超準的手法による位相空間の性質

佐久間　拓也

The Nonstandard Theory of Topological Space

Takuya Sakuma

Abstract

Nonstandard analysis is introduced by Robinson that apply model theory to it. But nonstandard analysis that use General nonstandard model approach a little domain. So it use enlargement or saturated model. Let $^*\mathscr{U}$ be κ^+-enlargement or κ^+-saturated model and $^*\mathscr{M}$ be set of unary formula, cardinal not greater than κ. If $^*\mathscr{M}$ is finitely satisfiable then $^*\mathscr{M}$ is satisfiable. So it exist element that is satisfiable all formula in $^*\mathscr{M}$. Specially, saturation model is composed extentensin from external map to internal map.

The main purpose is to give an nonstandard definition of a topology and to show the theory of topological space. It is defined the monad and standard part of a point in U. And it prove that existense of infinitesimal set and several theory of about open or close set. It give that the shadow of a subset of the standard topological space is closed.

1．はじめに

1960年ごろ、A.ロビンソンは、モデル理論の考えを使うことによってライプニッツ流の無限小解析をそのままの形で合理化することができるのではないか、という着想を得た。これが超準解析のはじまりである。その後、超準解析は急速に発展し、数学の各分野できわめて魅力的な手段となった。

特にことわらない限り、$\mathscr{L}$ は形式言語、$\mathscr{U}$ はその $\mathscr{L}$ 系で、その宇宙 U と $\mathscr{L}$ の定項との間には双射が存在するとする。$\mathscr{L}$ の文で $\mathscr{U}$ で真なるものの全体を $\mathscr{K}$ とし、$\mathscr{K}$ の任意の文 ϕ が $\mathscr{L}$ 系 $^*\mathscr{U}$ で真であるとき $^*\mathscr{U}$ を $\mathscr{K}$ のモデルという。以後 $\mathscr{K}$ 以外のもののモデルは考えないので、単にモデルという。$\mathscr{U}$ はモデルである。

以後区別のため $^*\mathscr{U}$ で $\mathscr{L}$ の論理式を解釈することを＊解釈、真であることを＊真とする。

定理 1

$^*\mathscr{U}$ をモデルとする。$\mathscr{K}$ の文 ϕ が、$\mathscr{U}$ で真であることと $^*\mathscr{U}$ で＊真であることは同値である。(これをモデル同値の原理という。)

$\mathscr{U}$と同型なモデルを標準モデル、同型でないモデルを超準モデルという。$\mathscr{L}$に$^*U$の元で$\mathscr{L}$の定項に対応するものを標準元、対応しないものを超準元という。$\mathscr{L}$ に $^*U$ の超準元に対応する定項を付け加えたものを $^*\mathscr{L}$ とする。$^*\mathscr{L}$ の論理式が真であることをやはり＊真という。

$\mathscr{L}$で定義される $\mathscr{U}$ の概念は、すべて $^*\mathscr{L}$ に移すことが出来る。

例1

1）一変項論理式 $\phi(\mathbf{x})$：$\mathbf{x}=\emptyset \vee \exists \mathbf{y}[\mathbf{y} \in \mathbf{x}]$ は、集合を表している。これを＊解釈したものを＊集合という。すなわち $^*U$の元 α が＊集合であるとは $\phi(\alpha)$ が＊真ということである。

2）$\mathscr{L}$ の文 $\forall \mathbf{x} \exists ! \mathbf{y}[[\mathbf{y}=\emptyset \vee \exists \mathbf{z}[\mathbf{z} \in \mathbf{y}]] \wedge \forall \mathbf{w}[\mathbf{w} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \exists \mathrm{v}[\mathrm{v} \in \mathrm{x} \wedge \mathbf{w} \in \mathbf{v}]]]$、すなわち合併の公理を＊解釈することにより、$^*U$ の任意の元 α に対し、＊集合 β で、任意の $\xi \in {}^*U$ に対し、$\ll \xi \ {}^*\!\in \beta \Leftrightarrow$ ある $\eta \in {}^*U$ があって $\xi \ {}^*\!\in \eta, \eta \ {}^*\!\in \alpha \gg$ なるものが唯一存在することがわかる。これを $^*\bigcup \alpha$ と書く。

しかし、このまま移行しても扱いにくいので次のような集合を定義する。

定義1

＊集合 α に対して、α の＊元の全体を＊集合 α の**領域**といい $\hat{\alpha}$ と表す。
つまり $\hat{\alpha}=\{x; x \ {}^*\!\in \alpha\}$。明らかに $x \in \hat{\alpha} \Leftrightarrow x \ {}^*\!\in \alpha$ である。

