来たことがわかり，第3章の4命題1～4が成り立つことになる．

4.3 パターンモデル$T\varphi$

2式（50），（55）での各パターン形状素ϕ_k，各特徴量$u(\varphi, k)$を使えば，付録A，A2節の4性質①～④を満たす式（A11）で示される式（A4）のモデル構成作用素Tが得られ［24］，よって，A3節の3性質（イ)～(ハ）を満たす式（A23）で定義される式（A15）の類似度関数SMが得られる．

よって，A5節での“最大類似度法”という認識法が適用され得る．

式（50）の各パターン形状素ϕ_kについて，不動点方程式

$$\forall k \in L,\ T\phi_k = \phi_k \tag{56}$$

が成り立っているが［24］，このとき，次の命題5が成り立ち，各ϕ_kは定義2の半順序関係$\multimap$の極大要素（maximal element）であることがわかる．

［命題5］ 式（A11）の写像Tの形式では，

$$\forall k \in L, \forall \varphi \in \Phi, \varphi \multimap \phi_k.$$

（証明）式（A11）の写像Tの形式を考慮すると，式（56）から，

$$u(\phi_k, \ell) = 1 \quad if \quad k = \ell, = 0 \quad if \quad k \neq \ell \tag{57}$$

を得て，定義2を満たすことがわかる． □

4.4　fuzzy半順序$\bullet\!\!\propto$ を保存する２種類の線形作用素

まず，３つの補助定理２，３，４を用意する．

［補助定理２］

$$\forall\varphi \in Domain\,(A),\ (A\varphi,\varphi) \geq 0 \tag{58}$$

を満たす任意の半正値自己共役作用素 A について，

$$v\,(\varphi, A) \equiv \sqrt{\frac{(A\varphi,\varphi)}{(\varphi,\varphi)}} \tag{59}$$

とおくと，

$$\forall\varphi \in Domain\,(\sqrt{A}) \cap Domain\,(A) \cap Domain\,(A^2),$$

$$v\,(\varphi, A) \leq v\,(\sqrt{A}\varphi, A) \leq v\,(A\varphi,\varphi). \tag{60}$$

（証明）付録Dを参照．　□

［補助定理３］

任意の$\varphi \in \Phi$ について，

（ⅰ）$\forall\ell \in L,\quad \mathfrak{F}_\ell(\varphi) \leqq \mathfrak{F}_\ell(\sqrt{f_\ell(H)}\varphi) \leqq \mathfrak{F}_\ell(f_\ell(H)\varphi).$

（ⅱ）$\forall\ell \in L, \forall k \in L-\{\ell\},$

$$\mathfrak{F}_k(\varphi) \geqq \mathfrak{F}_k(\sqrt{f_\ell(H)}\varphi) = \mathfrak{F}_k(f_\ell(H)\varphi) = 0.$$

（証明）付録Dを参照．　□

［補助定理４］

条件

$$[\forall k \in L,\ 0 \leq x_k] \wedge [\exists k \in L,\ 0 < x_k]$$

を満たす独立な変数x_k の組$\{x_k\}_{k\in L}$ の関数

$$0 \leq F\ell \equiv \frac{x_\ell}{\sum_{\ell \in L} x_\ell} \leq 1 \quad \text{for any} \quad \{x_k\}_{k\in L}$$

について，

$$\frac{\partial F_\ell}{\partial x_\ell} = \frac{1-F_\ell}{\sum_{k\in L} x_k} = \frac{F_\ell}{x_\ell}\cdot[1-F_\ell] \geq 0$$

を得て，F_ℓ はx_ℓ の単調非減少関数である．　□

２式（54)，(55）を考慮し，

$$x_k = \mathfrak{F}_k(\varphi)/\{|b_k|^2\cdot\mathfrak{F}_k(\xi)\},\ k \in L \tag{61}$$

と置き，補助定理４を補助定理３に適用すると，次の定理１の成立が判明する．

［定理１］（$\sqrt{f_\ell(H)}, f_\ell(H)$ の半順序保存定理）

任意の$\varphi \in \Phi$ について，

$$th\,(\ell) \leq u\,(\varphi,\ell)^2 \leq 1 \wedge [\forall k \in L-\{\ell\},\ 0 \leq u\,(\varphi,k)^2 \leq th\,(k)] \tag{62}$$

のとき，

$$\varphi \bullet\!\!\propto \sqrt{f_\ell(H)}\varphi \bullet\!\!\propto f_\ell(H)\varphi. \tag{63}$$

□

式（39）の第$\ell \in L$ 番目の半正値自己共役作用素 $f_\ell(H)$ の空間回路的画像強調効果として知られている情報処理機能［18］は恐らく，定理１の意味する3.2節，定義２の半順序$\bullet\!\!\propto$ によるものであろう．

4.5　拡散方程式から得られる線形作用素$B_t(\ell)$

付録Cでは，式（C2）で表される統計作用素Sのエントロピーを与える式（C12）の$ETPY(S)$にS.Suzukiの式（C10）の平均類似度$ASM(\Psi,\varphi)$が一定の下で最大値を与えるSは，式（C13）の自己共役作用素Gの規格化指数関数式（C22）で表示され，然も，拡散方程式（C29）の解は$S\eta$であることが示されている．

同様に，拡散方程式（18）に注目し，その一般化としての，以下の方程式（64）について，先ず，考えよう．

初期条件$\varphi|_{t=0}=\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$の下での，拡散方程式

$$\frac{\partial\varphi_t}{\partial t}=-\frac{1}{2}\cdot f(H)\varphi_t \tag{64}$$

の解φ_tは，自己共役作用素Hの関数としての，1パラメータ$t\,(\geq 0)$の作用素値指数関数

$$B_t\equiv\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot t\cdot f(H)\right) \tag{65}$$

を導入すると，

$$\varphi_t=B_t\varphi \tag{66}$$

と表される．同様に，式（39）の$f_\ell(H)$の指数関数

$$B_t(\ell)\equiv\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot t\cdot f_\ell(H)\right) \tag{67}$$

を用意すると，同様な拡散方程式の系

$$\forall\ell\in L,\ \frac{\partial B_t(\ell)\varphi}{\partial t}=-\frac{1}{2}\cdot f_\ell(H)B_t(\ell)\varphi \tag{68}$$

が成り立つ．

$f(H)$，各$f_\ell(H)$は共に半正値自己共役作用素であるから，2式（65），（67）のB_t，各$B_t(\ell)$は式（D31）からわかるように，任意の$t\geq 0$について有界作用素であり，然も，半正値自己共役作用素であることに注意しておく．

先ず，次の命題6を用意する．

［命題6］

（ⅰ）$\forall\ell\in L,\ B_t(\ell)=\theta_\ell(H)\cdot B_t+I-\theta_\ell(H)$

が成り立ち，

（ⅱ）恒等条件式（52）が成立しているように，各$\theta_\ell(H)$が選ばれているならば，

$$\sum_{\ell\in L}B_t(\ell)=B_t+|L|-I.$$

（証明）付録Dを参照．　□

上述の命題6を使って得られる式（67）の$B_t(\ell)$についての各種表現式を，以下の補助定理5に示しておく．

［補助定理5］

恒等条件式（52）が成立しているように，各$\theta_\ell(H)$が選ばれているならば，次の（ⅰ）～（ⅳ）が成り立つ：

（ⅰ）$\theta_\ell(H)\cdot B_{2t}(\ell)=\theta_\ell(H)\cdot\exp(-t\cdot f(H))$.

（ⅱ）$f_\ell(H)\cdot B_{2t}(\ell)=f_\ell(H)\cdot\exp(-t\cdot f(H))$.

（iii）$m \neq \ell$ として，$\theta_m(H) \cdot B_{2t}(\ell) = \theta_m(H)$.
（iv）$m \neq \ell$ として，$f_m(H) \cdot B_{2t}(\ell) = f_m(H)$.
［系1］

$$\forall t\ (\geq 0),\ \forall \ell \in L,\ \mathfrak{F}_\ell(B_t(\ell)\varphi) = \frac{(f_\ell(H) \cdot \exp(-t \cdot f(H))\varphi, \varphi)}{(B_{2t}(\ell)\varphi, \varphi)}.$$

［系2］

$$\forall t\ (\geq 0),\ \forall \ell \in L,\ \forall k \in L-\{\ell\},\ \mathfrak{F}_k(B_t(\ell)\varphi) = \frac{(f_k(H)\varphi, \varphi)}{(B_{2t}(\ell)\varphi, \varphi)}.$$

（証明）付録Dを参照.　□

［補助定理6］

$g(\lambda)$ は実変数 λ のBorel可測実数値関数とする．更に，t は任意の実数とする．このとき，

$$\varphi \in \cap_t [\mathit{Domain}\ (\exp(t \cdot g(H))) \cap \mathit{Domain}\ (g(H) \cdot \exp(t \cdot g(H))) \cap \mathit{Domain}\ (g(H)^2 \cdot \exp(t \cdot g(H)))] \subseteq \Phi \tag{69}$$

に対し定義される実数値関数

$$q(t) \equiv \frac{(g(H) \cdot \exp(t \cdot g(H))\varphi, \varphi)}{(\exp(t \cdot g(H))\varphi, \varphi)} \tag{70}$$

は，実変数 t の増加関数（非減少関数）である．

（証明）付録Dを参照.　□

いよいよ，次の最後の補助定理7を用意できる．

［補助定理7］

恒等条件式（52）が成立しているように，各 $\theta_k(H)$ が選ばれているとしょう．ならば，式（67）の $B_t(\ell)$ について，任意の $\varphi \equiv \mathit{Domain}\ (f(H))$ について，次の（ i ），（ ii ）が成り立つ：

（ i ）$\forall t \geq 0, \forall \ell \in L,\ \mathfrak{F}_\ell(\varphi) \geqq \mathfrak{F}_\ell(B_t(\ell)\varphi)$.
（ ii ）$\forall t \geq 0, \forall \ell \in L, \forall k \in L-\{\ell\},\ \mathfrak{F}_\ell(\varphi) \leq \mathfrak{F}_k(B_t(\ell)\varphi)$.

（証明）付録Dを参照.　□

上述の補助定理7を使って，次の定理2が証明される．

［定理2］（$\theta_k(H) B_t(\ell)$ の半順序保存定理）

恒等条件式（52）が成立しているように，各 $\theta_k(H)$ が選ばれているとしよう．ならば，

$$\forall k \in L,\ \mathfrak{F}_k(\varphi) > 0$$

を満たす任意の $\varphi \in \Phi$ について，２定義式（54），（55）の各特徴量 $u(\varphi, k)(k \in L)$ の採用下で

$$0 < u(\varphi, \ell)^2 \leq th(\ell) \wedge [\forall k \in L-\{\ell\}, th(k) \leq u(\varphi, k)^2 < 1] \tag{71}$$

であれば，

$$\forall \ell \in L, \forall t\ (0 \leq t < \infty), \varphi \bullet\!\!< B_t(\ell)\varphi. \tag{72}$$

（証明）付録Dを参照.　□

定理2では，恒等条件式（52）が成立しているように，各 $\theta_k(H)$ が選ばれているとしている．この恒等条件式(52)について検討しておこう．各射影作用素 $\theta_k(H)$ は理想帯域フィルタであって[18]，[19]，[23]，$\{\theta_k(H)\}_{k \in L}$ は理想帯域フィルタの組である．

$$\varphi' \equiv \sum_{k \in L} \theta_k(H)\varphi \tag{73}$$

と置けば，φ'はφの帯域制限パターンである．

次の定理３，（ⅱ）は式（45）の応用であり，付録Aの最大類度認識法がユニタリ座標変換不変性を備えている事実を指摘している．

［定理３］（帯域制限パターンφ'，並びに，ユニタリ座標変換不変パターン$U\varphi$のモデル$T\varphi'$，$TU\varphi$の半順序保存定理）

式（50）の各パターン形状素φ_kと，式（55）の各特徴量$u(\varphi, k)(k \in L)$とを採用して得られる式（A11）のパターンモデル$T\varphi \in \Phi$について考えよう．任意の$\varphi \in \Phi \subset Domain\,(f(H))$について，次の（ⅰ），（ⅱ）が成り立つ：

