パターンモデル（パターンの標準形）の一般形

鈴木　昇一

Generalization of Canonical Forms Called Corresponding Models of Patterns

Shoichi Suzuki

要　　約

パターンの標準形（canonical form）とは，同じ意味を表す見かけ上異なる幾つかのパターンの集まり（類似しているパターンの集まり）を代表する 1 つのパターンであり，互いに類似しているこのパターン集合の構造を簡素化した表象である．S. Suzukiのパターン認識の数学的理論（SS理論［B3］，［B4］）では，この種の標準形は類似しているこのパターン集合（12章の同値類$[\varphi]_T$のこと）に対応するパターンモデル，或いは，唯単にモデルと呼ばれる．この種の標準形は$T\varphi$と表され，簡単には，$T\varphi$はこのパターン集合$[\varphi]_T$に属するパターンφのモデルといわれる．

パターンφのモデル$T\varphi$を生成する写像$T:\Phi\to\Phi$について，その構造を一般的に明らかにするのが，本論文の目的である．

パターン認識システムは通常，正規化器（事前処理器），特徴抽出器，識別器から成るとされている．本論文はこの内の 1 番目の正規化器に相当するS. Suzukiの，モデル構成作用素Tについて，これまでの研究内容を振り返りながら，省察・統合し，その一般化させられた構造形式を研究したものである．SS理論では，写像Tは少なくとも，４性質①零元不動点性，②正定数倍不変性，③ベキ等性，④非零写像性を満たすように構成されなければならない．

既に計算機シミュレーション済みで，その有用性が確認されているモデル構成作用素［B26］，［B29］，［B30］Tの一般形になっており，パターン認識システム内の正規化器のあるべき役割を模索する上で，示唆を与える内容になっている．

入力パターンφの標準形を求めることを従来のパターン認識技術では，パターンφの正規化（nomalization）といっていると考えてよいだろう．

SS理論では，多段階にわたり入力パターンを帰納推理を用いて変形していって，最終的に或るカテゴリを代表しているパターンを想起する多段階の想起認識の働きが得られている．この多段階の想起認識の働きは，これまでの，他の研究者のありとあらゆるパターン認識の働きをシミュレートでき，再現できるという意味で，万能である．この想起認識の働きでは，パターン$\varphi\in\Phi$をパターン$A\varphi\in\Phi$へと変換する写像Aが使われ，このような写像Aは，イ）雑音の除去，（ロ）座標変換の除去，（ハ）欠落情報の補充と冗長な情報の除去，（ニ）簡単化，（ホ）同一形式化などの 5 効果を備え

たモデル構成作用素Tを両側に挟んだ形式TATで使われる．

キーワード

（1）パターンモデル（パターンの標準形）　（2）特徴抽出写像　（3）ユニタリ共変性
（4）ユニタリ不変性　（5）1次独立な系　（6）多段階想起SS-認識

Abstract

A canonical form is one pattern representing a collection of similar patterns which express the same meaning of the patterns as it. It is the representation which simplified the structure of this mutually similar pattern set. In a mathematical theory of recognizing patterns [B3], [B4] called SS theory, this kind of canonical form is called a model or a pattern-model corresponding to this similar pattern set（equivalent class $[\varphi]_T$ of Chapter 12）. This kind of canonical form is represented by $T\varphi$, and $T\varphi$ is called a corresponding model of the pattern φ which belongs to the pattern set $[\varphi]_T$.

The purpose of this paper clarifies the general structure of a mapping $T:\Phi\rightarrow\Phi$ which can generate a corresponding model $T\varphi$ of the pattern φ.

It is usually supposed that a pattern recognition system is consisted of a normalizer（prior processor）, a feature extractor, and a classifier. This paper discusses the 1st normalizer of these looking back upon the old contents of research by S. Suzuki. An integration of the old contents are done in order to generalize these. In SS theory, at least, mapping T must be constituted so that 4 properties ①having 0 element as a fixed-point, ②an invariance under multiplication by any positive constant, ③an idempotency, and ④a nature of non-zero mapping may be filled. We research a general form of model construction operator T [B26], [B29], and [B30] by the help of which the usefulness concerning pattern recognition has been already checked by computer simulation

When groping for the role of a normalizer in a pattern recognition system, this paper has the contents which give suggestion.

Probably, from a point of view of the conventional pattern recognition technology, you may think that asking for this canonical form is called nomalization.

In SS theory, an input pattern is transformed using an inductive inference throughout many stages, and a faculty of the associative recognition having many stages which recollects the pattern which finally represents a certain category is obtained. The work of all the pattern recognition of other old researchers can be simulated by the associative recognition having many stages proposed by S. Suzuki, and the associative recognition means that it is omnipotent. At each stagework of this remembrance recognition, a mapping A which change one pattern to another meaningful pattern is used. The form TAT which is obtained by inserting into both sides of A model construction operator T equipped with five effects（イ）removal of noise, and（ロ）removal of coordinates transformation,（ハ）supplement of lack information and removal of redundant information,（ニ）simplification of patterns, and（ホ）changing patterns to the same formalization form is used in the associative recognition having many stages.

Key Words: (1) a corresponding model of the pattern (a canonical form of the pattern)
(2) feature-extracting mapping　(3) unitary covariance　(4) unitary invariance
(5) linearly independent system　(6) multi-stage associative SS-recognition

1.　まえがき

パターンの標準形（canonical form）とは，同じ意味を表す見かけ上異なる幾つかのパターンの集まり（類似しているパターンの集まり）を代表する 1 つのパターンであり，互いに類似しているこのパターン集合の構造を簡素化した表象である．SS理論［B3］,［B4］では，この種の標準形は類似しているこのパターン集合（12章の同値類$[\varphi]_T$ のこと）に対応するパターンモデル，或いは，唯単にモデルと呼ばれる．この種の標準形は$T\varphi$ と表され，簡単には，$T\varphi$ はこのパターン集合$[\varphi]_T$ に属するパターンφ のモデルといわれる．

パターンφ のモデル$T\varphi$ を生成する写像

$$T:\Phi\rightarrow\Phi \tag{1.1}$$

について，その構造を一般的に明らかにするのが，本論文の目的である．

パターン認識システムは通常，正規化器（事前処理器），特徴抽出器，識別器から成るとされている．本論文はこの内の 1 番目の正規化器に相当するS. Suzukiの，式（1.1）のモデル構成作用素T について，これまでの研究内容を振り返りながら，省察・統合し，その一般化させられた構造形式を研究したものである．既に計算機シミュレーション済みで，その有用性が確認されているモデル構成作用素［B26］,［B29］,［B30］T の一般形になっており，パターン認識システム内の正規化器のあるべき役割を模索する上で，示唆を与える内容になっている．

入力パターンφ の標準形を求めることを従来のパターン認識技術では，パターンφ の正規化（nomalization）といっていると考えてよいだろう．

SS理論［B3］,［B4］では，入力パターンφ の標準形とは，４性質

①（零元不動点性；axiom 1の（ i ））$\varphi=0\in\Phi$ については、$T\varphi=0$

②（正定数倍不変性；axiom 1の（ii）の後半）任意の正実定数a に対し，
　$\forall\varphi\in\Phi,\ T(a\cdot\varphi)=T\varphi$

③（ベキ等性；axiom 1の（iii）の後半）$\forall\varphi\in\Phi,\ T(T\varphi)=T\varphi$

④（非零写像性；axiom 1の（iv））$\exists\varphi\in\Phi,\ T\varphi\neq 0$

を満たす写像T にを入力して得られる“φ のモデル（φ に類似しているパターンの，ある集合の表象）$T\varphi$”である．

何故，標準形$T\varphi$ にパターンφ を変換するのであろうか？ 4 つの理由が考えられ，それは，

（イ）（雑音の除去）パターンφ から，φ の帰属するカテゴリの代表パターンω に比べ形状がを崩れさせている雑音を取り除く

（ロ）（座標変換の除去）φ に作用している座標変換を取り除く

（ハ）（欠落情報の補充と冗長な情報の除去）欠けている情報を補ったり，余分に含まれている情報を取り除く

（ニ）（簡単化）簡単な構造を備えた形式に直す

（ホ）（同一形式化）同じ意味内容を表すのに見かけ上異なる幾つかの形状を同一形式（標準形式）

に直す

である．

パターンに正規化の操作を行った結果，以後の認識処理が便利かつ容易になることになることが基本的に重要である．

また，10章では，モデル構成作用素Tが如何なる2つのパターンφ_1，φ_2に対し，単調性$\|\varphi_1-\varphi_2\|\leq\|T\varphi_1-T\varphi_2\|$，或いは，$\|\varphi_1-\varphi_2\|\geq\|T\varphi_1-T\varphi_2\|$を備えてくるかが研究され，更に，11章では，モデル$T\varphi$と原パターンφとの内積$(T\varphi, \varphi)$が非負であること，つまり，$(T\varphi, \varphi)\geq 0$を満たすこと（$T\varphi$が$\varphi$と鋭角をなすこと）についての$T$に，論及される．

尚，３付録A，B，Cが設けられている．付録Aには類似度関数SMの劣微分が解説されており，付録Bには類似度関数SMの片側微分が解説されており，付録Cには，平均パターンとの差に注目した不動点探索型多段階認識法が提案されている．

2. SS-公理系（axiom1〜4）を各々，満たさなければならないパターン集合Φとモデル構成作用素Tとの対【Φ, T】，類似度関数SM，大分類関数BSC，カテゴリ選択関数CSF［B3]，［B4］

本章では，処理の対象となる問題のパターンφの集合Φ，モデル構成作用素T，類似度関数SM，カテゴリ選択関数CSFについて説明される．対【Φ, T】のみたされなければならないaxiom 1と，類似度関数SMの満たされなければならないaxiom 2も説明され，Φの表示が明らかにされ，Φが構成的集合であることが指摘される．更に，大分類関数BSCの満たされなければならないaxiom 3も説明される．カテゴリ選択関数CSFが満たされなければならないaxiom 4も説明され，CSFの構造がSM，BSCを用いて決定されることが明らかにされる．

2.1 axiom 1とパターン集合Φ，モデル構成作用素T

一般に，処理の対象とする問題のパターンφの集合Φは或る可分な［A1］な（separable）一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の零元0を含む或る部分集合である．例えば，$\bar{\eta}$をηの複素共役として，

M：q次元ユークリッド空間R^qの可測部分集合 (2.1)

$dm(x)$：正値ルベーグ・スティルチェス式測度 (2.2)

$x=<x_1, x_2, \cdots, x_q>\in M\ (\subseteq R^q)$：実数値$q$変数直交座標系 (2.3)

を導入し，その内積(φ, η)，ノルム$\|\varphi\|$を，

$$(\varphi,\eta)=\int_M dm(x)\varphi(x)\cdot\overline{\eta}(x) \tag{2.4}$$

$$\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi, \varphi)} \tag{2.5}$$

とする線形空間（ベクトル空間）としての可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}=L_2(M;dm)$の特別な場合として，

$M=R^2$（2次元全平面） (2.6)

$$dm(x)=dm(x_1, x_2)=\frac{1}{x_1^2+x_2^2}dx_1 dx_2 \tag{2.7}$$

を選ぶことができる．

このようなΦ，並びに，写像

$$T : \Phi \to \Phi \tag{2.8}$$

は次のaxiom 1を満たさなければならない．このとき，写像T はモデル構成作用素（model-construction operator）と呼ばれ，$T\varphi = \Phi$ は$\varphi \in \Phi$ の代りとなり得るという意味で，パターン$\varphi \in \Phi$ のモデル（model），或いは，パターンモデルと呼ばれる．

下記のaxiom 1からわかるように，パターンモデル$T\varphi$ の集合

$$T \cdot \Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \tag{2.9}$$

は，原パターンφ の集合Φ への埋込性

$$T \cdot \Phi \subset \Phi \tag{2.10}$$

を満たし，Φ は原点$(= 0)$ を始点とし，Φ の任意の点を通る半直線を含むような集合，つまり，錐（cone）であらねばならない．下記の式(2.14)によるΦ の表示が正にΦ が錐であることを明らかにしている．

axiom 1を満たすパターン集合Φ は実は，構成的集合（constructible set）である．S. Suzukiは形式と意味とが互いに非分離であるようなパターンというものが満たされなければならない帰納的定義（再帰的定義）からΦ の集合論的再帰領域方程式（axiom 1を満たす最小のΦ の表現式；set-theoretic reflective domain equation）を提案し，この方程式を解き，Φ の構造，構成方法を明らかにしている（文献［B3］の2.4節）．その結果は次のとおりである：

パターンと判明している元の集合（基本領域；basic domain）（axiom 1の（ｉ）の前半から，$0 \in$）Φ_B を導入して，集合論的再帰領域方程式

$$\Phi = \Phi_B \cup T \cdot \Phi \cup R^{++} \cdot \Phi \tag{2.11}$$

ここに，

$$R^{++}：\text{正実数全体の集合} \tag{2.12}$$

$$R^{++} \cdot \Phi \equiv \{r^{++} \cdot \varphi \mid r^{++} \in R^{++}, \varphi \in \Phi\} \tag{2.13}$$

の解Φ は

$$\Phi = R^{++} \cdot [\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B] \tag{2.14}$$

と表示される（文献［B3］の式（2.56）を参照）．Φ の表示式（2.14）から，明らかに，２つの等式

(a) $T \cdot \Phi = T \cdot \Phi_B \subset \Phi$

$\because$　axiom 1の（ⅱ），（ⅲ）の２後半　(2.15)

(b) $R^{++} \cdot \Phi = \Phi$

$\because$　axiom 1の（ⅱ）の後半　(2.16)

が成り立つ．

<u>Axiom 1</u>（パターン集合Φ とモデル構成作用素T との対【Φ, T】の満たすべき公理）

（ｉ）（零元０のΦ-包含性と，零元０のT-不動点性；fixed-point property of zero element under mapping T）

$0 \in \Phi \wedge T0 = 0$

（ⅱ）（Φ の錐性，T の正定数倍吸収性；cone property）

$\forall \varphi \in \Phi,\ a \cdot \varphi \in \Phi \wedge T(a \cdot \varphi) = T\varphi$

for any positive real number $a \in R^{++}$.

（ⅲ）（Φ の埋込性（embeddedness）と，T のベキ等性（idempotency））

$\forall \varphi \in \Phi,\ T\varphi \in \Phi \wedge T(T\varphi) = T\varphi.$

（ⅳ）（写像T の非零写像性；non-zero mapping property of T）

$\exists \varphi \in \Phi,\ T\varphi \neq 0.$ □

2.2.　処理の対象となる問題のパターンφの集合Φとモデル構成作用素Tとの対【Φ, T】の基本構成と，パターンモデル$T\varphi$とパターンφとの間の同一知覚原理

原パターン$\varphi \in \Phi$が如何なる意味を備えているか，つまり，φが如何なる類概念（category）を表しているかを決定する働きをもつのが，認識システムRECOGNITRONである．

RECOGNITRONがモデル$T\varphi \in \Phi$を見たり聞いたりしたならば（$T\varphi$を感性的に受け取ったならば），原パターン$\varphi \in \Phi$と同じに見えたり聞こえたりすること（原パターンφと錯覚し原パターンφと同じように感性的に受容すること）だと，解釈可能な対【Φ, T】について説明しよう．

パターンモデル$T\varphi$を出力する式（A1.8）の写像Tに要求されるのは，次の 4 性質①〜④である：

①（零元不動点性；axiom 1の（ｉ））

$\varphi = 0 \in \Phi$については，$T\varphi = \varphi$

②（正定数倍不変性；axiom 1の（ⅱ）の後半）

任意の正実定数aに対し，

$\forall \varphi \in \Phi,\ T(a \cdot \varphi) = T\varphi.$

③（ベキ等性；axiom 1の（ⅲ）の後半）

$\forall \varphi \in \Phi,\ T(T\varphi) = T\varphi$

④（非零写像性；axiom 1の（ⅳ））

$\exists \varphi \in \Phi,\ T\varphi \neq 0$ □

上述の①〜④は各々，2.1節のaxiom 1の（ｉ），（ⅱ）の後半，（ⅲ）の後半，（ⅳ）である．零元$\varphi = 0 \in \Phi$は背景も何も無いパターンである．

Φは処理の対象とする問題のパターンφの集合Φであり，$T\varphi \in \Phi$は$\varphi \in \Phi$に対応するパターンモデルであって，原パターン$\varphi \in \Phi$と同じ空間Φに埋め込まれている．モデル$T\varphi$は，$T\varphi \in \Phi$を見たり聞いたりしたならばあたかも原パターン$\varphi \in \Phi$かのように見えたり聞こえたりするようなものである（**$T\varphi$とφとの間の同一知覚原理**）．この同一知覚原理を達成するために，SS理論［B1］〜［B6］では，式（A1. 8）の写像であるモデル構成作用素Tが導入され，対$[\Phi, T]$はA1章のaxiom 1を満たしていなければならないことになる．このとき，写像Tはモデル構成作用素と呼ばれ，$T\varphi \in \Phi$は$\varphi \in \Phi$の代りとなり得るという意味で，パターン$\varphi \in \Phi$のモデルと呼ばれる．

処理の対象とするパターンφの集合Φは或る可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の，零元 0 を含む或る部分集合であり，このΦ，並びに，式（2.8）の写像Tの対$[\Phi, T]$は上記の 4 性質①〜④（（ⅱ），（ⅲ）の 2 後半，並びに（ｉ），（ⅳ））を含む形で，2.1節のaxiom 1をみたさなければならない．

次の定理2.1は，axiom 1を満たす対$[\Phi, T]$を決定している．

［定理2.1］（パターン集合Φとモデル構成作用素Tとの対$[\Phi, T]$の構成定理）

パターンと判明しているφの集合（基本領域）$\Phi_B\ (\ni 0)$と，すべての正実定数の集合R^{++}とを用意する．

式（2..8）の写像Tがaxiom 1の（ｉ），（ⅱ），（ⅲ）の 3 後半，並びに，（ⅳ）を満たすとしよう．このとき，次の（イ），（ロ）が成り立つ：

（イ）処理の対象とする問題のパターンの集合Φを，式（2.14）の如く設定すれば，2 式（2.15），(2.16）が成立し，axiomの（ｉ），（ⅱ），（ⅲ）の 3 前半をΦは満たし，結局，対$[\Phi, T]$はaxiom 1を満たす．

（ロ）逆に，$(0 \in) \Phi_B$を部分集合に持つΦがaxiom 1の（ｉ），（ⅱ），（ⅲ）の 3 前半を満たすとすれば，

$$\Phi \supseteq \Phi_B \cup R^{++}\cdot\Phi \cup T\cdot\Phi \tag{2.17}$$

が成立するが，ここで，特に，包含式(2.17)において等号が成立するような最小のΦを採用すれば，つまり，領域方程式（2.11）の成立を仮定すれば，axiom　1を満たす対$[\Phi, T]$のは式（2.14）のように表され，２式（2.15），(2.16）も成立する．

（証明）（イ）は文献［B4]，付録１の定理A1.1である．（ロ）は文献［B3]，pp. 64-66（2.4節）で証明されている．□

2.3.　axiom 2と類似度関数SM

任意のパターン$\varphi\in\Phi$が，記憶されている代表的なパターンからなる有限個の元からなる集合Ω内の任意の代表パターンω_jとどの程度似ているか，違っているかを計量する手段を設定することが，認識の働きを確保するために必要とされる．類似性計量のための手段が類似度関数SMである．

“正常なパターン”（well-formed　pattern）は，ある１つのカテゴリ（category）$\mathfrak{C}_j$（第$j\in J$番目の類概念）のみに帰属しているものとし，このような$\mathfrak{C}_j$の集まり（有限集合）

$$\mathfrak{C}(J)=\{\mathfrak{C}_j \mid j\in J\} \tag{2.18}$$

を想定する．$\mathfrak{C}_j$の備えている性質を典型的に持っている（第$j\in J$番目の）代表パターン（prototypical pattern）$\omega_j\,(\neq 0)$を１つ選定する．$\mathfrak{C}_j$は，典型（prototype）としての代表パターンω_jを中心とした緩やかな（第$j\in J$番目の）カテゴリであることを仮定したことに注意しておく．ここに，

$$\Omega\equiv\{\omega_j \mid j\in J\}\subset\Phi \tag{2.19}$$

が式（2.18）の全カテゴリ集合$\underline{\mathfrak{C}}$に１対１に対応する代表パターンの集合である．式（2.19）の系Ωは，

$$\text{複素定数}\,a_j\,\text{の組}\{a_j \mid j\in J\}\,\text{について}\sum_{j\in J} a_j\cdot\omega_j=0 \Rightarrow \forall j\in J,\ a_j=0 \tag{2.20}$$

が成立しているという意味で，１次独立（linearly　independent）でなければならない．Ωを視察で決定できる場合があるが，訓練パターン系列からΩを適応的に決定する方法については，文献［B3］の付録Ⅰで説明されている．

Axiom 1を満たす式（1.1）のモデル構成作用素Tによって，式（1.2）の代表パターン集合Ωが変換されて得られる系

$$T\cdot\Omega\equiv\{T\omega \mid \omega\in\Omega\}=\{T\omega_j \mid j\in J\} \tag{2.21}$$

も１次独立であると要請する．このとき，類似度関数（similarity－measure function）

$$SM:\Phi\times\Omega\to\{s \mid 0\le s\le 1\} \tag{2.22}$$

を導入し，

$SM(\varphi,\omega_j)=1, 0$に従って，パターン$\varphi\in\Phi$は各々，$\omega_j$と確定的な類似度関係，相違関係にあり，
また，$0<SM(\varphi,\omega_j)<1$の場合は，あいまいな類似・相違関係にある　(2.23)

と，SMを解釈しよう．

式（A3.5）の関数SMは次のaxiom 2を満たすように構成されねばならない．Axiom 2の（ⅰ）では、クロネッカー（Kronecker）のδ記号

$$\delta_{ij}=1 \quad if \quad i=j,\ =0 \quad if \quad i\neq j \tag{2.24}$$

が導入されているが、特にaxiom　2の（ⅰ）なるこの正規直交性は、候補カテゴリの分離・抽出が効果的に行われ，

候補カテゴリの鋭利な削減（a sharp reduction）　(2.25)

をもたらすために要請されている．

Axiom 2（類似度関数SM の満たすべき公理）

（ｉ）（正規直交性；orthonormality）

$\forall i, \forall j \in J, SM(\omega_i, \omega_j) = \delta_{ij}$.