命題1

＊集合 α, β に対し、1) $\hat{\alpha}=\hat{\beta} \Leftrightarrow \alpha=\beta$. 2) $\hat{\alpha} \subset \hat{\beta} \Leftrightarrow \alpha \ {}^*\!\subset \beta$. 3) $\hat{\alpha} \cup \hat{\beta}={}^\wedge(\alpha \ {}^*\!\cup \beta)$. 4) $\hat{\alpha} \cap \hat{\beta}={}^\wedge(\alpha \ {}^*\!\cap \beta)$. 5) $\hat{\alpha}-\hat{\beta}={}^\wedge(\alpha \ {}^*\!- \beta)$. 6) $\hat{\alpha} \times \hat{\beta}={}^\wedge(\alpha \ {}^*\!\times \beta)$. 7) ϕ が＊関係（$\phi \ {}^*\!\subset \alpha \times \beta$）なら $\hat{\phi}$ は関係（$\hat{\phi} \subset \hat{\alpha} \times \hat{\beta}$）である。とくに ϕ が＊写像なら $\hat{\phi}$ は写像である。

ただし$^*U$の元 ξ, η の順序対は $^*(\xi, \eta)$ で定義する。これによって、$^*U$ の部分集合A, Bに対し、その直積$A \times B$は $\{{}^*(\xi, \eta); \xi \in \mathrm{A}, \eta \in \mathrm{B}\}$ として定義される。

これによって＊集合 α を集合 $\hat{\alpha}$ として扱うことができる。しかし、$\hat{\alpha}$ の部分集合に対応する α の＊部分集合が存在するとは限らない。たとえば、$\hat{N}$の部分集合 $\{x; x \in N\}$ に対応する＊集合は存在しない。この区別は、次のように定義される。

定義2

$^*U$の部分集合Aに対して、$A=\hat{\alpha}$ となる＊集合 α が存在するとき、Aを**内的**である、または**内集合**といい、内的でない$^*U$の部分集合は**外的**である、または**外集合**という。関係や写像は、集合として内的のとき内的であるという。

$^*U$の部分集合Aが内的であるか外的であるかはすぐには判定できない。判定する方法として次の定理がある。

定理2（内集合の判定1）

$^*U$ の部分集合 A が内的であるための必要十分条件は、＊集合 γ、$^*U$ の有限個の元 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ お

および$\mathscr{L}$の$n+1$変項論理式$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_n)$が存在し、$^*U$の任意の元$\xi$に対して

$$\xi \in A \Leftrightarrow \xi^* \in \gamma \quad かつ \quad \phi(\xi, \eta_1, \cdots, \eta_n) \text{ が}*\text{真}$$

が成り立つことである。

定理 3（内集合の判定2）

$^*U$の部分集合Aが内的であるための必要十分条件は、$*$集合γ、および$^*\mathscr{L}$の一変項論理式$\psi(\mathbf{x})$が存在し、$^*U$の任意の元ξに対して

$$\xi \in A \Leftrightarrow \xi^* \in \gamma \quad かつ \quad \psi(\xi) \text{ が}*\text{真}$$

が成り立つことである。

2　広大モデルと飽和モデル

一般の超準モデルでは、理論の展開は難しい。そこで広大モデル・飽和モデルを定義して理論を展開する。

$^\circ\mathscr{U}$を任意のモデル、拡大された言語を$^\circ\mathscr{L}$とし、$^\circ\mathscr{L}$の一変項論理式の全体を$^\circ\mathscr{M}$とする。$\mathscr{A}$を$^\circ\mathscr{M}$の部分集合とする。

$^\circ\mathscr{U}$の元βが存在し、あらゆる$\phi \in \mathscr{A}$に対して$\phi(\beta)$が$^\circ\mathscr{U}$で真となるとき、$\mathscr{A}$は$^\circ\mathscr{U}$の中で**共起的**または$^\circ\mathscr{U}$の中で**同時に成り立つ**という。

2）$\mathscr{A}$の任意の有限部分集合が$^\circ U$の中で共起するとき、$\mathscr{A}$は$^\circ U$の中で**有限共起的**であるという。

定義 3

$^\circ\mathscr{U}$および$^*\mathscr{U}$を任意のモデル、それぞれの拡大された言語を$^\circ\mathscr{L}, {}^*\mathscr{L}$とし$^\circ\mathscr{L} \subset {}^*\mathscr{L}$とする。

