類似度関数の密度を用いた，画素毎のパターン認識処理（パターン理解処理）の方法

鈴木　昇一

A Method of Recognizing and Understanding Patterns Pixelwisely with the Help of densities of Similarity-Measure Functions

Shoichi Suzuki

要　　約

パターンモデル$T\varphi$とは原パターンφと同じように感性的に見えたり，聞こえたりするようなものである．このようなパターンモデル$T\varphi$を出力する写像Tをモデル構成作用素ということがある．モデル構成作用素Tがパターンφの持つかも知れない変形を吸収できるためには，零元不動点性，正定数倍不変性，ベキ等性，非零写像性という4性質を満たさなければならないことは，SS理論［B3］，［B4］が指摘している．このようなモデル構成作用素の集合は半群，或いは，線形空間を形成しない．

本論文では，モデル構成作用素Tを基本的に使い，輪郭の強調に有効であると判明している$\varepsilon-$フィルタの機能からhintを得，各カテゴリ$\mathfrak{C}_j$の各代表パターンω_jのモデル$T\omega_j$を$(T\omega_j)_\wedge$へと修正する方法が提案されている．この修正に基づいて，連想形認識におけるSS多段階認識の働きを改良するのに役立つ新しい構造受精作用素$A_\wedge(\mu)$が研究されている．併せて，類似度関数$SM(\cdot,\cdot)$の密度関数$sm(\cdot,\cdot)(x)$を構成し，画素毎にパターンを多段階的に連想の働きで認識し，1枚の画像全体を理解する処理の方法の基礎が研究されている．新しい構造受精作用素$A_\wedge(\mu)$が風景画像の理解に関するこれまでの計算機シミュレーション［B26］，［B29］，［B30］において使用された場合，理解性能が改良されることが期待される．

その他に，axiom 2_xを満たす類似性関数密度$sm(\cdot,\cdot)(x)$，axiom 2を満たす類似度関数SM， axiom 3_xを満たす大分類関数密度$bsc(\cdot,\cdot)$に関する各種話題，諸応用が研究されている．

キーワード

パターンモデル　　モデル構成作用素　　類似性密度関数　　$\varepsilon-$フィルタ

座標変換　　構造受精変換　大分類関数密度関数

Abstract

If we see or hear a correspondung model of an original pattern, we have a sense of seeing or hearing the original pattern as though the model were the original pattern. A mapping T that gives a model as its output is called a model-construction operator. T that can absorb some deformation which appears in patterns must four properties of（1）having 0 as its fixed-point,（2）an invariance under a multiplication by any positive number,（3）idempotency, and（4）non-zero mapping. A set of such model-construction operators can not necessarily build up a semigroup or a linearspace.

In this paper using T, we propose a method of revising the model $T\omega_j$ of the prototypical pattern ω_j belonging to the jth category $\mathfrak{C}_j$ to another $(T\omega_j)_\wedge$, based on some faculties of a $\varepsilon-$ filter which are of value for reference. This revision can aid a great deal in the improvement of the SS multi-stage recognition using association because a structural-fertilization operator $A_\wedge(\mu)$ which is an improved form of $A(\mu)$ thus far is obtained by making good use of $(T\omega_j)_\wedge$ instead of $T\omega_j$. We have a density function $sm(\cdot,\cdot)(x)$ of similarity-measure function $SM(\cdot,\cdot)$ to construct in addition to this. As the construction of $sm(\cdot,\cdot)(x)$, we can establish a foundation of pixcelwisely recognizing patterns by using a multi-stage association and understanding a whole of an image in question. We are expecting much of a performance of understanding when we take advantage of a new $A_\wedge(\mu)$ in the computer simulation［B26］,［B20］,［B30］ so far concerning the understanding of scenery images.

In addition various subjects and applications about $sm(\cdot,\cdot)$, SM and density function $bsc(\cdot,\cdot)$ of rough classifier BSC which must satisfy axiom 2_x, axiom 2 and axiom 3_x respectively are discussed.

Key Words:（1）pattern model （2）model-construction operator （3）density function of similarity-measure （4）$\varepsilon-$ filter （5）change of coordinates （6）structural-fertilization operator （7）density function of rough classifier

1. はじめに

認識システムが視点を座標点$x \in M$に移したとき，座標点$x \in M$がどのカテゴリを表すために使われているかは，式（4.1.2）の類似性密度関数$sm(\varphi, \omega_j)(x)$が最大となる最も若いカテゴリ番号

$$j(x) = \max_{i \in J} sm(\varphi, \omega_j)(x) \in J \tag{1.1.0}$$

を求めればよい．そうすれば，簡単に，座標点$x \in M$はカテゴリ$\mathfrak{C}_{j(x)} \in \mathfrak{C}$を表すために使われていると決定できる．本論文は，主として，式（4.1.2）の類似性密度関数$sm(\varphi, \omega_j)(x)$の構成，並びに，その簡単な応用に関する研究である．

1.1 本研究の位置付け

分類の働きの対象となるデータが画像や音声などのパターンで与えられる場合，この分類の働きはパターン認識といわれる．更に，複数の事物がある場合画像の内容や，会話音声の内容を確定する働きはパターン理解と呼ばれることが多い．

パターンというものは，その1部分が他のパターンに隠されて欠落していたり，変形して構造が崩

れていたり，雑音が加わり変質していたり，不規則な座標変換，或いは，規則的な座標変換がなされていたりする．欠落を補ったり，崩れる以前の状態に直したり，雑音を取り除いたり，座標変換がなされる前の状態に戻したりする操作を，一般に，パターン正規化ということになっている．本論文では，パターンφを標準形（パターンのモデル）$T\varphi$に変換すること，つまり

$$\varphi \to T\varphi \tag{1.1.1}$$

をパターン正規化と呼び，この種の正規化の下で連想形多段階認識の働きの基礎が研究される．
先ず，モデル構成作用素と呼ばれる写像

$$T : \Phi \to \Phi \tag{1.1.2}$$

を導入していることが，他のいかなる研究内容から本研究内容を区別している．

Mを，ｑ次元ユークリッド空間R^qの可測部分集合とする．Mのある部分集合内M'の任意の座標点$x \in M'$に，あるカテゴリ$\mathfrak{C}_j$（第$j \in J$番目のカテゴリ）の成分が存在する程度を計量化できるか？この存在する程度が，本論文で提案される類似度関数

$$sm(\cdot,\cdot) : \Phi \times \Omega \to R \tag{1.1.3}$$

の密度関数$sm(\varphi, \omega_j)(x)$である．ここに，Φは処理の対象となるパターンφの集まりであり，Ωはすべての代表パターンω_jの集合

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} \tag{1.1.4}$$

である．また，Rは実数全体の集合である．また，ω_jは第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の持つ諸性質を典型的に備えている代表パターンである．

視野の中心（視点）座標点$x \in M'$を考慮した類似度関数の密度$sm(\varphi, \omega_j)(x)$を新しく構成する．その後，帰納推理の働きで，処理の対象となるパターンφを多段階にわたり，変形しながら，

パターンφを記憶内のパターンω_jのモデル$T\omega_j$として再生し，然も，パターンφが帰属するカテゴリ$\mathfrak{C}_j$を決定できる連想形多段階認識の働き　(1.1.5)

が研究される．そのために，類似度関数の密度$sm(\varphi, \omega_j)(x)$を使い，多段階連想形認識の過程を実現することを目的として，パターンを変換するのに使われる従来の構造受精作用素

$$A(\mu) : \Phi \to \Phi,\ \mu \subseteq J \tag{1.1.6}$$

に代りに，新しい構造受精作用素

$$A_{\wedge}(\mu) : \Phi \to \Phi,\ \mu \subseteq J \tag{1.1.7}$$

などが提案される．ここに，カテゴリ$\mathfrak{C}_j$の全集合

$$\mathfrak{C}(J) \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid j \in J\} \tag{1.1.8}$$

を想定し，認識システムRECOGNITRON［B1］～［B4］がパターンφを見ているとき，$x \in M'$は視野の中心（視点）である．パターンω_jは第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の諸性質を典型的に備えているという意味で，代表パターンと呼ばれるものである．パターン$T\omega_j$はパターンω_jのモデル（パターンモデル）である．

1.2　構造受精作用素$A(\mu)$

処理の対象とする問題のパターン$\varphi \equiv \{\varphi(x) \mid x \in M\}$が，今注目している座標点$x \in M$において，式（1.1.8）のカテゴリ集合$\mathfrak{C}(J) \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid j \in J\}$と１対１に対応している代表パターン$\omega_j$の，式（1.1.4）の集合$\Omega = \{\omega_j \mid j \in J\}$内の，任意の１つの代表パターン$\omega_j(x)$とどの程度似ているか，相違しているかを計量できる類似性密度関数$sm(\varphi, \omega_j)(x)$が本論文で構成される．

下記の解釈が契機になって，本研究がなされている．

例えば,

$$(A\,(\mu)\,\varphi)(x)=\sum_{j\in\mu} SM\,(\varphi,\omega_j)\cdot BSC\,(\varphi,j)\cdot(T\omega_j)(x) \tag{1.2.1}$$

の，座標点$x\in M'$の成分

$$SM\,(\varphi,\omega_j)\cdot BSC\,(\varphi,j)\cdot(T\omega_j)(x) \tag{1.2.2}$$

は，座標点$x\in M'$において，第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属している程度をパターン成分を表していると考えよう．

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall j\in\mu\subseteq J,\ 0\le SM\,(\varphi,\omega_j)\cdot BSC\,(\varphi,j)\le 1 \tag{1.2.3}$$

$$\forall\varphi\in\Phi,\ 0\le\sum_{j\in J} SM\,(\varphi,\omega_j)\cdot BSC\,(\varphi,j)\le 1 \tag{1.2.4}$$

が成立しており,

$$\forall x\in M',\ \sum_{j\in J} SM\,(\varphi,\omega_j)\cdot BSC\,(\varphi,j)\cdot|(T\omega_j)(x)|\le\sum_{j\in J}|(T\omega_j)(x)| \tag{1.2.5}$$

が成立しているからである．

上述の解釈が契機になって，本研究がなされている．

1.3 認識システムRECOGNITRO(M)が処理の対象とする問題のパターン$\varphi\in\Phi$を理解するには，認識地図（出現確率分布）を変換すればよい？

座標点$x\in M'$を視野の中心（視点）とする認識システムRECOGNITRON（x）が実現しなければならない”出現確率分布（認識地図）を書き換える多段階連想形認識の過程”を説明しよう．

先ず，確率条件

$$[\forall j\equiv J,\ 0<p\,(\mathfrak{C}_j)<1]\wedge\sum_{j\in J}p\,(\mathfrak{C}_j)=1 \tag{1.3.1}$$

を満たす第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の生起確率$p\,(\mathfrak{C}_j)$を導入しておく．

第0段階の$p\,(\mathfrak{C}_j)(x;t)|_{t=0}$は，座標点$x\in M'$において，第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属している程度を表しているカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の出現確率（初期出現確率）であると，考えよう．初期出現確率分布は,

$$p\,(\mathfrak{C}_j)(x;t)|_{t=0},\ j\in J,\ x\in M' \tag{1.3.2}$$

である．初期値（事前の出現確率分布としての事前の認識地図）については，全カテゴリ番号jの集合Jが

$$J=\{1,2,\cdots,m\} \tag{1.3.3}$$

の場合

$$\exists M'\,(\subseteq M)\quad \text{such that}\quad |M'|\ge m, \tag{1.3.4}$$

$$\forall x\in M',\ p\,(\mathfrak{C}_j)(x;t)|_{t=0}=1/|M'| \tag{1.3.5}$$

$$\forall x\in M-M',\ p\,(\mathfrak{C}_j)(x;t)|_{t=0}=0 \tag{1.3.6}$$

と考えればよい．

処理の対象とする問題のパターン$\varphi\in\Phi$が与えられたとき，出現確率分布（認識地図）を次々と書き換えていく過程が，入力パターン$\varphi\in\Phi$の連想形認識の過程，或いは，（すべての座標点$x\in M$についての）理解の過程

$$p\,(\mathfrak{C}_j)(x;t),\ j\in J,\ x\in M,\ t=0,1,2,\cdots \tag{1.3.7}$$

であると，考えよう．第t 段階の認識地図

$$p\,(\,\mathfrak{C}_j\,)(x;\,t\,),\ j\in J,\ x\in M \tag{1.3.8}$$

が書き換えられなかったら，入力パターン$\varphi\in\Phi$ の認識の過程，或いは，理解の過程がこの第t 段階で終了したと，考えよう．

$\arg\max_{i\in J} p\,(\,\mathfrak{C}_i\,)(x;\,t\,)=j\in J$ ($p\,(\,\mathfrak{C}_j\,)(x;\,t\,)$ を最大ならしめるカテゴリ番号の最も若いカテゴリ番号が$j\in J$である) (1.3.9)

を求め，座標点$x\in M$ に第$j\in J$番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の標識を付けよう．その後，第$j\in J$番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ と標識付けられている座標点$x\in M'$ の集合を集めれば，この集合がカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ を表す事物の形状を現していると解釈すればよい．このようにして，視点を座標点$x\in M'$ に持つ認識システムRECOGNITRON(x)の，式（1,4.15）の集合RECOGNITRON(M')が帰納推理による多段階連想の働きに基づいて，入力パターン$\varphi\in\Phi$ をどのように理解しているかが判明する．

1.4　構造受精作用素 $A_\wedge(\mu)$ を使っての，認識地図（出現確率分布）の変換方法

視点を座標点$x\in M'$ に持つ認識システムRECOGNITRON(x)が第t 段階の認識地図（出現確率分布）から，第$t+1$ 段階の認識地図を得る方法を研究するのが本論文の目的である．

第 1 段階の認識地図は，

$$p\,(\,\mathfrak{C}_j\,)(x;\,t\,)|_{t=1}=sm\,(\varphi,\,\omega_j\,)(x\,),\ j\in J,\ x\in M \tag{1.4.1}$$

である．ここに，

$$\forall x\in M,\ \forall\varphi\in\Phi,\ \forall j\in J,\ 0\le sm\,(\varphi,\,\omega_j\,)(x\,)\le 1 \tag{1.4.2}$$

$$\forall x\in M,\ \forall\varphi\in\Phi,\ \sum_{j\in J} sm\,(\varphi,\,\omega_j\,)(x\,)=1 \tag{1.4.3}$$

が成立している．

これでは，第 1 段階で，入力パターン$\varphi\in\Phi$ の連想形認識の過程は終了してしまい，避けられるかも知れない誤認識の事態が多く生じると思われるので，次の多段階にわたる連想形認識の方法を導入しよう．

処理の対象とする問題のパターン$\varphi\in\Phi$ が与えられたとき，

（1）（初期化段階；initialization）$\varphi_t\,|_{t=0}\equiv T\varphi$ (1.4.4)

（2）（帰納推理化段階；recursion）

$$\varphi_{t+1}(x\,)\equiv T\,(A_\wedge(\mu_t\,)\,T\varphi_t\,)(x\,)$$

$$\equiv T[\sum_{j\in\mu_t} SM\,(T\varphi_t,\,\omega_j\,)(y\,)\cdot BSC\,(T\varphi_t,\,j\,)\cdot(T\,\omega_j\,)_\wedge(y\,)](x\,)$$

$$,\ t=0,\,1,\,2,\,\cdots \tag{1.4.5}$$

とパターンモデルφ_t の列

$$\varphi_t,\ t=0,\,1,\,2,\,\cdots \tag{1.4.6}$$

を求めていく．φ_t は，入力パターン$\varphi\in\Phi$ の連想形認識の過程において，第t 段階で想起されたパターンモデルである．登場している列

$$\mu_t,\ t=0,\,1,\,2,\,\cdots \tag{1.4.7}$$

について説明しておこう．多段階連想形認識の過程の第t 段階で，φ_t が帰属するであろう候補カテゴリの番号のリスト$\mu_t\,(\subseteq J\,)$が帰納推理の働きで，選ばれなければならない．通常，減少列に，つまり，

$$\mu_0 \supseteq \mu_1 \supseteq \mu_2 \supseteq \cdots \supseteq \mu_t \supseteq \mu_{t+1} \supseteq \cdots \tag{1.4.8}$$

が成立するように選ばれる.

以下の式（1.4.15）の認識システムRECOGNITRO(M')が処理の対象とする問題のパターン$\varphi \in \Phi$をどのように理解したかを説明しよう.

事前認識地図とは,

$$J=\{1, 2, \cdots, m\} \tag{1.4.9}$$

の場合

$$\exists M'(\subseteq M) \quad \text{such that} \quad |M'|=m, \tag{1.4.10}$$

$$\forall x \in M', p(\mathfrak{C}_j)(x; t)|_{t=-1}=1/m \tag{1.4.11}$$

$$\forall x \in M-M', p(\mathfrak{C}_j)(x; t)|_{t=-1}=0 \tag{1.4.12}$$

のことである．入力パターン$\varphi \in \Phi$の連想形認識の過程において，第t段階で想起されたパターンモデルφ_tの列が式（1.4.6）の如く求められるとすれば，類似性密度関数$sm(\cdot, \omega_j)(x), j \in J, x \in M$を導入して，第$t$段階の事前認識地図は,

$$p(\mathfrak{C}_j)(x; t)=sm(\varphi_t, \omega_j)(x), j \in J, x \in M$$
$$, t=0, 1, 2, \cdots \tag{1.4.13}$$

と設定されてよい.

式（1.4.6）の連想形認識過程は，不動点方程式（平衡方程式）

$$\varphi_{t+1}=\varphi_t \tag{1.4.14}$$

を満たす第t段階で終了・停止する．これ以上，認識段階が進んでも，認識地図は書き換えられないからである．このとき得られた最終段階（第t段階）の認識地図において，同一のカテゴリ番号を持つ画素を連結すると，1つの形状が得られることがある．このようなとき，座標点$x \in M'$を視野の中心（視点）とする認識システムRECOGNITRON(x)の集合（パターン理解システム）

$$\text{RECONITRON}(M) \equiv \{\text{RECOGNITRON}(x) \mid x \in M\} \tag{1.4.15}$$

が，処理の対象とする問題のパターン$\varphi \in \Phi$をどのように理解したかが明らかになる.

1.5　認識情報量$RGetpy(\varphi_t)$

座標点$x \in M$において，認識システムRECOGNITRON(x)がパターンを処理したとき得られる情報量$RGetpy(\varphi_t)(x)$は,

$$RGetpy(\varphi_t)(x)=\sum_{j \in J} sm(\varphi_t, \omega_j)(x) \cdot \log_e[sm(\varphi_t, \omega_j)(x)/p(\mathfrak{C}_j)(x)] \tag{1.5.1}$$

と定義されてよい．全体の認識情報量$RGetpy(\varphi_t)$は，$RGetpy(\varphi_t)(x)$を規格化積分して

$$RGetpy(\varphi_t)=\int_M dm(x) RGetpy(\varphi_t)(x) / \int_M dm(x) \tag{1.5.2}$$

と定義されてよい.

1.6　ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$，モデル構成作用素T，類似度関数SM，大分類関数BSCの諸例

本節では，4 axiom 1～4を前提とするSS理論［B3］.［B4］を適用し，認識システムRECOGNITRON(M)を構成するために必要とされるモデル構成作用素T，類似度関数SM，大分類関数BSCの諸例が指摘される.

1.6.1　可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の1例

一般に，処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ は，可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の或る部分集合である．このような $\mathfrak{H}$ の1例をあげておこう．$\bar{\eta}$ を η の複素共役として，

$M : q$ 次元ユークリッド空間 R^q の可測部分集合　(1.6.1)

$dm(x)$：正値ルベーグ・スティルチェス式測度　(1.6.2)

$$x = < x_1, x_2, \cdots, x_q > \in M \ (\subseteq R^q) \tag{1.6.3}$$

を導入し，その内積 (φ, η)，ノルム $\| \varphi \|$ を

$$(\varphi, \eta) = \int M dm(x) \varphi(x) \cdot \bar{\eta}(x) \tag{1.6.4}$$

$$\| \varphi \| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)} \tag{1.6.5}$$

とする線形空間（ベクトル空間）としての可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ がある．$\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ の特別な場合として，

$M = R^2$（2次元全平面）　(1.6.6)

$$dm(x) = [x_1^2 + x_2^2]^{-1} \cdot dx_1 dx_2 \tag{1.6.7}$$

を選ぶことができる．

1.6.2　付録Aのaxiom 1を満たすモデル構成作用素 T の1例と，計算機シミュレーション諸例

一般に，処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ を可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の或る部分集合とする．

パターンモデル $T\varphi$ を出力する式（A1.8）の写像 T に要求されるのは，次の4性質①～④であることが理論的に明らかにされている［B3］，［B4］：

①（零元不動点性）$\varphi = 0 \in \Phi$ については，$T\varphi = 0$.

②（正定数倍不変性）任意の正実定数 a に対し，

$\forall \varphi \equiv \Phi,\ T(a \cdot \varphi) = T\varphi.$

③（ベキ等性）$\forall \varphi \in \Phi,\ T(T\varphi) = T\varphi.$

④（非零写像性）$\exists \varphi \in \Phi,\ T\varphi \neq 0$　□

上述の4性質①～④を満たすパターン集合 Φ は，零元 $\varphi = 0$ の包含条件 $\varphi = 0 \in \Phi$ の下で，付録Aの集合論的再帰領域方程式（A1.10）で表される．

上述の4性質①～④を満たすという意味でモデル構成作用素（model-construction operator）と呼ばれる式（A1.8）の写像 T についての研究はS.Suzukiの研究以外には存在しない．この写像 T は，入力顔画像 φ から目，鼻，口の各成分を抽出するのに有用であることも判明している［B16］．また，日本語単独母音の認識［B13］や，連想形記憶の働きを備えたニューラルネットの構成［B10］にも使用され，計算機シミュレーション済である．

その他のモデル構成作用素 T については，平均画像を用いた画像2値化をもたらす構成［B16］，界面エネルギーの減少を利用した構成［B17］，画素単位の構成［B18］，「B26」，［B29］などがある．

上述の4性質①～④を満たす式（A1.8）の写像 T の1例を構成しておこう．

先ず，計算規則

$$\varphi(x) / \sup_{y \in M} | \varphi(y) | = 0 \quad if \quad \sup_{y \in M} | \varphi(y) | = 0 \tag{1.6.8}$$

を設ける．任意の $x \in M$ について，

$(T\varphi)(x) =$

$$\begin{cases} 1 \quad if \quad 2/3 < \varphi(x)/\sup_{y\in M}|\varphi(y)| \leq 1 \\ 1/2 \quad if \quad 1/3 < \varphi(x)/\sup_{y\in M}|\varphi(y)| \leq 2/3 \\ 0 \quad if \quad -1/3 \leq \varphi(x)/\sup_{y\in M}|\varphi(y)| \leq 1/3 \\ -1/2 \quad if \quad -2/3 \leq \varphi(x)/\sup_{y\in M}|\varphi(y)| < -1/3 \\ -1 \quad if \quad -1 \leq \varphi(x)/\sup_{y\in M}|\varphi(y)| < -2/3 \end{cases} \tag{1.6.9}$$

上記の，式（A1.8）の写像Tは4性質①～④を満たし，付録AのA2節の定理A2.1に従い，axiom　1を満たす$[\Phi, T]$対を構成できる．

1.6.3　付録Aのaxiom 2を満たす類似度関数SMの１例

第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属することが判明しているパターン$\varphi_{j,t}$の集合$\Phi_j\,(\subset \Phi)$を，２条件

$$\omega_j \in \Phi_j = \{\varphi_{j,t} \mid t = 1, 2, \cdots, n_j\},\ n_j \geq 1 \tag{1.6.10}$$

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J - \{J\},\ \Phi_i \cap \Phi_j = \phi \quad \text{（the empty set）} \tag{1.6.11}$$

が満たされるように選定する．

第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$のカテゴリ番号$j \in J$について，関数

$f_j : R^+ \to R^+$，ここに，は非負実数全体の集合　(1.6.12)

を，２条件

$$\text{（}f_j\text{ 条件１）}\ f_j(0) = 0 \tag{1.6.13}$$

$$\text{（}f_j\text{ 条件１）}\ \forall u \in R^+, f_j(u) \geq 0 \tag{1.6.14}$$

が満たされるように選定する．例えば,

$$(f_j - 1) f_j(u) = a_j \cdot u^k,\ k = 1, 2, \cdots, a_j > 0 \tag{1.6.15}$$

$$(f_j - 2) f_j(u) = 1 - \exp(-a_j \cdot u^k),\ k = 1, 2, \cdots, a_j > 0 \tag{1.6.16}$$

$$(f_j - 3) f_j(u) = \log_e(1 + a_j \cdot u^k),\ k = 1, 2, \cdots, a_j > 0 \tag{1.6.17}$$

$$(f_j - 4) f_j(u) = \tan^{-1}(a_j \cdot u^k),\ k = 1, 2, \cdots, a_j > 0 \tag{1.6.18}$$

$$(f_j - 5) f_j(u) = \sinh(a_j \cdot u^k) = \frac{\exp(a_j \cdot u^k) - \exp(-a_j \cdot u^k)}{2},\ k = 1, 2, \cdots, a_j > 0 \tag{1.6.19}$$

$$(f_j - 6) f_j(u) = \tanh(a_j \cdot u^k) = \frac{\exp(a_j \cdot u^k) - \exp(-a_j \cdot u^k)}{\exp(a_j \cdot u^k) + \exp(-a_j \cdot u^k)},\ k = 1, 2, \cdots, a_j > 0 \tag{1.6.20}$$

$$(f_j - 7) f_j(u) = \cosh(a_j \cdot u^k) - 1 = \frac{\exp(a_j \cdot u^k) + \exp(-a_j \cdot u^k)}{2} - 1,\ k = 1, 2, \cdots, a_j > 0 \tag{1.6.21}$$

などがある．このとき，パターンモデル$T\varphi$とパターンモデル集合

$$T \cdot \Phi_j \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi_j\} \tag{1.6.22}$$

との最小ノルム距離

$$diff(T\varphi, T \cdot \Phi_j) \equiv \min_{\eta \in \Phi_j} \| T\varphi - T\eta \| \tag{1.6.23}$$

を持ち出す．付録Aでの，式（A3.5）の関数SMを，

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} \dfrac{f_k(diff(T\varphi, T\cdot\Phi_j))^{-2}}{\sum_{k\in J} f_k(diff(T\varphi, T\cdot\Phi_k))^{-2}} \cdots \sum_{k\in J} f_k(diff(T\varphi, T\cdot\Phi_k)) > 0 \text{のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \sum_{k\in J} f_k(diff(T\varphi, T\cdot\Phi_k)) = 0 \text{のとき} \end{cases} \tag{1.6.24}$$

と定義する．この，式（A3.5）の関数SM はaxiom 2を満たす．

1.6.4　付録Aのaxiom 3を満たす大分類関数BSC の１例

axiom 2を満たし，然も，付録Aでの，カテゴリ間の相互排除条件式（A4.4）での

$$\forall j\in J, \forall i\in J-\{j\}, BSC(\omega_i, j) = 0 \tag{1.6.25}$$

を満たすように，式（A4.1）の関数BSC を構成する．

１実変数の２値関数

$$psn(u) = 1 \quad if \quad u \geq 0, = 0 \quad if \quad u < 0 \tag{1.6.26}$$

と，実数値の重み$w(j, \ell)$の組

$$w(j, \ell), j\in J, \ell\in L \tag{1.6.27}$$

を導入して，

$$BSC(\varphi, j) = psn(\sum_{\ell\in L} w(j, \ell)\cdot u(T\varphi, \ell) - e_j) \tag{1.6.28}$$

と定義される式（A4.1）の関数BSC を考えよう．ここに，

$$u(\varphi, \ell)\in R \text{（実数全体の集合）} \tag{1.6.29}$$

はパターン$\varphi\in\Phi$ から抽出された第$\ell\in L$ 番目の実数値の特徴量であり，

$$u : \Phi\times L \to R \tag{1.6.30}$$

が導入されている．

このとき，

$$\forall j\in J, f_j(T\omega_j) \geq e_j \tag{1.6.31}$$

であれば，axiom 3を満たし，更に，

$$\forall j\in J, \forall i\in J-\{j\}, f_j(T\omega_i) < e_j \tag{1.6.32}$$

であれば，付録Aでの，カテゴリ間の相互排除条件式（1.6.25）を満たす．

以下，輪郭の強調に有効であると判明している$\varepsilon-$フィルタ（$\varepsilon-$filter）の機能からヒントを得，各カテゴリ$\mathfrak{C}_j$の各代表パターンω_jのモデル$T\omega_j$を$(T\omega_j)_\wedge$へと修正する方法が提案される．この修正に基づいて，連想形認識におけるSS多段階認識の働きを改良するのに役立つ新しい，式（1.7）の構造受精作用素$A_\wedge(\mu)$が研究される．