（ⅱ）（規格化条件，確率性，正規性；probability condition, normalization）

$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} SM(\varphi, \varphi_j) = 1$.

（ⅲ）（写像T の下での不変性；invariance under mapping T）

$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j)$. □

上述のaxiom 2の（ｉ）～（ⅲ）について簡単に説明しておこう．

SM の解釈式（2.23）の下で，（ｉ）は，相異なカテゴリの代表パターン同士は確定的な相違関係にあり，同一カテゴリの代表パターン同士は確定的な類似度関係にあることを要請している．（ⅱ）は、任意のパターンφ について，すべてのカテゴリについての類似度の総和は 1 であることを要請している．つまり，パターンφ は少なくとも 1 つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属していることを要請している．（ⅲ）は，パターンモデル$T\varphi$ は原パターンφ と任意のカテゴリについて同一類似度を持つことを要請している．ということは，パターンモデル$T\varphi$ を見たり，聞いたりするならば，原パターンφ と同じように見えたり、聞こえたりすること（同一知覚原理；2.2章を参照）を要請していることになる．

尚，第$j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の生起確率である非負実数$p(\mathfrak{C}_j)$を，２条件

$$[\forall j \in J, 0 < p(\mathfrak{C}_j) < 1] \wedge [\sum_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) = 1] \tag{2.26}$$

を満たすものとして導入しておく．

2.4　.axiom 3と大分類関数

本章では，ある 1 つのカテゴリに帰属するかどうかを決定する 2 カテゴリ分類器としての大分類関数BSC は，axiom 3を満たすように構成されなければならないことが説明される．

式（2.22）の類似度関数SM が式（A3.8）でいう“候補カテゴリの鋭利な削減”を持つためには，axiom 2，（ｉ）の正規直交性を満たす必要があることが.2.3で指摘されたが，$SM(\varphi, \omega_j)$の代りに$SM(\varphi, \omega_j) \cdot BSC(\varphi, j)$を用いれば，パターン$\varphi$ が帰属するかも知れない候補カテゴリを益々，鋭利に削減できると期待される．

大分類関数　（rough classifier, binary-state classifier）と呼ばれる 2 値関数

$$BSC : \Phi \times J \to \{0, 1\} \tag{2.27}$$

を，次のaxiom 3を満たすものとして導入し，解釈

パターン$\varphi \in \Phi$ の帰属する候補カテゴリの 1 つが第$j \in J$ 番目の $\mathfrak{C}_j$ であるならば,

$$BSC(\varphi, j) = 1 \tag{2.28}$$

であることが望ましい

を採用しよう．この際，注意すべきは,

$BSC(\varphi, j) = 0$ であっても，パターン$\varphi \in \Phi$ の帰属する候補カテゴリの 1 つは，第$j \in J$ 番目の $\mathfrak{C}_j$ でないとは限らない　(2.29)

としていることである．また，axiom 3の（ｉ）からわかるように，カテゴリ間の相互排除性

（the mutual exclusion of the one category from the other categories）

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, BSC(\omega_i, j) = 0 \tag{2.30}$$

を公理として要請していない事実に注意しておこう．この事実を補うのが実は，式（2.22）の類似度関数SMが満たさなければならないとしているaxiom 2の（ｉ）（正規直交性）である．

Axiom 3（大分類関数BSCの満たすべき公理）

（ｉ）（カテゴリ抽出能力；category separability）

$$\forall j \in J,\ BSC\,(\omega_j, j) = 1$$

（ii）（写像Tの下での不変性；invariance under mapping T）

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall j \in J,\ BSC\,(T\varphi, j) = BSC\,(\varphi, j).$$ □

2.5　axiom 4と、カテゴリ選択関数CSFの構造形式

認識システムRECOGNITRONがパターン$\varphi \in \Phi$に対し，

「パターン$\varphi \in \Phi$が、式（A3.1）の全カテゴリ集合$\mathfrak{C}_j$の部分集合

$$\underline{\mathfrak{C}}(\gamma) \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid j \in \gamma\} \tag{2.31}$$

内の何れか１つのカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属する可能性がある」　(2.32)

という“パターン$\varphi \in \Phi$のカテゴリ帰属知識（categorical membership-knowledge）”を持っているとする．この知識を，

$$< \varphi, \gamma > \in < \Phi, 2^J > \tag{2.33}$$

と表す．

$$< \Phi, 2^J > \equiv \{< \varphi, \gamma > \mid \varphi \in \Phi, \gamma \in 2^J\} \tag{2.34}$$

は，カテゴリ帰属知識空間（categorical membership-knowledge space）と呼ばれ、すべてのパターン$\varphi \in \Phi$と，すべてのカテゴリ番号のリスト$\gamma \in 2^J$とのなす順序の付いた対リスト（an ordered pair list）$< \varphi, \gamma >$の集合である．ここに，2^Jは集合Jのすべての部分集合のなす集合，つまり，“すべてのカテゴリ番号の集合Jのべき集合（power set）”をで表わしている．

カテゴリ帰属知識空間$< \Phi, 2^J >$はパターン集合Φの意味領域である．

カテゴリ選択関数（category-selection function）と呼ばれる写像

$$CSF : \Phi \times 2^J \to 2^J \tag{2.35}$$

は，包含関係（inclusion relation）

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall \gamma \in 2_J,\ CSF\,(\varphi, r)) \subseteq \gamma \subseteq J \in 2^J \tag{2.36}$$

を満たし，然も，次のaxiom 4を満たすものとして，設定されるとしよう．

Axiom 4（カテゴリ選択関数CSFの満たすべき公理）

（ｉ）$\varphi = 0 \vee \gamma = \phi$の場合

如何なるカテゴリ番号$k \in \gamma$も$< \varphi, \gamma >$の有効な候補カテゴリの番号ではない．

（ii）$\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$であり，かつ，$SM\,(\varphi, \omega_k) = 0 \wedge BSC\,(\varphi, k) = 0$の場合

カテゴリ番号$k \in \gamma$は，$< \varphi, \gamma >$の有効な候補カテゴリの番号ではない．

（iii）$\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$であり，かつ，$\sum_{k \in \gamma} BSC\,(\varphi, k) = 0$の場合

$BSC\,(\varphi, k) = 0$であっても，$SM\,(\varphi, \omega_k) > 0)$であるようなカテゴリ番号$k \in \gamma$は，$< \varphi, \gamma >$の有効な候補カテゴリの番号である．

（iv）$\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$であり，かつ，$\sum_{k \in \gamma} BSC\,(\varphi, k) > 0$の場合

（iv-1）$BSC\,(\varphi, k) = 0$なるカテゴリ番号$k \in \gamma$は，$SM\,(\varphi, \omega_k) > 0$であっても，$< \varphi, \gamma >$の有効な候補カテゴリの番号ではない．

（iv-2）$BSC\,(\varphi, k) = 1$なるカテゴリ番号$k \in \gamma$は，$SM\,(\varphi, \omega_k) = 0$であれば，

$<\varphi, \gamma>$ の有効な候補カテゴリの番号ではない． □

次の定理2.2では，式（2.35）の写像は，式（2.22）の類似度関数SM，式（2.27）の大分類関数BSC を使用する形式で，

その定義域が$\Phi \times 2^J$ であり，その値域が，パターン$\varphi \in \Phi$ のカテゴリ帰属知識$<\varphi, \gamma> \in <\Phi, 2^J>$ の“有効な”候補カテゴリの番号リスト（a list of significant category-numbers）の集合である（2.37）の如く，構成されている．

次の定理2.2は，axiom 4を満たすように，式（2.35）のカテゴリ選択関数CSF の構造を決定したものである．

［定理2.2］（カテゴリ選択関数CSF の構成定理）

次のように定義される式（2.35）の１つの写像CSF は式（2.36）と上述のaxiom 4を満たす：

（ｉ）$\varphi = 0 \vee \gamma = \phi$ の場合

$$CSF\,(\varphi, \gamma) = \phi. \tag{2.38}$$

（ii）$\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ の場合

$$CSF\,(\varphi, \gamma) =$$

$$\begin{cases} \{k \in \gamma \mid SM\,(\varphi, \omega_k) > 0\} \quad \text{if} \quad \sum_{k \in \gamma} BSC\,(\varphi, k) = 0 & (2.39) \\ \{k \in \gamma \mid SM\,(\varphi, \omega_k) > 0 \wedge BSC\,(\varphi, k) = 1\} \quad \text{if} \quad \sum_{k \in \gamma} BSC\,(\varphi, k) > 0 & (2.40) \end{cases}$$

（証明）文献［B3］の定理E1である． □

定理2.2の写像CSF について，次のように解釈できる：

処理の対象とするパターン$\varphi \in \Phi$ がカテゴリ$\mathfrak{C}_j$，$j \in \gamma$ の何れか１つに帰属する可能性があると想定した場合，更に絞り込んで，その内のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$，$j \in CSF\,(\varphi, \gamma) \subseteq \gamma$ の何れか１つに帰属する可能性があると帰納推論（inductive reasoning）できる機能を備え，その出力$CSF\,(\varphi, \gamma)$ はパターン$\varphi \in \Phi$ の有効な候補カテゴリの番号のリストを与えている． □

2.6 構造受精作用素 $A\,(\mu)$

分類の働きの対象となるデータが画像や音声などのパターンで与えられる場合，この分類の働きはパターン認識といわれる．更に，複数の事物がある場合画像の内容や，会話音声の内容を確定する働きはパターン理解と呼ばれることが多い．

パターンφ が入力されたことが契機になって，記憶内容（各カテゴリの性質を典型的に備えている代表パターンのモデルの集合）を活性化し，入力パターンφ の構造を生成する働きを備えているパターン変換（パターンからパターンへの想起変換）をSS理論［B1］～［B4］では，構造受精作用素（structural fertilization operator）という．構造受精作用素はパターンからパターンへの想起変換である．

構造受精作用素

$$A\,(\mu) : \Phi \to \Phi \tag{2.41}$$

の定義は次の通りである：

（ｉ）$\varphi = 0 \vee \mu = \phi$ のとき

$$A\,(\mu)\,\varphi = 0 \tag{2.42}$$

（ii）$\varphi \neq 0 \cap \mu \neq \phi$ のとき

（ii-1）$\sum_{j \in \mu} BSC\,(\varphi, j) = 0$ のとき

$$A\,(\mu)\,\varphi = \sum_{j \in \mu} SM\,(\varphi, \omega_j) \cdot T\omega_j. \tag{2.43}$$

よって，

$$\sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j) = 0 \text{のとき，} A(\mu)\varphi = 0 \text{である．} \tag{2.44}$$

（ⅱ-2）$\sum_{j \in \mu} BSC(\varphi, j) > 0$ のとき

$$A(\mu)\varphi = \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j) \cdot BSC(\varphi, j) \cdot T\omega_j. \tag{2.45}$$

$$= \sum_{j \in \mu \wedge BSC(\varphi, j) = 1} SM(\varphi, \omega_j) \cdot T\omega_j. \tag{2.46}$$

よって，

$$\sum_{j \in \mu \wedge BSC(\varphi, j) = 1} SM(\varphi, \omega_j) = 0 \text{のとき，} A(\mu)\varphi = 0 \text{である．} \tag{2.47}$$

□

2.7　パターン集合Φの意味領域$\Phi \times 2^J$の導入に伴うカテゴリ帰属知識$<\psi, \lambda>$の変換

本節では，拡張された構造受精変換$TA(\mu)T$の定義域Φ，値域Φを共に，カテゴリ帰属知識空間$<\Phi, 2^J>$へと拡張する．更に，構造受精変換$TA(\mu)T$をカテゴリ帰属知識へ作用するのは，唯１つの代表パターンω_jと似ている程度を最大値１へと変換するためであるが，構造受精変換$TA(\mu)T$によって類似度がどのような不等式を満たす形式で変換されるかを検討する．

2.7.1　定義域Φ，値域Φが共に，$\Phi \times 2^J$へと拡張された構造受精変換$TA(\mu)T$の定義

処理の対象とする問題のパターンφについて，この入力パターンφを式（2.21）の記憶内$T \cdot \Omega$のある１つのパターンω_jのモデル$T\omega_j$として再生し，然も，入力パターンφが帰属するカテゴリ$\mathfrak{C}_j$を決定できる連想形多段階認識の働き［B3］，［B4］におけるパターン変換を説明しよう．

その途中でパターンが得られたたなら常にそのパターンの標準形を求める形式に多段階連想形認識の働きを設定するため，モデル構成作用素と呼ばれる式（2.8）の写像Tを導入し，構造受精作用素$A(\mu)$をモデル構成作用素で両側を挟むのであり，この挟むことが，他の研究者によるいかなる研究内容から本研究内容を区別している．

先ず，２つのカテゴリ帰属知識$<\varphi, \gamma>$, $<\psi, \lambda> \in <\Phi, 2^J>$間の等形式関係（equi-form relation）$=_\Delta$を

$$<\varphi, \gamma> =_\Delta <\psi, \lambda> \Leftrightarrow \varphi = \psi \wedge \gamma = \lambda \tag{2.48}$$

と定義する．

次に，式（2.41）の写像$A(\mu): \Phi \to \Phi,\ where\quad \mu \in 2^J$の定義域（パターン集合）$\Phi$，値域$\Phi$を共に，カテゴリ帰属知識空間（パターン集合$\Phi$の意味領域）$\Phi \times 2^J$へと拡張して，カテゴリ帰属知識変換と呼ばれる写像

$$TA(\mu)T : <\Phi, 2^j> \to <\Phi, 2^J>, \mu \in 2^J \tag{2.49}$$

と考え，カテゴリ帰属知識をカテゴリ帰属知識へと変換する定義

$$<\psi, \lambda> =_\Delta TA(\mu)T <\varphi, \gamma> \in <\Phi, 2^J> \tag{2.50}$$

を考えよう．拡張された$TA(\mu)T$写像を構造受精変換というが，この構造受精変換$TA(\mu)T$が施された結果のパターン$\psi \in \Phi$とカテゴリ番号リスト$\lambda \in 2^J$を

$$\psi = TA(\mu \cap \gamma)T\varphi \tag{2.51}$$

$$\lambda = CSF(\varphi, \mu \cap \gamma) \tag{2.52}$$

と定義する．2^J はカテゴリ番号 $j\ (\in J)$ を要素に持つすべてのリストからなる集合（すべてのカテゴリ番号からなる集合 J のすべての部分集合のなす集合；J のべき集合）であり，写像 $CSF:\Phi\times 2^J\to 2^J$ はカテゴリ選択関数であり，2.5節の定理2.2で決定されている．

2.7.2　構造受精変換 $TA(\mu)T$ による類似度の変換

先ず，次の 2 補助定理2.1，2.2を用意する．

［補助定理2.11］（構造受精作用素 $A(\lambda)$ の T-不変性）

$$\forall\lambda\subseteq J,\ \forall\varphi\in\Phi,\ A(\lambda)T\varphi=A(\lambda)\varphi. \qquad \square$$

［補助定理2.2］（SM の正定数倍不変性）

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall j\in J,\ SM(a\cdot\varphi,\ \omega_j)=SM(\varphi,\ \omega_j)\ \text{for any positive number}\ a \qquad \square$$

上述の 2 補助定理2.1，2.2を使用し証明される次の 2 定理2.3，2.4は，構造受精変換 $TA(\mu)T$ によって，パターン $\varphi\in\Phi$ の類似度分布

$$SM(\varphi,\ \omega_j),\ j\in J \tag{2.53}$$

が，パターン $TA(\lambda)T\varphi\in\Phi$ の類似度分布

$$SM(TA(\lambda)T\varphi,\ \omega_j),\ j\in J \tag{2.54}$$

へと変換される際，ある1つの $j\in J$，ある1つの $i\in J$ についての $SM(TA(\lambda)T\varphi,\ \omega_j)$，$SM(TA(\lambda)T\varphi,\ \omega_j)$ の上限，下限を決定している．

帰納推理の働きで選ばれた構造受精変換 $A(\lambda_t)$, $t=0,1,2,\cdots$ の列を

$$A_t\equiv A(\lambda_t),\ t=0,1,2,\cdots \tag{2.55}$$

と想定したときの，パターンモデル変換

$$\varphi\to\varphi_0\equiv T\varphi\to\varphi_1\equiv TA_0T\varphi_0\to\varphi_2=TA_1T\varphi_1\to\cdots\to\varphi_{t+1}\equiv TA_tT\varphi_t\to\cdots \tag{2.56}$$

によって，

入力パターン $\varphi\in\Phi$ の意味構造が $T\omega_j$ へと再生され，入力パターン $\varphi\in\Phi$ の帰属するカテゴリが $\mathfrak{C}_j$ であると決定できる類似度分布

$$\exists j\in J,\ SM(\varphi_t,\ \omega_j)=1\wedge[\forall k\in J-\{j\},\ SM(\varphi_t,\ \omega_k)=0]\ \text{（不動点類似度分布）} \tag{2.57}$$

へと収束することがあることを保証している．

［定理2.3］（構造受精変換 $TA(\mu)T$ による類似度の変換における上限・下限の評価定理 1 ）

2 条件

$$\sum_{k\in\lambda}SM(\varphi,\ \omega_k)>0 \tag{2.58}$$

$$\sum_{k\in\lambda}BSC(\varphi,\ k)=0 \tag{2.59}$$

が成立するようなパターン $\varphi\in\Phi$ とカテゴリ番号リスト $\lambda\subseteq J$ とについて，

$$\forall j\in J,\ SM(TA(\lambda)T\varphi,\ \omega_j)=SM\Big(\sum_{\ell\in\lambda}\frac{SM(\varphi,\ \omega_\ell)}{\sum_{k\in\lambda}SM(\varphi,\ \omega_k)}\cdot T\omega_\ell,\ \omega_j\Big) \tag{2.60}$$

であり，

$$\exists j\in J,$$

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{SM(\varphi,\ \omega_j)}{\sum_{k\in\lambda}SM(\varphi,\ \omega_k)} & if\quad j\in\lambda\\[2ex] 0\quad if\quad j\notin\lambda & \end{array}\right\}$$

$$\geq SM\,(TA\,(\lambda)\,T\varphi,\ \omega_j) \tag{2.61}$$

かつ，

$$\exists i \in J,$$

$$SM\,(TA\,(\lambda)\,T\varphi,\ \omega_i) \geq$$

$$\begin{cases} \dfrac{SM\,(\varphi,\ \omega_i)}{\sum_{k\in\lambda} SM\,(\varphi,\ \omega_k)} & if \quad i \in \lambda \\ 0 \quad if \quad i \notin \lambda \end{cases} \tag{2.62}$$

□

次の定理2.4も成り立つ．

［定理2.4］（構造受精変換$TA\,(\mu)\,T$による類似度の変換における上限・下限の評価定理定理２）

２条件

$$\sum_{k\in\lambda} SM\,(\varphi,\ \omega_k)\cdot BSC\,(\varphi,\ k) > 0 \tag{2.63}$$

$$\sum_{k\in\lambda} BSC\,(\varphi,\ k) > 0 \tag{2.64}$$

が成立するようなパターン$\varphi \in \Phi$とカテゴリ番号リスト$\lambda \subseteq J$とについて，

$$\forall j \in J, SM\,(TA\,(\lambda)\,T\varphi,\ \omega_j) = SM\,(\frac{SM\,(\varphi,\ \omega_\ell)\cdot BSC\,(\varphi,\ \ell)}{\sum_{k\in\lambda} SM\,(\varphi,\ \omega_k)\cdot BSC\,(\varphi,\ k)}\cdot T\omega_\ell,\ \omega_j) \tag{2.65}$$

であり，

$$\exists j \in J,$$

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{SM\,(\varphi,\ \omega_j)\cdot BSC\,(\varphi,\ j)}{\sum_{k\in\lambda} SM\,(\varphi,\ \omega_k)\cdot BSC\,(\varphi,\ \omega_k)} & if \quad j \in \lambda \\ 0 \quad if \quad j \notin \lambda & \end{matrix}\right\}$$

$$\geq SM\,(TA\,(\lambda)\,T\varphi,\ \omega_j) \tag{2.66}$$

かつ，

$$\exists i \in J,\ SM\,(TA\,(\lambda)\,T\varphi,\ \omega_j) \geq$$

$$\begin{cases} \dfrac{SM\,(\varphi,\ \omega_i)\cdot BSC\,(\varphi,\ i)}{\sum_{k\in\lambda} SM\,(\varphi,\ \omega_k)\cdot BSC\,(\varphi,\ \omega_k)} & if \quad i \in \lambda \\ 0 \quad if \quad i \notin \lambda \end{cases} \tag{2.67}$$