κを無限基数とする。濃度がκを越えない$^\circ\mathscr{M}$の部分集合$\mathscr{A}$が、$^\circ U$の中で有限共起的なら必ず$^*U$の中で共起するとき、モデル$^*\mathscr{U}$を、モデル$^\circ\mathscr{U}$のκ^+**級広大化**という。

定義 4

1）モデル$^*\mathscr{U}$が、標準モデル$\mathscr{U}$のκ^+級広大化のとき、モデル$^*\mathscr{U}$をκ^+**級広大モデル**という。濃度の制限が無いとき、$^*\mathscr{U}$を単に**広大モデル**という。

2）モデル$^*\mathscr{U}$が、自分自身のκ^+級広大化のとき、モデル$^*\mathscr{U}$をκ^+**級飽和モデル**という。

$\mathscr{L} \subset {}^*\mathscr{L}$だから、$\kappa^+$級飽和モデルは$\kappa^+$級広大モデルでもある。$\kappa \leq \lambda$で、$^*\mathscr{U}$が$\lambda^+$級広大モデルなら$\kappa^+$級広大モデルでもある。基数の制限のない飽和モデルは存在しない。実際$^*\mathscr{U}$をκ^+級飽和モデルとすると、$^*U$の元αによって決まる一変項論理式$\ll \mathbf{x} \neq \alpha \gg$を$\phi_\alpha$とする。$\mathscr{A} = \{\phi_\alpha ; \alpha \in {}^*U\}$とすれば$\mathscr{A}$は有限共起的だが共起的でない。だから$\kappa \geq |{}^*U|$なら$^*\mathscr{U}$は$\kappa^+$級飽和モデルではない。

κ^+級広大モデルは超準モデルである。実際、$\ll \mathbf{x}(\text{finite set}) \wedge a \in \mathbf{y} \gg$　$(a \in U)$を考えるとUの中に無限個の元をもつ有限集合が存在することになってしまう。

この広大化の条件は超準解析において決定的な役割もつので共起性の原理として引用する。

定義 5

${}^{\circ}\mathscr{U}$をモデル、$\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})$を二変項論理式、$A$ を ${}^{\circ}U$ の部分集合（一般に$A\in{}^{\circ}U$ではない）とする。このとき、

$\mathscr{A}(\phi, A)=\{\phi(a,\mathbf{y})\,;\,a\in A\}$ とするとこれは一変項論理式の集合であり、濃度が A と等しい。この$\mathscr{A}$が ${}^{\circ}\mathscr{U}$の中で共起的（有限共起的）のとき、ϕ は A 上 ${}^{\circ}U$ の中で**共起的**（**有限共起的**）という。

命題 2

${}^{*}\mathscr{U}$を ${}^{\circ}\mathscr{U}$の κ^{+} 級広大化とする。$\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ を ${}^{\circ}\mathscr{L}$の二変項論理式 、${}^{\circ}U$ の部分集合 A で $|A|\leq\kappa$ であるようなものに対して、ϕ が A 上 ${}^{\circ}U$ の中で有限共起的ならば ϕ は A 上 ${}^{*}U$ の中で共起的である。

κ^{+} 級広大モデルにおける性質として次のようなものがある。

命題 3

U に属する任意の無限集合 A に対して、${}^{*}A$ は必ず超準元を持つ。

命題 4

${}^{*}\mathscr{U}$を κ^{+} 級広大モデルとする。U の部分集合で $|A|\leq\kappa$ であるならば、A の元をすべて含むような＊有限＊集合 Γが存在する。

定理 5

${}^{*}\mathscr{U}$を κ^{+} 級広大モデルとする。$\mathscr{S}$ を U に属する集合から成る有限交差族で $|\mathscr{S}|\leq\kappa$ であるとする。このとき、$\bigcap\{\hat{A};A\in\mathscr{S}\}\neq\emptyset$である。すなわち、${}^{*}U$の元$\xi$で、あらゆる$A\in\mathscr{S}$に対して$\xi{}^{*}\in{}^{*}A$ なるものがが存在する。

定理 6

前定理の記号と仮定のもとで、とくに $\mathscr{S}$ が U に属し、しかもフィルター基底の性質≪ $A,B\in\mathscr{S}$ なら, $C\subset A\cap B$ なる $\mathscr{S}$ の元Cが存在する≫をもつとする。このとき ${}^{*}\mathscr{S}$ の＊元 Γで、$\hat{\Gamma}\subset\bigcap\{\hat{A};A\in\mathscr{S}\}$ なるものが存在する。

κ^{+} 飽和モデルはさらに次のような性質も持つ。

命題 4

${}^{*}\mathscr{U}$を κ^{+} 級飽和モデルとする。${}^{*}U$ の部分集合 A が内的ならば、A の濃度は有限か、または κ より大きい。