式（1.1.3）の類似度関数$sm(\cdot,\cdot)$の密度関数$sm(\cdot,\cdot)(x)$を構成し，画素毎にパターンを多段階的に連想の働きで認識し，１枚の画像全体を理解する処理の方法の基礎が研究される．新しい構造受精作用素$A_\wedge(\mu)$が風景画像の理解に関するこれまでの計算機シミュレーション［B26］，［B29］，［B30］において使用された場合，理解性能が改良されることが期待される．

本論文の内容は次の様になっている．

先ず，これまでの構造受精作用素［B3］，［B4］$A(\mu)$と異なる定義が提案され（２章），次に，これまでの構造受精作用素$A(\mu)$が新たな代表パターンモデル$(T\omega_j)_\wedge$を導入し，改良され，その改良版の性質が解明される（3章）．更に，その諸例が構成された類似性密度関数$sm(\cdot,\cdot)(x)$を使って，こ

れまでの構造受精作用素 $A\,(\mu)$ が密度型構造受精作用素 $A_{\wedge}\,(\mu)$ へと改良される(4章)．また，axiom 2_x を満たす密度関数 $sm\,(\varphi,\,\omega_j\,)(x),\,x\in M$ を使って，これまでのaxiom 2［B3]，［B4］を満たす類似度関数 SM を構成する方法が論じられる（5章)．また，これまでの構造受精作用素 $A\,(\mu)$ が類似性密度関数 $sm\,(\varphi,\,\omega_j\,)(x),\,x\in M$ と提案されたaxiom 3_x を満たす大分類密度関数 $bsc\,(\varphi,\,\omega_j\,)(x),\,x\in M$ とを使い改良される（6章)．確率を推定する手法としてのParzen Window法のSS-変形を用い，大分類関数 BSC が合成される（7章)．また，式（4.1.2.）の密度関数 $sm\,(\cdot,\cdot)$ を利用して，積分類似度 $S\,(M_t;\,\varphi,\,\omega_j\,)$ を定義し（8.1節)，正規化への応用（8.2節)，特徴抽出への応用（8.3節)，領域 $M_t\,(\subseteq M\,)$ を固定しての，エントロピー（領域分割への応用)（8.4節)，代表パターン $\omega_j\,(\in\Omega\,)$ を固定しての，エントロピー（視線の変え方への応用）（8.5節）を論じ，大分類関数 $bsc\,(\varphi,\,\omega_j\,)(x),\,x\in M$ の応用（8.6節）についても触れる．最後に，axiom　2を満たす類似度関数 SM が式（4.1.2）の類似性密度関数 $sm\,(\cdot,\cdot)(x)$ に関する 4 章の研究成果を利用し構成される（9章)．

尚，２つの付録A，Bが設けられている．

本付録Aでは，処理の対象となる問題のパターン φ の集合 Φ，モデル構成作用素 T，類似度関数 SM，カテゴリ選択関数 CSF について説明されている．SS理論［B3]，［B4］は公理論的に構成されているが，．その4公理axiom 1～4が説明されている．対【$\Phi,\,T$】の満たされなければならないaxiom 1と，類似度関数 SM の満たされなければならないaxiom 2も説明され，Φ の表示が明らかにされている．更に，大分類関数 BSC の満たされなければならないaxiom 3も説明されている．最後に，カテゴリ選択関数 CSF が満たされなければならないaxiom 4も説明され，CSF の構造が SM，BSC を用いて決定されることが明らかにされている．

本付録Bでは，１種の平滑化の機能を備えたその重みが均一な正実数でこの重みの総和が 1 に等しいような $\varepsilon-$ フィルタの機能が解析されている（章B1.)．定理B1.1の（2)，並びに，定理B1.2の（1）はこれまでよく知られている事実［A1］である．更に，この $\varepsilon-$ フィルタを，その重みが非負実数とは限らなくて，然もこの重みの絶対値の総和が 1 より大きくない形式に一般化し，その出力の性質が調べられている（章B2.)．

2.　これまでの構造受精作用素 $A\,(\mu)$ と異なる定義

本章では，風景画を理解するシステムの構築に適用され，計算機シミュレーション済みの，これまでの構造受精作用素［B3]，［B4］$A\,(\mu)$ が説明され（2.1章)，更に，新たな構造受精作用素 $A'(\mu)$ が考案され（2.2章)，最後に，これまでの構造受精作用素 $A\,(\mu)$ と新たな構造受精作用素 $A'(\mu)$ との違いが指摘される（2.3章)．

2.1　これまでの構造受精作用素 $A\,(\mu)$

構造受精作用素

$$A\,(\mu):\Phi\rightarrow\Phi \tag{2.1.1}$$

の定義は次の通りである：

（ｉ）$\varphi=0\vee\mu=\phi$ のとき

$$A\,(\mu)\,\varphi=0. \tag{2.1.2}$$

（ⅱ）$\varphi\neq0\wedge\mu\neq\phi$ のとき

（ⅱ-1）$\sum_{j \in \mu} BSC(\varphi, j) = 0$ のとき

$$A(\mu)\varphi = \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j) \cdot T\omega_j. \tag{2.1.3}$$

よって，

$$\sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j) = 0 \text{ のとき，} A(\mu)\varphi = 0 \text{ である．} \tag{2.1.4}$$

（ⅱ-2）$\sum_{j \in \mu} BSC(\varphi, j) > 0$ のとき

$$A(\mu)\varphi = \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j) \cdot BSC(\varphi, j) \cdot T\omega_j. \tag{2.1.5}$$

$$= \sum_{j \in \mu \wedge BSC(\varphi, j) = 1} SM(\varphi, \omega_j) \cdot T\omega_j. \tag{2.1.6}$$

よって，

$$\sum_{j \in \mu \wedge BSC(\varphi, j) = 1} SM(\varphi, \omega_j) = 0 \text{ のとき，} A(\mu)\varphi = 0 \text{ である．} \tag{2.1.7}$$

□

2.2　新たな構造受精作用素 $A'(\mu)$

構造受精作用素

$$A'(\mu): \Phi \rightarrow \Phi \tag{2.2.1}$$

の，今1つの定義は次の通りである：

（ⅰ）$\varphi = 0 \vee \mu = \phi$ のとき

$$A'(\mu)\varphi = 0. \tag{2.2.2}$$

（ⅱ）$\varphi \neq 0 \wedge \mu \neq \phi$ のとき

（ⅱ-1）$\sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j) \cdot BSC(\varphi, j) = \sum_{j \in \mu \wedge BSC(\varphi, j) = 1} SM(\varphi, \omega_j) = 0$ のとき

$$A'(\mu)\varphi = \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j) \cdot T\omega_j. \tag{2.2.3}$$

よって，

$$\sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j) = 0 \text{ のとき，} A'(\mu)\varphi = 0 \text{ である．} \tag{2.2.4}$$

（ⅱ-2）$\sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j) \cdot BSC(\varphi, j) = \sum_{j \in \mu \wedge BSC(\varphi, j) = 1} SM(\varphi, \omega_j) > 0$ のとき

$$A'(\mu)\varphi = \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j) \cdot BSC(\varphi, j) \cdot T\omega_j. \tag{2.2.5}$$

$$= \sum_{j \in \mu \wedge BSC(\varphi, j) = 1} SM(\varphi, \omega_j) \cdot T\omega_j. \tag{2.2.6}$$

よって，

$$\sum_{j\in\mu\wedge BSC(\varphi,j)=1} SM(\varphi,\omega_j)=0 \text{ のとき，} A'(\mu)\varphi=0 \text{ である．} \tag{2.2.7}$$

□

2.3　これまでの構造受精作用素 $A(\mu)$ と新たな構造受精作用素 $A'(\mu)$ との違い

式（2.1.3）と式（2.2.3）とは同一であることに注意する．また，式（2.1.5）と式（2.2.5）とは同一であることに注意すると，構造受精作用素を

$$\sum_{j\in\mu} BSC(\varphi,j)=0 \text{ か} >0 \text{ かによる場合分け} \tag{2.3.1}$$

で，２式（2.1.3），（2.1.5）のごとく定義するのが，これまでの構造受精作用素 $A(\mu)$ であり，

$$\sum_{j\in\mu} SM(\varphi,\omega_j)\cdot BSC(\varphi,j)=0 \text{ か} >0 \text{ かによる場合分け} \tag{2.3.2}$$

で，２式（2.2.3），（2.2.5）のごとく定義するのが，新たな構造受精作用素 $A'(\mu)$ である．

次の定理2.1は，２種の構造受精作用素 $A(\mu)$，$A'(\mu)$ が一致する十分条件を明らかにしている．

［定理2.1］（２種の構造受精作用素 $A(\mu)$，$A'(\mu)$ の一致定理）

条件

$$\forall j\in\mu,\ SM(\varphi,\omega_j)\cdot BSC(\varphi,j)>0 \Leftrightarrow BSC(\varphi,j)>0 \tag{2.3.3}$$

が成り立っていれば，２種の構造受精作用素 $A(\mu)$，$A'(\mu)$ は一致する．いいかえれば，

２条件

$$BSC(\varphi,j)=1 \text{ を満たすすべてのカテゴリ番号 } j\in\mu \text{ について，} SM(\varphi,\omega_j)>0 \text{ である} \tag{2.3.4}$$

かつ，

$$SM(\varphi,\omega_j)>0 \text{ を満たすすべてのカテゴリ番号 } j\in\mu \text{ について，} BSC(\varphi,j)=1 \text{ である} \tag{2.3.5}$$

が成り立っていれば，２種の構造受精作用素 $A(\mu)$，$A'(\mu)$ は一致する．

（証明）式（2.1.2）と式（2.2.2）との対応に注意する．また，２式（2.1.3），（2.1.5）と，２式（2.2.3），（2.2.5）との対応から，明らかである．□

3.　これまでの構造受精作用素 $A(\mu)$ の改良１

本章では，２章の2.1において説明されているこれまでの構造受精作用素 $A(\mu)$ からの出力 $A(\mu)\varphi$ を付録Bでの，$\varepsilon-$ フィルタの機能に関する研究成果を鑑み，改良する方法が論じられる．

3.1　新たなパターンモデル $(T\omega_j)_\wedge$ と，改良型構造受精作用素 $A_\wedge(\mu)\varphi$ の定義

これまでの構造受精作用素 $A(\mu)$ を定義している３式（2.1.2），（2.1.3），（2.1.5）において，代表パターン ω_j のモデル $T\omega_j$ の集合

$$T\omega_j,\ j\in J \tag{3.1.1}$$

の代りに，

$$(T\omega_j)_\wedge,\ j\in J \tag{3.1.2}$$

を採用して，パターンφを受け取った構造受精作用素$A(\mu)$からの出力$A(\mu)\varphi$を構成すれば，$A(\mu)\varphi$は改良され，これを

$$A_{\wedge}(\mu)\varphi \tag{3.1.3}$$

と表記する．類似度関数SM，大分類関数BSC内の各代表パターンω_jのモデル$T\omega_j$は対応する$(T\omega_j)_{\wedge}$に置き換えられないことに注意しておく．

構造受精作用素

$$A_{\wedge}(\mu):\Phi \rightarrow \Phi \tag{3.1.4}$$

の定義は次の通りである：

（ⅰ）$\varphi=0 \vee \mu=\phi$のとき

$$A_{\wedge}(\mu)\varphi=0. \tag{3.1.5}$$

（ⅱ）$\varphi \neq 0 \wedge \mu \neq \phi$のとき

（ⅱ-1）$\sum_{j \in \mu} BSC(\varphi, j)=0$のとき

$$A_{\wedge}(\mu)\varphi=\sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j)\cdot(T\omega_j)_{\wedge}. \tag{3.1.6}$$

よって，

$$\sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j)=0 \text{ のとき，} A_{\wedge}(\mu)\varphi=0 \text{ である．} \tag{3.1.7}$$

（ⅱ-2）$\sum_{j \in \mu} BSC(\varphi, j)>0$のとき

$$A_{\wedge}(\mu)\varphi=\sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j)\cdot BSC(\varphi, j)\cdot(T\omega_j)_{\wedge}. \tag{3.1.8}$$

$$=\sum_{j \in \mu \wedge BSC(\varphi, j)=1} SM(\varphi, \omega_j)\cdot(T\omega_j)_{\wedge}. \tag{3.1.9}$$

よって，

$$\sum_{j \in \mu \wedge BSC(\varphi, j)=1} SM(\varphi, \omega_j)=0 \text{ のとき，} A_{\wedge}(\mu)\varphi=0 \text{ である．} \tag{3.1.10}$$

□

第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の典型的な諸性質を反映している代表パターンω_jのモデル$T\omega_j$の代りとなる各$(T\omega_j)_{\wedge}(j \in J)$は次のように定義される：$A_{\wedge}(\mu)\varphi$において，非負数$\varepsilon_j(\geq 0)$の組

$$\varepsilon_j,\ j \in J \tag{3.1.11}$$

を定めておいて，

$$(T\omega_j)_{\wedge}$$

$$\begin{cases} T\omega_j & \text{if} \quad \| T\varphi-T\omega_j \| \leq \varepsilon_j \\ T\varphi & \text{if} \quad \| T\varphi-T\omega_j \| > \varepsilon_j \end{cases} \tag{3.1.12}$$

と定義する．□

ここで，各$(T\omega_j)_{\wedge}$の再表現

$$(T\omega_j)_{\wedge}=T\varphi+(T\omega_j-T\varphi)\cdot psn(\varepsilon_j-\| T\varphi-T\omega_j \|),\ j \in J \tag{3.1.13}$$

が成立することに注意しておく．1 定数uの 2 値関数$psn(u)$は式（B1.12）で定義されている．

また，式（3.1.11）の ε_j の組については，

$$0 \leq \varepsilon_j \leq \max_{i \in J-\{J\}} \| T\omega_i - T\omega_j \| \tag{3.1.14}$$

$$\vee \varepsilon_j = k_j \cdot \min_{i \in J-\{J\}} \| T\omega_i - T\omega_j \| \tag{3.1.15}$$

と与えるのがよい．ここに，k_j を

$$k_j = 1/2,\ 1,\ 3/2,\ 2 \tag{3.1.16}$$

などと選ぶのがよい．

3.2 $\sum_{j \in \mu} BSC(\varphi, j) = 0$ のときの受精パターン $A_\wedge(\mu)\varphi$ の性質

次の定理3.1は，条件式（3.2.1）の下で，パターン φ を受け取った改良型構造受精作用素からの出力 $A_\wedge(\mu)\varphi$ を表現したものである．

［定理3.1］（改良型構造受精作用素からの出力 $A_\wedge(\mu)\varphi$ の表現定理）

$$\sum_{j \in \mu} BSC(\varphi, j) = 0 \tag{3.2.1}$$

が成り立つとき，

$$\forall \varphi \in \Phi,\ A_\wedge(\mu)\varphi$$

$$= \Big[1 - \sum_{j \in J-\mu} SM(\varphi, \omega_j)\Big] \cdot T\varphi + \sum_{j \in \mu_\leq} SM(\varphi, \omega_j) \cdot (T\omega_j - T\varphi) \tag{3.2.2}$$

$$= \Big[1 - \sum_{j \in J-\mu} SM(\varphi, \omega_j) - \sum_{j \in \mu_\leq} SM(\varphi, \omega_j)\Big] \cdot T\varphi + \sum_{j \in \mu_\leq} SM(\varphi, \omega_j) \cdot T\omega_j \tag{3.2.3}$$

ここに，

$$\mu_> \equiv \{ j \in \mu \mid \| T\varphi - T\omega_j \| > \varepsilon_j \} \tag{3.2.4}$$

$$\mu_\leq \equiv \{ j \in \mu \mid \| T\varphi - T\omega_j \| \leq \varepsilon_j \}. \tag{3.2.5}$$

であり，

$$1 - \sum_{j \in J-\mu} SM(\varphi, \omega_j) - \sum_{j \in \mu_\leq} SM(\varphi, \omega_j) = \sum_{j \in \mu_>} SM(\varphi, \omega_j) \tag{3.2.6}$$

が成立している．

（証明）

$$\forall \varphi \in \Phi,\ A_\wedge(\mu)\varphi$$

$$\equiv \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j) \cdot (T\omega_j)_\wedge \tag{3.2.7}$$

$$= \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j) \cdot [T\varphi + (T\omega_j - T\varphi) \cdot psn(\varepsilon_j - \| T\varphi - T\omega_j \|)] \quad \because \ \text{式（3.1.13）}$$

$$= \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j) \cdot T\varphi + \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j) \cdot (T\omega_j - T\varphi) \cdot psn(\varepsilon_j - \| T\varphi - T\omega_j \|)$$

$$= \Big[1 - \sum_{j \in J} SM(\varphi, \omega_j) + \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j)\Big] \cdot T\varphi + \sum_{j \in \mu_\leq} SM(\varphi, \omega_j) \cdot (T\omega_j - T\varphi)$$

$$\because \quad 1=\sum_{j\in J} SM(\varphi, \omega_j)$$

$$=[1-\sum_{j\in J-\mu} SM(\varphi, \omega_j)]\cdot T\varphi+\sum_{j\in \mu_{\leq}} SM(\varphi, \omega_j)\cdot(T\omega_j-T\varphi)$$

$$=[1-\sum_{j\in J-\mu} SM(\varphi, \omega_j)-\sum_{j\in \mu_{\leq}} SM(\varphi, \omega_j)]\cdot T\varphi+\sum_{j\in \mu_{\leq}} SM(\varphi, \omega_j)\cdot T\omega_j$$

を得，証明が終わった．　□

次の定理3.2は，条件式（3.2.1）の下で，パターンφを受け取った改良型構造受精作用素$A_{\wedge}(\mu)$からの出力$A_{\wedge}(\mu)\varphi$が$T\omega_j$になる十分条件が式（3.2.11）であることを明らかにしたものである

［定理3.2］（改良型構造受精作用素からの出力$A_{\wedge}(\mu)\varphi$の表現定理）

式（3.2.1）が成り立つとき，

$$\sum_{j\in J-\mu} SM(\varphi, \omega_j)+\sum_{j\in \mu_{\leq}} SM(\varphi, \omega_j)=1 \tag{3.2.8}$$

であれば，つまり，

$$\sum_{j\in \mu_{>}} SM(\varphi, \omega_j)=0 \tag{3.2.9}$$

であれば，

$$A_{\wedge}(\mu)\varphi$$

$$=\sum_{j\in \mu_{\leq}} SM(\varphi, \omega_j)\cdot T\omega_j \tag{3.2.10}$$

が成り立ち，更に，

$$\exists j\in \mu_{\leq},\ SM(\varphi, \omega_j)=1 \tag{3.2.11}$$

であれば，

$$A_{\wedge}(\mu)\varphi=T\omega_j. \tag{3.2.12}$$

（証明）定理3.1の特別な場合である．　□

次の定理3.3は，パターンφを受け取った改良型構造受精作用素$A_{\wedge}(\mu)$に関し，そのモデル$T\varphi$とその出力$A_{\wedge}(\mu)\varphi$との差，つまり，入出力間の差$T\varphi-A_{\wedge}(\mu)\varphi$を表現し，然も，この差をノルムで評価したものである．

［定理3.3］（改良型構造受精作用素$A_{\wedge}(\mu)$に関する入出力間の差$\varphi-A_{\wedge}(\mu)\varphi$と，その差のノルムの表現定理）

式（3.2.1）が成り立つとき，

$$\forall\varphi\in\Phi,\ T\varphi-A_{\wedge}(\mu)\varphi$$

$$=\sum_{j\in \mu_{\leq}} SM(\varphi, \omega_j)\cdot[T\varphi-T\omega_j]+[1-\sum_{j\in \mu} SM(\varphi, \omega_j)]\cdot T\varphi \tag{3.2.13}$$

$$=-\sum_{j\in \mu_{\leq}} SM(\varphi, \omega_j)\cdot T\omega_j+[1-\sum_{j\in \mu_{>}} SM(\varphi, \omega_j)]\cdot T\varphi \tag{3.2.14}$$

が成立し，よって，

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \|T\varphi-A_{\wedge}(\mu)\varphi\|$$

$$\leq[\max_{j\in \mu_{\leq}}\varepsilon_j]\cdot\sum_{j\in \mu_{\leq}} SM(\varphi, \omega_j)+|1-\sum_{j\in \mu} SM(\varphi, \omega_j)|\cdot\|T\varphi\| \tag{3.2.15}$$

$$\leq \max_{j\in\mu_{\leq}} \varepsilon_j + |\,1-\sum_{j\in\mu} SM\,(\varphi,\omega_j)\,|\cdot\|\,T\varphi\,\| \tag{3.2.16}$$

が成り立つ．また，評価

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \|\,T\varphi - A_{\wedge}(\mu)\varphi\,\|$$

$$\leq \max_{j\in\mu_{\leq}}\|\,T\omega_j\,\|\cdot\sum_{j\in\mu_{\leq}} SM\,(\varphi,\omega_j) + |\,1-\sum_{j\in\mu_{>}} SM\,(\varphi,\omega_j)\,|\cdot\|\,T\varphi\,\| \tag{3.2.17}$$

も成り立つ．

（証明）

$$\forall\varphi\in\Phi,\ T\varphi - A_{\wedge}(\mu)\varphi$$

$$= T\varphi - \sum_{j\in\mu} SM\,(\varphi,\omega_j)\cdot(T\omega_j)_{\wedge} + \sum_{j\in\mu} SM\,(\varphi,\omega_j)\cdot T\varphi - \sum_{j\in\mu} SM\,(\varphi,\omega_j)\cdot T\varphi$$

$$= \sum_{j\in\mu} SM\,(\varphi,\omega_j)\cdot[\,T\varphi-(T\omega_j)_{\wedge}] + [\,1-\sum_{j\in\mu} SM\,(\varphi,\omega_j)]\cdot T\varphi$$

$$= \sum_{j\in\mu_{\leq}} SM\,(\varphi,\omega_j)\cdot[\,T\varphi - T\omega_j\,] + [\,1-\sum_{j\in\mu} SM\,(\varphi,\omega_j)]\cdot T\varphi \quad \because \quad 2\text{式（3.1.12），（3.2.5）}$$

$$= -\sum_{j\in\mu_{\leq}} SM\,(\varphi,\omega_j)\cdot T\omega_j + [\,1-\sum_{j\in\mu} SM\,(\varphi,\omega_j) + \sum_{j\in\mu_{\leq}} SM\,(\varphi,\omega_j)]\cdot T\varphi$$

$$= -\sum_{j\in\mu_{\leq}} SM\,(\varphi,\omega_j)\cdot T\omega_j + [\,1-\sum_{j\in\mu_{>}} SM\,(\varphi,\omega_j)]\cdot T\varphi.$$

を得，2 式（3.2.13），（3.2.14）が成立することが判明した．

ここで，式（3.2.13）のノルムをとれば，

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \|\,T\varphi - A_{\wedge}(\mu)\varphi\,\|$$

$$\leq \sum_{j\in\mu_{\leq}} SM\,(\varphi,\omega_j)\cdot\|\,T\varphi - T\omega_j\,\| + |\,1-\sum_{j\in\mu} SM\,(\varphi,\omega_j)\,|\cdot\|\,T\varphi\,\|$$

$$\leq \sum_{j\in\mu_{\leq}} SM\,(\varphi,\omega_j)\cdot\varepsilon_j + |\,1-\sum_{j\in\mu} SM\,(\varphi,\omega_j)\,|\cdot\|\,T\varphi\,\|$$

$$\leq [\max_{j\in\mu_{\leq}}\varepsilon_j\,]\cdot\sum_{j\in\mu_{\leq}} SM\,(\varphi,\omega_j) + |\,1-\sum_{j\in\mu} SM\,(\varphi,\omega_j)\,|\cdot\|\,T\varphi\,\|$$

$$\leq \max_{j\in\mu_{\leq}}\varepsilon_j + |\,1-\sum_{j\in\mu} SM\,(\varphi,\omega_j)\,|\cdot\|\,T\varphi\,\|. \quad \because \quad \sum_{j\in\mu_{\leq}} SM\,(\varphi,\omega_j)\leq 1.$$

を得，2 式（3.2.15），（3.2.16）が成立することが判明した．

更に，式（3.2.14）のノルムをとれば，

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \|\,T\varphi - A_{\wedge}(\mu)\varphi\,\|$$

$$\leq \sum_{j\in\mu_{\leq}} SM\,(\varphi,\omega_j)\cdot\|\,T\omega_j\,\| + |\,1-\sum_{j\in\mu_{>}} SM\,(\varphi,\omega_j)\,|\cdot\|\,T\varphi\,\|$$

$$\leq \max_{j\in\mu_{\leq}}\|\,T\omega_j\,\|\cdot\sum_{j\in\mu_{\leq}} SM\,(\varphi,\omega_j) + |\,1-\sum_{j\in\mu_{>}} SM\,(\varphi,\omega_j)\,|\cdot\|\,T\varphi\,\|.$$

を得，式（3.2.17）が成立することの証明が終わった．□

3.3 $\sum_{j\in\mu} BSC(\varphi, j) > 0$ のときの受精パターン $A_\wedge(\mu)\varphi$ の性質

先ず，カテゴリ番号リスト

$$\mu_1 \equiv \{j \in \mu\} \quad BSC(\varphi, j) = 1\} \tag{3.3.1}$$

を用意する．本章では，$A_\wedge(\mu)\varphi$ が，

$$A_\wedge(\mu)\varphi$$

$$\equiv \sum_{j\in\mu} SM(\varphi, \omega_j)\cdot BSC(\varphi, j)\cdot(T\omega_j)_\wedge \tag{3.3.2}$$

$$= \sum_{j\in\mu_1} SM(\varphi, \omega_j)\cdot(T\omega_j)_\wedge \tag{3.3.3}$$

の場合を取り扱うのであるから，$A_\wedge(\mu)\varphi$ が式（3.2.7）である場合の章3.2において，カテゴリ番号リスト $\mu\,(\subseteq J)$ の代りに，$\mu_1\,(\subseteq \mu \subseteq J)$ を採用すれば，本節の 3 定理3.4～3.6が得られる．

次の定理3.4は，条件式（3.3.4）の下で，パターン φ を受け取った改良型構造受精作用素 $A_\wedge(\mu)$ からの出力 $A_\wedge(\mu)\varphi$ を表現したものである．

［定理3.4］（改良型構造受精作用素 $A_\wedge(\mu)$ からの出力 $A_\wedge(\mu)\varphi$ の表現定理）

$$\sum_{j\in\mu} BSC(\varphi, j) > 0 \tag{3.3.4}$$

が成り立つとき，

$$\forall\varphi \in \Phi,\ A_\wedge(\mu)\varphi$$

$$= [1 - \sum_{j\in J-\mu_1} SM(\varphi, \omega_j)]\cdot T\varphi + \sum_{j\in\mu_1\cap\mu_\leq} SM(\varphi, \omega_j)\cdot(T\omega_j - T\varphi) \tag{3.3.5}$$

$$= [1 - \sum_{j\in J-\mu_1} SM(\varphi, \omega_j) - \sum_{j\in\mu_1\cap\mu_\leq} SM(\varphi, \omega_j)]\cdot T\varphi + \sum_{j\in\mu_1\cap\mu_\leq} SM(\varphi, \omega_j)\cdot T\omega_j \tag{3.3.6}$$

ここに，

$$1 - \sum_{j\in J-\mu_1} SM(\varphi, \omega_j) - \sum_{j\in\mu_1\cap\mu_\leq} SM(\varphi, \omega_j) = \sum_{j\in\mu_1\cap\mu_>} SM(\varphi, \omega_j) \tag{3.3.7}$$

が成立している．

（証明）式（3.3.3）を，定理3.1において適用したものである．　□

次の定理3.5は，条件式（3.3.4）の下で，パターン φ を受け取った改良型構造受精作用素 $A_\wedge(\mu)$ からの出力 $A_\wedge(\mu)\varphi$ が $T\omega_j$ になる十分条件が式（3.3.11）であることを明らかにしたものである