□

3.　SS理論での多段階連想形不動点認識の働きが探索する空間

本章では，SS多段階想起認識の働きが探索すべき空間（状態空間）が明らかにされる．つまり，不動点認識の働きが作用する状態空間（探索すべき空間）とは？を解説する．

結論は，多段階想起認識）の働きが探索する空間を$FGC_{search}\,(T\cdot\Omega)$に限ったことである．

原点$(\varphi=0)$を含む最小の凸錐

$$FGC\,(T\cdot\Omega)\equiv\{\psi\mid\psi=\sum_{j\in J}a_j\cdot T\omega_j,\ a_j\geq 0\,(j\in J)\}\tag{3.1}$$

を，式（2.21）の$T\cdot\Omega\equiv\{T\omega_j\mid j\in J\}$によって生成される有限錐（finitely generated cone）という．SS理論での多段階連想形不動点認識法では，この有限錐$FGC\,(T\cdot\Omega)$の有界な部分集合

$$FGC_{search}\,(T\cdot\Omega)\equiv\{\psi\mid\psi=\sum_{j\in J}a_j\cdot T\omega_j,\ 1\geq a_j\geq 0\,(j\in J),\ \sum_{j\in J}a_j\leq 1\}\tag{3.2}$$

が，探索（すべき）空間（状態空間）である．

その理由を説明しよう．先ず，補助定理3.1を証明する．

［補助定理3.1］（BSC の正定数倍不変性）

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall j\in J,\ BSC\,(a\cdot\varphi,j)=BSC\,(\varphi,j)\ \text{for any positive number } a\tag{3.3}$$

（証明）a を任意の正実定数とする．

$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall J,\ BSC\,(a\cdot\varphi,j)$

$=BSC\,(T\,(a\cdot\varphi),j)\quad\because\quad$ axiom 3，（ⅱ）

$=BSC\,(T\cdot\varphi,j)\quad\because\quad$ axiom 1，（ⅱ）

$=BSC\,(\varphi,j)\quad\because\quad$ axiom 3，（ⅱ） □

Axiom 1，（ⅱ）よりモデル構成作用素T は任意の正実定数a を吸収する．また，補助定理2.2より類似度関数SM も任意の正実定数a を吸収し，最後に，補助定理3.1より大分類関数BSC も任意の正実定数a を吸収し，よって，$A\,(\mu)$の定義式（2.41）～（2.45），並びに，CSF の構成定理（定理2.2）より次の 2 補助定理3.2, 3.3が成り立ち，$A\,(\mu)$，CSF も任意の正実定数a を吸収することがわかる．

［補助定理3.2］（$A\,(\mu)$の正定数倍不変性）

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall\mu\subseteq J,\ A\,(\mu)(a\cdot\varphi)=A\,(\mu)\varphi\ \text{for any positive number } a.\tag{3.4}$$

□

［補助定理3.3］（CSF の正定数倍不変性）

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall\mu\subseteq 2^J,CSF\,(a\cdot\varphi,\mu)=CSF\,(a\cdot\varphi,\mu)=CSF\,(\varphi,\mu)\ \text{for any positive number } a\tag{3.5}$$

［補助定理3.4］（CSF のT-不変性）

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall\mu\in 2_J,\ CSF\,(T\varphi,\mu)=CSF\,(\varphi,\mu)\tag{3.6}$$

（証明）axiom 2，（ⅲ），並びに，axiom 3，（ⅱ）を定理2.2に考慮すれば，明らかである．

□

このようにして，SS理論での多段階連想形不動点認識法は，任意の正実定数a を吸収することがわかり，不動点を探索する探索空間を$FGC\,(T\cdot\Omega)$から$FGC_{search}\,(T\cdot\Omega)$へと制限することに支障が認められなくなった．

式（2.21）の$T\cdot\Omega$は 1 次独立な系であるから，処理の対象とする問題のパターン$\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$に対応するパターンモデル$T\varphi\in\Phi$ は，

$$\exists(T\varphi)_\perp\in\mathfrak{H}\ \text{such that}\ \forall j\in J,\ ((T\varphi)_\perp,T\omega_j)=0,\ T\varphi=\sum_{j\in J}a_j\,(T\varphi)\cdot T\omega_j+(T\varphi)_\perp\tag{3.7}$$

と 1 次展開できる．$T\varphi\in\Phi$ を式（2.21）の$T\cdot\Omega$を用いての， 1 次結合式$\sum_{j\in J}a_j\cdot T\omega_j$で近似するときの誤差$T\varphi-\sum_{j\in J}a_j\cdot T\omega_j$の自乗ノルム$\|T\varphi-\sum_{j\in J}a_j\cdot T\omega_j\|^2$を最小にするように決定するとすれば，つまり，

$$\| T\varphi - \sum_{j\in J} a_j \cdot T\omega_j \|^2 \rightarrow \min \tag{3.8}$$

を満たすように決定する（最小自乗法）とすれば，各 1 次結合係数 $a_j(T\varphi)(j\in J)$ は，連立 1 次方程式

$$\sum_{k\in J} a_k(T\varphi)\cdot(T\omega_k, T\omega_j) = (T\varphi, T\omega_j), j\in J \tag{3.9}$$

の解 $a_j(=a_j(T\varphi)), j\in J$ として求まる．

$$[\forall j\in J, a_j(T\varphi)\geq 0]\wedge(T\varphi)_\perp = 0 \tag{3.10}$$

であれば，$T\varphi\in\Phi$ は $FGC(T\cdot\Omega)$ の元になり，

$$[\forall j\in J, 1\geq a_j(T\varphi)\geq 0]\wedge\sum_{j\in J} a_j(T\varphi)\leq 1\wedge(T\varphi)_\perp = 0 \tag{3.11}$$

であれば，$T\varphi\in\Phi$ は $FGC_{search}(T\cdot\Omega)$ の元になる．

SS理論での多段階連想形不動点認識（多段階想起 認識）の働きが探索する空間を $FGC(T\cdot\Omega)$，ひいては，$FGC_{search}(T\cdot\Omega)$ に限ったことは，深刻な解決不能な問題を招くことがあり得る．式（3.5）の 1 次展開

$$T\varphi = \sum_{j\in J} a_j(T\varphi)\cdot T\omega_j + (T\varphi)_\perp \tag{3.12}$$

における各実展開係数 $a_j(T\varphi)(j\in H)$ を式（3.8）の如く，非負に制限したことが問題なのである．

例えば，本来ならば，正しく認識できるであろうパターン $\varphi\in\Phi$ を誤認識する事態を招くことが予想される．認識システムRECOGNITRONの構成 3 要素 T, SM, BSC を処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ に関し適切に選定することによってこの種の深刻な事態を避けなければならない．

4.　ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の分解に基づくパターンの分解から得られるモデル $\varphi_{fixed}\equiv T\varphi$

3 章では，SS多段階想起認識の働きが探索すべき空間（状態空間）を明らかにした．本章では，入力パターン φ 内の不動点成分 φ_{fixed} を入力パターン φ の代りに採用し，以後，多段階想起認識の働きを続行することの意味を解説する．

入力パターン $\varphi\in\Phi$ を

$$\varphi = \varphi_{fixed} + \varphi_{nonfixed} \wedge T\varphi_{fixed} = \varphi_{fixed} \wedge T\varphi_{nonfixed} \neq \varphi_{nonfixed} \tag{4.1}$$

と分解し，T の不動点 $\varphi_{fixed} = T\varphi\in\Phi$ を φ の代りに採用し，記憶 $T\cdot\Omega$ 内のパターン ω_j のモデル $T\omega_j$ として可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の元として表された入力パターン φ を再生し，然も，入力パターン φ が帰属するカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ を決定できる連想形多段階認識の働き（SS多段階連想形認識の過程）を実行することになる．

4.1　不動点成分 φ_{fixed} を入力パターン φ の代りに採用し，以後，多段階想起認識の働きを続行すること

多段階想起認識の働きは，入力パターン φ 内の不動点成分 φ_{fixed} を処理の対象とする．

φ を処理の対象とする問題のパターン（入力パターン）とする．axiom 1の（iii）の後半であるべき等性 $T\cdot T = T$ が成立する写像

$$T:\Phi\rightarrow\Phi, \textit{ where } \Phi\subset\mathfrak{H} \tag{4.2}$$

に関し，φ 内の，不動点である成分 φ_{fixed}，不動点でない成分 $\varphi_{nonfixed}$ の和に，φ を

$$\varphi = \varphi_{fixed} + \varphi_{nonfixed} \tag{4.3}$$

$$\text{where } T\varphi_{fixed} = \varphi_{fixed} \wedge T\varphi_{nonfixed} \neq \varphi_{nonfixed} \tag{4.4}$$

と分解し，以後，φ_{fixed} を φ の代りに採用し，多段階想起認識の働きを続行する．

実は，任意のヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の元 φ について，

$$\varphi = T\varphi + (\varphi - T\varphi) = \varphi_{fixed} + \varphi_{nonfixed} \in \mathfrak{H} \tag{4.5}$$

を考慮すれば，わかるように，

$$\varphi_{fixed} \equiv T\varphi \in null\ (I-T)(= range\ (T)) \tag{4.6}$$

であり，

$$(I-T)(I-T)\varphi = (I-T)[\varphi - T\varphi] \neq 0 \tag{4.7}$$

であれば，

$$\varphi_{nonfixed} \equiv \varphi - T\varphi \in\notin null\ (I-T) \tag{4.8}$$

であり，結局

$$\varphi_{nonfixed} \equiv \varphi - T\varphi \in range\ (I-T) \wedge \varphi_{nonfixed} \notin null\ (I-T) \tag{4.9}$$

である．ここに，I は

$$\forall\varphi \in \mathfrak{H}, I\varphi = \varphi \tag{4.10}$$

を満たすという意味で，恒等作用素である．

4.2 入力パターン φ 内にある，モデル構成作用素 T の不動点 $\varphi_{fixed} \equiv T\varphi$ を，φ の代りに処理の対象とする意味

$\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{H}$ への写像 A の定義域（domain）$domain\ (A)$，値域（range）$range\ (A)$，零化集合（null set）$null\ (A)$ とは，

$$domain\ (A) \equiv \{\varphi \in \mathfrak{H} |\ \eta = A\varphi \in \mathfrak{H}\} \subseteq \mathfrak{H} \tag{4.11}$$

$$range\ (A) \equiv \{\eta \in \mathfrak{H} |\ \exists\varphi \in domain\ (A), \eta = A\varphi \in \mathfrak{H}\} \subseteq \mathfrak{H} \tag{4.12}$$

$$null\ (A) \equiv \{\varphi \in domain\ (A) \mid 0 = A\varphi \in \mathfrak{H}\} (\subseteq domain\ (A)) \tag{4.13}$$

と定義される．

$$domain\ (T) = \Phi \subseteqq \mathfrak{H}$$

と選ぶ．一般に，任意のパターン $\varphi \in \mathfrak{H}$ に対し，和分解

$$\varphi = T\varphi + (1-T)\varphi \in \mathfrak{H} \tag{4.14}$$

が成り立つので，ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ は

$$\mathfrak{H} = range\ (T) + range\ (I-T) \tag{4.15}$$

と分解される．実は，$range\ (T) = null\ (I-T)$ が成立するので，結局，

$$\mathfrak{H} = null\ (I-T) + range\ (I-T) \tag{4.16}$$

が成り立つ．

ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ を式（4. 16）の如く，分解できたが，実は，

$$（イ）\ null\ (I-T) \cap range\ (I-T) \neq \{0\} \tag{4.17}$$

$$（ロ）\ \psi \in range\ (I-T) - null\ (I-T)\ \text{ならば，}\ \exists\eta, \psi = \eta - T\eta \wedge \psi \neq T\psi \tag{4.18}$$

が成り立ち，式（4.17）の味するところにより，この分解は，ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の直和ではないという欠点を持つ．

実は，入力パターン φ について，２パターン成分

$$\varphi_{fixed} = T\varphi \in null\ (I - T) \quad (4.19)$$

$$\varphi_{nonfixed} = \varphi - T\varphi \in range\ (I - T) \quad (4.20)$$

を設けると，

$$\varphi = \varphi_{fixed} + \varphi_{nonfixed} \quad (4.21)$$

であって，ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の分解式に対応したものである．

2 式（4.17），（4.18）が成立しているので，4.1節では，条件式（4.7）の下で

$$\varphi_{nonfixed} = \varphi - T\varphi \in range\ (I - T) - null\ (I - T) \quad (4.22)$$

と考え，

$$\varphi - T\varphi \neq T\,(\varphi - T\varphi)，つまり，\varphi_{nonfixed} \neq T\varphi_{nonfixed} \quad (4.23)$$

という状況を想定した訳である．実は，処理の対象とする問題のパターンの，式（2.14）の集合 $\Phi = R^{++}\cdot(\Phi_B \cup T\cdot\Phi_B)(\subset domain\ (T))$ 内の，パターンモデル集合 $T\cdot\Phi_B\ (= T\cdot\Phi \subset \Phi)$ に属するのが，処理の対象とする問題のパターン（入力パターン）$\varphi \in \Phi$ についての，不動点成分 $\varphi_{fixed} \equiv T\varphi$ である．ここに，式（2.15），（2.16）が成立していることに注意しておく．

最後に指摘しておきたいことは，パターン φ に対しaxiom 1を満たす写像 T の不動点 $\varphi_{fixed} \equiv T\varphi$ を求めるというパターン φ のモデル化

$$\text{“}\varphi \to \varphi_{fixed} \equiv T\varphi\text{”} \quad (4.24)$$

により失われる情報は，写像 T の不動点でない成分 $\varphi_{nonfixed} \equiv \varphi - T\varphi$ であることである．

5.　SSマルチメディア認識知能情報論に基づく多段階想起不動点認識の方法

S. Suzukiは，画像，音声などのマルチメディアパターンを認識するという働きに関し，公理系を基盤とした理論でなければならないという観点から，30年以上の年月を費やし，パターン認識の数理を構築している［B3］，［B4］．

本章では，この数理（SSマルチメディア認識知能情報論）を適用し，不動点を見つけ，パターンを多段階にわたり，変換しながら認識する方法が簡単に．説明される．Axiom 2を満たす類似度関数 SM として，“直交性かつミックスチュア性”類似度関数 SM を採用すれば，有限の変換段階で，意味ある認識結果が得られ，終了することが説明される．尚，直交性類似度関数 SM，ミックスチュア性類似度関数 SM を一般的に構成する方法，並びに，類似度関数 SM を直交性かつミックスチュア性を備えてくるように再帰的に構成する方法は，文献［B4］の第 4 章，第 6 章で説明されている．

5.1　多段階想起不動点認識の働きと，その終了基準としての不動点方程式

SS理論は，実は，カテゴリ帰属知識 $< \varphi_t, \lambda_t >$ に関する不動点方程式（5.8）の成立を終了基準（termination criterion）としている．以下．不動点方程式（5.8）の成立を終了基準とする多段階想起不動点認識の働きを説明する．直交性かつミックスチュア性”類似度関数 SM を構成することが何故，必要とされるかは5.2節以降で説明される．

axiom 1を満たす式（2.8）のモデル構成作用素 $T : \Phi \to \Phi$ と，axiom 2を満たす式（2.22）の類似度関数 $SM : \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \leq s \leq 1\}$，並びに，axiom 3を満た式（2.27）の大分類関数 $BSC ; \Phi \times J \to \{0, 1\}$ とを用意する［B3］，［B4］．

処理の対象とする問題のパターン（入力パターン）$\varphi \in \mathfrak{H}$ が与えられたとき，この φ を基本領域 Φ_B

に追加する．その後，２式（2.15），（2.16）を満たす式（2.14）のパターン集合$\Phi = R^{++} \cdot [\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B]$を用意する．

多段階にわたり，式（3.2）の状態空間$FGC_{search}(T \cdot \Omega)$を探索し，帰納推理の働きで選択された或る構造受精変換

$$TA\ (\mu_t)\ T :< \Phi, 2^J > \to < \Phi, 2^J > \tag{5.1}$$

の不動点

$$< \varphi_{t\max}, \lambda_{t\max} > \in < \Phi, 2^J > \tag{5.2}$$

を求める多段階想起不動点認識の方法は次のように述べられる．

［多段階想起不動点認識の方法］

（1）（初期化段階；initialization）

$$< \varphi_t, \lambda_t > =_{\varDelta} < T\varphi, J >,\ t = 0, 1, 2, \cdots \tag{5.3}$$

の下で，

（2）（帰納推理化段階；recursion）

$$< \varphi_{t+1}, \lambda_{t+1} > =_{\varDelta} TA\ (\mu_t)\ T < \varphi_t, \lambda_t > =_{\varDelta} < TA\ (\mu_t \cap \lambda_t)\ T\varphi_t, CSF\ (\varphi_t, \mu_t \cap \lambda_t) >,\ t = 0, 1, 2, \cdots \tag{5.4}$$

を経て，カテゴリ帰属知識$< \varphi_t, \lambda_t >, < \Phi, 2^J >$の列

$$< \varphi_t, \lambda_t >,\ t = 0, 1, 2, \cdots \tag{5.5}$$

を求めていく．$\varphi_t \in \Phi$ は，入力パターン$\varphi \in \Phi$ の連想形認識の過程において，第t 段階で想起されたパターンモデルである．$\lambda_t \in 2^J$ は，第t 段階パターンモデル$\varphi_t \in \Phi$ が帰属している候補カテゴリの番号のリストである．

登場しているカテゴリの番号のリストの列

$$\mu_t\ (\subseteq J),\ t = 0, 1, 2, \cdots \tag{5.6}$$

について説明しておこう．多段階連想形認識の過程の第t 段階で，φ_t が帰属するであろう候補カテゴリの番号のリスト$\mu_t\ (\subseteq J)$ が帰納推理の働きで，選ばれなければならない．通常，減少列に，つまり，

$$\mu_0 \supseteq \mu_1 \supseteq \mu_2 \supseteq \cdots \supseteq \mu_1 \supseteq \mu_{t+1} \supseteq \cdots \supset \phi \quad \text{(the empty set)} \tag{5.7}$$

が成立するように選ばれる．収束条件を

（3）（終了段階；termination）

不動点方程式（fixed-point equation）

$$< \varphi_{t\max+1}, \lambda_{t\max+1} > (=_{\varDelta} TA\ (\mu_{t\max})\ T < \varphi_{t\max}, \lambda_{t\max} >) =_{\varDelta} < \varphi_{t\max}, \lambda_{t\max} > \ \text{（終了基準）} \tag{5.8}$$

の成立する第$t\max$ 連想段階の$< \varphi_{t\max}, \lambda_{t\max} >$で終了させる

と設定すると，大抵の場合，

$$\exists j \in J, \varphi_{t\max} = T\omega_j \wedge \lambda_{t\max} = [j] \tag{5.9}$$

を満たす有限の非負整数$t\max$が，不等式

$$0 \leq t\max \leq |J| - 1 \tag{5.10}$$

が満たされる形で存在する［B26］．

式（5.9）の前半$\varphi_{t\max} = T\omega_j$ が成立していれば，式（2.57）の不動点類似度分布が得られる，つまり，

$$SM\ (\varphi_{t\max}, \omega_j) = 1 \wedge [\forall k \in J - \{j\}, SM\varphi_{t\max}, \omega_k) = 0] \tag{5.11}$$

が成り立つことになる．

カテゴリ帰属知識$< \varphi_t, \lambda_t >$に関する不動点方程式(5.8)の成立は，第$t\max$段階パターンモデルφ_t

に関する不動点方程式$TA\ (\mu_{t\max} \cap \lambda_{t\max})\,T\varphi_{t\max} = \varphi_{t\max}$を含んでおり，

$$< \varphi_{t\max+1},\ \lambda_{t\max+1} > (=_{\varDelta}\ TA\ (\mu_{t\max})\,T < \varphi_{t\max},\ \lambda_{t\max} >) =_{\varDelta} < \varphi_{t\max},\ \lambda_{t\max} >$$
$$\Leftrightarrow TA\ (\mu_{t\max} \cap \lambda_{t\max})\,T\varphi_{t\max} = \varphi T_{\max} \wedge CSF\ (\varphi_{t\max} \cap \lambda_{t\max},\ \varphi_{t\max}) = \lambda_{t\max} \tag{5.12}$$

であることに注意しておく．

5.2　SSポテンシャルの減少を保証する多段階想起不動点認識の働き

直交性類似度関数SMについては，カテゴリ帰属知識のポテンシャルエネルギー$\mathrm{E}(\varphi^t, \lambda^t)$が認識段階$t$の進展につれて減少することが証明されている（文献［B4］の定理8.3）．然も，ポテンシャルエネルギー$\mathrm{E}(\varphi^t, \lambda^t)$が減少し続けることはないというポテンシャルエネルギーの停留性が保証されている（文献［B4］の定理8.1）

5.2.1　類似度関数に関するSM-直交条件

類似度関数SMに関するSM-直交条件は次のように述べられる．

【類似度関数に関するSM-直交条件】

任意の$\mu\,(\neq \phi) \in 2^J$についての，実定数a_iの組$\{a_i \mid i \in \mu\}$が，正条件

$$\forall k \in \mu,\ a_k > 0 \tag{5.13}$$

を満たすとしよう．このとき，直交条件

$$\forall j \in J-\mu,\ SM\,(\sum_{i\in\mu} a_i \cdot T\omega_i,\ \omega_j) = 0 \tag{5.14}$$

が成立しているような式（2.22）の類似度関数SMは直交性類似度関数（直交条件を満たす類似度関数）であるという．　□

多段階想起不動点認識の働きが式（5.9）が成立するという意味で収束するためには，認識の各段階で選ばれた候補カテゴリ$\mathfrak{C}_i,\ i \in \mu$以外のカテゴリ$\mathfrak{C}_j,\ j \in J-\mu$の各代表パターン$\omega_j,\ j \in J-\mu$との類似度$SM\,(\sum_{i\in\mu} a_i \cdot T\omega_i,\ \omega_j)$を0にすることが必要とされる．直交性類似度関数（直交条件を満たす類似度関数）SMはこのことを可能にすることに注意しておく．