定理 7（写像の延長定理）

${}^{*}\mathscr{U}$を κ^{+} 級飽和モデル、α,β を＊集合、C を $\hat{\alpha}$の部分集合で $|C|\leq\kappa$ なるものとする。このとき、C から$\hat{\beta}$への写像は$\hat{\alpha}$ から$\hat{\beta}$への内的な写像に延長される。正確には、C から $\hat{\beta}$への写像 f に対し、α から β への＊写像 φが存在し、$\hat{\varphi}\,|\,C=f$ となる。

3　位相空間の性質

Xを位相空間として、Θをその位相とする。またXの点aの近傍の全体を$\mathscr{V}(a)$、開近傍の全体を$\Theta(a)$とする。さらに、Xの空でない部分集合Aの近傍（開近傍）の全体を$\mathscr{V}(A)$（$\Theta(A)$）とする。

位相空間Xの点aに対し、$\bigcap\{\hat{A};A\in\Theta(a)\}=\bigcap\{\hat{B};B\in\mathscr{V}(a)\}$を、この位相に関する点$a$の**単子**または**モナド**といい、$\mu(a)$とかく。また、$X$の空でない部分集合$A$に対し、$\bigcap\{\hat{B};B\in\Theta(A)\}=\bigcap\{\hat{C};C\in\mathscr{V}(A)\}$を$A$の単子といって、$\mu(A)$とかく。

Xの点aに$\mu(a)$を対応させる写像$\mu;X\rightarrow\mathscr{P}(\hat{\mathrm{X}})$を位相$\Theta$の**単子場**という。$\alpha\in\mu(a)$のとき、$\alpha\approx a$と書く。$\hat{\mathrm{X}}$の元$\alpha$に対し、$\alpha\in\mu(a)$なる$X$の点$a$を点$\alpha$の**標準部分**といい、その全体をst$(\alpha)=\{a;\alpha\in\mu(a),a\in X\}$と書く。$\hat{\mathrm{X}}$の元$\alpha$に対し、$\alpha\in\mu(a)$なる$X$の点$a$が存在するとき、点$\alpha$を$\hat{\mathrm{X}}$の**近標準点**という。そうでない点を**遠標準点**という。$\hat{\mathrm{X}}$の近標準点の全体を$\mathscr{N}(X)$と書く。

定理 8

1）Xの点aに対し、$^*\Theta(a)$の$*$元(したがって$^*\mathscr{V}(a)$の$*$元)Γで、$\hat{\Gamma}\subset\mu(a)$なるものが存在する。

2）Xの空でない部分集合Aに対し、$^*\Theta(A)$の$*$元Λで$\hat{\Lambda}\subset\mu(A)$なるものが存在する。

Proof

1）$\Theta(a)$はフィルター基底の性質を持っているので、定理6より、$^*\Theta(a)$の$*$元Γで$\hat{\Gamma}\subset\bigcap\{\hat{A};A\in\Theta(a)\}$なるものが存在する。

2）も同様。

□

$^*\mathscr{V}(a)$（$^*\mathscr{V}(A)$）の$*$元Γ（Λ）で$\hat{\Gamma}\subset\mu(a)$（$\hat{\Lambda}\subset\mu(A)$）なるものを$a$（$A$）の無限小近傍という。

定理 9

1）Xの部分集合Aが開集合であるためには、Aの任意の元aに対して$\mu(a)\subset\hat{A}$が成立することが必要十分である。

2）Xの部分集合AおよびXの点aに対し、$A\in\mathscr{V}(a)\Leftrightarrow\mu(a)\subset\hat{A}$である。

Proof

1）Aが開集合であるとする。Aの任意の元aに対して$A\in\Theta(a)$であるから$\mu(a)\subset\hat{A}$である。
$\mu(a)\subset\hat{A}$であるとする。$\hat{\Gamma}\subset\mu(a)$なる$\Gamma^*\in{}^*\Theta(a)$が存在して、$\hat{\Gamma}\subset\hat{A}$であるから、$\ll\exists\mathbf{x}[\mathbf{x}\in\Theta(a)\wedge\mathbf{x}\subset A]\gg$は$*$真、よって真。つまり$\Theta(a)$の元$C$で$C\subset A$なるものが存在する。

2）(⇒) 定義より明らか。

(⇐) $\hat{\Gamma}\subset\mu(a)$なる$\Gamma^*\in{}^*\mathscr{V}(a)$が存在して、$\hat{\Gamma}\subset\hat{A}$であるから、$\ll\exists\mathbf{x}[\mathbf{x}\in\mathscr{V}(a)\wedge\mathbf{x}\subset A]\gg$は$*$真、よって真。つまり$\mathscr{V}(a)$の元$C$で$C\subset A$なるものが存在する。