（ⅰ）（パターンモデル$T\varphi$の帯域制限性）

式（73）のφ'に関し，

$$\forall k \in L,\ \mathfrak{F}_k(\varphi') = \mathfrak{F}_k(\varphi)$$

$$\therefore \quad \varphi' \sim \varphi \quad \therefore \quad T\varphi' = T\varphi$$

を得，よって，

$$\varphi \bullet\!\!\propto \eta \Rightarrow \varphi' \bullet\!\!\propto \eta \wedge \varphi \bullet\!\!\propto \eta' \wedge \varphi' \bullet\!\!\propto \eta'. \tag{74}$$

（ⅱ）（パターンモデル$T\varphi$のユニタリ座標変換不変性）

Hと可換なといわれる任意のユニタリ作用素Uに関し，

$$U\varphi \sim \varphi \quad \therefore \quad TU\varphi = T\varphi$$

を得，よって，

$$\varphi \bullet\!\!\propto \eta \Rightarrow U\varphi \bullet\!\!\propto \eta \wedge \varphi \bullet\!\!\propto U\eta \wedge U\varphi \bullet\!\!\propto U\eta. \tag{75}$$

（証明）付録Dを参照．□

上述の定理３からわかるように，定理２は，$\varphi \in \Phi$の，式（73）の帯域制限パターン$\varphi' \in \Phi$についても同様に成立し，実質，定理１と同様に，恒等条件式（52）は制限とはならないことがわかる（付録Aの定理A1をも参照）．

4.6　エントロピーの単調減少性

文献［5］～［8］，［13］～［15］，［18］で登場し，典型的で実用上も重要な式（15）で表されている式（17）のガウス形積分作用素B_tを採用し，説明しよう．

$$H = G, f(\lambda) = \lambda \tag{76}$$

と，本節では，選ぶ．

線形作用素$B_t(\ell)$は式（67）で定義されているが，$|L| = 1$の場合，命題５からわかるように，恒等条件式（52）が成立していれば，

$$\forall \ell \in L, B_t(\ell) = B_t \tag{77}$$

であることに留意しておく．

定理１，２を命題４の（ⅲ）に適用すれば，その諸条件下で，式（30）でのエントロピー$etpy(\varphi)$の単調減少性

$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots$について，

$$\forall \ell \in L, etpy(\varphi) \geq etpy(f_\ell(H)^{t_1}\varphi) \geq etpy(f_\ell(H)^{t_2}\varphi) \geq \cdots \tag{78}$$

$$\forall \ell \in L, etpy(\varphi) \geq etpy(B_{t_1}(\ell)\varphi) \geq etpy(B_{t_2}(\ell)\varphi) \geq \cdots \tag{79}$$

が得られるような不等式（26）を満たす閾値$th(k)$の組$\{th(k)\}_{k \in L}$が存在することがわかる．

エントロピーetpyの，２式（78），（79）で示されるこの単調減少性が，2.4節で説明されている“零

交差の単調減少性”に対応する内容であり，本研究がガウスフィルタの備えている情報処理機能の今１つの側面を明らかにしたといってもよいであろう．

5.　３つのパターン変形過程から得られる原パターン$\varphi \in \Phi$ の大局的なパターン構造の抽出

２定理１，２を命題４の（iii）に適用して得られた前章,4.6節の論からわかるように，もし，２つのパターン$\varphi, \eta \in \Phi$ が，3.2節，定義２の$\bullet\!\!<$ という“半順序関係”で$\varphi \bullet\!\!< \eta$ と表現されていれば，

パターンη はパターンφ へと変形（deformation）されている（または，φ はη を近似（approximate）する）　(80)

もいえる．本章では，２つの直交パターン間の多段階変換を先ず説明した後（5.2節），このような類のパターン変形を３種類導入し（5.4〜5.6節），その意味を検討する（5.1, 5.3節）．

5.1　パターンと今１つのパターンとの境界

付録AのA1節で説明されているように，典型，即ち，代表パターンを中心として事例パターン集合が序列づけられたカテゴリ構造を持つと想定してみよう．

（ｉ）各カテゴリ$\mathfrak{C}_j$（第$j \in J$番目の類概念）には，原型（prototype）としての代表パターン$\omega_j \in \Omega \subset \Phi$ があり，このカテゴリ$\mathfrak{C}_j$ に帰属する事例としてのパターン$\varphi \in \Phi$ は，ある観点から，即ち，式（A13）の特徴抽出写像u の観点から$\omega_j \in \Omega$ を類似している（3.1節の定義１）．

（ⅱ）従って，ある１つのカテゴリに帰属する事例パターンと帰属しない事例パターンとの境界は曖昧（fuzzy）である．

（ⅲ）１つのカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属しない事例パターンφ については，この非典型的な事例パターンφ から非典型的な事例パターンϕ' へ，さらに，この非典型的な事例パターンϕ' からそのカテゴリに帰属する典型的な事例パターンω_j へと連続的につながっている．言い換えれば，あるカテゴリの成員であるかどうかを決めるグレード構造がある．

5.2　２つの直交パターン間の多段階変換

直交式

$$(\eta, \phi) = 0 \wedge \eta \neq 0 \wedge \phi \neq 0 \tag{81}$$

が成立している２つのパターン$\eta, \phi \in \Phi$が与えられたとしよう．

$$\eta' \equiv \frac{\eta}{\|\eta\|},\ \phi' \equiv \frac{\phi}{\|\phi\|} \tag{82}$$

とし，

$$\phi_t\ |_{t=0} \equiv \eta' \to \phi_1 \to \phi_2 \to \cdots \to \phi_t\ |_{t=N} \equiv \phi' \tag{83}$$

と多段階変換出来ることを示す．

$$\phi_t \equiv \frac{\eta}{\|\eta\|} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{t}{N}\right) + \frac{\phi}{\|\phi\|} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{t}{N}\right),\ t = 0, 1, 2, \cdots, N \tag{84}$$

を構成してみよう［40]，［46]．

$$\forall t \in \{0, 1, 2, \cdots, N\}, \|\phi_t\|^2 = (\phi_t, \phi_t) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{N}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{N}\right) = 1 \tag{85}$$

に注意する．また，

$$\begin{aligned}&(\varphi_t, \varphi_s)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{N}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{s}{N}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{N}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{s}{N}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{s-t}{N}\right) \geq 0,\ t, s = 0, 1, 2, \cdots, N\end{aligned} \tag{86}$$

を得，式（A18）で定義される類似性尺度$sim(\phi_t, \phi_s)$を計算すると，

$$\begin{aligned}&sim(\phi_t, \phi_s) \equiv \left|\left(\frac{\phi_t}{\phi_t}, \frac{\phi_s}{\phi_s}\right)\right|\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{s-t}{N}\right) \geq 0,\ t, s = 0, 1, 2, \cdots, N\end{aligned} \tag{87}$$

を得，類似性尺度simの単調性

$$\begin{aligned}&|t-s| \geq |p-q|\\ &\Rightarrow 0 \leq sim(\phi_t, \phi_s) \leq sim(\phi_p, \phi_q) \leq 1\end{aligned} \tag{88}$$

が成立することがわかった．

以後，式（83）を簡単に，

$$\eta' \rightarrow_* \phi' \tag{89}$$

と表記しよう．

5.3　任意のノルム規格化パターンから任意のノルム規格化パターンへの変換

Zは複素定数全体の集合であるとして，$a, b \in Z$を選ぶ．

$$a \neq 0 \vee b \neq 0 \Rightarrow a\cdot\varphi + b\cdot\eta = 0$$

と，２つのパターン$\varphi, \eta \in \Phi$が１次従属の場合は，自明であるから，そうでない場合を考えよう．

$$a\cdot\varphi + b\cdot\eta = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b = 0$$

と，１次独立な２つのパターン$\varphi, \eta, \phi \in \Phi$に対し，$\eta, \phi \in \Phi$が１次独立であるように，パターン$\phi$を選定すると，２つのパターン$\varphi, \eta \in \Phi$に直交するパターン$\varphi' \in \Phi$は，

$$\varphi' \equiv \phi - \left(\phi, \frac{\varphi'}{\|\varphi'\|}\right)\cdot\frac{\varphi'}{\|\varphi'\|} - \left(\phi, \frac{\eta'}{\|\eta'\|}\right)\cdot\frac{\eta'}{\|\eta'\|} \tag{90}$$

ここに，

$$\varphi' \equiv \varphi \tag{91}$$

$$\eta' \equiv \eta - \left(\eta, \frac{\varphi'}{\|\varphi'\|}\right)\cdot\frac{\varphi'}{\|\varphi'\|} \tag{92}$$

と与えられるから［1］，

$$\frac{\varphi}{\|\varphi\|} \rightarrow_* \frac{\varphi'}{\|\varphi'\|} \rightarrow_* \frac{\eta}{\|\eta\|} \tag{93}$$

という変換過程を用意し，$\eta = \omega_j$と考えると，これは，5.1節，（iii）でのパターン多段階変換である．

5.4　重要な局所的なパターン構造を残存させた大局的な構造を備えたパターンを得るパターン変換法

5.4.1　ヒルベルト変換 A

可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(R; dx)$ では,

$$H = \frac{1}{i} \cdot \frac{d}{dx}, \text{ ここに, } i \equiv \sqrt{-1}$$

と定義される線形作用素 H は,

$$(H\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda) \varphi(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \exp(+i\lambda x) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp(-i\lambda x) \cdot \varphi(y)$$

とスペクトル表現され［1］，この事実を利用すると,

$$(A\varphi)(x) \equiv \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{y-x} \cdot \varphi(y)$$

と定義されるヒルベルト変換 A は，H の関数として,

$$A = i \cdot sign(H)$$

と表現されることが知られている．ここに,

$$sign(\lambda) = \begin{cases} -1 & if \quad \lambda < 0 \\ 0 & if \quad \lambda = 0 \\ +1 & if \quad \lambda > 0 \end{cases}$$

である．この線形作用素 A は

$$\forall \eta \in L_2(R; dx), \| A\eta \| = \| \eta \|$$

が成り立つという意味でユニタリ作用素であり，然も，$A\eta$ は η に対し直交する元（η の直交元）であり,

$$\forall \text{ real-valued function } \eta \in L_2(R; dx), (\eta, A\eta) = 0$$

が成り立つことが知られている．

5.4.2　パターン φ とその直交変換像 $A\varphi$ の間のパターン構造を得ること

前項などで登場している線形作用素 A を使えば，実数値パターン $\varphi \in \Phi$ に対し,

$$\varphi \rightarrow_* A\varphi, \text{ ここに, } (\varphi, A\varphi) = 0 \tag{94}$$

という直交変換を考えることが出来，そのパターン多段階変換途中で生成され，式（84）と同様な第 $t\ (= 0, 1, 2, \cdots, N)$ 段階パターン

$$\phi_t \equiv \frac{\varphi}{\| \varphi \|} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{t}{N}\right) + \frac{A\phi}{\| A\phi \|} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{t}{N}\right), t = 0, 1, 2, \cdots, N \tag{95}$$

の列

$$\phi_0 \left(\equiv \frac{\varphi}{\| \varphi \|}\right), \phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{N-1}, \phi_N \left(\equiv \frac{A\phi}{\| A\phi \|}\right) \tag{96}$$

から，適当なtの値を持つパターンϕ_tを選び，ノルム規格化原パターン$\dfrac{\varphi}{\|\varphi\|}$の形状を部分的に反映したパターンとして採用することによって，重要な局所的なパターン構造を残存させた大局的な構造を備えたパターンϕ_tを得ることが出来よう．

5.5　反転パターンをも考慮したパターン構造の抽出

前項などで登場している線形作用素Aを使うことを考えよう．条件

$H\eta = 0$を満たす$\eta \neq 0$は存在しない

を満たす或る自己教作用素Hを導入し，ユニタリ作用素$A = i \cdot sign(H)$を考えれば，

$$A^2 = -I, A^4 = I \tag{97}$$

が成立しているから，パターン多段階変換

$$\varphi \to_* A\varphi \to_* A^2\varphi = -\varphi \tag{98}$$

$$A^2\varphi = -\varphi \to_* A^3\varphi \to_* A^4\varphi = \varphi \tag{99}$$

を考えることが出来る．後者の変換過程（99）の途中で生成されたパターンの内適切なものを採用すれば，反転パターン$A^2\varphi = -\varphi$から,5.3節と同様なパターン構造を抽出出来ることがわかる．