5.2.2　カテゴリ帰属知識のポテンシャルエネルギー$\mathrm{E}(\varphi^t, \lambda^t)$

カテゴリ帰属知識$< \varphi, \lambda > \in < \Phi, 2^J >$のポテンシャルエネルギー（energy）$E\,(\varphi, \lambda)$は次の様に定義される：

①$\varphi = 0$あるいは$\lambda = \phi$（空集合）のとき

$$E\,(\varphi, \lambda) = 0. \tag{5.15}$$

②$\varphi \neq 0$かつ$\lambda \neq \phi$（空集合）のとき

$$E\,(\varphi, \lambda) = |\lambda| - \sum_{j\in\lambda} SM\,(\varphi, \omega_j) \tag{5.16}$$

□

式（5.5）の認識過程が正常に進んでいるときは通常，減少性

$$E\,(\varphi_t, \lambda_t) \geq E\,(\varphi_{t+1}, \lambda_{t+1}),\ t = 0, 1, 2, \cdots \tag{5.17}$$

の成立が期待され，事実，直交性類似度関数SMを採用していれば，この減少性は保証される．

5.2.3　カテゴリ帰属知識のポテンシャルエネルギー$\mathrm{E}(\varphi_t, \lambda_t)$が認識段階$t$の進展につれて減少する

こと

式（5.5）の認識過程において採用されている直交性類似度関数SMに関しては，次のことがいえる：

直交性類似度関数SMについては，カテゴリ帰属知識のポテンシャルエネルギー$\mathrm{E}(\varphi_t, \lambda_t)$が認識段階$t$の進展につれて減少することが証明されている（文献［B4］の定理8.3）．然も，ポテンシャルエネルギー$\mathrm{E}(\varphi_t, \lambda_t)$が減少し続けることはないというポテンシャルエネルギーの停留性が保証されている（文献［B4］の定理8.1）．

［定理5.1］（直交性類似度関数SMの下でのポテンシャルエネルギーの非増加定理）

直交性類似度関数を採用しているとしよう．

条件

$$[\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi] \text{ かつ } [\phi \neq 0 \wedge \lambda \neq \phi] \tag{5.18}$$

を満たすカテゴリ帰属知識$< \varphi, \gamma >$の，構造受精変換$TA\,(\mu)\,T$による変換結果

$$< \phi, \lambda > =_{\Delta} TA\,(\mu)\,T < \varphi, \gamma > \tag{5.19}$$

について，エネルギー不等式

$$E\,(\varphi, \gamma) \geq E\,(\phi, \lambda) \tag{5.20}$$

が成立する．この式（5.20）で等号が成り立つのは，以下の3条件①，②，③が共に成り立つ場合に限る：

$$①\mu \supseteq \gamma \tag{5.21}$$

$$②\gamma = CSF\,(\varphi, \gamma)$$

$$③\sum_{j \in J-\gamma} SM\,(\varphi, \omega_j) = 0 \tag{5.23}$$

（証明）文献［B4］の定理8.3である．□

［定理5.2］（ポテンシャルエネルギーの非負定理）

$$\forall \varphi\,(\neq 0) \in \Phi,$$

$$\gamma \neq \phi \Rightarrow E\,(\varphi, \gamma) \geq 0 \tag{5.24}$$

が成り立ち，

$$E\,(\varphi, \gamma) = 0 \tag{5.25}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$|\gamma| = 1 \wedge \sum_{j \in \gamma} SM\,(\varphi, \omega_j) = 1 \tag{5.26}$$

（証明）文献［B4］の定理8.1である．□

5.3　選ばれた候補カテゴリ以外のカテゴリの代表パターンとの類似度を0にする多段階想起不動点認識の働き

直交性類似度関数SM，ミックスチュア性類似度関数SMについて考えよう．不動点方程式（5.4）が成立するという意味で，式（5.5）の多段階連想形認識の過程が終了するためには，直交性類似度関数SMを採用していれば，十分である．そして，この過程が終了するときは，ミックスチュア性類似度関数SMを採用していれば，式（5.9）が成立し，この多段階連想形認識過程のある代表パターンω_jのモデル$T\omega_j$のカテゴリ帰属知識$< T\omega_j, [j] >$への収束性が保証される（文献［B4］の定理6.6）．更に，式（5.5）の多段階想起不動点認識過程が停留し，ポテンシャルエネルギーが最小値0になる

ための必要かつ十分条件は，方程式（5.9）の成立である（文献［B4］の定理8.5）．
　以下の5.4節で，この２つの事項を少し詳しく，説明する．

5.4　不動点方程式（5.8）の成立で，入力パターン$\varphi \in \Phi$ の帰属するカテゴリが唯１個決まるための条件．

5.4.1　類似度関数SM に関するSM ミックスチュア条件

類似度関数SM に関するSM -チュアミックス条件は次のように述べられる．
　【類似度関数に関するSM -ミックスチュア条件】

$$\forall k \in \mu,\ 0 < b_k < 1 \wedge 0 < \sum_{k \in \mu} b_k \leq 1 \tag{5.27}$$

を満たす実定数b_kの組$\{b_k \mid k \in \mu\}$について、

$$\mu \supseteq \{\ell, m\}\ (\ell \neq m\} \tag{5.28}$$

が成り立つようなℓ，$m \in J$が少なくとも存在する任意の$\mu \in 2^J$ に対し，ミックスチュア条件

$$\exists j \in \mu,\ SM\,(\sum_{k \in \mu} b_k \cdot T\omega_k,\ \omega_j) \neq b_j. \tag{5.29}$$

が成立しているような式（2.22）の類似度関数SM はミックスチュア性類似度関数（ミックスチュア条件を満たす類似度関数）であるという．　□

　$T\omega_k,\ k \in \mu$ のミックスチュア（mixture）$\sum_{k \in \mu} b_k \cdot T\omega_k$ は，その１次結合係数b_j を類似度関数SM の値として持たないようなカテゴリ番号$j \in J$ が候補カテゴリ番号リスト$\mu\ (\subseteq J)$ 内に少なくとも１つ存在するというのが，ミックスチュア性類似度関数（ミックスチュア条件を満たす類似度関数）SM の意味である．

5.4.2　ある代表パターンω_j のモデル$T\omega_j$ のカテゴリ帰属知識$< T\omega_j,\ [j\,] >|$ への収束性

　式（5.5）の多段階連想形不動点認識過程が循環過程（cyclic process）にならなくて，不動点方程式（5.8）が成立し，終了したときを考えよう．このとき，

　　入力パターン$\varphi \in \Phi$ は，パターンモデル$\varphi_t \in \Phi$ として再生され，カテゴリ$\mathfrak{C}_j,\ j \in \lambda_t$ の内の何れか１つに帰属する　(5.30)

という．
　このとき，３つの場合

　　(a)$\ |\lambda_t| \geq 2$（認識不定）の場合　(5.31)
　　(b)$\ |\lambda_t| = 1$（認識可能）の場合　(5.32)
　　(c)$\ |\lambda_t| = 0$（認識不能）の場合　(5.33)

が成り立つ．
　(a)$\,|\lambda_t| \geq 2$ の場合は，入力パターン$\varphi \in \Phi$ の帰属する候補カテゴリが複数個存在する場合であり，更に，(b)$\ |\lambda_t| = 1$ の場合は，入力パターン$\varphi \in \Phi$ の帰属する候補カテゴリが唯１個存在する場合であり，最後に，(c)$\ |\lambda_t| = 0$ の場合は，入力パターン$\varphi \in \Phi$ の帰属する候補カテゴリが存在しない場合である．
　S. Suzukiが証明しているように［B3］,［B4］，ミックスチュア性類似度関数SM については，式(5.6)の各カテゴリ番号リスト$\mu_t\ (\subseteq J)$ を，

$$\mu_t \supseteq \lambda_t\ (\subseteq J),\ t = 0, 1, 2, \cdots \tag{5.34}$$

と選定しているとき，(b) $|\lambda_t| = 1$（認識可能）の場合のみ生じ，(a) $|\lambda_t| \geq 2$，(c) $|\lambda_t| = 0$の場合の異常な事態は生じないことが保証される．

この保証について，説明しよう．

ミックスチュア性類似度関数SMについては，不動点方程式（5.8）が成立するという意味で，式（5.5）の多段階連想形認識の過程が終了するときは，式（5.9）が成立し，ある代表パターンω_jのモデルのカテゴリ帰属知識$< T\omega_j, [j] >$への収束性が保証される（文献［B4］の定理6.6）．更に，式（5.5）の多段階想起不動点認識過程が停留し，ポテンシャルエネルギーが最小値0になるための必要かつ十分条件は，方程式（5.26），（5.42）の成立である（文献［B4］の定理8.5）

つまり，次の定理5.3，定理5.3の系１，定理5. 4が成り立つ．

［定理5.3］（ミックスチュア性類似度関数SMについての，カテゴリ帰属知識の変換定理）

ミックスチュア性類似度関数SMを採用していれば，

$$< T\varphi, \lambda > =_{\Delta} TA\,(\mu)\, T < \varphi, \gamma > \tag{5.35}$$

$$\Rightarrow$$

$$[\exists j \in CSF\,(\varphi, \mu \cap \gamma), T\varphi = T\omega_j \wedge \lambda = [j]] \tag{5.36}$$

$$\vee [T\varphi = \wedge \lambda = \phi] \tag{5.37}$$

［定理5.3の系１］（ミックスチュア性類似度関数SMについての，カテゴリ帰属知識の不動点定理）

ミックスチュア性類似度関数SMを採用していれば，

$$< T\varphi, \lambda > =_{\Delta} TA\,(\mu)\, T < T\varphi, \lambda > \wedge T\varphi \neq 0 \tag{5.38}$$

$$\Rightarrow$$

$$[\exists j \in CSF\,(\varphi, \mu \cap \lambda),\ T\varphi = T\omega_j \wedge \lambda = [j]] \tag{5.39}$$

（証明）文献［B4］の定理6.6，その系１である．□

［定理5.4］（カテゴリ帰属知識のポテンシャルエネルギーの最小値定理）

$$\varphi \neq 0 \wedge |\gamma| \geq 1 \tag{5.40}$$

のとき，

$$|\gamma| = 1 \wedge [\exists j \in \gamma, \varphi = T\omega_j] \tag{5.41}$$

$$\Rightarrow$$

$$|\gamma| = 1 \wedge [[\exists j \in \gamma, SM\,(\varphi, \omega_j) = 1] \wedge [\forall i \in J - \{j\}, SM\,(\varphi, \omega_i) = 0] \tag{5.42}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$E\,(\varphi, \gamma) = 0 \tag{5.43}$$

（証明）文献［B4］の定理8.5である．□

6. axiom 1を満たすユニタリ共変性なモデル構成作用素T

本章では，axiom 1を満たさなければならない式(2.8)のモデル構成作用素Tの一般形が研究される．

6.1 使用する関数f

その絶対値が１より大きくない実数の全体

$$R_{[-1,+1]} \equiv \{r \mid -1 \leq r \leq +1\} \tag{6.1}$$

を考え，関数

$$f : R_{[-1,+1]} \to R_{[-1,+1]} \tag{6.2}$$

を，４条件

① （０-不動点条件）$f(0) = 0$ (6.3)

② （１-不動点条件）$f(1) = 1$ (6.4)

③ （１-有界条件）$\forall u \in R_{[-1,+1]}, |f(u)| \leq 1$ (6.5)

④ （べき等条件）$\forall u \in R_{[-1,+1]}, f(f(u)) = f(u)$ (6.6)

を満たすように構成する．

４条件①～④を満たす関数fの構成例を挙げよう．

［構成例１］（恒等関数）

$$f(u) = u \tag{6.7}$$

［構成例２］（２値関数）

$$f(u) = \begin{cases} 0 \cdots 0 \leq u < e_+ \text{のとき} \\ 1 \cdots u < 0 \vee u \geq e_+ \text{のとき} \end{cases} \tag{6.8}$$

ここに，e_+ は不等式

$$0 < e_+ \leq 1 \tag{6.9}$$

を満たす閾値である．

［構成例３］（２値関数）

$$f(u) = \begin{cases} 0 \cdots u < e_+ \text{のとき} \\ 1 \cdots u \geq e_+ \text{のとき} \end{cases} \tag{6.10}$$

ここに，e_+ は不等式

$$0 < e_+ \leq 1 \tag{6.11}$$

を満たす閾値である．

［構成例４］（２値関数）

$$f(u) = \begin{cases} 0 \cdots 0 \leq u < e_+ \text{のとき} \\ 1 \cdots u < 0 \vee u > e_+ \text{のとき} \end{cases} \tag{6.12}$$

ここに，e_+ は不等式

$$0 \leq e_+ < 1 \tag{6.13}$$

を満たす閾値である．

［構成例５］（２値関数）

$$f(u) = \begin{cases} 0 \cdots u < e_+ \text{のとき} \\ 1 \cdots u \geqq e_+ \text{のとき} \end{cases} \tag{6.14}$$

ここに，e_+ は不等式

$$0 \leq e_+ < 1 \tag{6.15}$$

を満たす閾値である．

［構成例６］（３値関数）

$f(u) =$

$$\begin{cases} -1 \cdots u \leq e_- \text{のとき} \\ 0 \cdots e_- < u < e_+ \text{のとき} \\ +1 \cdots u \geq e_+ \text{のとき} \end{cases} \tag{6.16}$$

ここに，e_-，e_+ は不等式

$$-1 \leq e_- < 0 < e_+ \leq 1 \tag{6.17}$$

を満たす閾値である．

［構成例 7］（5 値関数）

$$f(u) = \begin{cases} -1 \cdots -1 \leq u \leq e_-(1) \text{のとき} \\ t_-(1) \cdots e_-(1) < u \leq e_-(0) \text{のとき} \\ 0 \cdots e_-(0) < u < e_+(0) \text{のとき} \\ t_+(1) \cdots e_+(0) \leq u < e_+(1) \text{のとき} \\ +1 \cdots e_+(1) \leq u \leq +1 \text{のとき} \end{cases} \tag{6.18}$$

ここに，$e_-(1)$，$e_-(0)$，$e_+(0)$，$e_+(1)$ は不等式

$$-1 \leq e_-(1) < e_-(0) < 0 < e_+(0) < e_+(1) \leq 1 \tag{6.19}$$

を満たす閾値である．また，$t_-(1)$，$t_+(1)$ は，不等式

$$e_-(1) < t_-(1) \leq e_-(0),\ e_+(0) \leq t_+(1) < e_+(1) \tag{6.20}$$

を満たす振幅値である．例えば，

$$t_-(1) = \frac{e_-(1) + e_-(0)}{2} \tag{6.21}$$

$$t_+(1) = \frac{e_+(0) + e_+(1)}{2} \tag{6.22}$$

を採用すればよい．

［構成例 8］（$(p+q+3)$ 値関数）

2 正整数 p，q を選ぶ．

$$\begin{cases} -1 \cdots -1 \leq u \leq e_-(q) \text{のとき} \\ t_-(q) \cdots e_-(q) < u \leq e_-(q-1) \text{のとき} \\ t_-(q-1) \cdots e_-(q-1) < u \leq e_-(q-2) \text{のとき} \\ \cdots \\ t_-(1) \cdots e_-(1) < u \leq e_-(0) \text{のとき} \\ 0 \cdots e_-(0) < u < e_+(0) \text{のとき} \\ t_+(1) \cdots e_+(0) \leq u < e_+(1) \text{のとき} \\ \cdots \\ t_+(p-1) \cdots e_+(p-2) \leq u < e_+(p-1) \text{のとき} \\ t_+(p) \cdots e_+(p-1) \leq u < e_+(p) \text{のとき} \\ +1 \cdots e_+(p) \leq u \leq +1 \text{のとき} \end{cases} \tag{6.23}$$

ここに，$e_-(j)\,(q \geq j \geq 1)$，$e_-(0)$，$e_+(0)$，$e_+(i)\,(1 \leq i \leq p)$ は不等式

$$\begin{aligned} &-1 \leq e_-(q) < e_-(q-1) < \cdots < e_-(1) < e_-(0) < 0 \\ &< e_+(0) < e_+(1) < \cdots < e_+(p-1) < e_+(p) \leq 1 \end{aligned} \tag{6.24}$$

を満たす閾値である．また，$t_-(j)(q \geq j \geq 1)$，$t_+(i)(1 \leq i \leq p)$ は，不等式

$$e_-(j) < t_-(j) \leq e_-(j-1)(q \geq j \geq 1), e_+(i-1) \leq t_+(i) < e_+(i)(1 \leq i \leq p) \tag{6.25}$$

を満たす振幅値である．例えば，

$$t_-(j) = \frac{e_-(j) + e_-(j-1)}{2}(q \geq j \geq 1) \tag{6.26}$$

$$t_+(i) = \frac{e_+(i-1) + e_+(i)}{2}(1 \leq i \leq p) \tag{6.27}$$

を採用すればよい．

6.2　パターン$\varphi \in \Phi$ から抽出された第$\ell \in L$ 番目の特徴量$u(\varphi, \ell)$として，式（A2.10）を採用したときの，モデル構成作用素T のユニタリ共変性

ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$では，座標変換U とは，線形で，かつ，

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H}, \| U\varphi \| = \| \varphi \| \text{（ノルムの保存性）} \tag{6.28}$$

を満たすという意味でユニタリ作用素（unitary　operator）といわれるものである．ユニタリ作用素としての座標変換U については，

$$\forall \varphi, \forall \eta \in \mathfrak{H}, (U\varphi, \eta) = (\varphi, U^{-1}\eta) \tag{6.29}$$

が成り立つことに注意しておこう．

$\{\phi_k\}_{k \in L}$ が正規直交系であれば，その第$k \in L$ 成分ϕ'_k が

$$\phi_k \equiv U\phi'_k, k \in L \tag{6.30}$$

と定義される系$\{\phi'_k\}_{k \in L}$ も

$$\delta_{k\ell} = (\phi_k, \phi_\ell) = (U\phi'_k, U\phi'_\ell) = (\phi'_k, \phi'_\ell) \tag{6.31}$$

が成り立つから，正規直交系である．ここに，はクロネッカー（Kronecker）のデルタ記号であり，

$$\delta_{k\ell} = 0 \quad if \quad k \neq \ell, = 1 \quad if \quad k = \ell \tag{6.32}$$

と定義されている．更に，系$\{\phi_k\}_{k \in L}$ が完全であれば，系$\{\phi'_k\}_{k \in L}$ も完全である．以下，その証明を与えよう：

系$\{\phi_k\}_{k \in L}$ が完全であるということは，

$$\forall \ell \in L, (\varphi, \phi_\ell) = 0 \Rightarrow \| \varphi \| = 0 \tag{6.33}$$

を意味する．よって，φ の代りに，$U\varphi$ を採用すると

$$\forall \ell \in L, (U\varphi, \phi_\ell) = 0 \Rightarrow \| U\varphi \| = 0 \tag{6.34}$$

が成り立つ．そうすると，

$$\forall \ell \in L, 0 = (U\varphi, \phi_\ell) = (\varphi, U^{-1}\phi_\ell) = (\varphi, \phi'_\ell) \Rightarrow 0 = \| U\varphi \| = \| \varphi \| \tag{6.35}$$

が言え，系$\{\phi'_k\}_{k \in L}$ も完全であることが示された．　□

特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \to R \text{（実数全体の集合）} \tag{6.36}$$

を導入する．6.1節の4条件①～④を満たす関数fを導入して定義される実数値

$$u(\varphi, \ell) \equiv f\left(\frac{(\varphi, \phi_\ell)}{\sup_{k \in L} |(\varphi, \phi_k)|}\right) \tag{6.37}$$

はパターン$\varphi \in \Phi$ から抽出された第$k \in L$ 番目の実数値特徴量である．パターンモデル$T\varphi$ を生成する式（2.8）のモデル構成作用素T を，

$$T\varphi \equiv \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell) \cdot \phi_\ell \tag{6.38}$$

と導入する． 同様に，

$$u'(\varphi,\ell)\equiv f\left(\frac{(\varphi,\psi'_\ell)}{\sup_{k\in L}|(\varphi,\psi'_k)|}\right) \tag{6.39}$$

$$T'\varphi\equiv\sum_{\ell\in L}u'(\varphi,\ell)\cdot\psi'_\ell \tag{6.40}$$

を導入する．但し，実定数a_ℓの列$\{a_\ell\}_{\ell\in L}$については，

$$\frac{a_\ell}{\sup_{k\in L}|a_k|}=0 \quad if \quad \sup_{k\in L}|a_k|=0 \tag{6.41}$$

と約束する．

次の定理6. 1は，パターン$\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$が

$$\varphi\to U\varphi \tag{6.42}$$

の如く，ユニタリ座標変換Uによりパターン$U\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$へと変換された場合，式（6.38）のモデル構成作用素Tが式（6.40）のモデル構成作用素T'へとユニタリ共変的に変れば，式（6.42）の示す変換Uが吸収される事実を明らかにしている．

［定理6.1］（モデル構成作用素Tのユニタリ共変定理）

正規直交系$\{\psi_k\}_{k\in L}$とユニタリ作用素としての座標変換Uと導入する．式（6.3）で定義される系$\{\psi'_k\}_{k\in L}$を導入する． 4 式（6.37）～（6.40）を考えよう．

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall\ell\in L,u(U\varphi,\ell)=u'(\varphi,\ell) \tag{6.43}$$

