高次認知機能における論理表現の要素

鈴木昇一

Primitives for Logical Representation in Higher-Level Cognitive Function

Shoichi Suzuki

あらまし

高次認知機能における推論は、記号列によってなされていると想定すると都合がよい。マルチメディア時代に突入し、マルチメディアの進化形としての知能情報メディアが取り沙汰される現在、記号列とパターンとの２大情報表現を統合する手法の確立が望まれるようになってきた。本研究の目的は、記号列情報処理と同様に精密な推論技術に役立つ１つの論理表現の要素を確保するため、１つの概念はブール関数で符号化されることを勘案し、月本に啓発され、非単調命題論理における論理関数(命題;真理関数)をパターンとみなし、２つの命題の間に或る種の内積を導入し、命題間の距離、命題の持つ情報量を提案している。月本論文では、剰余類の作る線形空間、並びに、線形空間の完備化としてのヒルベルト空間(剰余類の作る空間の完備化)などに言及していないが、本論文では、この不備を補っている。

得られた完全正規直交系を使って、SS理論における３種類のパターンモデルを構成している。このパターンモデル Tφ は原パターン φ の持つ論理構造を簡略化表現しており、モデル構成作用素と呼ばれる作用素 T を使用し、ニューラルネットも構成できる。

本研究によって、命題記号論理をパターン認識分野でのパターンで取り扱うことが可能となった。

キーワード

マルチメディア　知能情報メディア　真理関数　情報量
モデル構成作用素　非単調論理　ニューラルネット

Abstract

An idea of that an inference in higher-level cognition has been performed using strings has good reason to explain faculties of intelligent information-processing. Two major information-representations by both strings and patterns should be integrated at the present period of intelligent information media.

Tsukimoto's paper started me writing this paper. This paper aims at securing a primitive component for logical representation in a higher-level cognitive function in order to serve to make an inference as precisely as symbolic inference.Notice that a concept can be coded with a truth function.In this paper, We regard as a pattern a truth function in non-monotonic propositional logic. A kind of inner product between two propositions is thought out. A distance between two propositions and an amount of information owned by the proposition can be defined .Tsukimoto does not make mention of a linear space which consists of residue classes and a Hilbert space as a completion of the linear space. We shall supplement defective descriptions in Tsukimoto's paper.

Three kinds of pattern-model proposed by S.Suzuki is constructed using a complete orthonormal system in the obtained Hilbert space. A pattern-model $T\varphi$ can represent a corresponding logical structure of the original pattern φ in a simplified form. Moreover It is referred that neural networks are obtained by operator T called model-construction operator.

This investigation enables us to treat with a symbolic logic among propositions by means of patterns in the field of pattern-recognition.

Key words intelligent information media truth function amount of information model-construction operator non-monotonic propositional logic neural net

1.前書き

知覚、記憶、学習、推論などの働きが認知（cognitron）である。高次認知機能における推論は、記号列によってなされていると、想定すると、見掛け上説明がつくことが多い。

本研究の目的は、記号列情報処理［1]，［29]，［30］と同様に精密な推論技術に役立つ1つの論理表現の要素Tφを確保することである。

知識（knowledge）は通常、変形が全く許されなくて任意にその意味（概念; concept）を付与可能な記号列（a string of symbols）で表され、情報のディジタル表現（離散表現）である。一方、文字（character)、画像（image)、音声（speech sound）は通常、ある程度変形しても、また、ある種の座標変換後でも、更に、ある程度の雑音が重畳しても、その意味（類概念;category）が保存される性質のある**パターン**（pattern）として表現され、通常情報のアナログ表現（連続体表現）である。記号列による知識推論処理技術［1］とパターンによる認知情報処理技術［2］とは対立する多数の思想に基づいて各々、確保されているけれども、マルチメディア時代に突入し、マルチメディアの進化形としての**知能情報メディア**が取り沙汰される現在［3]、記号列とパターンとの2大情報表現を**統合**（integration）する手法の確立が望まれるようになってきた［4]。

1つの概念は、言語命題（language proposition）の1種としての**ブール関数**で符号化されること［5］は、以下の英文で説明される:

For each $n \geqq 1$, let $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ denote a set of n Boolean features and U_n denote the set $\{0, 1\}^n$ of all assignments to these features (the set of instances). A concept c is a subset of U_n (i.e., all positive instances of c). A Boolean formula f represents a concept c if $f(x)=1$ for all $x \in c$ and $f(x)=0$ otherwise[3].

□

パターン情報処理、記号列情報処理、数値情報処理に於ける各種技術を、可能な限り、パターン情報処理に於ける**統一原理**で再現してみよう、という考えが在る［6]，［7]，［8]。ニューラルネット理論などもこの方向に向きつつあると見えないことはない［10]。記号列の関係に一定の制

約を設けた“概念を節点に、概念間の関係を枝に対応付けることによって得られるグラフ、つまり、**意味ネットワーク**（semantic network)"で事象記述を行い、この意味ネットワークによる知識検索処理に相互結合形のニューラルネットを構成されているし［9］、記号列による推論は一部、ニューラルネットで代行される可能性が見えてきたのである［10］，［11］。

さて、公理の集合A，Bから証明される定理全体の集合を各々、Th(A)，Th(B) とすれば、

単調性

$A \subseteq B$ ならば、$Th(A) \subseteq Th(B)$

が成り立つ通常の論理とは異なり、この単調性が必ずしも成り立たない論理で、

論理式Bに対し、仮説 Γ からの演繹があるとき、

$\Gamma \vdash B$ と書く

とすると、

論理式pに対し、

$A \vdash p$ かつ $A \subseteq B$ ならば、$B \vdash p$

が必ずしも成り立たない論理

が**非単調論理**である。記号列による処理からパターンによる処理へと移行すると、非単調命題論理（non-monotonic propositional logic）が無理なく、素直に実現される場合がある。つまり、以下の式（1.2）の論理関数 φ(a，b) をパターン情報処理におけるパターンとみる訳である。

個体変数を導入しない**命題論理**（propositional logic）を連続体処理場面で再現することを取り扱っている月本は、2つの命題の間に或る種の内積を導入し、命題間の距離、命題の持つ情報量を提案し、例えば、ペンギンという鳥は飛ばないという例外があるという非単調命題論理での命題

「鳥は一般には飛ぶ」　(1.1)

を、月本のいう**論理エントロピー**の欠如した命題として、1より大きくない非負実数量パラメータ α に持つ命題 φ(a，b) として、

$$\varphi(a, b) = [a \wedge b] \vee [\alpha \cdot a \wedge \neg b] \vee [\neg a \wedge b] \vee [\neg a \wedge \neg b] \tag{1.2}$$

という具合に表現できることなどを指摘した［12］。何故ならば、

(i) a：鳥　(ii) b：飛行可能　(1.3)

という対応の下で、

「鳥は飛ぶ」　(1.4)

なる古典的論理命題「$a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b$」が、

その否定が $\neg[a \rightarrow b] = a \wedge \neg b$ であることを考慮すると、

$$[a \wedge b] \vee [0 \cdot a \wedge \neg b] \vee [\neg a \wedge b] \vee [\neg a \wedge \neg b] \tag{1.5}$$

と表現されるからである。パラメータ α は、否定 $\neg[a \rightarrow b]$ が成立する程度を反映した量である。但し、月本の提案する情報処理の働きは大部分、通常のこれまでのニューラルネット［13］で実現可能であると、著者には思える。月本論文［6］，［12］では、剰余類の作る線形空間、並びに、線形空間の完備化としてのヒルベルト空間、更に、剰余類の作る空間の完備化などに言及していないが、本論文では、この不備を補っている。

Shannonの流れを汲んだ各種情報量も、パターン情報処理分野に関し様々提案され［18］，［19］，［28］、認識の働き、パターンの評価に役立つことも知られている。α をパラメータに持つこの2変数a，bの、式（1.2）の命題式 φ(a，b) は、**直交展開**

$\varphi(a, b)$

$$=a\cdot b+\alpha\cdot a\cdot(1-b)+(1-a)\cdot b+(1-a)\cdot(1-b) \tag{1.5}$$

として関数表現される。このパターン（命題）φの情報量（amount of information suggested by S.Suzuki）[8] AIS（φ）は、

$$\begin{aligned}\mathrm{AIS}(\varphi)&=2-\log_2\|\varphi\|^2\\&=2-\log_2[3+\alpha^2]\end{aligned} \tag{1.6}$$

である。因みに、

$$\begin{aligned}&\alpha=0\text{ ならば、}\mathrm{AIS}(\varphi)=2-\log_2 3\\&\alpha=2^{-1}\text{ ならば、}\mathrm{AIS}(\varphi)=2-\log_2[3+4^{-1}]\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad=2-\log_2 13\\&\alpha=1\text{ ならば、}\mathrm{AIS}(\varphi)=2-\log_2 4=0.\end{aligned} \tag{1.7}$$

□

「鳥は飛ぶ」という命題［a→b］の否定 ¬［a→b］が成立する程度を反映した量αが最大値1に近くなればなるほど、「鳥は一般には飛ぶ」というφの**情報量** AIS(φ)は最小値0に近づくことが、式（1.7）からわかる。

本格的な topological partial ordering に基づく記号列情報処理の、パターン情報による置き換え理論はいずれ提出するとして、月本モデルを拡張・精密化した形式で、S.Suzukiの“**パターン認識の数学的理論**［14］”に役立つように構成し直すことを、本論文では試みる。月本論文［12］で陽に得られている諸公式も導かれ、この諸公式を利用して、**命題論理を容易に実行可能なニューラルネット理論**を展開な事実をも指摘することができるが、割愛されている。

得られた完全正規直交系［27］，［32］$\{\phi_k\}_{0\leq k\leq 2^n-1}$は無論、カルーネン・レーブ関数系（7.1.3項）［32］である。この関数系を使って、パターンモデル Tφが3種類構成され得るので（定理7.3、並びに、付録C）、特に以下の説明をしておくことは、本研究の意義の1部を理解するにあたって、有益であろう。

　　文全体の意味はその諸部分の意味の関数である

という“合成性原理［25］"に対応して、

　　パターンφの構造（パターンモデル） Tφ はその諸部分の構造 $u(\varphi, k)\cdot\psi_k$の

　　関数（1次形式）である

とみなし、Tφはφで知識表現した結果としてのパターンであり、1種の合成性原理に基づき得られた**モジュール性に優れた表現**である、と考えられよう。

変形が許されない2つの事物（記号列）が同一物か相異なるものかの判断は、計算機による記号処理においては例えば、**最汎単一化置換**［1］（most general unifier）を見つけて容易であり、アルゴリズム的になされる［29］，［30］。ある程度の変形が許される2つのパターンφ，ηが類似しているか、相異なっているかの判断は、一方のパターンがユニタリ座標変換されている簡単な場合でさえ、計算機では通常難しい。似たパターン同士は、T の構造形式からわかるように、似たパターンモデルを生じやすいので、本研究では、写像 T があたかも、最汎単一化置換かのごとくみなせ、自己共役作用素 H と可換なユニタリ座標変換［26］ U によって変形を受けた2つのパターンφ，$\eta=U\varphi$同士に共通なパターンモデル Tφが提案され、パターン照合に関するこの種の問題点は少なくとも解決されている［33］。

パターン認識［2］，［31］の対象となるパターンは視覚、並びに、聴覚に関係したもののみでは

ない。臭覚、触覚をもたらすパターン [23], [24] もそうである。記号による推論場面 [6], [9]、言語情報処理の場面でのパターン（言語命題）もそうである。このように、モデル Tφ をどう利用するかは、Tφ が確保された段階ではあらかじめ決まっていないので、状況に応じていろいろな使いわけが可能である。パターンモデルを出力する本写像 T は、不動点探索形構造受精多段階帰納推理によるパターン認識法 [14], [33] において用いれられて初めて、その真の効力が発揮されることを付記する。

尚、3付録A, B, Cには、各々、「ヒルベルト（Hilbert）空間論 [16] の基本的諸概念」,「Bessel不等式，Fourier式展開」,「直交系の選定と、文献 [33] と異なるパターンモデル Tφ の構成」が説明されている。

2.真理関数の、パターンへの拡張的変換

本章では、本論文の内容を少し、詳細に論じ、その背景並びに意味付け、新規性、有効性、信頼性などを論じよう。

本研究では、記号列処理による推論処理をパターン処理に置き換えることを意図して、スタックとか木構造などの複雑な記号列データを処理可能な "connectionist model [15]"、つまり、

a neural network that dynamically creates and manipulates composite symbol structures,such as stacks and trees

を構築可能な基礎を論じてみる。

本論文では、空集合、虚数単位 $\sqrt{-1}$ 、複素数 z の共役複素数、複素数 z の実部、虚部、s は集合 S の元ではないことの表現として各々、 ϕ, i, $\overline{z}$、Rez、Imz、$s \overline{\in} S$ を用いる。

2.1 可分なヒルベルト（Hilbert）空間 $\mathfrak{H}$

本論文では、処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ は内積（φ,η）が与えられた可分な（separable）なヒルベルト（Hilbert）空間 $\mathfrak{H}$ のある部分集合である。ここで、ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ が可分というのは、稠密な（dense）可算部分集合が $\mathfrak{H}$ に存在することを指す [16], [17]。φ のノルム $\|\varphi\|$ は $\|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi,\varphi)}$ と定義される。可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ = L2（M;dm） の1例は、例えば、内積（φ,η）が、

$$(\varphi,\eta) = \int_M dm(x)\ \varphi(x)\cdot\overline{\eta}(x)$$

ここに、$\overline{\eta}$ は η の複素共役であり、

M : n次元ユークリッド空間 R^n の可測部分集合

dm(x): 正値ルベーグ・スティルチェス（Lebesgue-Stieltjes）式測度　(2.1)

と与えられる線形ベクトル空間である。

例えば、内積（φ,η）が、

$$(\varphi,\eta) = \Sigma_{k=1}^{n} w_k \cdot a_k \cdot \overline{b_k}$$

ここに、

$$[\forall k \in L, 0 \leqq w_k < \infty] \wedge 0 < \Sigma_{k=1}^{n} w_k \quad (2.2)$$

$$\varphi = \mathrm{col}(a_1\ a_2 \cdots a_n)\ （実数列としての列ベクトル）,\quad \eta = \mathrm{col}(b_1\ b_2 \cdots b_n) \quad (2.3)$$

と表わされる可分な実ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ は、M, dm(x) が、

$$M \equiv \{1,2,\cdots,n\},\ dm(x) = w_k \ \text{if}\ x \in M \tag{2.4}$$

と選ばれた$L_2(M; dm)$である。

本論文では、論の対象となるのは、2式（3.12），（3.14）で定義される内積(φ, η)，ノルム$\|\varphi\|$が与えられた可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H} = \langle \mathfrak{D} \rangle_{rc} \equiv \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\perp$（式（3.44）を参照）であり、3.6節で構成される。

2.2　各種論理演算を表す真理関数の線形補間

$x_\ell \in \{0, 1\}$として、n変数関数

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \{0, 1\} \tag{2.5}$$

を考えよう。この様な関数

$$\varphi: \{0,1\}^n \rightarrow \{0, 1\} \tag{2.6}$$

は、命題論理（propositional logic）では、

$$0\text{をfalsity, }1\text{をtruthと解釈する} \tag{2.7}$$

と、真理関数（truth function）と呼ばれる。否定、連言なる2つの演算のみで、全ての論理演算が定義可能であり、この2つの演算は機能的に完全である（functional complete）と言われるが、$x, y, z, x_1, x_2, \cdots, x_n \in \{0, 1\}$として、式（2.5）の$\varphi$は、次の各種論理演算が表現可能である：

(i) 否定(negation) $\neg x$

$$\varphi(x) = 1 - x = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0 \\ 0 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$

(ii) 連言（conjunction）　$x \wedge y$

$$\varphi(x,y) = x \cdot y = \begin{cases} 1 & \text{if } x = y = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(iii) 選言（disjunction）　$x \vee y$

$$\varphi(x,y) = x + y - x \cdot y = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y = 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(iv) 含意（implication）　$x \rightarrow y = \neg x \vee y$

$$\varphi(x,y) = 1 - x + x \cdot y = \begin{cases} 0 & \text{if } x > y \\ 1 & \text{if } x \leqq y \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{if } x = 1 \wedge y = 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(v) 同値（equivalence）　$(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$

$$\varphi(x, y) = 1 - x - y + 2x \cdot y = 1 - (x - y)^2$$
$$= 1 - |x - y|$$
$$\begin{cases} 0 & \text{if } x \neq y \\ 1 & \text{if } x = y \end{cases}$$

(vi) 導出原理 (resolution principle)、或いは、3段論法 (syllogism) $[\neg x \vee y] \wedge [x \vee z] \rightarrow [y \vee z]$, 或いは、$[\neg y \rightarrow \neg x] \wedge [\neg x \rightarrow z] \rightarrow [\neg y \rightarrow z]$

$$\varphi(x,y,z) = x \cdot y - x \cdot z + z =$$
$$\begin{cases} z & \text{if } x=0 \\ y & \text{if } x=1 \end{cases}$$

(vii) 射影 (projection)

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_\ell,\ \ell \in L \equiv \{1, 2, \cdots, n\}$$ □

本論文では、(i) ～ (vii) の様な式 (2.6) の真理関数φを線形補間して、

$$\eta : [0, 1]^n \rightarrow Z\text{(複素数体)},$$
$$\text{where } [0, 1] \equiv \{x \mid 0 \leqq x \leqq 1\} \tag{2.8}$$

へと拡張する方法として、命題3.4の (ii) が成立しているという意味で**補間作用素** (interpolating operator) と呼ばれてよい写像

$$\mathfrak{I} \equiv \prod_{\ell \in L} \mathfrak{I}_\ell \equiv \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2 \cdots \mathfrak{I}_n : \Phi \rightarrow \Phi,$$
$$\text{where } L = \{1, 2, \cdots, n\} \tag{2.9}$$

を導入する。ここに、

$$(\mathfrak{I}_\ell \varphi)(x_1, x_2, \cdots, x_\ell, \cdots, x_n)$$
$$\equiv \sum_{e_\ell=0}^{1} \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{\ell-1}, e_\ell, x_{\ell+1}, \cdots, x_n) \cdot x_\ell(e_\ell) \tag{2.10}$$

ここに、

$0 \leqq x_\ell \leqq 1$ として

$$x_\ell(e_\ell) \equiv$$
$$\begin{cases} 1 - x_\ell & \text{if } e_\ell = 0 \\ x_\ell & \text{if } e_\ell = 1 \end{cases} \tag{2.11}$$

その後、パターン η を、

$$\eta(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv (\mathfrak{I}\varphi)(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{2.12}$$

と定義する。そうすれば、

$$(\mathfrak{I}\varphi)(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$= \sum_{e_1=0}^{1} \sum_{e_2=0}^{1} \cdots \sum_{e_n=0}^{1} \varphi(e_1, e_2, \cdots, e_n) \cdot x_1(e_1) \cdot x_2(e_2) \cdot \cdots \cdot x_n(e_n) \tag{2.13}$$

と表現されることが示される。

2.3 作用素 $\mathfrak{I}$ の性質

$x_\ell(e_\ell)$の定義式(2.11)から直ちにわかるように、

$$x_\ell(e_\ell) =$$
$$\begin{cases} 1 & \text{if } e_\ell = x_\ell \\ 0 & \text{if } e_\ell \neq x_\ell \end{cases} \tag{2.14}$$

であるから (命題3.2)、補間性質

$$\forall e_1, \forall e_2, \cdots, \forall e_n \in \{0, 1\},$$
$$(\mathfrak{I}\varphi)(e_1, e_2, \cdots, e_n) = \varphi(e_1, e_2, \cdots, e_n) \tag{2.15}$$

が成立している。そして、

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \mathfrak{I}(\mathfrak{I}\varphi) = \mathfrak{I}\varphi \tag{2.16}$$

が成立していることが示され、この事実から、

$$\mathrm{T}\varphi = \begin{cases} \mathfrak{T}\varphi / \|\mathfrak{T}\varphi\| & \text{if } \|\mathfrak{T}\varphi\| > 0 \\ 0 & \text{if } \|\mathfrak{T}\varphi\| = 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

と定義されている写像

$$\mathrm{T}: \Phi \rightarrow \Phi \tag{2.18}$$

が、SS理論[33]のaxiom 1を満たしていることが証明される。

2.4 axiom 1を満たさなければならない作用素としてのモデル構成作用素T

パターンモデルTφの諸性質とその意味を説明しておこう。

本論文で提案される“パターンφに対応するパターンモデル”Tφ は式（2.18）で定義されているが、本節では、このTφが、ある場合には、雑音除去性、次元軽減的冗長度圧縮性、ユニタリ座標変換不変性などを備えていることを保証するaxiom 1が指摘され、パターン情報処理におけるその役割が説明される。

処理の対象とするパターンφの集合 Φ はある可分なヒルベルト空間$\mathfrak{T}$の、零元を含むある部分集合であり、このΦ、並びに、式（2.18）の写像 T は次のaxiom 1を満たさなければならない。このとき、写像 T は**モデル構成作用素**（model-construction operator）と呼ばれ、T$\varphi \in \Phi$ は $\varphi \in \Phi$ の代りとなり得るという意味で、パターン$\varphi \in \Phi$ のモデル（model）と呼ばれる［13], [14], [18]。

現実のパターンφから離れ過ぎても密着し過ぎても不適切というという意味で、よいパターンモデルTφとは現実の実用的状況の、バランスのとれた抽象化を表現していなければならない。写像Tは、パターン$\varphi \in \Phi$の**簡略化規則**（simplification rule）を与えていると考えられる。

Axiom 1の（i）は、パターン$\varphi \in \Phi$ の多段モデル化過程（多段簡略化過程）

$$\varphi \rightarrow \mathrm{T}\varphi \rightarrow \mathrm{T}(\mathrm{T}\varphi) \rightarrow \mathrm{T}(\mathrm{T}(\mathrm{T}\varphi)) \rightarrow \cdots \tag{2.19}$$

について成立する事実

$$\varphi \rightarrow \mathrm{T}\varphi = \mathrm{T}(\mathrm{T}\varphi) = \mathrm{T}(\mathrm{T}(\mathrm{T}\varphi)) = \cdots \tag{2.20}$$

を考慮すると、単一段階で完結していていることを要請していると解釈できる。

<u>Axiom 1</u> **（パターン集合 Φ とモデル構成作用素 Tとの対【Φ,T】の満たすべき公理）**

（i）（零元の不動点性; fixed-point property of zero element）$0 \in \Phi \wedge \mathrm{T}0 = 0.$

（ii）（錐性;cone property;或いは、**吸収性**）

$\forall \varphi \in \Phi,\ a \cdot \varphi \in \Phi \wedge \mathrm{T}(a \cdot \varphi) = \mathrm{T}\varphi$

for any positive real number a.