［定理3.5］（改良型構造受精作用素からの出力 $A_\wedge(\mu)\varphi$ の表現定理）

式（3.3.4）が成り立つとき，

$$\sum_{j\in J-\mu_1} SM(\varphi, \omega_j) + \sum_{j\in\mu_1\cap\mu_\leq} SM(\varphi, \omega_j) = 1 \tag{3.3.8}$$

であれば，つまり，

$$\sum_{j\in\mu_1\cap\mu_>} SM(\varphi, \omega_j) = 0 \tag{3.3.9}$$

であれば，

$$A_\wedge(\mu)\varphi$$

$$= \sum_{j \in \mu_1 \cap \mu_{\leq}} SM(\varphi, \omega_j) \cdot T\omega_j \tag{3.3.10}$$

が成り立ち，更に，

$$\exists j \in \mu_1 \cap \mu_{\leq},\ SM(\varphi, \omega_j) = 1 \tag{3.3.11}$$

であれば，式（3.2.12）が成り立つ．

（証明）定理3.4の特別な場合である． □

次の定理3.5は，パターンφを受け取った改良型構造受精作用素$A_{\wedge}(\mu)$に関し，そのモデル$T\varphi$とその出力$A_{\wedge}(\mu)\varphi$との差，つまり，入出力間の差$T\varphi - A_{\wedge}(\mu)\varphi$を表現し，然も，この差をノルムで評価したものである．

［定理3.5］（改良型構造受精作用素$A_{\wedge}(\mu)$に関する入出力間の差$\varphi - A_{\wedge}(\mu)\varphi$と，その差のノルムの表現定理）

式（3.3.4）が成り立つとき，

$$\forall \varphi \in \Phi,\ T\varphi - A_{\wedge}(\mu)\varphi$$

$$= \sum_{j \in \mu_1 \cap \mu_{\leq}} SM(\varphi, \omega_j) \cdot [T\varphi - T\omega_j] + [1 - \sum_{j \in \mu_1} SM(\varphi, \omega_j)] \cdot T\varphi \tag{3.3.12}$$

$$= - \sum_{j \in \mu_1 \cap \mu_{\leq}} SM(\varphi, \omega_j) \cdot T\omega_j + [1 - \sum_{j \in \mu_1 \cap \mu_{>}} SM(\varphi, \omega_j)] \cdot T\varphi. \tag{3.3.13}$$

が成立し，よって，

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \| T\varphi - A_{\wedge}(\mu)\varphi \|$$

$$\leq [\max_{j \in \mu_1 \cap \mu_{\leq}} \varepsilon_j] \cdot \sum_{j \in \mu_1 \cap \mu_{\leq}} SM(\varphi, \omega_j) + | 1 - \sum_{j \in \mu_1} SM(\varphi, \omega_j) | \cdot \| T\varphi \| \tag{3.3.14}$$

$$\leq \max_{j \in \mu_1 \cap \mu_{\leq}} \varepsilon_j + | 1 - \sum_{j \in \mu_1} SM(\varphi, \omega_j) | \cdot \| T\varphi \| \tag{3.3.15}$$

が成り立つ．また，評価

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \| T\varphi - A_{\wedge}(\mu)\varphi \|$$

$$\leq \max_{j \in \mu_1 \cap \mu_{\leq}} \| T\omega_j \| \cdot \sum_{j \in \mu_1 \cap \mu_{\leq}} SM(\varphi, \omega_j) + | 1 - \sum_{j \in \mu_1 \cap \mu_{>}} SM(\varphi, \omega_j) | \cdot \| T\varphi \|. \tag{3.3.16}$$

も成り立つ．

（証明）式（3.3.3）を，定理3.3において適用したものである． □

4. これまでの構造受精作用素$A(\mu)$の改良２（密度型構造受精作用素１）

本章では，axiom 2を満たす類似度関数SMの代りに，新しくaxiom 2_xを提案し，このaxiom 2_xを満たす類似性密度関数$sm(\cdot,\cdot)(x)$を研究し，想起形認識の働き［B3］，［B4］においてパターンモデルを変換する機能を備えた密度型構造受精作用素$A(\mu)$を密度型構造受精作用素$A_{\wedge}(\mu)$へと新しく定義し直し，その性質を解析する．

4.1 類似性密度関数$sm(\cdot,\cdot)(x)$の構成

本節では，ある場合，式（A3.5）の類似度関数$SM : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leq s \leq 1\}$の密度関数に相当する

$sm(\cdot,\cdot)(x)$ を構成する．

4.1.1　類似度関数の密度関数 $sm(\cdot,\cdot)(x)$

M を，q 次元ユークリッド空間 R^q の可測部分集合とする．条件

$$\forall x \in M'(\subseteq M),\ \forall \varphi \in \Phi,\ \sum_{j \in J} |\, sm(\varphi, \omega_j)(x) \,| \leq 1 \tag{4.1.1}$$

を満たす関数 $sm(\cdot,\cdot)(x)$ の族

$$sm(\cdot,\cdot)(x) : \Phi \times \Omega \to R \quad \text{（実数全体の集合），} x \in M' \tag{4.1.2}$$

を用意できるような，M の部分集合 M' を導入する．

$sm(\varphi, \omega_j)(x) \in R$ は, 座標値 $x \in M'$ においてパターン φ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン ω_j と似ている程度を表し，

$sm(\varphi, \omega_j)(x) \in R$ の値が大きいほど，パターン φ が代表パターン ω_j と似ている　(4.1.3)

と解釈しよう．

以下では，第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン ω_j のモデル $T\omega_j$ の，式（A3.4）の集合 $T \cdot \Omega \equiv \{T\omega_j \mid i \in J\}$ について，

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J-\{j\},\ \exists M'(\neq \phi) \subseteq M,\ \forall x \in M',\ (T\omega_i)(x) \neq (T\omega_j)(x) \tag{4.1.4}$$

を要請しておく．この式（4.1.4）を式（4.1.1）で登場している M' を選定する条件と考えることになる．また，条件式（A3.9）を満たす第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の生起確率 $p(\mathfrak{C}_j)$ を導入しておく．

4.1.2　条件式（4.1.1）を満たす密度関数 $sm(\cdot,\cdot)(x)$ の３構成例

本節では，条件式（4.1.1）を満たす式（4.1.2）の $sm(\cdot,\cdot)(x)$ を3種類，構成しておこう．

$sm(\cdot,\cdot)(x)$ の選び方には，次の3方法①，②，③がある．

4.1.2.1　条件式（4.1.1）を満たす $sm(\cdot,\cdot)(x)$ の構成例 1

①積型，３区分積型，３区分差型

関数 $s_j(\cdot)$ の系

$$s_j(\cdot) : \Phi\ (\equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\}) \to R \quad \text{（実数全体の集合），} j \in J,\ x \in M' \tag{4.1.5}$$

を用意し，

$$sm(\varphi, \omega_j)(x) = \begin{cases} \dfrac{s_j(T\varphi)(x)}{\sum_{k \in J} |\, s_k(T\varphi)(x) \,|} & \text{if} \quad \sum_{k \in J} |\, s_k(T\varphi)(x) \,| > 0 \\[2ex] p(\mathfrak{C}_j) & \text{if} \quad \sum_{k \in J} |\, s_k(T\varphi)(x) \,| = 0 \end{cases} \tag{4.1.6}$$

と設定すると，条件式（4.1.1）の等号が成立していること，つまり，

$$\forall x \in M,\ \forall \varphi \in \Phi,\ \sum_{j \in J} |\, sm(\varphi, \omega_j)(x) \,| = 1 \tag{4.1.7}$$

が満たされ，然も，以下の，4.1.2.3のaxiom 2_x（iii）（T-不変性）を満たしている．

式（4.1.6）の $sm(\varphi, \omega_j)(x)$ 内の式（4.1.5）の $s_j(T\varphi)(x),\ x \in M$ については，①-1，①-2，①-3のごとく，定義できる．

①-1　積型

$$s_j(T\varphi)(x) = (T\varphi)(x) \cdot (\overline{T\omega_j})(x). \tag{4.1.8}$$

ここに，$(\overline{T\omega_j})(x)$ は $(T\omega_j)(x)$ の複素共役である．

①-2　3 区分積型

先ず，不等式

$$0 \le \varepsilon_{j,\le}(x) < \varepsilon_{j,\ge}(x),\ x \in M' \tag{4.1.9}$$

を満たす閾値 $\varepsilon_{j,\le}(x),\ \varepsilon_{j,\ge}(x),\ x \in M$ の組

$$\varepsilon_{j,\le}(x),\ \varepsilon_{j,\ge}(x),\ x \in M',\ j \in J \tag{4.1.10}$$

を決めておく．

パターンモデル $T\varphi,\ T\omega_j\ (j \in J)$ は実数値とする．

$$s_j(T\varphi)(x) =$$

$$\begin{cases} 0 \quad \text{if} \quad |(T\varphi)(x)\cdot(T\omega_j)(x)| \le \varepsilon_{j,\le}(x) \\ \dfrac{(T\varphi)(x)\cdot(T\omega_j)(x)}{\varepsilon_{j,\ge}(x)} \quad \text{if} \quad \varepsilon_{j,\le}(x) < |(T\varphi)(x)\cdot(T\omega_j)(x)| < \varepsilon_{j,\ge}(x) \\ +1 \quad \text{if} \quad (T\varphi)(x)\cdot(T\omega_j)(x) \ge \varepsilon_{j,\ge}(x) \\ -1 \quad \text{if} \quad (T\varphi)(x)\cdot(T\omega_j)(x) \le -\varepsilon_{j,\ge}(x) \end{cases} \tag{4.1.11}$$

と定義される．

①-3　3 区分差型

不等式

$$0 \le \varepsilon_{j,\le}(x) < \varepsilon_{j,\ge}(x),\ x \in M' \tag{4.1.12}$$

を満たす式（4.1.10）の閾値の組を導入する．

$s_j(T\varphi)(x)$ は,

$$s_j(T\varphi)(x) =$$

$$\begin{cases} -\varepsilon_{j,\ge}(x)/\varepsilon_{j,\le}(x) \quad \text{if} \quad |(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)| \ge \varepsilon_{j,\ge}(x) \\ \dfrac{\varepsilon_{j,\ge}(x)}{(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)} \quad \text{if} \quad \varepsilon_{j,\le}(x) < |(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)| < \varepsilon_{j,\ge}(x) \\ \varepsilon_{j,\ge}(x)/\varepsilon_{j,\le}(x) \quad \text{if} \quad |(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)| \le \varepsilon_{j,\le}(x) \end{cases} \tag{4.1.13}$$

と定義される．□

4.1.2.2　条件式（4.1.1）を満たす $sm(\cdot,\cdot)(x)$ の構成例 2

②axiom 2を満たす式（A3.5）の類似度関数 SM の密度関数 $sm'(\varphi,\ \omega_j)(x)$ を利用する方法

axiom 2を満たす類似度関数 SM が,

$$SM(\varphi,\ \omega_j) = \int_M dm(x)\, sm'(\varphi,\ \omega_j)(x) \tag{4.1.14}$$

と密度関数 $sm'(\varphi,\ \omega_j)(x)$ を持つ場合，この $sm'(\varphi,\ \omega_j)(x)$ を

$$sm(\varphi,\ \omega_j)(x) =$$

$$\begin{cases} \dfrac{sm'(\varphi,\omega_j)(x)}{\sum_{k\in J}|sm(\varphi,\omega_k)(x)|} & \text{if} \quad \sum_{k\in J}|sm(\varphi,\omega_k)(x)|>0 \\ p(\mathfrak{C}_j) & \text{if} \quad \sum_{k\in J}|sm(\varphi,\omega_k)(x)|=0 \end{cases}$$

$$, x\in M' \tag{4.1.15}$$

と，規格化して採用する．等式（4.1.7）が成立し，4.1.2.3のaxiom 2_x（iii）（$T-$不変性）を満たしている．

4.1.2.3　条件式（4.1.1）を満たす $sm(\cdot,\cdot)(x)$ の構成例３

③axiom 2_x を満たす非負型

（1#）有限型成分を持つ類似性密度関数 $sm(\cdot,\cdot)(x)$

写像

$$\forall x\in M,\ sm(\cdot,\cdot)(x):\Phi\times\Omega\to R^+ \ \text{（非負実数全体の集合）} \tag{4.1.16}$$

で，以下のaxiom 2_x を満たすものを採用する．

Axiom 2_x．（類似性密度関数 $sm(\cdot,\cdot)(x):\Phi\times\Omega\to R^+$ の満たすべき公理）

不等式（4.1.14）を満たす M の部分集合 M' を選定する．

（ｉ）（直交性；orthogonality）

不等式

$$0\le\varepsilon_{i,j,\le}(x)<\varepsilon_{i,j,\ge}(x),\ x\in M' \tag{4.1.17}$$

を満たす閾値 $\varepsilon_{i,j,\le}(x),\ \varepsilon_{i,j,\ge}(x),\ x\in M'$ の組

$$\varepsilon_{i,j,\le}(x),\ \varepsilon_{i,j,\ge}(x),\ x\in M',\ i,j\in J \tag{4.1.18}$$

を決めておく

$$\forall i,j\in J,\ \forall x\in M'$$

$$\exists c_{i,j}(x)>0,\ \exists d_{i,j}(x) \quad \text{such that} \quad \forall x\in M',\ c_{i,j}(x)\ge|d_{i,j}(x)|, \tag{4.1.19}$$

$$sm(\omega_j,\omega_j)(x)=$$

$$\begin{cases} c_{i,j}(x) & \textit{if} \quad |(T\omega_i)(x)-(T\omega_j)(x)|\le\varepsilon_{i,j,\le}(x) \\ d_{i,j}(x) & \textit{if} \quad |(T\omega_i)(x)-(T\omega_j)(x)|\ge\varepsilon_{i,j,\ge}(x) \end{cases} \tag{4.1.20}$$

（ii）（確率条件；probability condition）$\forall x\in M',\ \forall\varphi\in\Phi,\ \sum_{j\in J}sm(\varphi,\omega_j)(x)=1.$

$$\tag{4.1.21}$$

（iii）（写像 T の下での不変性；invariance under mapping T）

$$\forall x\in M',\ \forall\varphi\in\Phi,\ \forall j\in J,\ sm(T\varphi,\omega_j)(x)=sm(\varphi,\omega_j)(x). \tag{4.1.22}$$

□

先ず，$sm(\varphi,\omega_j)(x)$ を，

$$sm(\varphi,\omega_j)(x)=$$

$$\begin{cases} \dfrac{s_j(T\varphi)(x)}{\sum_{k\in J}|s_k(T\varphi)(x)|} & \text{if} \quad \sum_{k\in J}s_k(T\varphi)(x)>0 \\ p(\mathfrak{C}_j) & \text{if} \quad \sum_{k\in J}s_k(T\varphi)(x)=0 \end{cases} \tag{4.1.23}$$

とおく．明らかに，axiom 2_x の（ⅱ），（ⅲ）を満たす．

先ず，不等式

$$0 \leq \varepsilon_{j,\leq}(x) < \varepsilon_{j,\geq}(x) \leq \min_{i \in J-\{j\}} |(T\omega_i)(x) - (T\omega_j)(x)|,\ x \in M \tag{4.1.24}$$

を満たす閾値 $\varepsilon_{j,\leq}(x), \varepsilon_{j,\geq}(x), x \in M$ の，式（4.1.10）の組を決めておく．

式（A3.4）の代表パターンモデル集合 $T\cdot\Omega$ について要請される条件式（4.1.24）は，すべての座標点 $x \in M'$ についてかなり強いものである．$T\cdot\Omega$ について，すべてのカテゴリ番号 $j \in J$ について，すべての座標点 $x \in M'$ について，条件式(4.1.24)が満たされるように，各 $T\omega_j\ (i \in J)$ について，axiom 1 を満たすモデル構成作用素 $T:\Phi \to \Phi$ と各 $\omega_j \in \Omega\ (j \in J)$ とを，適切に選んでおく必要があることは，かなり厳しい．但し，M' を M の有限な部分集合と限定するとそうではない．

次の定理4.1は，式（4.1.23）のように定義されるが $sm(\varphi, \omega_j)(x)$ が不等式

$$\forall x \in M, \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J,\ 0 \leq s_j(T\varphi)(x) \leq 1 \tag{4.1.25}$$

を満たす有限型成分を持つ形でaxiom 2_x を満たすように，定義される得ることを指摘したものである．

［定理4.1］（axiom 2_x を満たす有限型成分を持つ類似性密度関数 $sm(\cdot,\cdot)(x)$ の構成定理）

式（4.1.16）の密度関数 $sm(\cdot,\cdot)(x)$ が式（4.1.23）のように定義される $sm(\varphi, \omega_j)(x)$ で考えよう．

不等式（4.1.24）が満たされるように，式（4.1.10）の非負関数の系 $\varepsilon_{j,\leq}(x), \varepsilon_{j,\geq}(x), x \in M, j \in J$ を選定しておく．

このとき，式（4.1.23）の $sm(\varphi, \omega_j)(x)$ 内の式（4.1.5）の各 $s_j(T\varphi)(x)$ が

$$\forall x \in M', \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J,\ 0 \leq s_j(T\varphi)(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad |(T\varphi)(x) - (T\omega_j)(x)| \leq \varepsilon_{j,\leq}(x) \\ 0 & \text{if} \quad |(T\varphi)(x) - (T\omega_j)(x)| \geq \varepsilon_{j,\geq}(x) \end{cases} \tag{4.1.26}$$

が満たされるように設定し，然も，

$$\varepsilon_{j,\leq}(x) < |(T\varphi)(x) - (T\omega_j)(x)| < \varepsilon_{j,\geq}(x) \tag{4.1.27}$$

のとき，

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J,\ 0 < s_j(T\varphi)(x) < 1 \tag{4.1.28}$$

と設ければ，式（4.1.26）の密度関数 $sm(\cdot,\cdot)(x)$ はaxiom 2_x を満たす．

尚，座標点 $x \in M'$ において，不等式

$$|(T\omega_i)(x) - (T\omega_j)(x)| \leq \varepsilon_{j,\leq}(x) \tag{4.1.29}$$

を満たすカテゴリ番号 $i \in J$ の集合を $n_j(x)$ とすると，等式

$$\forall x \in M', \forall j \in J,\ sm(\omega_j, \omega_j)(x) = \frac{1}{|n_j(x)|} \tag{4.1.30}$$

が成立し，更に，等式

$$\forall x \in M', \forall j \in J, \forall i \in J - n_j(x),\ sm(\omega_i, \omega_j)(x) = 0 \tag{4.1.31}$$

も成立する．

（証明）明らかに，axiom 2_x の（ⅱ），（ⅲ）を満たす．

axiom 2_x の（ⅰ）を満たすことを示そう．

$\varphi = \omega_j$ とおくと，$|(T\varphi)(x) - (T\omega_j)(x)| = 0 \leq \varepsilon_{j,\leq}(x)$ (4.1.32)

$$\therefore \quad s_j(T\varphi)(x) = 1 \tag{4.1.33}$$

であり，また，

$$\varphi = \omega_i,\ i \in J - n_j(x) \tag{4.1.34}$$

とおくと，

$$|(T\varphi)(x) - (T\omega_i)(x)| \geq \min_{i \in J - \{j\}} |(T\omega_i)(x) - (T\omega_j)(x)| \geq \varepsilon_{j,\geq}(x) \tag{4.1.35}$$

$\because$　式（4.1.24）

$$\therefore \quad s_j(T\varphi)(x) = 0 \tag{4.1.36}$$

であることより，この両性質を式（4.1.23）に代入すれば，axiom 2_x の（ i ）を満たすこと，並びに，2 等式（4.1.30)，(4.1.31）の成立が判明する．　□

式（4.1.23）の $sm(\varphi, \omega_j)(x)$ 内の式（4.1.5）の各 $s_j(T\varphi)(x)$ の設定を具体的に，考えてみよう．

$$\varepsilon_{j,\leq}(x) < |(T\varphi)(x) - (T\omega_j)(x)| < \varepsilon_{j,\geq}(x) \tag{4.1.37}$$

の場合，例えば，

$$s_j(T\varphi)(x) = \frac{\varepsilon_{j,\leq}(x) + \delta_{j,1}(x)}{f_j(|(T\varphi)(x) - (T\omega_j)(x)|) + \delta_{j,2}(x)} \tag{4.1.38}$$

と定義すればよい．ここに，$\delta_{j,1}(x), \delta_{j,2}(x)$ は，不等式

$$\forall j \in J,\ \forall x \in M,\ 0 < \delta_{j,1}(x) \leq \delta_{j,2}(x) \tag{4.1.39}$$

を満たす正値関数である．また，関数

$$f_j : R^+ \to R^+,\ \text{ここに，} R^+ \text{は非負実数全体の集合} \tag{4.1.40}$$

に要求される性質は，

$$f_j(0) = 0 \tag{4.1.41}$$

と，式（4.1.37）が成立するときの

$$|(T\varphi)(x) - (T\omega_j)(x)| \leq f_j(|(T\varphi)(x) - (T\omega_j)(x)|) \tag{4.1.42}$$

である．

今少し，詳細に検討しよう．

式（4.1.37）が成立するとき，式（4.1.42）が成立するような（4.1.40）の関数 $f_j : R^+ \to R^+$ を考えよう．

先ず，2 条件

（各 f_j 条件 1 ）（0－不動点性）$\forall j \in J, f_j(0) = 0.$　(4.1.43)

（各 f_j 条件 2 ）（単調増加性）$0 < f_j(q_1) \leq f_j(q_2) \quad if \quad 0 < q_1 < q_2$　(4.1.44)

を満たすように，決めるとしよう．

式（4.1.37）が成立するとき，式（4.1.42）が成立すれば，式（4.1.37）が成立するとき，式（4.1.42）が成立することに注意する．不等式（4.1.42）が満たされるためには，式（4.1.40）の関数 f_j が，

$$a_j(= \varepsilon_{j,\leq}(x)) < q < b_j(= \varepsilon_{j,\geq}(x)) \Rightarrow q \leq f_j(q) \tag{4.1.45}$$

を満たせば，十分である．更に，式（4.1.45）は，

$$a_j < q < b_j \Rightarrow a_j \leq f_j(a_j) \wedge 1 \leq \frac{df_j(q)}{dq} \tag{4.1.46}$$

と同等である．

最も簡単な f_j の 1 例は，

$$f_j(q) = q \tag{4.1.47}$$

である．

（2#）無限型成分を持つ類似性密度関数$sm(\cdot,\cdot)(x)$

式（4.1.16）の写像$sm(\cdot,\cdot)(x):\Phi\times\Omega\to R^{+}$で，以下のaxiom 2_xを満たすものを採用する．

Axiom $2_x(\infty)$．（類似性密度関数$sm(\cdot,\cdot)(x):\Phi\times\Omega\to R^{+}$の満たすべき公理）

（ｉ）（直交性；orthogonality）

不等式

$$0\le\varepsilon_{i,j}(x),\ x\in M' \tag{4.1.48}$$

を満たす閾値$\varepsilon_{i,j}(x),\ x\in M'$の組

$$\varepsilon_{i,j}(x),\ x\in M',\ i,j\in J \tag{4.1.49}$$

を決めておく．

$$\forall i,j\in J,\ \forall x\in M'$$

$$\exists c_{i,j}(x)>0,\ \exists d_{i,j}(x)\quad \text{such that}\quad \forall x\in M',\ c_{i,j}(x)\ge|d_{i,j}(x)|, \tag{4.1.50}$$

$$sm(\omega_i,\omega_j)(x)=$$

$$\begin{cases}c_{i,j}(x) & if\quad |(T\omega_i)(x)-(T\omega_j)(x)|\le\varepsilon_{i,j}(x)\\ d_{i,j}(x) & if\quad |(T\omega_i)(x)-(T\omega_j)(x)|>\varepsilon_{i,j}(x)\end{cases} \tag{4.1.51}$$

（ii）（確率条件；probability condition）$\forall x\in M',\ \forall\varphi\in\Phi,\ \sum_{j\in J}sm(\varphi,\omega_j)(x)=1$

$$\tag{4.1.52}$$

（iii）（写像Tの下での不変性；invariance under mapping T）

$$\forall x\in M',\ \forall\varphi\in\Phi,\ \forall j\in J,\ sm(T\varphi,\omega_j)(x)=sm(\varphi,\omega_j)(x). \tag{4.1.53}$$

□

先ず，不等式

$$0\le\varepsilon_j(x),\ x\in M' \tag{4.1.54}$$

を満たす閾値$\varepsilon_j(x),\ x\in M'$の組

$$\varepsilon_j(x),\ j\in J \tag{4.1.55}$$

を決めておく．

次の定理4.2は，式（4.1.23）のように定義される$sm(\varphi,\omega_j)(x)$が式（4.1.56）を満たす無限型成分を持つ形でaxiom $2_x(\infty)$を満たすように，定義される得ることを指摘したものである．

［定理4.2］（ axiom $2_x(\infty)$を満たす無限型成分を持つ類似性密度関数$sm(\cdot,\cdot)(x)$の構成定理）

式（4.1.16）の密度関数$sm(\cdot,\cdot)(x)$が式（4.1.23）のように定義される$sm(\varphi,\omega_j)(x)$で考えよう．

不等式（4.1.54）が満たされるように，式（4.1.55）の非負関数の系$\varepsilon_j(x)j\in J$を選定しておく．

このとき，式（4.1.23）の$sm(\varphi,\omega_j)(x)$内の式（4.1.5）の各$s_j(T\varphi)(x)$が

$$\forall x\in M',\ \forall\varphi\in\Phi,\ \forall j\in J\le s_j(T\varphi)(x)$$

$$\begin{cases}=+\infty & \text{if}\quad |(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|\le\varepsilon_j(x) & (4.1.56)\\ <+\infty & \text{if}\quad |(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|>\varepsilon_j(x) & (4.1.57)\end{cases}$$

が満たされるように設定すれば，式（4.1.16）の密度関数$sm(\cdot,\cdot)(x)$はaxiom $2_x(\infty)$を満たす．

尚，不等式

$$|(T\omega_i)(x)-(T\omega_j)(x)|\le\varepsilon_j(x) \tag{4.1.58}$$

を満たすカテゴリ番号$i\in J$の集合を$n_j(x)$とすると，等式（4.1.30）が成立し，更に，等式（4.1.31）も成り立つ．

（証明）明らかに，axiom $2_x(\infty)$ の（ⅱ），（ⅲ）を満たす．

axiom $2_x(\infty)$ の（ⅰ）を満たすことを示そう．

$\varphi=\omega_j$ とおくと，$|(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|=0\leq\varepsilon_j(x)$ （4.1.59）

$$\therefore \quad s_j(T\varphi)(x)=\infty \quad \because \quad \text{式（4.1.56）} \tag{4.1.60}$$

であり，また，

φ を式（4.1.34）の如くおくと，

$$|(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|>\varepsilon_j(x) \tag{4.1.61}$$

$$\therefore \quad 0\leq s_j(T\varphi)(x)<\infty \quad \because \quad \text{式（4.1.57）} \tag{4.1.62}$$

であることより，この両性質を式（4.1.23）に代入することを考え，axiom $2_x(\infty)$ の（ⅰ），並びに，2 等式（4.1.30），（4.1.31）の成立を示そう．

$\varphi=\omega_j$ のとき，

$$sm(\varphi,\omega_j)(x)=\frac{s_j(T\varphi)(x)}{\sum_{i\in n_j(x)} s_i(T\varphi)(x)+\sum_{i\in J-n_j(x)} s_i(T\varphi)(x)} \tag{4.1.63}$$

$$=\frac{1}{\sum_{i\in n_j(x)} s_i(T\varphi)(x)/s_j(T\varphi)(x)+\sum_{i\in J-n_j(x)} s_i(T\varphi)(x)/s_j(T\varphi)(x)} \tag{4.1.64}$$

$$=\frac{1}{\sum_{i\in n_j(x)} 1+\sum_{i\in J-n_j(x)} s_i(T\varphi)(x)/\infty} \tag{4.1.65}$$

$$=\frac{1}{|n_j(x)|} \tag{4.1.66}$$

が得られ，更に，

φ を式（4.1.34）の如くおくと，

$sm(\varphi,\omega_j)(x)=$ 式（4.1.63）

$$=\frac{s_j(T\varphi)(x)}{\sum_{k\in n_j(x)} \infty+\sum_{k\in J-n_j(x)} s_k(T\varphi)(x)} \tag{4.1.67}$$

$$=0 \tag{4.1.68}$$

が得られ，証明が終わった．□

以下に，式（4.1.23）の $sm(\varphi,\omega_j)(x)$ 内の式（4.1.5）の各 $s_j(T\varphi)(x)$ を設定し，定理4.2が適用できる 6 例（2#-1）～（2#6）が示されている．