が成り立ち，

$$\forall\varphi\in\Phi,TU\varphi=UT'\varphi,\text{ つまり，}U^{-1}TU=T' \tag{6.44}$$

が成り立つ．

（証明）任意の$k\in L$について成り立つ命題

$$(U\varphi,\psi_k)=0\Leftrightarrow(\varphi,U^{-1}\psi_k)=(\varphi,\psi'_k)=0$$

に注意しながら，式（6.43）の成立は，

$$\begin{aligned}
&\forall\varphi\in\Phi,\forall\ell\in L,u(U\varphi,\ell)\\
&=f\left(\frac{(U\varphi,\psi_\ell)}{\sup_{k\in L}|(U\varphi,\psi_k)|}\right) \quad \because \quad \text{式（6.37）}\\
&=f\left(\frac{(\varphi,U^{-1}\psi_\ell)}{\sup_{k\in L}|(\varphi,U^{-1}\psi_k)|}\right)\\
&=f\left(\frac{(\varphi,\psi'_\ell)}{\sup_{k\in L}|(\varphi,\psi'_k)|}\right) \quad \because \quad \text{式（6.30）}\\
&=u'(\varphi,\ell) \quad \because \quad \text{式（6.39）}
\end{aligned}$$

とわかる．

式（6.43）が成立していれば，式（6.44）が成立することは次のように示される：

$$\begin{aligned}
&\forall\varphi\in\Phi,TU\varphi\\
&=\sum_{\ell\in L}u(U\varphi,\ell)\cdot\psi_\ell \quad \because \quad \text{式（6.38）}\\
&=\sum_{\ell\in L}u(U\varphi,\ell)\cdot U\psi'_\ell \quad \because \quad \text{式（6. 30）}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\ell \in L} u'(\varphi, \ell) \cdot U\psi'_\ell \quad \because \quad 式（6.43）$$

$$= U \sum_{\ell \in L} u'(\varphi, \ell) \cdot \psi'_\ell$$

$$= UT'\varphi. \quad \because \quad 式（6.40） \qquad \square$$

6.3　パターン$\varphi \in \Phi$ から抽出された第$\ell \in L$ 番目の特徴量$u(\varphi, \ell)$として，式（6.37）を採用し，構成された式（6.38）の作用素T が１章の４性質①～④）を満たすことの証明

正規直交系$\{\psi_k\}_{k \in L}$ を使って，パターン$\varphi \in \Phi \subseteq \mathfrak{H}$ をその１次結合

$$\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell \tag{6.45}$$

で近似するときの近似誤差$\varphi - \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell$ のノルムの自乗$\| \varphi - \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell \|^2$ を最小にしよう．最小にする１次結合の各係数$a_\ell (= a_\ell(\varphi))$ は，

$$\forall \ell \in L, a_\ell(\varphi) = (\varphi, \psi_\ell) \tag{6.46}$$

と求められ，このとき，フーリェ式展開

$$\forall \varphi \in \Phi \subseteq \mathfrak{H}, \exists \varphi_\perp \in \mathfrak{H} \text{ such that } \forall k \in L, (\varphi_\perp, \psi_k) = 0,$$

$$\varphi = \sum_{\ell \in L} (\varphi, \psi_\ell) \cdot \varphi_\ell + \varphi_\perp = \sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi) \cdot \psi_\ell + \psi_\perp \tag{6.47}$$

が成り立つ．式（6.7）の関数fを使った場合，式（6.38）のパターンモデル$T\varphi$ は，パターンφ のフーリェ式展開式（6.30）の主成分$\sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi) \cdot \psi_\ell$ の定数倍

$$\frac{1}{\sup_{k \in L} |(\varphi, \psi_\ell)|} \cdot \sum_{\ell \in L} (\varphi, \psi_\ell) \cdot \psi_\ell \tag{6.48}$$

である．

先ず，次の補助定理6.1を証明する．

［補助定理6.1］（不動点定理）

系$\{\psi_k\}_{k \in L}$ を正規直交系に選ぶ．パターン$\varphi \in \Phi$ から抽出された第$\ell \in L$ 番目の特徴量$u(\varphi, \ell)$として，式（6.37）を採用する．条件

$$\forall \ell \in L, a_\ell \in R_{[-1, +1]} \wedge \mathop{sup}_{k \in L} |a_k| \in \{0, 1\} \tag{6.49}$$

を満たす各実定数a_ℓ を使って得られるパターン

$$\varphi = \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell \tag{6.50}$$

について，

$$\forall \ell \in L, f(a_\ell) = a_\ell \tag{6.51}$$

であれば，

$$T\varphi = \varphi. \tag{6.52}$$

（証明）2つの場合（イ），（ロ）に分けて，示す．

（イ）$\sup_{k \in L} |a_k| = 1$ のとき

$$\forall \ell \in L, (\varphi, \psi_\ell) = a_\ell = 0 \quad \therefore \quad \frac{(\varphi, \psi_\ell)}{\sup_{k \in L} |(\varphi, \psi_k)|} = 0 \quad \therefore \quad u(\varphi, \ell) = f(0) = 0$$

$\therefore \quad T\varphi = 0 = \varphi.$

（ロ）$\sup_{k \in L} |a_k| = 1$ のとき

$$\forall \ell \in L, (\varphi, \psi_\ell) = a_\ell \quad \therefore \quad \frac{(\varphi, \psi_\ell)}{\sup_{k \in L} |(\varphi, \psi_k)|} = (\varphi, \psi_\ell) = a_\ell$$

$$\therefore \quad u(\varphi, \ell) = f((\varphi, \psi_\ell)) = f(a_\ell) = a_\ell$$

$$\therefore \quad T\varphi = \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell = \varphi. \qquad \square$$

補助定理6.1を適用して，次の定理6.2が得られ，基底としての正規直交系$\{\psi_k\}_{k \in L}$の各成分ψ_ℓは誤差なく再現されることがわかる．

［定理6.2］（正規直交系$\{\psi_k\}_{k \in L}$の各成分ψ_ℓの不動点定理）

系$\{\psi_k\}_{k \in L}$を正規直交系に選ぶ．パターン$\varphi \in \Phi$から抽出された第$\ell \in L$番目の特徴量$u(\varphi, \ell)$として，式（6.37）を採用する．このとき，

$$\forall \ell \in L, T\psi_\ell = \psi_\ell. \tag{6.53}$$

（証明）$\varphi = \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell = \psi_k$ のとき，

$$a_\ell = 1 \quad if \quad \ell = k, = 0 \quad if \quad \ell \neq k \tag{6.54}$$

であり，以後，補助定理6.1を適用すればよい． $\square$

次の定理6.3は，パターン$\varphi \in \Phi$から抽出された第$\ell \in L$番目の特徴量と$u(\varphi, \ell)$して，式（6.37）を採用し，構成された式（6.38）の作用素Tが1章の4性質①～④）を満たすことを指摘したものである．

［定理6.3］（ユニタリ共変なモデル構成作用素Tの構成定理）

系$\{\psi_k\}_{k \in L}$を正規直交系に選ぶ．パターン$\varphi \in \Phi$から抽出された第$\ell \in L$番目の特徴量$u(\varphi, \ell)$として，式（6.37）を採用する．このとき，式（6.38）で定義される式（2.8）のモデル構成作用素Tは1章の4性質①～④）を満たす．

（証明）①（零元不動点性；axiom 1の（ⅰ））の成立については，

$$\forall \ell \in L, a_\ell = 0 \tag{6.55}$$

であるような式（6.50）のφをとれば，不動点方程式（6.52）が成立することから明らか．

②（正定数倍不変性；axiom 1の（ⅱ）の後半）の成立を示そう．

aを任意の正定数として，ηを$\eta \equiv a \cdot \varphi = \sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \psi_\ell$とおけば，

$$\forall \ell \in L, (\eta, \psi_\ell) = c_\ell = a \cdot (\varphi, \psi_\ell) \tag{6.56}$$

であることに注意しておく．2つの場合②-1，②-2に分けて示す．

②-1　$\forall \ell \in L, (\varphi, \psi_\ell) = 0$ のとき

$$\forall \ell \in L, u(\varphi, \ell) = 0 \quad \therefore \quad T\varphi = 0$$

であり，また，

$$\forall \ell \in L, u(\eta, \ell) = 0 \quad \therefore \quad T\eta = 0$$

を得，$T\eta = 0 = T\varphi$.

②-2　$\exists \ell \in L, (\varphi, \psi_\ell) \neq 0$ のとき

$$\forall \ell \in L, \frac{(\eta, \psi_\ell)}{\sup_{k \in L} |(\eta, \psi_\ell)|} = \frac{(\eta, \psi_\ell)}{\sup_{k \in L} |(\varphi, \psi_\ell)|} \quad \therefore \quad u(\eta, \ell) = u(\varphi, \ell) \tag{6.57}$$

を得，$T\eta = T\varphi$.

③（ベキ等性；axiom 1の（iii）の後半）の成立を示そう．

η を $\eta \equiv T\varphi = \sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \phi_\ell$ とおけば，

$$\forall \ell \in L, (\eta, \phi_\ell) = c_\ell = u(\varphi, \ell)$$

が成り立つ．然も，

$$\forall \ell \in L, c_\ell \in R_{[-1,+1]} \wedge \sup_{k \in L} | c_k | \in \{0, 1\}$$

であり，更に，

$$\forall \ell \in L, f(u(\varphi, \ell)) = f(f(\frac{(\varphi, \phi_\ell)}{\sup_{k \in L} |(\varphi, \phi_k)|} = f(\frac{(\varphi, \phi_\ell)}{\sup_{k \in L} |(\varphi, \phi_k)|}) = u(\varphi, \ell) \tag{6.58}$$

を得，補助定理6.1を適用でき，$T\eta = \eta$ がいえる．

④（非零写像性；axiom 1の（iv））の成立は，定理6.2から明らか．　□

6.4　パターン正規化，カテゴリ帰属知識変換，並びに，座標変換に共変な，或いは，不変なモデル構成作用素 T

6.4.1　パターンモデル $T\varphi$ が満たさなければならない 4 性質①～④

パターンというものは，その 1 部分が他のパターンに隠されて欠落していたり，変形して構造が崩れていたり，雑音が加わり変質していたり，不規則な座標変換，或いは，規則的な座標変換がなされていたりする．欠落を補ったり，崩れる以前の状態に直したり，雑音を取り除いたり，座標変換がなされる前の状態に戻したりする操作を，一般に，パターン正規化ということになっている．本論文では，パターン φ を標準形（パターンのモデル）$T\varphi$ に変換すること，つまり，φ の正規化パターンと呼ばれる $T\varphi$ を得る過程

$$\varphi \rightarrow T\varphi \tag{6.59}$$

をパターン正規化と呼び，この種の正規化の働きを備えた式（2.8）の写像が本論文では，研究される．パターンモデル $T\varphi \in \Phi$ を出力する式（2.8）の写像 T に必らず要求されるのは，1 章の 4 性質①～④であることが理論的に明らかにされている［B3］，［B4］．

一般に，処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ は可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の或る部分集合であり，対 $[\Phi, T]$ がaxiom 1を満たすとすれば，パターン集合 Φ は，式（2.14）で表される．

1 章の 4 性質①～④を満たし，5 効果（イ）雑音の除去，（ロ）座標変換の除去，（ハ）欠落情報の補充と冗長な情報の除去，（二）簡単化，（ホ）同一形式化が認められるモデル構成作用素（model-construction operator）と呼ばれる式（2.8）の写像 T についての研究はS. Suzukiの研究以外には存在しない．この写像 T は，入力顔画像 φ から目，鼻，口の各成分を抽出するのに有用であることも判明している［B16］．また，日本語単独母音の認識［B13］や，連想形記憶の働きを備えたニューラルネットの構成［B10］にも使用され，計算機シミュレーション済である．

その他のモデル構成作用素 T については，平均画像を用いた画像 2 値化をもたらす構成［B16］，界面エネルギーの減少を利用した構成［B17］，画素単位の構成［B18］，「B26」，［B29］，［B30］などがある．

以下の章では，定理6.1と同様に，1 章の 4 性質①～④を満たす式（2.8）の写像 T の諸例が構成される．

6.4.2 SS多段階連想形認識過程の実現で使われるカテゴリ帰属知識変換

処理の対象となるパターンφが帰属しているカテゴリ（第$j \in J$番目のカテゴリ）$\mathfrak{C}_j$を決定できるSS多段階連想形認識［B3]，［B4｝の過程を実現するには，パターンからパターンへ変換する写像（パターン想起変換）の列が帰納的推理で選ばれることが必要である．このパターン想起変換として使われているのが，従来の，候補カテゴリ番号のリスト$\mu\,(\subseteq J)$を助変数に持つ2.6節の構造受精作用素$A\,(\mu):\Phi \to \Phi,\ \mu \subseteq J$であった．

構造受精作用素$A\,(\mu)$を構成するのには，axiom 1を満たすモデル構成作用素T，axiom 2を満たす類似度関数SM，axiom 3を満たす大分類関数BSCが必要とされる．SS多段階連想形認識の過程においては,$A\,(\mu)$をモデル構成作用素Tで両側を挟び,Φ上の構造受精変換と呼ばれる形式$TA\,(\mu)\,T:\Phi \to \Phi$ではなく，この定義域（パターン空間）$\Phi$，値域$\Phi$を共に式（2.34）のカテゴリ帰属知識空間$<\Phi, 2^J>$に拡張した式（2.49）の写像（カテゴリ帰属知識変換）$TA\,(\mu)\,T:<\Phi, 2^J> \to <\Phi, 2_J>$が使われることに注意しておく．

6.4.3 座標変換に共変な，或いは，不変なモデル構成作用素T

パターン$\varphi = \{\varphi\,(x)\,|\,x \in M\}$の座標系$x$については，座標系$x$が固有の意味を持ち

$$y = Ux \in M,\ x \in M \tag{6.60}$$

での自由な座標変換$U:M \to M$が許されない場合がある．本研究では

$$\forall \varphi \in \Phi,\ T\,(U\varphi) = T\varphi \tag{6.61}$$

というように座標変換系に不変であり，しかも，SS理論［B3]，［B4］によれば，①零元不動点性，②正定数倍不変性，③ベキ等性，④非零写像性という1章の4性質を少なくとも満たさなければならないパターンモデル$T\varphi = \{(T\varphi)(x)\,|\,x \in M\}$についても研究する（文献［B3］の付録H，H2節にもそのようなモデル構成作用素が構成されている）．

$$\exists \varphi \in \Phi,\ \exists x \in M,\ T\,(U\varphi)(x) \neq (T\varphi)(x) \tag{6.62}$$

というような座標変換系$U:M \to M$に不変でないパターンモデル$T\varphi$を考えることは座標系xが固有の意味を持つ場合，無意味ではない．例えば,

$$\forall \varphi \in \Phi,\ T\,(U\varphi) = UT'\varphi \tag{6.63}$$

が成立すると言う意味で，座標変換$U:M \to M$に共変的なモデル構成作用素も$T':\Phi \to \Phi$も，例えば，定理6.1で研究済みである．

以下では，定理6.1と同様に，axiom 1の（ｉ），（ⅱ），（ⅲ）の3後半，並びに，（iv）（1章の4性質①～④）を満たす式（2.8）のモデル構成作用素Tを構成する．

7. axiom 1を満たすユニタリ不変性なモデル構成作用素T

本章では，ユニタリ不変式（6.61）が成立し，1章の4性質①～④を少なくとも満たす式（2.8）のモデル構成作用素Tを式（6. 38）の形式で一般的に構成する．つまり，パターン$\varphi \in \Phi$から抽出された第$\ell \in L$番目の特徴量$u\,(\varphi, \ell)$として，以下の式（7.1）を採用すれば，式（6.38）の形式を備えた式（2.8）のモデル構成作用素Tが式（6.61）でいうユニタリ不変性構造を持つことを証明する．

7.1 ユニタリ不変性を備えたモデル構成作用素T

系$\{\psi_k\}_{k\in L}$を正規直交系に選ぶ．３式（6.46）～（6.48）に注意しておく．パターン$\varphi\in\Phi$から抽出された第$\ell\in L$番目の特徴量$u(\varphi,\ell)$として，式（6.37）の代りに，6.1節の４条件①～④を満たす関数fを導入して定義される非負実数値

$$u(\varphi,\ell)\equiv f\left(\sqrt{\frac{|(\varphi,\psi_\ell)|^2}{\sup_{k\in L}|(\varphi,\psi_\ell)|^2}}\right)=f\left(\frac{|(\varphi,\psi_\ell)|}{\sup_{k\in L}|(\varphi,\psi_\ell)|}\right) \tag{7.1}$$

を採用し，式（6.38）の写像Tを考えよう．但し，実定数a_ℓの列$\{a_\ell\}_{\ell\in L}$については，式（6.41）の約束と同様に，

$$\frac{|a_k|^2}{\sup_{k\in L}|a_k|^2}=\frac{|a_k|}{\sup_{k\in L}|a_k|}=0 \quad if \quad \sup_{k\in L}|a_k|=0 \tag{7.2}$$

を約束しておく．

次の定理A4は，パターン$\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$が式（6.42）の如く，ユニタリ座標変換$U$によりパターン$U\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$へと変換された場合，パターン$\varphi\in\Phi$から抽出された第$\ell\in L$番目の特徴量$u(\varphi,\ell)$として，式（7.1）を採用していれば，式（6.38）のモデル構成作用素Tが式（6.42）の示す変換Uを式（7.5）の如く，吸収する事実を明らかにしている．

［定理7.1］（モデル構成作用素Tのユニタリ不変定理）

正規直交系$\{\psi_k\}_{k\in L}$とユニタリ作用素としての座標変換Uと導入する．但し，各$\psi_k\in\mathfrak{H}$はUの固有ベクトルとする．つまり，

任意の$k\in L$について，$|a_k|=1$なる複素定数a_kが存在して，$U\psi_k=a_k\cdot\psi_k\in\mathfrak{H}$ (7.3)

が成り立つとしよう．このとき，

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall\ell\in L,\ u(U\varphi,\ell)=u(\varphi,\ell) \tag{7.4}$$

が成り立ち，

$$\forall\varphi\in\Phi,\ TU\varphi=T\varphi\ ,\ \text{つまり，}\ TU=T \tag{7.5}$$

が成り立つ．

（証明）任意の$k\in L$について成り立つ命題

$$|(U\varphi,\psi_k)|=|(\varphi,U^{-1}\psi_k)|=|(\varphi,a_k^{-1}\cdot\psi_k)|=|a_k|^{-1}\cdot|(\varphi,\psi_k)|=|(\varphi,\psi_k)| \tag{7.6}$$

に注意する．２つの場合（イ），（ロ）に分けて示す．

（イ）$\sup_{k\in L}|(\varphi,\psi_k)|^2=0$のとき

$u(\varphi,\ell)$の定義式（7.1）より

$$\forall\ell\in L,\ u(\varphi,\ell)=f(0) \quad \because \quad \text{式（7.2）}$$
$$=0 \quad \because \quad \text{式（6.3）}$$

を得る．同様にして，式（7.6）を考慮すれば，

$$\forall\ell\in L,\ u(U\varphi,\ell)=0$$

が得られ，式（7.4）の成立がわかる．

（ロ）$\sup_{k\in L}|(\varphi,\psi_k)|^2>0$のとき

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall\ell\in L,\ u(U\varphi,\ell)$$

$$=f\left(\left[\frac{|(U\varphi,\psi_\ell)|^2}{\sup_{k\in L}|(U\varphi,\psi_k)|^2}\right]^{1/2}\right) \quad \because \quad \text{式（7.1）}$$

$$= f([\frac{|(\varphi, \psi_\ell)|^2}{\sup_{k \in L}|(\varphi, \psi_k)|^2}]^{1/2})$$

$$= U(\varphi, \ell) \quad \because \quad \text{式（7.1）}$$

と，式（7.4）の成立がわかった．

式（7.4）が成立していれば，式（7.5）が成立することは，T の定義式（6.38）からあきらかである． □

7.2　パターン$\varphi \in \Phi$ から抽出された第$\ell \in L$ 番目の特徴量$u(\varphi, \ell)$として，式（7.1）を採用し，構成された式（6.38）の作用素が1章の4性質①～④）を満たすこと

先ず，次の補助定理7.1を証明する．

［補助定理7.1］（不動点定理）

系$\{\psi_k\}_{k \in L}$を正規直交系に選ぶ．パターン$\varphi \in \Phi$ から抽出された第$\ell \in L$ 番目の特徴量$u(\varphi, \ell)$として，式（7.1）を採用し，式（6.38）の作用素T を構成する．条件

$$\forall \ell \in L, |a_\ell|^2 \in R_{[-1,+1]} \wedge \sup_{k \in L} |a_k|^2 \in \{0, 1\} \tag{7.7}$$

を満たす各実定数a_ℓを使って得られるパターン

$$\varphi = \sum_{\ell \in L} |a_\ell| \cdot \psi_\ell \tag{7.8}$$

について，

$$\forall \ell \in L, f(\sqrt{|a_\ell|^2})(= f(|a_\ell|)) = |a_\ell| \tag{7.9}$$

であれば，

$$T\varphi = \varphi. \tag{7.10}$$

（証明）2つの場合（イ），（ロ）に分けて，示す．

（イ）$\sup_{k \in L}|a_k|^2 = 0$ のとき

$$\forall \ell \in L, (\varphi, \psi_\ell) = |a_\ell| = 0 \quad \therefore \frac{|(\varphi, \psi_\ell)|^2}{\sup_{k \in L}|(\varphi, \psi_k)|^2} = 0 \quad \therefore u(\varphi, \ell) = f(0) = 0$$

$$\therefore \quad T\varphi = 0 = \varphi.$$

（ロ）$\sup_{k \in L}|a_k|^2 = 1$ のとき

$$\forall \ell \in L, (\varphi, \psi_\ell) = |a_\ell| \quad \therefore \frac{|(\varphi, \psi_\ell)|^2}{\sup_{k \in L}|(\varphi, \psi_k)|^2} = |(\varphi, \psi_\ell)|^2 = |a_\ell|^2$$

$$\therefore \quad u(\varphi, \ell) = f(|(\varphi, \psi_\ell)|) = f(|a_\ell|) = |a_\ell|$$

$$\therefore \quad T\varphi = \sum_{\ell \in L} |a_\ell| \cdot \psi_\ell = \varphi.$$ □