（iii）（**ベキ等性**; idempotency; 埋込性）

$\forall \varphi \in \Phi,\ \mathrm{T}\varphi \in \Phi \wedge \mathrm{T}(\mathrm{T}\varphi) = \mathrm{T}\varphi.$

（iv）（写像Tの非零写像性;non-zero mapping property of T）$\exists \varphi \in \Phi,\ \mathrm{T}\varphi \neq 0.$ □

上述のaxiom 1からわかるように、パターン集合Φは

$$\mathrm{T} \cdot \Phi \equiv \{\mathrm{T}\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \subset \Phi \tag{2.21}$$

を満たし、原点（$=0$）を始点とし、Φの任意の点を通る半直線を含むような集合、つまり、錐であらねばならない。

上述のaxiom 1を満たすパターン集合 Φ の逐次決定法は、文献［14］の第24部、或いは、文献［33］の2.4節で説明されている。

2.4　真理関数の持つ情報量

S.Suzukiの提案している情報量（amount of information suggested by S.Suzuki）［19］ AIS は

$$AIS = \log_2[1+(N^-/N^+)+\{(M-N)/N^+\}] \tag{2.22}$$

である。ここに、

M : 入力の総数

N : M 個の入力の内、処理可能な入力の総数（N≦M）

N^+ : N 個の処理可能な入力の内、有意味な入力（希望出力を与える入力）の総数（$N^+ \leqq M$）

N^- : N 個の処理可能な入力の内、無意味な入力（希望出力を与えない入力）の総数（$N^- \leqq M$, $N+ + N- = N \leqq M$）　□

このとき、月本の提案する、式（2.8）の命題 η の情報量（論理エントロピー）［12］

$$I_{tukimoto} = -\log_2 \int dx(\tau\eta^2)(x) \tag{2.23}$$

が、

M＝N の場合、$AIS = I_{tukimoto}$, つまり、

$$\log_2[1+(N^-/N^+)] = I_{tukimoto} \tag{2.24}$$

と表現出来、Itukimotoの意味付けがAIS の立場から、明確になる。

2.5　月本研究との関連

前節でその1部の関連が指摘されたように、本論文の内容は、月本の

「a topological model for propositional logics」

からhintを得て、発展させたものであるが、月本の得た概念、表現式と接触したときには、具体的かつ精確な物となっている。

2.5.1　多項式関数 f の全体 L_1 の拡張 L

先ず、1実変数 x の実係数多項式関数

$$f:[0,1] \to R \tag{2.25}$$

に対し、

$$(\tau f)(x) \equiv q(x), \tag{2.26}$$

$$\text{where } f(x) = p(x) \cdot x(1-x) + q(x) \tag{2.27}$$

と定義される写像 τ_x を用いて、 n 実変数

$$x = (x_1\, x_2 \cdots x_n) \tag{2.28}$$

の実係数多項式関数

$$f:[0,1]^n \to R \tag{2.29}$$

に対しては、

$$(\tau f)(x) \equiv \prod_{i=1}^{n} (\tau_{x_i} f)(x) \tag{2.30}$$

と定義される写像 τ を導入する。月本の提案する多項式関数 f の全体 L_1 を、

$$L = \{f \mid \tau(f) = f\} \tag{2.31}$$

へと拡張する。この際、$x \in \{0,1\}^n$ であったものが、$x \in [0,1]^n$ へと拡張されていると考えて差し支えない。

2.5.2　月本の補間作用素 τ による内積の表現と、商集合の作るヒルベルト空間

式（2.13）の写像$\mathfrak{T}$に関し、

$$(\mathfrak{T} f)(x) = (\tau f)(x) \tag{2.32}$$

が成り立つことを指摘し、この式（2.32）の成立に際し、月本の内積

$$(\varphi,\eta)\equiv 2^n\cdot\int_0^1 dx\ \tau(\varphi\cdot\eta)(x) \tag{2.33}$$

が、φ,η を複素数値に拡張した形式で、

$$(\varphi,\eta) = 2^n\cdot\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\cdots\int_0^1 dx_n\ \mathfrak{T}(\varphi\cdot\overline{\eta})(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{2.34}$$

と定義され、これが、

$$(\varphi,\eta) = \sum_{e_1=0}^{1}\sum_{e_2=0}^{1}\cdots\sum_{e_n=0}^{1}\varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n)\cdot\overline{\eta}(e_1,e_2,\cdots,e_n) \tag{2.35}$$

と表現されることを明らかにする。完備化が出来、完全正規直交系 $\{\phi_k\}_{k=0\sim 2^n-1}$ の存在を示すことによって、Borel可測関数 φ のすべての集合に関する剰余類の集合（商集合）が可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ を形成することが明らかにされる。

2.5.3 補間作用素 $\mathfrak{T}$ によるBorel可測関数 φ の直交分解

この内積 (φ,η) は、n変数真理関数の集合の基底 $\{\phi_k\}_{k=0\sim 2^n-1}$ の直交性

$$\phi_k\cdot\phi_\ell=0 \text{ if } k\neq\ell \tag{2.36}$$

を、

$$(\phi_k\cdot\phi_\ell)=0 \text{ if } k\neq\ell \tag{2.37}$$

という形で拡張している（定理3.1の系2）。

そうすれば、

$\|\varphi\|^2\equiv(\varphi,\varphi)<\infty$ を満たす $\varphi=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ は、

$$(\varphi_\perp,\varphi_\perp)=0 \tag{2.38}$$

を満たす $\varphi_\perp$ が存在して、

$$\varphi=\mathfrak{T}(\varphi)+\varphi_\perp \tag{2.39}$$

と表現されることが証明されている（定理3.2）。

2.5.4 自己共役作用素 H によるニューラルネットの構成

月本論文［6］,［12］では得られていない“$\mathfrak{T}\varphi$”を使えば、命題論理を容易に実行可能なニューラルネットの理論をも展開可能な事実をも指摘する。つまり、自己共役作用素 H として、

$$H\varphi=\sum_{k=0}^{2^n-1}\lambda_k\cdot(\varphi,\phi_k)\cdot\phi_k, \quad \text{where } \lambda_k=k(k=0\sim 2^n-1) \tag{2.40}$$

を導入出来る事実を指摘し、この事実によって、各種ニューラルネットの理論［13］が構築可能になる事実が露呈して来る。

2.5.5 Borel可測関数 φ の1例の線形補間近似 $\mathfrak{T}\varphi$, そのsuzuki情報量 AIS $(\mathfrak{T}\varphi)$

特に、c_k, d_k を複素定数として、

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \prod_{k=1}^{n}[d_k\cdot x_k+c_k\cdot(1-x_k)] \tag{2.41}$$

の場合、$\mathfrak{T}\varphi$ のFourier式展開

$$\mathfrak{T}\varphi = \sum_{k=0}^{2^n-1}(\mathfrak{T}\varphi,\phi_k)\cdot\phi_k = \sum_{k=0}^{2^n-1}(\varphi,\phi_k)\cdot\phi_k \tag{2.42}$$

が、

添字 k の2進表現を、

$j_n j_{n-1} \cdots j_2 j_1$, where $j_k \in \{0, 1\}$

として

$$\mathfrak{T}\varphi = \sum_{k=0}^{2^n-1} \prod_{k=1}^{n} [d_k \cdot j_k + c_k \cdot (1-j_k)] \cdot \phi_k \tag{2.43}$$

であることを指摘する。

また、この式（2.41）のBorel可測関数 φ（の線形補間近似式（2.43）$\mathfrak{T}\varphi$）のSuzuki情報量 AIS（$\mathfrak{T}\varphi$）が、

$$\mathrm{AIS}(\mathfrak{T}\varphi) = n - \log_2 \sum_{k=0}^{2^n-1} \prod_{k=1}^{n} | d_k \cdot j_k + c_k \cdot (1-j_k) |^2 \tag{2.44}$$

と表現されることをも、指摘している。

2.5.6　線形補間の、今1つの意味

式（2.26）の $(\tau f)(x)$ は、実は、$f(x)$ の線形補間である。式（3.57）の形式で与えられ、

$$(\tau f)(x) = f(0) \cdot (1-x) + f(1) \cdot x \tag{2.45}$$

である。

この式（2.45）を変形すると、

$$(\tau f)(x) = f(0) + [x-0] \cdot [f(1) - f(0)] = f(0) + [x-0] \cdot D_f(0, 1) \tag{2.46}$$

ここに、

$$D_f(0, 1) = [f(1) - f(0)] / [1-0] \tag{2.47}$$

と再表現される。2式（2.46），（2.47）に登場している $D_f(0, 1)$ の一般形は、点 x における関数 f の差分商（divided difference）

$$D_f(a, x) = [f(x) - f(a)] / [x-a] \tag{2.48}$$

である。式（2.46）の $(\tau f)(x)$ は、次の命題2.1でいう関数 f の正確な表現式の左辺の近似である。

［命題2.1］（差分商による任意関数 $f(x)$ の表現）　不等式

$$\cdots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \cdots \tag{2.49}$$

を満たす実数の点列 $\{a_i\}$ を導入すると、任意関数 f はその差分商 $D_f(a_i, x)$ を用いて、

$\forall x \in \mathrm{R}$(実数全体), $\forall i$,

$$f(a_i) + [x - a_i] \cdot D_f(a_i, x) = f(x) \tag{2.50}$$

と表現出来る。

（証明）　先ず、$D_f(a_i, x)$ の定義式（2.48）から、

$$(x - a_i) \cdot D_f(a_i, x) = f(x) - f(a_i)$$

が成り立ち、これを変形したものである。 □

3. n 変数真理関数の拡張 $\varphi: [0,1]^n \to Z$ の集合のヒルベルト空間化

本章では、式（2.10）で定義される写像 $\mathfrak{T}_\ell$ が線形補間性、可換性、巾等性などを備えている事実を指摘した後（3.1節）、式（2.9）の $\mathfrak{T} \equiv \mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \cdots \mathfrak{T}_n$ が、正規直交基底 $\{x_k(e_k)\}$ を持つこと、並びに、その補間性（命題3.4）、巾等性（命題3.5）が証明される。

集合 X で定義された同値関係 ～ に関する互いに異なった同値類全体の族を、同値関係 ～ による X の商集合（quotient set）といい、X/～ と表すことにすれば、本章では、このような商集合が得られるように、特別の内積(φ,η)を導入した後得られるpre-Hilbert空間を完備化する手続きが説明される。

3.1　写像$\mathfrak{T}_\ell$の線形補間性、直交性、巾等性

$[0,1]^n \subset$Euclid空間 R^n の中の開集合の全体を含む最小のσ－加法族を R^n におけるBorel集合族といい、Borel集合族に属する集合をBorel集合と呼ぶ。

$[0,1]^n$ で定義された実数値関数φが、任意の実数 a に対して、

$$\{x\in[0,1]^n \mid \varphi(x)>a\}\in \text{Borel 集合族}$$

を満たすとき、φ をBorel可測関数という。その実部、虚部が共にBorel可測であるとき、複素数値関数はBorel可測であるという。

以後、$[0,1]^n$ において式 (3.1) の複素数値Borel可測関数φの全体を$\mathfrak{D}$で表す。有限個の不連続な点を持つ関数はBorel可測であることに注意しておく。

その定義域が $\{0,1\}^n$ で、その値域が $\{0,1\}$ であるような真理関数の拡張

$$\varphi:[0,1]^n\to Z(\text{複素数体})\in\mathfrak{D} \tag{3.1}$$

に対し、式（2.9）で定義される写像$\mathfrak{T}$を導入する。ここに、式（2.10）の$\mathfrak{T}_\ell\varphi$は、式（2.11）で定義される$x_\ell(e_\ell)$を用いないで書けば、

$$(\mathfrak{T}_\ell\varphi)(x_1,x_2,\cdots,x_\ell,\cdots,x_n)$$
$$\equiv\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_{\ell-1},0,x_{\ell+1},\cdots,x_n)\cdot(1-x_\ell)+\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_{\ell-1},1,x_{\ell+1},\cdots,x_n)\cdot x_\ell \tag{3.2}$$
$$=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_{\ell-1},0,x_{\ell+1},\cdots,x_n)+[\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_{\ell-1},1,x_{\ell+1},\cdots,x_n)-\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_{\ell-1},0,x_{\ell+1},\cdots,x_n)]\cdot x_\ell \tag{3.3}$$

と定義･表現される。**線形補間条件**

$$(\mathfrak{T}_\ell\varphi)(x_1,x_2,\cdots,x_{\ell-1},0,x_{\ell+1},\cdots,x_n)=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_{\ell-1},0,x_{\ell+1},\cdots,x_n) \tag{3.4}$$
$$(\mathfrak{T}_\ell\varphi)(x_1,x_2,\cdots,x_{\ell-1},1,x_{\ell+1},\cdots,x_n)=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_{\ell-1},1,x_{\ell+1},\cdots,x_n) \tag{3.5}$$

が満たされており、$\mathfrak{T}_\ell\varphi$**は、第$\ell\in L$番目の変数x_ℓに関し、φの線形補間式になっている事実**に、注意しておこう。

月本の論文[12] では、φを f と、また、式 (2.9) の $\mathfrak{T}\equiv\prod_{\ell\in L}\mathfrak{T}_\ell$を$\tau\equiv\prod_{\ell\in L}\tau_{x_\ell}$と表現している。更に、月本理論は1次元の場合を陽に表現しているのみであり、2次元の場合は$f(x,y)=(x+y-xy)^2$という例を考察しているに過ぎない。以下、本章においては、＊印を付した命題、定理、公式については、月本が陽に得ていないものである。

次の命題3.1は、式（2.10）で定義される2つの積写像$\mathfrak{T}_\ell\mathfrak{T}_k(k\neq\ell)$の表現、可換性などを指摘している。

［命題3.1］（写像$\mathfrak{T}_\ell$の、基底$x_k(e_k)$による表現、可換性）

(i)*　$\forall\varphi\in\mathfrak{D},\forall\ell\in\{1,2,\cdots,n\}$,

$\forall k\in\{1,2,\cdots,n\}-\{\ell\}$,

$$(\mathfrak{T}_\ell\mathfrak{T}_k\varphi)(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=\sum_{e_\ell=0}^{1}\sum_{e_k=0}^{1}\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_{k-1},e_k,x_{k+1},\cdots,x_{\ell-1},e_\ell,x_{\ell+1},\cdots,x_n)\cdot x_k(e_k)\cdot x_\ell(e_\ell).$$

(ii)(可換性)　$\mathfrak{T}_\ell\mathfrak{T}_k=\mathfrak{T}_k\mathfrak{T}_\ell\,(k\neq\ell)$.

(iii)(不動点性)$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ の中に、x_ℓが含まれていなければ、

$(\mathfrak{T}_\ell \psi)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

（証明）(i), (ii) の証明：2定義式 (2.10), (2.11) から、

$\eta(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots x_n)$

$\equiv (\mathfrak{T}_k \varphi)(x_1, x_2, \cdots, x_k, x_n)$

$$= \sum_{e_k=0}^{1} \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, e_k, x_{k+1}, \cdots, x_n) \cdot x_k(e_k) \qquad (3.6)$$

を得、よって、

$(\mathfrak{T}_\ell \mathfrak{T}_k \varphi)(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$= (\mathfrak{T}_\ell \eta)(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots, x_\ell, \cdots, x_n)$

$= \sum_{e_\ell=0}^{1} \eta(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{\ell-1}, e_\ell, x_{\ell+1}, \cdots, x_n) \cdot x_\ell(e_\ell)$

$= \sum_{e_\ell=0}^{1} [\sum_{e_k=0}^{1} \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, e_k, x_{k+1}, \cdots, x_{\ell-1}, e_\ell, x_{\ell+1}, \cdots, x_n) \cdot x_k(e_k)] \cdot x_\ell(e_\ell)$

$= \sum_{e_\ell=0}^{1} \sum_{e_k=0}^{1} \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, e_k, x_{k+1}, \cdots, x_{\ell-1}, e_\ell, x_{\ell+1}, \cdots, x_n) \cdot x_k(e_k)) \cdot x_\ell(e_\ell)$.

(iii) の証明：式 (3.2) から、

$(\mathfrak{T}\ \psi)(x_1, x_2, \cdots, x_\ell, \cdots, x_n)$

$= \psi(x_1, x_2, \cdots, x_{\ell-1}, 0, x_{\ell+1}, \cdots, x_n) \cdot (1 - x_\ell) + \psi(x_1, x_2, \cdots, x_{\ell-1}, 1, x_{\ell+1}, \cdots, x_n) \cdot x_\ell$

であるが、$\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の中に、x_ℓ が含まれていないから、

$= \psi(x_1, x_2, \cdots, x_\ell, \cdots, x_n) \cdot (1 - x_\ell) + \psi(x_1, x_2, \cdots, x_\ell, \cdots, x_n) \cdot x_\ell$

$= \psi(x_1, x_2, \cdots, x_\ell, \cdots, x_n)$. □

次の命題3.2は、式 (2.11) で定義される基底

$$x_k(e_k), e_k \in \{0, 1\}, k = 0, 1, \cdots, n \qquad (3.7)$$

が正規直交性を備えている事実を明らかにしている。

[命題3.2]*(基底 $x_k(e_k)$ の正規直交性)

$j_k, e_k \in \{0, 1\}$ として、

$x_k(e_k) \mid_{x_k = j_k} = j_k(e_k) =$

$\begin{cases} 1 & \text{if } j_k = e_k \\ 0 & \text{if } j_k \neq e_k. \end{cases}$

（証明）　$x_k(e_k)$ の定義式(2.11)から、

$j_k(e_k) =$

$$\begin{cases} 1 - j_k & \text{if } e_k = 0 \\ j_k & \text{if } e_k = 1 \end{cases} \qquad (3.8)$$

であることに注意して、4つの場合 (i) ～ (iv) に分けて、本命題の成立を示す。

(i) $e_k = 0 \wedge j_k = 0$ の場合

$j_k(e_k) = 1 - j_k = 1$.

(ii) $e_k = 1 \wedge j_k = 1$ の場合

$j_k(e_k) = j_k = 1$.

(iii) $e_k = 0 \wedge j_k = 1$ の場合

$j_k(e_k) = 1 - j_k = 0$.

(iv) $e_k = 1 \wedge j_k = 0$ の場合

$j_k(e_k) = j_k = 0$. □

3式 (2.10), (3.2), (3.3) での写像 $\mathfrak{T}_k$ が巾等性、つまり、射影性

$\eta_k \equiv \mathfrak{T}_k \varphi$ に対しては、$\mathfrak{T}_k \eta_k = \eta_k$(不動点性) (3.9)

を備えている事実を指摘している。

[命題3.3] ＊(巾等性)

$\forall \varphi \in \mathfrak{D}, \forall_k \in \mathbf{L}, \mathfrak{T}_k(\mathfrak{T}_k \varphi) = \mathfrak{T}_k \varphi.$

(証明)　2式 (2.10), (2.11) から、

$\eta(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$\equiv (\mathfrak{T}_k \varphi)(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$= \sum_{j_k=0}^{1} \varphi(x_1,x_2,\cdots,j_k,\cdots,x_n) \cdot x_k(j_k)$ (3.10)

と書けるから、

$(\mathfrak{T}_k \eta)(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots,x_\ell,\cdots,x_n)$

$= \sum_{j_k=0}^{1} \eta(x_1,x_2,\cdots,e_k,\cdots,x_n) \cdot x_k(e_k)$

$= \sum_{j_k=0}^{1} [\sum_{j_k=0}^{1} \varphi(x_1,x_2,\cdots,j_k,\cdots,x_n) \cdot e_k(j_k)] \cdot x_k(e_k)$

$= \sum_{j_k=0}^{1} \varphi(x_1,x_2,\cdots,e_k,\cdots,x_n) \cdot x_k(e_k)$　$\because$　命題3.2

$= (\mathfrak{T}_k \varphi)(x_1,x_2,\cdots,x_n)$　$\because$　式 (3.10)

$= \eta(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ □

3.2 写像$\mathfrak{T}$の諸性質

次の命題3.4は、式 (3.1) のパターン$\varphi \in \mathfrak{D}$に対し、このφに式 (2.9) の補間作用素$\mathfrak{T}$を作用させて得られる"$\varphi \in \mathfrak{D}$の**補間近似モデル**"と称されるパターン ($\mathfrak{T}\varphi$) $(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in \mathfrak{D}$がその端点での関数値の集合

$\{\varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n) \mid e_k \in \{0, 1\} \ (k=0,1,\cdots,n)\}$ (3.11)

から一意的に決まることを指摘している。

[命題3.4]＊

(i) ($\mathfrak{T}\varphi$の補間展開)

$\forall \varphi \in \mathfrak{D}, (\mathfrak{T}\varphi)(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$\equiv (\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \cdots \mathfrak{T}_n \varphi)(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$= \sum_{e_1=0}^{1} \sum_{e_2=0}^{1} \cdots \sum_{e_n=0}^{1} \varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n) \cdot x_1(e_1) \cdot x_2(e_2) \cdot \cdots \cdot x_n(e_n)$

(ii) (補間性; shape-preserving interpolation)

$\forall \varphi \in \mathfrak{D}, \forall j_1, \forall j_2, \cdots, \forall j_n \in \{0,1\},$

$(\mathfrak{T}\varphi)(j_1,j_2,\cdots,j_n) = \varphi(j_1,j_2,\cdots,j_n).$

(証明)　(i) の証明：写像$\mathfrak{T}$の定義式 (2.9) に命題3.1の (i) を適用すればよい。

(ii) の証明：(i) の表現式を適用すれば、

$(\mathfrak{T}\varphi)$ $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$

$= \sum_{e_1=0}^{1} \sum_{e_2=0}^{1} \cdots \sum_{e_n=0}^{1} \varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n) \cdot j_1(e_1) \cdot j_2(e_2) \cdot \cdots \cdot j_n(e_n)$

であるが、この表現式に命題3.2を勘案すれば、

$= \varphi(j_1,j_2,\cdots,j_n)$

が得られる。 □

次の命題3.5は、式 (2.9) で定義される写像$\mathfrak{T}$の巾等性を指摘している。

[命題3.5]＊(巾等性)

$\forall \varphi \in \mathfrak{D}, \mathfrak{I}(\mathfrak{I}\varphi) = \mathfrak{I}\varphi \in \mathfrak{D}.$

（証明）　写像$\mathfrak{I}$の 定義式(2.9)から、

$\mathfrak{I}\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2 \cdots \mathfrak{I}_n \cdot \mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2 \cdots \mathfrak{I}_n$

であるが、

$= \mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2\mathfrak{I}_2 \cdots \mathfrak{I}_n\mathfrak{I}_n$　∵　命題3.1の(ii)

$= \mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2 \cdots \mathfrak{I}_n$　∵　命題3.3

$= \mathfrak{I}$　∵　定義式(2.9)　□

3.3　内積の導入に伴う内積、ノルムの、端点での関数値による表現と、補間作用素$\mathfrak{I}$による表現

式(2.9)の写像$\mathfrak{I}$を用いて、$\varphi, \eta \in \mathfrak{D}$間の内積(inner product)$(\varphi, \eta)$を、

$$(\varphi, \eta) \equiv 2^n \cdot \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 dx_n\, \mathfrak{I}(\varphi \cdot \overline{\eta})(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (3.12)$$

と定義する。

次の命題3.6の成立は、式（3.11）で示されている"$\varphi \in \mathfrak{D}$の端点での関数値の集合"から、$\mathfrak{I}\varphi \in \mathfrak{D}$が一意的に決まること（命題3.4）に基づいている。

[命題3.6]*

$\forall e_1, \forall e_2, \cdots, \forall e_n \in \{0, 1\},$

$\varphi(e_1, e_2, \cdots, e_n) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{I}\varphi = 0.$

（証明）⇒は明らかである。式(3.7)の基底は、

$$\sum_{e_1=0}^{1} \sum_{e_2=0}^{1} \cdots \sum_{e_n=0}^{1} a_{e_1e_2\cdots e_n} \cdot x_1(e_1) \cdot x_2(e_2) \cdot \cdots \cdot x_n(e_n) = 0 \quad (3.13)$$