5.6　拡散変換によるパターン構造の抽出

拡散方程式（64）の解である式（66）で表される$B_t\varphi$は，

$$\|B_t\varphi\| \to 0 \, (t \to \infty) \tag{100}$$

を満たす．原パターン$\varphi \in \Phi$の大局構造を反映したパターンとして，適切なtの値の$B_t\varphi$を採用するのが，従来の手法［5］～［8］，［13］～［15］，［18］である．

この従来の手法を改良することを考えてみよう．

$B_t\varphi$の代りに，拡散方程式（68）の解を与える作用素である式（67）の各$B_{t_k}(k)$を用い，命題5を考慮し，適切なt_kの組$\{t_k\}_{k \in L}$を選定し，

$$\sum_{k \in L} B_{t_k}(k)\varphi \tag{101}$$

を採用することが考えられる．

以下に，$B_t\varphi$の代りに，式（101）を採用することの意味を1次元画像パターン$\varphi = \varphi(x)$で説明するが，2次元画像パターン$\varphi = \varphi(x_1, x_2)$の場合もほぼ，同様である．

画像から大局的な構造を抽出するとき，式（15）のガウス形積分作用素B_t内の，画像$\varphi = \varphi(x)$をどの程度の荒っぽさで眺めるかを決定するスケールパラメータtを，場所x毎に変えれば，画像パターンφの重要でない局所的な構造を捨て去って，大局的な構造を反映したパターンが得られる［14］．

式（16）の自己共役作用素Gが，式（14）での内積(φ, η)を使用し，

$$(G\varphi)(x) = (H^2\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \quad \phi_\lambda(x) \cdot \lambda^2 \cdot (\varphi, \phi_\lambda) \tag{102}$$

ここに，

$$H = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{d}{dx} \tag{103}$$

$$\phi_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(\sqrt{-1} \cdot \lambda x) \tag{104}$$

とスペクトル表現され，よって，３条件式（34）～(36）を満たす各射影作用素$\theta_\ell(H)$が，

$$\forall\varphi\in\mathfrak{H},\ (\theta_\ell(H)\varphi)(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\quad\theta_\ell(\lambda)\psi_\lambda(x)\cdot(\varphi,\psi_\lambda)\tag{105}$$

ここに，

$$\theta_\ell(\lambda)=1\quad if\quad\lambda\in S_\ell,=0\quad otherwise\tag{106}$$

とスペクトル表現される各Borel可測集合S_ℓが存在する［1]，[16]，[17］から，式（101）の採用は，式（67）の形式の各$B_{t_k}(k)$が

$$(B_{t_k}(k)\varphi)(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\quad\psi_\lambda(x)\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot t_k\cdot\theta_k(\lambda)\cdot\lambda^2\right)(\varphi,\psi_\lambda)\tag{107}$$

とスペクトル表現されることを思い起こせば，スペクトルλ毎にスケールパラメータt_kを変えようという思想になっていることに注意しておく．

6.　むすび

付録Aで説明されている最大類似度認識法などからわかるように，パターン認識の働きは，過去に経験している式（A2）の典型的な事例パターン集合$\Omega\ (\subset\Phi)$との類似性を利用して，未知の入力パターン$\varphi\in\Phi$を認知するものである．

$$\forall\varphi\in\mathfrak{H},\ TU\varphi=T\varphi\quad\because\quad\text{定理 3 の（ii）}$$

$$\therefore\quad TU\varphi\in\{\varphi\}\quad\because\quad\text{式（A29）}$$

が成立していることからわかるように，この未知入力パターン$U\varphi\in\Phi$が，正しく認知された過去の事例パターン$\varphi\in\Phi$のあるユニタリ座標変換Uの変換例となっている場合には，正しく認知され得るような認識の働きを固定して，

各拡散方程式（68）の解$B_t(\ell)\varphi$が第３章，定義２のfuzzy半順序$\multimap$を単調に反映し（定理２），よって，式（30）のエントロピー$etpy(\varphi)$をも単調に反映する（3.4節の命題４，（iii））事実

などを証明してきた．パターン認識の働きを固定して，拡散方程式の解の挙動を解析した研究は本論文以外に存在しないのである．また，ヒルベルト変換Aの作用素論的表現式$A=i\cdot sign(H)$からヒントを得て，任意パターンから任意パターンへの変形過程の解析にも役立ち，その変形過程の途中で得られているパターンを変形前のパターンの構造を荒っぽく反映したパターンとして採用できることが示された．それのみならず，式（83）の得られた変形パターンψ_tの列が，固定した認識の働きに関しどの程度の変形に耐えられるかの試験パターンの列として採用でき，付録AのA6節の論などからわかるように，その認識の働きの性能（パターンに関する耐変形性の程度）を論じる基礎がもたらされる事実にも留意しておこう．更に，拡散方程式の解が平均類似度［16]，[17]，[29]，[32]，[35]，[36]，[41]，[42］の値を保ったまま，エントロピー［16]，[17]，[19]，[24]，[36]，[43］の値を最大にしようとするとき得られることも，本研究で初めて明らかにされたものである（付録Cの式（C29））．

本研究で得られた4.4節の定理１, 4.5節の定理２は，無論，各特徴量$u(\varphi, k)$として式（A8）を採用した付録Aの例A1では，式（A11）でいうパターンモデル$T\varphi$については成立しない．4.1節での自己共役作用素Hと可換なユニタリ座標変換Uの下で不変な正値測度（測度的ユニタリ不変量）の$u(\varphi, k)$を採用した式（A11）のパターンモデル$T\varphi$について成立するのである．特徴量として，ユニタリ不変な測度的不変量を採用することの基本的重要性の一端を理解できるかも知れない．

式（54）の$\mathfrak{G}_\ell(\varphi)$の特殊形は，文献［24］の２式（54），（56）で与えられており，この内の式（54）は，$|L|=1$の場合，式（22）に一致するから，何故平均零交差回数$MZCR(\varphi)$に比例する量が拡散方程式（18）の時間的発展につれて増大しないかが，4.5節の定理２からわかる．

式（30）で定義されているエントロピー$etpy(\varphi)$は元々，文献［17］で定義されているものである［24］．この$etpy(\varphi)$は手書き漢字パターンφの形状の複雑さを計量するものであることは，計算機シミュレーションで明らかにされているが［19］，式（15）で定義されている式（17）のガウス形積分作用素B_tは，画像のエッジ検出のためのoperatorとして使用された場合，零交差の単調減少性のみならず，複雑な零交差機能を備えていることが指摘されている［14］．この種の複雑な零交差機能を本研究で得られた緒命題，諸定理を用い説明できるかどうかも興味あることである．

本研究での，式（65）での作用素値指数関数B_tは線形の拡散方程式（64）から得られたものである．拡散方程式一般化［13］を行いながら，非線形拡散方程式［9］，［10］，［11］から得られる非線形作用素も，画像上の場所ごとに固有なスケール（分散パラメータ）を想定する際［14］に必要となる．

更に， the general brightness constancy equation［12］に対応した方程式［24］から得られる式（1）の特徴量$\vec{u}(\varphi)$の変動性を解析することも残っている．

「パターンモデルの非負１次結合を変換して行き，ある１つのカテゴリの代表パターンのモデルを得，連想的認識の働きを実現しようとする不動点探索形構造受精変換認識技術［33］，［42］，［43］」では，付録AのA3節での３性質（直交性，確率性，$T-$不変性）を備えた式（A15）の類似度関数SMが用いられるが，本研究で得られた類似度関数式（A23）のSMを使い，最大類似度法の一般化としてのこの不動点探索形構造受精変換認識技術の研究も進め，日本語単独母音の認識に関し１部そのシミュレーション［35］，［36］，でその有効性が確かめられているこの最大類似度法による認識技術を画像処理，文字認識などの各種のパターンに適用し，次第に実際のパターン情報処理技術分野に占めるその役割を鮮明にすることが望まれる．

文　　献

［１］Angus E.Taylor, David C.Lay: “Introduction to function analysis”, p.251, John Wiley Sons, Inc., New York,1980

［２］ゲリファンド，シーロフ：“超関数論入門（共立全書526）”，功刀金次郎・井関清志・麦林布道訳，p.34，共立出版，Aug.1963

［３］R.L.クラッキ：“記憶のしくみⅡ―認知心理学的アプローチ（第２版）”，箱田祐司・中溝幸夫共訳，p.528，サイエンス社，Nov.1982

［４］向殿政男：“Fuzzy論理における２，３の性質について”，電子情報通信学会論文誌(D)，vol.58-D, no.3, pp.150-157, Mar.1975

［5］Andrew P.Witkin: “Scale-space filtering”, Proceeding of International Joint Conference Artificial Intelligence Larlsruhe, West Germany, pp.1019-1022, 1983

［6］小嶋卓：“拡散方程式に対する最適な差分スキーム”，情報処理学会論文誌，vol.26, no.4, pp.669-677, July 1985

［7］Qlan L.Yuille and Tomaso A.Poggio: “Scaling theorems for zero crossings”, IEEE Trans. Pattern Anal. & Mach. Intell., vol. PAMI-8, no.1, pp.15-25, Jan.1986

［8］井宮淳，山本良巳：“拡散する画像の投影からの再構成”，電子情報通信学会論文誌（D-Ⅱ），vol. J76-D-Ⅱ, no.2, pp.206 -215, Feb.1993

［9］G.-H.Cottet and L.Germain: “Image processing through reaction combined with nonlinear diffusion”, Mathematics of Computation, vol.61, no.204, pp.659-673, Oct.1993

［10］Pei-Yih Ting and Ronald A. Iltis: “Diffusion network Architectures for implementation of Gibbs samplers with applications to assignment problems”, IEEE Trans. Neural Networks, vol.5, no.4, pp.622-638, July 1994

［11］Xiaoping Li and Tongwen Chen: “Nonlinear diffusion with multiple edginess thresholds”, Pattern Recognition, vol.27, no.8, pp.1029-1037, Aug.1994

［12］Robert Close, Shinichi and Hiroaki Naito: “Estimation of motion from sequential images using integral constraints”, Pattern Recognition, vol.28, no.1, pp.1-9, Jan.1995

［13］Eric J. Pauwels, Luc J. Van Gool, Peter Fiddelaers, and Theo Moons: “An extended class of scale-invariant and recursive scale space filters”, IEEE Trans. Pattern Anal. & Mach. Intell., vol.17, no.7, PP.691-701, July 1995

［14］奥田浩人，出口光一郎：“ガウシアンフィルタによる濃淡エッジの振舞いとエッジ抽出”，情報処理学会論文誌，vol.36, no.10, pp.2244-2251, Oct.1995

［15］村瀬洋，シュリーK．ナイヤー：“多重解像度と固有空間表現による 3 次元物体のイメージスポッティング”，情報処理学会論文誌，vol.36, no.10, pp.2234-2243, Oct.1995

［16］鈴木昇一：“認識工学（上）”，柏書房，Feb.1975

［17］鈴木昇一：“測度的不変量検出形認識系の構成理論”，電子（情報）通信学会論文誌（D），vol.55-D, no.8, pp.531-538, Aug.1972

［18］鈴木昇一：“手書き漢字の側抑制効果的分解とその計算機シミュレ-ション”，情報処理（情報処理学会誌），vol.15, no.12, pp.927-934, Dec.1974

［19］鈴木昇一：“画像情報量とその手書き漢字への応用”，画像電子学会誌，vol.4,　no.1,　pp.4-12, Apr.1975

［20］鈴木昇一：“特徴量としての測度的ウニタリ不変量の完全な集合の一構成”，電子（情報）通信学会論文誌（D），vol.J59-D, no.9, pp.678-680, Sept.1976

［21］鈴木昇一：“構造化情報パタ-ンの 4 性質”，電子（情報）通信学会論文誌（D），vol. J59-D, no.12, pp.937-938, Dec.1976

［22］鈴木昇一：“パターン認識における構造化モデルの 4 性質とその応用”，電子（情報）通信学会論文誌（D），vol. J60-D, no.9, pp.710-717, Sept.1977