補助定理7.1を適用して，次の定理7.2が得られ，基底としての正規直交系$\{\psi_k\}_{k \in L}$の各成分ψ_ℓは誤差なく再現されることがわかる．

［定理7.2］（正規直交系$\{\psi_k\}_{k \in L}$の各成分の不動点定理）

系$\{\psi_k\}_{k\in L}$を正規直交系に選ぶ．パターンから抽出された第$\ell\in L$番目の特徴量$u(\varphi,\ell)$として，式（7.1）を採用し，式（6.38）の作用素Tを構成する．このとき，

$$\forall \ell\in L,\ T\psi_\ell=\psi_\ell. \tag{7.11}$$

（証明）$\varphi=\sum_{\ell\in L}|a_\ell|\cdot\psi_\ell=\psi_k$のとき，

$$|a_\ell|=1\quad if\quad \ell=k,\ =0\quad if\quad \ell\neq k \tag{7.12}$$

であり，以後，補助定理7.1を適用すればよい．□

次の定理7.3は，パターン$\varphi\in\Phi$から抽出された第$\ell\in L$番目の特徴量$u(\varphi,\ell)$として，式（7.1）を採用し，構成された式（6.38）の作用素Tが1章の4性質①～④）を満たすことを指摘したものである．

［定理7.3］（ユニタリ不変なモデル構成作用素Tの構成定理）

系$\{\psi_k\}_{k\in L}$を正規直交系に選ぶ．パターン$\varphi\in\Phi$から抽出された第$\ell\in L$番目の特徴量$u(\varphi,\ell)$として，式（7.1）を採用し，式（6.38）の作用素Tを構成する．このとき，式（2.8）のモデル構成作用素Tは1章の4性質①～④）を満たす．

（証明）①（零元不動点性；axiom 1の（ｉ））の成立については，

$$\forall \ell\in L,\ |a_\ell|=0 \tag{7.13}$$

であるような式（7.8）のφをとれば，不動点方程式（7.10）が成立することから明らか．

②（正定数倍不変性；axiom 1の（ii）の後半）の成立を示そう．

aを任意の正定数として，ηを$\eta\equiv a\cdot\varphi=\sum_{\ell\in L}c_\ell\cdot\psi_\ell$とおけば，

$$\forall \ell\in L,\ (\eta,\psi_\ell)=c_\ell=a\cdot(\varphi,\psi_\ell) \tag{7.14}$$

であることに注意しておく．２つの場合②-１，②-２に分けて示す．

②-１　$\forall \ell\in L,\ (\varphi,\varphi_\ell)=0$のとき

$$\forall \ell\in L,\ u(\varphi,\ell)=0\quad\therefore\quad T\varphi=0$$

であり，また，

$$\forall \ell\in L,\ u(\eta,\ell)=0\quad\therefore\quad T\eta=0$$

を得，$T\eta=0=T\varphi$.

②-２　$\exists \ell\in L,\ (\varphi,\psi_\ell)\neq 0$のとき

$$\forall \ell\in L,\ \frac{|(\eta,\psi_\ell)|^2}{\sup_{k\in L}|(\eta,\psi_\ell)|^2}=\frac{|(\varphi,\psi_\ell)|^2}{\sup_{k\in L}|(\varphi,\psi_\ell)|^2}\quad\therefore\quad u(\eta,\ell)=u(\varphi,\ell) \tag{7.15}$$

を得，$T\eta=T\varphi$.

③（ベキ等性；axiom 1の（iii）の後半）の成立を示そう．

ηを$\eta\equiv T\varphi=\sum_{\ell\in L}c_\ell\cdot\psi_\ell$とおけば，

$$\forall \ell\in L,\ (\eta,\psi_\ell)=c_\ell=u(\varphi,\ell)$$

が成り立つ．然も，

$$\forall \ell\in L,\ c_\ell\in R_{[-1,+1]}\wedge\sup_{k\in L}|c_k|\in\{0,1\}$$

であり，更に，

$$\forall \ell\in L,\ f(u(\varphi,\ell))=f(f([\frac{|(\varphi,\psi_\ell)|}{\sup_{k\in L}|(\varphi,\psi_k)|}]^{1/2})=f([\frac{|(\varphi,\psi_\ell)|^2}{\sup_{k\in L}|(\varphi,\psi_k)|^2}]^{1/2})=u(\varphi,\ell) \tag{7.16}$$

を得，補助定理7.1を適用でき，$T\eta=\eta$がいえる．

④（非零写像性；axiom 1の（iv））の成立は，補助定理7.1から明らか． □

8. 基底を使わないパターンモデルの一般形$T\varphi$

6.1節の 4 条件①～④を満たす関数fを導入する．式（2.1）の可測部分集合M を 1 つ選び，固定する．

$$\forall x \in M, \frac{\varphi(x)}{\sup_{x \in M} |\varphi(x)|} = 0 \quad if \quad \sup_{x \in M} |\varphi(x)| = 0 \tag{8.1}$$

を約束する．式（2.8）の写像T を，

$$(T\varphi)(x) = f\left(\frac{\varphi(x)}{\sup_{y \in M} |\varphi(y)|}\right), x \in M \tag{8.2}$$

と定義する．

先ず，次の補助定理8.1を証明する．

［補助定理8.1］（不動点定理）

2 条件

$$\forall x \in M, |\varphi(x)| \leq 1 \tag{8.3}$$

$$\sup_{y \in M} |\varphi(y)| \in \{0, 1\} \tag{8.4}$$

を満たすを満たすφ を用い，

$$\psi(x) = f(\varphi(x)), x \in M \tag{8.5}$$

と表現されるψ は，式（8.2）の写像T の不動点である：

$$T\psi = \psi. \tag{8.6}$$

（証明）式（6.5）を，式（8.3）に考慮すれば，

$$\forall x \in M, |\psi(x)| \leq 1$$

を得る．

（イ）$\sup_{y \in M} |\varphi(y)| = 0$のとき

$$\forall x \in M, \varphi(x) = 0$$

であり，よって，式（8.5）より，

$$\forall x \in M, \psi(x) = 0$$

を得る．更に，T の定義式（8.2）から，

$$\forall x \in M, (T\psi)(x) = 0$$

が成り立ち，不動点式（8.6）が成り立つことがわかった．

（ロ）$\sup_{y \in M} |\varphi(y)| = 1$のとき

式（6.4）を考慮して，

$$\sup_{y \in M} |\psi(y)| = 1$$

を得，T の定義式（8.2）から，

$$(T\varphi)(x) = f(\frac{\phi(x)}{\sup_{y \in M}|\phi(y)|}) = f(\phi(x))$$

$$= f(f(\varphi(x))) = f(\varphi(x)) \quad \because \text{式（6.6）}$$

$$= \phi(x) \quad \because \text{式（8.5）}$$ □

次の定理8.1は，補助定理8.1を用いれば証明されるが，独立に証明しておく．

［定理8.1］（不動点定理）

条件

$$\forall x \in M, \varphi(x) \in \{0, 1\} \tag{8.7}$$

を満たすφを用い，式（8.5）のように表現されるϕは，式（8.2）の写像Tの不動点であり，不動点式（8.6）が成り立つ．

（証明）２条件式（6.3），（8.4）を２式（8.7），（8.5）に考慮すれば，

$$\forall x \in M, \phi(x) \in \{0, 1\} \tag{8.8}$$

$$\sup_{y \in M}|\phi(y) \in \{0, 1\} \tag{8.9}$$

であるから，よって，

（イ）$\forall x \in M, \phi(x) \in \{0\}$ のとき，

約束の式（8.1）から，

$$\forall x \in M, \phi(x) \in \{0\}$$

を得，T の定義式（8.2）から，

$$\forall x \in M, (T\phi)(x) \in \{0\}$$

を得，不動点式（8.6）の成立がわかった．

（ロ）$\exists x \in M, \phi(x) \in \{1\}$ のとき，

（ロ-１）$\phi(x) = 0$ のとき

T の定義式（8.2）から，式（6.3）を考慮して，$(T\phi)(x) = 0$

（ロ-２）$\phi(x) = 1$ のとき

T の定義式（8.2）から，式（6.4）を考慮して，$(T\phi)(x) = 1$

を得，不動点式（8.6）の成立がわかった． □

次の定理8.2は，式（8.2）の如く定義された式（2.8）の写像T が１章の４性質①～④）を満たすことを指摘したものである．

［定理8.2］（基底を使わないパターンモデルの構成定理）

式（2.1）の可測部分集合M を１つ選び，6.1節の４条件①～④を満たす関数fを導入する．式（8.2）の如く定義された式（2.8）の写像T は１章の４性質①～④）を満たす．

（証明）①（零元不動点性；axiom　1の（ⅰ））の成立については，定理8.1を適用すればよい．つまり，

$$\forall x \in M, \varphi(x) = 0$$

ととれば，式（8.5）のϕは，式（6.3）より

$$\forall x \in M, \phi(x) = 0$$

を得，不動点式（8.6）が成り立ち，①が成立した．

②（正定数倍不変性；axiom 1の（ⅱ）の後半）の成立を示そう．

a を任意の正定数として，η を$\eta \equiv a \cdot \varphi$ とおく．

$$\sup_{y \in M} |\eta(y)| = a \cdot \sup_{y \in M} |\varphi(y)|$$

に注意しておく．２つの場合②-１，②-２に分けて示す．

②-１　$\sup_{y \in M} |\varphi(x)| = 0$のとき

$$\forall x \in M, \varphi(x) = 0 \quad \therefore \quad T\varphi = 0$$

であり，また，

$$\forall x \in M, \eta(x) = 0 \quad \therefore \quad T\eta = 0$$

を得，$T\eta = 0 = T\varphi$．

②-２　$\sup_{y \in M} |\varphi(x)| > 0$のとき

$$\forall x \in M, \frac{\eta(x)}{\sup_{y \in M} \eta(y)|} = \frac{\varphi(x)}{\sup_{y \in M} \varphi(x)|}$$

を得，$T\eta = T\varphi$．

③（ベキ等性；axiom 1の（iii）の後半）　の成立を示そう．補助定理8.1を適用する．

η を $\eta \equiv T\varphi = f(\rho(x))$ とおけば，T の定義式（B.2）から，

$$\forall x \in M, |\rho(x)| \leq 1$$

$$\sup_{y \in M} |\rho(y)| \in \{0, 1\}$$

が成り立つ．よって，不動点式（8.6）が成り立ち，③が成立した．

④（非零写像性；axiom 1の（iv））の成立は，定理8.1から明らか．　□

9.　基底を使うパターンモデルの一般形$T\varphi$

6章では，（正規）直交系$\{\phi_k\}_{k \in L}$を用いて，式（6.38）のパターンモデル$T\varphi$が構成された．直交系は1次独立な系であるから，本章では，一般化して，1次独立な系$\{\phi_k\}_{k \in L}$を使い，式（6.38）の構造形式（抽出された特徴量の組が用い，原パターンφと同じ特徴量の組を備えたパターンモデル$T\varphi$を構成する方法）を用い，1章の4性質①～④を満たすパターンモデル$T\varphi$が構成される．但し，直交系から1次独立な系$\{\phi_k\}_{k \in L}$へと一般化したために，定理6.1のユニタリ共変性を備えたパターンモデル$T\varphi$は必ずしも得られないことに注意しておく．

9.1　1次独立な系$\{\phi_k\}_{k \in L}$によるパターン$\varphi \in \mathfrak{H}$の1次近似

系$\{\phi_k\}_{k \in L}$が正規直交系でなく，複素定数c_kの組$\{c_k\}_{k \in L}$について，

$$\sum_{k \in L} c_k \cdot \phi_k = 0 \Rightarrow \forall k \in L, c_k = 0 \tag{9.1}$$

が成り立つという意味で，1次独立な系とする．系$\{\phi_k\}_{k \in L}$が正規直交系であれば，1次独立な系であることに注意しておく．

1次独立な系$\{\phi_k\}_{k \in L}$を使って，パターン$\varphi \in \Phi \subseteq \mathfrak{H}$をその1次結合

$$\sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \phi_\ell \tag{9.2}$$

で近似するときの近似誤差$\varphi - \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell$のノルムの自乗

$$F(a_\ell, \ell \in L) \equiv \| \varphi - \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell \|^2 \tag{9.3}$$

を最小にしよう．最小にする 1 次結合の各係数$a_\ell\ (= a_\ell(\varphi))$は，最小自乗法を適用して，

$$\frac{\partial F(a_\ell, \ell \in L)}{\partial a_\ell} = 0,\ \ell \in L \tag{9.4}$$

から導かれる連立 1 次方程式

$$\sum_{k \in L} g_{\ell k} \cdot a_k(\varphi) = b_\ell(\varphi),\ \ell \in L$$

$$\text{,where } g_{\ell k} \equiv (g_k, \psi_\ell),\ b_\ell(\varphi) \equiv (\varphi, \psi_\ell),\ \ell, k \in L \tag{9.5}$$

を解けばよい．第ℓ，$k \in L$ 成分が$g_{\ell k}$であるような行列$G = (g_{\ell k})_{\ell, k \in L}$の行列式$\det(G)$の値は，系$\{\psi_k\}_{k \in L}$が 1 次独立なので，非零となり，連立 1 次方程式(9.5)の解$a_k(\varphi)$，$k \in L$ は一意的に求まる．このとき，$\varphi \in \mathfrak{H}$の 1 次展開

$$\forall \varphi \in \Phi \subseteq \mathfrak{H},\ \exists \varphi_\perp \in \mathfrak{H} \text{ such that } \forall k \in L,\ (\varphi_\perp, \psi_k) = 0,\ \varphi = \sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi) \cdot \psi_\ell + \varphi_\perp \tag{9.6}$$

が成り立つ．

9.2　4 条件①～④を満たす6.1節の関数fを導入しての，基底$\{\psi_k\}_{k \in L}$を使うパターンモデルの一般形$T\varphi$

6.1節の 4 条件①～④を満たす関数fを使い，式（6.38）のパターンモデル$T\varphi$を，パターンφの 1 次展開式（9.6）の主成分$\sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi) \cdot \psi_\ell$の定数倍

$$\frac{1}{\sup\limits_{k \in L} |a_k(\varphi)|} \cdot \sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi) \cdot \psi_\ell \tag{9.7}$$

の，近似として決定しよう．式（6.36）の特徴抽出写像$u : \Phi \times L \to R$を導入する．6.1節の 4 条件①～④を満たす関数fを導入して定義される実数値

$$u(\varphi, \ell) \equiv f\left(\frac{a_\ell(\varphi)}{\sup\limits_{k \in L} |a_k(\varphi)|}\right) \tag{9.8}$$

はパターン$\varphi \in \Phi$から抽出された第$k \in L$番目の特徴量である．パターンモデル$T\varphi$を生成する式（2.8）のモデル構成作用素Tを，式（6.38）の如くと導入する．但し，実定数a_ℓの列$\{a_\ell\}_{\ell \in L}$については，計算式（6.41）を約束しておく．

先ず，次の補助定理C1を証明する．

［補助定理9.1］（1 次独立な系$\{\psi_k\}_{k \in L}$を基底とするモデル構成作用素Tの不動点定理）

系$\{\psi_k\}_{k \in L}$を 1 次独立な系に選ぶ．関数fを6.1節の 4 条件①～④を満たすように選ぶ．パターン$\varphi \in \Phi$から抽出された第$\ell \in L$番目の特徴量$u(\varphi, \ell)$として，式（9.8）を採用する．条件式（6.49）を満たす各実定数a_ℓを使って得られる式（6.50）のパターンφについて，式（6.51）が成り立てば，不動点式（6.52）が成立する．

（証明） 2 つの場合（イ），（ロ）に分けて，示す．

（イ）$\sup\limits_{k \in L} |a_k| = 0$のとき

$$\forall \ell \in L,\ a_\ell = 0 \quad \therefore \quad \varphi = 0$$

である．また，

$$\forall \ell \in L,\ a_\ell(\varphi) = a_\ell = 0 \quad \therefore \quad \sup_{k \in L} | a_k(\varphi) | = 0$$

を得，

$$\therefore \quad \frac{a_\ell(\varphi)}{\sup_{k \in L} | a_k(\varphi) |} = 0 \quad \therefore \quad u(\varphi, \ell) = f(0) = 0$$

$$\therefore \quad T\varphi = 0 = \varphi.$$

（ロ）$\sup_{k \in L} | a_k | = 1$ のとき

$$\forall \ell \in L,\ a_\ell(\varphi) = a_\ell \quad \therefore \quad \frac{a_\ell(\varphi)}{\sup_{k \in L} | a_k(\varphi) |} a_\ell(\varphi) = a_\ell$$

$$\therefore \quad u(\varphi, \ell) = f(a_\ell(\varphi)) = f(a_\ell) = a_\ell$$

$$\therefore \quad T\varphi = \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell = \varphi.$$ □

補助定理9.1を適用して，次の定理9.1が得られ，基底としての 1 次独立な系$\{\psi_k\}_{k \in L}$の各成分ψ_ℓは誤差なく再現されることがわかる．

［定理9.1］（1 次独立な系$\{\psi_k\}_{k \in L}$の各成分ψ_ℓの不動点定理）

系$\{\psi_k\}_{k \in L}$を 1 次独立な系に選ぶ．関数fを6.1節の 4 条件①〜④を満たすように選ぶ．パターン$\varphi \in \Phi$から抽出された第$\ell \in L$番目の特徴量$u(\varphi, \ell)$として，式（9.8）を採用する．このとき，不動点式（6.53）が成り立つ．

（証明）$\varphi = \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell = \psi_k$のとき，式（6.54）が成り立ち，以後，補助定理9.1を適用すればよい．□

次の定理9.2は，パターン$\varphi \in \Phi$から抽出された第$\ell \in L$番目の特徴量$u(\varphi, \ell)$として，式（9.8）を採用し，構成された式（6.38）の作用素Tが 1 章の 4 性質①〜④）を満たすことを指摘したものである．

［定理9.2］（1 次独立な系$\{\psi_k\}_{k \in L}$を基底とするモデル構成作用素Tの構成定理）

系$\{\psi_k\}_{k \in L}$を 1 次独立な系に選ぶ．パターン$\varphi \in \Phi$から抽出された第$\ell \in L$番目の特徴量$u(\varphi, \ell)$として，式（9.8）を採用する．このとき，式（6.38）で定義される式（2.8）のモデル構成作用素Tは1章の 4 性質①〜④）を満たす．

（証明）①（零元不動点性；axiom 1の（ｉ））の成立については，式（6.55）が成り立つ式（6.50）のφをとれば，不動点方程式（6.52）が成立することから明らか．

②（正定数倍不変性；axiom 1の（ii）の後半）の成立を示そう．

aを任意の正定数として，ηを$\eta \equiv a \cdot \varphi = \sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \psi_\ell$とおけば，

$$\forall \ell \in L,\ a_\ell(\eta) = c_\ell = a \cdot a_\ell(\varphi) \tag{9.9}$$

であることに注意しておく．２つの場合②-１，②-２に分けて示す．

②-１　$\forall \ell \in L,\ a_\ell(\varphi) = 0$のとき

$$\forall \ell \in L,\ u(\varphi, \ell) = 0 \quad \therefore \quad T\varphi = 0$$

であり，また，

$$\forall \ell \in L,\ u(\eta, \ell) = 0 \quad \therefore \quad T\eta = 0$$

を得，$T\eta = 0 = T\varphi$

②-2　$\exists \ell \in L, a_\ell(\varphi) \neq 0$ のとき

$$\forall \ell \in L, \frac{a_\ell(\eta)}{\sup_{k \in L} |a_k(\eta)|} = \frac{a_\ell(\varphi)}{\sup_{k \in L} |a_k(\varphi)|} \quad \therefore \quad u(\eta, \ell) = u(\varphi, \ell) \tag{9.10}$$

を得，$T\eta = T\varphi$

③（ベキ等性；axiom 1の（iii）の後半）の成立を示そう．

η を $\eta \equiv T\varphi = \sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \phi_\ell$ とおけば，

$$\forall \ell \in L, a_\ell(\eta) = c_\ell = u(\varphi, \ell)$$

が成り立つ．然も，

$$\forall \ell \in L, c_\ell \in R_{[-1,+1]} \wedge \sup_{k \in L} |c_k| \in \{0, 1\}$$

であり，更に，

$$\forall \ell \in L, f(u(\varphi, \ell)) = f\left(f\left(\frac{a_\ell(\varphi)}{\sup_{k \in L} |a_k(\varphi)|}\right)\right) = f\left(\frac{a_\ell(\varphi)}{\sup_{k \in L} |a_k(\varphi)|}\right) = u(\varphi, \ell) \tag{9.11}$$