⇒各複素定数$a_{e_1e_2\cdots e_n}$は全て、零である

が成立しているという意味で、1次独立であるから、命題3.4の（i）での$\mathfrak{I}\varphi$の表現から、対偶を考えれば、⇐も明然。　□

パターン$\varphi \in \mathfrak{D}$のノルム

$$\|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)} = 2^{n/2} \cdot \left[\int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 dx_n\, \mathfrak{D}(|\varphi|^2)(x_1, x_2, \cdots, x_n)\right]^{1/2} \geqq 0 \quad (3.14)$$

を導入する。

次の定理3.1は、式（3.12）の内積（φ, η）,式（3.14）のノルム$\|\varphi\|$を式（3.11）で示されている"φの端点での関数値の集合"で表現したものである。

[定理3.1]**（内積、ノルムの、端点での関数値による表現定理）**

(i)　$\forall \varphi, \forall \eta \in \mathfrak{D}, (\varphi, \eta)$

$$= \sum_{e_1=0}^{1} \sum_{e_2=0}^{1} \cdots \sum_{e_n=0}^{1} \varphi(e_1, e_2, \cdots, e_n) \cdot \eta(e_1, e_2, \cdots, e_n).$$

(ii)　$\forall \varphi \in \mathfrak{D}, \|\varphi\|^2$

$$= \sum_{e_1=0}^{1} \sum_{e_2=0}^{1} \cdots \sum_{e_n=0}^{1} |\varphi(e_1, e_2, \cdots, e_n)|^2.$$

（証明）　(ii)は(i)において$\varphi = \eta$としたものである。(i)の成立を示そう。

$x_\ell(e_\ell)$の定義式(2.11)に注意して、

①$e_\ell = 0$のとき、

$\int_0^1 dx_\ell\, x_\ell(e_\ell) = \int_0^1 dx_\ell(1 - x_\ell)$

$= [x_\ell - x_\ell^2/2]_0^1 = 1/2$

②$e_\ell=1$のとき、

$\int_0^1 dx_\ell\, x_\ell(e_\ell)=\int_0^1 dx_\ell\, x_\ell$

$=[x_\ell^2/2]_0^1=1/2$

要約して、

$$\forall e_\ell\in\{0,1\},\ \int_0^1 dx_\ell\, x_\ell(e_\ell)=1/2 \tag{3.15}$$

であること、並びに、命題3.4の(i)を適用して、

$$(\mathfrak{T}(\varphi\cdot\eta))(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=\sum_{e_1=0}^{1}\sum_{e_2=0}^{1}\cdots\sum_{e_n=0}^{1}\varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n)\cdot\eta(e_1,e_2,\cdots,e_n)\cdot x_1(e_1)\cdot x_2(e_2)\cdot\cdots\cdot x_n(e_n) \tag{3.16}$$

が得られることを、内積(φ,η)の定義式(3.12)に代入すれば、

$$(\varphi,\eta)$$
$$=2^n\cdot\sum_{e_1=0}^{1}\sum_{e_2=0}^{1}\cdots\sum_{e_n=0}^{1}\varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n)\cdot\overline{\eta}(e_1,e_2,\cdots,e_n)\cdot\int_0^1 dx_1\, x_1(e_1)\int_0^1 dx_2\, x_2(e_2)\cdots\int_0^1 dx_n\, x_n(e_n)$$
$$=2^n\cdot\sum_{e_1=0}^{1}\sum_{e_2=0}^{1}\cdots\sum_{e_n=0}^{1}\varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n)\cdot\overline{\eta}(e_1,e_2,\cdots,e_n)\cdot(1/2)^n$$
$$=\sum_{e_1=0}^{1}\sum_{e_2=0}^{1}\cdots\sum_{e_n=0}^{1}\varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n)\cdot\overline{\eta}(e_1,e_2,\cdots,e_n)$$

□

次の定理3.1の系1は、内積(φ,η)が式(2.9)で定義される補間作用素$\mathfrak{T}$の働きに無関係に保存されることを指摘している。

[定理3.1の系1]* **(内積、ノルムの、補間作用素$\mathfrak{T}$による表現定理)**

(i) $\forall\varphi,\forall\eta\in\mathfrak{D}$,

$(\varphi,\eta)=(\mathfrak{T}\varphi,\mathfrak{T}\eta)=(\mathfrak{T}\varphi,\eta)=(\varphi,\mathfrak{T}\eta)$.

(ii) $\forall\varphi\in\mathfrak{D},\ \|\varphi\|^2=\|\mathfrak{T}\varphi\|^2$.

(証明) (ii)は(i)において$\varphi=\eta$としたものである。(i)の成立を示そう。

定理3.1の(i)において、

$$(\mathfrak{T}\varphi,\mathfrak{T}\eta)$$
$$=\sum_{e_1=0}^{1}\sum_{e_2=0}^{1}\cdots\sum_{e_n=0}^{1}(\mathfrak{T}\varphi)(e_1,e_2,\cdots,e_n)\cdot(\overline{\mathfrak{T}\eta})(e_1,e_2,\cdots,e_n) \tag{3.17}$$

であるが、

$$=\sum_{e_1=0}^{1}\sum_{e_2=0}^{1}\cdots\sum_{e_n=0}^{1}\varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n)\cdot(\overline{\mathfrak{T}\eta})(e_1,e_2,\cdots,e_n)\quad\because\ \text{命題3.4の (ii)}$$
$$=(\varphi,\mathfrak{T}\eta)\quad\because\ \text{定理3.1の (i)} \tag{3.18}$$

が得られる。残りの2等式

$$(\mathfrak{T}\varphi,\mathfrak{T}\eta)=(\mathfrak{T}\varphi,\eta) \tag{3.19}$$
$$(\mathfrak{T}\varphi,\mathfrak{T}\eta)=(\varphi,\eta) \tag{3.20}$$

の成立についても、同様に証明される。

□

次の定理3.1の系2は、式(3.12)の内積(φ,η)に関し、式(3.7)の各$x_k(e_k)$の積で構成される関数系

$$\{x_1(e_1)\cdot x_2(e_2)\cdot\cdots\cdot x_n(e_n)\}_{e_k\in\{0,1\}\,(k=1\sim n)} \tag{3.21}$$

が正規直交系である事実を指摘している。

[定理3.1の系2] **(正規直交定理)**

$$(x_1(j_1)\cdot x_2(j_2)\cdot\cdots\cdot x_n(j_n),x_1(k_1)\cdot x_2(k_2)\cdot\cdots\cdot x_n(k_n))=\begin{cases}1 & \text{if } j_1=k_1\wedge j_2=k_2\wedge\cdots\wedge j_n=k_n\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

(証明) 定理3.1の(i)を適用すれば、表現

$(x_1(j_1)\cdot x_2(j_2)\cdot\cdots\cdot x_n(j_n), x_1(k_1)\cdot x_2(k_2)\cdot\cdots\cdot x_n(k_n))$

$$=\sum_{e_1=0}^{1}\sum_{e_2=0}^{1}\cdots\sum_{e_n=0}^{1} e_1(j_1)\cdot e_2(j_2)\cdot\cdots\cdot e_n(j_n)\cdot\overline{e_1}(k_1)\cdot\overline{e_2}(k_2)\cdot\cdots\cdot\overline{e_n}(k_n) \tag{3.22}$$

を得るが、これは、命題3.2を適用して、

$$=\begin{cases}1 \text{ if } j_1=k_1\wedge j_2=k_2\wedge\cdots\wedge j_n=k_n\\ 0 \text{ otherwise}\end{cases}$$

□

3.4 パターンの、補間作用素$\mathfrak{I}$による内積の導入に伴う表現

次の定理3.2は、任意のパターン$\varphi\in\mathfrak{D}$が、式（3.27）のように互いに直交する$\varphi_1\equiv\mathfrak{I}\varphi,\varphi_2\equiv\varphi_\perp$の和に、式(3.25)の$\varphi=\varphi_1+\varphi_2$の如く分解できることを指摘したものである。注意すべきは、この直交分解式(3.25)においては、その分解2成分φ_1,φ_2

について、

$\mathfrak{I}\varphi_1=\varphi_1$(写像$\mathfrak{I}$に関する不動点性)

$\mathfrak{I}\varphi_2=0$（写像$\mathfrak{I}$に関する消去性）　∵ 式(3.28)

が成り立っていることである。

[定理3.2]＊ **(パターンの、補間作用素$\mathfrak{I}$による直交分解定理)**

任意の$\varphi\in\mathfrak{D}$に対し、

$$\|\varphi-\mathfrak{I}\varphi\|=0 \tag{3.23}$$

を得、

$$(\varphi_\perp,\varphi_\perp)=0 \tag{3.24}$$

を満たす$\varphi_\perp\in\mathfrak{D}$が存在し、パターン$\varphi$は、

$$\varphi=\mathfrak{I}\varphi+\varphi_\perp\in\mathfrak{D} \tag{3.25}$$

のように表現され、然も、

$$(\varphi,\mathfrak{I}\varphi)=(\mathfrak{I}\varphi,\mathfrak{I}\varphi) \tag{3.26}$$

$$(\varphi_\perp,\varphi)=(\varphi_\perp,\mathfrak{I}\varphi)=0 \tag{3.27}$$

$$\mathfrak{I}\varphi_\perp=0 \tag{3.28}$$

も成り立っている。

（証明）　定理3.1の(ii)より、

$$\forall\varphi\in\mathfrak{D}, \|\varphi-\mathfrak{I}\varphi\|^2$$

$$=\sum_{e_1=0}^{1}\sum_{e_2=0}^{1}\cdots\sum_{e_n=0}^{1}|\varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n)-(\mathfrak{I}\varphi)(e_1,e_2,\cdots,e_n)|^2$$

であるが、命題3.4の（ii）を適用すれば、

$$=0 \tag{3.29}$$

であることがわかり、式（3.23）が証明された。

そこで、$\varphi_\perp\in\mathfrak{D}$を、

$$\varphi_\perp\equiv\varphi-\mathfrak{I}\varphi \tag{3.30}$$

とおけば、式（3.29）から、

$$0=\|\varphi_\perp\|^2=(\varphi_\perp,\varphi_\perp) \tag{3.31}$$

を得て、2式（3.24),（3.25）の成立がわかった。

また、定理3.1の系1,（i）において、$\varphi=\eta$とおけば、式（3.26）が得られる。

更に、

$(\varphi_\perp, \mathfrak{T}\varphi)$
$=(\varphi-\mathfrak{T}\varphi, \mathfrak{T}\varphi)$　$\because$　式(3.30)
$=(\varphi, \mathfrak{T}\varphi)-(\mathfrak{T}\varphi, \mathfrak{T}\varphi)$
$=0$　$\because$　(3.26)

が知れ、

$(\varphi_\perp, \varphi)$
$=(\varphi-\mathfrak{T}\varphi, \varphi)$　$\because$　式（3.30）
$=(\varphi, \varphi)-(\mathfrak{T}\varphi, \varphi)$
$=0$　$\because$　定理3.1の系1,（i）

も知れ、式（3.27）の証明が終わったことがわかる。

最後に、式（3.28）の成立を示そう。

$\mathfrak{T}\varphi_\perp=\mathfrak{T}(\varphi-\mathfrak{T}\varphi)$　$\because$　式（3.30）
$=\mathfrak{T}\varphi-\mathfrak{T}(\mathfrak{T}\varphi)$
　$\because$　式(2.9)から、作用素$\mathfrak{T}$は線形
$=0$　$\because$　命題3.5

を得て、示された。 □

3.5 Schwarz の不等式、3角不等式

次の補助定理3.1は、次の命題3.7の証明に必要とされるものであり、その証明法もよく知られているものである。

［補助定理3.1］**（Schwarz inequality）**

不等式

$$\forall\varphi, \forall\eta\in\mathfrak{D}, |(\varphi,\eta)|\leqq\|\varphi\|\cdot\|\eta\| \tag{3.32}$$

が成り立ち、等号は、

$$\|\varphi\|=0\vee\|\eta\|=0\vee [\exists a(\neq 0)\in Z, \varphi=a\cdot\eta] \tag{3.33}$$

の時に限り成り立つ。

（証明）$(\varphi,\eta)=0$ の場合は、不等式(3.32)の成立は自明である。

$(\varphi,\eta)\neq 0$ であるとしよう。

任意の実数λに対し、λの2次式

$$\begin{aligned}0&\leqq\|\varphi+\lambda\cdot(\varphi,\eta)\cdot\eta\|^2\\ &=(\varphi+\lambda\cdot(\varphi,\eta)\cdot\eta, \varphi+\lambda\cdot(\varphi,\eta)\cdot\eta)\\ &=\|\varphi\|^2+\lambda\cdot\overline{(\varphi,\eta)}\cdot(\varphi,\eta)\\ &\quad+\lambda\cdot(\varphi,\eta)\cdot(\eta,\varphi)+\lambda\cdot|(\varphi,\eta)|^2\cdot\|\eta\|^2=\|\varphi\|^2+2\lambda\cdot|(\varphi,\eta)|^2\\ &\quad+\lambda^2\cdot|(\varphi,\eta)|^2\cdot\|\eta\|^2\end{aligned} \tag{3.34}$$

が成り立つから、その判別式が $\leqq 0$ 、つまり、

$$|(\varphi,\eta)|^4-|(\varphi,\eta)|^2\cdot\|\varphi\|^2\cdot\|\eta\|^2\leqq 0$$

でなければならない。よって、

$(\varphi,\eta)\neq 0$ であれば、

$$|(\varphi,\eta)|^2\leqq\|\varphi\|^2\cdot\|\eta\|^2$$

が得られ、不等式（3.32）の成立がわかった。

$\|\varphi\|=0 \vee \|\eta\|=0$ の場合は、$(\varphi,\eta)=0$ を得、式 (3.32) の等号が成り立つ。その他に、式 (3.32) の等号が成り立つのは、式 (3.34) $=0$ の場合であるから、これ、即ち、

$$\varphi+\lambda\cdot(\varphi,\eta)\cdot\eta=0 \qquad (3.35)$$

の場合である。以上から、式 (3.32) の等号が成り立つのは、式 (3.33) の場合に限ることがわかる。

□

次の命題3.7は、式（3.24）が成立するような $\varphi_{\perp}$ の集まりの部分空間性を明らかにしたものである。

[命題3.7]*

$$\|\varphi\|^2=(\varphi,\varphi)=0 \qquad (3.36)$$

を満たす φ の集合を $\mathfrak{D}_{\perp}$ と書くと、

$\varphi,\eta\in\mathfrak{D}_{\perp}$ に対し、

(i) $\varphi+\eta\in\mathfrak{D}_{\perp}$

(ii) $\forall a\in Z$（複素数体）, $a\cdot\varphi\in\mathfrak{D}_{\perp}$

（証明） $\varphi,\eta\in\mathfrak{D}_{\perp}$ とする。

$0\leqq\|\varphi+\eta\|^2\leqq(\varphi+\eta,\varphi+\eta)$

$=\|\varphi\|^2+\|\eta\|^2+(\varphi,\eta)+(\eta,\varphi)$

$=(\varphi,\eta)+(\eta,\varphi) \quad \because \quad \|\varphi\|^2=\|\eta\|^2=0$

$=2\cdot\mathrm{Re}(\varphi,\eta)$

$\leqq2\cdot|\mathrm{Re}(\varphi,\eta)|$

$\leqq2\cdot|(\varphi,\eta)|=[|\mathrm{Re}(\varphi,\eta)|^2+|\mathrm{Im}(\varphi,\eta)|^2]^{1/2}$

$\leqq2\cdot\|\varphi\|\cdot\|\eta\|$

$\because$ 補助定理3.1のSchwarzの不等式

$=0 \qquad \because \quad \|\varphi\|^2=\|\eta\|^2=0$

$\therefore \quad \|\varphi+\eta\|=0$

を得て、(i) が示された。また、

$\|a\cdot\varphi\|^2=(a\cdot\varphi,a\cdot\varphi)=|a|^2\cdot\|\varphi\|^2=0$

を得て、(ii) が示された。 □

次の命題3.8の証明法も、ヒルベルト空間論の初歩においてよく知られている。

[命題3.8]*（3角不等式; the triangular inequality property）

$$\|\varphi+\eta\|\leqq\|\varphi\|+\|\eta\| \qquad (3.37)$$

が成り立ち、等号は、

$$\mathrm{Im}(\varphi,\eta)=0 \wedge \mathrm{Re}(\varphi,\eta)\geqq0 \wedge$$
$$|(\varphi,\eta)|=\|\varphi\|\cdot\|\eta\| \qquad (3.38)$$

の時に限り、成り立つ。

（証明） $\|\varphi+\eta\|^2=(\varphi+\eta,\varphi+\eta)\leqq$

$\|\varphi\|^2+\|\eta\|^2+(\varphi,\eta)+(\eta,\varphi)$

$=\|\varphi\|^2+\|\eta\|^2+2\cdot\mathrm{Re}(\varphi,\eta)$

$$\leqq\|\varphi\|^2+\|\eta\|^2+2\cdot|\mathrm{Re}(\varphi,\eta)| \qquad (3.39)$$

$$\leqq\|\varphi\|^2+\|\eta\|^2+2\cdot|(\varphi,\eta)| \qquad (3.40)$$

$$\leqq \|\varphi\|^2+\|\eta\|^2+2\cdot\|\varphi\|\cdot\|\eta\| \tag{3.41}$$

∵ 補助定理3.1のSchwarzの不等式

$$=(\|\varphi\|+\|\eta\|)^2$$

を得、不等式（3.37）の成立が示された。

式（3.37）での等号成立は、3式(3.39)～(3.41)において等号が成立する場合であるから、明らかに、

$$\mathrm{Re}(\varphi,\eta)=|\mathrm{Re}(\varphi,\eta)|\wedge$$
$$|\mathrm{Re}(\varphi,\eta)|=|(\varphi,\eta)|\wedge$$
$$|(\varphi,\eta)|=\|\varphi\|\cdot\|\eta\| \tag{3.42}$$

の場合に限る。この式（3.42）を書き直したものが、式（3.38）である。 □

3.6 内積の導入に伴うpre-Hilbert空間の完備化

本章では、命題3.7で登場した部分空間

$$\mathfrak{D}_\perp \equiv \{\varphi\in\mathfrak{D} \mid (\varphi,\varphi)=0\} \tag{3.43}$$

に属する“パターンφの直交分解式（3.25）内の$\varphi_\perp$”をあからさまに意識しない情報処理技術を確保するため、$\mathfrak{T}\varphi$をφかのごとく取り扱える数学的枠組み、つまり、剰余類の作る空間の完備化手法が研究される。

3.6.1 剰余類の作る線形空間

$\mathfrak{D}$の$\mathfrak{D}_\perp$による剰余類（residue class）

$$\langle\mathfrak{D}\rangle_{\mathrm{rc}} \equiv \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\perp \tag{3.44}$$

を考える。即ち、

$$\varphi-\eta\in\mathfrak{D}_\perp \tag{3.45}$$

であるようなηをφと同じ類(class)にまとめて、$\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}}$と書く：

$$\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}} \equiv \{\eta\in\mathfrak{D} \mid \varphi-\eta\in\mathfrak{D}_\perp\} \tag{3.46}$$

□

$$\varphi\sim\eta \Leftrightarrow \varphi-\eta\in\mathfrak{D}_\perp \tag{3.47}$$

で定義される$\mathfrak{D}$上の2元関係 ～ は、命題3.7より、

①（反射性 ; reflexive law） $\varphi\sim\varphi$

②（対称性 ; symmetric law） $\varphi\sim\eta$ ならば、$\eta\sim\varphi$

③（推移性 ; transitive law） $\varphi\sim\eta\wedge\eta\sim\psi$ ならば、$\varphi\sim\psi$

を満たし、同値関係（equivalence relation）である。

$\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}}$は$\varphi$を含む同値類（the equivalence class containing φ）である。同値関係 ～ によるパターンφの集合$\mathfrak{D}$の商集合

$$\mathfrak{D}/\sim \equiv \{\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}} \mid \varphi\in\mathfrak{D}\} \tag{3.48}$$

は式（3.44）の$\langle\mathfrak{D}\rangle_{\mathrm{rc}}$のことである。任意の$\varphi\in\mathfrak{D}$は、$\varphi_\perp\in\mathfrak{D}_\perp$が存在して、式（3.25）のように直交分解可能な事実を指摘している定理3.2より、$\mathfrak{T}\varphi\in\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}}$であり、$\mathfrak{T}\varphi$は類$\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}}$の代表元の1つであることになる。

実は、$\varphi-\eta\in\mathfrak{D}_\perp$ならば、$\varphi$も$\eta$も類$\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}}$の代表元の1つとなる。

類$\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}}$, $\langle\eta\rangle_{\mathrm{rc}}$の和、スカラー乗法を、

（イ）$\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}}$, $\langle\eta\rangle_{\mathrm{rc}}$については$\varphi+\eta$を含む類

$\langle\varphi+\eta\rangle_{rc}$（ここに、$\varphi\in\langle\varphi\rangle_{rc}$, $\eta\in\langle\eta\rangle_{rc}$）

（ロ）$a\cdot\langle\varphi\rangle_{rc}$についてはa・$\varphi$を含む類

$\langle a\cdot\varphi\rangle_{rc}$（ここに、$\varphi\in\langle\varphi\rangle_{rc}$）

によって定義すると、$\langle\mathfrak{D}\rangle_{rc}$或いは、$\mathfrak{D}/\sim$ は線形空間（複素数体を係数とする加法群; ベクトル空間）になる。

然も、

$\varphi_1,\varphi_2\in\langle\varphi\rangle_{rc}, \eta_1,\eta_2\in\langle\eta\rangle_{rc}$

ならば、

$\varphi_1-\varphi_2\in\mathfrak{D}_\perp, \eta_1-\eta_2\in\mathfrak{D}_\perp$

によって、補助定理3.1のSchwarzの不等式を適用すると、

$$\begin{aligned}0&\leqq|(\varphi_1,\eta_1)-(\varphi_2,\eta_2)|\\&=|(\varphi_1-\varphi_2,\eta_1)+(\varphi_2,\eta_1-\eta_2)|\\&\leqq\|\varphi_1-\varphi_2\|\cdot\|\eta_1\|+\|\varphi_2\|\cdot\|\eta_1-\eta_2\|\\&=0\end{aligned}$$

となるから、

$$(\varphi_1,\eta_1)=(\varphi_2,\eta_2) \tag{3.49}$$

を得、**内積（φ,η）の値は代表元のとり方によってよらない**ことがわかる。よって、

$$(\varphi,\eta)_{rc}\equiv(\langle\varphi\rangle_{rc},\langle\eta\rangle_{rc})\equiv(\varphi,\eta)$$
$$\text{ここに、}\varphi\in\langle\varphi\rangle_{rc},\ \eta\in\langle\eta\rangle_{rc} \tag{3.50}$$

によって、$\langle\mathfrak{D}\rangle_{rc}$の2つの類$\langle\varphi\rangle_{rc},\langle\eta\rangle_{rc}$の内積が定義されてよい。

$(\langle\varphi\rangle_{rc},\langle\varphi\rangle_{rc})=0$は、類$\langle\varphi\rangle_{rc}$が$\mathfrak{D}_\perp$に属すること、即ち、

式(3.44)の剰余類 $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\perp$の零ベクトルになること