［23］鈴木昇一：“抽出された特徴による手書き漢字構造の再生”，情報処理（情報処理学会誌），vol.18, no.11, pp.1115-1122, Nov.1977

［24］鈴木昇一：“パターンのエントロピーモデル”，電子情報通信学会論文誌（D-Ⅱ），vol. J77-D-

Ⅱ, no.11, pp.2220-2238, Nov.1994
［25］鈴木昇一，斎藤静昭，奥野治雄，太田芳雄：“画像の復元とその計算機シミュレーション”，工学院大学研究報告，no.39, pp.198-206, Jan.1976
［26］鈴木昇一，太田芳雄，斉藤静昭，奥野治雄：感覚空間回路の設計と作用素に対するラプラス変換法”，工学院大学研究報告，no.40, pp.122-134, June 1976
［27］鈴木昇一，柴山秀雄，福永一保，古田晋吾：“認識の量子論と画像の微分エントロピー”，芝浦工業大学研究報告理工系編，no.23,, no.1, pp.117-125, Mar.1979
［28］鈴木昇一，柴山秀雄，福永一保，大本修，古田晋吾：“作用素に対するフ-リエ変換法による側抑制特性の設計”，芝浦工業大学研究報告理工系編，no.24, no.1, pp.147-155, Mar.1980
［29］鈴木昇一：“情報の量子論と平均類似度を保持するあるいは単調的に変換する作用素”，情報研究（文教大学情報学部），no.3, pp.11-27. Dec.1982
［30］鈴木昇一：“回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学情報学部），no.4, pp.36-56, Dec.1983
［31］鈴木昇一：“連想形記憶器内荷重関数の最小自乗法”，自己組織化法による決定”，情報研究（文教大学情報学部），no.5, pp.16-28, Dec.1984
［32］鈴木昇一：“連想形記憶器MEMOTRONと日本語母音系列の再生に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学情報学部），no.7, pp.14-29, Dec.1986
［33］鈴木昇一：“認識プログラムFERTのリスト論的形式体系における表現”，情報研究（文教大学情報学部），no.8, pp.1-12, Dec.1987
［34］鈴木昇一：“収縮写像の構成用空間回路とその計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学情報学部），no.9, pp.17-28, Dec.1988
［35］鈴木昇一：“多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレ-ション”，情報研究（文教大学情報学部），no.10, pp.35-49, Dec.1989
［36］鈴木昇一：“帰属係数法に基づく類似度，帰属関係あいまい度，認識情報量の計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学情報学部），no.11, pp.51-68, Dec.1983
［37］鈴木昇一：“半順序と情報処理”，情報研究（文教大情報学部），no.12, pp.121-174, Dec.1991
［38］鈴木昇一：“ミクロ経済学におけるワルラスの法則とパターン類似度関数のホップフィールドニューラルネット形調整”，情報研究（文教大学情報学部），no.14, pp.211-236, Dec.1993
［39］鈴木昇一：“パターンモデルを用いた不動点探索形連想記憶システム方程式”，情報研究（文教大学情報学部），no.15, pp.97-128, Dec.1994
［40］鈴木昇一，前田英明：“パターンの変形理論”，情報研究（文教大学情報学部），no.16, pp. 209-267, Dec.1995
［41］鈴木昇一：“平均類似度の概念に基づく特徴抽出及び識別法（核型第1種特徴抽出作用素の固有値問題）”，電子情報通信学会技術研究報告インホメーション理論研，no.IT71-10, Apr.1971
［42］鈴木昇一：“平均類似度を用いた構造受精法を用いた日本語単独母音の認識”，電子情報通信学会技術研究報告，vol.82, no.31, PRL82-4, pp.25-32, May 1982
［43］鈴木昇一：“パターン認識の数学的理論”，電子情報通信学会技術研究報告［パターン認識と学習，パターン認識と理解］，PRL84-6（第 1 部），PRL84-30, PRL84-38, PRL85-27, PRU86-8, PRU86-35, PRU86-69, PRU87-1, PRU87-28, PRU88-30, PRU89-1, PRU89-27, PRU89-40, PRU89-66, PRU89-77, PRU89-136, PRU90-5, PRU90-15, PRU90-29, PRU90-125, PRU91-1, PRU91-29, PRU91-42, PRU

92-1, PRU92-18, PRU92-25, PRU92-89, PRU92-102（第28部）, May 1984〜Jan.1993
［44］鈴木昇一：“ニューラルネットの新数理”，近代文芸社，Sept.1996
［45］鈴木昇一：“パターン認識問題の数理的一般解決”，近代文芸社，June 1997
［46］鈴木昇一：“認識知能情報論の新展開”，近代文芸社，Aug.1998
［47］鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：“風景画の理解に関するJAVA言語によるRECOGNITRONの計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.27, pp.73-109, Mar.2002
［48］鈴木昇一："JAVA言語で実装化された画像理解システムIUSの動作概要と，その稼動方法”，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.143-165, Dec.2002
［49］鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹："JAVA言語による計算機シミュレーションで生じた風景画像の理解場面での多段階連想形認識過程の異常現象”，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.123-166 , July 2003
［50］鈴木昇一：“パターン系列（動画像，会話音声）の，dynamical systemによる連想理論と，連想器SPATEMTRON”，情報研究（文教大学・情報学部），no.30, pp.139-186, Jaqn. 2004

付録A（最大類似度認識法）

本付録Aでは，パターン集合Φ，代表パターン集合Ωが先ず説明され(A1節)，その次に，原パターン$\varphi\in\Phi$のパターンモデル$T\varphi\in\Phi$が満たさなければならない 4 性質①〜④とその 1 構成例が指摘され（A2節），また，類似度関数SMというものが満たさなければならない 3 性質（イ)〜(ハ）とその 1 構成例も指摘され（A3，A4両節），最後に，ボロノイ図を実現する認識法としての最大類似度法が説明される（A1節）.

A1　処理対象とするパターン集合Φと代表パターン集合Ω

処理の対象とするパターンφの集合Φは, 可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$のある部分集合としよう[24].

Φの任意の元であるパターンφはカテゴリ集合

$$\mathfrak{C}(J)\equiv\{\mathfrak{C}_j \mid j\in J\} \tag{A1}$$

のいずれか 1 つに帰属しているとし，第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターンω_jの集合

$$\Omega\equiv\{\omega_j \mid j\in J\}\subset\Phi \tag{A2}$$

を導入する．式（A1）のカテゴリ集合$\mathfrak{C}(J)$は以後常に， 2 つ以上の要素を持つと仮定する．また，確率条件式

$$[\forall j\in J,\ 0<p(\mathfrak{C}_j)<1]\wedge\sum_{j\in J}p(\mathfrak{C}_j)=1 \tag{A3}$$

を満たす各カテゴリ$\mathfrak{C}_j$の生起確率$p(\mathfrak{C}_j)$をも導入しておく．

初めて目にする事物にそれに相応しいラベルを与えると言った場面に含まれる認知機能を，心理学ではカテゴリ作用（categorization ）と呼ぶが，本研究では，パターン認識（pattern recognition）と呼ぶ［16］．本研究では，典型（prototype）を中心として事例パターン集合が序列づけられたカテゴリ構造を持つと想定して，以後，論を進めるとすれば，式（A2）の代表パターン集合Ωが，このような典型の集合である．

尚，各代表パターン$\omega_j\,(j\in J)$の適応的決定法は，文献［43］の第21部の付録 1 ，文献［45］の付

録Iにある．

A2　パターンモデル$T\varphi$

入力$\varphi \in \Phi$に対するその出力がそのパターンモデル$T\varphi \in \Phi$であるような写像

$$T : \Phi \rightarrow \Phi \tag{A4}$$

は，次の4性質①～④を満たさなければならない［24]，［43］としてみよう．

2性質②，④は各々，正定数倍，T作用というパターン変形の下で，パターンという意味概念が保存されることを要請している．

①（零元不動点性）$\varphi = 0$について$T\varphi = \varphi \in \Phi$.

②（正定数倍不変性）$\forall \varphi \in \Phi, T(a \cdot \varphi) = T\varphi$ for any positive real number a.

③（ベキ等性）$\forall \varphi \in \Phi, T(T\varphi) = T\varphi$.

④（非零写像性）$\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0$. □

4性質①～④を満たすという意味でモデル構成作用素と呼ばれる写像$T : \Phi \rightarrow \Phi$を導入することの1つの意義は，実際に処理の対象とするパターンφというものの帰納的定義が可能になり，パターン認識システムの自己組織化が精密に論じられることである［43]．直接的には，パターンモデル$T\varphi$は，処理対象とする問題のパターンφが座標変換前に戻された正規化パターンであると想定されるならば，パターン認識分野におけるいわゆる式（A4）の正規化写像Tが最小限満たさなければならない4性質①～④を指摘していることである［24]，［43]．

上述の4性質①～④を満たす式（A4）の写像Tはこれまで，多数指摘されており［16]，［17]，［21］～[25], [30]～[40], [42], [43]，特に，作用素に対するフーリェ・ラプラス変換法[16], [17], [18], [19]，［23]，［25]，［26]，［28]，［30]，［34］を適用して得られる写像Tは実用上重要な地位を占めているが，本付録Aでは，紙面の都合上，次の例A1で示されているTのみを指摘しておこう．

［例A1］（直交展開係数の3値化に基づくパターンモデル$T\eta$）

可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元ϕ_kの組$\{\phi_k\}_{k \in L}$は，

$$(\phi_k, \phi_m) = 0 \, (k \neq m) \tag{A5}$$

を満たす直交系であるとすれば，$\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$の直交展開

$$\exists \varphi_{\perp} \in \mathfrak{H} \text{ such that } \forall k \in L, (\varphi_{\perp}, \phi_k) = 0, \varphi = \sum_{k \in L} \frac{(\varphi, \phi_k)}{(\phi_k, \phi_k)} \cdot \phi_k + \varphi_{\perp} \tag{A6}$$

が成り立つ．パターン$\eta \in \Phi \subset \mathfrak{H}$における各展開係数$\dfrac{(\eta, \phi_k)}{(\phi_k, \phi_k)}$の分子$(\eta, \phi_k)$は実数値であるようなパターン$\eta \in \Phi$を考えよう．

不等式

$$\forall k \in L, |a_k(\eta)| \leq 1 \tag{A7}$$

を満たす$a_k(\eta)$を，

$$a_k(\eta) = \begin{cases} 0 \cdots \forall k \in L, (\eta, \phi_k) = 0 \text{ のとき} \\ \dfrac{(\eta, \phi_k)}{\sup_{k \in L} |(\eta, \phi_k)|} \cdots \exists k \in L, (\eta, \phi_k) \neq 0 \text{のとき} \end{cases} \tag{A8}$$

と定義し，その後，パターン$\eta \in \Phi$から抽出される第$k \in L$番目の特徴量$u(\eta, k)$を，

$$u(\eta, k) \equiv \begin{cases} +1 \cdots + e_k < a_k(\eta) \leq +1 \text{ のとき} \\ 0 \cdots - e'_k \leq a_k(\eta) \leq +e_k \text{ のとき} \\ -1 \cdots -1 \leq a_k(\eta) < -e'_k \text{ のとき} \end{cases} \tag{A9}$$

と設定してみよう．各閾値 e_k, e'_k が不等式

$$0 \leq e_k, e'_k < \frac{\| \phi_k \|^2}{\sup_{k \in L} \| \phi_k \|^2} \tag{A10}$$

を満たすように選ばれていれば，パターン φ の直交展開式（A6）に対応して，その近似としての，各 $u(\varphi, k)$ を展開係数に持つ直交展開式

$$T\varphi = \sum_{k \in L} u(\varphi, k) \cdot \phi_k \tag{A11}$$

で定義される式（A4）の写像 $T: \Phi \to \Phi$ が，上述の 4 性質①〜④を満たすことは，容易に確かめられる．

このとき，A2節の③より，モデル $T\varphi$ が原パターン φ から抽出された式（1）でいう特徴量の組 $\vec{u}(\varphi)$ を保存している事実，つまり，等式

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall k \in L, u(T\varphi, k) = u(\varphi, k) \tag{A12}$$

が成り立っていることは，パターン形状素 ϕ_k の組 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ の 1 次独立性より直ちに確かめられる．