（2#-1）差型

$$s_j(T\varphi)(x)=$$

$$\begin{cases} +\infty & \text{if} \quad |(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|\leq\varepsilon_j(x) \\ |(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|^{-2} & \text{if} \quad |(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|>\varepsilon_j(x) \end{cases} \tag{4.1.69}$$

（2#-2）強度差型

$$s_j(T\varphi)(x)=$$

$$\begin{cases}+\infty \quad \text{if} \quad |(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|\leq \varepsilon_j(x) \\ \\ |\,|(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|\,|^{-2} \quad \text{if} \quad |(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|>\varepsilon_j(x)\end{cases} \tag{4.1.70}$$

（2#-3）強度比対数型

不等式

$$\forall x\in M, \forall j\in J, \delta_j(x)>0 \tag{4.1.71}$$

を満たす関数の系

$$\delta_j(x), j\in J \tag{4.1.72}$$

を用意する．

$$s_j(T\varphi)(x)=$$

$$\begin{cases}+\infty \quad \text{if} \quad |(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|\leq \varepsilon_j(x) \\ \\ [\log_e\dfrac{\delta_j(x)+|(T\varphi)(x)|^2}{\delta_j(x)+|(T\omega_j(x)|^2}]^{-1} \quad \text{if} \quad |(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|>\varepsilon_j(x)\end{cases} \tag{4.1.73}$$

（2#-4）差対数型

不等式（4.1.71）を満たす閾値$\delta_j(x), j\in J$の，式（4.1.72）の系を用意する．

$$s_j(T\varphi)(x)=$$

$$\begin{cases}+\infty \quad \text{if} \quad |(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|\leq \varepsilon_j(x) \\ \\ [\log_e[1+\delta_j(x)\cdot|(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|^2]]^{-1} \quad \text{if} \quad |(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|>\varepsilon_j(x)\end{cases} \tag{4.1.74}$$

（2#-5）差余弦型

不等式（4.1.71）を満たす閾値$\delta_j(x), j\in J$の，式（4.1.72）の系を用意する．

$$s_j(T\varphi)(x)=$$

$$\begin{cases}+\infty \quad \text{if} \quad |(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|\leq \varepsilon_j(x) \\ \\ [1-\cos(\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\delta_j(x)+|(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|^2}{\delta_j(x)+\max\limits_{k\in J}|(T\varphi)(x)-(T\omega_k(x)|^2})]^{-1} \quad \text{if} \quad |(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|>\varepsilon_j(x)\end{cases} \tag{4.1.75}$$

（2#-6）差指数型

不等式（4.1.71）を満たす閾値$\delta_j(x), j\in J$の，式（4.1.72）の系を用意する．

$$s_j(T\varphi)(x)=$$

$$\begin{cases}+\infty \quad \text{if} \quad |(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|\leq \varepsilon_j(x) \\ \\ [1-\exp[-|(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|^2/\delta_j(x)]]^{-1} \quad \text{if} \quad |(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|>\varepsilon_j(x)\end{cases} \tag{4.1.76}$$

たとえ，$\varepsilon_j(x)=0$ の場合，
$\varphi=\omega_j$ のとき，すべての座標点 $x\in M'$ について $n_j(x)=\{j\}$ であることがすべてのカテゴリ番号 $j\in J$ について成立すること，　(4.1.77)
つまり，
　すべてのカテゴリ番号 $j\in J$ について，すべての座標点 $x\in M'$ について式（4.1.34）の φ に対し，
　不等式（4.1.61）が成立するようなカテゴリ番号 $i\in J$ の集合が $J-\{j\}$ であること　(4.1.78)
は，式（A3.4）の代表パターン集合 $T\cdot\Omega$ に対し，かなり，厳しい条件である．$T\cdot\Omega$ について，条件式（4.1.77），或いは，条件式（4.1.78）が各 $T\omega_j\ (j\in J)$ について，axiom 1を満たす式（A1.8）のモデル構成作用素 $T:\Phi\to\Phi$ と各 $\omega_j\in\Omega\ (j\in J)$ とを適切に選んでおく必要がある．但し，M' を M の有限な部分集合と限定するとそうではない．

4.2　構造受精作用素 $A_\wedge(\mu):\Phi\to\Phi$ の構成

　本節では，パターンモデルを変換する機能を備えた密度型構造受精作用素 $A(\mu)$ を新しく定義する．

4.2.1　代表パターン $\omega_j(x),x\in M$ のモデル $(T\omega_j)(x),x\in M$ の，切り替えモデル $(T\omega_j)_\wedge(x),x\in M$

　先ず，不等式（4.1.54）を満たす非負関数 $\varepsilon_j(x),x\in M$ の，式（4.1.55）の系を用意する．

$$0\le\varepsilon_j(x)\le\max_{i\in J-\{j\}}|(T\omega_i)(x)-(T\omega_j)(x)| \tag{4.2.1}$$

$$\wedge\,\varepsilon_j(x)=k_j\cdot\min_{i\in J-\{j\}}|(T\omega_i)(x)-(T\omega_j)(x)|,\ x\in M \tag{4.2.2}$$

と与えるのがよい．ここに，k_j は式（3.1.16）のように与えるのがよい．
　第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の典型的な諸性質を反映している代表パターン ω_j のモデル $T\omega_j$ の代りとなる各 $(T\omega_j)_\wedge(j\in J),x\in M$ を

$$(T\omega_j)_\wedge(x)=\begin{cases}(T\omega_j)(x) & \text{if}\quad |(T\varphi)-(T\omega_j)(x)|\le\varepsilon_j(x).\\[2ex] (T\varphi)(x) & \text{if}\quad |(T\varphi)-(T\omega_j)(x)|>\varepsilon_j(x).\end{cases} \tag{4.2.3}$$

と定義する．
　上記の $(T\omega_j)_\wedge(x)$ は，

$$(T\omega_j)_\wedge(x)=(T\varphi)(x)+[(T\omega_j)(x)-(T\varphi)(x)]\cdot psn\,(\varepsilon_j(x)-|(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)|),\quad x\in M \tag{4.2.4}$$

と再表現できる．

4.2.2　密度型構造受精作用素 $A_\wedge(\mu):\Phi\to\Phi$ の定義

　本節では，2定理4.1, 4.2の類似性密度関数 $sm(\cdot,\cdot)(x)$ を利用して，パターンモデルを変換する機能を備えた密度型構造受精作用素 $A_\wedge(\mu)$ を構成する．

$$A_\wedge(\mu):\Phi\to\Phi \tag{4.2.5}$$

の定義は次の通りである：
（ⅰ）$\varphi=0\vee\mu=\phi$ のとき

$$A_\wedge(\mu)\varphi=0. \tag{4.2.6}$$

（ⅱ）$\varphi\ne0\wedge\mu\ne\phi$ のとき

（ⅱ-1）$\sum_{j \in \mu} BSC(\varphi, j) = 0$ のとき

$$(A_{\wedge}(\mu)\varphi)(x) = \sum_{j \in \mu} sm(\varphi, \omega_j)(x) \cdot (T\omega_j)_{\wedge}(x),\ x \in M. \tag{4.2.7}$$

（ⅱ-2）$\sum_{j \in \mu} BSC(\varphi, j) > 0$ のとき

$$(A_{\wedge}(\mu)\varphi)(x) = \sum_{j \in \mu} sm(\varphi, \omega_j)(x) \cdot BSC(\varphi, j) \cdot (T\omega_j)_{\wedge}(x),\ x \in M. \tag{4.2.8}$$

$$= \sum_{j \in \mu \wedge BSC(\varphi, j)=1} sm\ (\varphi, \omega_j)(x) \cdot (T\omega_j)_{\wedge}(x). \tag{4.2.9}$$

□

4.3　密度型構造受精作用素 $(A_{\wedge}(\mu)\varphi)(x)$ の性質

本節では，パターンモデルを変換する機能を備えた密度型構造受精作用素 $A_{\wedge}(\mu)$ の性質を解析する．

4.3.1　$\sum_{j \in \mu} BSC(\varphi, j) = 0$ のときの $(A_{\wedge}(\mu)\varphi)(x)$ の性質

次の定理4.3は，条件式（4.3.1）の下で，パターン φ を受け取った改良型構造受精作用素 $A_{\wedge}(\mu)$ からの出力 $A_{\wedge}(\mu)\varphi$ を表現したものである．

［定理4.3］（改良型構造受精作用素 $A_{\wedge}(\mu)$ からの出力 $A_{\wedge}(\mu)\varphi$ の表現定理）

$$\sum_{j \in \mu} BSC(\varphi, j) = 0 \tag{4.3.1}$$

が成り立つとき，

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall x \in M,\ (A_{\wedge}(\mu)\varphi)(x)$$

$$= [1 - \sum_{j \in J-\mu} SM(\varphi, \omega_j)(x)] \cdot (T\varphi)(x)$$

$$+ \sum_{j \in \mu_{\leq}(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x) \cdot [(T\omega_j)(x) - (T\varphi)(x)] \tag{4.3.2}$$

$$= [1 - \sum_{j \in J-\mu} SM(\varphi, \omega_j)(x) - \sum_{j \in \mu_{\leq}(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x)] \cdot (T\varphi)(x)$$

$$+ \sum_{j \in \mu_{\leq}(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x) \cdot (T\omega_j)(x) \tag{4.3.3}$$

ここに，

$$1 - \sum_{j \in J-\mu} SM(\varphi, \omega_j)(x) - \sum_{j \in \mu_{\leq}(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x)$$

$$= \sum_{j \in \mu_{>}(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x) \tag{4.3.4}$$

が成立している．視点 $x \in M'$ に依存している登場している2つのカテゴリ番号リスト $\mu_{\leq}(x)$，$\mu_{>}(x)$ は次のように定義されている：

$$\mu_{\leq}(x) \equiv \{ j \in \mu \mid |(T\varphi)(x) - (T\omega_i)(x)| \leq \varepsilon_j(x) \}. \tag{4.3.5}$$

$$\mu_{>}(x)\equiv\{j\in\mu\mid|(T\varphi)(x)-(T\omega_i)(x)|>\varepsilon_j(x)\}\tag{4.3.6}$$

（証明）

$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall x\in M,\ (A_{\wedge}(\mu)\varphi)(x)$

$$=\sum_{j\in\mu}SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot(T\omega_j)_{\wedge}(x)\tag{4.3.7}$$

$$=\sum_{j\in\mu}SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot[T\varphi(x)+\{(T\omega_j)(x)-(T\varphi)(x)\}\cdot$$

$$psn(\varepsilon_j(x)-|((T\varphi(x)-(T\omega_j)(x)|)]\quad\because\quad\text{式}（4.2.4）$$

$$=\sum_{j\in\mu}SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot(T\varphi)(x)+\sum_{j\in\mu}SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot[(T\omega_j)(x)-(T\varphi)(x)]\cdot$$

$$psn(\varepsilon_j(x)-|(T\varphi)(x)-(T\omega_j(x)|)$$

$$=[1-\sum_{j\in J}SM(\varphi,\omega_j)(x)+\sum_{j\in\mu}SM(\varphi,\omega_j)(x)]\cdot(T\varphi)(x)+$$

$$\sum_{j\in\mu}SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot[(T\omega_j)(x)-(T\varphi)(x)]\cdot psn(\varepsilon_j(x)-|(T\varphi)(x)-(T\omega_j(x)|)$$

$$\because\quad 1=\sum_{j\in J}SM(\varphi,\omega_j)$$

$$=[1-\sum_{j\in J-\mu}SM(\varphi,\omega_j)(x)]\cdot(T\varphi)(x)$$

$$+\sum_{j\in\mu_{\leq}(x)}SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot[(T\omega_j(x)(T\varphi)(x)]$$

$$=[1-\sum_{j\in J-\mu}SM(\varphi,\omega_j)(x)-\sum_{j\in\mu_{\leq}(x)}SM(\varphi,\omega_j)(x)]\cdot(T\varphi)(x)$$

$$+\sum_{j\in\mu_{\leq}(x)}SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot(T\omega_j)(x)$$

を得，証明が終わった．　□

次の定理4.4は，条件式（4.3.1）の下で，パターンφを受け取った改良型構造受精作用素$A_{\wedge}(\mu)$からの出力$A_{\wedge}(\mu)\varphi$が$T\omega_j$になる十分条件が式（4.3.11）であることを明らかにしたものである

［定理4.4］（改良型構造受精作用素$A_{\wedge}(\mu)$からの出力$A_{\wedge}(\mu)\varphi$の表現定理）

式（4.3.1）が成り立つとき，

$$\sum_{j\in J-\mu}SM(\varphi,\omega_j)(x)+\sum_{j\in\mu_{\leq}(x)}SM(\varphi,\omega_j)(x)=1\tag{4.3.8}$$

であれば，つまり，

$$\sum_{j\in\mu_{>}(x)}SM(\varphi,\omega_j)(x)=0\tag{4.3.9}$$

であれば，

$(A_{\wedge}(\mu)\varphi)(x)$

$$=\sum_{j\in\mu_{\leq}(x)}SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot(T\omega_j)(x)\tag{4.3.10}$$

が成り立ち，更に，

$$\exists j \in \mu_{\leq}(x),\ SM(\varphi, \omega_j)(x) = 1 \tag{4.3.11}$$

であれば，

$$(A_{\wedge}(\mu)\varphi)(x) = (T\omega_j)(x) \tag{4.3.12}$$

（証明）定理4.3の特別な場合である． □

次の定理4.5は，パターンφを受け取った改良型構造受精作用素$A_{\wedge}(\mu)$に関し，そのモデル$T\varphi$とその出力$A_{\wedge}(\mu)\varphi$との差，つまり，入出力間の差$T\varphi - A_{\wedge}(\mu)\varphi$を表現し，然も，この差をノルムで評価したものである．

［定理4.5］（改良型構造受精作用素$A_{\wedge}(\mu)$に関する入出力間の差$\varphi - A_{\wedge}(\mu)\varphi$と，その差のノルムの表現定理）

式（4.3.1）が成り立つとき，

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall x \in M,\ (T\varphi)(x) - (A_{\wedge}(\mu)\varphi)(x)$$

$$= \sum_{j \in \mu_{\leq}(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x) \cdot [(T\varphi)(x) - (T\omega_j)(x)]$$

$$+ [1 - \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j)(x)] \cdot (T\varphi)(x) \tag{4.3.13}$$

$$= - \sum_{j \in \mu_{\leq}(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x) \cdot (T\omega_j)(x)$$

$$+ [1 - \sum_{j \in \mu_{>}(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x)] \cdot (T\varphi)(x). \tag{4.3.14}$$

が成立し，よって，

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall x \in M,\ |(T\varphi)(x) - (A_{\wedge}(\mu)\varphi)(x)|$$

$$\leq [\max_{j \in \mu_{\leq}(x)} \varepsilon_j(x)] \cdot \sum_{j \in \mu_{\leq}(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x)$$

$$+ |1 - \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j)(x)| \cdot |(T\varphi)(x)| \tag{4.3.15}$$

$$\leq [\max_{j \in \mu_{\leq}(x)} \varepsilon_j(x) + |1 - \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j)(x)| \cdot |(T\varphi)(x)|. \tag{4.3.16}$$

が成り立つ．また，評価

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall x \in M,\ |(T\varphi)(x) - (A_{\wedge}(\mu)\varphi)(x)|$$

$$\leq \max_{j \in \mu_{\leq}(x)} |(T\omega_j)(x)] \cdot \sum_{j \in \mu_{\leq}(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x)$$

$$+ |1 - \sum_{j \in \mu_{>}(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x)| \cdot |(T\varphi)(x)|. \tag{4.3.17}$$

も成り立つ．

（証明）

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall x \in M,\ (T\varphi)(x) - (A_{\wedge}(\mu)\varphi)(x)$$

$$= (T\varphi)(x) - \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j)(x) \cdot (T\omega_j)_{\wedge}(x)$$

$$+ \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j)(x) \cdot (T\varphi)(x) - \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j)(x) \cdot (T\varphi)(x)$$

$$= \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j)(x) \cdot [(T\varphi)(x) - (T\omega_j)_\wedge(x)] + [1 - \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j)(x)] \cdot (T\varphi)(x)$$

$$= \sum_{j \in \mu_\leq(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x) \cdot [(T\varphi)(x) - (T\omega_j)(x)] + [1 - \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j)(x)] \cdot (T\varphi)(x)$$

$\because$　2 式（4.2.4），（4.3.5）

$$= - \sum_{j \in \mu_\leq(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x) \cdot (T\omega_j)(x)$$

$$+ [1 - \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j)(x) + \sum_{j \in \mu_\leq(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x)] \cdot (T\varphi)(x)$$

$$= - \sum_{j \in \mu_\leq(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x) \cdot (T\omega_j)(x)$$

$$+ [1 - \sum_{j \in \mu_>(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x)] \cdot (T\varphi)(x).$$

を得，2 式（4.3.13），（4.3.14）が成立することが判明した．

ここで，式（4.3.13）のノルムをとれば，

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall x \in M, |(T\varphi)(x) - (A_\wedge(\mu)\varphi)(x)|$$

$$\leq \sum_{j \in \mu_\leq(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x) \cdot |(T\varphi)(x) - (T\omega_j)(x)|$$

$$+ |1 - \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j)(x)| \cdot |(T\varphi)(x)|$$

$$\leq \sum_{j \in \mu_\leq(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x) \cdot \varepsilon_j(x).$$

$$+ |1 - \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j)(x)| \cdot |(T\varphi)(x)|$$

$$\leq [\max_{j \in \mu_\leq(x)} \varepsilon_j(x)] \cdot \sum_{j \in \mu_\leq(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x)$$

$$+ |1 - \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j)(x)| \cdot |(T\varphi)(x)|$$

$$\leq [\max_{j \in \mu_\leq(x)} \varepsilon_j(x) + |1 - \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j)(x)| \cdot |(T\varphi)(x)|.$$

$$\because \quad \sum_{j \in \mu_\leq(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x) \leq 1$$

を得，2 式（4.3.15），（4.3.16）が成立することが判明した．

更に，式（4.3.14）のノルムをとれば，

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall x \in M, |(T\varphi)(x) - (A_\wedge(\mu)\varphi)(x)|$$

$$\leq \sum_{j \in \mu_\leq(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x) \cdot |(T\omega_j)(x)|$$

$$+ |1 - \sum_{j \in \mu_>(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x)| \cdot |(T\varphi)(x)|$$

$$\leq \max_{j \in \mu_\leq(x)} |(T\omega_j)(x)|. \sum_{j \in \mu_\leq(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x)$$

$$+\left|1-\sum_{j\in\mu_>(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)\right|\cdot\left|(T\varphi)(x)\right|.$$

を得，式（4.3.17）が成立することの証明が終わった. □

4.3.2 $\sum_{j\in\mu} BSC(\varphi, j)>0$ のときの $(A_\wedge(\mu)\varphi)(x)$ の性質

先ず，式（3.3.1）のカテゴリ番号リスト μ_1 を用意する．本項では，$(A_\wedge(\mu)\varphi)(x)$ が,

$$(A_\wedge(\mu)\varphi)(x)$$

$$\equiv\sum_{j\in\mu} SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot BSC(\varphi,j)\cdot(T\omega_j)_\wedge(x) \tag{4.3.18}$$

$$=\sum_{j\in\mu_1} SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot(T\omega_j)_\wedge(x) \tag{4.3.19}$$

の場合を取り扱うのであるから，$(A_\wedge(\mu)\varphi)(x)$ が式（4.3.7）である場合の項4.3.1において，カテゴリ番号リスト $\mu(\subseteq J)$ の代りに，式（3.3.1）の $\mu_1(\subseteq\mu\subseteq J)$ を採用すれば，本項の 3 定理4.6～4.8が得られる.

次の定理4.6は，条件式（4.3.20）の下で，パターン φ を受け取った改良型構造受精作用素 $A_\wedge(\mu)$ からの出力 $A_\wedge(\mu)\varphi$ を表現したものである.

［定理4.6］（改良型構造受精作用素 $A_\wedge(\mu)$ からの出力 $A_\wedge(\mu)\varphi$ の表現定理）

$$\sum_{j\in\mu} BSC(\varphi,j)>0 \tag{4.3.20}$$

が成り立つとき,

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall x\in M,\ (A_\wedge(\mu)\varphi)(x)$$

$$=\left[1-\sum_{j\in J-\mu_1} SM(\varphi,\omega_j)(x)\right]\cdot(T\varphi)(x)$$

$$+\sum_{j\in\mu_1\cap\mu_\leq(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot\left[(T\omega_j)(x)-(T\varphi)(x)\right] \tag{4.3.21}$$

$$=\left[1-\sum_{j\in J-\mu_1} SM(\varphi,\omega_j)(x)-\sum_{j\in\mu_1\cap\mu_\leq(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)\right]\cdot(T\varphi)(x)$$

$$+\sum_{j\in\mu_1\cap\mu_\leq(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot(T\omega_j)(x) \tag{4.3.22}$$

ここに,

$$1-\sum_{j\in J-\mu_1} SM(\varphi,\omega_j)(x)-\sum_{j\in\mu_1\cap\mu_\leq(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)$$

$$=\sum_{j\in\mu_1\cap\mu_>(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x) \tag{4.3.23}$$

が成立している.

（証明）式（4.3.19）を定理4.3に適用したものである. □

次の定理4.7は，条件式（4.3.20）の下で，パターン φ を受け取った改良型構造受精作用素からの出力 $A_\wedge(\mu)\varphi$ が $T\omega_j$ になる十分条件が式（4.3.27）であることを明らかにしたものである.

［定理4.7］（改良型構造受精作用素 $A_\wedge(\mu)$ からの出力 $A_\wedge(\mu)\varphi$ の表現定理）

式（4.3.20）が成り立つとき，

$$\sum_{j\in J-\mu_1} SM(\varphi,\omega_j)(x)+\sum_{j\in\mu_1\cap\mu_\leq(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)=1 \qquad (4.3.24)$$

であれば，つまり，

$$\sum_{j\in\mu_1\cap\mu_>(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)=0 \qquad (4.3.25)$$

であれば，

$$(A_\wedge(\mu)\varphi)(x)$$

$$\sum_{j\in\mu_1\cap\mu_\leq(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot(T\omega_j)(x) \qquad (4.3.26)$$

が成り立ち，更に，

$$\exists j\in\mu_1\cap\mu_\leq(x),\ SM(\varphi,\omega_j)(x)=1 \qquad (4.3.27)$$

であれば，（4.3.12）が成り立つ．

（証明）定理4.6の特別な場合である．　□

次の定理4.8は，パターン φ を受け取った改良型構造受精作用素 $A_\wedge(\mu)$ に関し，そのモデル $T\varphi$ とその出力 $A_\wedge(\mu)\varphi$ との差，つまり，入出力間の差 $T\varphi-A_\wedge(\mu)\varphi$ を表現し，然も，この差をノルムで評価したものである．

［定理4.8］（改良型構造受精作用素 $A_\wedge(\mu)$ に関する入出力間の差 $T\varphi-A_\wedge(\mu)\varphi$ と，その差のノルムの表現定理）

式（4.3.20）が成り立つとき，

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall x\in M,\ (T\varphi)(x)-(A_\wedge(\mu)\varphi)(x)$$

$$=\sum_{j\in\mu_1\cap\mu_\leq(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot[(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)]$$

$$+[-\sum_{j\in\mu_1} SM(\varphi,\omega_j)(x)]\cdot(T\varphi)(x) \qquad (4.3.28)$$

$$=-\sum_{j\in\mu_1\cap\mu_\leq(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot(T\omega_j)(x)$$

$$+[1-\sum_{j\in\mu_1\cap\mu_>(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)]\cdot(T\varphi)(x). \qquad (4.3.29)$$

が成立し，よって，

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall x\in M,\ |(T\varphi)(x)-(A_\wedge(\mu)\varphi)(x)|$$

$$\leq[\max_{j\in\mu_1\cap\mu_\leq(x)}\varepsilon_j(x)]\cdot\sum_{j\in\mu_1\cap\mu_\leq(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)$$

$$+|1-\sum_{j\in\mu_1} SM(\varphi,\omega_j)(x)|\cdot|(T\varphi)(x)| \qquad (4.3.30)$$

$$\leq[\max_{j\in\mu_1\cap\mu_\leq(x)}\varepsilon_j(x)+|1-\sum_{j\in\mu_1} SM(\varphi,\omega_j)(x)|\cdot|(T\varphi)(x)|. \qquad (4.3.31)$$

が成り立つ．また，評価

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall x\in M,\ |(T\varphi)(x)-(A_\wedge(\mu)\varphi)(x)|$$

$$\leq[\max_{j\in\mu_1\cap\mu_\leq(x)}(T\omega_j)(x)|\cdot\sum_{j\in\mu_1\cap\mu_\leq(x)}SM(\varphi,\omega_j)(x)$$

$$+|1-\sum_{j\in\mu_1\cap\mu_>(x)}SM(\varphi,\omega_j)(x)|\cdot|(T\varphi)(x)|. \tag{4.3.32}$$

も成り立つ．

（証明）式（4.3.19）を定理4.5に適用したものである． □

5. axiom 2$_x$ を満たす密度関数 $sm(\varphi,\omega_j)(x),\ x\in M$ を使って，axiom 2を満たす類似度関数 SM を構成するには？

SS理論［B1］～［B4］では，付録Aのaxiom 2の３条件，つまり，（ⅰ）正規直交性，（ⅱ）規格化条件（ⅲ）写像 T の下での不変性を満たす式（A3.5）の類似度関数 $SM(\varphi,\omega_j)$ が導入されている．

axiom 2を満たす特別な類似度関数 SM を使って，axiom $2_x(\infty)$ を満たす密度関数 $sm(\varphi,\omega_j)(x),\ x\in M$ を構成できることは，４章の項4.1.2.2の②で示されている．本章では，逆に，axiom $2_x(\infty)$ を満たす密度関数 $sm(\varphi,\omega_j)(x),\ x\in M$ を使って，axiom 2を満たす類似度関数 SM を構成しよう．結果は次の定理5.1で示される．

［定理5.1］（ axiom $2_x(\infty)$ を満たす密度関数 $sm(\varphi,\omega_j)(x),\ x\in M$ を使っての，axiom 2を満たす類似度関数 SM の構成定理）

式（4.1.16）の密度関数 $SM(\cdot,\cdot)(x)$ が式（4.1.23）のように定義される $sm(\varphi,\omega_j)(x)$ で考えよう．

不等式（4.1.48）が満たされるように，式（4.1.49）の非負関数の系 $\varepsilon_{i,j}(x),\ x\in M',\ i,j\in J$ を選定しておく．

このとき，axiom $2_x(\infty)$ での，式（4.1.16）の密度関数 $SM(\cdot,\cdot)(x)$ において，

$$\forall x\in M,\ \forall j\in J,\ |(T\omega_j)(x)-(T\omega_j)(x)|\leq\varepsilon_{j,j}(x) \tag{5.1}$$

$$\forall x\in M,\ \forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},\ |(T\omega_i)(x)-(T\omega_j)(x)|>\varepsilon_{i,j}(x) \tag{5.2}$$

が成り立つとき，

$$\forall j\in J,\ \textstyle\int_M dm(x)\,c_{j,j}(x)=\int_M dm(y) \tag{5.3}$$

$$\forall x\in M,\ \forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},\ \textstyle\int_M dm(x)\,d_{i,j}(x)=0 \tag{5.4}$$

であれば，

$$SM(\varphi,\omega_j)\equiv\textstyle\int_M dm(x)\,SM(\varphi,\omega_j)(x)/\int_M dm(y) \tag{5.5}$$