を示すからである。

3.6.2 線形空間の完備化としてのヒルベルト空間

内積の定義された線形空間（ベクトル空間）$\mathfrak{H}$がノルム距離 $d(\varphi,\eta)\equiv\|\varphi-\eta\|$ の意味で**“完備”**（complete）な距離空間になるとき、即ち、

「Cauchyの収束条件 $\lim_{k,\ell\to\infty}\|\varphi_k-\varphi_\ell\|=0$ (3.51)

を満足する点列 $\{\varphi_k\}$ k＝1,2,… に対し、必ず、

$\lim_{k\to\infty}\|\varphi_k-\varphi\|=0$ (3.52)

なる如き収束点φ」 (3.53)

が$\mathfrak{H}$内に存在するとき、$\mathfrak{H}$を**ヒルベルト（Hilbert）空間**という。このような収束点がφ,ηと、2つ存在するとすれば、

$$\|\varphi-\eta\|\leqq\|\varphi-\varphi_k\|+\|\varphi_k-\eta\|$$

において、$k\to\infty$とすれば、

$$0\leqq\|\varphi-\eta\|\leqq0$$

を得て、$\varphi=\eta$となり、収束点は唯1つに限ることがわかる。

3.6.3 剰余類の作る空間の完備化

内積の定義された線形空間は**pre-Hilbert空間**と呼ばれるが、pre-Hilbert空間$\mathfrak{H}_0$に対し、常に、式（3.53）でいう収束点φを、$\mathfrak{H}_0$をその稠密な部分空間とするようなHilbert空間$\mathfrak{H}$に（すべての実数を有理数列の極限として定義するのと同じ考えで）作ることができる。このような$\mathfrak{H}$を$\mathfrak{H}_0$の

完備化（completion）というが（文献［20］の16.3節, p.141）、実は、$\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\perp$の完備化は$\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\perp$自身である。次の命題3.9の (i) については、月本［12］は、

$$\varphi(\mathrm{x})=\varphi(0)\cdot(1-\mathrm{x})+\varphi(1)\cdot\mathrm{x} \tag{3.54}$$

についてのみ、証明しており、(ii)，(iii) については、明らかとしている。

［命題3.9］＊

式（3.44）の $\langle\mathfrak{D}\rangle_{\mathrm{rc}}\equiv\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\perp$に関し、

(i) $(\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}},\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}})\geqq 0$

$0\in\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}}\Leftrightarrow(\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}},\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}})=0$

(ii) $(\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}},\langle\eta\rangle_{\mathrm{rc}})=\overline{(\langle\eta\rangle_{\mathrm{rc}},\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}})}$

(iii) $(\langle\varphi_1\rangle_{\mathrm{rc}}+\langle\varphi_2\rangle_{\mathrm{rc}},\langle\eta\rangle_{\mathrm{rc}})$

$=(\langle\varphi_1\rangle_{\mathrm{rc}},\langle\eta\rangle_{\mathrm{rc}})+(\langle\varphi_2\rangle_{\mathrm{rc}},\langle\eta\rangle_{\mathrm{rc}})$,

$\forall \mathrm{a}\in\mathrm{Z}$（複素数体）, $(\mathrm{a}\cdot\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}},\langle\eta\rangle_{\mathrm{rc}})=\mathrm{a}\cdot(\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}},\langle\eta\rangle_{\mathrm{rc}})$

が成り立ち、3.6.1項の2定義（イ)，(ロ）に従い、2つの演算

$$\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}}+\langle\eta\rangle_{\mathrm{rc}} \tag{3.55}$$

$$\mathrm{a}\cdot\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}}\ (\mathrm{a}\in\mathrm{Z}) \tag{3.56}$$

を導入すると、

$$\|\varphi\|_{\mathrm{rc}}\equiv\|\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}}\|\equiv\sqrt{(\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}},\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}})}<\infty \tag{3.57}$$

を満たす $\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}}$の集合$\mathfrak{H}$はHilbert空間を形成する。

（証明） (i) の証明: 前半は、

$(\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}},\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}})=(\varphi,\varphi)$ ∵ 式（3.50）

$\geqq 0$

と示される。後半については、

$(\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}},\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}})=0\Leftrightarrow(\varphi,\varphi)=0$ ∵ 式（3.50）

$\Leftrightarrow\varphi\in\mathfrak{D}_\perp$ ∵ 式（3.43）

$\Leftrightarrow 0\in\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}}$ ∵ 式（3.46）

と示された。

(ii), (iii) は、2式 (3.12), (3.50) から明らかである。 □

命題3.9から、次の6事項（イ）～（ヘ）が成り立つ

（イ） $(\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}},\langle\eta_1\rangle_{\mathrm{rc}},+\langle\eta_2\rangle_{\mathrm{rc}})$

$=(\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}},\langle\eta_1\rangle_{\mathrm{rc}})+(\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}},\langle\eta_2\rangle_{\mathrm{rc}})$

（ロ） $\forall\mathrm{a}\in\mathrm{Z}$, $(\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}},\mathrm{a}\cdot\langle\eta\rangle_{\mathrm{rc}})$

$=\mathrm{a}\cdot(\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}},\langle\eta\rangle_{\mathrm{rc}})$

が成立し、また、

（ハ） $\|\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}}\|\geqq 0\wedge$

$\|\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}}\|=0\Leftrightarrow 0\in\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}}$

（ニ）（3角不等式） 命題3.8より、不等式

$\|\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}}+\langle\eta\rangle_{\mathrm{rc}}\|\leqq\|\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}}\|+\|\langle\eta\rangle_{\mathrm{rc}}\|$

が成立し、ここで、等号 ＝ は

$\mathrm{Re}(\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}},\langle\eta\rangle_{\mathrm{rc}})\geqq 0\wedge$

$\mathrm{Im}(\langle\varphi\rangle_{\mathrm{rc}},\langle\eta\rangle_{\mathrm{rc}})=0\wedge$

$|(\langle\varphi\rangle_{rc}, \langle\eta\rangle_{rc})| = \|\langle\varphi\rangle_{rc}\|\cdot\|\langle\eta\rangle_{rc}\|$

の時に限る。

(ホ) $\|a\cdot\langle\varphi\rangle_{rc}\| = |a|\cdot\|\langle\varphi\rangle_{rc}\|,\ a\in Z$

(へ) (Schwarzの不等式)　補助定理3.1より、不等式

$|(\langle\varphi\rangle_{rc}, \langle\eta\rangle_{rc})| \leqq \|\langle\varphi\rangle_{rc}\|\cdot\|\langle\eta\rangle_{rc}\|$

が成立し、ここで、等号 = は

$\langle\varphi\rangle_{rc} = 0 \vee$

$\langle\eta\rangle_{rc} = 0 \vee$

$[\exists a(\neq 0)\in Z,\ \langle\varphi\rangle_{rc} = a\cdot\langle\eta\rangle_{rc}]$

の時に限る。 □

式 (3.50)、命題3.9によって、$\langle\varphi\rangle_{rc}(\ni\varphi)$ の代りに、唯単に、φ と書いてよいから、以後、この記法に従うことがある。

4. パターン $\varphi:[0,1]^n\to Z$ の情報量 AIS($\mathfrak{I}\varphi$)

本章では、式 (3.1) のパターン φ の直交分解式 (3.25) の1つの応用として、φ の情報量 AIS (φ) を定義し、その諸性質を調べてみよう。

4.1 SUZUKI情報量 AIS

S.Suzukiの提案する情報量 [8] AIS は、式 (2.22) での諸記号 M, N, N^+, N^- を使って、

$$AIS \equiv \log_2 [M/N^+] \tag{4.1}$$

と定義される。4種類のShannon形の情報量

$$Is^{(1)} = \log_2 M,\ Is^{(2)} = \log_2 N,$$
$$Is^{(3)} = \log_2 N^+,\ Is^{(4)} = \log_2 N^- \tag{4.2}$$

の内、第1,4番目の情報量を用いると、その差として、

$$AIS = Is^{(1)} - Is^{(4)} \tag{4.3}$$

として表される。

有意味な入力の総数 N^+ が全入力の総数 M の 2^{-m} である、つまり、$M/2^m$ であれば、AIS は、明らかに、

$$AIS = \log_2 2^m = m\,[ビット] \tag{4.4}$$

である。

式 (2.22) での諸記号 M, N, N^+, N^- の間には、

$$N = N^+ + N^- \tag{4.5}$$
$$M = N + (M - N) = N^+ + N^- + (M - N) \tag{4.6}$$

という関係があるから、この式 (4.1) の AIS は、式 (2.22) のごとく変形されることはすぐ、わかる。

更に、M = N が成り立ち、すべての入力が処理可能であれば、AIS は、

$$AIS = \log_2 (1 + N^-/N^+)\ \text{if}\ M = N \tag{4.7}$$

となる。

4.2 n変数真理関数φ: $\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$の情報量 AIS($\varphi$)

式(2.6)のn変数真理関数φの情報量 AIS(φ)は、

$$M=2^n \tag{4.8}$$

$N(=2^n)$:φが表現可能な入力$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$の総数 (4.9)

$N^+(\varphi)$:$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$を満たす入力($\varphi$が真になる入力)$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$の総数 (4.10)

$N^-(\varphi)$:$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$を満たす入力($\varphi$が偽になる入力)$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$の総数 (4.11)

として、

$$AIS(\varphi)=\log_2[1+N^-(\varphi)/N^+(\varphi)] \tag{4.12}$$

となる。

式(2.6)のn変数真理関数φについては、

$$\varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n)\in\{0,1\} \tag{4.13}$$

であり、

$$N^+(\varphi)=\sum_{e_1=0}^{1}\sum_{e_2=0}^{1}\cdots\sum_{e_n=0}^{1}\varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n) \tag{4.14}$$

である。そして、

$$\varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n)=|\varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n)|=|\varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n)|^2 \tag{4.15}$$

が成り立っている事実を考慮すると、4式 (4.1), (4.7) (4.13), (4.14) から、

$$\begin{aligned}&AIS\ (\varphi)\\&=\log_2\ [2^n/\sum_{e_1=0}^{1}\sum_{e_2=0}^{1}\cdots\sum_{e_n=0}^{1}|\varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n)|^2]\end{aligned} \tag{4.16}$$

と表現される。式 (4.16) の AIS(φ)は、定理3.1の(ii)によれば、

$$\begin{aligned}&AIS(\varphi)\\&=\log_2[2^n/\|\varphi\|^2]\\&=n-\log_2\|\varphi\|^2\end{aligned} \tag{4.17}$$

と表されてよい。式 (4.17) の情報量 AIS(φ)は、月本によって論理エントロピー (命題φの持つ情報量) の定義として、採用されているが [12]、本論文では、式 (4.1) のSUZUKI情報量から導かれたものである事実に注意しておこう。

4.3 パターン$\mathfrak{I}\varphi$の情報量

前節の論から、式 (2.6) の n 変数真理関数φの情報量 AIS(φ) は式 (4.17) で与えられた。式 (2.6) の n 変数真理関数φの拡張である式 (3.1) の n 変数複素数値関数φに対しても、

$$AIS(\varphi)\equiv n-\log_2\|\varphi\|^2 \tag{4.18}$$

と定義しよう。そうすれば、次の定理4.2が成り立ち、情報量 AIS(φ) は式 (3.11) で示されている“$\varphi\in\mathfrak{D}$の端点での関数値の集合”から、一意的に決まることことが判明する。

[定理4.1] **(情報量の表現定理)**

$$\begin{aligned}&\forall\varphi\in\mathfrak{D},\ AIS(\varphi)\\&=n-\log_2\sum_{e_1=0}^{1}\sum_{e_2=0}^{1}\cdots\sum_{e_n=0}^{1}|\varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n)|^2].\end{aligned}$$

(証明) 定理3.1の (ii) を式 (4.18) に考慮すれば、明らかである。 □

次の定理4.2が成り立ち、情報量 AIS(φ)は剰余類について一意的に決まり、φに式(2.9)の補間作用素$\mathfrak{I}$を作用させて得られる“φの補間近似モデル”$\mathfrak{I}\varphi$に一致することが判明する。

[定理4.2] **(剰余類・補間の情報量定理)**

(i) **(剰余類情報量定理)**

$\forall \eta \in \langle \varphi \rangle_{rc} \in \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_{\perp}, \mathrm{AIS}(\eta) = \mathrm{AIS}(\varphi).$

(ii) **(補間情報量定理)**

$\forall \varphi \in \mathfrak{D}, \mathrm{AIS}(\mathfrak{I}\varphi) = \mathrm{AIS}(\varphi).$

（証明） (i) は、2定義式（3.50),（3.56）を式（4.18）に考慮すれば、明らかである。(ii) は、定理3.1の系1を式（4.18）に考慮すれば、明らかである。 □

5. 完全正規直交系、フーリェ式展開

本章では、3章の内容と結果的には、1部、重複することを恐れず、式（3.1）のパターン $\varphi \in \mathfrak{D}$ の構造を明らかにできる諸命題、諸定理が説明される。

5.1 n変数真理関数 φ の選言標準形の基底

不等式

$$0 \leqq k \leqq 2^n - 1 \tag{5.1}$$

を満たす非負整数 k を n 桁の2進数で表現したものを、e_n, e_1 は各々、最上位、最下位の桁として、

$$e_n e_{n-1} \cdots e_1$$
$$\text{ここに、} e_\ell \in \{0,1\} (\ell = 1 \sim n) \tag{5.2}$$

としよう。

$x_\ell(e_\ell)(\ell = 1 \sim n)$ の定義式 (2.11) に注意して、

$$\phi_k \equiv \phi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$\equiv x_1(e_1) \cdot x_2(e_2) \cdot \cdots \cdot x_n(e_n) \tag{5.3}$$

を導入する。

次の命題5.1は、式（2.6）の n 変数真理関数 φ の選言標準形（disjunctive normal form）

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$= \bigvee_{k=0}^{2^n-1} [c_k \wedge \phi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)]$$
$$\text{ここに、} x_k, c_k \in \{0,1\} \tag{5.4}$$

での、基底 $\{\phi_k\}_{0 \leqq k \leqq 2n-1}$ の性質として、よく知られているが、一応、証明しておく。

［命題5.1］**（各 ϕ_k の相互排反性）**

$$\forall x_1, \forall x_2, \cdots, \forall x_n \in \{0,1\},$$
$$\phi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) \wedge \phi_\ell(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$= \phi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot \phi_\ell(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{5.5}$$
$$=$$
$$\begin{cases} 0 & \text{if } k \neq \ell \\ \phi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) & \text{if } k = \ell \end{cases} \tag{5.6}$$

（証明） 式（5.5）の成立は、$\phi_k \in \{0,1\}$ に注意すれば、

$$a, b \in \{0,1\} \Rightarrow a \wedge b = a \cdot b \tag{5.7}$$

から明らかである。

式（5.6）の成立を示そう。

(i) $k \neq \ell$ とすれば、表現

$$\phi_k \cdot \phi_\ell = \cdots \cdot x_j \cdot (1-x_j) \cdots \tag{5.8}$$

を許す正整数j $(1 \leqq j \leqq n)$ が必ず、存在する。ここで、$x_j \in \{0, 1\}$であるから、

$$x_j \cdot (1-x_j) = 0 \tag{5.9}$$

が成り立ち、式(5.9)を式(5.8)に代入すれば、本命題の前半の成立が知れた。

(ii) $k=\ell$とすれば、3式(5.1)〜(5.3)を使って、

$$\phi_k \cdot \phi_k = x_1(e_1)^2 \cdot x_2(e_2)^2 \cdot \cdots \cdot x_n(e_n)^2 \tag{5.10}$$

である。$x_\ell(e_\ell) \in \{0, 1\}$ $(\ell = 1 \sim n)$ であるから、

$$x_\ell(e_\ell)^2 = x_\ell(e_\ell) \ (\ell = 1 \sim n) \tag{5.11}$$

が成り立っているから、この式(5.11)を式(5.10)に代入すれば、

$$\phi_k \cdot \phi_k = x_1(e_1) \cdot x_2(e_2) \cdot \cdots \cdot x_n(e_n) = \phi_k \tag{5.12}$$

が得られ、本命題の後半の成立が知れた。 □

5.2 n変数パターン関数φの構造を明らかにする基底$\{\phi k\}_{0 \leqq k \leqq 2^n - 1}$

実際は、$x_\ell \in \{0, 1\}$ $(\ell = 1 \sim n)$ ではなくして、

$$x_\ell \in [0, 1], \text{ つまり、} 0 \leqq x_\ell \leqq 1 \ (\ell = 1 \sim n) \tag{5.13}$$

の場合を本研究では考えているから、式(3.12)の内積(φ, η)に関する各$\phi_k(k=1 \sim n)$の正規直交性を指摘する一層精密な次の命題5.2が必要となる。

本命題5.2は定理3.1の系2であり、そこでは、定理3.1の(i)、並びに、命題3.2を使って証明もなされている。

先ず、その(iii)が命題5.1の拡張となっている次の補助定理5.1を証明しておこう。

[補助定理5.1] **(零性，不動点性と相互排反性)**

(i) **(写像$\mathfrak{T}_\ell$に関する$x_\ell(e_\ell)$の零性)**

$\mathfrak{T}_\ell(x_\ell(1) \cdot x_\ell(0)) = 0 (\ell = 1 \sim n).$

(ii) **(写像$\mathfrak{T}_\ell$に関する$x_\ell(e_\ell)$の不動点性)**

$$\mathfrak{T}_k(x_\ell(e_\ell)) = x_\ell(e_\ell) \ (k \neq \ell) \tag{5.14}$$

が成り立ち、

$$\mathfrak{T}_\ell(x_\ell(e_\ell)) = x_\ell(e_\ell) \ (\ell = 1 \sim n). \tag{5.15}$$

(iii) ($\mathfrak{T}$を作用後の**各ϕ_kの相互排反性**)

$$\mathfrak{T}\overline{(\phi_k \cdot \phi_\ell)} = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq \ell \\ \mathfrak{T}\phi_k = \phi_k & \text{if } k = \ell. \end{cases}$$

(証明) $x_\ell(e_\ell)$の定義式(2.11)に注意しておく。

(i)の証明:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{T}_\ell(x_\ell(1) \cdot x_\ell(0)) \\ &= x_\ell \cdot (1-x_\ell) \mid_{x_\ell = 0} (1-x_\ell) + x_\ell \cdot (1-x_\ell) \mid_{x_\ell = 1} \cdot x_\ell \\ &\qquad \because \text{ 式(2.10)} \vee \text{式(3.2)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(ii)の証明: 作用素$\mathfrak{T}_\ell$の定義式(2.10)、或いは、定義式(3.2)から、

$$\begin{aligned} &\mathfrak{T}_k(x_\ell(e_\ell)) \\ &= x_\ell(e_\ell) \mid_{x_k = 0} \cdot (1-x_k) + x_\ell(e_\ell) \mid_{x_k = 1} \cdot x_k \end{aligned}$$

$=x_\ell(e_\ell).$

を得、また、

(イ) $x_\ell(e_\ell)|_{x_\ell=0}=$

$$\begin{cases}1-x_\ell=1 & \text{if } e_\ell=0\\ x_\ell=0 & \text{if } e_\ell=1\end{cases}$$

(ロ) $x_\ell(e_\ell)|_{x_\ell=1}=$

$$\begin{cases}1-x_\ell=0 & \text{if } e_\ell=0\\ x_\ell=1 & \text{if } e_\ell=1\end{cases}$$

であるから、この(イ),(ロ)から、

$$\mathfrak{T}_\ell(x_\ell(e_\ell))$$
$$=x_\ell(e_\ell)|_{x_\ell=0}\cdot(1-x_\ell)+x_\ell(e_\ell)|_{x_\ell=1}\cdot x_\ell$$
$$=$$
$$\begin{cases}1\cdot(1-x_\ell)+0\cdot x_\ell=(1-x_\ell) & \text{if } e_\ell=0\\ 0\cdot(1-x_\ell)+1\cdot x_\ell=x_\ell & \text{if } e_\ell=1\end{cases}$$
$$=x_\ell(e_\ell)$$

を得て、証明された。

(iii) の証明: $k\neq\ell$とすれば、変数x_jを含まない関数ψが存在して、表現

$$\phi_k\cdot\overline{\phi_\ell}=\psi\cdot x_j(1)\cdot x_j(0)\cdots \tag{5.16}$$

を許す正整数$j(1\leqq j\leqq n)$が必ず、存在する。ここで、命題3.1の(ii)の指摘する“$\mathfrak{T}_k$同士の可換性”を適用すれば、

$$\mathfrak{T}(\phi_k\cdot\overline{\phi_\ell})$$
$$=(\mathfrak{T}_1\cdot\mathfrak{T}_2\cdot\cdots\cdot\mathfrak{T}_{j-1}\cdot\mathfrak{T}_{j+1}\cdot\cdots\mathfrak{T}_n)\cdot\mathfrak{T}_j(x_j(1)\cdot x_j(0))$$

が成り立つが、補助定理5.1の(i)を適用して、

$$=(\mathfrak{T}_1\cdot\mathfrak{T}_2\cdot\cdots\cdot\mathfrak{T}_{j-1}\cdot\mathfrak{T}_{j+1}\cdot\cdots\mathfrak{T}_n)\cdot 0$$
$$=0\quad\because\ 式(3.2)$$

を得て、前半の成立が示された。

後半の成立を示そう。

(ハ) $\mathfrak{T}_j(x_j(e_j)^2)=\mathfrak{T}_j(x_j(e_j))\ (1\leqq j\leqq n)$

$\because$ 2式(2.11),(3.2)

に注意すれば、

$e_j=0$のとき、

$$\mathfrak{T}_j(x_j(e_j)^2)=1\cdot(1-x_j)+0\cdot x_j$$
$$=(1-x_j)=x_j(e_j)$$

$e_j=1$のとき、

$$\mathfrak{T}_j(x_j(e_j)^2)=0\cdot(1-x_j)+1\cdot x_j$$
$$=x_j=x_j(e_j)$$

が成り立っており、それ故、

(ニ) $\mathfrak{T}_j(x_j(e_j)^2)=x_j(e_j)\ (1\leqq j\leqq n)$

が得られる。この(ハ)から、

$$\mathfrak{T}(\phi_k\cdot\overline{\phi_\ell})$$

$$=\mathfrak{T}_1\cdot\mathfrak{T}_2\cdot\cdots\cdot\mathfrak{T}_n(x_1(e_1)^2\cdot x_2(e_2)^2\cdot\cdots\cdot x_n(e_n)^2)$$
$$=\mathfrak{T}_1(x_1(e_1)^2)\cdot\mathfrak{T}_2(x_2(e_2)^2)\cdot\cdots\cdot\mathfrak{T}_n(x_n(e_n)^2) \tag{5.17}$$
$$=\mathfrak{T}_1(x_1(e_1))\cdot\mathfrak{T}_2(x_2(e_2))\cdot\cdots\cdot\mathfrak{T}_n(x_n(e_n)^2) \tag{5.18}$$
$$=\mathfrak{T}_1\cdot\mathfrak{T}_2\cdot\cdots\cdot\mathfrak{T}_n(x_1(e_1)\cdot x_2(e_2)\cdot\cdots\cdot x_n(e_n))$$
$$=\mathfrak{T}(\phi_k) \tag{5.19}$$
が知れ、更に、式（5.18）に（ニ）を適用して、
$$=x_1(e_1)\cdot x_2(e_2)\cdot\cdots\cdot x_n(e_n)$$
$$=\phi_k$$
が知れ、後半の成立が示された。 □

月本の論文［12］では、次の命題5.2の証明は、あからさまに与えられていない。

［命題5.2］（関数系 $\{\phi_k\}_{0\leqq k\leqq 2n-1}$の正規直交性）

$$(\phi_k,\phi_\ell)=\begin{cases}0 & \text{if } k\neq\ell\\ 1 & \text{if } k=\ell.\end{cases}$$

（証明）　内積の定義式（3.12）に注意しておく。

(i) $k\neq\ell$ の場合

$$(\phi_k,\phi_\ell)$$
$$=2^n\cdot\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\cdots\int_0^1 dx_n\,\mathfrak{T}(\phi_k\cdot\overline{\phi_\ell})(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=2^n\cdot\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\cdots\int_0^1 dx_n\,0 \quad \because\ \text{補助定理5.1の(iii)}$$
$$=0$$

(ii) $k=\ell$の場合

$$(\phi_k,\phi_\ell)$$
$$=2^n\cdot\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\cdots\int_0^1 dx_n\,\mathfrak{T}(\phi_k\cdot\overline{\phi_\ell})(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=2^n\cdot\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\cdots\int_0^1 dx_n\ \phi_k \quad \because\ \text{補助定理5.1の(iii)}$$
$$=2^n\cdot\int_0^1 dx_1\,x_1(e_1)\cdot\int_0^1 dx_2\,x_2(e_2)\cdot\cdots\cdot\int_0^1 dx_n\ x_n(e_n)$$
$$=2^n\cdot(1/2)^n \quad \because\ \text{定理3.1の証明中の①,②}$$
$$=1.$$
□

次の命題5.3の証明も、月本の論文［12］では、あからさまに与えられていない。

命題5.3の（iii）は補助定理5.1でもあり、また、（iv）は、（ii）を考慮すると、命題3.6である。

［命題5.3］

不等式（5.1）を満たす添字としての正整数 k の2進表現式（5.2）を考え、式（5.3）で定義される関数ϕ_kについて、次の(i)～(iv)が成り立つ：

(i) $j_\ell\in\{0,1\}$ $(\ell=1\sim n)$としたとき、

$$\phi_k(j_1,j_2,\cdots,j_n)=\begin{cases}1\ \cdots\ \forall\ell\in\{1,2,\cdots,n\},\ j_\ell=e_\ell\text{のとき}\\ 0\ \cdots\ \exists\ell\in\{1,2,\cdots,n\},\ j_\ell\neq e_\ell\text{のとき}.\end{cases}$$

(ii) $\forall\varphi\in\mathfrak{D},\forall k(0\leqq k\leqq 2^n-1)$,

$(\mathfrak{T}\varphi, \phi_k)=(\varphi, \phi_k)=\varphi(e_1, e_2, \cdots, e_n)$.