を得，補助定理9.1を適用でき，$T\eta = \eta$ がいえる．

④（非零写像性；axiom 1の（iv））の成立は，定理9.1から明らか．　□

10.　モデル構成作用素 T の個別的単調性

本章では，パターン φ をそのモデル $T\varphi$ へと変換することにより，引き離し（相違の拡大），吸引（類似性の強化）が生じる条件が研究される．

10.1　モデル構成作用素 T が2点 φ_1，φ_2 に関し，non-expansiveであるための条件

axiom 1を満たす式（2.8）のモデル構成作用素 T を導入する．

引き離し（相違の拡大）を意味するノルム不等式

$$\| \varphi_1 - \varphi_2 \| \leq \| T\varphi_1 - T\varphi_2 \| \tag{10.1}$$

が成り立つとき，

2点 φ_1，φ_2 で，T はexpansiveである　(10.2)

という．また，吸引（類似性の強化）を意味するノルム不等式

$$\| \varphi_1 - \varphi_2 \| \geq \| T\varphi_1 - T\varphi_2 \| \tag{10.3}$$

が成り立つとき，

2点 φ_1，φ_2 で，T はnon-expansiveである　(10.4)

という．

次の定理10.1は，2点 φ_1，φ_2 で，T はnon-expansiveである場合などを明らかにしている．

［定理10.1］（モデル構成作用素 T の個別的non-expansive定理）

実ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ では，axiom 1を満たす式(2.8)のモデル構成作用素 T に関し，次の(i)，(ii)，(iii) が成り立つ．

$$\text{(i)}\ (T\varphi_1 - T\varphi_2, T\varphi_1 - T\varphi_2) > (T\varphi_1 - T\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) \tag{10.5}$$

$$\Leftrightarrow \| T\varphi_1 - T\varphi_2 \|^2 + \| (\varphi_1 - T\varphi_1) - (\varphi_2 - T\varphi_2) \|^2 > \| \varphi_1 - \varphi_2 \|^2 . \tag{10.6}$$

（ii）（non-expansive）$(T\varphi_1 - T\varphi_2,\ T\varphi_1 - T\varphi_2) = (T\varphi_1 - T\varphi_2,\ \varphi_1 - \varphi_2)$ (10.7)

$$\Leftrightarrow \| T\varphi_1 - T\varphi_2 \|^2 \leq \| T\varphi_1 - T\varphi_2 \|^2 + \| (\varphi_1 - T\varphi_1) - (\varphi_2 - T\varphi_2) \|^2 = \| \varphi_1 - \varphi_2 \|^2 . \quad (10.8)$$

（iii）（non-expansive）$(T\varphi_1 - T\varphi_2,\ T\varphi_1 - T\varphi_2) < (T\varphi_1 - T\varphi_2,\ \varphi_1 - \varphi_2)$ (10.9)

$$\Leftrightarrow \| T\varphi_1 - T\varphi_2 \|^2 \leq \| T\varphi_1 - T\varphi_2 \|^2 + \| (\varphi_1 - T\varphi_1) - (\varphi_2 - T\varphi_2) \|^2 < \| \varphi_1 - \varphi_2 \|^2 . \quad (10.10)$$

（証明）F を

$$F \equiv \| T\varphi_1 - T\varphi_2 \|^2 + \| (\varphi_1 - T\varphi_1) - (\varphi_2 - T\varphi_2) \|^2 - \| \varphi_1 - \varphi_2 \|^2 \quad (10.11)$$

とおく．実ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ では，

$$(\varphi_1 - \varphi_2,\ T\varphi_1 - T\varphi_2) = (T\varphi_1 - T\varphi_2,\ \varphi_1 - \varphi_2) \quad (10.12)$$

が成立していることに注意して，F を変形してゆくと，

$$\begin{aligned} F &\equiv \| T\varphi_1 - T\varphi_2 \|^2 + \| (\varphi_1 - \varphi_2) - (T\varphi_1 - T\varphi_2) \|^2 - \| \varphi_1 - \varphi_2 \|^2 \\ &= \| T\varphi_1 - T\varphi_2 \|^2 + \| \varphi_1 - \varphi_2 \|^2 - (\varphi_1 - \varphi_2,\ T\varphi_1 - T\varphi_2) - (T\varphi_1 - T\varphi_2,\ \varphi_1 - \varphi_2) \\ &\quad + \| T\varphi_1 - T\varphi_2 \|^2 - \| \varphi_1 - \varphi_2 \|^2 \\ &= 2[\| T\varphi_1 - T\varphi_2 \|^2 - (T\varphi_1 - T\varphi_2,\ \varphi_1 - \varphi_2)] \end{aligned} \quad (10.13)$$

を得，（i），（ii），（iii）はこの式（10.13）から明らかである． ?

上述の定理E1は次の事実を明らかにしている：

出力 $T\varphi_1$ と $T\varphi_2$ との違い $T\varphi_1 - T\varphi_2$ の自乗ノルム $\| T\varphi_1 - T\varphi_2 \|^2$ が，入力 φ_1 と φ_2 との違い $\varphi_1 - \varphi_2$ の自乗ノルム $\| \varphi_1 - \varphi_2 \|^2$ とどの程度違いがあるかは，

$$\| (\varphi_1 - T\varphi_1) - (\varphi_2 - T\varphi_2) \|^2 \quad (10.14)$$

で決まる．これは，

φ_k が T の不動点であるかどうかの目安は $(\varphi_k - T\varphi_k)$ である $(k = 1, 2)$ ことに注意すれば，二つの目安 $(\varphi_1 - T\varphi_1)$，$(\varphi_2 - T\varphi_2)$ の差 $(\varphi_1 - T\varphi_1) - (\varphi_2 - T\varphi_2)$ の自乗ノルムが

$$\| (\varphi_1 - T\varphi_1) - (\varphi_2 - T\varphi_2) \|^2 = \| (\varphi_1 - \varphi_2) - (T\varphi_1 - T\varphi_2) \|^2 \quad (10.15)$$

の如く，入力の差 $\varphi_1 - \varphi_2$ と，T からの出力の差 $T\varphi_1 - T\varphi_2$ との差 $(\varphi_1 - \varphi_2) - (T\varphi_1 - T\varphi_2)$ の自乗ノルム

$$\| (\varphi_1 - \varphi_2) - (T\varphi_1 - T\varphi_2) \|^2 \quad (10.16)$$

に等しいことに注意しておかねばならない． □

定理10.1の（i）においては，モデル構成作用素 T が個別的に，expansiveになる場合と，non-expansiveになる場合との両方が生じることを示している．不等式（10.5）が如何なる場合に保証されるかを検討しよう．

G を

$$G \equiv (T\varphi_1 - T\varphi_2,\ T\varphi_1 - T\varphi_2) - (T\varphi_1 - T\varphi_2,\ \varphi_1 - \varphi_2) \quad (10.17)$$

とおくと，

$$\begin{aligned} G &= (T\varphi_1 - T\varphi_2,\ T\varphi_1 - T\varphi_2 - \{\varphi_1 - \varphi_2\}) \\ &= (T\varphi_1 - T\varphi_2,\ \{T\varphi_1 - \varphi_1\} - \{T\varphi_2 - \varphi_2\}) \end{aligned} \quad (10.18)$$

と変形される．式（10.18）の 2 成分 $T\varphi_1 - \varphi_1$，$T\varphi_2 - \varphi_2$ については，

$-(T\varphi_1 - \varphi_1) = \varphi_1 - T\varphi_1$ は，$\varphi_1 = T\varphi_1 + (\varphi_1 - T\varphi_1)$ の T の不動点でない成分である

$-(T\varphi_2 - \varphi_2) = \varphi_2 - T\varphi_2$ は，$\varphi_2 = T\varphi_2 + (\varphi_2 - T\varphi_2)$ の T の不動点でない成分である (10.19)

と解釈できる．何故ならば，ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ は式(4.16)の如く分解でき，任意のパターン $\varphi \in \mathfrak{H}$ は，

$$\varphi = T\varphi + (\varphi - T\varphi) \in \mathfrak{H},\ \text{where } T\varphi \in \mathit{null}\ (I - T) \text{ and } \varphi - T\varphi \in \mathit{range}\ (I - T) \quad (10.20)$$

が成り立つからである．結局，

$T\varphi_1 > T\varphi_2$ のとき $T\varphi_1 - \varphi_1 > T\varphi_2 - \varphi_2$ であれば，$G > 0$，つまり，不等式（10.5）が保証される （10.21）

ことに注意しよう．

10.2　モデル構成作用素 T の個別的単調性

axiom 1を満たす式（2.8）のモデル構成作用素 T が 2 点 2 点 φ_1，φ_2 で，単調作用素（monotone operator）であるとは，

$$(T\varphi_1 - T\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) \geq 0 \tag{10.22}$$

であることをいう．つまり，単調性は

$$\forall x \in M,\ \varphi_1(x) \geq \varphi_2(x) \text{ ならば} \forall x \in M, (T\varphi_1)(x) \geq (T\varphi_2)(x) \tag{10.23}$$

或いは，

$$\forall x \in M,\ \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \text{ ならば} \forall x \in M, (T\varphi_1)(x) \leq (T\varphi_2)(x) \tag{10.24}$$

の拡張である．

単調でないこと，つまり，

$$(T\varphi_1 - T\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) < 0 \tag{10.25}$$

が成立することは，望ましいことではない．その理由は次の通りである：

（イ）$\varphi_1 \geq \varphi_2$ であれば，$T\varphi_1 \geq T\varphi_2$ （10.26）

（ロ）$\varphi_1 \leq \varphi_2$ であれば，$T\varphi_1 \leq T\varphi_2$ （10.24）

が成り立つことは，$T\varphi$ が φ のモデルであることから望ましいことである．この（イ），（ロ）のいずれかが成り立てば，不等式（10.22）が成立し，モデル構成作用素 T が 2 点 2 点 φ_1，φ_2 で，単調である． □

単調作用素の 2 例をあげておこう．

［例 1 ］（付録Bの T が 2 点 φ_1，φ_2 で，単調であるための十分条件）

式（8.2）の，基底を使わないパターンモデルの一般形 $T\varphi$ について考えよう．

6.1節の 4 条件①～④を満たす式（6.2）の関数 f が6.1節の，［構成例 1 ］～［構成例 7 ］の如く単調増加関数であるとしよう．

$$\forall x \in M,\ \frac{\varphi_1(y)}{\sup_{y \in M} |\varphi_1(y)|} \geq \frac{\varphi_2(y)}{\sup_{y \in M} |\varphi(y)|} \tag{10.28}$$

であれば，

$$\forall x \in M,\ T\varphi_1(x) \geq T\varphi_2(x) \tag{10.29}$$

が成立し，このとき，

$$\forall x \in M,\ \varphi_1(x) \geq \varphi_2(x) \tag{10.30}$$

であれば，不等式（10.22）が成り立ち，T は 2 点 φ_1，φ_2 で，単調である． □

［例 2 ］（ 9 章の T が 2 点 2 点 φ_1，φ_2 で，単調であるための十分条件）

実ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ で考えよう． 1 次独立な系 $\{\phi_k\}_{k \in L}$ を導入する．式（6.36）の特徴抽出写像 $u : \Phi \times L \to R$ と，6.1節 4 条件①～④を満たす関数 f とを導入して定義される式（9.8）の，パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出された第 $k \in L$ 番目の実数値特徴量 $u(\varphi, \ell)$ を用いて定義される式（6.38）のモデル構成作用素 T について考えよう．

式（9.6）から，

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \sum_{\ell \in L} [a_\ell(\varphi_1) - a_\ell(\varphi_2)] \cdot \phi_\ell + \varphi_{\perp 1} - \varphi_{\perp 2} \tag{10.31}$$

を得，式（6.38）から，

$$T\varphi_1 - T\varphi_2 \equiv \sum_{\ell \in L} [u(\varphi_1, \ell) - u(\varphi_2, \ell)] \cdot \psi_\ell \tag{10.32}$$

を得る．よって，

$$(T\varphi_1 - T\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) = \sum_{k \in L} \sum_{\ell \in L} [u(\varphi_1, k) - u(\varphi_2, k)] \cdot [a_\ell(\varphi_1) - a_\ell(\varphi_2)] \cdot (\psi_k, \psi_\ell)$$

$$\because \quad \forall k \in L, (\varphi_{\perp 1}, \psi_k) = (\varphi_{\perp 2}, \psi_k) = 0 \tag{10.33}$$

が得られる．ここで，1次独立な系$\{\psi_k\}_{k \in L}$が

$$(\psi_k, \psi_\ell) = 0 \quad if \quad k \neq \ell \tag{10.34}$$

を満たすという意味で，直交系であれば，

$$(T\varphi_1 - T\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) = \sum_{k \in L} [u(\varphi_1, k) - u(\varphi_2, k)] \cdot [a_k(\varphi_1) - a_k(\varphi_2)] \cdot \| \psi_k \|^2 \tag{10.35}$$

が成り立つ．よって，特徴量$u(\varphi, \ell)$の定義式（9.8）に注意すれば，次の結論がいえる：
6.1節の4条件①～④を満たす式（6.2）の関数fが6.1節の，［構成例1］～［構成例8］の如く単調増加関数であるとしよう．

（イ）$\forall \ell \in L, a_\ell(\varphi_1) \geq a_\ell(\varphi_2) \Rightarrow \dfrac{a_\ell(\varphi_1)}{\sup_{k \in L} | a_k(\varphi_1) |} \geq \dfrac{a_\ell(\varphi_2)}{\sup_{k \in L} | a_k(\varphi_2) |}$

$$\therefore \quad u(\varphi_1, \ell) \geq u(\varphi_2, \ell) \tag{10.36}$$

（ロ）$\forall \ell \in L, a_\ell(\varphi_1) \leq a_\ell(\varphi_2) \Rightarrow \dfrac{a_\ell(\varphi_1)}{\sup_{k \in L} | a_k(\varphi_1) |} \leq \dfrac{a_\ell(\varphi_2)}{\sup_{k \in L} | a_k(\varphi_2) |}$

$$\therefore \quad u(\varphi_1, \ell) \leq u(\varphi_2, \ell) \tag{10.37}$$

であれば，直交系$\{\psi_k\}_{k \in L}$については，不等式（10.22）が成り立ち，Tは2点φ_1，φ_2で，単調である． □

11.　モデル構成作用素Tの増大性

ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$での自己共役作用素Hが正値（positive operator）であるとは，

$$\forall \varphi \in domain(H), (H\varphi, \varphi) \geq 0 \tag{11.1}$$

が成立することを指す．正値作用素Hについては，Hの固有値（スペクトル）が非負であることが知られている．

本章では，パターンφをそのモデル$T\varphi$へと変換することにより，$(T\varphi, \varphi) \geq 0$が成立するかどうか，つまり，$\varphi$が$\eta$となす角$\theta$を与える公式（Schwarzの公式）

$$(\varphi, \eta) = \| \varphi \| \cdot \| \eta \| \cdot \cos\theta \tag{11.2}$$

からわかるように，$T\varphi$がφと鋭角をなすかどうかが研究される．

ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$は，式（4.16）の如く分解されるから，任意のパターン$\varphi \in \Phi$につき，

$$\varphi = \varphi_{fixed} + \varphi_{nonfixed} \in \mathfrak{H} \tag{11.3}$$

と分解できる．ここに，φ_{fixed}，$\varphi_{nonfixed}$は．

$$\varphi_{fixed} \equiv T\varphi \in null(I - T), T\varphi_{fixed} = \varphi_{fixed} \tag{11.4}$$

$$\varphi_{nonfixed} \equiv \varphi - T\varphi \in range\,(I-T),\ T\varphi_{nonfixed} \neq \varphi_{nonfixed} \tag{11.5}$$

である．よって，

$$\forall\varphi \in \mathfrak{H},\ (T\varphi,\ \varphi) = (T\varphi,\ \varphi_{fixed}) + (T\varphi,\ \varphi_{nonfixed}) \tag{11.6}$$

が成り立ち，

$$\forall\varphi \in \mathfrak{H},\ (T\varphi,\ \varphi_{fixed}) = \|\varphi_{fixed}\|^2 \geq 0 \tag{11.7}$$

が成り立つ．

上述を考慮し，axiom 1を満たす式 (2.8) のモデル構成作用素T の増大性という概念を提案しよう．

axiom 1を満たす式（2.8）のモデル構成作用素T が点φ で，増大作用素（accretive operator）であるとは，

$$(T\varphi,\ \varphi) \geq 0 \tag{11.8}$$

であることをいう．$(T\varphi,\ \varphi) \geq 0$ は，$T\varphi$ がφ と鈍角をなさないこと（$T\varphi$ が少なくとも，φ と似ている性質を備えていること）を意味し，$T\varphi$ がφ のモデルであることから望ましいことである．

モデル構成作用素T の増大性に関連して，パターンφ がT の不動点であるかどうか，つまり，φ がφ_{fixed} であるかどうかを判定できる簡単な定理11.1を次に提出する．

［定理11.1］（モデル構成作用素T の不動点判定定理）

$\varphi \neq 0$ としよう．このとき，$(T\varphi,\ \varphi) \leq 0$ ならば，$T\varphi \neq \varphi$．　(11.9)

（証明）$\varphi \neq 0$ として，対偶

$T\varphi = \varphi$ ならば，$(T\varphi,\ \varphi) > 0$　(11.10)

を示せばよい．それは，

$$(T\varphi,\ \varphi) = (\varphi,\ \varphi) \quad \because \quad T\varphi = \varphi$$
$$= \|\varphi\|^2 > 0 \quad \because \quad \varphi \neq 0$$

と示された．　□

増大作用素の 2 例をあげておこう．

［例 1 ］（ 8 章のT が点φ で，増大であるための十分条件）

式（8.2）の，基底を使わないパターンモデルの一般形$T\varphi$ について考えよう．

6.4節の 4 条件①～④を満たす6.1の，式（6.2）の関数fが

$$f(u) \leq 0 \quad if \quad u < 0,\ \geq 0 \quad if \quad u \geq 0 \tag{11.11}$$

であるとしよう．例えば，6.1節の，［構成例 1 ］，［構成例 3 ］，［構成例 5 ］がそうである．

このとき，

（イ）$\varphi(x) \geq 0 \Rightarrow T\varphi(x) \geq 0$　(11.12)

（ロ）$\varphi(x) \leq 0 \Rightarrow T\varphi(x) \leq 0$　(11.13)

が成り立ち，不等式（11.8）が成り立ち，T は点φ で，増大である．

例えば，

$f(u) = u$ のとき，$\forall x \in M,)\,(T\varphi)(x)\cdot\varphi(x) = \dfrac{\varphi(x)^2}{\sup\limits_{y\in M} |\varphi(y)|} \geq 0$　(11.14)

であるから，不等式（11.8）が成り立ち，T は点φ で，増大作用素である．

［例 2 ］（ 9 章のT が点φ で，増大であるための十分条件）

実ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ で考えよう． 1 次独立な系$\{\phi_k\}_{k\in L}$ を導入する．式（6.36）の特徴抽出写像$u:\Phi\times L \to R$ と，6.1節の 4 条件①～④を満たす関数fとを導入して定義される式（9.8）の，パターン$\varphi \in \Phi$ から抽出された第$k \in L$ 番目の実数値特徴量$u(\varphi,\ \ell)$ を用いて定義される式（6.38）のモデ

ル構成作用素T について考えよう．

1次独立な系$\{\psi_k\}_{k\in L}$が正規直交系で，実数値特徴量$u(\varphi,\ell)$として式（6.37）を採用している式（6.38）のパターンモデル$T\varphi$を採用していれば，

$$f(u)=u \text{ のとき，} \forall\ell\in L, u(\varphi,\ell)\cdot(\psi_\ell,\varphi)=\frac{|(\varphi,\psi_\ell)|^2}{\sup\limits_{k\in L}|(\varphi,\psi_k)|}\geq 0 \tag{11.15}$$

を得，

$$(T\varphi,\varphi)=\sum_{\ell\in L}u(\varphi,\ell)\cdot(\psi_\ell,\Phi)\geq 0 \tag{11.16}$$

と，不等式（11.8）が成り立ち，T は点φ で，増大作用素である．

また，1次独立な系$\{\psi_k\}_{k\in L}$が正規直交系で，実数値特徴量$u(\varphi,\ell)$として式（7.1）を採用している式（6.38）のパターンモデルを採用していれば，

$$f(u)=u \text{ のとき，} \forall\ell\in L, u(\varphi,\ell)\cdot(\psi_\ell,\varphi)=\frac{|(\varphi,\psi_\ell)|\cdot(\psi_\ell,\varphi)}{\sup\limits_{k\in L}|(\varphi,\psi_k)}\tag{11.17}$$

を得，不等式（11.16）を得なくて，つまり，不等式（11.8）が成り立つとは限らないくて，T は点φ で，増大作用素であるとは限らない．

12. むすび

2元関係$\sim_T$を

$$\varphi\sim_T\eta\Leftrightarrow T\varphi=T\eta \tag{12.1}$$

と定義する．$\sim_T$は反射律，対称律，推移律を満たし，パターン集合Φ 上の同値関係である．

同値類

$$[\varphi]_T\equiv\{\eta\in\Phi\mid\varphi\sim_T\eta\}\subset\Phi \tag{12.2}$$

を定義でき，パターン集合Φ の部分集合$[\varphi]_T$は$\varphi\in\Phi$ を含むこと，つまり，

$$\forall\varphi\in\Phi, \varphi\in[\varphi]_T \tag{12.3}$$

が成り立つ．任意にとった2つの同値類は全く一致するか，または，共通な元を1つ持たない．

（イ）各$\eta\in[\varphi]_T$のモデルは共通であり，それは$T\varphi(=T\eta)\in\Phi$ であること

に気付く．

このような結論（イ）でのパターン$\eta\in[\varphi]_T$として，少なくとも，

（ロ）a を任意の正実定数として，$\eta=a\cdot\varphi$　∵　axiom 1，（ⅱ）の後半

（ハ）$\eta=T\varphi$　∵　axiom 1，（ⅲ）の後半

の2種類がある．

（イ），（ハ）からいえることは次の通りである：

（ニ）$T\varphi\in\Phi$ はηを含む同値類（$\varphi\in\Phi$ と類似しているパターンの集合）$[\Phi]_T(\ni\eta)$の代表（している）元である．$\varphi\in\Phi$ のモデル$T\varphi$ はパターン集合$[\varphi]_T$の構造を簡素化した表象である．□