と定義される，式（A3.5）の関数 SM はaxiom 2を満たす．

実際，式（4.1.23）の $sm(\varphi,\omega_j)(x)$ 内の式（4.1.5）の各 $s_j(T\varphi)(x)$ を用いて得られるaxiom $2_x(\infty)$ を満たす定理4.2での，式（4.1.23）の密度関数 $SM(\cdot,\cdot)(x)$ では，

$$c_{i,j}(x)=\frac{1}{|n_j(x)|}\quad\text{for}\quad i\in n_j(x),\ x\in M \tag{5.6}$$

$$d_{i,j}(x)=0\quad\text{for}\quad i\in J-n_j(x),\ x\in M \tag{5.7}$$

であるから，

$$\forall x\in M,\ \forall j\in J,\ n_j(x)=1 \tag{5.8}$$

であれば，２式（5.3），（5.4）が満たされる．

（証明）axiom 2（ⅱ）（確率性）の成立は，式（4.1.23）の$sm(\varphi, \omega_j)(x)$の形式から明らかである．axiom 2（ⅲ）（T－不変性）の成立は，$T \cdot T = T$（axiom 1［B3］，［B4］の（ⅲ）の後半）から

$$\forall x \in M, \forall j \in J, \forall \varphi \in \Phi, s_j(T \cdot T\varphi) = s_j(T\varphi) \tag{5.9}$$

が成り立ち，式（4.1.23）の$sm(\varphi, \omega_j)(x)$の形式から明らかである．

axiom 2（ⅰ）（正規直交性）の成立を示そう．

$$\forall j \in J, SM(\omega_j, \omega_j) \equiv \int_M dm(x)\, sm(\omega_j, \omega_j)(x) / \int_M dm(y) \tag{5.10}$$

$$= \int_M dm(x) \cdot c_{j,j}(x) / \int_M dm(y) \quad \because \quad 式（4.1.51） \tag{5.11}$$

$$= 1 \quad \because \quad 式（5.3）$$

が得られ，更に，

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, SM(\omega_j, \omega_j) \equiv \int_M dm(x)\, sm(\omega_i, \omega_j)(x) / \int_M dm(y) \tag{5.12}$$

$$= \int_M dm(x) \cdot d_{j,j}(x) / \int_M dm(y) \quad \because \quad 式（4.1.51） \tag{5.13}$$

$$= 0 \quad \because \quad 式（5.3）$$

も得られた．

3式（5.6）～（5.8）の下で，2式（5.3），（5.4）が満たされることは，明らかである．　□

式（A3.4）の代表パターンモデル集合$T \cdot \Omega$について要請される条件式（5.2）は，かなり強いものである．$T \cdot \Omega$について，条件式（5.2）が満たされるように，axiom 1を満たすモデル構成作用素$T : \Phi \to \Phi$と各$\omega_j \in \Omega\ (j \in J)$とを，各$T\omega_j\ (j \in J)$を適切に選んでおく必要がある．

以上，axiom $2_x(\infty)$を満たす密度関数$sm(\varphi, \omega_j)(x), x \in M$を使って，axiom 2を満たす類似度関数$SM$を構成する方法が確保された．

6.　Axiom 3_xと，これまでの構造受精作用素$A(\mu)$の改良3（密度型構造受精作用素2）

本章では，axiom 3を満たす大分類関数BSCの代りに，新しくaxiom 3_xを提案し，このaxiom 3_xを満たす類似性密度関数$bsc(\cdot,\cdot)(x)$を研究し，想起形認識の働き［B3］，［B4］においてパターンモデルを変換する機能を備えた密度型構造受精作用素$A(\mu)$を新しく$A_\wedge(\mu)$の如く定義し，その性質を解析する．

6.1　大分類関数BSCの，密度関数を用いた1構成

本章では，ある1つのカテゴリに帰属するかどうかを決定する2カテゴリ分類器としての，付録Aの式（A4.1）の大分類関数BSCの密度関数関数に相当する$bsc(\cdot,\cdot)(x), x \in M'$は，axiom 3_xを満たすように構成されなければならないことが説明される．

式（A3.5）の類似度関数SMが式（A3.8）でいう“候補カテゴリの鋭利な削減”を持つためには，axiom 2，（ⅰ）の正規直交性を満たす必要があることがA3.で指摘されたが，$SM(\varphi, \omega_j)$の代りに$SM(\varphi, \omega_j) \cdot BSC(\varphi, j)$を用いれば，パターン$\varphi$が帰属するかも知れない候補カテゴリを益々，鋭利に削減できると期待される．

大分類関数（rough classifier, binary-state classifier）と呼ばれる式（A4.1）の2値関数$BSC : \Phi \times J \to \{0, 1\}$を，付録Aのaxiom 3の2性質（ⅰ）カテゴリ抽出能力，（ⅱ）写像Tの下での不変性を満たすものとして導入し，式（A4.2）の解釈を採用しよう．この際，注意すべきは，式（A4.3），つまり，$BSC(\varphi, j) = 0$であっても，パターン$\varphi \in \Phi$の帰属する候補カテゴリの1つは，第$j \in J$番のカ

テゴリ目の$\mathfrak{C}_j$でないとは限らないとしていることである．また，付録Aのaxiom 3の（ｉ）からわかるように，カテゴリ間の相互排除性を表す式（A4.4）を公理として要請していない事実に注意しておこう．この事実を補うのが実は，式（A3.5）の類似度関数SMが満たさなければならないとしている付録Aのaxiom 2の（ｉ）（正規直交性）である．

さて，Mを，q次元ユークリッド空間R^qの可測部分集合とする．Mの部分集合M'を導入する．式（A4.1）の大分類関数BSCの密度関数に相当する関数

$$bsc(\cdot,\cdot)(x):\Phi\times\Omega\to\{0,1\},\ x\in M' \tag{6.1.1}$$

を導入する．関数$bsc(\cdot,\cdot)(x),\ x\in M'$は次のaxiom 3_xを満たさなければならない．

Axiom 3_x（大分類関数$bsc(\cdot,\cdot)(x)$の満たすべき公理）．

（ｉ）（カテゴリ抽出能力；category separability）

$$\forall x\in M',\ \forall j\in J,\ bsc(\omega_j, j)(x)=1. \tag{6.1.2}$$

（ⅱ）（写像Tの下での不変性；invariance under mapping T）

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall x\in M',\ \forall j\in J,\ bsc(T\varphi, j)(x)=bsc(\varphi, j)(x). \tag{6.1.3}$$

□

カテゴリ間の相互排除性

$$\forall x\in M,\ \forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},\ bsc(\omega_i, j)(x)=0 \tag{6.1.4}$$

を公理として要請していない事実に注意しておく．

上記のaxiom 3_xを満たす$bsc(\cdot,\cdot)(x)$の簡単な選定は，axiom 2_xを満たす$sm(\cdot,\cdot)(x)$を使って，

$$bsc(\varphi, j)(x)=psn(sm(\varphi,\omega_j)(x)-e_j(x)),\ j\in J,\ \varphi\in\Phi,\ x\in M' \tag{6.1.5}$$

とおくことである．ここに，

$$\max_{i\in J-\{j\}} sm(\omega_i,\omega_j)(x)<e_j(x)\le sm(\omega_j,\omega_j)(x),\ x\in M',\ j\in J \tag{6.1.6}$$

が満たされるような$e_j(x),\ x\in M'$閾値の組

$$e_j(x),\ x\in M',\ j\in J \tag{6.1.7}$$

を選んでおくと，axiom 3_x，並びに，カテゴリ間の相互排除性が満たされることがわかる．

6.2　構造受精作用素$A_\wedge(\mu)$の構成

２式（4.2.3），（4.2.4）の$(T\omega_j)_\wedge(x)$の定義に注意しておく．

構造受精作用素

$$A_\wedge(\mu):\Phi\to\Phi \tag{6.2.1}$$

の定義は次の通りである：

（ｉ）$\varphi=0\vee\mu=\phi$のとき

$$\forall x\in M',\ (A_\wedge(\mu)\varphi)(x)=0. \tag{6.2.2}$$

（ⅱ）$\varphi\ne 0\wedge\mu\ne\phi$のとき

（ⅱ-1）$\sum_{j\in\mu} bsc(\varphi, j)(x)=0$のとき

$$(A_\wedge(\mu)\varphi)(x)=\sum_{j\in\mu} sm(\varphi,\omega_j)(x)\cdot(T\omega_j)_\wedge(x),\ x\in M'. \tag{6.2.3}$$

（ⅱ-2）$\sum_{j\in\mu} bsc(\varphi, j)(x)>0$のとき

$$(A_\wedge(\mu)\varphi)(x)=\sum_{j\in\mu} sm(\varphi,\omega_j)(x)\cdot bsc(\varphi,j)(x)\cdot(T\omega_j)_\wedge(x) \tag{6.2.4}$$

$$=\sum_{j\in\mu\wedge bsc(\varphi,j)(x)=1} sm(\varphi,\omega_j)(x)\cdot(T\omega_j)_\wedge(x),\ x\in M'. \tag{6.2.5}$$

□

6.3　密度型構造受精作用素 $A_\wedge(\mu)$ の性質

本節では，パターンモデルを変換する機能を備えた前節の密度型構造受精作用素 $A_\wedge(\mu)$ の性質を解析する．

6.3.1　$\sum_{j\in\mu} bsc(\varphi,j)(x)=0$ のときの $(A_\wedge(\mu)\varphi)(x)$ の性質

次の定理6.1は，条件式（G3.1）の下で，パターン φ を受け取った改良型構造受精作用素からの出力 $A_\wedge(\mu)\varphi$ を表現したものである．

［定理6.1］（改良型構造受精作用素 $A_\wedge(\mu)$ らの出力 $A_\wedge(\mu)\varphi$ の表現定理）

$$\sum_{j\in\mu} bsc(\varphi,j)(x)=0 \tag{6.3.1}$$

が成り立つとき，

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall x\in M,\ (A_\wedge(\mu)\varphi)(x)$$

$$=[1-\sum_{j\in J-\mu} SM(\varphi,\omega_j)(x)]\cdot(T\varphi)(x)$$

$$+\sum_{j\in\mu_\leq(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot[(T\omega_j)(x)-(T\varphi)(x)] \tag{6.3.2}$$

$$=[1-\sum_{j\in J-\mu} SM(\varphi,\omega_j)(x)-\sum_{j\in\mu_\leq(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)]\cdot(T\varphi)(x)$$

$$+\sum_{j\in\mu_\leq(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot(T\omega_j)(x) \tag{6.3.3}$$

ここに，

$$1-\sum_{j\in J-\mu} SM(\varphi,\omega_j)(x)-\sum_{j\in\mu_\leq(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)$$

$$=\sum_{j\in\mu_>(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x) \tag{6.3.4}$$

が成立している．2 式（4.3.5)，（4.3.6）の，視点 $x\in M'$ に依存している 2 つのカテゴリ番号リスト $\mu_\leq(x),\mu_>(x)$，が導入されている．

（証明）定理4.3の証明と同様にして，なされる．□

次の定理6.2は，条件式（6.3.1）の下で，パターン φ を受け取った改良型構造受精作用素 $A_\wedge(\mu)$ からの出力 $(A_\wedge(\mu)\varphi)(x)$ が $(T\omega_j)(x)$ になる十分条件が式（6.3.8）であることを明らかにしたものである．

［定理6.2］（改良型構造受精作用素からの出力 $A_\wedge(\mu)\varphi$ の表現定理）

式（6.3.1）が成り立つとき，

$$\sum_{j\in J-\mu} SM(\varphi,\omega_j)(x)+\sum_{j\in\mu_\leq(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)=1 \tag{6.3.5}$$

であれば，つまり，

$$\sum_{j \in \mu_{>}(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x) = 0 \tag{6.3.6}$$

であれば,

$$(A_\wedge(\mu)\varphi)(x)$$

$$= \sum_{j \in \mu_{\le}(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x) \cdot (T\omega_j)(x) \tag{6.3.7}$$

が成り立ち，更に,

$$\exists j \in \mu_{\le}(x),\ SM(\varphi, \omega_j)(x) = 1 \tag{6.3.8}$$

であれば,

$$(A_\wedge(\mu)\varphi)(x) = (T\omega_j)(x) \tag{6.3.9}$$

（証明）定理6.1の特別な場合である. □

次の定理6.3は，パターンφを受け取った改良型構造受精作用素$A_\wedge(\mu)$に関し，そのモデル$T\varphi$とその出力$A_\wedge(\mu)\varphi$との差，つまり，入出力間の差$T\varphi - A_\wedge(\mu)\varphi$を表現し，然も，この差をノルムで評価したものである.

［定理6.3］（改良型構造受精作用素$A_\wedge(\mu)$に関する入出力間の差$\varphi - A_\wedge(\mu)\varphi$と，その差のノルムの表現定理）

式（6.3.1）が成り立つとき,

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall x \in M,\ (T\varphi)(x) - (A_\wedge(\mu)\varphi)(x)$$

$$= \sum_{j \in \mu_{\le}(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x) \cdot [(T\varphi)(x) - (T\omega_j)(x)]$$

$$+ [1 - \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j)(x)] \cdot (T\varphi)(x) \tag{6.3.10}$$

$$= - \sum_{j \in \mu_{\le}(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x) \cdot (T\omega_j)(x)$$

$$+ [1 - \sum_{j \in \mu_{>}(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x)] \cdot (T\varphi)(x). \tag{6.3.11}$$

が成立し，よって,

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall x \in M,\ |(T\varphi)(x) - (A_\wedge(\mu)\varphi)(x)|$$

$$\le [\max_{j \in \mu_{\le}(x)} \varepsilon_j(x)] \cdot \sum_{j \in \mu_{\le}(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x)$$

$$+ |1 - \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j)(x)| \cdot |(T\varphi)(x)| \tag{6.3.12}$$

$$\le \max_{j \in \mu_{\le}(x)} \varepsilon_j(x) + |1 - \sum_{j \in \mu} SM(\varphi, \omega_j)(x)| \cdot |(T\varphi)(x)|. \tag{6.3.13}$$

が成り立つ．また，評価

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall x \in M,\ |(T\varphi)(x) - (A_\wedge(\mu)\varphi)(x)|$$

$$\le \max_{j \in \mu_{\le}(x)} |(T\omega_j)(x)| \cdot \sum_{j \in \mu_{\le}(x)} SM(\varphi, \omega_j)(x)$$

$$+\left|1-\sum_{j\in\mu_{>}(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)\right|\cdot|(T\varphi)(x)|. \tag{6.3.14}$$

も成り立つ．

（証明）定理4.5の証明と，同様にしてなされる．□

6.3.2　$\sum_{j\in\mu} bsc(\varphi,j)(x)>0$ のときの $(A_{\wedge}(\mu)\varphi)(x)$ の性質

先ず，式（3.3.1）の，視点に依存しないカテゴリ番号リスト μ_1 の代りに，視点に依存するカテゴリ番号リスト

$$\mu_1(x)\equiv\{j\in\mu\mid bsc(\varphi,j)(x)=1\} \tag{6.3.15}$$

を用意する．本章では $(A_{\wedge}(\mu)\varphi)(x)$，が，式（6.2.5），つまり，

$$(A_{\wedge}(\mu)\varphi)(x)$$

$$\equiv\sum_{j\in\mu} SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot bsc(\varphi,j)(x)\cdot(T\omega_j)_{\wedge}(x) \tag{6.3.16}$$

$$=\sum_{j\in\mu_1(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot(T\omega_j)_{\wedge}(x) \tag{6.3.17}$$

の場合を取り扱うのであるから，$(A_{\wedge}(\mu)\varphi)(x)$ が式（6.2.3）である場合の項4.3.1.において，カテゴリ番号リスト $\mu(\subseteq J)$ の代りに，式（6.3.15）の $\mu_1(x)(\subseteq\mu\subseteq J)$ を採用すれば，本節の3定理6.4〜6.6が得られる．

次の定理6.4は，条件式（6.3.18）の下で，パターン φ を受け取った改良型構造受精作用素 $A_{\wedge}(\mu)$ からの出力 $A_{\wedge}(\mu)\varphi$ を表現したものである．

［定理6.4］（改良型構造受精作用素 $A_{\wedge}(\mu)$ からの出力 $A_{\wedge}(\mu)\varphi$ の表現定理）

$$\sum_{j\in\mu} bsc(\varphi,j)(x)>0 \tag{6.3.18}$$

が成り立つとき，

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall x\in M,\ (A_{\wedge}(\mu)\varphi)(x)$$

$$=\Big[1-\sum_{j\in J-\mu_1(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)\Big]\cdot(T\varphi)(x)$$

$$+\sum_{j\in\mu_1(x)\cap\mu_{\le}(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot[T\omega_j(x)-(T\varphi)(x)] \tag{6.3.19}$$

$$=\Big[1-\sum_{j\in J-\mu_1(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)\Big]-\sum_{j\in\mu_1(x)\cap\mu_{\le}(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)\Big]\cdot(T\varphi)(x)$$

$$+\sum_{j\in\mu_1(x)\cap\mu_{\le}(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot(T\omega_j)(x) \tag{6.3.20}$$

ここに，

$$1-\sum_{j\in J-\mu_1(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)-\sum_{j\in\mu_1(x)\cap\mu_{\le}(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)$$

$$=\sum_{j\in\mu_1(x)\cap\mu_{>}(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x) \tag{6.3.21}$$

が成立している．2式（4.3.5），（4.3.6）の，視点 $x\in M'$ に依存している2つのカテゴリ番号リスト $\mu_{\le}(x)$，$\mu_{>}(x)$ に注意しておく．

（証明）式（6.3.17）を定理4.3に適用したものである． □

次の定理6.5は，条件式（6.3.18）の下で，パターンφを受け取った改良型構造受精作用素からの出力$(A_\wedge(\mu)\varphi)(x)$が$(T\omega_j)(x)$になる十分条件が式（6.3.25）であることを明らかにしたものである

［定理6.5］（改良型構造受精作用素$A_\wedge(\mu)$からの出力$A_\wedge(\mu)\varphi$の表現定理）

式（6.3.18）が成り立つとき，

$$\sum_{j\in J-\mu_1(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)+\sum_{j\in\mu_1(x)\cap\mu_\leq(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)=1 \tag{6.3.22}$$

であれば，

$$\sum_{j\in\mu_1(x)\cap\mu_>(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)=0 \tag{6.3.23}$$

であれば，

$$\begin{aligned}&(A_\wedge(\mu)\varphi)(x)\\&=\sum_{j\in\mu_1(x)\cap\mu\leq(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot(T\omega_j)(x)\end{aligned} \tag{6.3.24}$$

が成り立ち，更に，

$$\exists j\in\mu_1(x)\cap\mu_\leq(x),\ SM(\varphi,\omega_j)(x)=1 \tag{6.3.25}$$

であれば，式（6.3.9）が成り立つ．

（証明）定理4.4の特別な場合である． □

次の定理6.6は，パターンφを受け取った改良型構造受精作用素$A_\wedge(\mu)$に関し，そのモデル$T\varphi$とその出力$A_\wedge(\mu)\varphi$との差，つまり，入出力間の差$T\varphi-A_\wedge(\mu)\varphi$を表現し，然も，この差をノルムで評価したものである．

［定理6.6］改良型構造受精作用素$A_\wedge(\mu)$に関する入出力間の差$\varphi-A_\wedge(\mu)\varphi$と，その差のノルムの表現定理）

式（6.3.18）が成り立つとき，

$$\begin{aligned}&\forall\varphi\in\Phi,\ \forall x\in M,\ (T\varphi)(x)-(A_\wedge(\mu)\varphi)(x)\\&=\sum_{j\in\mu_1(x)\cap\mu_\leq(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot[(T\varphi)(x)-(T\omega_j)(x)]\\&+[1-\sum_{j\in\mu_1(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)]\cdot(T\varphi)(x)\end{aligned} \tag{6.3.26}$$

$$\begin{aligned}&=-\sum_{j\in\mu_1(x)\cap\mu_\leq(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)\cdot(T\omega_j)(x)\\&+[1-\sum_{j\in\mu_1(x)\cap\mu_>(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)]\cdot(T\varphi)(x).\end{aligned} \tag{6.3.27}$$

が成立し，よって，

$$\begin{aligned}&\forall\varphi\in\Phi,\ \forall x\in M,\ |(T\varphi)(x)-(A_\wedge(\mu)\varphi)(x)|\\&\leq[\max_{j\in\mu_1(x)\cap\mu_\leq(x)}\varepsilon_j(x)]\cdot\sum_{j\in\mu_1(x)\cap\mu_\leq(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)\end{aligned} \tag{6.3.28}$$

$$+|1-\sum_{j\in\mu_1(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)|\cdot|(T\varphi)(x)| \tag{6.3.29}$$

$$\leq\max_{j\in\mu_1(x)\cap\mu_\leq(x)}\varepsilon_j(x)+|1-\sum_{j\in\mu_1(x)} SM(\varphi,\omega_j)(x)|\cdot|(T\varphi)(x)|.$$

が成り立つ．また，評価

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall x\in M,\ |(T\varphi)(x)-(A_{\wedge}(\mu)\varphi)(x)|$$

$$\leq \max_{j\in\mu_1(x)\cap\mu_{\leq}(x)}|(T\omega_j)(x)|\cdot\sum_{j\in\mu_1(x)\cap\mu_{\leq}(x)}SM(\varphi,\omega_j)(x)$$

$$+\,|1-\sum_{j\in\mu_1(x)\cap\mu_{>}(x)}SM(\varphi,\omega_j)(x)|\cdot|(T\varphi)(x)|. \tag{6.3.30}$$

も成り立つ．

（証明）式（6.3.17）を定理4.5に適用したものである．　□

7. 大分類関数BSCの，確率を推定する手法としての Parzen Window法のSS-変形を用いた 1 構成

確率を推定する手法として，Parzen Window法がある．本章では，Parzen Window法のSS-変形［B28］を用い，付録Aのaxiom 3を満たす式（A4.1）の大分類関数BSCが構成される．

7.1 大分類関数BSCの構造の設定

式（A4.1）の大分類関数BSCを

$$BSC(\varphi,j)=\frac{1+sign\,(d_j^+\cdot f_j^+(T\varphi)+d_j^-\cdot f_j^-(T\varphi))}{2} \tag{7.1}$$

と設定してみよう．ここに，符号関数$sign(u)$については，

$$sign(u)=+1\quad if\quad u\geq 0,=-1\quad if\quad u<0 \tag{7.2}$$

と定義されており，2 つの実数値重みd_j^+，d_j^-は

$$d_j^+>0,\ d_j^-<0 \tag{7.3}$$

であるように決定される必要があるとしている．また，$f_j^+(T\varphi)$，$f_j^-(T\varphi)$には次のような意味を付与する：

$f_j^+(T\varphi)$：パターン$\varphi\in\Phi$のモデル$T\varphi\in T\cdot\Phi$が出現したときの，第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の出現したときの確率（出現確率）　(7.4)

$f_j^-(T\varphi)$：パターン$\varphi\in\Phi$のモデル$T\varphi\in T\cdot\Phi$が出現したときの，第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$以外の任意のカテゴリ$\mathfrak{C}_i\ (i\in J-\{j\})$の出現したときの確率（出現確率）　(7.5)

□

式（A4.1）の 2 値関数$BSC:\Phi\times J\to\{0,1\}$が大分類関数（rough classifier, binary-state classifier）と呼ばれるためには，付録Aのaxiom 3の 2 性質（ⅰ）カテゴリ抽出能力，（ⅱ）写像Tの下での不変性を満たさなければならない．式（7.1）の関数BSCについて，Axiom 3の（ⅱ）写像Tの下での不変性はaxiom 1の（ⅲ）の後半$T\cdot T=T$より，明らかに成り立つ．

$$BSC(\omega_j,j)=\frac{1+sign\,(d_j^+\cdot f_j^+(T\omega_j)+d_j^-\cdot f_j^-(T\omega_j))}{2}=1 \tag{7.6}$$

$$\Leftrightarrow d_j^+\cdot f_j^+(T\omega_j)+d_j^-\cdot f_j^-(T\omega_j)\geq 0 \tag{7.7}$$

であるから，任意のカテゴリ番号$j\in J$について，不等式（7.7）が成立していれば，（ⅰ）カテゴリ

抽出能力が満足される．また，

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J-\{j\},\ BSC\,(\omega_i, j)=\frac{1+sign\,(d_j^+ \cdot f_j^+\,(T\omega_i)+d_j^- \cdot f_j^-\,(T\omega_i))}{2}=0 \tag{7.8}$$

$$\Leftrightarrow \forall j \in J, \forall i \in J-\{j\},\ d_j^+ \cdot f_j^+\,(T\omega_j)+d_j^- \cdot f_j^-\,(T\omega_j)<0 \tag{7.9}$$

であるから，任意のカテゴリ番号 $j \in J$ について，不等式（7.9）が成立していれば，式（A4.4）のカテゴリ間の相互排除性が満足される．

$f_j^+\,(T\varphi)$，$f_j^-\,(T\varphi)$ を選び方法が7.2, 7.3の両節で提案される．

7.2　axiom 3を満たす，式（A3.5）の類似度関数の SM の使用による $f_j^+\,(T\varphi)$ の設定

axiom 2を満たす式（A3.5）の類似度関数 SM を使い，２式（7.4），（7.5）の $f_j^+\,(T\varphi)$，$f_j^-\,(T\varphi)$ を，

$$f_j^+\,(T\varphi)=SM\,(T\varphi, \omega_j)\,(=SM\,(\varphi, \omega_j) \quad \because \text{axiom 3, (iii)}) \tag{7.10}$$

$$f_j^-\,(T\varphi)=\sum_{k \in J-\{j\}} SM\,(\varphi, \omega_k)=1-SM\,(\varphi, \omega_j)\,(\quad \because \text{axiom 3, (ii)}) \tag{7.11}$$

とおくと，式（7.1）の関数 BSC 内の成分 $d_j^+ \cdot f_j^+\,(T\varphi)+d_j^- \cdot f_j^-\,(T\varphi)$ については，

$$\begin{aligned} & d_j^+ \cdot f_j^+\,(T\varphi)+d_j^- \cdot f_j^-\,(T\varphi) \\ & =d_j^+ \cdot SM\,(\varphi, \omega_j)+d_j^- \cdot [1-SM\,(\varphi, \omega_j)] \\ & =d_j^- \cdot SM\,(\varphi, \omega_j) \cdot [d_j^+ - d_j^-] \end{aligned} \tag{7.12}$$

であり，

$$d_j^+ = d>0,\ d_j^- = -d<0 \tag{7.13}$$

と選ぶと，

$$d_j^+ \cdot f_j^+\,(T\varphi)+d_j^- \cdot f_j^-\,(T\varphi)=2d \cdot SM\,(\varphi, \omega_j)-d=$$

$$\begin{cases} -d & if \quad SM\,(\varphi, \omega_j)=0 \\ +d & if \quad SM\,(\varphi, \omega_j)=1 \end{cases} \tag{7.14}$$

が成立し，

$$\forall j \in,\ SM\,(\omega_j, \omega_j)=1 \wedge [\forall i \in J-\{j\},\ SM\,(\omega_i, \omega_j)=0]$$

$$\because \quad \text{axiom 2の（i）（正規直交性）} \tag{7.15}$$

であるから，式（7.1）の関数 BSC について，axiom 1の（ i ）カテゴリ抽出能力と式（A4.4）のカテゴリ間の相互排除性が成立している．２不等式（7.7），（7.9）が成立しているからである．

通常は，

$$d_j^+ = +1,\ d_j^- = -1 \tag{7.16}$$

とおけばよい．

7.3 Parzen Window法のSS-変形の使用による $f_j^+\,(T\varphi)$ の設定

類似度関数 SM を式（7.4）の $f_j^+\,(T\varphi)$ の代用として採用する前節とは異なり，２式（7.4），（7.5）の $f_j^+\,(T\varphi)$，$f_j^-\,(T\varphi)$ を直接，推定してみよう．

２つのパターン間の規格化内積（normalized inner product）$nip\,(\varphi, \eta)$ は，

$$nip\,(\varphi, \eta)=$$

$$\begin{cases} 0 \cdots \|\varphi\| \cdot \|\eta\| = 0 \text{のとき} \\ \dfrac{(\varphi, \eta)}{\|\varphi\| \cdot \|\eta\|} \cdots \|\varphi\| \cdot \|\eta\| > 0 \text{のとき} \end{cases} \tag{7.17}$$

と定義される．更に，関数$f(x)$を

$$f(x) \begin{cases} 1 \cdots 0 \le x \le a \text{のとき} \\ \dfrac{b-x}{b-a} \cdots a < x < b \text{のとき} \\ 0 \cdots b \le x \text{のとき} \end{cases} \tag{7.18}$$