(iii) $\forall k\ (0 \leqq k \leqq 2^n-1),\ \mathfrak{T}\phi_k=\phi_k$.

(iv) $\forall k\ (0 \leqq k \leqq 2^n-1),\ (\mathfrak{T}\varphi, \phi_k)=0$ ならば、$\mathfrak{T}\varphi=0$.

(証明)　(i) の証明:

$$\phi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|_{x_\ell=j_\ell\ (\ell=1\sim n)}$$

$$\equiv j_1(e_1)\cdot j_2(e_2)\cdot\cdots\cdot j_n(e_n) \tag{5.20}$$

であるが、命題3.2を適用すると、所要の結果を得る。

(ii) の証明：定理3.1の (i) を適用して、

$$(\mathfrak{T}\varphi, \phi_k)$$

$$=\sum_{j_1=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}\cdots\sum_{j_n=0}^{1}(\mathfrak{T}\varphi)(j_1,j_2,\cdots,j_n)\cdot\overline{\phi_k}(j_1,j_2,\cdots,j_n)$$

が得られるが、更に、命題3.4の (ii) を適用すれば、

$$=\sum_{j_1=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}\cdots\sum_{j_n=0}^{1}\varphi(j_1,j_2,\cdots,j_n)\cdot\overline{\phi_k}(j_1,j_2,\cdots,j_n) \tag{5.21}$$

を得、明らかに、定理3.1の (i) から、

$$=(\varphi, \phi_k)$$

が成り立ち、前半が示された。後半を示そう。

$\overline{\phi_k}=\phi_k$であるから、本命題5.3の (i) を式 (5.21) に適用すれば、

$$(\mathfrak{T}\varphi, \phi_k)$$

$$=\varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n)$$

を得、後半が示された。

(iii) の証明：命題3.4の (i) から、

$$\forall x_1, \forall x_2, \cdots, \forall x_n,$$

$$(\mathfrak{T}\phi_k)(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$=\sum_{j_1=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}\cdots\sum_{j_n=0}^{1}\phi_k(j_1,j_2,\cdots,j_n)\cdot x_1(j_1)\cdot x_2(j_2)\cdot\cdots\cdot x_n(j_n)$$

であるが、本命題5.3の (i) を適用すると、

$$=x_1(e_1)\cdot x_2(e_2)\cdot\cdots\cdot x_n(e_n) \quad \because\ \text{本命題5.3の (i)}$$

$$=\phi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n) \quad \because\ \text{式 (5.3)}$$

を得て、証明が終わった。

(iv) の証明：

$$\forall k(0 \leqq k \leqq 2^n-1),$$

$$0=(\mathfrak{T}\varphi, \phi_k)=\varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n) \quad \because\ \text{本命題5.3の (ii)}$$

$$=(\mathfrak{T}\varphi)(e_1,e_2,\cdots,e_n) \quad \because\ \text{命題3.4の (ii)}$$

が成立しているから、

$$\|\mathfrak{T}\varphi\|^2$$

$$=\sum_{j_1=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}\cdots\sum_{j_n=0}^{1}|\mathfrak{T}\varphi(j_1,j_2,\cdots,j_n)|^2 \quad \because\ \text{定理3.1の (ii)}$$

$$=0,$$

$$\therefore\ \mathfrak{T}\varphi=0.$$

□

命題5.3の (i), (ii) から、主張出来ることは次の通りである：

命題3.4の (i) での$\mathfrak{T}\varphi$の補間展開において、関数系 $\{\phi_k\}_{0 \leqq k \leqq 2^n-1}$が正規直交系であることを考慮すると (定理3.1の系2、或いは、命題5.2)、

$\forall x_1, \forall x_2, \cdots, \forall x_n, 0 \leqq \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqq 1$ の場合

$|(\mathfrak{T}\varphi, \phi_k)|^2$ は、パターン φ に ϕ_k が存在する程度、或いは、座標点 $x_1=e_1$, $x_2=e_2$, …, $x_n=e_n$ において論理 $\phi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)=1$ が成立する程度を表している。 □

5.3 関数系 $\{\phi_k\}_{0 \leqq k \leqq 2^n-1}$ の完全性

付録Aなどのヒルベルト空間論によると、$\|\varphi-\eta\|=0$ を満たす φ, η を $\varphi=\eta$ と書いてよい。つまり、

$$\|\varphi-\eta\|=0 \Leftrightarrow \varphi=\eta \tag{5.22}$$

であるから、定理3.2の、式（3.25）は、唯単に、

$$\varphi=\mathfrak{T}\varphi \tag{5.23}$$

と書いてよくて、この表現を許す理論的基盤（剰余類の作る空間の完備化）は3.6節で与えられている。

命題5.2から、関数系 $\{\phi_k\}_{0 \leqq k \leqq 2^n-1}$ は正規直交系であり、命題5.3の (iv) から、完全であることが判明するから、付録Bの定理B.2が適用され、

完全関係

$$\forall\varphi \in \mathfrak{D}, \|\mathfrak{T}\varphi\|^2=\sum_{k=0}^{2^n-1}|(\mathfrak{T}\varphi, \phi_k)|^2 \tag{5.24}$$

が成り立ち、また、Fourier式展開

$$\forall\varphi \in \mathfrak{D}, \mathfrak{T}\varphi=\lim_{m\to 2^n-1}\sum_{k=0}^{m}(\mathfrak{T}\varphi, \phi_k)\cdot\phi_k$$

$$=\sum_{k=0}^{2^n-1}(\mathfrak{T}\varphi, \phi_k)\cdot\phi_k \tag{5.25}$$

が成り立つ。

2式（5.24),（5.25）に、命題5.3の (ii) を代入すれば、次のⅠ, Ⅱが得られる：

Ⅰ. Parseval's formula

$\forall\varphi \in \mathfrak{D}$,

$\|\mathfrak{T}\varphi\|^2$

$=\sum_{k=0}^{2^n-1}|(\mathfrak{T}\varphi, \phi_k)|^2$ ∵ 式（5.24）

$=\sum_{k=0}^{2^n-1}|(\varphi, \phi_k)|^2$ ∵ 命題5.3の (ii) (5.26)

$=\|\varphi\|^2$ ∵ 式（5.24） (5.27)

$=\sum_{k=0}^{2^n-1}|\varphi(e_1, e_2, \cdots, e_n)|^2$ ∵ 式（5.26）∧命題5.3の (ii) (5.28)

Ⅱ. Fourier series of φ relative to $\{\phi_k\}_{0 \leqq k \leqq 2^n-1}$

$\mathfrak{T}\varphi$

$=\sum_{k=0}^{2^n-1}(\mathfrak{T}\varphi, \phi_k)\cdot\phi_k$ ∵ 式（5.25）

$=\sum_{k=0}^{2^n-1}(\varphi, \phi_k)\cdot\phi_k$ ∵ 命題5.3の (ii) (5.29)

$=\varphi$ ∵ 式（5.25） (5.30)

$=\sum_{e_1=0}^{1}\sum_{e_2=0}^{1}\cdots\sum_{e_n=0}^{1}\varphi(e_1, e_2, \cdots, e_n)\cdot x_1(e_1)\cdot x_2(e_2)\cdot\cdots\cdot x_n(e_n)$

∵ 式（5.29）∧命題5.3の (ii) ∧式（5.3） (5.31)

□

式（5.23）の成立は、式（5.30）で示されており、2式（5.26),（5.27), 或いは、2式（5.29),（5.30）の成立は、関数系 $\{\phi_k\}_{0 \leqq k \leqq 2^n-1}$ の完全性を意味している。

6. 特別なパターンに対する諸量

本章では、式（1.5）の「鳥は一般には飛ぶ」という2変数命題φに対し、定理3.2,定理4.1,定理4.2を適用した結果が説明され、その後、2例のパターンφにつき、式（2.13）の補間モデル$\mathfrak{T}\varphi$, 定理4.1のAIS(φ)を求めてみよう。

6.1 「鳥は一般には飛ぶ」という2変数命題φ

Borel可測関数φの、式（5.29）の線形補間近似$\mathfrak{T}\varphi$, その、定理4.1のSuzuki情報量 AIS$(\mathfrak{T}\varphi)$につき、簡単な場合を先ず、考察してみよう。

2変数a, bを各々、x_1, x_2と表すことにすると、式（1.5）の「鳥は一般には飛ぶ」という2変数命題φは、

$$\varphi(x_1, x_2)$$
$$=x_1\cdot x_2+\alpha\cdot x_1\cdot(1-x_2)+(1-x_1)\cdot x_2+(1-x_1)\cdot(1-x_2) \tag{6.1}$$

と再表現され、定理3.2を適用して、

$$\text{(i)}\ \forall x_1, \forall x_2\in[0,1],$$
$$\varphi(x_1, x_2)=(\mathfrak{T}\varphi)(x_1, x_2)+\varphi_\perp(x_1, x_2),$$
$$\text{where }(\varphi_\perp, \varphi_\perp)=0 \tag{6.2}$$

を満たす$\varphi_\perp$は、

$$\varphi_\perp=0 \tag{6.3}$$

であることがわかる。

式(1.6)については、定理4.2の(ii), 式(4.18), 定理4.1から、

$$\text{(ii)}\,\mathrm{AIS}(\mathfrak{T}\varphi)=\mathrm{AIS}(\varphi) \tag{6.4}$$
$$=2-\log_2[3+\alpha^2] \tag{6.5}$$

と、確かめられる。

6.2 例5.1（1次多項式の有限個の積）

各c_ℓ, d_ℓは複素定数として、

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=\prod_{\ell=1}^{n}[c_\ell\cdot(1-x_\ell)+d_\ell\cdot x_\ell] \tag{6.6}$$

の場合を考えよう。

不等式（5.1）を満たす非負整数kの2進表現を式（5.2）としよう。このとき、

$$\forall e_1, \forall e_2, \cdots, \forall e_n\in\{0, 1\},$$
$$\varphi(e_1, e_2, \cdots, e_n)$$
$$=\prod_{\ell=1}^{n}a_\ell\langle e_\ell; c_\ell, d_\ell\rangle \tag{6.7}$$

ここに、

$$a_\ell\langle e_\ell; c_\ell, d_\ell\rangle\equiv[c_\ell\cdot(1-e_\ell)+d_\ell\cdot e_\ell]=$$
$$\begin{cases} c_\ell\cdots e_\ell=0\ \text{のとき} \\ d_\ell\cdots e_\ell=1\ \text{のとき}\end{cases} \tag{6.8}$$

であることがわかる。

命題5.3の（ii）より、

$$(\mathfrak{T}\varphi, \phi_k) = (\varphi, \phi_k) = \varphi(e_1, e_2, \cdots, e_n)$$
$$= \prod_{\ell=1}^{n} a_\ell \langle e_\ell ; c_\ell , d_\ell \rangle \tag{6.9}$$
であり、命題3.4より、
$$\mathfrak{T}\varphi$$
$$= \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\prod_{\ell=1}^{n} a_\ell \langle e_\ell ; c_\ell , d_\ell \rangle \right) \cdot \phi_k \qquad \because \ \text{式 (5.3)} \tag{6.10}$$
である。また、定理4.1より、
$$\mathrm{AIS}(\mathfrak{T}\varphi)$$
$$= n - \log_2 \sum_{k=0}^{2^n-1} \left| \prod_{\ell=1}^{n} a_\ell \langle e_\ell ; c_\ell , d_\ell \rangle \right|^2 \tag{6.11}$$
と表現される。

6.3 例5.2（exp, cos, sin関数の有限個の積）

α_ℓ, β_ℓ は実定数で、$0 \leqq \alpha_\ell \leqq 1, 0 \leqq 1 + \beta_\ell \leqq 1$ (6.12)

σ_ℓ, τ_ℓ は正定数 (6.13)

a_ℓ, b_ℓ は複素定数 (6.14)

として、
$$c_\ell(x_\ell)$$
$$= a_\ell \cdot \exp[-(x_\ell - 1)^2/(2\sigma_\ell^2)] \cdot \cos[(\pi/2)(x_\ell + \alpha_\ell)] \tag{6.15}$$
$$d_\ell(x_\ell)$$
$$= b_\ell \cdot \exp\ [-x_\ell^2/(2\tau_\ell^2)] \cdot \sin[(\pi/2)(x_\ell + \beta_\ell)] \tag{6.16}$$
を導入する。パターン
$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$= \prod_{\ell=1}^{n} [c_\ell(x_\ell) \cdot (1 - x_\ell) + d_\ell(x_\ell) \cdot x_\ell] \tag{6.12}$$
の場合を考えよう。

不等式（5.1）を満たす非負整数kの2進表現を式（5.2）としよう。このとき、
$$\forall e_1, \forall e_2, \cdots, \forall e_n \in \{0, 1\},$$
$$\varphi(e_1, e_2, \cdots, e_n)$$
$$= \prod_{\ell=1}^{n} q_\ell \langle e_\ell ; c_\ell , d_\ell \rangle \tag{6.13}$$
ここに、
$$q_\ell \langle e_\ell ; c_\ell , d_\ell \rangle$$
$$\equiv [c_\ell(e_\ell) \cdot (1 - e_\ell) + d_\ell(e_\ell) \cdot e_\ell] =$$
$$\begin{cases} c_\ell(e_\ell) = a_\ell \cdot \exp[-1/(2\sigma_\ell^2)] \cdot \cos[(\pi/2)\alpha_\ell)] \cdots e_\ell = 0 \text{ のとき} \\ d_\ell(e_\ell) = b_\ell \cdot \exp[-1/(2\tau_\ell^2)] \cdot \sin[(\pi/2)(1 + \beta_\ell)] \cdots e_\ell = 1 \text{ のとき} \end{cases} \tag{6.14}$$
であることがわかる。

命題5.3の（ii）より、
$$(\mathfrak{T}\varphi, \phi_k) = (\varphi, \phi_k) = \varphi(e_1, e_2, \cdots, e_n)$$
$$= \prod_{\ell=1}^{n} q_\ell \langle e_\ell ; c_\ell , d_\ell \rangle \tag{6.15}$$
であり、命題3.4より、
$$\mathfrak{T}\varphi$$
$$= \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\prod_{\ell=1}^{n} q_\ell \langle e_\ell ; c_\ell , d_\ell \rangle \right) \cdot \phi_k \qquad \because \ \text{式 (5.3)} \tag{6.16}$$
である。また、定理4.1より、

$$\mathrm{AIS}(\mathfrak{T}\varphi) = \mathrm{n} - \log_2 \sum_{k=0}^{2^n-1} \left| \prod_{\ell=1}^{n} q_\ell \langle e_\ell ; c_\ell , d_\ell \rangle \right|^2 \tag{6.17}$$

と表現される。

7. axiom 1を満たすパターンモデルTφの構成

本章では、情報量の多いパターンφから必要な情報だけを備えた「情報量の少ないパターン、つまり、axiom 1を満たすパターンモデル Tφ」を作り出す操作の1つとして、式（2.9）の写像$\mathfrak{T}$があることを示そう。

7.1　直交変換による冗長度抑圧

7.1.1　1次独立な系、直交系による展開

可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元ψ_kから成る系$\{\psi_k\}_{k\in L}$が1次独立な系としよう。固定した$\varphi\in\mathfrak{H}$について、

$$\mathrm{residual}(\{a_k\}_{k\in L}) \equiv \| \varphi - \sum_{k\in L} ak\cdot \psi_k \|^2 \tag{7.1}$$

を最小ならしめる1次複素展開係数の組 $\{a_k\}$ $k\in L$ は、連立1次方程式

$$\sum_{k\in L} (\psi_k, \psi_\ell)\cdot a_k(\varphi) = (\varphi, \psi_\ell),\ \ell \in L \tag{7.2}$$

を満たす。

［命題7.1］**（近似誤差の評価）**

式（7.1）の residual$(\{a_k\}_{k\in L})$ の下限（最小値）は、

$$\inf_{\{a_k\}_{k\in L}} \| \varphi - \sum_{k\in L} a_k\cdot\psi_k \|^2 \tag{7.3}$$

$$= \| \varphi - \sum_{k\in L} a_k(\varphi)\cdot\psi_k \|^2 \tag{7.4}$$

$$= (\varphi,\varphi) - \sum_{k\in L} \overline{a_k(\varphi)}\cdot(\varphi, \psi_k) \tag{7.5}$$

と、与えられる。

（証明）　$\| \varphi - \sum_{k\in L} a_k(\varphi)\cdot\psi_k \|^2$

$= (\varphi - \sum_{k\in L} a_k(\varphi)\cdot\psi_k, \varphi - \sum_{k\in L} a_k(\varphi)\cdot\psi_k) = (\varphi, \varphi - \sum_{k\in L} a_k(\varphi)\cdot\psi_k)$

$\quad - \sum_{\ell\in L} a_\ell(\varphi)\cdot(\psi_\ell, \varphi - \sum_{k\in L} a_k(\varphi)\cdot\psi_k)$

$= (\varphi, \varphi - \sum_{k\in L} a_k(\varphi)\cdot\psi_k)$

$$\because\ \text{連立1次方程式 (7.2) より、} \forall\ell\in L, (\psi_\ell, \varphi - \sum_{k\in L} a_k(\varphi)\cdot\psi_k) = 0 \tag{7.6}$$

＝式（7.5）.　□

式（7.7）が成り立っていると、連立1次方程式（7.2）の成立が従うことは、直ちにわかる。実は、次の命題7.2が成り立つ。

［命題7.2］（パターンφの1次展開）

パターンφの1次展開

$\forall \varphi \in \mathfrak{H}$,

$\exists \varphi_\perp \in \mathfrak{H}$ such that $[\forall k\in L, (\varphi_\perp, \psi_k) = 0]$,

$$\varphi = \sum_{k\in L} a_k(\varphi)\cdot\psi_k + \varphi_\perp \tag{7.7}$$

が成り立つ。　□

特に、1次独立な系$\{\psi_k\}_{k\in L}$が直交系であれば、ψ_k, ψ_ℓ間に相関の無いパターン展開式（7.7）が

得られ、各1次展開係数 $a_k(\varphi)$ は、

$$a_k(\varphi)=(\varphi,\psi_k)/(\psi_k,\psi_k),\ k\in L \tag{7.8}$$

と与えられる。更に、1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ が正規直交系であれば、

$$a_k(\varphi)=(\varphi,\psi_k),\ k\in L \tag{7.9}$$

である。

7.1.2 直交系による展開の有利性

直交系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ に関し、展開式 (7.7) が成り立っているとしよう。添字の集合 L が、

$$L^+\equiv L\cup\{\ell\} \tag{7.10}$$

へと増加しても、命題7.2が適用され、

$$\exists\,\varphi_\perp{}^+\in\mathfrak{H}\ \text{such that}\ [\forall k\in L^+,\ (\varphi_\perp{}^+,\psi_k)=0],$$

$$\varphi=\sum_{k\in L}a_k{}^+(\varphi)\cdot\psi_k+a_\ell{}^+(\varphi)\cdot\psi_\ell+\varphi_\perp{}^+ \tag{7.11}$$

が成り立つ。このとき、

$$[\forall k\in L,\ a_k{}^+(\varphi)=a_k(\varphi)] \tag{7.12}$$

が成り立ち、$\{\psi_k\}_{k\in L}$ が唯単に1次独立な系の場合に成立しない等式 (7.12) が従うことに、注意する。これが直交的による展開が1次独立な系による展開より有利な点である。

直交変換 (orthogonal transformation) による冗長度抑圧 (redundancy compression) [22] とは、
$\varphi\in\mathfrak{H}$ の代りに、式 (7.7) 内のその打切り直交展開

$$\sum_{k\in L}a_k(\varphi)\cdot\psi_k \tag{7.13}$$

を採用し、相関性の無い、つまり、直交している幾つかのパターン形状素 ψ_k の定数倍 $a_k\cdot\psi_k$ に分割すること

をいう。

7.1.3 Karhunen-Loéveの展開

確率変数 X が測度 P に関して積分を定義できるとき、その積分を E[X] で表し、X の期待値、又は、**平均値** (expectation) という:

$$E[X]\equiv\int_\Omega dP(\omega)\cdot X(\omega). \tag{7.14}$$

□

可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}=L_2(M;dm)$ で考える。

完全正規直交系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ によって、パターン $\varphi=\varphi(x)$ を展開して、

$$\varphi(x)=\sum_{k\in L}a_k\cdot\psi_k(x) \tag{7.15}$$

を得たとすれば、登場した展開係数 a_k は、式 (7.9) より

$$a_k$$
$$\equiv(\varphi,\psi_k)=\int_M dm(x)\cdot\varphi(x)\cdot\overline{\psi_k(x)} \tag{7.16}$$