□

上手な知覚と記憶の働きというのは，原パターン φ のあらゆる部分を等しく重要視して再生するのではなく，φ の持つ構造全体の判断が容易に得られるように，刺激としてのパターン φ の持つ多くの情報から，重要ないくつかの部分情報のみを再生すると考えられる．この意味では，パターンモデル $T\varphi$ の構造を再生するのに，式（1）の特徴量の組 $\vec{u}(\varphi)$ が得られる特徴抽出写像

$$u: \Phi \times L \to R \text{（実数全体の集合）} \tag{A13}$$

のみを採用して，パターン形状素 ϕ_k の組 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ の，各特徴量 $u(\varphi, k)$ を展開係数に持つ 1 次結合式（A11）をパターン φ の代りとなるモデルとして採用するのは，式（A13）の特徴抽出写像 u の持つ情報捨象化機能

「情報を簡約・整理して不要なものを捨て去ること」

を利用して，

「情報量の多いパターン φ から必要な情報だけを備えた情報量の少ないパターン」

を作り出すためである．

式（A4）のモデル構成作用素 T を用いて，

$$\{0\} \cup \{a \cdot \varphi \mid a \in R^{++} \text{（正実数全体の集合）}, \varphi \in \Phi\} \cup \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \subseteq \Phi \tag{A14}$$

を満たすように，処理対象パターン集合 Φ を逐次的に決定する方法（Φ の帰納的構成法）は，文献［43］の第24部，或いは，文献［45］の2.4節，或いは，文献［46］の2.2節で説明されている．

A3　類似度関数 SM の満たすべき 3 性質

視覚的形態の記憶に関する実験に基づいて，1922年にウルフによって見いだされた事実

「不規則な形態を繰り返し再生した被験者がその形態をより単純に，より規則的に，見慣れた対象

に近くなるように変えて再生する」

ことが説明されている［3］．この種の記憶の働きで，もとの形態（パターンφの持つ見掛け上の形状）を再生すると，φのモデル$T\varphi$が得られると，前章の式（A11）のパターンモデル$T\varphi$が意味づけられるともいえよう．本項では，このようなパターンモデル$T\varphi$を生成する式（A4）のモデル構成作用素Tの下で，不変な類似度関数

$$SM : \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \tag{A15}$$

について考察する．

式（A15）の写像SMが少なくとも，次の3性質（直交性，確率性，$T-$不変性）を満たすとしてみよう．1より大きくない非負量$SM(\eta, \omega_j)$は，パターン$\eta \in \Phi$が第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターン$\omega_j \in \Omega \subset \Phi$と似ている程度を表しているとしよう．最大値1に近い値を持つほど，似ていると考える訳である：

（イ）（直交性）

$$SM(\omega_i, \omega_j) = \begin{cases} 1 \cdots i = j \text{ のとき} \\ 0 \cdots i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

（ロ）（確率性；総和規格性）

$$\forall \eta \in \Phi, \sum_{j \in J} SM(\eta, \omega_j) = 1.$$

（ハ）（$T-$不変性）

$$\forall \eta \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\eta, \omega_j) = SM(\eta, \omega_j). \qquad \square$$

上述の（イ），（ロ），（ハ）の効用について解説しておこう．

（イ）は，式（A2）での各代表パターン$\omega_i, \omega_j (i \neq j)$が，カテゴリ帰属情報を全く共有しないことを要請している．

次に，（ロ）は，$SM(\eta, \omega_j)$は処理の対象としている問題のパターンηが代表パターンω_jを表している確率と解釈できることを要求している．

パターン変換機能を持つ式（A4）のモデル構成作用素Tが各カテゴリ$\mathfrak{C}_j$について，類似度SMの値を保存することを要請している（ハ）は，つまり，パターンモデル$T\eta \in \Phi$とその原パターン$\eta \in \Phi$とが各カテゴリ$\mathfrak{C}_j \in \mathfrak{C}(J)$の代表パターン$\omega_j \in \Omega \subset \Phi$に対し，同一の類似度$SM$の値を備えていることを要求している（ハ）は，モデル$T\eta$を見たり聞いたりしたならば，原パターンηと同じように見えたり聞こえたりすること（同一知覚原理）を保証している．

以上で（イ），（ロ），（ハ）について解説が終わった．上記の3性質（直交性，確率性，$T-$不変性）を満たす類似度関数SMはこれまで多数指摘されているが［35］，［36］，［38］，［42］，［43］，次節では，このようなSMを1つ構成しよう．

A4　類似度関数SMの1構成

適切に選んだ$\mathfrak{H}$の非零元$\eta (\neq 0)$から定まる自己共役作用素

$$G\varphi = \frac{(\varphi, \eta)}{(\eta, \eta)} \cdot \eta = (\varphi, \frac{\eta}{\|\eta\|}) \cdot \frac{\eta}{\|\eta\|} \text{ for any } \mathfrak{H} \tag{A16}$$

は射影作用素であり，このG を導入し定義される非負量

$$sim(\varphi, \eta) \equiv \sqrt{\frac{(G\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)}} \tag{A17}$$

はS.Suzukiのいう“パターンφと式（A16）の自己共役作用素Gとで規定される測度的ユニタリ不変量（metrically unitary invariants）［16］〜［24］”

$$\frac{(G\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \left|\left(\frac{\varphi}{\|\varphi\|}, \frac{\eta}{\|\eta\|}\right)\right|^2 \geq 0 \text{ for any } \varphi \in \mathfrak{H} \tag{A18}$$

の平方根である．，具体的に，

$$sim(\varphi, \eta) = \begin{cases} 0 \cdots \|\varphi\| \cdot \|\eta\| = 0 \text{ のとき} \\ \left|\left(\frac{\varphi}{\|\varphi\|}, \frac{\eta}{\|\eta\|}\right)\right| \cdots \|\varphi\| \cdot \|\eta\| > 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{A19}$$

と表され，２つのパターンφ, η間の規格化内積$\left(\frac{\varphi}{\|\varphi\|}, \frac{\eta}{\|\eta\|}\right)$の絶対値であることがわかる．測度的ユニタリ不変量の平方根として表現されている$sim(\varphi, \eta)$は２つのパターンφ, η間の類似性尺度（similarity-figure）とでも呼ばれてもよい量である．冪等性

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H},\ G(G\varphi) = G\varphi \tag{A20}$$

が成立しているから，射影作用素Gの作用の下での不変条件

$$\therefore \quad sim(G\varphi, \eta) = sim(\varphi, \eta) \tag{A21}$$

が成立することも，直ちにわかる．

そうすると，φ, η間の不一致（相違）の程度を表す“１より大きくない非負量”

$$dif(\varphi, \eta) \equiv \sqrt{1 - sim(\varphi, \eta)^2} \tag{A22}$$

は，２つのパターンφ, η間の相違性尺度（difference-figure）とでも呼ばれてよい量である．

式（A22）の相違性尺度difを用いて，A3節の３性質（直交性，確率性，$T-$不変性）を満たす式（A15）の類似度関数SMの１つは，

$$SM(\varphi, \omega_j) \equiv \frac{\dfrac{1}{dif(T\varphi, T\omega_j)}}{\sum_{k \in J} \dfrac{1}{dif(T\varphi, T\omega_k)}} \tag{A23}$$

と定義されるものであることがわかる．

A5　簡単な認識法

A5.1　ボロノイ図

$T\omega_j$と異なるどの$T\omega_i$よりも，$T\omega_j$により近いパターンφの軌跡であるボロノイ領域（the Voronoi region）

$$VR_j \equiv \cap_{i \in J - \{j\}} \{\varphi \in \Phi \mid dif(T\varphi, T\omega_j) \leq dif(T\varphi, T\omega_i)\} \tag{A24}$$

を用意できる．VR_jは$\omega_j \in \Omega \subset \Phi$の支配領域とも称されてよい．ボロノイ領域$VR_j, j \in J$が定める$\Phi$の分割を，式（A2）の代表パターン集合$\Omega$に対するボロノイ図（the Voronoi diagram）という．

A5.2　ボロノイ図を実現する最大類似度法

式（A2）のΩに対するボロノイ図を実現する写像，言い替えれば，パターン集合Φから式（A1）のカテゴリ集合$\mathfrak{C}(J)$への多対1の写像としての認識写像（recognizer）

$$RG : \Phi \to \mathfrak{C}(J) \tag{A25}$$

を設定するには，簡単には，最大類似度法［35］，［36］，［38］，［42］，［43］，つまり，A3節の類似度関数SMの3性質（直交性，確率性，$T-$不変性）に注目して，

パターン$\varphi \in \Phi$について，

The pattern $\varphi \in \Phi$ is then determined to belong to the same category to which the nearest $T\omega_j$ belongs such that

$$\max_{k \in J} SM\,(T\varphi,\, T\omega_k) = SM\,(T\varphi,\, T\omega_j). \tag{A26}$$

という認識推断を行う機能を考えれば良い．

このとき，同値関係$\,_s\!\sim$が，

$$\varphi_s \sim \eta \Leftrightarrow$$

$$\mathop{\mathrm{argmax}}_{k \in J} SM\,(T\varphi,\, T\omega_k) = \mathop{\mathrm{argmax}}_{k \in J} SM\,(T\eta,\, T\omega_j). \tag{A27}$$

と定義され，$\eta \in \Phi$を含む認識同値類と称されて良い$\{\eta\}$は，

$$\{\eta\} \equiv \{\varphi \in \Phi \mid \varphi_s \sim \eta\} \subset \Phi \tag{A28}$$

と表されることに注意する．認識同値類$\{\eta\}$は，パターンηと同一のカテゴリに帰属すると認識推断されるパターン$\varphi \in \Phi$の集合である．A3節の，SMの$T-$不変性より，写像Tによる同値関係$\,_s\!\sim$の保存則

$$\forall \eta \in \Phi,\ T\eta \in \{\eta\} \tag{A29}$$

が成立しており，パターン$\eta \in \Phi$のモデル$T\eta \in \Phi$に対し，Tにより正規化がなされた形で，最大類似度法という認識の働きが達成されている．

A6　認識性能の耐変形性

3.1, 3.2両節の2定義1，2での同値関係〜，fuzzy半順序$\bullet\!\!\propto$について，次の定理A1が成立し，A5節で説明された最大類似度認識法が，$\bullet\!\!\propto$に関しどの程度のパターン耐変形性を備えているかが，

この最大類似度認識法で正しく認識されたパターン$\varphi \in \Phi$について

$$\varphi \bullet\!\!\propto \eta \Rightarrow T\eta \in \{T\varphi\} (= \{\varphi\}) \quad \because \quad \text{式（A29）} \tag{A30}$$

が成立するパターン$\eta \in \Phi$を求めることで，明らかになることがわかる．

［定理A1］（パターンモデルの同値，半順序の保存定理）

式（50）の各パターン形状素ϕ_kと，式（55）の各特徴量$u(\varphi, k)$とを採用して得られる式（A11）のパターンモデル$T\varphi \in \Phi$については，（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）が成り立つ：

（ⅰ）$\forall \varphi, \forall \eta \in \Phi,\ \varphi \sim \eta \Leftrightarrow T\varphi = T\eta.$

（ⅱ）$\forall \varphi, \forall \eta \in \Phi,\ \varphi \bullet\!\!\propto \eta \Rightarrow T\varphi \bullet\!\!\propto T\eta.$

（ⅲ）$\forall \varphi, \forall \eta \in \Phi,\ \varphi \sim \eta \Rightarrow \varphi_s \sim \eta.$

（証明）文献［24］の補助定理A・3より，$\{\phi_k\}_{k \in L}$は直交系であり，よって，1次独立な系である．それ故，

$$T\varphi = T\eta \Rightarrow \varphi \sim \eta \tag{A31}$$

が成り立つ．逆の$\Leftarrow$は式（A11）の形式から明らかであり，（ｉ）が証明された．

また，（ii）の成立については，文献［24］，定理 1 の（ii），つまり，写像Tの特徴量保存則

$$\forall\varphi \in \Phi, \forall k \in L, u(T\varphi, k) = u(\varphi, k) \tag{A32}$$