と定義する．

確率を推定する手法として，Parzen Window法があるが，この推定法での核関数（kernel function）

$$F : \Phi \times \Phi \to \{s \mid 0 \le s \le 1\} \tag{7.19}$$

を次のように定める．2パターン変数φ，$\eta \in \Phi$ の実数値関数$F(\varphi, \eta)$を

$$F(\varphi, \eta) = f(1 - |\,nip\,(\varphi, \eta)|^2) \tag{7.20}$$

と定義する．その後，各代表パターンの包含性質

$$\forall j \in J, \exists t \in \{1, 2, \cdots, n_j\}, \varphi_{j,t} = \omega_j \tag{7.21}$$

を備えているパターン系列

$$\varphi_{j,t}, t = 1, 2, \cdots, n_j, j \in J \tag{7.22}$$

を用意する．ここに，$\varphi_{j,t}$ は第$j \in J$番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属する第t $(\in \{1, 2, \cdots, n_j\})$ 番目のサンプルパターンである．

式(7.4)の$f_j^+(T\varphi)$を推定して，$f_j^+(T\varphi)$を文献[B28]の節6.2の式(6.40)（Parzen Window法のSS-変形）の形で与えて，

$$f_j^+(T\varphi) = \frac{n_j \cdot \max\limits_{t=1 \sim n_j} F(T\varphi, T\varphi_{j,t})}{\sum\limits_{i \in J} n_i \cdot \max\limits_{t=1 \sim n_i} F(T\varphi, T\varphi_{i,t})} \tag{7.23}$$

とおく．その後，式（7.5）の$f_j^-(T\varphi)$を

$$f_j^-(T\varphi) = 1 - f_j^+(T\varphi) \tag{7.24}$$

と，定義する．

このとき，式（7.1）の関数BSC 内の成分$d_j^+ \cdot f_j^+(T\varphi) + d_j^- \cdot f_j^-(T\varphi)$については，

$$\begin{aligned} & d_j^+ \cdot f_j^+(T\varphi) + d_j^- \cdot f_j^-(T\varphi) \\ & = d_j^- + f_j^+(T\varphi) \cdot [d_j^+ - d_j^-] \end{aligned} \tag{7.25}$$

を得，式（7.13）の，d_j^+，d_j^- の設定を採用すれば，

$$\begin{aligned} & d_j^+ \cdot f_j^+(T\varphi) + d_j^- \cdot f_j^-(T\varphi) \\ & = 2d \cdot f_j^+(T\varphi) - d \end{aligned} \tag{7.26}$$

であるから，2不等式

$$\forall j \in J, f_j^+(T\omega_j) \ge 1/2 \tag{7.27}$$

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J - \{j\}, f_i^+(T\omega_j) < 1/2 \tag{7.28}$$

が共に成立していれば，式(7.1)の関数BSC について，axiom 1の（ⅰ）カテゴリ抽出能力と式(A4.4)

のカテゴリ間の相互排除性が成立している．2 不等式（7.7），（7.9）が成立しているからである．

8. 類似度密度関数 $sm(\cdot,\cdot)(x)$ と，大分類関数 $bsc(\varphi,\omega_j)(x)$，$x\in M$ の応用

処理の対象とする問題のパターン $\varphi=\varphi(x)\in\Phi$ が，今注目している座標点（視点）$x\in M$ において，式（A3.1）のカテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J)\equiv\{\mathfrak{C}_j\mid j\in J\}$ と 1 対 1 に対応している代表パターン ω_j の，式（A3.2）の集合 $\Omega=\{\omega_j\mid j\in J\}$ 内の，任意の 1 つの代表パターン $\omega_j(x)$ とどの程度似ているか，相違しているかを計量できる類似性密度関数 $sm(\varphi,\omega_j)(x)$ が 4 章の節4.1で構成されている．本章では，式（4.1.2.）の密度関数 $sm(\cdot,\cdot)(x)$ を利用して，積分類似度 $S(M_t;\varphi,\omega_j)$ を定義し（8.1節），その後，正規化への応用（8.2節）として，パターン変換 A_t の族 A_t, $t=0,1,2,\cdots$ を用いた正規化（パターン変換の決定），座標変換 $\mathcal{Q}_t$ の族 $\mathcal{Q}_t=0,1,2,\cdots$ を用いた正規化（座標変換の決定）などを論じる．更に，特徴抽出への応用（8.3節），領域 $M_t(\subseteq M)$ を固定しての，エントロピー（領域分割への応用）（8.4節），代表パターン $\omega_j(\in\Omega)$ を固定しての，エントロピー（視線の変え方への応用）（8.5節），大分類関数 $bsc(\varphi,\omega_j)(x)$，$x\in M$ の応用（8.6節）などが研究される．

8.1 積分類似度 $SI(M_t;\varphi,\omega_j)$ の定義

1 つの領域 $M_t(\subseteq M')$ を注目し，そこで積分（された）類似度

$$SI(M_t;\varphi,\omega_j)\equiv\int_{M_t}dm(x)\,sm(\varphi,\omega_j)(x) \tag{8.1.1}$$

を考えよう．

この $SI(M_t;\varphi,\omega_i)$ の組

$$SI(M_t;\varphi,\omega_i),\ i\in J \tag{8.1.2}$$

内の，最も小さいカテゴリ番号をもつ最大値が

$$SI(M_t;\varphi,\omega_j) \tag{8.1.3}$$

であるならば，つまり，

$$\arg\max_{i\in J} SI(M_t;\varphi,\omega_i)=j\in J \tag{8.1.4}$$

ならば，

パターン $\varphi\in\Phi$ について，領域 $M_t(\subseteq M')$ 内に，第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の形状が存在する可能性がある　(8.1.5)

といえる．

8.2 正規化への応用

8.2.1 パターン正規化とは？

パターンを以前の状態に戻したり，見やすいとか，聞きやすいとかとかの感性的に受容しやすい構造に，処理の対象とする問題のパターン $\varphi\in\Phi$ を変換する操作をパターン正規化，或いは，パターン整形化という．

8.2.2 パターン変換 A_t の族 A_t, $t=0,1,2,\cdots$ を用いた正規化（パターン変換の決定）

パターン変換 A_t の族

$$A_t,\ t=0,1,2,\cdots \tag{8.2.1}$$

を用いた正規化の働きを説明しよう．

$$\forall x \in M'(\subseteq M),\ sm\,(A_t\varphi,\ \omega_j)(x) \leq\ sm\,(A_{t+1}\varphi,\ \omega_j)(x) \tag{8.2.2}$$

$$\wedge [\forall i \in J-\{j\},\ sm\,(A_t\varphi,\ \omega_i)(x) \geq sm\,(A_{t+1}\varphi,\ \omega_i)(x)] \tag{8.2.3}$$

を満たすように，座標変換 $\mathcal{Q}_t$ の系列

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \cdots: \Phi \to \Phi \tag{8.2.4}$$

を考えればよい．

もし，パターン $\varphi \in \Phi$ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属していれば，$(A_t\varphi)(x)$，$x \in M$ に比し，$(A_{t+1}\varphi)(x)$，$x \in M'$ は，第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン ω_j により強く似ているといえよう．$(A_{t+1}\varphi)(x)$，$x \in M'$ はその形状が崩れているであろうパターン $\varphi(x)$，$x \in M$ に関し，$(A_t\varphi)(x)$，$x \in M'$ を整形化したものになっているといえよう．

8.2.3　３座標変換 $\mathcal{Q}_t$ の族 $\mathcal{Q}_t,\ t = 0, 1, 2, \cdots$ を用いた正規化（座標変換の決定）

$$\forall x \in M'(\subseteq M),\ sm\,(\varphi,\ \omega_j)(\mathcal{Q}_t x) \leq sm\,(\varphi,\ \omega_j)(\mathcal{Q}_{t+1}x) \tag{8.2.5}$$

$$\wedge [\forall i \in J-\{j\},\ sm\,(\varphi,\ \omega_i)(\mathcal{Q}_t x) \geq sm\,(\varphi,\ \omega_i)(\mathcal{Q}_{t+1}x)] \tag{8.2.6}$$

を満たすように，座標変換 $\mathcal{Q}_t$ の系列

$$\mathcal{Q}_{0,}\ \mathcal{Q}_{1,}\ \mathcal{Q}_{2,}\cdots: M \to M \tag{8.2.7}$$

を考えればよい．

もし，パターン $\varphi \in \Phi$ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属していれば，$\varphi(\mathcal{Q}_t x)$，$x \in M'$ に比し，$\varphi(\mathcal{Q}_{t+1}x)$，$x \in M'$ は，第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン ω_j により強く似ているといえよう．$\varphi(\mathcal{Q}_{t+1}x)$，$x \in M'$ は座標変換さているであろうパターン $\varphi(x)$，$x \in M'$ に関し，$\varphi(\mathcal{Q}_t x)$，$x \in M'$ を座標変換前の状態に戻したものになっているといえよう．

8.3　特徴抽出への応用

座標値領域 M' を，各部分領域

$$M_t\,(\subseteq M'),\ t \in K \equiv \{1, 2, \cdots, n\} \tag{8.3.1}$$

の和に

$$M' = \bigcup_{t \in K} M_t,\ M_t \cap M_s = \phi\ (t \neq s),\ M_t \neq \phi\ (t \in K) \tag{8.3.2}$$

と有限分割しておく．

特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \to R \tag{8.3.3}$$

の第 $\ell \in L$ 番目の $u\,(\varphi, \ell) \in R$（実数全体の集合）は，パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出された第 $\ell \in L$ 番目の実数値特徴量であるという意味を持っている．

第 $\ell \in L$ 番目の実数値特徴量 $u\,(\varphi, \ell) \in R$ として，次の①，②を考えることができる．

①パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出された第 $<j, t> \in L$ 番目の実数値特徴量

$$u\,(\varphi, <j,\ t>) \equiv SI\,(M_t,\ \varphi,\ \omega_j),\ j \in J,\ t \in K \tag{8.3.4}$$

②パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出された第 $<j, t;k, s> \in L$ 番目の実数値特徴量

$$u\,(\varphi, <j,\ t;k,\ s>) \equiv c \cdot \log_e \left[1 + \frac{|\,SI\,(M_t;\varphi,\ \omega_j)\,|}{|\,SI\,(M_s;\varphi,\ \omega_k)\,|}\right],\ c > 0 \tag{8.3.5}$$

8.4　領域 $M_t\ (\subseteq M)$ を固定しての，エントロピー（領域分割への応用）

注目している 1 つの領域 $M_t\ (\subseteq M)$ 内に，1 つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の形状が存在しているかを決定する方法，領域分割（region segmentation）の方法を提案しよう．

座標値領域Mの分割式（8.3.2）を満たす式（8.3.1）の各部分領域 M_t を想定し，カテゴリの列

$$\mathfrak{C}_j,\ j\in J\equiv\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\} \tag{8.4.1}$$

を考え，どの 1 つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の形状が注目している 1 つの領域 $M_t\ (\subseteq M)$ に存在しているかを決定できる指標を提案しよう．

式（8.1.1）の積分類似度$SI\ (M_t;\varphi,\ \omega_j)$を使って，各 q_j を，

$$q_j\ (t)\equiv q\ (M_t;\varphi,\ \omega_j)\equiv\frac{|\ SI\ (M_t;\varphi,\ \omega_j)\ |}{\sum_{i\in J}|\ SI\ (M_t;\varphi,\ \omega_i)\ |},\ j=J,\ t\in K,\ \varphi\in\Phi \tag{8.4.2}$$

と定義して得られる第$t\in K$ 番目の部分領域 M_t のエントロピー（M_t の指標）

$$H\ (t)\equiv\sum_{j\in J}q_j\ (t)\cdot\log_e q_j\ (t)=-\sum_{j\in J}q\ (M_t;\varphi,\ \omega_j)\log_e q\ (M_t;\varphi,\ \omega_j) \tag{8.4.3}$$

が小さい値をとるほど，注目している 1 つの領域 $M_t\ (\subseteq M)$ 内にある 1 つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の形状がパターン$\varphi\in\Phi$ の成分として，存在しているといえよう．但し，

$$0\cdot\log_e 0=0 \tag{8.4.4}$$

と約束する．

このエントロピー$H\ (t)$ が大きいと，注目している 1 つの領域 $M_t\ (\subseteq M)$ 内にどんなカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の形状でさえ，パターン$\varphi\in\Phi$ の成分として，存在していないといえよう．このような部分領域 $M_t\ (\subseteq M)$ は背景（background）とみなされ，無視できる．

このようにして，座標値領域 M を，式（8.3.1）の各部分領域$M_t\ (\subseteq M)$，$t\in K\equiv\{1,\ 2,\ \cdots,\ \eta\}$ の和に，式（8.3.2）の如く，有限分割しておき，このような有限分割を多数，用意すると，本章のエントロピーは，segmentation（領域分割）に利用できる．無視できる部分領域 $M_t\ (\subseteq M)$ の総数が最も少ないような M の有限分割が領域分割を与えることになると考えられるからである．

式（8.4.3）のエントロピー$H\ (t)$ が$t\in K$ の増加に伴い減少し，0 に収束していくように，部分領域 M_t の列

$$M_0,\ M_1,\ M_2,\ \cdots,\ M_t,\ M_{t+1},\cdots,\ \text{where } K\equiv\{0,\ 1,\ 2,\cdots,\ t,\ t+1,\cdots\} \tag{8.4.5}$$

を選んでいくと，極限の部分領域

$$M_\infty\equiv\lim_{t\to\infty}M_t \tag{8.4.6}$$

内に唯 1 つのカテゴリCの形状が存在することになる．

8.5　代表パターン $\omega_j\ (\in\Omega)$ を固定しての，エントロピー（視線の変え方への応用）

注目している 1 つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の形状が 1 つの領域 $M_t\ (\subseteq M)$ 内に，存在しているかを決定する方法を提案しよう．

座標値領域 M' の分割式（8.3.2）を満たす式（8.3.1）の各部分領域 M_t を想定し，どの 1 つの領域 $M_t\ (\subseteq M)$ に注目している 1 つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の形状が存在しているかを決定できる指標を提案しよう．

式（8.1.1）の積分類似度$SI\ (M_t;\varphi,\ \omega_j)$を使って，各を，

$$r_1(j) \equiv r(M_t;\varphi,\omega_j) \equiv \frac{|SI(M_t;\varphi,\omega_j)|}{\sum_{t\in k}|SI(M_t;\varphi,\omega_j)|},\ t\in K,\ j\in J,\ \varphi=\Phi \tag{8.5.1}$$

と定義して得られる第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ のエントロピー（$\mathfrak{C}_j$ の指標）

$$G_k(j) \equiv -\sum_{t\in K} r_t(j)\cdot\log_e r_t(j) = -\sum_{t\in K} r(M_t;\varphi,\omega_j)\cdot\log_e r(M_t;\varphi,\omega_j) \tag{8.5.2}$$

が小さい値をとるほど，注目している 1 つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の形状がパターン $\varphi\in\Phi$ の成分として，ある 1 つの領域 $M_t\,(\subseteq M)$ 内に存在しているといえよう．

このエントロピーが大きいと，注目している 1 つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の形状がパターン $\varphi\in\Phi$ の成分として，どんな 1 つの領域 $M_t\,(\subseteq M)$ 内にさえ，存在していないといえよう．

このような部分領域 $M_t\,(\subseteq M)$ には，注目している 1 つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の形状が存在していないと考えると，部分領域 $M_t\,(\subseteq M)$ を無視できる．

このようにして，座標値領域 M を，式（8.3.1）の各部分領域 $M_t\,(\subseteq M)$ の和に，式（8.3.2）のごとく，有限分割しておくと，本章のエントロピーは，視線の変え方（eye-tracking）に利用できる．この有限分割内の，無視できる部分領域 $M_t\,(\subseteq M)$ に視線を動かしていないと考えればよいからである．

集合 K の代りに，集合 K_s を考えて得られる式（8.5.2）のエントロピー

$$G_{K_s}(j) \equiv -\sum_{t\in K_s} r_t(j)\cdot\log_e r_t(j) = -\sum_{t\in K_s} r(M_t(s);\varphi,\omega_j)\cdot\log_e r(M_t(s);\varphi,\omega_j) \tag{8.5.3}$$

が 0 に収束していくように，部分領域 $M_t(s)$ の集合

$$M(K_s) \equiv \{M_{t_0}(s),\ M_{t_1}(s),\ M_{t_2}(s),\ \cdots,\ M_{t_s}(s)\},\ \text{where } K_s \equiv \{t_0,\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_s\} \tag{8.5.4}$$

の族

$$M(K_s),\ s\in S \tag{8.5.5}$$

を選んでいくと，ある $t_{i(s)}\in K_s$ の列

$$t_{i(s)}\in K_s,\ s\in S\equiv\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\} \tag{8.5.6}$$

が存在して，極限の部分領域

$$M_{t_{i(\infty)}}(\infty) \equiv \lim_{s\to\infty} M_{t_{i(s)}}(s) \tag{8.5.7}$$

内に注目している唯 1 つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の形状が存在することになる．

8.6　大分類関数 $bsc(\varphi,\omega_j)(x)$，$x\in M$ の応用

式（6.1.1）の大分類関数の密度 bsc を使用し，

$$bsc(\varphi,\omega_j)(x) = 1 \tag{8.6.1}$$

を満たす座標値 $x\in M'\,(\subseteq M)$ をすべて集めれば，第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の形状が得られるといえよう．

9.　axiom 2を満たす類似度関数 SM の構成

本章では，付録Aでのaxiom 2を満たす式（A3.5）の類似度関数 SM を，式（4.1.2）の類似性密度関数 $sm(,)(x)$ に関する4章の研究成果を利用し構成しよう．

9.1　有限型成分を持つ類似度関数SM

先ず，式（A3.5）の関数SMを，

$$SM(\varphi,\omega_j)=\begin{cases}\dfrac{s_j(T\varphi)}{\sum_{k\in J}s_k(T\varphi)} & \text{if} \quad \sum_{k\in J}s_k(T\varphi)>0\\ p(\mathfrak{C}_j) & \text{if} \quad \sum_{k\in J}s_k(T\varphi)=0\end{cases} \tag{9.1.1}$$

と定義する．明らかに，付録Aでのaxiomの（ⅱ），（ⅲ）を満たすことがわかる．

先ず，第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属することが判明しているパターン$\varphi\in\Phi$の集まり（有限集合）Φ_jを導入する．各$\Phi_j\,(j\in J)$について，２条件

（各Φ_j条件１）$\forall j\in J,\ \omega_j\in\Phi_j\,(\neq\phi)$　(9.1.2)

（各Φ_j条件２）$\forall j\in J,\ \forall_i\in J-\{j\},\ \Phi_j\cap\Phi_i=\phi$　(9.1.3)

を設けなければならない．

次に，$T\varphi$のΦ_jからの最小ノルム距離（minimum distance）

$$MD_j(T\varphi)\equiv\min_{\eta\in\Phi_j}\|T\varphi-T\eta\| \tag{9.1.4}$$

を定義する．

先ず，不等式

$$0\leq\varepsilon_{j,\leq}<\varepsilon_{j,\geq}\leq\min_{i\in J-\{j\}}MD_j(T\omega_i),\ j\in J \tag{9.1.5}$$

を満たす閾値$\varepsilon_{j,\leq}$，$\varepsilon_{j,\geq}$の，$j\in J$にわたる組を決めておく．

式（A3.4）の代表パターンモデル集合$T\cdot\Omega$について要請される条件式（9.1.5）は，すべての座標点$x\in M\,(=M')$についてはかなり強いものである．$T\cdot\Omega$について，すべてのカテゴリ番号$j\in J$について，条件式（9.1.5）が満たされるように，各$T\omega_j\,(j\in J)$について，付録Aでのaxiom 1を満たす式（A1.8）のモデル構成作用素$T:\Phi\to\Phi$と各$\omega_j\in\Omega\,(j\in J)$とを適切に選び，すべての座標点$x$の集合$M'$を決定しておかねばならない．

次の定理9.1は，式（9.1.1）のように定義される式（A3.5）の関数がSM不等式

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall j\in J,\ 0\leq s_j(T\varphi)\leq 1 \tag{9.1.6}$$

を満たす有限型でaxiom 2を満たすように，定義される得ることを指摘したものである．

［定理9.1］（axiomを満たす有限型成分を持つ類似度関数SMの構成定理）

式（A3.5）の関数SMが式（9.1.1）のように定義される場合を考えよう．

不等式（9.1.5）が満たされるように，閾値$\varepsilon_{j,\leq}$，$\varepsilon_{j,\geq}$の，$j\in J$にわたる組を選定しておく．

このとき，式（9.1.1）の$SM(\varphi,\omega_j)$内の，各$s_j(T\varphi)$が

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall j\in J,\ 0\leq s_j(T\varphi)=\begin{cases}1 & \text{if} \quad MD_j(T\varphi)\leq\varepsilon_{j,\leq}\\ 0 & \text{if} \quad MD_j(T\varphi)\geq\varepsilon_{j,\geq}\end{cases} \tag{9.1.7}$$

が満たされるように設定し，然も，

$$\varepsilon_{j,\leq}<MF_j(T\varphi)<\varepsilon_{j,\geq} \tag{9.1.8}$$

のとき，

$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, 0 < s_j(T\varphi) < 1$ (9.1.9)

と設ければ，式（A3.4）の関数SM はaxiom 2を満たす．

（証明）明らかに，axiom 2の（ⅱ），（ⅲ）を満たす．

axiom 2の（ⅰ）を満たすことを示そう．

$\varphi = \omega_j$ とおくと，$MD_j(T\varphi) = 0 \le \varepsilon_{j,\le}(x)$

$\because$　（各Φ_j 条件1），式（9.1.5） (9.1.10)

$\therefore$　$s_j(T\varphi) = 1$　$\because$　式（9.1.7） (9.1.11)

であり，また，

任意の$\varphi = \omega_k$，$k \in J - \{j\}$ について，

$$\varepsilon_{j,\ge} \le \min_{i \in J - \{j\}} MD_j(T\omega_j) \le MD_j(T\varphi)$$

$\because$　式（9.1.5） (9.1.12)

$\therefore$　$s_j(T\varphi) = 0$　$\because$　式（9.1.7） (9.1.13)

であることより，この両性質を式（9.1.1）に代入すれば，axiomの（ⅰ）を満たすことが判明する．

□

式 (9.1.8) が成立するとき，式 (9.1.9) が成立するように，式 (9.1.1) の$SM(\varphi, \omega_j)$内の，式 (9.1.8) の各$s_j(T\varphi)$の設定を具体的に，考えてみよう．

不等式

$\forall j \in J, 0 < \delta_{j,1} \le \delta_{j,2}$ (9.1.14)

を満たす正定数の組

$\delta_{j,1}, \delta_{j,2}, j \in J$ (9.1.15)

を定めておく．その後，$s_j(T\varphi)$，$j \in J$，$\varphi \in \Phi$ は，次のように定義する：

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, 0 \le s_j(T\varphi) = \begin{cases} 1 \quad if \quad MD_j(T\varphi) \le \varepsilon_{j,\le} \\ \dfrac{\varepsilon_{j,\le} + \delta_{j,1}}{f_j(MD_j(T\varphi)) + \delta_{j,2}} \quad if \quad \varepsilon_{j,\le} < MD_j(T\varphi) < \varepsilon_{j,\ge} \\ 0 \quad if \quad MD_j(T\varphi) \ge \varepsilon_{j,\ge} \end{cases} \tag{9.1.16}$$

□

式（9.1.8）が成立するとき，式（9.1.9）が成立するような関数

$f_j : R^+ \to R$，ここに，R^+，R は各々，非負実数全体の集合，実数全体の集合 (9.1.17)

を考えよう．先ず，2条件

（各f_j 条件1）（0-不動点性）$\forall j \in J, f_j(0) = 0.$ (9.1.18)

（各f_j 条件2）（単調増加性）$0 < f_j(q_1) \le f_j(q_2)$　if　$0 < q_1 < q_2.$ (9.1.19)

を満たすように，決めるとしよう．

$\varepsilon_{j,\le} < MD_j(T\varphi) < \varepsilon_{j,\ge}$ (9.1.20)

のとき，

$MD_j(T\varphi) \le f_j(MD_j(T\varphi))$ (9.1.21)

であれば，式（9.1.8）が成立するとき，式（9.1.9）が成立することに注意する．不等式（9.1.21）が満たされるためには，式（9.1.17）の関数f_j が，

$\varepsilon_{j,\le} < q < \varepsilon_{j,\ge} \Rightarrow q \le f_j(q)$ (9.1.22)

を満たせば，十分である．更に，式（9.1.25）は，

$$\varepsilon_{j,\leq} < q < \delta_{j,\geq} \Rightarrow \varepsilon_{j,\leq} \leq f_j(\varepsilon_{j,\leq}) \wedge 1 \leq \frac{df_j(q)}{dq} \tag{9.1.23}$$

と同等である．

結局，式 (9.1.8) が成立するとき，式 (9.1.9) が成立する十分条件は,3式 (9.1.18)，(9.1.19)，(9.1.23) が式（9.1.17）の関数 f_j に要求されることである．

3式（9.1.18)，（9.1.19),）（9.1.23）を満たす式（9.1.17）の関数 f_j の，最も簡単な 1 例は，無論，

$$f_j(q) = q \tag{9.1.23}$$

である．

9.2. 無限型成分を持つ類似度関数 SM

不等式

$$\forall j \in J,\ 0 \leq \varepsilon_j < \min_{k \in J-\{j\}} MD_j(T\omega_k) \tag{9.2.1}$$

を満たすを満たす閾値 ε_j の，$j \in J$ にわたる組を決めておく．

次の定理9.2は，式（9.1.1）のように定義される式（A3.5）の関数 SM が不等式

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall j \in J,\ 0 \leq s_j(T\varphi) \leq +\infty \tag{9.2.2}$$

を満たす無限型でaxiom 2を満たすように，定義され得ることを指摘したものである．

［定理9.2］（axiom 2を満たす無限型成分を持つ類似度関数 SM の構成定理）

式（A3.5）の関数 SM が式（9.1.1）のように定義される場合を考えよう．

不等式（9.2.1）が満たされるように，閾値 ε_j の，$j \in J$ にわたる組を選定しておく．

このとき，式（9.1.1）の $SM(\varphi, \omega_j)$ 内の，各 $s_j(T\varphi)$ が

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall j \in J,\ 0 \leq s_j(T\varphi) \begin{cases} = +\infty & \text{if} \quad MD_j(T\varphi) \leq \varepsilon_j \\ < +\infty & \text{if} \quad MD_j(T\varphi) > \varepsilon_j \end{cases} \tag{9.2.3}$$

が満たされるように設定すれば，式（A3.5）の関数 SM はaxiom 2を満たす．

（証明）明らかに，axiom 2の（ⅱ），（ⅲ）を満たす．

axiom 2の（ⅰ）を満たすことを示そう．

$$\varphi = \omega_j \text{ とおくと，} MD_j(T\varphi) = 0 \leq \varepsilon_{j,\leq}(x) \quad \because \quad \text{（各}\Phi_j\text{条件 1），式（9.2.1）} \tag{9.2.4}$$

$$\therefore \quad s_j(T\varphi) = +\infty \qquad \because \quad \text{式（9.2.3）} \tag{9.2.5}$$

であり，また，

任意の $\varphi = \omega_k$，$k \in J-\{j\}$ について，

$$\varepsilon_j < \min_{i \in J-\{j\}} MD_j(T\omega_i) \leq MD_j(T\omega_k) \qquad \because \quad \text{式（9.2.1）} \tag{9.2.6}$$

$$\therefore \quad s_j(T\varphi) < +\infty \quad \because \quad \text{式（9.2.3）} \tag{9.2.7}$$