であるが、この a_k を**確率変数**と考えて、

$$b_k\equiv a_k-E[a_k] \tag{7.17}$$

とおくと、$\varphi(x)$ の平均値 $E[\varphi(x)]$ は、

$$E[\varphi(x)]=\sum_{k\in L}E[a_k]\cdot\psi_k(x) \tag{7.18}$$

であり、平均値 $E[\varphi(x)]$ からの差 $\varphi(x)-E[\varphi(x)]$ は、

$$\varphi(x)-E[\varphi(x)]$$
$$=\sum_{k\in L}[a_k-E[a_k]]\cdot\psi_k(x) \tag{7.19}$$

である。そこで、

自己相関関数

$$\rho_\varphi(x,y)$$
$$\equiv E[\{\varphi(x)-E[\varphi(x)]\}\cdot\overline{\{\varphi(y)-E[\varphi(y)]\}}] \qquad (7.20)$$

を導入すると、カルーネン・レーブ（Karhunen-Loeve）関数系$\{\psi_k\}_{k\in L}$を定義する積分方程式を指摘する次の定理7.1が成立する。相関性が無くなるような直交関数系$\{\psi_k\}_{k\in L}$の設計法を与える本定理7.1は、文献［22］の証明法を一般化したものとして得られている。

［定理7.1］**（カルーネン・レーブ（Karhunén-Loeve）関数系$\{\psi_k\}_{k\in L}$を定義する積分方程式）**

$$E[b_k\cdot\overline{b_\ell}]=$$
$$\begin{cases} E[b_k]\cdot E[\overline{b_\ell}]=0 \quad \because\ E[b_k]=0\cdots k\neq\ell\text{ のとき（統計的独立性）} & (7.21)\\ E[|b_k|^2] \quad\quad \cdots k=\ell\text{ のとき} & (7.22)\end{cases}$$

であれば、完全正規直交系$\{\psi_k\}_{k\in L}$は、積分方程式系

$$\int_M dm(y)\cdot\rho_\varphi(x,y)\cdot\psi_k(y)=\lambda_k\cdot\psi_k(x) \qquad (7.23)$$
$$,\text{where } \lambda_k=E[|b_k|^2] \qquad (7.24)$$

が満たされ、各ψ_kは$\rho_\varphi(x,y)$を核とする積分作用素の、第 k 番目の固有値$\lambda_k=E[|b_k|^2]$に属する固有関数である。

（証明）　先ず、$\{\varphi(x)-E[\varphi(x)]\}\cdot\overline{b_\ell}$を計算すると、

$$\{\varphi(x)-E[\varphi(x)]\}\cdot\overline{b_\ell}$$
$$=\{\sum_{k\in L}[a_k-E[a_k]]\cdot\psi_k(x)\}\cdot\overline{\{a_\ell-E[a_\ell]\}} \qquad \because\ \text{式}(7.17)\wedge\text{式}(7.19)$$
$$=\sum_{k\in L}[a_k-E[a_k]]\cdot\overline{\{a_\ell-E[a_\ell]\}}\cdot\psi_k(x)$$
$$=\sum_{k\in L}b_k\cdot\overline{b_\ell}\cdot\psi_k(x) \qquad (7.25)$$

であるから、この式（7.25）の両辺の平均をとると、

$$E[\{\varphi(x)-E[\varphi(x)]\}\cdot\overline{b_\ell}]$$
$$=\sum_{k\in L}E[b_k\cdot\overline{b_\ell}]\cdot\psi_k(x)$$
$$=E[b_\ell\cdot\overline{b_\ell}]\cdot\psi_\ell(x)+\sum_{k\in L-\{\ell\}}E[b_k\cdot\overline{b_\ell}]\cdot\psi_k(x)$$
$$=E[|b_\ell|^2]\cdot\psi_\ell(x) \qquad \because\text{式（7.22）}$$
$$+\sum_{k\in L-\{\ell\}}E[b_k]\cdot E[\overline{b_\ell}]\cdot\psi_k(x)$$
$$\because\text{式（7.21）}$$
$$=E[|b_\ell|^2]\cdot\psi_\ell(x)$$
$$+\sum_{k\in L-\{\ell\}}0\cdot 0\cdot\psi_k(x) \qquad \because\ [\forall k\in L, E[b_k]=0\text{（平均値の零性）}]$$
$$=\lambda_\ell\cdot\psi_\ell(x) \quad \because\text{式（7.24）} \qquad (7.26)$$

が成り立つ。

一方、

$$\overline{b_\ell}\equiv\overline{a_\ell-E[a_\ell]} \quad \because\ \text{式（7.17）}$$
$$=\int_M dm(y)\cdot\overline{[\varphi(y)-E[\varphi(y)]]}\cdot\psi_\ell(y) \qquad \because\ \text{式（7.16）} \qquad (7.27)$$

に、$\varphi(x)-E[\varphi(x)]$を乗じて、平均をとると、

$$\lambda_\ell\cdot\psi_\ell(x)$$
$$=E[\{\varphi(x)-E[\varphi(x)]\}\cdot\overline{b_\ell}] \qquad \because\text{式（7.26）}$$
$$=E[\int_M dm(y)\cdot\{\varphi(x)-E[\varphi(x)]\}\cdot\overline{[\varphi(y)-E[\varphi(y)]]}\cdot\psi_\ell(y)]$$
$$=\int_M dm(y)\cdot E[\{\varphi(x)-E[\varphi(x)]\}\cdot\overline{[\varphi(y)-E[\varphi(y)]]}]\cdot\psi_k(y)$$
$$=\int_M dm(y)\cdot\rho_\varphi(x,y)\cdot\psi_\ell(y) \qquad \because\ \text{式（7.20）}$$

を得て、所要の式（7.23）の成立が示された。 □

7.2 予測による冗長度抑圧

予測（prediction）による冗長度抑圧［22］とは、直接、相関性のある部分を予測を行って、取り除くこと

を指すのであるが、パターンφからこの種の冗長性を取り除いたパターンモデル Tφの構成法については、割愛される。

7.3 パターンモデル Tφの構成法

その成分ϕ_kが式（5.3）で定義され得られた完全正規直交系［27]，［32］$\{\phi_k\}_{0\leqq k\leqq 2^n-1}$は無論、ある意味でカルーネン・レーブ関数系（7.1.3項）［32］である（命題5.2、5.3節）。この関数系を使って、パターンモデル Tφが3種類構成され得ること（定理7.3、並びに、付録C）を示そう。

定理3.2より、任意の$\varphi\in\mathfrak{D}$は、

$$\varphi=\mathfrak{T}\varphi+\varphi_\perp \wedge (\mathfrak{T}\varphi,\varphi_\perp)=0 \wedge (\varphi_\perp,\varphi_\perp)=0 \tag{7.28}$$

と、直交分解できることになった。ここに、命題3.4の（i）より、

$$(\mathfrak{T}\varphi)(x_1,x_2,\cdots,x_n) =\sum_{e_1=0}^{1}\sum_{e_2=0}^{1}\cdots\sum_{e_n=0}^{1}\varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n)\cdot x_1(e_1)\cdot x_2(e_2)\cdot\cdots\cdot x_n(e_n) \tag{7.29}$$

と補間展開され、命題3.4の（ii）より、

$$\forall e_1,\forall e_2,\cdots,\forall e_n\in\{0,1\},\quad (\mathfrak{T}\varphi)(e_1,e_2,\cdots,e_n)=\varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n) \tag{7.30}$$

なる如く、補間性質を備えていることが判明している。　定理3.1の系1より、

①$(\varphi,\mathfrak{T}\varphi)=\|\mathfrak{T}\varphi\|^2$（$\varphi$と$\mathfrak{T}\varphi$との相関性は最大である）

が成立しており、定理3.2の式（3.27）より、

②$(\varphi,\varphi_\perp)=0$（$\varphi$と$\varphi_\perp$とは相関性がない）

が成立しており、この①,②が、パターンφがその補間$\mathfrak{T}\varphi$で代用できる理由の1つである。

命題3.5より、

③$\mathfrak{T}\mathfrak{T}\varphi=\mathfrak{T}\varphi$（$\varphi$から$\mathfrak{T}\varphi$に移せる情報は残らずすべて、$\mathfrak{T}\varphi$に移している）

が成り立っており、定理3.2の式（3.28）、即ち、

④$\mathfrak{T}\varphi_\perp=0$（$\varphi_\perp$から移せる情報は無い）

が成り立っており、φが互いに相関性の無い成分

$$\varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n)\cdot x_1(e_1)\cdot x_2(e_2)\cdot\cdots\cdot x_n(en) \tag{7.31}$$

に分解されている。これが、定理3.1の系2でいう正規直交性を使った直交変換

$$\varphi\rightarrow\text{式（7.29）の}\mathfrak{T}\varphi \tag{7.32}$$

による冗長度抑圧である。

このとき、式（7.32）の直交変換に関する次の定理7.2が成り立つ。

［定理7.2］**（写像$\mathfrak{T}$の射影作用素性）**

（i）（加法性・スカラー倍）

$[\forall\varphi,\forall\eta\in\mathfrak{D},\mathfrak{T}(\varphi+\eta)=\mathfrak{T}\varphi+\mathfrak{T}\eta]\wedge[\forall\varphi\in\mathfrak{D},\forall a\in Z$（複素数体）$,\mathfrak{T}(a\cdot\varphi)=a\cdot\mathfrak{T}\varphi]$

(ii)（有界性） $\forall\varphi\in\mathfrak{D}, \|\mathfrak{T}\varphi\| = \|\varphi\|$

(iii)（ベキ等性） $\forall\varphi\in\mathfrak{D}, \mathfrak{T}(\mathfrak{T}\varphi)=\mathfrak{T}\varphi$

(iv)（対称性） $\forall\varphi, \forall\eta\in\mathfrak{D}, (\mathfrak{T}\varphi, \eta)=(\varphi, \mathfrak{T}\eta)$

が成り立ち、2式（2.9), (2.10）で定義される写像$\mathfrak{T}$は射影作用素である。

（証明）　(i）は、写像$\mathfrak{T}$の定義式（2.9），(2.10）から明らかである。(ii）は、定理3.1の系1, (ii）より明らかである。(iii）は、命題3.5である。(iv）は、定理3.1の系1, (i）の右半分である。 □

［定理7.3］**（写像$\mathfrak{T}$を用いたパターンモデル構成定理）**

処理の対象とするパターン集合$\Phi\subset\mathfrak{H}$として、再帰領域方程式（C10）を満たすものが選ばれているとしよう［14], [21]。

式（2.17）の如く定義されている式（2.18）の写像Tは、2.4節のaxiom 1を満たす。

［定理7.3の系1］**（補間に関する零点不動点性）**

$$\forall e_1,\forall e_2,\cdots,\forall e_n\in\{0,1\}, \varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n)=0 \tag{7.33}$$
$$\Rightarrow T\varphi=0.$$

［定理7.3の系2］**（加法的雑音ηの除去性）**

$$\forall e_1,\forall e_2,\cdots,\forall e_n\in\{0,1\}, \eta(e_1,e_2,\cdots,e_n)=0 \tag{7.34}$$
$$\Rightarrow T(\varphi+\eta)=T\varphi.$$

［定理7.3の系3］**（論理表現要素ϕ_kの不動点性）**

$\forall k\in\{0,1,\cdots,2^n-1\}, T\phi_k=\phi_k.$

（証明）　系1, 2、並びに、2.4節, axiom 1の (i), (ii), (iii), (iv) の成立を示す。

先ず、式（7.33）に、命題3.6を適用して、$\mathfrak{T}\varphi=0$がわかり、よって、定義式（2.17）より、$T\varphi=0$を得る。系1の成立がわかった。

次に、$\varphi=0$ならば、その特別の場合として、式（7.33）が成立し、(i）の成立がわかる。

系1の一般化としての系2の成立を示そう。

$$\begin{aligned}&\mathfrak{T}(\varphi+\eta)\\&=\mathfrak{T}\varphi+\mathfrak{T}\eta \quad \because \text{定理7.2の (i)}\\&=\mathfrak{T}\varphi \quad \because \text{命題3.6を適用して、}\mathfrak{T}\eta=0\end{aligned} \tag{7.35}$$

を得る。次の2つの場合（イ), (ロ）にわけよう。

（イ） $\|\mathfrak{T}\varphi\|=0$の場合

定義式（2.17）より、

$T\varphi=0$

を得、また、式（7.35）より、$\mathfrak{T}(\varphi+\eta)=0$を得、定義式（2.17）より、

$T(\varphi+\eta)=0=T\varphi.$

（ロ） $\|\mathfrak{T}\varphi\|\neq 0$の場合

$$T\varphi=\mathfrak{T}\varphi/\|\mathfrak{T}\varphi\| \tag{7.36}$$

であるが、

$$\begin{aligned}&T(\varphi+\eta)\\&=\mathfrak{T}(\varphi+\eta)/\|\mathfrak{T}(\varphi+\eta)\| \quad \because \text{式(7.35)より、}\mathfrak{T}(\varphi+\eta)=\mathfrak{T}\varphi\neq 0\\&=\mathfrak{T}\varphi/\|\mathfrak{T}\varphi\| \quad \because \text{式（7.35)}\\&=T\varphi \quad \because \text{式（7.36)}\end{aligned}$$

以上により、系2の成立が判明した。
残りの (ii), (iii), (iv), 系3の成立を示す。

(ii)： a を任意の正定数とする。2つの場合に分けよう。

(ii－1) $\| \mathfrak{T}\varphi \| = 0$ のとき

定義式 (2.17) より、$T\varphi = 0$.

また、

$$0 = a \cdot 0 = a \cdot \mathfrak{T}\varphi$$

$$= \mathfrak{T}(a \cdot \varphi) \quad \because \text{ 定理7.2の(i)} \tag{7.37}$$

であるから、定義式 (2.17) より、$T(a \cdot \varphi) = 0$.

$\therefore\ T(a \cdot \varphi) = 0 = T\varphi$.

(ii－2) $\| \mathfrak{T}\varphi \| \neq 0$ のとき

定義式 (2.17) より、

$$T\varphi = \mathfrak{T}\varphi / \| \mathfrak{T}\varphi \| \tag{7.38}$$

である。ここで、

$T(a \cdot \varphi)$

$= \mathfrak{T}(a \cdot \varphi) / \| \mathfrak{T}(a \cdot \varphi) \| \quad \because$ 定理7.2の (i) より、$\mathfrak{T}(a \cdot \varphi) = a \cdot \mathfrak{T}\varphi \neq 0$

$= a \cdot \mathfrak{T}\varphi / \| a \cdot \mathfrak{T}\varphi \| \quad \because$ 定理7.2の (i)

$= a \cdot \mathfrak{T}\varphi / [\, |a| \cdot \| \mathfrak{T}\varphi \| \,]$

$= \mathfrak{T}\varphi / \| \mathfrak{T}\varphi \|$

$= T\varphi \quad \because$ 式 (7.38)

である。

$$\text{(iii)}：\eta \equiv T\varphi \tag{7.39}$$

とおく。2つの場合に分けよう。

(iii－1) $\| \eta \| = \| T\varphi \| = 0$ のとき

(i)より、$\mathfrak{T}\eta = 0$ を得、

$$T\eta = 0 = T\varphi\text{、つまり、}T(T\varphi) = T\varphi. \tag{7.40}$$

(iii－2) $\| \eta \| = \| T\varphi \| \neq 0$ のとき

$$\eta \equiv T\varphi = \mathfrak{T}\varphi / \| \mathfrak{T}\varphi \| \wedge \| \mathfrak{T}\varphi \| \neq 0 \tag{7.41}$$

であるから、

$\mathfrak{T}\eta = \| \mathfrak{T}\varphi \|^{-1} \cdot \mathfrak{T}\mathfrak{T}\varphi$

$= \| \mathfrak{T}\varphi \|^{-1} \cdot \mathfrak{T}\varphi \quad \because$ 命題3.5

$$= \eta\ (= T\varphi) \neq 0 \tag{7.42}$$

が判明し、よって、

$$T\eta = \| \mathfrak{T}\eta \|^{-1} \cdot \mathfrak{T}\eta \tag{7.43}$$

である。ところで、

$\| \mathfrak{T}\eta \| = \| \eta \| \quad \because$ 式 (7.42)

$= \| T\varphi \| \quad \because$ 式 (7.39)

$$= \| \mathfrak{T}\varphi / \| \mathfrak{T}\varphi \| \| = 1 \tag{7.44}$$

であって、

$T\eta = \mathfrak{T}\eta = \eta \quad \because$ 式 (7.42)

,つまり、$T(T\varphi)=T\varphi$. $\because$ 式（7.39） (7.45)

以上で、(iii) の証明が終わった。

最後に、系3を証明すれば、(iv) の成立は明らかであるから、以下で、系3を証明する。

補助定理5.1の (iii) より、

$$\forall k\in\{0,1,\cdots,2^n-1\},\ \mathfrak{T}\phi_k=\phi_k\neq 0 \tag{7.46}$$

であり、また、命題5.2より、

$$\forall k\in\{0,1,\cdots,2^n-1\},\ \|\mathfrak{T}\phi_k\|=\|\phi_k\|=1 \tag{7.47}$$

であるから、

$T\phi_k$

$=\mathfrak{T}\phi_k/\|\mathfrak{T}\phi_k\|$ $\because$ 定義式（2.17）

$=\phi_k$ $\because$ 2式（7.46），(7.47） □

8.むすび

マルチメディア時代に突入し、マルチメディアの進化形としての知能情報メディアが取り沙汰される現在、“高次、ないしは低次の認知機能における記憶単位、推論単位に使われる記号列、パターン”の双方の2大情報表現を統合する手法の確立が望まれるようになってきている。この統合を達成する1助のため、本論文は先ず、真理関数をパターンとみなし、2つの命題の間に或る種の内積を導入し、命題間の距離、命題の持つ情報量を提案した。

記号列情報処理と同様に精密な推論技術に役立つ1つの基礎を確保するために行われた本研究は月本論文［6]，［12］に啓発され、なされたものであり、第3章において、＊印を付した第3章における命題、定理、公式については、月本が陽に得ていないものである。更に、月本論文では、剰余類の作る線形空間、並びに、線形空間の完備化としてのヒルベルト空間（剰余類の作る空間の完備化）などに言及していないが、本論文では、命題3.4の（ii）でいう補間性質を備えた式(2.9）の補間写像$\mathfrak{T}$を用い、式（3.12）の内積（φ，η）での、式（3.44）の退化ヒルベルト空間$\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\perp$を導入し、月本論文［6]，［12］の不備を補っている。

処理の対象とする問題のパターンφの代りとなり、雑音除去性かつ次元軽減的冗長度圧縮性、並びに、ある種のユニタリ座標変換の下での不変性を備えたパターン（正規化パターン）$T\varphi$を確保するための正規化技術は、パターンからの特徴抽出技術、パターンの識別・類別技術と合わせて、パターン認識技術［2]，［31]，［33］の確保に必要な3大技術の1つである。

得られた完全正規直交系を使って、SS理論［14］における3種類のパターンモデルを構成している。このパターンモデル$T\varphi$は原パターンφの持つ論理構造を簡略化表現しており、高次認知機能の論理表現の要素として使用されてよいものである。それ故、定理7.3の写像 T は補間の形式でφの形状を保存（shape-preserving）する形で、φを近似する機能を備えており、補間形モデル構成作用素と呼ばれてよい作用素 Tを使用し、言語命題に関し推論を行うニューラルネットも構成できることを示せる［13]。

a piecewise linear approximation に基づくパターンモデル$T\varphi$については割愛されたが、このようなパターンモデル$T\varphi$を含めて言えることであるが、本写像 T は、不動点探索形構造受精多段階帰納推理によるパターン認識法［14]，［33］において用いれられて初めて、その真の効力が発揮

されることを付記しておかねばならない。

本研究によって、命題記号論理をパターン認識分野でのパターンで取り扱うことが可能となった。

本格的な topological partial ordering に基づく記号列情報処理の、パターン情報による置き換えに関する取り扱いに関する論はいずれ提出するとして、月本モデルを拡張・精密化した形式で、S.Suzukiの"パターン認識の数学的理論[14]"に役立つように構成し直すことを、本論文では試みた。月本論文[12]で陽に得られている諸公式も導かれ、この諸公式を利用して、得られた完全正規直交系[27],[32] $\{\phi_k\}_{0 \leq k \leq 2^n-1}$ を固有関数系に持つ自己共役作用素[20],[26] H を構成し、

$x_1 \sim x_k$：k 個の入力変数(input variables)

$x_{k+1} \sim x_{k+\ell}$：ℓ 個の隠れ変数(hidden variables)

$x_{k+\ell+1} \sim x_n$：$n-k-\ell$ 個の出力変数(output variables)

を持つ"connectionist model"としての

A neural network that dynamically creates and manipulates composite symbol structures, such as stacks and trees

の1種(命題論理を容易に実行可能なニューラルネット)の理論を展開可能であるが、

①得られた完全正規直交系による測度的不変量(ユニタリ座標変換不変量)を表現すること、
②文献[14]の第17～23部と同様な、無限次元ニューラルネット構成[13]への応用
③ファジィ論理[7]を構築すること
④パターンを符号化[22]する手法

はすべて、紙面の都合上割愛されているのが残念である。

文　献

[1] 野口正一, 滝沢誠："知識工学基礎論", オーム社, 1986
[2] 鈴木昇一："認識工学(上)", 柏書房, 1975
[3] 池田克夫, 田村秀行, 全炳東："知能情報メディアーマルチメディアの進化形ー", 電子情報通信学会誌, vol.79, no.8, pp.788-792, Aug.1996
[4] 伊庭："基礎的問題から見た情報統合", 人工知能学会誌, vol.11, no.2, pp.193-200, Mar.1996
[5] Hussein Almuallim, Thomas G.Dietterich："Learning Boolean concepts in the presence of many irrelevant features", Artifical Intelligence, vol.69, pp.279-305, 1994
[6] 月本洋："パターン処理の近似としての記号処理", 電子情報通信学会論文誌D-Ⅱ, vol.J78-D-Ⅱ, no.2, pp.333-339, 1995
[7] 鈴木昇一："半順序と情報処理", 情報研究(文教大学情報学部), vol.12, pp.121-174, Dec.1991
[8] 鈴木昇一："新しい情報の測度とパターン情報処理", 情報研究(文教大学情報学部), vol.13, pp.273-358, Dec.1992
[9] 赤羽旗一："記号処理型のニューラルネットワークモデルと集合で表した知識表現", 人工知能学会誌, vol.11, no.4, pp.566-573, July 1966
[10] Geoffrey G.Towell, Jude W. Shavlik："Knowledge-based artificial neural networks", Artifical Intelligence, vol.70, pp.119-165, 1994