本論文では，（イ），（ニ）なる解釈を可能にする式（2.8）のモデル構成写像T を一般的に構成した．いま少し，本研究の意義などを多段階想起認識の働きに関連させ，説明しよう．

多段階にわたり入力パターンを帰納推理の働きで変形していって，最終的に或るカテゴリを代表しているパターンを想起する多段階の想起認識（連想形認識）では，パターン$\varphi\in\Phi$ をパターン

$A\varphi \in \Phi$ へと変換する写像

$$A : \Phi \to \Phi \tag{12.4}$$

を考えなければならない．この場合，（イ）雑音の除去，（ロ）座標変換の除去，（ハ）欠落情報の補充と冗長な情報の除去，（ニ）簡単化，（ホ）同一形式化などの5効果を備えたパターン $\varphi \in \Phi$ の標準形としてのパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ を使うのがよい．

そのためには．4性質①（零元不動点性；axiom 1の（ⅰ）），②（正定数倍不変性；axiom 1の（ⅱ）の後半），③（ベキ等性；axiom 1の（ⅲ）の後半），④（非零写像性；axiom 1の（ⅳ））を満たす写像 T を使い，先ず，$\varphi \in \Phi$ のモデルを求め，次に，$T\varphi \in \Phi$ をパターン変換 A を用いて

$$A\,(T\varphi) = AT\varphi \in \Phi \tag{12.5}$$

と変換する．その後，$A\,(T\varphi) = AT\varphi \in \Phi$ のモデル

$$T\,(A\,(T\varphi)) = TAT\varphi \in \Phi \tag{12.6}$$

を，$A\varphi \in \Phi$ の代りに求めよ，というのが，SS理論の主張である．つまり，A の代りに，TAT の形式で使うことを考え，パターン $A\varphi \in \Phi$ の代りにモデル $TAT\varphi \in \Phi$ を採用せよと，主張する．この主張は，多段階の連想形認識過程で使われるパターン変換としての作用素（構造受精作用素）A については取り入れられ，その効果は実証済みである．上述の4性質①〜④を満たすという意味でモデル構成作用素と呼ばれる式（2.8）の写像 T についての研究はS. Suzukiの研究以外には存在しない．この写像 T は，入力顔画像 φ から目，鼻，口の各成分を抽出するのに有用であることも判明している[B16]．また，日本語単独母音の認識［B13］や，連想形記憶の働きを備えたニューラルネットの構成［B10］にも使用され，計算機シミュレーション済である．その他のモデル構成作用素 T については，平均画像を用いた画像2値化をもたらす構成［B16]，界面エネルギーの減少を利用した構成［B17]，画像内容を理解するシステムにおける画素単位の構成［B18]，「B26」，［B29]，［B30］などがある．

モデル $TAT\varphi \in \Phi$ がパターン $A\varphi \in \Phi$ に比べ，上述のの5効果（イ）〜（ホ）を備えていることから，この主張が認められよう．パターンに正規化の操作を行った結果，以後の認識処理が便利かつ容易になることになることが基本的に重要である．

本論文では，このような役割を果たすモデル構成作用素 T の一般形を決定した．

処理の対象とする問題のパターン φ について，この入力パターン φ を式（2.21）の記憶内 $T\cdot\Omega$ のある1つのパターン ω_j のモデル $T\omega_j$ として再生し（想起の働き），然も，入力パターン φ が帰属するカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ を決定できる（認識の働き）という連想形多段階認識（多段階想起認識）の働き［B3]，［B4]がS. Suzukiによって提案されている．

多段階想起認識の働きを利用する実際のパターン情報処理の場面で，モデル構成作用素 T の有用性を更に確かめていく心算である．多段階想起認識の働きを実現するために，式（2.27）の大分類関数 BSC を学習の働きで構成することは当然であるが，文献［B 3］の付録Bの，式（B13）の SM を使えば，式（2.22）の類似度関数 SM を学習の働きで構成できる．学習による SM の構成というこの独創性はシミュレーションを実行してみないとわからないが，多分，良好なパターン認識の働きの確保にとって，有用な結果をもたらすだろう．更に，有用な結果をもたらすためには，モデル構成作用素 T を学習の働きで構成する一般的な方法も研究する必要があろう．

参　考　文　献　A

［A 1］濱裕光，柳重堪，阮牧：“シグナルとシステムの数学”，森北出版，Dec.1997
［A 2］鳥脇純一郎：“認識工学―パターン認識とその応用―”，コロナ社，Mar.1993

参 考 文 献 B

［B 1］鈴木昇一：“認識工学”，柏書房，Feb.1975
［B 2］鈴木昇一：“ニューラルネットの新数理”，近代文芸社，Sept.1996
［B 3］鈴木昇一：“パターン認識問題の数理的一般解決”，近代文芸社，June 1997
［B 4］鈴木昇一：“認識知能情報論の新展開”，近代文芸社，Aug.1998
［B 6］鈴木昇一：“手書き漢字の側抑制効果的分解とその計算機シミュレーション”情報処理学会誌, vol.15, no.12, pp.927-934, Dec.1974
［B 7］鈴木昇一：“画像情報量とその手書き漢字への応用”，画像電子学会誌，vol.4, no.1, pp.4-12, Apr.1975
［B 8］鈴木昇一：“抽出された特徴による手書き漢字構造の再生”，情報処理学会誌，vol.18, no.11, pp.1115-1122, Nov.1977
［B 9］鈴木昇一：“回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.4, pp.36-56, Dec.1983
［B10］鈴木昇一：“連想形記憶器MEMOTRONと日本語単独母音系列の再生に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.7, pp.14-29, Dec.1986
［B11］鈴木昇一：“多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.10, pp.35-49, Dec.1989
［B12］鈴木昇一：“帰属係数法に基づく類似度, 帰属関係あいまい度, 認識情報量の計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.11, pp.51-68, Dec.1990
［B13］鈴木昇一：“構造受精法と日本語単独母音の認識”, 情報研究（文教大学・情報学部）, no.18, pp.17-51, Dec.1998
［B14］鈴木昇一, 前田英明：“有声破裂音の代表パターンの学習的決定と, その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.20, pp.77-95, Dec.1998
［B15］鈴木昇一，前田英明：“変動エントロピーによる有声破裂音の順序付けと，その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.21, pp.51-78, Mar.1999
［B16］鈴木昇一：“平均顔を用いた顔画像の２値化、並びに、目・鼻・口の抽出と、その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.22, pp.65-150, Dec.1999
［B17］鈴木昇一：“界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の，顔画像処理に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.23, pp.109-182, Mar.2000
［B18］鈴木昇一：“風景画から知識を抽出し，解釈するシステムの，ファジィ推論ニューラルネットによる構成”，情報研究（文教大学・情報学部），no.23, pp.183-265, Mar.2000
［B19］鈴木昇一：“各個人の感性を反映した認識システムRECOGNITRON”，情報研究（文教大学・情報学部），no.24, pp.185-257, Dec.2000
［B20］鈴木昇一：“プロダクション・システムとしてのファジィ・マルチメディア・コンピュータと、空間多重パターンファジィ推論系”, 情報研究（文教大学・情報学部）, no.24, pp.105-183, Dec.2000
［B21］鈴木昇一：“SS大分類関数BSCの適応的構成への、計算論的学習理論の適用”，情報研究（文

教大学・情報学部)，no.25, pp.185-236, Mar.2001
［B22］鈴木昇一："量子力学の諸原理，多段階量子認識系と，心理状態を取り入れた想起に基づく部分空間認識法"，情報研究（文教大学・情報学部)，no.25, pp.237-282, Mar.2001
［B23］鈴木昇一："Support Vector Machineを利用した大分類関数の構成"，情報研究（文教大学・情報学部)，no.26, pp.1-62, Dec.2001
［B24］鈴木昇一：" 2 カテゴリ分類困難度の情報理論"，情報研究(文教大学・情報学部)，no.26, pp.63-160, Dec.2001
［B25］鈴木昇一："一般化類似度関数を用いた"導出原理"による第 1 階述語推論"，情報研究（文教大学・情報学部)，no.27, pp.27-71, Mar.2002
［B26］鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹："風景画の理解に関するJAVA言語によるRECOGNITRONの計算機シミュレーション"，情報研究（文教大学・情報学部)，no.27, pp.73-109, Mar.2002
［B27］鈴木昇一："遺伝的アルゴリズムにおける適合度比例選択戦略を利用した進化方程式の，パターン多段階変換に基づく認識への応用"，情報研究（文教大学・情報学部)，no. 28,pp. 37-67, Dec.2002
［B28］鈴木昇一："近傍を利用した音素認識のためのモデル構成作用素T，類似度関数SM，大分類関数BSCの諸構成と，SS不動点探索型多段階想起認識"，情報研究(文教大学・情報学部)，no.28, pp.69-141, Dec.2002
［B29］鈴木昇一："JAVA言語で実装化された画像理解システムIUSの動作概要と，その稼動方法"，情報研究（文教大学・情報学部)，no.28, pp.143-165, Dec.2002
［B30］鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹："JAVA言語による計算機シミュレーションで生じた風景画像の理解場面での多段階連想形認識過程の異常現象"，情報研究(文教大学・情報学部)，no.29, pp.123-166, .July 2003
［B31］鈴木昇一："パターン情報処理（モデル構成作用素，誤差逆伝播学習 2 層ニューラルネット）と，論理的含意とによる非単調的知識推論"，情報研究(文教大学・情報学部)，no.29, pp.75-121, July 2003
［B32］鈴木昇一："可分な一般抽象ヒルベルト空間でのK-L直交系の理論"，情報研究（文教大学・情報学部)，no.29, pp.41-73, July 2003
［B33］鈴木昇一："パターン系列（動画像，会話音声）の，dynamical systemによる連想理論と，連想器SPATEMTRON"，情報研究（文教大学・情報学部)，no.30, pp.139-186, Jan.2004
［B34］鈴木昇一："原パターンを近似できるという拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの，会話音声・動画像処理への応用"，情報研究（文教大学・情報学部)，to be published
［B35］鈴木昇一："会話音声・動画像処理への，万能性類似度関数の採用によるSS多段階認識の改良"，情報研究（文教大学・情報学部)，no.31, pp.65-108, July 2004
［B36］鈴木昇一："入出力例の系列を用いた"対連想問題・その擬逆問題"の一般解"，情報研究（文教大学・情報学部)，no.30, pp.81-137, Jan.2004
［B37］鈴木昇一："共役勾配法の一般解における直交系の応用（画像復元，パターンモデルの構成，パターン集合の情報理論的次元)"，情報研究（文教大学・情報学部)，no.30, pp.27-79, Jan.2004
［B38］鈴木昇一："SSマルチメディア認識知能情報論に基づく音声の多段階想起認識に役立つモデル構成作用素T，類似度関数SM，大分類関数BSC"，情報研究(文教大学・情報学部)，to be published

付　　録

付録A.　類似度関数SMの劣微分

$a \in R^q$（q次元ユークリッド空間）が関数

$$f : R^q \to R \tag{A.1}$$

の，点x_0における劣勾配ベクトル（subgradient vector）であるとは，不等式

$$\forall x \in R^q, f(x) \geq f(x_0) + (a, x - x_0) \tag{A.2}$$

が成立することである．ここに，$(\ ,\ )$はR^qにおける内積である．

$x_0 \in R^q$における劣勾配ベクトル$a \in R^q$の全体を$\partial f(x_0)$と書き，fのx_0における劣微分（subdifferential）という．そして，$\partial f(x_0) \neq \phi$のとき，$f(x)$は$x_0 \in R^q$で劣微分可能であるという．

以上を考慮して，axiom 2を満たす式（2.22）の類似度関数SMの劣勾配を定義しよう．

与えられたパターン$\varphi \in \Phi$について，不等式

$$SM(T\varphi, \omega_j) \geq SM(T\varphi_*, \omega_j) + (T\eta, T\varphi - T\varphi_*) \tag{A.3}$$

を満たす$T\varphi_* \in \Phi$，$T\eta \in \Phi$を見つけることができた場合（各々唯1個とは限らないことに注意），$T\eta \in \Phi$を$SM(\cdot, \omega_j)$の，$T\varphi = T\varphi_*$における劣勾配という．

2つのパターンφ_1，$\varphi_2 \in \Phi$について，

$$SM(T\omega_j, \omega_j) \geq SM(T\varphi_{1*}, \omega_j) + (T\eta_1, T\varphi_1 - T\varphi_{1*}) \tag{A.4}$$

$$SM(T\varphi_2, \omega_j) \geq SM(T\varphi_{2*}, \omega_j) + (T\eta_2, T\varphi_2 - T\varphi_{2*}) \tag{A.5}$$

が成り立つとしよう．

$$T\varphi_{1*} \neq T\omega_j \wedge T\varphi_{2*} \neq T\omega_j \tag{A.6}$$

のとき

$$\| T\eta_1 \| > \| T\eta_2 \| \tag{A.7}$$

であれば，

φ_1はφ_2より第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$への認識が難しい　(A.8)

という．尚，これまで構成された類似度関数SMについては，

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j) \tag{A.9}$$

が満たされていることを利用する．

［例1］（$\varphi = \omega_j$のときの，類似度関数SMの劣勾配）

$$\varphi = \omega_j \tag{A.10}$$

のとき，不等式（A.3）を満たす$T\varphi_* \in \Phi$，$T\eta \in \Phi$を考えよう．

$$SM(T\omega_j, \omega_j) = SM(\omega_j, \omega_j) = 1 \tag{A.11}$$

であるから，次の（イ），（ロ）が成り立つ：

（イ）$T\eta = 0$で，$T\varphi_*$は任意　(A.12)

（ロ）$T\eta$は任意で，$T\varphi_* = T\omega_j$　(A.13)

□

［例2］（$\varphi = \omega_i$，$i \in J - \{j\}$のときの，類似度関数SMの劣勾配）

$$\varphi = \omega_i,\ i \in J - \{j\} \tag{A.14}$$

のとき，不等式（A.3）を満たす$T\varphi_* \in \Phi$，$T\eta \in \Phi$を考えよう．

$$\forall i \in J - \{j\}, SM(T\omega_i, \omega_j) = SM(\omega_i, \omega_j) = 0 \tag{A.15}$$

であるから，次の（イ），（ロ）が成り立つ：

（イ）$T\eta=0$ で，$T\varphi_*=T\omega_k$，$k\in J-\{j\}$.　(A.16)

（ロ）$T\eta$ は任意で，$T\varphi_*=T\omega_i$　(A.17)

□

付録B.　類似度関数SM の片側微分

axiom 2 を満たす式（2.22）の類似度関数SM について考えよう．

点$T\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$ を固定する．点$T\varphi$ での“$T\omega_j-T\varphi$ 方向の片側微分”を，$SM'(T\varphi,\omega_j;T\omega_j-T\varphi)$

$$SM'(T\varphi,\omega_j;T\omega_j-T\varphi)\equiv\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot[SM(T\varphi+\varepsilon\cdot(T\omega_j-T\varphi),\omega_j)-SM(T\varphi,\omega_j)],\ \varepsilon>0 \tag{B.1}$$

と定義する．

$\varepsilon>0$ が十分小ならば，近似式

$$SM(T\varphi+\varepsilon\cdot(T\omega_j-T\varphi),\omega_j)\cong SM(T\varphi,\omega_j)+\varepsilon\cdot SM'(T\varphi,\omega_j;T\omega_j-T\varphi) \tag{B.2}$$

が成り立つ．

$$SM'(T\varphi_1,\omega_j;T\omega_j-T\varphi_1)\geq SM'(T\varphi_2,\omega_j;T\omega_j-T\varphi_2) \tag{B.3}$$

であれば，式（A.8）がいえる．

等式（A.9）が成立しているとしよう．

(a) $\varepsilon=0$ であれば，$SM(T\varphi+\varepsilon\cdot(T\omega_j-T\varphi),\omega_j)=SM(T\varphi,\omega_j)\leq SM(T\omega_j,\omega_j)=1$　(B.4)

(b) $\varepsilon=1$ であれば，$SM(T\varphi+\varepsilon\cdot(T\omega_j-T\varphi),\omega_j)=SM(T\omega_j,\omega_j)=1$　(B.5)

(c) $T\varphi+\varepsilon\cdot(T\omega_j-T\varphi)=(1-\varepsilon)\cdot T\varphi+\varepsilon\cdot T\omega_j\quad for\quad 0\leq\varepsilon\leq 1$　(B.6)

であることを考慮すれば，次の（イ），（ロ）が成り立つ：

$\varepsilon_2-\varepsilon_1>0$ が十分小であるとして，不等式

$$0\leq\varepsilon_1<\varepsilon_2\leq 1 \tag{B.7}$$

を満たす 2 つの助変数ε_1，ε_2 について，

（イ）$0<\varepsilon\leq\varepsilon_1$ については，

$$SM(T\varphi+\varepsilon\cdot(T\omega_j-T\varphi),\omega_j)<SM(T\varphi,\omega_j) \tag{B.8}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\varepsilon}\cdot[SM(T\varphi+\varepsilon\cdot(T\omega_j-T\varphi),\omega_j)-SM(T\varphi,\omega_j)]\ll 0 \tag{B.9}$$

（ロ）$\varepsilon_1\leq\varepsilon\leq\varepsilon_2$ については，

$$SM(T\varphi+\varepsilon\cdot(T\omega_j-T\varphi),\omega_j)\cong SM(T\varphi,\omega_j) \tag{B.10}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\varepsilon}\cdot[SM(T\varphi+\varepsilon\cdot(T\omega_j-T\varphi),\omega_j)-SM(T\varphi,\omega_j)]\cong 0 \tag{B.11}$$

（ハ）$\varepsilon_2\leq\varepsilon\leq 1$ については，

$$SM(T\varphi+\varepsilon\cdot(T\omega_j-T\varphi),\omega_j)\geq SM(T\varphi,\omega_j) \tag{B.12}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\varepsilon}\cdot[SM(T\varphi+\varepsilon\cdot(T\omega_j-T\varphi),\omega_j)-SM(T\varphi,\omega_j)]\gg 0 \tag{B.13}$$

□

$\varepsilon_2>0$ が小さくとれ，かつ，$\varepsilon_1\geq 0$ が小さくとれるパターン$\varphi\in\Phi$ ほど，第$j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$

への帰属性が強いといえよう．

付録C.　平均パターン ξ との差を利用した不動点を探索する多段階想起認識

個々の顔はプロトタイプ顔との差異として表現され，記憶されていると指摘する研究者がいる．それで，

個々の顔はプロトタイプ顔との差異として表現されている観点

を採用した“認識の方法”を提案してみよう．

認識の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ について，平均パターン

$$\xi \equiv \sum_{j \in J} p\,(\mathfrak{C}_j)\cdot\omega_j \tag{C.1}$$

との差

$$\varphi' \equiv \varphi - \xi \tag{C.2}$$

を作る．この入力パターン $\varphi \in \Phi$ の代りに，φ' のモデル

$$\varphi_0' \equiv T\varphi' = T\,(\varphi - \xi) \tag{C.3}$$

を入力する．各カテゴリ $\mathfrak{C}_j\,(j \in J)$ の代表パターンとして，$\omega_j\,(j \in J)$ の代りに，

$$\omega_j' \equiv \omega_j - \xi \tag{C.4}$$

を用い，不動点を探索する多段階想起認識の過程

$$< \varphi_0', \lambda_0' > \rightarrow < \varphi_1', \lambda_1' > \rightarrow < \varphi_2', \lambda_2' > \rightarrow \cdots \rightarrow < \varphi_t', \lambda_t' > \tag{C.5}$$

ここに，

$$TA\,(\mu_t')\,T < \varphi_t', \lambda_t' > =_{\varDelta} < \varphi_t', \lambda_t' > \tag{C.6}$$

を考えよう．ここに，$\lambda_0'(\subseteq J)$ は入力パターン $\varphi \in \Phi$ が帰属する可能性のあるカタゴリの番号のリストであり，簡単には，

$$\lambda_0' = J \tag{C.7}$$

とおけばよい．正常に多段階認識が終了したときには，次の（イ），（ロ）がいえる：

（イ）不動点カテゴリ番号リスト λ_t' は

$$\lambda_t' = [j\,] \tag{C.8}$$

であり，入力パターン $\varphi \in \Phi$ が帰属するカテゴリは第 $j\,(\in J)$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ であると決定できる

（ロ）φ_t' は，入力パターン $\varphi \in \Phi$ が帰属する第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン ω_j から平均パターン ξ を差し引いた $\omega_j - \xi$ のモデル $T\,(\omega_j - \xi)$ になっていることが期待される．つまり，

$$\varphi_t' = T\,(\omega_j - \xi) \tag{C.9}$$

が期待される．　□

それで，入力パターン $\varphi \in \Phi$ の意味構造を再生したパターン $\eta_\sharp$ は，

$$\eta_\sharp = \varphi_t' + T\xi \tag{C.10}$$

であると考えられるから，そのパターンモデル $T\eta_\sharp$ を想起出力することになる．

（著者　鈴木昇一，論文題目　パターンモデルの一般形，文教大学情報学部　情報研究no.32投稿論文，投稿年月日　2004年8月23日（月））