が成立しているので，この式（A32）から明らかである．

残りの（iii）については，

$$\varphi \sim \eta \Leftrightarrow T\varphi = T\eta \quad \because \quad (\mathrm{i})$$
$$\Rightarrow \forall j \in J, SM(T\varphi, T\omega_j) = SM(T\eta, T\omega_j)$$
$$\Rightarrow \varphi_s \sim \eta \quad \because \quad \text{式（A27）}$$

を得て，証明された．□

付録B（最大エントロピーを与える“自己共役作用素の指数関数と拡散方程式”）

本付録Cでは，点スペクトル形の自己共役作用素Sのエントロピー$ETPY(S)$を定義し，抽出される特徴量の総和としての平均類似度が一定という条件下で，$ETPY(S)$の最大値を与えるSは，ある自己共役作用素Gの指数関数（拡散方程式の解を与える作用素）の規格化定数倍であることが証明される．

B1　統計作用素Sと平均類似度$ASM(\Psi, \eta)$

可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$における完全正規直交系$\{\phi_k\}_{k \in L}$を用意する．

各q_kは，条件

$$\sup_{k \in L} q_k < \infty \tag{B1}$$

を満たす正の定数とすると，

$$S\eta = \sum_{k \in L} q_k \cdot (\eta, \phi_k) \cdot \phi_k \quad \text{for any} \quad \eta \in \mathfrak{H} \tag{B2}$$

と定義される線形作用素Sは有界な正値自己共役作用素である．

$$(S\eta, \eta)$$
$$= (\sum_{k \in L} (\eta, \phi_k) \cdot \cdot \phi_k, \eta)$$
$$= \sum_{k \in L} |(\eta, \phi_k)|^2 \quad \text{for any} \quad \eta \in \mathfrak{H} \tag{B3}$$
$$\|\eta\|^2 = (\eta, \eta)$$
$$= (\sum_{k \in L} (\eta, \phi_k) \cdot \phi_k, \eta)$$
$$= \sum_{k \in L} |(\eta, \phi_k)|^2 \quad \text{for any} \quad \eta \in \mathfrak{H} \tag{B4}$$

が成り立つ．1 より大きくない非負量

$$W_k(\eta) \equiv \frac{|(\eta, \phi_k)|^2}{\sum_{\ell \in L} |(\eta, \phi_\ell)|^2} \tag{B5}$$

は，ηが部分的にϕ_kの状態にあることの確率である［16］，［17］，［20］．2式（B3），（B4）から成り立つ等式

$$\frac{(S\eta, \eta)}{(\eta, \eta)} = \sum_{k \in L} q_k \cdot W_k(\eta) \tag{B6}$$

は，各q_kを量子力学的状態（波動関数）ηにおいて観測したときの平均値（量子力学的期待値）であり，S.Suzukiの提唱した“認識の量子論［16］，［17］，［19］～［24］”では，次の（イ），（ロ）の解釈が与えられている：

（イ）$\frac{(S\eta, \eta)}{(\eta, \eta)}$は，Schrödinger形方程式

$$\sqrt{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \eta = S\eta,$$

ここに，初期条件は$\eta|_{t=0} = \varphi \in \mathfrak{H}$ （B7）

の時間的発展の下で，等式

$$\frac{(S\eta, \eta)}{(\eta, \eta)} = \frac{(S\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)}$$

が成立しているという意味で，不変な“自己共役作用素Hとパターンηとの規定するユニタリ不変な正値測度としての測度的不変量”であり，次の（ロ）でいう各特徴量$u(\eta, k)$の総和である．

（ロ）非負量

$$u(\eta, k) \equiv q_k \cdot W_k(\eta)$$

は，自己共役作用素Hを用いて，パターンηから抽出される第$k \in L$番目の特徴量として採用されてよい［16］，［17］． □

ここで，確率条件

$$[\forall k \in L, 0 \leq q_k] \wedge \sum_{k \in L} q_k = 1 \tag{B8}$$

が設定された式（B2）の作用素Sは，量子統計力学では統計作用素（statistical operator）と呼ばれており［16］，S.Suzukiの提唱した“測度的不変量検検出の理論”では，平均類似度作用素と呼ばれている．

何故ならば，各生起確率q_kを持つパターン集合

$$\Psi \equiv \{< \phi_k, q_k > | k \in L\} \tag{B9}$$

と，入力パターンηとの間の平均類似度（average similarity-measure）$ASM(\Psi, \eta)$は，

$$ASM(\Psi, \eta) = \sum_{k \in L} q_k \cdot \left|\left(\frac{\eta}{\|\eta\|}, \frac{\phi_k}{\|\phi_k\|}\right)\right|^2 \tag{B10}$$

と定義せられており，この式（B10）を変形していくと，

$$ASM(\Psi, \eta)$$

$$= \sum_{k \in L} q_k \cdot \left(\left(\frac{\eta}{\|\eta\|}, \phi_k\right) \cdot \phi_k, \frac{\eta}{\|\eta\|}\right) \qquad \because \quad \forall k \in L, \|\phi_k\| = 1$$

$$= \sum_{k \in L} q_k \cdot ((\eta, \phi_k) \cdot \phi_k, \eta) / \|\eta\|^2$$

$$= \frac{(\sum_{k \in L} q_k \cdot (\eta, \phi_k) \cdot \phi_k, \eta)}{(\eta, \eta)}$$

つまり，式（B2）のS を代入すると，

$$ASM(\Psi, \eta) = \frac{(S\eta, \eta)}{(\eta, \eta)} = \sum_{k \in L} u(\eta, k) \quad \because \quad （ロ） \tag{B11}$$

が成立し［16]，［17]，［29]，［41]，平均類似度$ASM(\Psi, \eta)$は統計作用素S とパターンηとの規定する測度的不変量（各特徴量$u(\eta, k)$の総和）であることが知れる［16]，［17]，［29]，［41］からである．

B2　統計作用素S のエントロピー$ETPY(S)$の最大化と拡散方程式

確率条件式（C8）を満たす式（B2）の統計作用素S のエントロピー（entropy）$ETPY(S)$とは，

$$ETPY(S) \equiv \sum_{k \in L} q_k \cdot \log_e q_k \tag{B12}$$

と定義される．

ラグランジュの未定乗数法を適用して証明される次の定理B1に対応する内容は量子統計力学では広く知られており，この定理B1の（iv）で登場している自己共役作用素S は，定義式（B5）の$W_k(\eta)$を使って得られる自己共役作用素

$$G\eta = \sum_{k \in L} W_k(\varphi) \cdot (\eta, \phi_k) \cdot \phi_k \quad \text{for any} \quad \eta \in \mathfrak{H} \tag{B13}$$

の指数関数$\exp(-b \cdot G)$の正の定数（規格化定数$=Z(b)$）倍である．

式（B5）からわかるように，式（C13）の自己共役作用素G は，条件

$$\exists k \in L, (\varphi, \phi_k) \neq 0 \tag{B14}$$

が満たされる限り，正値自己共役作用素としての統計作用素である．この自己共役作用素G のエントロピー$ETPY(G)$は，式（B12）の定義によれば，

$$ETPY(G) = -\sum_{k \in L} W_k(\varphi) \cdot \log_e W_k(\varphi) \tag{B15}$$

であり，この$ETPY(G)$は，文献［16]，［17]，［19]，［24］ではパターンφのエントロピーと称されており，式（C14）を満たす任意のパターンφについてを$ETPY(G)$最小にする直交系$\{\phi_k\}_{k \in L}$はK-L直交系であることが知られている［24]，［29]，［41]．

統計作用素S のエントロピー$ETPY(G)$に関する 5 性質を，次の定理B1が指摘している．

［定理B1］（統計作用素S のエントロピー定理）

確率条件式（B8）の下での，式（B2）の統計作用素S について，式（B6），式（B11）が成立している非負量

$$ASM(\Psi, \varphi) = \frac{(S\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \sum_{k \in L} u(\varphi, k) = \sum_{k \in L} W_k(\varphi) \cdot q_k \text{ が一定値} E \text{ である} \tag{B16}$$

という条件（これは，B1節の（イ），（ロ）からわかるように，パターンφから抽出される特徴量$u(\eta, k) \equiv q_k \cdot W_k(\eta)$の総和としての平均類似度$ASM(\Psi, \varphi)$が一定値$E$ であるという条件）の下で，

（ｉ）式（B12）のエントロピー$ETPY(S)$を最大にする各q_k は，

$$q_k = \frac{\exp(-b\cdot W_k(\varphi))}{\sum_{\ell\in L}\exp[-b\cdot W_\ell(\varphi)]} \tag{B17}$$

で与えられる．ここに，

（ⅱ）正定数b は，等式

$$\sum_{k\in L} W_k(\varphi)\cdot q_k = \sum_{k\in L} W_k(\varphi)\cdot\frac{\exp(-b\cdot W_k(\varphi))}{\sum_{\ell\in L}\exp[-b\cdot W_\ell(\varphi)]} = E \tag{B18}$$

を満たすように，決められる．

そして，$Z(b)$を

$$Z(b)\equiv\sum_{\ell\in L}\exp[-b\cdot W_\ell(\varphi)] \tag{B19}$$

と置くと，この$Z(b)$は分配関数（partition function）と呼ばれるものであり，次の（ⅲ），（ⅳ），（ⅴ）が成り立つ：

（ⅲ）$-\frac{1}{Z(b)}\cdot\frac{\partial}{\partial b}Z(b)=E.$ (B20)

（ⅳ）$S\eta=\frac{1}{Z(b)}\cdot\exp(-b\cdot G)\eta \quad \text{for any} \quad \eta\in\mathfrak{H}$ (B21)

（ⅴ）$ETPY(S)=\log_e Z(b)+b\cdot E.$ (B22)

［定理B1の系1］

$$\frac{\partial}{\partial b}S\eta=[-G+E]S\eta \quad \text{for any} \quad \eta\in\mathfrak{H} \tag{B23}$$

が成り立つ．よって，

固有値方程式$GS\eta=ES\eta$ が成立しているならば，$S\eta$ は助変数b に関し不変である

ということになる．

（証明）先ず，（ⅰ）を示す．ラグランジュの未定乗数法を適用しよう．c, b という2つの未定乗数を用意すると，式（B6）からわかるように，式（B12）の$ETPY(S)$に最大値を与える各q_k について，方程式

$$\frac{\partial}{\partial q_k}[-\sum_{k\in L}q_k\cdot\log_e q_k - c\cdot(\sum_{k\in L}q_k-1)-b\cdot(\sum_{k\in L}q_k\cdot W_k(\varphi)-E)]=0$$

$$\therefore\quad -\log_e q_k-1-c-b\cdot W_k(\varphi)=0 \tag{B24}$$

が成り立たねばならない．これから，

$$q_k = a\cdot\exp(-b\cdot W_k(\varphi)) \tag{B25}$$

ここに，

$$a=\exp(-1-c) \tag{B26}$$

を得て，確率条件式（B8）を考慮すると，式（B26）のa は，

$$a=\frac{1}{\sum_{k\in L}\exp(-b\cdot W_k(\varphi))} \tag{B27}$$

であることがわかり，（ⅰ），即ち，式（B17）が得られる．

助変数としての正定数b の決め方についての（ⅱ）は，本定理B1の問題の設定法から明らかである．

（iv）の成立：　得られたこの（ⅰ）を式（B2）に代入すると，

$$S\eta$$

$$=\frac{1}{Z(b)}\cdot\sum_{k\in L}\exp(-b\cdot W_k(\varphi))\cdot(\eta,\phi_k)\cdot\phi_k \quad \because \quad \text{式（C19）}$$

$$=\frac{1}{Z(b)}\cdot\exp(-b\cdot G)\eta \quad \because \quad \text{式（C13）}$$

$$\text{for any} \quad \eta\in\mathfrak{H} \tag{B28}$$

を得て，（iv）が示された．

（ⅲ）の成立：

$$\frac{\partial}{\partial b}Z(b)$$

$$=\frac{\partial}{\partial b}\sum_{k\in L}\exp(-b\cdot W_\ell(\varphi)) \quad \because \quad \text{式（B19）}$$