[11] Gadi Pinkas："Reasoning, nonmonotonicity and learning in connectionist networks that capture propositional knowledge", Artificial Intelligence, vol.77, pp.203-247, 1995
[12] 月本洋："命題論理の幾何的モデル", 情報処理学会論文誌, vol.31, no.6, pp.783-791, June 1990
[13] 鈴木昇一："マルチメディア情報処理のための一般化誤差逆伝播学習ニューラルネットの新数理", 近代文芸社, 1996
[14] 鈴木昇一："パターン認識の数学的理論", 電子情報通信学会技術研究報告 [パターン認識と学習, パターン認識と理解], PRL84-6 (第1部), PRL84-30, PRL84-38, PRL85-27, PRU86-8, PRU86-35, PRU86-69, PRU87-1, PRU87-28, PRU88-30, PRU89-1, PRU89-27, PRU89-40, PRU89-66, PRU89-77, PRU89-136, PRU90-5, PRU90-15, PRU90-29, PRU90-125, PRU91-1, PRU91-29, PRU91-42, PRU92-1, PRU92-18, PRU92-25, PRU92-89, PRU92-102 (第28部), May 1984～Jan.1993
[15] David S.Touretzky："BoltzCONS：Dynamic symbol structures in a connectionist network", Artificial Intelligence, vol.46, no.2, pp.5-46, Nov.1990
[16] 青木利夫, 高橋渉："集合･位相空間要論", 培風館, Sept. 1979
[17] Angus E.Taylor, David C.Lay : "Introduction to function analysis", John Wiley & Sons, Inc., 1980
[18] 鈴木昇一："パターンのエントロピーモデル", 電子情報通信学会論文誌 (D-Ⅱ), vol. J77-D-Ⅱ, no.10, p.p.2220-2238, Nov.1994
[19] 鈴木昇一: "新しい情報の測度とパターン情報処理", 情報研究 (文教大学・情報学部), vol.13, pp. 273-358, Dec.1992
[20] 吉田耕作："近代解析 (基礎数学講座20)", 共立出版, Dec.1963
[21] 鈴木昇一："Radial-Basis Function Networks, Wavelet-Based Networksを用いたモデル構成作用素の構成法", 情報研究 (文教大学情報学部), vol.17, pp.71-131, Dec, 1996
[22] 星子幸男："通信伝送工学 (大学講義シリーズ)", 共立出版, 3.3.3項 (pp.47-52), Dec.1978
[23] 中本高道："におい認識技術の最近の研究", 電子情報通信学会誌, vol.79, no.10, pp.1028-1029, Oct.1996
[24] 今関義弘, 久保明, 米沢義道："触覚認識用簡易3次元モデル製作方法", 電子情報通信学会論文誌 (D-Ⅱ), vol.J80-D-Ⅱ, no.2, pp.686-691, Feb.1997
[25] 東条敏："自然言語処理入門", p.82, 近代科学社, 1988
[26] スミルノフ："高等数学教程V巻第二分冊 12", p.515, 一松信訳, 共立出版, 1966
[27] 梅垣壽春："情報数理の展開－関数解析的展開－", サイエンス社, 1993
[28] 鈴木昇一, 柴山秀雄, 福永一保, 古田晋吾："認識の量子論と画像の微分エントロピー", 芝浦工業大学研究報告理工系編, vol.23, no.1, pp.117-125, Mar.1979
[29] 鈴木昇一, 中村三郎："最汎アトムを用いない精密化方法によるprologプログラムの帰納的自動合成システムの、C言語による実現", 情報研究 (文教大学情報学部), vol.10, pp.151-167. Dec.1989
[30] 中村三郎, 田代達也, 鈴木昇一："ソフトウェアをコンピュータに作らせる夢－1つの提案「MIS」について－", コンピュータアクセス, pp.54-62, Jan.1990
[31] M.ミンスキー, S.パパート："パーセプトロン (パターン認識理論への道)", 斎藤正男訳, 東京大学出版会, 1971

[32] Jeff B. Burl : "Estimating the basis functions of the Karhunen-Loéve transform", IEEE Trans.Acoust., Speech & Signal Process., vol.37, no.1, pp.99-105, Jan.1989
[33] 鈴木昇一："知能情報メディア情報処理のためのカテゴリ帰属知識を用いたパターン認識問題の数理的一般解決"，近代文芸社，June 1997

付録A（線形作用素，定義域，値域，連続作用素，有界作用素，作用素のノルム，逆作用素，閉作用素，閉苞，稠密，可分，共役作用素，自己共役作用素，半正値自己共役作用素，閉部分空間，直交補空間，準等距離作用素，ユニタリ作用素，零空間，閉作用素の標準分解，射影作用素）

内積、ノルムを各々（　,　），$\|\cdot\| \equiv \sqrt{(\ \cdot\ ,\ \cdot\ )}$ とする可分な一般抽象Hilbert空間を $\mathfrak{H}$ とする。但し、任意の複素定数 $a \in Z$（複素数体）について、

$$(a\cdot\varphi, \eta) = a\cdot(\varphi, \eta) \in Z \text{ for any } \varphi,\ \eta \in \mathfrak{H} \tag{A1}$$

とする。一般に、

$$A\ (a\cdot\varphi + b\cdot\eta) = a\cdot A\varphi + b\cdot A\eta$$
$$\text{ここに、} a, b \in Z,\ \varphi,\ \eta \in \mathfrak{H} \tag{A2}$$

を満たすという意味で、**線形**な作用素 A の**定義域**Domain(A), **値域** Range(A) とは各々、

$$\mathrm{Domain}(A) \equiv \{\varphi \in \mathfrak{H} \mid \|A\varphi\| < \infty\} \tag{A3}$$

$$\mathrm{Range}(A) \equiv \{\eta \in \mathfrak{H} \mid \exists\, \varphi \in \mathrm{Domain}(A),\ \eta = A\varphi\} \tag{A4}$$

のことである。

線形作用素 A が**連続作用素**（continuous operator）であるとは、

$$\{\varphi_n\}_{n=1,2,\cdots} \subseteq \mathrm{Domain}(A) \wedge \varphi \in \mathrm{Domain}(A)$$
$$\wedge \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0 \tag{A5}$$
$$\text{ならば、} \lim_{n\to\infty} \|A\varphi_n - A\varphi\| = 0 \tag{A6}$$

がなり立つことをいう。

［定理A1］**（線形作用素 A の連続性定理）**

線形作用素 A が連続であるための必要かつ十分な条件は、

$$\forall \varphi \in \mathrm{Domain}(A),\ \|A\varphi\| \leq N\cdot\|\varphi\| \tag{A7}$$

の成り立つような正実定数 N が存在することである。 □

$\mathrm{Domain}(A) = \mathfrak{H}$ が満たされる線形作用素 A については、上記の定理A1より、

$$\{\|A\varphi\| \mid \|\varphi\| \leq 1\} \text{ が有界である} \tag{A8}$$

ことがわかる。

$$\mathrm{Domain}(A) = \mathfrak{H} \tag{A9}$$

が満たされる線形作用素 A を**有界作用素**（bounded linear operator）と呼ぶ。有界作用素 A については、

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H},\ \|A\varphi\| \leq N\cdot\|\varphi\| \tag{A10}$$

が成り立つような非負実数 N が存在するから、

$\| \varphi \| \leqq 1$ なる条件の下でのこのような $\| A\varphi \|$ の集まりの最小上界（上限）

$$N(A) \equiv \sup_{\| \varphi \| \leqq 1} \| A\varphi \| \qquad \text{(A11)}$$

を**作用素 A のノルム**と呼び、N(A) と表す。

線形作用素 A がDomain（A）とRange（A）との間の1対1対応を与えるとき、 A の**逆作用素**（inverse operator） A^{-1} が存在し、

$$[\forall \varphi \in \mathrm{Domain}(A), A^{-1}(A\varphi) = \varphi] \qquad \text{(A12)}$$

$$\wedge \ [\forall \psi \in \mathrm{Range}(A), A(A^{-1}\psi) = \psi] \qquad \text{(A13)}$$

が成り立つ。

［定理A2］**（逆作用素の存在定理）**

線形作用素 A が連続な逆作用素 A^{-1} を持つための必要かつ十分な条件は、

$$\exists b > 0, \forall \varphi \in \mathrm{Domain}(A), \ \| A\varphi \| \geqq b \cdot \| \varphi \| . \qquad \text{(A14)}$$

□

線形作用素 A が**閉作用素**（closed operator）であるとは、

$$\{\varphi_n\}_{n=1,2,\cdots} \subseteq \mathrm{Domain}(A) \wedge \lim_{n \to \infty} \| \varphi_n - \varphi \|$$

$$= 0 \wedge \lim_{n \to \infty} \| A\varphi_n - \eta \| = 0 \qquad \text{(A15)}$$

ならば、

$$\varphi \in \mathrm{Domain}(A) \wedge A\varphi = \eta \qquad \text{(A16)}$$

がなり立つことをいう。

一般に、$\mathfrak{H}$ の部分集合 $\mathfrak{D}$ に、$\mathfrak{D}$ の点列の集積点をすべて付け加えて得られる閉集合を $\mathfrak{D}^a$ と表記して、$\mathfrak{D}$ の閉苞（closure）と呼ぶ。不等式

$$\| \varphi - \varphi_0 \| < r \qquad \text{(A17)}$$

を満たす $\varphi \in \mathfrak{H}$ の全体を、点 $\varphi_0 \in \mathfrak{H}$ を中心とする半径 r（>0）の開球という。$\mathfrak{H}$ の部分集合 $\mathfrak{D}$ が $\mathfrak{H}$ において稠密（dense）であるというのは［21］、$\mathfrak{H}$ のどんな点を中心とするどんな半径の開球も常に、$\mathfrak{D}$ と交わることである。実は、Hilbert空間 $\mathfrak{H}$ が可分（separable）というのは、$\mathfrak{H}$ において稠密な可算部分集合が $\mathfrak{H}$ に存在することを指す。

例えば、内積 (φ, η) が

$$(\varphi, \eta) \equiv \sum_{x \in X} \varphi(x) \cdot \overline{\eta}(x), \qquad \text{(A18)}$$

ここに、$\overline{\eta}$ は η の複素共役

と与えられる空でない集合 X で定義された複素数値関数 $\varphi(x)$ の作るHilbert空間 $\mathfrak{H}$ は、X が非可算集合ならば、可分ではない。

$$\mathrm{Domain}(A)^a = \mathfrak{H} \qquad \text{(A19)}$$

を満たす閉作用素 A に対し、 A の**共役作用素**（adjoint operator） A* が存在する。つまり、式（A19）を満たす閉線形作用素 A に対し、

$\eta, \psi \in \mathfrak{H}$ が、

$$(A\omega, \eta) = (\omega, \psi) \ \text{for all} \ \omega \in \mathrm{Domain}(A) \qquad \text{(A20)}$$

を満たすならば、

$$\eta \in \mathrm{Domain}(A^*) \wedge A^* \eta = \psi \qquad \text{(A21)}$$

が成立するような線形作用素 A* を想定し、A* を Aの共役作用素という。

すべての $\varphi \in \mathrm{Domain}(A)$ に対して、

$$(A\varphi, \eta) = (\varphi, \eta^*) \qquad \text{(A22)}$$

の成り立つような点対 $\langle \eta, \eta^* \rangle$ によって、

$$\eta^* = A^* \eta \tag{A23}$$

と定義されるのが A^* である。

［定理A3］（共役作用素の閉作用素定理）

A^* は閉作用素である。 □

［定理A4］**（共役作用素の閉作用素定理）**

式（A19）が成り立つとき、線形作用素 A が閉作用素であるための必要且つ十分な条件は、

$$(A^*)^* = A \tag{A24}$$

が成り立つことである。 □

$$A = A^* \tag{A25}$$

であるような線形作用素 A は、自己共役作用素（self-adjoint operator）であるといわれる。

［定理A5］**（$A^* \cdot A$ の自己共役定理）**

A を、式（A19）が成り立つ閉作用素とすれば、$A^* \cdot A$, $A \cdot A^*$ は双方とも自己共役作用素である。 □

次の定理A6は、文献［A7], p.80, 定理10.14の証明中で、示されている。

［定理A6］**（$A^* \cdot A + I$ の逆・自己共役定理）**

I を恒等作用素とする。式（A19）が成り立つ閉作用素Aに対して、$\mathfrak{H}$ 全体で定義された逆作用素

$$[A^* \cdot A + I]^{-1} \tag{A26}$$

が存在し、 $[A^* \cdot A + I]^{-1}$ は自己共役作用素であり、よって、

$$A^* \cdot A + I \tag{A27}$$

は自己共役作用素である。 □

$$\forall \varphi \in \mathrm{Domain}(K),\ (K\varphi, \varphi) \geqq 0 \tag{A28}$$

が満たされる線形作用素 K は、半正値自己共役作用素（semi-positive operator）である、といわれる。

［定理A7］**（$A^* \cdot A$ の半正値自己共役定理）**

式（A19）が成り立つ閉作用素 A に対して、

$$\forall \varphi \in \mathrm{Domain}(A^* \cdot A),\ (A^* \cdot A\varphi, \varphi) = (A\varphi, A\varphi) = \| A\varphi \|^2 \geqq 0 \tag{A29}$$

を得て、

$$H \equiv A^* \cdot A \tag{A30}$$

は**半正値自己共役作用素**である。 □

Hilbert空間 $\mathfrak{H}$ の部分集合 $\mathfrak{D}$ が、

$\varphi, \eta \in \mathfrak{D}$ ならば、$a \cdot \varphi + b \cdot \eta \in \mathfrak{D}$

ここに、$a, b \in Z$（複素数体） (A31)

を満足するとき、$\mathfrak{D}$ を $\mathfrak{H}$ の**部分空間**（linear subspace）という。$\varphi, \eta \in \mathfrak{H}$ 間のノルム距離

$$\mathrm{dis}(\varphi, \eta) \equiv \| \varphi - \eta \| \tag{A32}$$

による収束の意味で、$\mathfrak{H}$ の閉集合（closed set）になっているような部分空間 $\mathfrak{D}$ を、つまり、

$$\mathfrak{D}^a = \mathfrak{D} \tag{A33}$$

となっているような部分空間 $\mathfrak{D}$ を**閉部分空間**という。

次の定理A8での、$\mathfrak{D}^\perp$ は直交補空間（orthocomplement）といわれる。

［定理A8］**（直交補空間の閉部分空間定理）**

$\mathfrak{H}$ の部分集合 $\mathfrak{D}$ に対し、

$$\mathfrak{D}^{\perp} \equiv \{\psi \in \mathfrak{H} \mid (\varphi, \psi) = 0 \text{ for any } \varphi \in \mathfrak{D}\} \tag{A34}$$

とおけば、$\mathfrak{D}^{\perp}$は閉部分空間である。 □

［定理A9］**（直交直和分解定理）**

$\mathfrak{D}$は$\mathfrak{H}$の任意の閉部分空間とする。

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H}, \exists \varphi_1 \in \mathfrak{D}, \exists \varphi_2 \in \mathfrak{D}^{\perp}, \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \tag{A35}$$

と、任意の$\varphi \in \mathfrak{H}$は一意的に直交直和分解される。 □

閉部分空間$\mathfrak{D}_1$から閉部分空間$\mathfrak{D}_2$へ1対1に写し、然も

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}_1, \| W\varphi \| = \| \varphi \| \tag{A36}$$

が成り立ち、更に、

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}_1{}^{\perp}, W\varphi = 0 \tag{A37}$$

を満たすような有界作用素（その定義域が$\mathfrak{H}$であるような閉作用素）Wを、（$\mathfrak{D}_1$から$\mathfrak{D}_2$への）**準等距離作用素** (partially isometric operator) という。

$$\mathrm{Domain}(U) = \mathrm{Range}(U) = \mathfrak{H} \tag{A38}$$

$$\wedge\ [\forall \varphi \in \mathfrak{H}, \| U\varphi \| = \| \varphi \|] \tag{K39}$$

を満たす線形作用素Uは**ユニタリ作用素**（unitary operator）といわれるが、

$$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{H} \tag{A40}$$

であるような準等距離作用素Wはユニタリ作用素である。

線形作用素Aの**零空間** (null space) Null(A) とは、

$$\mathrm{Null}(A) \equiv \{\varphi \in \mathrm{Domain}(A) \mid \| A\varphi \| = 0\} \tag{A41}$$

のことである。

次の定理A10は、J.von Neumannによって発見されたものであり、

閉作用素Aの**標準分解** (canonical decomposition)

といわれるものである。特に、Aが半正値自己共役作用素であれば、W＝I（恒等作用素）になり、Aの標準分解は、

$$A = \sqrt{H} \equiv \sqrt{A^* \cdot A} \tag{A42}$$

である。

［定理A10］**（閉作用素Aの標準分解定理）**

式（A19）を満たす閉線形作用素Aについて、

$$\mathrm{Null}(A) = (\mathrm{Range}(A^*)^{a})^{\perp} \tag{A43}$$

$$\wedge\ \mathrm{Null}(A^*) = (\mathrm{Range}(A)^{a})^{\perp} \tag{A44}$$

が成り立ち、

式（A29）でいう式（K30）の半正値自己共役作用素

$H \equiv A^* \cdot A$

2式（A36),（A37）を満たす準等距離作用素W

の両者H, Wが定まり、

$$A = W \cdot \sqrt{H} \tag{A45}$$

$$\wedge\ A^* = \sqrt{H} \cdot W^* \tag{A46}$$

$$\wedge\ \mathrm{Null}(A)^{\perp} = \mathrm{Null}(\sqrt{H})^{\perp} \tag{A47}$$

$$\wedge\ \mathrm{Null}(\sqrt{H}) \subseteq \mathrm{Null}(W) \tag{A48}$$

と、一意的に表される。 □

式（A35）の直交分解において、$\varphi \in \mathfrak{H}$から得られた$\varphi_1 \in \mathfrak{H}$を、

$$P(\mathfrak{D})\varphi = \varphi_1 \tag{A49}$$

と表現する。φ_1をφの$\mathfrak{D}$への射影(projection)といい、$P \equiv P(\mathfrak{D})$を$\mathfrak{D}$への**射影作用素**(projector)と呼ぶ。

［定理A11］**（射影作用素定理）**

射影作用素Pは有界作用素であり、かつ、2性質

$$P \cdot P = P \text{（ベキ等性）} \tag{A50}$$

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H}, \forall \eta \in \mathfrak{H}, (P\varphi, \eta) = (\varphi, P\eta) \text{（対称性）} \tag{A51}$$

を満たす。

逆に、2式（A50),（A51）を満たす有界作用素Pは射影作用素である。 □

付録B（Bessel不等式，Fourier式展開）

本付録Bでは、ヒルベルト空間論［17],［20］でよく知られている正規直交系$\{\psi_k\}_{k=1,2,\cdots}$に関する“Bessel 不等式”,“Fourier式開”が2定理B.1, B.2が説明される。

可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の内積(φ, η)，ノルム$\varphi \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)}$で考えよう。但し、任意の複素定数$a \in Z$(複素数体）について、

$$(a \cdot \varphi, \eta) = a \cdot (\varphi, \eta) \in Z \text{ for any } \varphi, \ \eta \in \mathfrak{H} \tag{B1}$$

とする。

$$(\psi_k, \psi_\ell) = \delta_{k\ell} \cdot \| \psi_k \| \cdot \| \psi_\ell \| \tag{B2}$$

ここに、

$$\delta_{k\ell} = \begin{cases} 0 \text{ if } k \neq \ell \\ 1 \text{ if } k = \ell \end{cases} \tag{B3}$$

を満たす$\{\psi_k\}_{k=1,2,\cdots}$を**直交系**（orthogonal system）といい、特に、直交系$\{\psi_k\}_{k=1,2,\cdots}$が、

$$\| \psi_k \| = 1 \text{ for any } k \in \{1, 2, \cdots\} \tag{B4}$$

を満たすとき、**正規直交系**（orthonormal system）という。

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots\}, (\varphi, \psi_k) = 0 \Rightarrow \| \varphi \| = 0 \tag{B5}$$

であるとき、**完全**（complete）であるという。

このとき、次の2定理B.1, B.2が成り立つ。この2定理に登場する複素定数(φ, ψ_k)はφの**正規直交系**$\{\psi_k\}_{k=1,2,\cdots}$に関する**Fourier係数**（the Fourier coefficients of φ relative to $\{\psi_k\}_{k=1,2,\cdots}$）と称される。

［定理B.1］（**Bessel不等式**; Bessel's inequality）

正規直交系$\{\psi_k\}_{k=1,2,\cdots}$について、$\ell \geq m$を満たす任意の2正整数$\ell, m$に対し、Bessel不等式

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H}, \| \varphi \|^2 \geq \sum_{k=m}^{\ell} |(\varphi, \psi_k)|^2 \tag{B6}$$

が成り立つ。

（証明）$0 \leq \| \varphi - \sum_{k=m}^{\ell} (\varphi, \psi_k) \cdot \psi_k \|^2$

$= (\varphi - \sum_{k=m}^{\ell} (\varphi, \psi_k) \cdot \psi_k, \ \varphi - \sum_{k=m}^{\ell} (\varphi, \psi_k) \cdot \psi_k)$

$= (\varphi, \varphi - \sum_{k=m}^{\ell} (\varphi, \psi_k) \cdot \psi_k) - (\sum_{k=m}^{\ell} (\varphi, \psi_k) \cdot \psi_k, \ \varphi - \sum_{k=m}^{\ell} (\varphi, \psi_k) \cdot \psi_k)$

$$=(\varphi,\varphi)-\sum_{k=m}^{\ell}\overline{(\varphi,\psi_k)}\cdot(\varphi,\psi_k)-\sum_{k=m}^{\ell}(\varphi,\psi_k)\cdot(\psi_k,\varphi)$$
$$+\sum_{k=m}^{\ell}\sum_{j=m}^{\ell}(\varphi,\psi_k)\cdot\overline{(\varphi,\psi_j)}\cdot(\psi_k,\psi_j)$$
$$=\|\varphi\|^2-2\cdot\sum_{k=m}^{\ell}|(\varphi,\psi_k)|^2+\sum_{k=m}^{\ell}\sum_{j=m}^{\ell}(\varphi,\psi_k)\cdot\overline{(\varphi,\psi_j)}\cdot\delta_{kj}$$
$$=\|\varphi\|^2-\sum_{k=m}^{\ell}|(\varphi,\psi_k)|^2.$$ □

［定理B.2］（**Fourier式展開**; Fourier expansion of φ）

正規直交系 $\{\psi_k\}_{k=1,2,\cdots}$ が完全ならば、完全関係を意味するParseval's Formula

$$\forall\varphi\in\ell,\ \|\varphi\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|(\varphi,\psi_k)|^2 \tag{B7}$$

が成り立ち、また、Fourier式展開

$$\forall\varphi\in\ell,\ \varphi=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}(\varphi,\psi_k)\cdot\psi_k \tag{B8}$$

が成り立つ。

（証明）　定理B.1の証明と同様にして、

$\ell>m$ ならば

$$0\leqq\|\sum_{k=1}^{\ell}(\varphi,\psi_k)\cdot\psi_k-\sum_{k=1}^{m}(\varphi,\psi_k)\cdot\psi_k\|^2 \tag{B9}$$
$$=\|\sum_{k=m+1}^{\ell}(\varphi,\psi_k)\cdot\psi_k\|^2$$
$$=\sum_{k=m+1}^{\ell}|(\varphi,\psi_k)|^2$$

が成り立ち、ここで、定理B.1を適用して、

$$\sum_{k=m+1}^{\ell}|(\varphi,\psi_k)|^2\leqq\|\varphi\|^2$$

が成立していることを考えると、式（B9）は、$m,\ell\to\infty$ なるときに、0に収束する。

よって、式(B8)の右辺の極限が存在することがわかる。ところが、内積の連続性と、$\{\psi_k\}_{k=1,2,\cdots}$ の正規直交性より、

$$(\varphi-\lim_{\ell\to\infty}\sum_{k=1}^{\ell}(\varphi,\psi_k)\cdot\psi_k,\psi_m)$$
$$=\lim_{\ell\to\infty}(\varphi-\sum_{k=1}^{\ell}(\varphi,\psi_k)\cdot\psi_k,\psi_m)$$
$$=\lim_{\ell\to\infty}[(\varphi,\psi_m)-\sum_{k=1}^{\ell}(\varphi,\psi_k)\cdot(\psi_k,\psi_m)]$$
$$=\lim_{\ell\to\infty}[(\varphi,\psi_m)-\sum_{k=1}^{\ell}(\varphi,\psi_k)\cdot\delta_{km}]$$
$$=\lim_{\ell\to\infty}[(\varphi,\psi_m)-(\varphi,\psi_m)]$$
$$=\lim_{\ell\to\infty}0=0\quad\text{for any }m\in\{1,2,\cdots\}$$