であることより，この両性質を式（9.1.1）に代入すれば，以下の様に，axiom 2の（ⅰ）を満たすことが判明する．

$\varphi = \omega_j$ のとき，

$$SM(\varphi, \omega_j) = \frac{s_j(T\varphi)}{s_j(T\varphi) + \sum_{ki \in J-\{j\}} s_k(T\varphi)} \tag{9.2.8}$$

$$= \frac{1}{1 + \sum_{k \in J-\{j\}} s_k(T\varphi)/s_j(T\varphi)} \tag{9.2.9}$$

$$= \frac{1}{1 + \sum_{k \in J-\{j\}} s_k(T\varphi)/\infty} \tag{9.2.10}$$

$$\frac{1}{1+0} = 1 \tag{9.2.11}$$

が得られ，更に，

$\varphi = \omega_i\ (i \neq j)$ のとき，

$SM(\varphi, \omega_j)$

$$= \frac{s_j(T\varphi)(x)}{s_j(T\varphi) + \sum_{ki \in J-\{i\}} s_k(T\varphi)} \tag{9.2.12}$$

$$= \frac{s_j(T\varphi)}{\infty + \sum_{k \in J-\{i\}} s_k(T\varphi)} = 0 \tag{9.2.13}$$

が得られ，証明が終わった．□

以下に，式（9.1.1）の $SM(\varphi, \omega_j)$ 内の，各 $s_j(T\varphi)$ を設定し，定理9.2が適用できる 6 例（2#-1）～（2#6）が示されている．

（2#-1）差型

$s_j(T\varphi) =$

$$\begin{cases} +\infty & \text{if} \quad MD_j(T\varphi) \leq \varepsilon_j \\ MD_j(T\varphi)^{-2} & \text{if} \quad MD_j(T\varphi) > \varepsilon_j \end{cases} \tag{9.2.14}$$

（2#-2）強度差型

2 条件

（イ）$\forall j \in J, \forall \varphi, \forall \eta \in \Phi_j, \| T\varphi \| \neq \| T\eta \|$ (9.2.15)

（ロ）$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \forall \varphi \in \Phi_j, \forall \eta \in \Phi_i, \| T\varphi \| \neq \| T\eta \|$ (9.2.16)

を設ける．

$s_j(T\varphi) =$

$$\begin{cases} +\infty & if \quad MD_j(T\varphi) \leq \varepsilon_j \\ | \| (T\varphi) \| - \| (T\omega_j) \| |^{-2} & \text{if} \quad MD_j(T\varphi) > \varepsilon_j \end{cases} \tag{9.2.17}$$

（2#-3）強度比対数型

2 式（9.2.15），（9.2.16）の 2 条件（イ），（ロ）を設ける．

不等式

$$\forall x \in M, \forall j \in J, \delta_j > 0 \tag{9.2.18}$$

を満たす関数の系

$$\delta_j, j \in J \tag{9.2.19}$$

を用意する．

$$s_j(T\varphi)=\begin{cases}+\infty & \text{if}\quad MD_j(T\varphi)\le\varepsilon_j \\ [\log_e\dfrac{\delta_j+\|T\varphi)\|^2}{\delta_j+\|T\omega_j\|^2}]^{-1} & \text{if}\quad MD_j(T\varphi)>\varepsilon_j\end{cases}\qquad(9.2.20)$$

（2#-4）差対数型

不等式（9.2.18）を満たす閾値$\delta_j(x)$，$j\in J$の，式（9.2.19）の系を用意する．

$$s_j(T\varphi)=\begin{cases}+\infty & \text{if}\quad MD_j(T\varphi)\le\varepsilon_j \\ [\log_e[1+\delta_j\cdot MD_j(T\varphi)^2]]^{-1} & \text{if}\quad MD_j(T\varphi)>\varepsilon_j\end{cases}\qquad(9.2.21)$$

（2#-5）差余弦型

不等式（4.1.71）を満たす閾値$\delta_j(x)$，$j\in J$の，式（4.1.72）の系を用意する．

$$s_j(T\varphi)=\begin{cases}+\infty & \text{if}\quad MD_j(T\varphi)\le\varepsilon_j \\ [1-\cos(\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\delta_j(x)+MD_j(T\varphi)^2}{\delta_j(x)+\max\limits_{k\in J}MD_j(T\varphi)^2})]^{-1} & \text{if}\quad MD_j(T\varphi)>\varepsilon_j\end{cases}\qquad(9.2.22)$$

（2#-6）差指数型

不等式（4.1.71）を満たす閾値$\delta_j(x)$，$j\in J$の，式（4.1.72）の系を用意する．

$$s_j(T\varphi)=\begin{cases}+\infty & \text{if}\quad MD_j(T\varphi)\le\varepsilon_j \\ [1-\exp[-MD_j(T\varphi)^2/\delta_j]^{-1} & \text{if}\quad MD_j(T\varphi)>\varepsilon_j\end{cases}\qquad(9.2.23)$$

10.　結び

認識システムが視点を座標点$x\in M$に移したとき，座標点$x\in M$がどのカテゴリを表すために使われているかは，式（4.1.2）の類似性密度関数$sm(\varphi,\omega_j)$が最大となる最も若いカテゴリ番号$j(x)=\max\limits_{i\in J}sm(\varphi,\omega_i)(x)\in J$を求めると，簡単に，座標点$x\in M$はカテゴリ$\mathfrak{C}_{j(x)}\in\mathfrak{C}$を表すために使われていると決定できるのである．本論文は，主として，式（4.1.2）の類似性密度関数$sm(\varphi,\omega_j)(x)$の構成，並びに，その簡単な応用に関する研究であった．

これまでの構造受精作用素［B3］，［B4］$A(\mu)$と異なる定義が提案された（2章），次に，これまでの構造受精作用素$A(\mu)$が新たな代表パターンモデル$(T\omega_j)_\wedge$を導入し，改良された（3章）．その改良版$A_\wedge(\mu)$の性質も解明された（3章）．更に，その諸例が構成された類似性密度関数$sm(\cdot,\cdot)(x)$を使って，これまでの構造受精作用素$A(\mu)$が密度型構造受精作用素$A_\wedge(\mu)$へと改良された（4章）．また，axiom 2_xを満たす密度関数$sm(\varphi,\omega_j)(x)$，$x\in M$を使って，これまでのaxiom 2［B3］，［B4］を満たす類似度関数SMを構成する方法が論じられた（5章）．また，これまでの構造受精作用素$A(\mu)$が類似性密度関数$sm(\varphi,\omega_j)$，$x\in M$と，提案されたaxiom 3_xを満たす大分類密度関数$bsc(\varphi,\omega_j)(x)$，$x\in M$とを使い改良された（6章）．確率を推定する手法としてのParzen Window法の

SS-変形を用い，大分類関数BSCが合成された（７章）．また，式（4.1.2）の密度関数$sm(\cdot,\cdot)(x)$を利用して，積分類似度$S(M_t;\varphi,\omega_j)$を定義し（8.1節），正規化への応用（8.2節），特徴抽出への応用（8.3節），領域$M_t(\subseteq M)$を固定しての，エントロピー（領域分割への応用）（8.4節），代表パターン$\omega_j(\in\Omega)$を固定しての，エントロピー（視線の変え方への応用）（8.5節）を論じた．大分類関数$bsc(\varphi,\omega_j)(x)$，$x\in M$の応用（8.6節）についても触れた．最後に，axiom 2を満たす類似度関数SMが式（4.1.2）の類似性密度関数$sm(,)(x)$に関する４章の研究成果を利用し構成された（9章）．

本研究では，零元不動点性，正定数倍不変性，ベキ等性，非零写像性という４性質を満たし，それ故，パターンφの持つかも知れない変形を吸収できる写像T，つまり，パターンモデル$T\varphi$とは原パターンφと同じように見えたり，聞こえたりするようなパターンモデル$T\varphi$を出力する写像（モデル構成作用素［B3]，［B4]）Tが基本的に使われた．

輪郭の強調に有効であると判明しているε-フィルタの機能を取入れ，各カテゴリ$\mathfrak{C}_j$の各代表パターンω_jのモデル$T\omega_j$を$(T\omega_j)_\wedge$へと修正する方法が提案された．この修正に基づいて，連想形認識におけるSS多段階認識の働き［B3]，［B4］を改良するのに役立つ新しい構造受精作用素$A_\wedge(\mu)$が研究された．併せて，axiom 2_xを満たす類似性密度関数$sm(\cdot,\cdot)$の密度関数$sm(\cdot,\cdot)(x)$を構成し，画素毎にパターンを多段階的に連想の働きで認識し，１枚の画像全体を理解する処理の方法の基礎が研究された．

新しい構造受精作用素$A_\wedge(\mu)$が風景画像の理解に関するこれまでの計算機シミュレーション［B 26]，［B29]，［B30］において使用された場合，理解性能が改良されることが期待されることになろう．

参　考　文　献　A

［A 1］志村厚，荒川薫，田口亮：“ε-フィルタを用いたエッジ効果の生じない高周波数成分推定を伴うディタル画像拡大法の提案”，電子情報通信学会論文誌A, vol.J86-A, no.5, pp.540-551, May 2003.

［A 2］呂建明，藤本稔，矢萩隆嗣：“ニューラルネットワークを用いたカラー劣化画像の雑音除去の一方法”，電子情報通信学会論文誌A, vol.J86-A, no.5, pp.529-539, May 2003.

［A 3］小泉亮，宮島照行，山中一雄：“非線形適応フィルタを用いた拘束付きブラインド等化器”，電子情報通信学会論文誌A, vol.J86-A, no.5, pp.517-528, May 2003.

［A 4］Gavin J.Gibson, Sammy Siu , Colin F.N. :“The application of nonlinear structures to the reconstruction of binary signals ”, IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, vol.39, no.8, pp.1877-1884, Aug. 1991

参　考　文　献　B

［B 1］鈴木昇一：“認識工学”，柏書房，Feb. 1975

［B 2］鈴木昇一：“ニューラルネットの新数理”，近代文芸社，Sept. 1996

［B 3］鈴木昇一：“パターン認識問題の数理的一般解決”，近代文芸社，June 1997

［B 4］鈴木昇一：“認識知能情報論の新展開”，近代文芸社，Aug. 1998
［B 6］鈴木昇一：“手書き漢字の側抑制効果的分解とその計算機シミュレーション”情報処理学会誌，vol.15, no.12, pp.927-934, Dec. 1974
［B 7］鈴木昇一：“画像情報量とその手書き漢字への応用”，画像電子学会誌，vol.4, no.1, pp.4-12, Apr. 1975
［B 8］鈴木昇一：“抽出された特徴による手書き漢字構造の再生”，情報処理学会誌，vol.18, no.11, pp.1115-1122, Nov. 1977
［B 9］鈴木昇一：“回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.4, pp.36-56, Dec. 1983
［B10］鈴木昇一：“連想形記憶器MEMOTRONと日本語単独母音系列の再生に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.7, pp.14-29, Dec. 1986
［B11］鈴木昇一：“多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.10, pp.35-49, Dec. 1989
［B12］鈴木昇一：“帰属係数法に基づく類似度，帰属関係あいまい度，認識情報量の計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.11, pp.51-68, Dec. 1990
［B13］鈴木昇一：“構造受精法と日本語単独母音の認識”，情報研究（文教大学・情報学部），no.18, pp.17-51, Dec. 1998
［B14］鈴木昇一，前田英明：“有声破裂音の代表パターンの学習的決定と，その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.20, pp.77-95, Dec. 1998
［B15］鈴木昇一，前田英明：“変動エントロピーによる有声破裂音の順序付けと，その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.21, pp.51-78, Mar. 1999
［B16］鈴木昇一：“平均顔を用いた顔画像の 2 値化，並びに，目・鼻・口の抽出と，その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.22, pp.65-150, Dec. 1999
［B17］鈴木昇一：“界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の，顔画像処理に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.23, pp.109-182, Mar. 2000
［B18］鈴木昇一：“風景画から知識を抽出し，解釈するシステムの，ファジィ推論ニューラルネットによる構成”，情報研究（文教大学・情報学部），no.23, pp.183-265, Mar. 2000
［B19］鈴木昇一：“各個人の感性を反映した認識システムRECOGNITRON”，情報研究（文教大学・情報学部），no.24, pp.185-257, Dec. 2000
［B20］鈴木昇一：“プロダクション・システムとしてのファジィ・マルチメディア・コンピュータと，空間多重パターンファジィ推論系”，情報研究（文教大学・情報学部），no.24, pp.105-183, Dec. 2000
［B21］鈴木昇一：“SS大分類関数BSCの適応的構成への，計算論的学習理論の適用”，情報研究（文教大学・情報学部），no.25, pp.185-236, Mar.2001
［B22］鈴木昇一：“量子力学の諸原理，多段階量子認識系と，心理状態を取り入れた想起に基づく部分空間認識法”，情報研究（文教大学・情報学部），no.25, pp.237-282, Mar.2001
［B23］鈴木昇一：“Support Vector Machineを利用した大分類関数の構成”，情報研究（文教大学・情報学部），no.26, pp.1-62, Dec.2001
［B24］鈴木昇一：“2 カテゴリ分類困難度の情報理論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.26, pp.63-160, Dec. 2001

［B25］鈴木昇一：“一般化類似度関数を用いた“導出原理による第 1 階述語推論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.27, pp.27-71, Mar. 2002

［B26］鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：“風景画の理解に関するJAVA言語によるRECOGNITRONの計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.27, pp.73-109, Mar.2002

［B27］鈴木昇一：“遺伝的アルゴリズムにおける適合度比例選択戦略を利用した進化方程式の，パターン多段階変換に基づく認識への応用”，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp. 37-67, Dec.2002

［B28］鈴木昇一：“近傍を利用した音素認識のためのモデル構成作用素T，類似度関数SM，大分類関数BSCの諸構成と，SS不動点探索型多段階想起認識”，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.69-141, Dec.2002

［B29］鈴木昇一：“JAVA言語で実装化された画像理解システムIUSの動作概要と，その稼動方法”，情報研究（文教大学・情報学部），no.28, pp.143-165, Dec. 2002

［B30］鈴木昇一，川俣博司，大槻善樹：JAVA言語による計算機シミュレーションで生じた風景画像の理解場面での多段階連想形認識過程の異常現象，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.123-166, July 2003

［B31］鈴木昇一：“パターン情報処理（モデル構成作用素，誤差逆伝播学習 2 層ニューラルネット）と，論理的含意とによる非単調的知識推論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.75-121, July 2003

［B32］鈴木昇一：“可分な一般抽象ヒルベルト空間でのK-L直交系の理論”，情報研究（文教大学・情報学部），no.29, pp.41-73, July 2003

［B33］鈴木昇一：“パターン系列（動画像，会話音声）の，dynamical　systemによる連想理論と，連想器SPATEMTRON”，情報研究（文教大学・情報学部），no.30, pp.139-186, Jan. 2004

［B34］鈴木昇一：“原パターンを近似できるという拘束条件付き最小自乗ノルムパターンモデルの，会話音声・動画像処理への応用”，情報研究（文教大学・情報学部），to be published

［B35］鈴木昇一：“会話音声・動画像処理への，万能性類似度関数の採用によるSS多段階認識の改良”，情報研究（文教大学・情報学部），no.31, pp.65-108, July 2004

［B36］鈴木昇一：“入出力例の系列を用いた“対連想問題・その擬逆問題”の一般解”，情報研究（文教大学・情報学部），no.30, pp.81-137, Jan. 2004

［B37］鈴木昇一：“共役勾配法の一般解における直交系の応用（画像復元，パターンモデルの構成，パターン集合の情報理論的次元）”，情報研究（文教大学・情報学部），no.30, pp.27-79, Jan.2004

付録A.　axiom1〜4（SS公理系）を各々，満たさなければならないパターン集合Φ，モデル構成作用素Tの対【Φ, T】，類似度関数SM，大分類関数BSC，カテゴリ選択関数CSF［B3］，［B4］

本付録Aでは，処理の対象となる問題のパターンφの集合Φ，モデル構成作用素T，類似度関数SM，カテゴリ選択関数CSFについて説明される．対【Φ, T】の満たされなければならないaxiom 1と，類似度関数SMの満たされなければならないaxiom 2も説明され，Φの表示が明らかにされ，Φが構成的集合であることが指摘される．更に，大分類関数BSCの満たされなければならないaxiom 3

も説明される．カテゴリ選択関数CSFが満たされなければならないaxiom 4も説明され，CSFの構造がSM，BSCを用いて決定されることが明らかにされる．

A1. axiom 1とパターン集合，モデル構成作用素T

一般に，処理の対象とする問題のパターンφの集合Φは或る可分な［A1］な（separable）一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の零元0を含む或る部分集合である．例えば，$\overline{\eta}$をηの複素共役として，

M：q次元ユークリッド空間R^qの可測部分集合 (A1.1)

$\mathrm{dm}(\mathrm{x})$：正値ルベーグ・スティルチェス式測度 (A1.2)

$\mathrm{x} = < \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \cdots, \mathrm{x}_q > \in M\ (\subseteq R^q)$：実数値$q$変数直交座標系 (A1.3)

を導入し，その内積(φ, η)，ノルム$\|\varphi\|$を，

$$(\varphi, \eta) = \int_M \mathrm{dm}(\mathrm{x})\,\varphi(\mathrm{x})\cdot\overline{\eta}(\mathrm{x}) \tag{A1.4}$$

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \tag{A1.5}$$

とする線形空間（ベクトル空間）としての可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H} = \mathrm{L}_2(\mathrm{M;dm})$の特別な場合として，

$\mathrm{M} = \mathrm{R}_2$（2次元全平面） (A1.6)

$$\mathrm{dm}(x) = dm\,(x_1, x_2) = [x_1^2 + x_2^2]^{-1}\cdot\mathrm{dx}_1\,\mathrm{dx}_2 \tag{A1.7}$$

を選ぶことができる．

このようなΦ，並びに，写像

$$\mathrm{T}: \Phi \to \Phi \tag{A1.8}$$

は次のaxiom 1を満たさなければならない．このとき，写像Tはモデル構成作用素（model-construction operator）と呼ばれ，$\mathrm{T}\varphi \in \Phi$は$\varphi \in \Phi$の代りとなり得るという意味で，パターン$\varphi \in \Phi$のモデル（model），或いは，パターンモデルと呼ばれる．

下記のaxiom 1からわかるように，パターンモデル$T\varphi$の集合$\mathrm{T}\cdot\Phi$は，原パターンφの集合Φへの埋込性

$$\mathrm{T}\cdot\Phi \equiv \{\mathrm{T}\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \subset \Phi \tag{A1.9}$$

を満たし，Φは原点$(=0)$を始点とし，Φの任意の点を通る半直線を含むような集合，つまり，錐（cone）であらねばならない．下記の式(A1.14)によるΦの表示が正にΦが錐であることを明らかにしている．

Axiom 1を満たすパターン集合Φは実は，構成的集合（constructible set）である．S. Suzukiは形式と意味とが互いに非分離であるようなパターンというものが満たされなければならない帰納的定義（再帰的定義）からΦの集合論的再帰領域方程式（axiom 1を満たす最小のΦの表現式；set-theoretic reflective domain equation）を提案し，この方程式を解き，の構造，構成方法を明らかにしている（文献［B3］の2.4節）．その結果は次のとおりである：

パターンと判明している元の集合（基本領域；basic domain）（axiom 1の（ｉ）の前半から，$0 \in)\Phi_B$を導入して，集合論的再帰領域方程式

$$\Phi = \Phi_B \cup T\cdot\Phi \cup R^{++}\cdot\Phi \tag{A1.10}$$

ここに，

$$T\cdot\Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \tag{A1.11}$$

R^{++}は正実数全体の集合 (A1.12)

$$R^{++}\cdot\Phi \equiv \{r^{++}\cdot\varphi \mid r^{++} \in R^{++}, \varphi \in \Phi\} \tag{A1.13}$$

の解Φは

$$\Phi = R^{++}\cdot[\Phi_B \cup T\cdot\Phi_B] \tag{A1.14}$$

と表示される（文献［B3］の式（2.56）を参照）．Φ の表示式（A1.14）から，明らかに，２つの等式

(a) $\mathrm{T}\cdot\Phi = T\cdot\Phi_B \subseteq \Phi$

　∵　axiom 1の（ⅱ），（ⅲ）の２後半 (A1.15)

(b) $\mathrm{R}^{++}\cdot\Phi = \Phi\ (= R^{++}\cdot\Phi_B \cup R^{++}\mathrm{T}\cdot\Phi_B)$

　∵　axiom 1の（ⅱ）の後半 (A1.16)

が成り立つ．

Axiom 1（パターン集合Φ とモデル構成作用素T との対【Φ, T 】の満たすべき公理）

（ⅰ）(零元０のΦ-包含性と，零元０のT-不動点性；fixed-point property of zero element under mapping T）

$$0 \in \Phi \wedge T0 = 0$$

（ⅱ）(Φ の錐性，T の正定数倍吸収性；cone property）

$$\forall\varphi \in \Phi,\ a\cdot p \in \Phi \wedge T\,(a\cdot\varphi)\,T\varphi$$

for any positive real number a.

（ⅲ）(Φ の埋込性（embeddedness）と，T のベキ等性（idempotency)）

$$\forall\varphi \in \Phi,\ T\varphi \in \Phi \wedge T\,(T\varphi) = T\varphi.$$

（ⅳ）(写像T の非零写像性；non-zero mapping property of T）

$$\exists\varphi \in \Phi,\ T\varphi \neq 0.$$

□

A2.　処理の対象となる問題のパターンφ の集合Φ とモデル構成作用素T との対【Φ, T】の基本構成と，パターンモデル$T\varphi$ とパターンφ との間の同一知覚原理

原パターン$\varphi \in \Phi$ が如何なる意味を備えているか，つまり，φ が如何なる類概念（category）を表しているかを決定する働きをもつのが，認識システムRECOGNITRONである．RECOGNITRONがモデル$T\varphi \in \Phi$ を見たり聞いたりしたならば（$T\varphi$ を感性的に受け取ったならば)，原パターン$\varphi \in \Phi$ と同じように見えたり聞こえたりすること（原パターンφ と錯覚し原パターンφ と同じように感性的に受容すること）だと，解釈可能な順序対【Φ, T 】について説明しよう．

パターンモデル$T\varphi$ を出力する式（A1.8）の写像T に要求されるのは，次の４性質①～④である：

①（零元不動点性；axiom 1の（ⅰ))

$\varphi = 0 \in \Phi$ については，$T\varphi = 0$.

②（正定数倍不変性；axiom 1の（ⅱ）の後半)

任意の正実定数a に対し，

$$\forall\varphi \in \Phi,\ T\,(a\cdot\varphi) = T\varphi.$$

③（ベキ等性；axiom 1の（ⅲ）の後半)

$$\forall\varphi \in \Phi,\ T\,(T\varphi) = T\varphi.$$

④（非零写像性；axiom 1の（ⅳ))

$$\exists\varphi \in \Phi,\ T\varphi \neq 0.$$

□

上述の①～④は各々，A1章のaxiom 1の（ⅰ）の後半，（ⅱ）の後半，（ⅲ）の後半，（ⅳ）である．零元$\varphi = 0 \in \Phi$ は背景も何も無いパターンである．

Φ は処理の対象とする問題のパターンφ の集合Φ であり，$T\varphi \in \Phi$ は$\varphi \in \Phi$ に対応するパターンモデルであって，原パターン$\varphi \in \Phi$ と同じ空間Φ に埋め込まれている．モデル$T\varphi$ は，$T\varphi \in \Phi$ を見たり聞いたりしたならばあたかも原パターン$\varphi \in \Phi$ かのように見えたり聞こえたりするようなものであ

る（$T\varphi$ **と** φ **との間の同一知覚原理**）．この同一知覚原理を達成するために，SS理論［B1］～［B6］では，式（A1.8）の写像であるモデル構成作用素T が導入され，順序のついた対$[\Phi, T]$ はA1章のaxiom 1を満たしていなければならないことになる．このとき，写像T はモデル構成作用素と呼ばれ，$T\varphi \in \Phi$ は$\varphi \in \Phi$ の代りとなり得るという意味で，パターン$\varphi \in \Phi$ のモデルと呼ばれる．

処理の対象とするパターンφ の集合Φ は或る可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の，零元 0 を含む或る部分集合であり，このΦ，並びに，式（A1.8）の写像T の対$[\Phi, T]$ は上記の 4 性質①～④（(ⅱ)，(ⅲ) の 2 後半，並びに（ⅰ)，(ⅳ)）を含む形で，A1章のaxiom 1をみたさなければならない．

次の定理A2.1は，axiom 1を満たす対$[\Phi, T]$ を決定している．

［定理A2.1］（パターン集合Φ とモデル構成作用素T との対$[\Phi, T]$ の構成定理）

パターンと判明しているφ の集合（基本領域）Φ_B $(\ni 0)$と，すべての正実定数の集合R^{++} とを用意する．

式（A1.8）の写像T がaxiom 1の（ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ）の 3 後半，並びに，(ⅳ）を満たすとしよう．このとき，次の（イ)，(ロ）が成り立つ：

（イ) 処理の対象とする問題のパターンの集合Φ を，式 (A1.14) の如く設定すれば，2 式 (A1.15)，(A1.16）が成立し，axiomの（ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ）の 3 前半をΦ は満たし，結局，対$[\Phi, T]$ はaxiom 1を満たす．

（ロ）逆に，$(0 \in)\Phi_B$ を部分集合に持つΦ がaxiom 1の（ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ）の 3 前半を満たすとすれば，

$$\Phi \supseteq \Phi_B \cup \mathrm{R}^{++} \cdot \Phi \cup \mathrm{T} \cdot \Phi \tag{A2.1}$$

が成立するが，ここで，特に，包含式（A2.1）において等号が成立するような最小のを採用すれば，つまり，領域方程式（A1.10）の成立を仮定すれば，axiom 1を満たす対$[\Phi, T]$ のは式（A1.14）のように表され，2 式（A1.15)，(A1.16）も成立する．

（証明）(イ）は文献［B4]，付録 1 の定理A1.1である．(ロ）は文献［B3]，pp. 64-66（2.4節）で証明されている．□

A3. axiom 2と類似度関数SM

任意のパターン$\varphi \in \Phi$ が，記憶されている代表的なパターンからなる有限個の元からなる集合Ω 内の任意の代表パターンω_j とどの程度似ているか，違っているかを計量する手段を設定することが，認識の働きを確保するために必要とされる．類似性計量のための手段が類似度関数SM である．

“正常なパターン”（well-formed pattern）は，ある 1 つのカテゴリ（category）$\mathfrak{C}_j$（第 $j \in J$ 番目の類概念）のみに帰属しているものとし，このような$\mathfrak{C}_j$ の集まり（有限集合）

$$\mathfrak{C}(J) = \{\mathfrak{C}_j \mid j \in J\} \tag{A3.1}$$

を想定する．$\mathfrak{C}_j$ の備えている性質を典型的に持っている（第 $j \in J$ 番目の）代表パターン（prototypical pattern）$\omega_j\ (\neq 0)$ を 1 つ選定する．$\mathfrak{C}_j$ は，典型（prototype）としての代表パターンω_j を中心とした緩やかな（第 $j \in J$ 番目の）カテゴリであることを仮定したことに注意しておく．ここに，

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} \subset \Phi \tag{A3.2}$$

が式（A3.1）の全カテゴリ集合$\mathfrak{C}(J)$ に 1 対 1 に対応する代表パターンの集合である．式（A3.2）の系Ω は，

$$\text{複素定数}\, a_j \text{ の組} \{a_j \mid j \in J\} \text{ について } \sum_{j \in J} a_j \cdot \omega_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J, a_j = 0 \tag{A3.3}$$

が成立しているという意味で，1次独立（linearly　independent）でなければならない．Ω を視察で決定できる場合があるが，訓練パターン系列から Ω を適応的に決定する方法については，文献［B3］の付録Ⅰで説明されている．

Axiom　1を満たす式（A1.1）のモデル構成作用素Tによって，式（A3.2）の代表パターン集合 Ω が変換されて得られる系

$$T\cdot\Omega \equiv \{T\omega \mid \omega \in \Omega\} = \{T\omega_j \mid j \in J\} \qquad \text{(A3.4)}$$

も1次独立であると要請する．このとき，類似度関数（similarity-measure function）

$$\mathrm{SM}:\Phi\times\Omega \to \{s \mid 0 \le s \le 1\} \qquad \text{(A3.5)}$$

を導入し

SM $(\varphi, \omega_j) = 1, 0$ に従って，パターン $\varphi \in \Phi$ は各々，ω_j と確定的な類似度関係，相違関係にあり，

また，$0 < \mathrm{SM}(\varphi, \omega_j) < 1$ の場合は，あいまいな類似・相違関係にある　（A3.6）

と，SMを解釈しよう．

式（A3.5）の関数SMは次のaxiom 2を満たすように構成されねばならない．Axiom 2の（ⅰ）では、クロネカー（Kronecker）の δ 記号

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{if} \quad i = j, = 0 \quad \text{if} \quad i \ne j \qquad \text{(A3.7)}$$