$$=-\sum_{\ell\in L}W_\ell(\varphi)\cdot\exp(-b\cdot W_\ell(\varphi))$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{Z(b)}\cdot\frac{\partial}{\partial b}Z(b)=-\sum_{\ell\in L}W_\ell(\varphi)\cdot\frac{1}{Z(b)}\exp(-b\cdot W_\ell(\varphi))$$

$$=E \quad \because \quad 2\text{式（B18），（B19）}$$

（ⅴ）の成立：

$$ETPY(S)=-\sum_{k\in L}q_k\cdot\log_e q_k \quad \because \quad \text{式（B12）}$$

$$=-\sum_{k\in L}\frac{1}{Z(b)}\exp(-b\cdot W_\ell(\varphi))\log_e\left[\frac{1}{Z(b)}\exp(-b\cdot W_\ell(\varphi))\right] \quad \because \quad 2\text{式（B17），（B19）}$$

$$=\log_e Z(b)-\sum_{k\in L}\frac{\exp(-b\cdot W_k(\varphi))}{Z(b)}\cdot\log_e\exp(-b\cdot W_k(\varphi))$$

$$=\log_e Z(b)+b\cdot E. \quad \because \quad 2\text{式（B18），（B19）}$$

（定理B1の系1の証明）

$$\frac{\partial}{\partial b}S\eta=\frac{\partial}{\partial b}\frac{\exp(-b\cdot G)}{Z(b)}\eta \quad \because \quad \text{式（B21）}$$

$$=\left[(-G)\cdot\frac{\exp(-b\cdot G)}{Z(b)}-\frac{\exp(-b\cdot G)}{Z(b)}\cdot\frac{\sum_{k\in L}(-W_k(\varphi)\cdot\exp(-b\cdot W_k(\varphi))}{Z(b)}\right]\eta$$

$$=[-G\cdot S+S\cdot E]\eta \quad \because \quad 3\text{式（B21），（B18），（B19）}$$

$$=[-G+E]S\eta \quad \text{for any} \quad \eta\in\mathfrak{H}$$

□

このようにして，定理B1の（iv）での統計作用素S について，式（B7）と同様な拡散方程式

$$\frac{\partial}{\partial b}[Z(b)\cdot S]\eta=-G[Z(b)\cdot S]\eta \tag{B29}$$

が成り立つことがわかり，２等式（B6），（B11）からわかるように，確率条件式（C8）を満たす式（B2）の統計作用素Sの内，式（B10）の平均類似度$ASM(\Psi, \eta)$が一定の条件の下で式（B12）のエントロピー$ETPY(S)$を最大にするのは，定理B1の（iv）で指摘されている式（B13）の自己共役作用素Gの指数関数

$$Z(b)\cdot S = \exp(-bG) \tag{B30}$$

であることになる．

付録C（第４章の６補助定理２，３，４，５，６，７，命題６，３定理１，２，３の証明）

本付録Cでは，第４章の６補助定理２，３，４，５，６，７，命題６，３定理１，２，３の証明が与えられる．

（補助定理２の証明）

Schwarzの不等式［1］

$$\forall\psi \in \mathfrak{H}, \forall\eta \in \mathfrak{H}, |(\psi, \eta)| \leq \|\psi\| \cdot \|\eta\| \tag{C1}$$

$$\therefore \quad |(\psi, \eta)|^2 \leq (\psi, \psi)\cdot(\eta, \eta) \tag{C2}$$

に注目する．式（C1）での等号は

φがηの定数（零を含む）倍，或いは，ηがφの定数（零を含む）倍の場合

に限ることに注意する．

先ず，不等式

$$\forall\varphi \in DOmain(A), \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \leq \frac{(A\varphi, A\varphi)}{(A\varphi, \varphi)} \tag{C3}$$

を証明する．即ち，

$$\forall\varphi \in Domain(\sqrt{A}) \cap Domain(A), A\varphi = \sqrt{A}\cdot\sqrt{A}\varphi \tag{C4}$$

を考慮し，不等式

$$\forall\varphi \in Domain(\sqrt{A}) \cap Domain(A), v(\varphi, A)^2 \leq v(\sqrt{A}\varphi, A)^2 \tag{C5}$$

を証明する．

不等式（C2）において，

$$\psi = A\varphi, \eta = \varphi$$

と置けば，不等式

$$|(A\varphi, \varphi)|^2 \leq (A\varphi, A\varphi)\cdot(\varphi, \varphi)$$

を得る．式（58）を考慮すると，

$$\frac{(A\varphi, \varphi)^2}{(\varphi, \varphi)} \leq (A\varphi, A\varphi) \quad \text{for} \quad (\varphi, \varphi) \neq 0$$

を得て，

$$\frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \leq \frac{(A\varphi, A\varphi)}{(A\varphi, \varphi)} \quad \text{for} \quad (\varphi, \varphi) \neq 0 \wedge (A\varphi, \varphi) \neq 0$$

という式（C3）の成立がわかる．特に，

$$(\varphi, \varphi) = 0 \vee (A\varphi, \varphi) = 0$$

の場合，

$$\frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} = 0$$

と考えれば，式（C3）は成り立っていることがわかる．

次に，

$$\forall \varphi \in Domain\,(A) \cap Domain\,(A^2),\ v\,(\sqrt{A}\,\varphi, A)^2 \leq v\,(A\varphi, A)^2 \tag{D6}$$

を証明する．

式（C5）において，φ の代りに，$\sqrt{A}\,\varphi$ を採用すれば，

$$v\,(\sqrt{A}\,\varphi, A)^2 \leq v\,(\sqrt{A}\sqrt{A}\,\varphi, A)^2 = v\,(A\varphi, A)^2$$

を得，不等式（C6）の証明が終わった．

2 式（D5），（D6）の平方根が証明しようとしていた不等式である． □

（補助定理 3 の証明）

先ず，（ⅱ）の方を証明しよう．

実変数λのBorel可測関数$g\,(\lambda)$において，λの代りに，自己共役作用素Hを代入して得られる作用素$g\,(H)$を考えると，$g\,(H)$は 3 条件式（34）～（36）を満たしている各射影作用素$\theta_\ell\,(H)$と可換であり，

$$\varphi \in Domain\,(g\,(H))\ \text{ならば},$$

$$\theta\ell\,(H)\,\varphi \in Domain\,(g\,(H)) \wedge g\,(H)\cdot\theta_\ell\,(H)\,\varphi = \theta_\ell\,(H)\cdot g\,(H)\,\varphi \tag{C7}$$

が成り立つ［24］．よって，式（35）より，

$$k \neq \ell \Rightarrow \theta_k\,(H)\cdot f\,(H)\cdot\sqrt{f_\ell\,(H)}\,\varphi$$

$$= \theta_k\,(H)\cdot\theta_\ell\,(H)\cdot f\,(H)\cdot\sqrt{f\,(H)}\,\varphi = 0 \tag{C8}$$

$$\wedge\,\theta_k\,(H)\cdot f\,(H)\cdot f_\ell\,(H)\,\varphi$$

$$= \theta_k\,(H)\cdot\theta_\ell\,(H)\cdot f\,(H)\cdot f_\ell\,(H) = 0 \tag{C9}$$

を得て，この 2 式（C8），（C9）を式（41）に考慮すれば，（ⅱ）が証明されたことがわかる．

残りの（ⅰ）を証明しょう．$\theta\,(H)$を，

$$\theta\,(H) \equiv \sum_{k \in L} \theta_k\,(H) \tag{C10}$$

とおく．式（34）を適用すると，

$$\forall k \in L,\ \theta_k\,(H)\cdot\theta\,(H) = \theta\,(H)\cdot\theta_k\,(H) = \theta_k\,(H) \tag{C11}$$

が得られることに，先ず，注意し，等式

$$\mathfrak{F}_k\,(\varphi) = v\,(\theta\,(H)\,\varphi, f_k\,(H))^2 \tag{C12}$$

の成立を示そう．

$v\,(\theta\,(H)\,\varphi, f_k\,(H))^2$ を計算して行くと，

$$v\,(\theta\,(H)\,\varphi, f_k\,(H))^2$$

$$= \frac{(f_k\,(H)\cdot\theta\,(H)\,\varphi, \theta\,(H)\,\varphi)}{(\theta\,(H)\,\varphi, \theta\,(H)\,\varphi)} \qquad \because \quad \text{式（59）の}\,v\,(\varphi, A)\,\text{の定義}$$

$$= \frac{(\theta_k\,(H)^2\cdot f\,(H)\,\theta\,(H)\,\varphi, \theta\,(H)\,\varphi)}{\sum_{k \in L}\sum_{k \in L}(\theta_k\,(H)\,\varphi, \cdot\theta_\ell\,(H)\,\varphi)} \qquad \because \quad \text{3 式（39），（34），（D10）}$$

$$= \frac{(f\,(H)\cdot\theta_k\,(H)\cdot\theta\,(H)\,\varphi, \theta_k\,(H)\cdot\theta\,(H)\,\varphi)}{\sum_{k \in L}\sum_{k \in L}(\theta_\ell\,(H)\cdot\ \theta_k\,(H)\,\varphi, \varphi)} \qquad \because \quad \text{2 式（D7），（36）}$$

$$=\frac{(f(H)\cdot\theta_k(H)\varphi,\ \theta_k(H)\varphi)}{\sum_{k\in L}(\theta_k(H)\varphi,\ \varphi)} \qquad \because \quad 2\text{式（D11），（34）}$$

$$=\frac{(\theta_k(H)\cdot f(H)\varphi,\ \theta_k(H)\varphi)}{\sum_{k\in L}(\theta_k(H)\varphi,\ \varphi)} \qquad \because \quad \text{式（D7）}$$

$$=\frac{(\theta_k(H)\cdot f(H)\varphi,\ \varphi)}{\sum_{k\in L}(\theta_k(H)\varphi,\ \varphi)} \qquad \because \quad 2\text{式（36），（34）}$$

$$=\mathfrak{F}_k(\varphi) \qquad \because \quad 2\text{式（39），（41）}$$

が得られ，等式（D12）の成立がわかった．

よって，$A=f_k(H)$と置き，不等式（60）を適用して，不等式

$$v(\theta(H)\varphi,f_k(H))^2\leq v(\sqrt{f_k(H)}\theta(H)\varphi,f_k(H))^2\leq v(f_k(H)\theta(H)\varphi,f_k(H))^2 \tag{C13}$$

の成立がわかる．式（C7）を考慮し，式（D12）を適用して不等式（D13）を書き直したものが，（ｉ）である．□

（補助定理４の証明）

容易に証明される．□

（定理１の証明）

容易に証明される．□

（命題６の証明）

作用素Aの指数関数$\exp(A)$は，

$$\exp(A)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}=I+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!} \tag{C14}$$

と定義されている．また，式（34）より，

$$\forall\ell\in L,\ \theta_\ell(H)^n=\ \theta_\ell(H) \quad \text{for any} \quad n\in\{1,2,\cdots\} \tag{C15}$$

の成立もわかる．よって，表現

$B_t(\ell)$

$$=I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[-2^{-1}\cdot t\cdot\theta_\ell(H)\cdot f(H)]^n}{n!} \qquad \because \quad 2\text{式（39），（67）}$$

$$=I+\theta_\ell(H)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[-2^{-1}\cdot t\cdot f(H)]^n}{n!} \qquad \because \quad \text{式（D15）}$$

を得るが，更に，変形して行くと，

$$=I+\theta_\ell(H)\cdot[\exp(-2^{-1}\cdot t\cdot f(H))-I]$$

$$=\theta_\ell(H)\cdot B_t+I-\theta_\ell(H) \qquad \because \quad \text{式（65）}$$

を得，（ｉ）の成立が示された．

（ｉ）で得られている$B_t(\ell)$の，$\ell\in L$に関する総和をとると，

$$\sum_{\ell\in L}B_t(\ell)$$

$$= \sum_{\ell \in L} \theta_\ell(H) \cdot B_t + |L| - \sum_{\ell \in L} \theta_\ell(H)$$