□

系 1

1）Aが閉集合$\Leftrightarrow$ aが A に属さなければ$\mu(a) \cap \hat{A} = \emptyset$

2）Aの閉包は$\mu(a) \cap \hat{A} \neq \emptyset$なる Xの点 a の全体である。

Proof

1）補集合を考えればよい。

2）$a \not\in \overline{A}$なら1）によって$\mu(a) \cap \hat{\overline{A}} = \emptyset$。したがってもちろん$\mu(a) \cap \hat{A} = \emptyset$である。$a \in \overline{A}$ なら、任意の近傍 $B \in \mathscr{V}(a)$ に対し、$B \cap A \neq \emptyset$ 。よって$\ll \forall \mathbf{x}[\mathbf{x} \in \mathscr{V}(a) \rightarrow \mathbf{x} \cap A \neq \emptyset] \gg$ は真、したがって＊真である。とくに無限小近傍Γに対しても $\Gamma^* \cap {}^*A \neq {}^*\emptyset$である。よって$\mu(a) \cap \hat{A} \neq \emptyset$。

□

$\hat{X}$の部分集合 A に対して、$\{\mathrm{st}(x) \,;\, x \in A \cap \mathscr{N}(X)\}$ をA の影といいst (A) または ${}^\circ A$ と表す。この影に関して次の性質がある。

定理 10

$A \in X$ならば、$\overline{A} = {}^\circ A = {}^\circ\overline{A}$である。

Proof

$\overline{A}$の点 a に対し、$\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \ll \mathbf{y} \in A \wedge \mathbf{x} \in \Theta(a) \wedge \mathbf{y} \in \mathbf{x} \gg$ とするとϕ は$\Theta(a)$ 上有限共起的よって共起的。つまり $\overline{A}$ の点 a に対し、$\alpha \in \mu(a)$ なる$\hat{A}$の点が存在し、$a \in \mathrm{st}(\alpha)$ であるから$\overline{A} \subset {}^\circ\overline{A}$である。$a \in {}^\circ\overline{A}$とすると、定義より $\alpha \in \mu(a)$ となる$\hat{\overline{A}}$ の元αが存在する。つまり$\mu(a) \cap \hat{A} \neq \emptyset$となり、よって$a \in \overline{A}$。$a \in {}^\circ\overline{A} \subset \overline{A}$。${}^\circ A \subset {}^\circ\overline{A}$は明らかだから$\overline{A} = {}^\circ A = {}^\circ\overline{A}$。

系 2

1）AをXの部分集合とすると ${}^\circ A$は閉集合である。

2）Yが Xで稠密ならば$X = {}^\circ Y$。

例 2

$X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{Q}$とすると $\mathbb{Q}$は $\mathbb{R}$ で稠密である。よって、前系より$\mathbb{R} = \mathrm{st}(\hat{\mathbb{Q}})$ である。つまり、任意の実数は超有理数の標準部分によってあらわすことができる。

参考文献

［1］ Henson, C.W.(1988)　INFINITESIMALS IN FUNCTIONAL ANALYSIS, Nonstandard Analysis and its Applications (ed. Nigel Cutland), London Math. Soc. **10**,140-181

［2］ Henson, C.W(1976)　Nonstandard hulls of Banach spaces, Israel J. Math., **25**,108-144

［3］ Henson, C.W & Moore, L.C.Jr.(1972)　The nonstandard theory of topological vector space, Trans. Amer. Math Soc., **172**,405-435

[4] Henson, C.W & Moore, L.C.Jr.(1983) Nonstandard analysis and the theory of Banach spaces, Springer Lecture Notes in Math., **983**,27-112

[5] Bellenot, S.(1972) Nonstandard topological vector space, Lecture Notes in Mathematics **369**,37-39

[6] Henrich, S.(1980) Ultraproducts in Banach space theory, J.Reine Angrew Math. **313**,72-104

[7] Luxemburg, W.A.J.(1969) A general theory of monads, Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability (ed. W.A.J. Luxemburg) Holt, Rinehart, and Winston, New York,18-86

[8] Saito,M.(1987) 超積と超準解析(増補新版), 東京図書株式会社

[9] Hurd A.E. & Loeb P.A.(1985) An introduction to nonstandard real analysis, Academic Press

[10] Nottale L. & Schneider J.(1984) Fractals and nonstandard analysis, J. Math. Phys. **25**,1296-1300