が成り立つ。よって、$\{\psi_k\}_{k=1,2,\cdots}$ の、式（B5）のいう完全性より、

$$\varphi-\lim_{\ell\to\infty}\sum_{k=1}^{\ell}(\varphi,\psi_k)\cdot\psi_k=0$$

を得て、等式（B8）が成立しなければならない。

更に、同様な論法を用いて、

$$0=\lim_{m\to\infty}\|\varphi-\sum_{k=1}^{m}(\varphi,\psi_k)\cdot\psi_k\|^2$$
$$=\lim_{m\to\infty}[\|\varphi\|^2-\sum_{k=1}^{m}|(\varphi,\psi_k)|^2]$$

を得、これが式（B7）である。 □

付録C（直交系の選定と、パターンモデル Tφ）

本付録Cでは、文献［21］の第7章で説明されている“直交系”を除いて、本論文での、式（5.3）の ϕ_k からなる直交系 $\{\phi_k\}_{0\leq k\leq 2^n-1}$ と対比しながら、直交系の諸例が説明される。

C1. $\{\psi_k\}_{k\in L}$ が1次独立な系である時の、モデル構成作用素Tの構成法

SS理論［2］,［13］,［14］,［18］によれば、$\{\psi_k\}_{k\in L}$ が1次独立な系であるとき、各 ψ_k はこれ以上分解出来ないという意味で、極小な“**パターン形状素**（primitive shape-component）”であるといわれる。

$\{\psi_k\}_{k\in L}$ が直交系 ⇒ $\{\psi_k\}_{k\in L}$ が1次独立な系

であるから、一般的に

$\{\psi_k\}_{k\in L}$ が1次独立な系であるときに、2.4節の axiom 1を満たす、式(2.18)の**モデル構成作用素** Tの構成法

を先ず、説明しておく。モデル構成作用素Tは**多段階認識**の働きを達成する上において、基礎となる謂わば、従来の認識技術における“**パターン正規化写像**”に相当するものである。

可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ での1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ を選定し、任意のパターン $\varphi\in\mathfrak{H}$ を、

$$\exists\varphi_\perp\in\mathfrak{H},\ [\varphi=\sum_{k\in L}a_k(\varphi)\cdot\psi_k+\varphi_\perp]\ \wedge\ [\forall k\in L,(\varphi_\perp,\psi_k)=0] \tag{C1}$$

と1次展開表現してみよう。Zを複素数の集合として、各 $a_k(\varphi)$ は、

$$\inf_{c_k\in Z,k\in L}\|\varphi-\sum_{k\in L}c_k\cdot\psi_k\|=\|\varphi-\sum_{k\in L}a_k(\varphi)\cdot\psi_k\| \tag{C2}$$

を満たすものとして定義され得、**連立1次方程式**

$$\sum_{k\in L}a_k(\varphi)\cdot(\psi_k,\psi_\ell)=(\varphi,\psi_\ell),\ \ell\in L \tag{C3}$$

を解けば求められる。

このとき、パターン $\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$ から抽出される第 $k\in L$ 番目の**特徴量** $u(\varphi,k)$ として、

$$u(\varphi,k)\equiv\begin{cases}0\cdots\cdots\forall k\in L,a_k(\varphi)=0\text{ のとき}\\ a_k(\varphi)/[\sum_{k\in L}|a_k(\varphi)|^2]^{1/2}\\ \cdots\cdots\exists k\in L,a_k(\varphi)\neq0\text{ のとき}\end{cases} \tag{C4}$$

を用意し、

$$T\varphi\equiv\sum_{k\in L}u(\varphi,k)\cdot\psi_k \tag{C5}$$

と定義される写像 $T:\Phi\rightarrow\Phi$ を考えてみよう。このTφは、不等式

$$\inf_{c_k\in Z,k\in L}\|\varphi-\sum_{k\in L}c_k\cdot\psi_k\|\leqq\|\varphi-[\sum_{k\in L}|a_k(\varphi)|^2]^{1/2}\cdot T\varphi\| \tag{C6}$$

が成立するという意味で、$\varphi\in\mathfrak{H}$ の近似は、$[\sum_{k\in L}|a_k(\varphi)|^2]^{1/2}\cdot T\varphi$ である。然も、写像Tは、2.4節での axiom 1の4性質（i）～(iv) を満たすことを容易に、確かめることができる。

例えば、$\exists k\in L,a_k(\varphi)\neq0$ のとき、(iii)、つまり、ベキ等性 の成立を証明しておけば、次のようになる。

$\eta\equiv T\varphi$ とおくと、

$$\forall k\in L,a_k(\eta)=u(\varphi,k) \tag{C7}$$

であることがわかる。然も、この式（C7）から、

$$\sum_{k\in L}|a_k(\eta)|^2=1 \quad \because \quad \sum_{k\in L}|u(\varphi,k)|^2=1 \tag{C8}$$

が成立しており、よって、

$$
\begin{aligned}
&\forall k\in L, u(\eta,k)\\
&=a_k(\eta)/[\sum_{k\in L}|a_k(\eta)|^2]^{1/2} \quad \because \ \text{式 (C4)}\\
&=a_k(\eta) \quad \because \ \text{式 (C8)}\\
&=u(\varphi,k) \quad \because \ \text{式 (C7)}\\
&\quad \therefore \ T\eta=\eta
\end{aligned}
$$

を得て、証明が終わった。

上述の証明とほぼ同様にして、次の構成定理が証明される。

[定理C1] **(1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ の下での、モデル構成作用素 T の構成定理) [21]**

$\{\psi_k\}_{k\in L}$ は $\mathfrak{H}$ における1次独立な系とする。

各特徴量 $u(\varphi,k)$ として、

①式 (C4) の $u(\varphi,k)$

②$u(\varphi,k)\equiv$

$$\begin{cases} 0 & \cdots\cdots \forall k\in L, a_k(\varphi)=0 \text{ のとき}\\ a_k(\varphi)/[\sum_{k\in L}|a_k(\varphi)|] & \cdots\cdots \exists k\in L, a_k(\varphi)\neq 0 \text{ のとき}\end{cases}$$

③$u(\varphi,k)\equiv$

$$\begin{cases} 0 & \cdots\cdots \forall k\in L, a_k(\varphi)=0 \text{ のとき}\\ a_k(\varphi)/[\sup k\in L \ |a_k(\varphi)|] & \cdots\cdots \exists k\in L, a_k(\varphi)\neq 0 \text{ のとき}\end{cases}$$

が選ばれた**特徴抽出写像**

$$u: \Phi\times L\rightarrow Z(\text{a set of complex numbers}) \tag{C9}$$

を採用した場合、式 (C5) の写像 T は、2.4節での axiom 1の4性質 (i) ~ (iv) を満たす。

但し、処理の対象とするパターン集合 $\Phi\subset\mathfrak{H}$ として、**再帰領域方程式** (reflective domain equation)

$$\Phi=\Phi_{\mathrm{base}}\cup R^{++}\cdot\Phi\cup T\cdot\Phi, \tag{C10}$$

provided that $\Phi_{\mathrm{base}}\subset\mathfrak{H}$ is given, (C11)

where

$$R^{++}\cdot\Phi\equiv\{a\cdot\varphi \mid a\in R^{++}(\text{a set of positive real numbers}), \varphi\in\Phi\} \tag{C12}$$

$$T\cdot\Phi\equiv\{T\varphi \mid \varphi\in\Phi\} \tag{C13}$$

を満たすものが選ばれている [14], [21]。 □

C2.直交系の諸例

次の例1は、3章の内容を異なる観点から構成し直したものである。

[例1] (超立方体を定義域に持つパターン φ の補間)

n個の実変数

$$x=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle, \quad \text{where } 0\leqq x_i\leqq 1(1\leqq i\leqq n) \tag{C14}$$

の実数値パターン

$$\varphi=\varphi(x)=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{C15}$$

に対し、離散関数値の有限集合

$$\{\varphi(x) \mid x_i\in\{0,1\}(1\leqq i\leqq n)\} \tag{C16}$$

のみが判明し与えられたとき、補間して、“関数値の無限連続集合”

$$\{\varphi(x) \mid x_i \in [0,1]\,(1 \leqq i \leqq n)\} \tag{C17}$$

を求めるには、例えば、第3章の命題3.4の（i）をそのまま、写像$\mathfrak{I}$の定義として採用し、

$$(\mathfrak{I}\varphi)(x)$$

$$\equiv \sum_{k \in L} \varphi(k) \cdot x(k) \tag{C18}$$

ここに、

$$k \equiv \langle k_1, k_2, \cdots, k_n \rangle \tag{C19}$$

$$L \equiv \{k \mid k = \langle k_1, k_2, \cdots, k_n \rangle, k_i \in \{0,1\}, 1 \leqq i \leqq n\} \tag{C20}$$

$$x(k) \equiv x_1(k_1) \cdot x_2(k_2) \cdot \cdots \cdot x_n(k_n) \tag{C21}$$

$$x_i(k_i) \equiv$$

$$\begin{cases} 1 - x_i & \text{if } k_i = 0 \\ x_i & \text{if } k_i = 1 \end{cases} \tag{C22}$$

$$\equiv \sum_{k_1=0}^{1} \sum_{k_2=0}^{1} \cdots \sum_{k_n=0}^{1} \varphi(k_1, k_2, \cdots, k_n) \cdot x_1(k_1) \cdot x_2(k_2) \cdot \cdots \cdot x_n(k_n) \tag{C23}$$

と定義される**補間写像**（interpolating operator）

$$\mathfrak{I} : \Phi \rightarrow \Phi \tag{C24}$$

を利用できる。$\mathfrak{I}_\ell$の定義式（2.10）による式（2.9）による$\mathfrak{I}$の定義を採用していないことに注意する。

更に、2つの複素数値Borel可測な関数（パターン）φ, ψ に対し、補間写像$\mathfrak{I}$を利用して、内積（φ, η）を、

$$(\varphi, \eta)$$

$$= 2^n \cdot \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 dx_n \; \mathfrak{I}(\varphi \cdot \overline{\eta})\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{C25}$$

$$= \int_M dm(x) \; \mathfrak{I}(\varphi \cdot \overline{\eta})\,(x) \tag{C26}$$

ここに、

$$M \equiv \{x \mid x = \langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle \mid 0 \leqq x_i \leqq 1\,(1 \leqq i \leqq n)\} \tag{C27}$$

$$dm(x) =$$

$$\begin{cases} 2^n & \text{if } x \in M \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{C28}$$

と定義して得られるヒルベルト空間$\mathfrak{H}$を導入する。

式（C24）の写像$\mathfrak{I}$の定義式（C18）から分かるように、

$$\forall k \in L, \varphi(k) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{I}(\varphi \cdot \overline{\varphi}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \| \varphi \| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)} = 0 \tag{C29}$$

が成り立つことに注意する。

定積分

$$\int_0^1 dx_j \, x_j(k_j) = 1/2 \;\; \text{for any } j \in \{1, 2, \cdots, n\} \tag{C30}$$

に注意し、$\mathfrak{I}$の定義式（C18）を式（C25）に適用すると、内積（η, ψ）の表現

$$(\eta, \psi) = \sum_{k \in L} \eta(k) \cdot \psi(k)$$

$$= \sum_{k_1=0}^{1} \sum_{k_2=0}^{1} \cdots \sum_{k_n=0}^{1} \eta(k_1, k_2, \cdots, k_n) \cdot \overline{\psi}(k_1, k_2, \cdots, k_n) \tag{C31}$$

が成り立ち、

$$\psi_k(x)$$

$$\equiv x(k) \equiv x_1(k_1) \cdot x_2(k_2) \cdot \cdots \cdot x_n(k_n) \tag{C32}$$

と定義される ψ_k について、3式（B2），（B4），（B5）、つまり、

$$(\psi_k, \psi_q)=0 \text{ if } k\neq q, =1 \text{ if } k=q \tag{C33}$$

$$\forall k\in L, (\varphi, \psi_k)=0 \Rightarrow \|\varphi\|=0 \tag{C34}$$

が成り立ち、このようなすべての ψ_k の集合 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ は完全な正規直交系である。

また、

$$\forall \eta\in\Phi\subset\mathfrak{H}, \forall k\in L, (\eta, \psi_k)=\eta(k) \tag{C35}$$

が証明され、直交展開式（B8）、つまり、フーリェ展開式

$$\varphi(x) = \sum_{k\in L}(\varphi, \psi_k)\cdot\psi_k(x) \text{ for any } \varphi\in\mathfrak{H} \tag{C36}$$

は、

$$\varphi(x) = \sum_{k\in L}\varphi(k)\cdot\psi_k(x) = (\mathfrak{T}\varphi)(x)\in\mathfrak{H} \tag{C37}$$

と書き直され、この直交展開式（C32）は、

$$x_j\in\{0,1\}\ (1\leq j\leq n)\wedge\varphi(x)\in\{0,1\} \tag{C38}$$

であれば、**n変数2値真理関数η の選言標準形**（disjunctive normal form）である。選言標準形は任意の命題論理が表現可能なことが知られている。 □

［例2］（pixelwise orthogonalization）

文献［21］の第7章, 7.1節を参照。 □

［例3］（Gram-Schmidt の直交化法）

可分なHilbert空間 $\mathfrak{H}$ から、

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\cdot\varphi_k=0 \Rightarrow \text{すべての複素定数 } a_k=0 \tag{C39}$$

が成立するという意味で、一次独立な有限個の元 φ_k の集合（a set of linearly independent elements）$\{\varphi_k\}_{1\leq k\leq n}$ を取り出し、各 ψ_k は $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k$ の一次結合であるような正規直交系 $\{\psi_k\}$ は、いわゆる Gram-Schmidt の直交化法［20］（Gram-Schmidt orthogonalization process）で次のように作ることができる：

パターン $\eta_k(k\geqq 1)$ は $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{k-1}$ によって張られる部分空間に直交している φ_k の成分（the component of φ_k orthogonal to the subspace of $\mathfrak{H}$ spanned by $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{k-1}$）とすれば、

$$\eta_1\equiv\varphi_1 \tag{C40}$$

$$\eta_2\equiv\varphi_2-(\varphi_2, \eta_1\|\eta_1\|^{-1})\cdot\eta_1\|\eta_1\|^{-1} \tag{C41}$$

$$\eta_3\equiv\varphi_3-(\varphi_3, \eta_1\|\eta_1\|^{-1})\cdot\eta_1\|\eta_1\|^{-1} -(\varphi_3, \eta_2\|\eta_2\|^{-1})\cdot\eta_2\|\eta_2\|^{-1} \tag{C42}$$

$$\eta_k\equiv\varphi_k-\sum_{\ell=1}^{k-1}(\varphi_k, \eta_\ell\|\eta_\ell\|^{-1})\cdot\eta_\ell\|\eta_\ell\|^{-1}\ (k\geqq 2) \tag{C43}$$

と表され、直交性質

$$(\eta_k, \eta_\ell) = \begin{cases} 0 & \text{if } k\neq\ell \\ \|\eta_k\|>0 & \text{if } k=\ell \end{cases} \tag{C44}$$

が成立する。このとき、

$$\psi_k\equiv\eta_k\|\eta_k\|^{-1} \tag{C45}$$

とすればよい。 □

［例4］（an approximate pixelwise-orthogonalization）

内積（φ, η）を、

$$(\varphi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \varphi(x) \cdot \overline{\eta}(x) \tag{C46}$$

とする Hilbert 空間 $\mathfrak{H} = L_2(-\infty, +\infty)$ において、

$$\sigma_k > 0 \tag{C47}$$

$$t_k \neq t_\ell\ (k \neq \ell) \tag{C48}$$

を満たすように、各定数 σ_k, 各定数 t_k を選び、

$$\varphi_k(x) = [2\pi \sigma k^2]^{-1/2} \cdot \exp[-(x - t_k)^2/(2\sigma_k^2)] \tag{C49}$$

と定義される $\{\varphi_k\}_k$ は、1次独立である。

$$\int_{|x-t_k| \leqq \sigma_k} dx\ \varphi_k(x) \fallingdotseq 0.682 \tag{C50}$$

$$\int_{|x-t_k| \leqq 2\sigma_k} dx\ \varphi_k(x) \fallingdotseq 0.955 \tag{C51}$$

$$\int_{|x-t_k| \leqq 3\sigma_k} dx\ \varphi_k(x) \fallingdotseq 0.997 \tag{C52}$$

であるから、φ_kを使えば、パターンφから各点$t_k \in R$（実数全体の集合）の近傍

$$\{x \in R \mid |x - t_k| \leqq 3\sigma_k\} \subset R \tag{C53}$$

の強度情報（neighbor representative intensity）を近似的に抽出する能力が、定理C1を適用して得られる式（C5）の写像 T によって得られる。特に、$\sigma_k \to 0$ にすればするほど、そうである。 □

［例5］（Hough 変換法）

文献［21］の第7章, 7.9節を参照。 □

［例6］（帯域フィルタ群に対応する関数系 $\{\psi_{k\ell}\}$ を得るFourier変換法）

文献［21］の第7章, 7.3節を参照。 □

次に、Hilbert空間 $\mathfrak{H}$ での1つの自己共役作用素Hが選定された場合、直交系 $\{\psi\}_k$ の選定法を、次の例7で説明しよう［18］。

［例7］（平均化パターン分解法）

$$\omega_j\ (\in \Omega \subset \Phi \subset \mathfrak{H}) \tag{C54}$$

を第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターンとして、$p(\mathfrak{C}_j)$を、

$$[\forall j \in J, 0 < p(\mathfrak{C}_j) < 1] \wedge \sum_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) = 1 \tag{C55}$$

を満たす$\mathfrak{C}_j$の生起確率として、**平均化パターン**（the mean pattern）

$$\xi \equiv \sum_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) \cdot \omega_j \cdot \| \omega_j \|^{-1}\ (\neq 0) \tag{C56}$$

を用意し、代表パターン ω_j の系

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\}\ (\subset \Phi \subset \mathfrak{H}) \tag{C57}$$

が1次独立として、3条件式

① $\theta_k(H) \cdot \theta_\ell(H) =$

$$\begin{cases} 0 & \text{if } k \neq \ell \text{（直交性）} \\ \theta_k(H) & \text{if } k = \ell \text{（ベキ等性）} \end{cases}$$

②$\forall k \in L, \theta_k(H) \neq 0$（非零性）

③$\forall k \in L, (\theta_k(H)\varphi, \eta) = (\varphi, \theta_k(H)\eta)$　for any $\varphi \in \mathfrak{H}$（対称性）

を満たす射影作用素 $\theta_k(H)$ の組 $\{\theta_k(H)\}_{k \in L}$ を用いて、

$$\psi_k \equiv a_k \cdot \theta_k(H)\ \xi \| \xi \|^{-1}\ (\neq 0) \tag{C58}$$

ここに、複素定数 a_k の組 $\{a_k\}_{k \in L}$ に対し、ある正実数 b が存在し、

$$\sup_{k\in L} |a_k|^2 \leqq b < +\infty \tag{C59}$$

と定義される $\{\psi_k\}_{k\in L}$ は式（B2）を満たし、直交系である。不等式

$$\begin{aligned}\sum_{k\in L} \|\psi_k\|^2 &= \sum_{k\in L} |a_k|^2 \cdot (\theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}, \xi\|\xi\|^{-1}) \\ &\leqq b\cdot(\sum_{k\in L} \theta_k(H)\xi, \xi)/(\xi,\xi) \\ &\leqq b\end{aligned} \tag{C60}$$

が満たされていることがわかる。

flat-power property

$$\begin{aligned}\|\psi_k\|^2 &= |a_k|^2 \cdot (\theta_k(H)\xi, \xi)/(\xi,\xi) \\ &= C(k\in L\text{に無関係な定数}) > 0\end{aligned} \tag{C61}$$

を満たすように、複素定数 a_k の組 $\{a_k\}_{k\in L}$ が選ぶことができる。 □

〔例8〕（離散値3角関数系）

文献［21］の第7章, 7.2節を参照。 □

〔例9〕（reconstruction Ⅱ of the original pattern from the sampled values）

$$\begin{aligned}&(P\varphi)(x) \\ &\equiv (2\pi)^{-1}\cdot \int_{-2\pi W}^{+2\pi W} d\lambda \exp[+i\lambda x]\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[-i\lambda x]\cdot\varphi(x)\end{aligned} \tag{C62}$$

$$\text{ここに、} 0 < W < \infty,\ i\equiv\sqrt{-1} \tag{C63}$$

と定義される線形作用素（1次変換）Pと、正則な双1次エルミット形式

$$\begin{aligned}&\langle\varphi,\eta\rangle \\ &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \varphi(x)\cdot\overline{\eta}(x)\end{aligned} \tag{C64}$$

ここに、η は η の複素共役

とを用意して、正値エルミット内積 (φ,η) が、

$$\begin{aligned}&(\varphi,\eta) \\ &\equiv \langle P\varphi, P\eta\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx (P\varphi)(x)\cdot\overline{(P\eta)}(x)\end{aligned} \tag{C65}$$

と表されるHilbert空間 $\mathfrak{H}$ を導入しよう。内積 (φ,η) は、角周波数領域では帯域制限された形式で、

$$\begin{aligned}&(\varphi,\eta) \\ &= (2\pi)^{-1}\cdot\int_{-2\pi W}^{+2\pi W} d\lambda \\ &\quad (\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[-i\lambda x]\cdot\varphi(x))\cdot\overline{(\int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp[-i\lambda y]\cdot\eta(y))}\end{aligned} \tag{C66}$$

とも表現されることに注意しておく。

$$k\in L\equiv\{0,\pm1,\pm2,\cdots\} \tag{C67}$$

$$\mathrm{sinc}(u)\equiv(\pi u)^{-1}\cdot\sin(\pi u) \tag{C68}$$

を導入して、

$$\psi_k(x)\equiv(2W)^{1/2}\cdot\mathrm{sinc}(2Wx-k) \tag{C69}$$

から成る系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ は $\mathfrak{H}$ での完全正規直交系である。

このとき、

$$\forall k\in L, (\varphi,\psi_k) = (2W)^{-1/2}\cdot\varphi(k/(2W)) \tag{C70}$$

がいえ、$\varphi\in\mathfrak{H}$ のフーリェ式直交展開

$$\|\varphi(x) - \sum_{k\in L}(\varphi,\psi_k)\cdot\psi_k(x)\| = 0 \tag{C71}$$

は、これ即ち、**染谷ーShannonの標本化定理**

$$\| \varphi(x) - \sum_{k \in L} \varphi(k/(2W)) \cdot \mathrm{sinc}(2Wx - k) \| = 0 \tag{C72}$$

である。 □

［例10］（Walsh直交系）

文献［21］の第7章, 7.4節を参照。 □

（鈴木昇一，文教大学・情報学部・情報システム学科，“文教大学・情報学部・情報研究 no.18” 投稿論文，論文題目 高次認知機能における論理表現の要素，投稿年月日 1997年10月9日）