が成立するが，恒等条件式（52）の下では，この総和は，

$$= \sum_{\ell \in L} \theta_\ell(H) \cdot B_t + |L| - I$$

と変形され，（ⅱ）が得られた．　□

（補助定理 5 の証明）

命題 6 ，（ⅰ）の公式に，$\theta_\ell(H)$ を作用させた後，式（C15），並びに，この式（D15）から得られる等式

$$\theta_\ell(H) \cdot [I - \theta_\ell(H)] = 0 \tag{C16}$$

を考慮すれば，式（67）での $B_{2t}(\ell)$ の定義から，（ⅰ）が成り立つことがわかる．

（ⅱ）は，（ⅰ）の両辺に $f(H)$ を作用させた後， 2 式（39），（42）を考慮すれば，得られる．

（ⅲ）は，命題 5 ，（ⅰ）の公式に，$\theta_m(H)(m \neq \ell)$ を作用させた後，式（34），並びに，

$$\theta_m(H) \cdot [I - \theta_\ell(H)] = \theta_m(H) \quad \because \quad \text{式（34）} \tag{C17}$$

を考慮すれば，得られる．

（ⅳ）は，（ⅲ）の両辺に $f(H)$ を作用させた後， 2 式（39），（42）を考慮すれば，得られる．

（補助定理 5 の系 1 ，系 2 の証明）

$$(B_t(\ell)\varphi, B_t(\ell)\varphi)$$
$$= (B_t(\ell)B_t(\ell)\varphi, \varphi) \quad \because \quad B_t(\ell) \text{ は自己共役作用素}$$
$$= (B_{2t}(\ell)\varphi, \varphi) \tag{C18}$$

に注意しておく．系 1 は，式（C18），並びに，

$$(f_\ell(H)B_t(\ell)\varphi, B_t(\ell)\varphi)$$
$$= (f_\ell(H)B_{2t}(\ell)\varphi, \varphi) \quad \because \quad B_t(\ell) \text{ は } f_\ell(H) \text{ と可換な自己共役作用素} \tag{C19}$$

に，（ⅱ）を考慮したものである．

系 2 は，式（C18），並びに，$k \neq \ell$ として，

$$(f_k(H)B_t(\ell)\varphi, B_t(\ell)\varphi)$$
$$= (f_k(H)B_{2t}(\ell)\varphi, \varphi) \quad \because \quad B_t(\ell) \text{ は } f_k(H) \text{ と可換な自己共役作用素} \tag{C20}$$

に，（ⅳ）を考慮したものである．　□

（補助定理 6 の証明［28］）

$\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi) = 0$ のときは，$q(t) = 0$ であり，$q(t)$ は 1 実変数 t の非減少関数である．

以後，$\|\varphi\|^2 > 0$ とする．

先ず，$u(t)$ を，

$$u(t) \equiv \frac{(\exp(t \cdot g(H))\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \geq 0 \tag{C21}$$

とおくと，$u(t)$ は実変数 t の非負実数値関数である．

実際に，計算してみると，

$$\frac{du(t)}{dt} (\equiv u'(t))$$

$$= \frac{(g(H) \cdot \exp(t \cdot g(H))\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \tag{C22}$$

$$\frac{d^2u(t)}{dt}(\equiv u''(t))$$

$$=\frac{(g(H)^2\cdot\exp(t\cdot g(H))\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \quad \text{(C23)}$$

であることがわかる．実数値関数$\rho(t)$を

$$\rho(t)\equiv\log_e u(t) \quad \text{(C24)}$$

とおくと，

$$\frac{d\rho(t)}{dt}=\frac{u'(t)}{u(t)}$$

$$=q(t) \quad \because \quad 3\text{式（70），（D21），（D22）} \quad \text{(C25)}$$

が成り立つ．よって，式（90）の関数$q(t)$を変数tに関し微分すると，

$$\frac{dq(t)}{dt}$$

$$=\frac{d}{dt}\frac{d\rho(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{u'(t)}{u(t)} \quad \because \quad \text{式（C25）}$$

$$=\frac{u''(t)}{u(t)}-[\frac{u'(t)}{u(t)}]^2$$

$$=\frac{u''(t)}{u(t)}-2\cdot\frac{u'(t)}{u(t)}\frac{u'(t)}{u(t)}+[\frac{u'(t)}{u(t)}]^2$$

$$=\frac{(\{g(H)-\frac{u'(t)}{u(t)}\}^2\cdot\exp(t\cdot g(H))\varphi, \varphi)}{u(t)}\geq 0 \quad \because \quad 3\text{式（C23），（C22），（C21）} \quad \text{(C26)}$$

を得て，$q(t)$は実変数tの増加関数であることがわかる．□

（補助定理7の証明）

先ず，恒等条件式（52）が成立している場合，実変数λのBorel可測関数$h(\lambda)$について

$$\varphi\in Domain(h(H))\text{ ならば，} \forall k\in L, \varphi\in Domain(\theta_k(H)\cdot h(H)) \quad \text{(C27)}$$

であることは，

$$+\infty>\|h(H)\|^2$$

$$=\sum_{\ell\in L}(\theta_\ell(H)\cdot h(H)\varphi, h(H)\varphi)$$

$$=\sum_{\ell\in L}(\theta_\ell(H)^2\cdot h(H)\varphi, h(H)\varphi) \quad \because \quad \text{式（34）}$$

$$=\sum_{\ell\in L}(\theta_\ell(H)\cdot h(H)\varphi, \theta_\ell(H)\cdot h(H)\varphi) \quad \because \quad \text{式（36）}$$

$$=\sum_{\ell\in L}\|(\theta_\ell(H)\cdot h(H)\varphi\|^2 \quad \text{(C28)}$$

からわかることに注意しておく．式（C27），並びに，以下の式（C31）は以下の（ｉ），（ⅱ）の証明において，式（69）を考慮すると，Φの設定に暗に必要とされている．

（ｉ）の証明：$\mathfrak{F}_\ell(B_t(\ell)\varphi)$を変形してゆくと，

$$\mathfrak{F}_\ell(B_t(\ell)\varphi)$$

$$=\frac{(f_\ell(H)\cdot\exp(-\frac{1}{2}\cdot t\cdot f_\ell(H))\varphi,\ \exp(-\frac{1}{2}\cdot t\cdot f_\ell(H))\varphi)}{(\exp(-\frac{1}{2}\cdot t\cdot f_\ell(H))\varphi,\ \exp(-\frac{1}{2}\cdot t\cdot f_\ell(H))\varphi)}\quad \because\ \text{式（67）の}B_t(\ell)\text{の定義}$$

$$=\frac{(f_\ell(H)\cdot\exp(-t\cdot f_\ell(H))\varphi,\ \varphi)}{(\exp(-t\cdot f_\ell(H))\varphi,\ \varphi)}$$

$$\because\ \text{式（67）の}B_t(\ell)\text{は}f_\ell(H)\text{と可換な自己共役作用素} \tag{C29}$$

を得，$g(H)$ の代りに，$f_\ell(H)$ を考えると補助定理 6 より，$\mathfrak{F}_\ell(B_t(\ell)\varphi)$ は，実変数t の減少関数(非増加関数）である．よって，

$$\mathfrak{F}_\ell(\varphi)=\mathfrak{F}_\ell(B_t(\ell)\varphi)|_{t=0}\geq\mathfrak{F}_\ell(B_t(\ell)\varphi)$$

が成り立ち，証明が終わった．

（ⅱ）の証明：一般に，$\sigma(H)$ を H のスペクトル系とすると，不等式

$$\left|\frac{(g(H)\varphi,\ \varphi)}{(\varphi,\ \varphi)}\right|\leq\sup_{\lambda\in\sigma(H)}|g(\lambda)| \tag{C30}$$

が成り立つから［1］，

$$0\leq\frac{(B_{2t}(\ell)\varphi,\ \varphi)}{(\varphi,\ \varphi)}$$

$$=\left|\frac{(B_{2t}(\ell)\varphi,\ \varphi)}{(\varphi,\ \varphi)}\right|$$

$$\leq\sup_{\lambda\in\sigma(H)}|\exp(-t\cdot f_\ell(\lambda))|=1$$

が言え，よって，不等式

$$0\leq(B_{2t}(\ell)\varphi,\ \varphi)(=(B_t(\ell)\varphi,\ B_t(\ell)\varphi))$$

$$\leq(\varphi,\ \varphi)\quad\text{for any}\quad t\geq0 \tag{C31}$$

の成立が判明した．

$$\forall k\in L-\{\ell\},$$

$$\mathfrak{F}_k(B_t(\ell)\varphi)$$

$$=\frac{(f_k(H)\varphi,\ \varphi)}{(B_{2t}(\ell)\varphi,\ \varphi)}\qquad\because\ \ell\neq k\wedge\text{補助定理 5 の系 2}$$

$$\geq\frac{(f_k(H)\varphi,\ \varphi)}{(\varphi,\ \varphi)}\qquad\because\ \text{式（C31）}$$

$$=\mathfrak{F}_k(\varphi)\qquad\because\ 2\text{式（52），（41）}$$

が得られ，証明が終わった．　□

（定理 2 の証明）

補助定理 4 より，2 式（54），（55）で定義される $u(\varphi,\ell)^2$ は式（74）の x_ℓ の単調減少関数であるから，

$$u(B_t(\ell)\varphi,\ell)^2\leq u(\varphi,\ell)^2\leq th(\ell)\qquad\because\ \text{補助定理 7，（ｉ）と式（71）} \tag{C32}$$

並びに，

$$u(B_t(\ell)\varphi,k)^2\geq u(\varphi,k)^2\geq th(k)\qquad\because\ \text{補助定理 7，（ⅱ）と式（71）} \tag{C33}$$

を得て，定義２の半順序関係$\varphi \propto \eta$の定義を思い起こすと，式(72)の成立が示されたことがわかる．

□

（定理３の証明）

（ⅰ）の成立を示そう．先ず，式（C10）で定義される各帯域フィルタ$\theta_k(H)$の総和$\theta(H)$について，べき等性

$$\theta(H)^2 = \theta(H) \quad \because \quad \text{式（34）} \tag{C34}$$

が成り立っていることに注意すると，

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H}, (\theta(H)\varphi, \theta(H)\varphi) = (\theta(H)\varphi', \theta(H)\varphi')$$

であるが，これは，

$$= (\theta(H)\cdot\theta(H)\varphi', \varphi') \quad \because \quad \text{式（C10）の}\theta(H)\text{は自己共役作用素}$$

$$= (\theta(H)\varphi', \varphi') \quad \because \quad \text{式（C34）}$$

$$= \sum_{\ell \in L}(\theta_\ell(H)\varphi', \varphi') \quad \because \quad \text{式（C10）} \tag{C35}$$

を考慮すれば，任意の$k \in L$を持つ，式（41）の$\mathfrak{F}_k(\varphi)$について，

$\mathfrak{F}_k(\varphi)$

$$= v(\theta(H)\varphi, f_k(H)^2 \quad \because \quad \text{式（C12）}$$

$$= \frac{(f_k(H)\cdot\theta(H)\varphi, \theta(H)\varphi)}{(\theta(H)\varphi, \theta(H)\varphi)} \quad \because \quad \text{式（59）}$$

$$= \frac{(f_k(H)\varphi', \varphi')}{\sum_{k \in L}\theta_k(H)\varphi', \varphi')} \quad \because \quad \text{2式（73），（C35）}$$

$$= \mathfrak{F}_k(\varphi') \quad \because \quad \text{式（41）}$$

を得，２式（54），（55）から，

$$\forall k \in L, u(\varphi, k) = u(\varphi', k) \tag{C36}$$

を得，よって，定義１の同値関係～の定義から，$\varphi \sim \varphi'$が判明し，同時に，式（A11）の写像Tの形式から，$T\varphi = T\varphi'$が得られる．残りの成立は明らかである．

（ⅱ）の成立については，Hと可換なといわれる任意のユニタリ作用素Uに関し，式（45）を適用すると，各特徴量$u(\varphi, k)(k \in L)$の定義式（54），（55）から，

$$\forall k \in L, u(T\varphi, k) = u(\varphi, k) \tag{C37}$$

を得，よって，定義１の同値関係～の定義から，$U\varphi \sim \varphi$が判明し，同時に，式（A11）の写像Tの形式から，$TU\varphi = T\varphi$が得られる．残りの成立は明らかである．

□

(著者　鈴木昇一，論文題目　パターンφから抽出された特徴量$u(\varphi, \ell)$のfuzzy単調変換，文教大学情報学部情報研究no.32投稿論文，投稿年月日　2004年８月23日（月))