が導入されているが、特にaxiom 2の（ⅰ）なるこの正規直交性は、候補カテゴリの分離・抽出が効果的に行われ,

候補カテゴリの鋭利な削減（a sharp reduction）　（A3.8）

をもたらすために要請されている．

<u>Axiom 2</u>（類似度関数SMの満たすべき公理）

（ⅰ）（正規直交性；orthonormality）

$$\forall i, \forall j, SM(\omega_i, \omega_j) = \delta_{ij}.$$

（ⅱ）（規格化条件，確率性，正規性；probability condition，normalization）

$$\forall\varphi \in \Phi, \textstyle\sum_{j\in J} SM(\varphi, \omega_j) = 1.$$

（ⅲ）（写像Tの下での不変性；invariance under mapping T）

$$\forall\varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j). \qquad \square$$

上述のaxiom 2の（ⅰ）～（ⅲ）について簡単に説明しておこう．

SMの解釈式（A3.6）の下で,（ⅰ）は，相異なるカテゴリの代表パターン同士は確定的な相違関係にあり，同一カテゴリの代表パターン同士は確定的な類似度関係にあることを要請している．（ⅱ）は、任意のパターン φ について，すべてのカテゴリについての類似度の総和は1であることを要請している．つまり，パターン φ は少なくとも1つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属していることを要請している．（ⅲ）は，パターンモデル $T\varphi$ は原パターン φ と任意のカテゴリについて同一類似度を持つことを要請している．ということは，パターンモデル $T\varphi$ を見たり，聞いたりするならば，原パターン φ と同じように見えたり、聞こえたりすること（同一知覚原理；A2章を参照）を要請していることになる．

尚，第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の生起確率である非負実数 $p(\mathfrak{C}_j) = 1$ を,

$$[\forall j \in J, 0 < p(\mathfrak{C}_j) < 1] \wedge \sum_{j\in J} p(\mathfrak{C}_j) = 1 \qquad \text{(A3.9)}$$

を満たすものとして導入しておく．

A4.　axiom 3と大分類関数

本章では，ある 1 つのカテゴリに帰属するかどうかを決定する 2 カテゴリ分類器としての大分類関数BSC は，axiom 3を満たすように構成されなければならないことが説明される．

式（A3.5）の類似度関数SM が式（A3.8）でいう“候補カテゴリの鋭利な削減”を持つためには，axiom　2，（ｉ）の正規直交性を満たす必要があることがA3.で指摘されたが，$SM\,(\varphi, \omega_j)$ の代りに $\mathrm{SM}\,(\varphi, \omega_j)\cdot\mathrm{BSC}\,(\varphi, \mathrm{j})$を用いれば，パターン$\varphi$ が帰属するかも知れない候補カテゴリを益々，鋭利に削減できると期待される．

大分類関数（rough classifier, binary-state classifier）と呼ばれる 2 値関数

$$\mathrm{BSC} : \varphi \times\ \mathrm{j} \rightarrow \{0,\ 1\} \tag{A4.1}$$

を，次のaxiom 3を満たすものとして導入し，解釈

パターンの帰属する候補カテゴリの 1 つが第 $j \in J$ 番目の $\mathfrak{C}_j$ であるならば，

$\mathrm{BSC}\,(\varphi, \mathrm{j}) = 1$ であることが望ましい　　(A4.2)

を採用しよう．この際，注意すべきは，

$\mathrm{BSC}\,(\varphi, \mathrm{j}) = 0$ であっても，パターン$\varphi \in \Phi$ の帰属する候補カテゴリの 1 つは，第 $j \in J$ 番目の $\mathfrak{C}_j$ でないとは限らない　　(A4.3)

としていることである．また，axiom 3の（ｉ）からわかるように，カテゴリ間の相互排除性

（the mutual exclusion of the one category from the other categories）

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J - \{j\},\ BSC\ (\omega_i\,,\,j) = 0, \tag{A4.4}$$

を公理として要請していない事実に注意しておこう．この事実を補うのが実は，式（A3.5）の類似度関数SM が満たさなければならないとしているaxiom 2の（ｉ）（正規直交性）である．

Axiom 3（大分類関数BSC の満たすべき公理）

（ｉ）（カテゴリ抽出能力；category separability）

$$\forall j \in J,\ BSC\ (\omega_j\,,\,\mathrm{j}) = 1.$$

（ii）（写像T の下での不変性；invariance under mapping T）

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall j \in J,\ BSC\ (T\varphi,\ j) = BSC\ (\varphi,\ j)\,.$$

□

A5.　axiom 4と、カテゴリ選択関数CSFの構造形式

認識システムRECOGNITRONがパターン$\varphi \in \Phi$ に対し，

「パターン$\varphi \in \Phi$ が、式（A3.1）の全カテゴリ集合 $\mathfrak{C}(J)$ の部分集合

$$\mathfrak{C}(\gamma) \equiv \{\, \mathfrak{C}_j \mid j \in \gamma \} \tag{A5.1}$$

内の何れか 1 つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$に帰属する可能性がある」　　(A5.2)

という“パターン$\varphi \in \Phi$ のカテゴリ帰属知識（categorical membership-knowledge）”を持っているとする．この知識を，

$$< \varphi, \gamma > \in < \Phi,\ 2^J > \tag{A5.3}$$

と表す．

$$< \Phi,\ 2^J > \equiv \{ < \Phi, \gamma > \mid \varphi \in \Phi, \gamma \in 2^J \} \tag{A5.4}$$

は，カテゴリ帰属知識空間（categorical membership-knowledge space）と呼ばれ、すべてのパターン$\varphi \in \Phi$ と，すべてのカテゴリ番号のリスト$\gamma \in 2^J$ とのなす順序の付いた対リスト（an ordered pair list）$< \varphi, \gamma >$ の集合である．ここに，2^J は集合Jのすべての部分集合のなす集合，つまり，“Jのべき集合（power set）”をで表わしている．

カテゴリ選択関数（category-selection function）と呼ばれる写像

$$\mathrm{CSF} : \Phi \times 2^J \to 2^J \tag{A5.5}$$

は，包含関係（inclusion relation）

$$\forall\varphi \in \Phi, \forall\gamma \in 2^J, CSF(\varphi, \gamma) \subseteq \gamma \subseteq J \in 2^J \tag{A5.6}$$

を満たし，然も，次のaxiom 4を満たすものとして，設定されるとしよう．

<u>Axiom 4</u>（カテゴリ選択関数CSFの満たすべき公理）

（ i ）$\varphi = 0 \vee \gamma = \phi$ の場合

如何なるカテゴリ番号$k \in \gamma$も$< \varphi, \gamma >$の有効な候補カテゴリの番号ではない．

（ ii ）$\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ であり，かつ，$SM(\varphi, \omega_k) = 0 \wedge BSC(\varphi, k) = 0$ の場合

カテゴリ番号$k \in \gamma$は，$< \varphi, \gamma >$の有効な候補カテゴリの番号ではない．

（iii）$\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ であり，かつ，$\sum_{k \in \gamma} \mathrm{BSC}(\varphi, \mathrm{k}) = 0$ の場合

$\mathrm{BSC}(\varphi, \mathrm{k}) = 0$ であっても，$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_k) > 0$ であるようなカテゴリ番号$k \in \gamma$は，$< \varphi, \gamma >$の有効な候補カテゴリの番号である．

（iv)）$\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ であり，かつ，$\sum_{k \in \gamma} BSC(\varphi, k) > 0$ の場合

（iv-1）$\mathrm{BSC}(\varphi, \mathrm{k}) = 0$ なるカテゴリ番号$k \in \gamma$は，$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_k) > 0$ であっても，$< \varphi, \gamma >$の有効な候補カテゴリの番号ではない．

（iv-2）$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_k) = 0$ であれば$\mathrm{BSC}(\varphi, \mathrm{k}) = 1$ であっても、このカテゴリ番号$k \in \gamma$は，$< \varphi, \gamma >$の有効な候補カテゴリの番号ではない．　□

次の定理A4.1では，式（A5.5）の写像CSF は，式（A3.5）の類似度関数SM，式（A4.1）の大分類関数BSC を使用する形式で，

その定義域が$\Phi \times 2^J$であり，その値域が，パターン$\varphi \in \Phi$ のカテゴリ帰属知識$< \varphi, \gamma > \in < \Phi, 2^J >$の“有効な”候補カテゴリの番号リスト（a list of significant category-numbers）の集合である　（A5.7）

の如く，構成されている．

次の定理A4.1は，axiom　4を満たすように，式（A5.5）のカテゴリ選択関数CSF の構造を決定したものである．

［定理A4.1］（カテゴリ選択関数CSF の構成定理）

次のように定義される式（A5.5）の 1 つの写像CSF は式（A5.6）と上述のaxiom 4を満たす：

（ i ）$\varphi = 0 \vee \gamma = \phi$ の場合

$$\mathrm{CSF}(\varphi, \gamma) = \phi. \tag{A5.8}$$

（ ii ）$\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ の場合

$$CSF(\varphi, \gamma) =$$

$$\begin{cases} \{k \in \gamma \mid SM(\varphi, \omega_k\} > 0\} \quad \text{if} \quad \sum_{k \in \gamma} BSC(\varphi, \mathrm{k}) = 0 & \text{(A5.9)} \\ \{k \in \gamma \mid SM(\varphi, \omega_k\} > 0 \wedge \mathrm{BSC}(\varphi, \mathrm{k}) = 1\} \quad \text{if} \quad \sum_{k \in \gamma} \mathrm{BSC}(\varphi, \mathrm{k}) = 0 & \text{(A5.10)} \end{cases}$$

（証明）文献［B3］の定理E1である．　□

定理A4.1の写像について，次のように解釈できる：

処理の対象とするパターン$\varphi \in \Phi$がカテゴリ$\mathfrak{C}_j$，$\mathrm{j} \in \gamma$の何れか 1 つに帰属する可能性があると想定した場合，更に絞り込んで，その内のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$，$\mathrm{j} \in \mathrm{CSF}(\varphi, \gamma) \subseteq \gamma$の何れか 1 つに帰属する可能性があると帰納推論（inductive　reasoning）できる機能を備え，その出力$\mathrm{CSF}(\varphi, \gamma)$はパターン

$\varphi \in \Phi$ の有効な候補カテゴリの番号のリストを与えている．（A5.11）

□

付録B. ε-フィルタの一般化

本付録Bでは，１種の平滑化の機能を備えた“その重みが均一な正実数でこの重みの総和が１に等しいようなε-フィルタ（ε-filter）”の機能が解析され（章B1.），更に，このε-フィルタを，その重みが非負実数とは限らなくて，然もこの重みの絶対値の総和が１より大きくない形式に一般化し，その出力の性質を調べる（章B2.）．

B1. よく知られているこれまでのフィルタ

実数値離散画像（１次元信号）

$$x = \{x(i) \mid i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\} \tag{B1.1}$$

が入力されたとき，ε-フィルタから得られる出力画像

$$y = \{y(i) \mid i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\} \tag{B1.2}$$

の第ｉ成分$y(i)$は，

$$y(i) = \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{(2N+1)} \cdot \overline{x}_{\varepsilon}(i-k) \tag{B1.3}$$

と表される．ここに，助変数εは非負定数であり，式（B1.3）内の成分である近ε-傍値$x_{\varepsilon}(i-k)$は，

$$x_{\varepsilon}(i-k) = \begin{cases} x(i-k) & \textit{if} \quad |x(i)-x(i-k)| \leq \varepsilon \\ x(i) & \textit{if} \quad |x(i)-x(i-k)| > \varepsilon \end{cases} \tag{B1.4}$$

と定義されている［A1］．

ε - フィルタからの出力は入力から高々$\pm\varepsilon$以内にあることは，次の定理B1.1の (2) で指摘される．

［定理B1.1］（ε-フィルタの入出力間の差の絶対値の評価定理）

（1）$\forall i, x(i) - y(i) = \dfrac{1}{(2N+1)} \cdot \sum_{k=-N}^{N} [x(i) - \overline{x}_{\varepsilon}(i-k)|$.（B1.5）

（2）$\forall i, |x(i) - y(i)| \leq \varepsilon.$（B1.6）

（証明）（1）の証明：$x(i)$は，

$$x(i) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} x(i) \tag{B1.7}$$

と表現されることから，明らか．

（2）の証明：集合

$$K_{\leq} \equiv \{k \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm N, |x(i)-x(i-k)| \leq \varepsilon\}. \tag{B1.8}$$

を導入する．

$$\forall i, |x(i) - y(i)|$$

$$\leq \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} |x(i) - \overline{x}_{\varepsilon}(i-k)| \quad \because \quad 式（B1.5）$$

$$= \frac{1}{2N+1} \sum_{k \in K_{\le}} |x(i) - x(i-k)| \quad \because \quad \text{式（B1.4）} \tag{B1.9}$$

$$\le \frac{1}{2N+1} \sum_{k \in K_{\le}} \varepsilon \tag{B1.10}$$

$$\le \frac{1}{2N+1} \sum_{k \in K} \varepsilon \tag{B1.11}$$

$$= \varepsilon. \qquad \square$$

次の定理B1.2の（2）は，

画素値がε以上離れた画素についてはエッジとみなしそのままの値を採用し，それ以外の画素については雑音を含んでいるとみなしその画素値を平滑化すること，

を指摘している．２値関数

$$\mathrm{psn}(\mathrm{u}) = 1 \quad \text{if} \quad u \ge 0, = 0 \quad \text{if} \quad u < 0 \tag{B1.12}$$

を導入しておく．また，式（B1.8）で定義されている集合$K_{\le}$に注意しておく．

［定理B1.2］（フィルタの出力表現定理）

（1）$\forall i, \forall k, \bar{x}(i-k) = x(i) + [x(i-k) - x(i)] \cdot psn(\varepsilon - |x(i) - x(i-k)|)$. （B1.13）

（2）$\forall i, y(i) = \frac{|K_{>}|}{(2N+1)} \cdot x(i) + \sum_{k \in K_{\le}} \frac{1}{(2N+1)} \cdot x(i-k)$, （B1.14）

where

$$K_{>} \equiv \{k \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm N, |, x(i) - x(i-k)| > \varepsilon\} \tag{B1.15}$$

（証明）（1）の証明：式（B1.4）を書き直したものである．

（2）の証明：$\forall i$，

$$y(i) = \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{(2N+1)} \cdot [x(i) + \{x(i-k) - x(i)\} \cdot psn(\varepsilon - |x(i) - x(i-k)|)]$$

$\because$　２式（B1.3），（B1.13）

$$= x(i) + \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{2N+1} \cdot \{x(i-k) - x(i)\} \cdot psn(\varepsilon - |x(i) - x(i-k)|)$$

$$= x(i) + \sum_{k \in K_{\le}} \frac{1}{2N+1} \cdot \{x(i-k) - x(i)\}$$

$$= [1 - \sum_{k \in K_{\le}} \frac{1}{2N+1}] \cdot x(i) + \sum_{k \in K_{\le}} \frac{1}{2N+1} \cdot x(i-k)$$

$$= [\sum_{k \in K_{>}} \frac{1}{2N+1}] \cdot x(i) + \sum_{k \in K_{\le}} \frac{1}{2N+1} \cdot x(i-k)$$

$$= \frac{|K_{>}|}{(2N+1)} \cdot x(i) + \sum_{k \in K_{\le}} \frac{1}{2N+1} \cdot x(i-k). \qquad \square$$

B2.　提案するパターン変換

以下では，B1章のフィルタがその１例となるように，一般化して，平滑化パターン変換Bを導く．

パターン

$$\varphi(x), x \in M \tag{B2.1}$$

に対し，パターン

$$c \cdot \tilde{\varphi}(x), x \in M \tag{B2.2}$$

を出力する方法は以下のように説明される．ここに，c は適切な実定数である．

座標変換された近傍を用いた平滑化パターン変換

$$B : \Phi \times M \to \Phi \tag{B2.3}$$

とは,

$$(B\varphi)(x) \equiv \tilde{\varphi}(x) = \sum_{k \in K} p_k(x) \cdot \hat{\varphi}(S_k x) \in \Phi,\ \varphi \in \Phi,\ x \in M \tag{B2.4}$$

と定義されるものとする．

座標値 $x \in M$ の座標近傍 $S_k x \in M$ の重みである各 $p_k(x)$，$x \in M$ は非負数とは限らない任意の実数であり $(k \in K)$，規格化条件

$$\forall x \in M,\ \sum_{k \in K} |p_k(x)| \leq 1 \tag{B2.5}$$

を満たすとしよう．当然，不等式

$$\forall x \in M,\ \sum_{k \in K} p_k(x) \leq 1 \tag{B2.6}$$

も成立していることに注意しておく．

第 $k \in K$ 番目の写像

$$S_k : M \to M \tag{B2.7}$$

は座標変換であり，この写像 S_k の族 S_k，$k \in K$ には，単射性

$$k \neq \ell \Rightarrow S_k \neq S_\ell \tag{B2.8}$$

を要求しておく．

$$\forall x \in M,\ \varepsilon(x) \geq 0 \tag{B2.9}$$

を満たす非負実数値関数（近傍評価関数）$\varepsilon(x)$ を導入して，式（B2.4）の $\tilde{\varphi}(x)$，$x \in M$ 内の成分としての，座標値 $x \in M$ の座標近傍 $S_k x \in M$ での値 $\hat{\varphi}(S_k x)$ を

$$\hat{\varphi}(S_k x) = \begin{cases} \varphi(S_k x) & \mathit{if} \quad |\varphi(x) - \varphi(S_k x)| \leq \varepsilon(x) \\ \varphi(x) & \mathit{if} \quad |\varphi(x) - \varphi(S_k x)| > \varepsilon(x) \end{cases} \tag{B2.10}$$

と定義する．

座標値 $x \in M$ での $\tilde{\varphi}$ の，式（B2.4）の値 $\tilde{\varphi}(x)$ は，$\varphi(x)$ の値から $\pm\varepsilon(x)$ 以内にある，x の近傍 $S_k x$ の φ の値 $\varphi(S_k x)$ と，$\varphi(x)$ の値そのものとの平均値であることに注意しておく．

式（B2.3）の平滑化パターン変換 $\tilde{\varphi} : \Phi \times M \to \Phi$ の機能は次のように説明される：

画素値 $\varphi(x)$ が $\varphi(S_k x)$ の値より $\pm\varepsilon(x)$ より大きく離れた画素 x についてはエッジとみなしそのままの値を採用し，$\pm\varepsilon$ 以内にある画素 x については雑音を含んでいるとみなし平滑化する． □

近傍評価関数 $\varepsilon(x)$ を以下に選定しておく．

［$\varepsilon(x)$，$x \in M$ の選び方］

①$\varepsilon(x) = \sum_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) \cdot \omega_j(x)$，ここに，$\omega_j$ は第 $j \in J$ 番目の代表パターン，$\mathrm{p}(\mathfrak{C}_j)$ は第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の生起確率. (B2.11)

②パターン φ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属していることが判明しているとき,

$$\varepsilon(x) = \omega_j(x). \tag{B2.12}$$

③（ガウス関数）実数値直交座標 x が $x = < x_1, x_2, \cdots, x_n >$ のとき

$$\varepsilon(x)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}}\cdot\exp[-\frac{(x_i-m_i)^2}{2\sigma_i^2}],\ \sigma_i>0,\ -\infty<m_i<+\infty\ (i=1,2,\cdots,\eta) \quad \text{(B2.13)}$$

④$\varepsilon(x)=C\ (cons\tan t)$. (B2.14)

□

座標値$x\in M$の座標近傍$S_kx\in M$の重みである各$p_k(x)$を以下に選定しておく.

［$p_k(x)$, $x\in M, k\in K$の選び方］

①$p_k(x)=\frac{1}{|K|}$ (B2.15)

尚，この場合，式（B2.2）の平滑化パターン$c\cdot\tilde{\varphi}(x)$，$x\in M$における正定数cは，$c=|K|$と選ぶのがよい.

②直交座標xが1次元のとき

$$\begin{aligned}&K=\{0,\pm1\}\\&S_0x=x,\ S_1x=x+1,\ S_{-1}x=x-1\\&p_0(x)=3/5,\ p_1(x)=-1/5,\ p_{-1}(x)=-1/5.\end{aligned}\quad \text{(B2.16)}$$

この設定は,

$$[I-\frac{d^2}{dx^2}]\varphi(x),\ where\quad I\quad is\quad an\quad identity\quad opereaor \quad \text{(B2.17)}$$

が整数値座標系では,

$$\varphi(x)-[\{\varphi(x+1)-\varphi(x)\}-\{\varphi(x)-\varphi(x-1)\}]=3\cdot\varphi(x)-\varphi(x+1)-\varphi(x-1) \quad \text{(B2.18)}$$

と近似されることを採用したものである.

尚，この場合，式（B2.2）の平滑化パターン$c\cdot\tilde{\varphi}(x)$，$x\in M$における正定数cは，$c=5$と選ぶのがよい.

③（ラプラシアン）直交座標系xが2次元で$x=<x_1,x_2>$のとき

$$\begin{aligned}&K=\{<0,0>,<0,\pm1>,<\pm1,0>\}\\&S_{<0,0>}<x_1,x_2>=<x_1,x_2>,\ S_{<0,\pm1>}<x_1,x_2>=<x_1,x_2\pm1>,\\&S_{<\pm1,0>}<x_1,x_2>=<x_1\pm1,x_2>\\&P_{<0,0>}(x_1,x_2)=5/9,\ p_{<0,\pm1>}(x_1,x_2)=-1/9,\ p_{<\pm1,0>}(x_1,x_2)=-1/9.\end{aligned}\quad \text{(B2.19)}$$

この設定は,

$$[I-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}]\varphi(x_1,x_2),\ where\quad I\quad is\quad an\quad ientity\quad operator \quad \text{(B2.20)}$$

が整数値座標系では,

$$\begin{aligned}&\varphi(x_1,x_2)-[\{\varphi(x_1+1,x_2)-\varphi(x_1,x_2)\}-\{\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1-1,x_2)\}]\\&-[\{\varphi(x_1,x_2+1)-\varphi(x_1,x_2)\}-\{\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1,x_2-1)\}]\\&=5\cdot\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1+1,x_2)-\varphi(x_1-1,x_2)-\varphi(x_1,x_2+1)-\varphi(x_1,x_2-1)\end{aligned}\quad \text{(B2.21)}$$

と近似されることを採用したものである.

尚，この場合，式（B2.2）の平滑化パターン$c\cdot\tilde{\varphi}(x)$，$x\in M$における正定数cは，$c=9$と選ぶのがよい. □

次の定理B2.1は，座標変換された近傍$S_kx\in M$を用いた，式（B2.4）の平滑化パターン変換Bの入出力間の差の絶対値$|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|$，$x\in M$を評価したものである.

［定理B2.1］（座標変換された近傍を用いた平滑化パターン変換 B の入出力間の差の絶対値の評価定理）

（1）$\forall x \in M,\ \varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)$

$$= \sum_{k \in K_{\leq}(x)} p_k(x) \cdot [\varphi(x) - \varphi(S_k x)] + [1 - \sum_{k \in K} p_k(x)] \cdot \varphi(x). \tag{B2.22}$$

ここに,

$$K_{\leq}(x) \equiv \{k \in K \mid |\varphi(x) - \varphi(S_k x)| \leq \varepsilon(x)\} \tag{B2.23}$$

（2）$\forall x \in M, |\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| \leq \varepsilon(x) + |1 - \sum_{k \in K} p_k(x)| \cdot |\varphi(x)|.$ （B2.24）

（証明）式（B2.4）の $\tilde{\varphi}(x)$ に注意すれば,

$$\forall x \in M,\ \varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)$$

$$= \varphi(x) - \tilde{\varphi}(x) + \sum_{k \in K} p_k(x) \cdot \varphi(x) - \sum_{k \in K} p_k(x) \cdot \varphi(x)$$

$$= \sum_{k \in K} p_k(x) \cdot [\varphi(x) - \hat{\varphi}(S_k x)] + [1 - \sum_{k \in K} p_k(x)] \cdot \varphi(x) \tag{B2.25}$$

を得，$\hat{\varphi}(S_k x)$ の定義式 (B2.10) と，添え字集合 $K_{\leq}(x)$ の定義式 (B2.23) とを考慮すれば，式 (B2.22) が成立することが，わかる．こうして，(1) の証明が終わった．更に，式（B2.22）より,

$$\forall x \in M, |\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)|$$

$$= \sum_{k \in K_{\leq}(x)} |p_k(x)| \cdot |\varphi(x) - \varphi(S_k x)| + |1 - \sum_{k \in K} p_k(x)| \cdot |\varphi(x)|$$

$$\leq \sum_{k \in K_{\leq}(x)} |p_k(x)| \cdot \varepsilon(x) + |1 - \sum_{k \in K} p_k(x)| \cdot |\varphi(x)|$$

$\because$ 式（B2.23） （B2.26）

$$\leq \varepsilon(x) + |1 - \sum_{k \in K} p_k(x)| \cdot |\varphi(x)| \quad \because \text{式（B2.5）}$$

を得，(2) の証明が終わった． □

座標値 $x \in M$ の座標近傍族 S_k，$x \in M$ と近傍評価関数 $\varepsilon(x)$ を導入し，$\hat{\varphi}(S_k x)$ を再表現すれば,

$$\hat{\varphi}(S_k x) = \varphi(x) + [\varphi(S_k x) - \varphi(x)] \cdot psn(\varepsilon(x) - \varphi(S_k x)|),\ x \in M,\ k \in K \tag{B2.27}$$

であることがわかる．ここに，0，1への2値関数 $psn(u)$，$u \in R$（実数全体の集合）を,

$$psn(u) = 1 \quad if \quad u \geq 0, = 0 \quad if \quad u < 0 \tag{B2.28}$$

と導入している．

次の定理B2.2は，式（B2.7）の写像族 S_k，$k \in K$ で座標変換された近傍族 S_k，$k \in K$ を用いた，式（B2.3）の平滑化パターン変換 B の，式（B2.4）の出力 $\tilde{\varphi}(x)$，$x \in M$ を再表現したものである．

［定理B2.2］（座標変換された近傍を用いた平滑化パターン変換 B の出力表現定理）

（1）式（B2.27）が成り立つ．

（2）$\forall x \in M,\ \tilde{\varphi}(x) = [\sum_{k \in K_{>}(x)} p_k(x)] \cdot \varphi(x) + \sum_{k \in K_{\leq}(x)} p_k(x) \cdot \varphi(S_k x).$ （B2.29）

where

$$K_{>}(x) \equiv \{k \in K \mid |\varphi(x) - \varphi(S_k x)| > \varepsilon(x)\} \tag{B2.30}$$

（証明））(1) は，$\hat{\varphi}(S_k x)$ の定義式（B2.10）と psn の定義式（B2.28）とから，容易に確かめることができる．

（2）を証明しよう．

$$(B\varphi)(x) \equiv \tilde{\varphi}(x) = \sum_{k \in K} p_k(x) \cdot \hat{\varphi}(S_k x) \in \Phi \quad \because \quad \text{式（B2.4）}$$

$$= \sum_{k \in K} p_k(x) \cdot 【\varphi(x) + [\varphi(S_k x) - \varphi(x)] \cdot psn(\varepsilon(x) - |\varphi(x) - \varphi(S_k x)|)】 \quad \because \quad \text{式（B2.27）}$$

$$= \sum_{k \in K} p_k(x) \cdot \varphi(x) \cdot [1 - psn(\varepsilon(x) - |\varphi(x) - \varphi(S_k x)|)]$$

$$+ \sum_{k \in K} p_k(x) \cdot \varphi(S_k x) \cdot psn(\varepsilon(x) - |\varphi(x) - \varphi(S_k x)|)$$

$$= \sum_{k \in K_{>}(x)} p_k(x) \cdot \varphi(x) + \sum_{k \in K_{\leq}(x)} p_k(x) \cdot \varphi(S_k x)$$

$\because$　2 式（B2.23），（B2.30）

を得，証明が終わった．　□

（著者　鈴木昇一，論文題目　類似度関数の密度を用いた，画素毎のパターン認識　（パターン理解処理）の方法，文教大学情報学部情報研究no.32　投稿論文，投稿年月日　2004年 8 月23日（月））