類似度関数を用いた確率的緩和法

鈴木　昇一

A Probabilistic Relaxation Method Using Similarities

Shoichi Suzuki

あらまし

パターン認識過程は、入力パターンの帰属するであろう候補カテゴリ候補を単一の元から成る候補カテゴリに絞っていくものである［3]，［4]。

本論文では、1つのパターンφについての認識の働きを万能的に備えている**認識システム RECOGNITRON** の研究［3]，［4］とは異なり、1つの画面内に、n 個の物体像 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n \in \Phi \subset \mathfrak{H}$があると判明したとき、各物体$\varphi_k$(k＝1～n）に、m個のカテゴリ $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots, \mathfrak{C}_m$の内、如何なるカテゴリを付与すべきかが、両立性の程度 CM($\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j$) と影響の程度 IF($\varphi_k, \varphi_\ell$)が新しく一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$($\supset \Phi$) 上で導入され(2例1. 1, 1. 2)、類似度関数［3]，［4］SMを初期条件とする更新アルゴリズム（2. 2. 2項）を採用するSM確率的ラベリング弛緩法が収束するための諸条件が厳密かつ詳細に研究されている。

キーワード

類似度関数　確率的弛緩法　両立性測度　影響係数　不動点方程式　平衡状態　更新規則　大局的首尾一貫性　パターンモデル

Abstract

Let us suppose that a process of recognizing a pattern is to narrow down a set of categories to which the pattern may possibly belong and to convert the set to a set which contains only an element [3], [4].

In this paper, instead of dealing with a recognition system RECOGNITRON [3], [4] which can possess of an universal faculty of recognition only for any pattern in question, we shall research which category of m categories $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots, \mathfrak{C}_m$ each of n objects (patterns) $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ (a Hilbert space) should be simustaneously assigned.

Using compatibility measure CM ($\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j$) of pattern φ_k having category $\mathfrak{C}_i$ when pattern φ_ℓ having $\mathfrak{C}_j$ and influence coefficient IF (φ_k, φ_ℓ) of pattern φ_k from pattern φ_ℓ, a new probabilistic relaxation labeling method with regard to similarity measure SM defined in appendix A is proposed based

on literature [39], where quantity SM(φ_k, ω_i; t) is the probability of the k-th pattern φ_k having the i-th category $\mathfrak{C}_i$ at step t. The dynamics of the re laxation system and the relationship between convergence properties and system parameters are studied analytically and strictly in detail.
Key words : similarity measure probabilistic relaxation method compatibility measure influence coefficient fixed-point equation equilibrium state updating rule global consistency pattern-model

第1章 まえがき

任意のパターン認識手法より、認識率が下回らない認識手法が不動点探索形（構造受精多段階帰納推論）認識手法として、存在することがで証明されている（文献［3］の定理6. 1（**万能認識定理**））。認識システム内の3要素であるモデル構成作用素 T，類似度関数 SM, 大分類関数BSCが十分、問題としている処理対象パターン集合Φに関し適切［18］に選ばれていなければ、“入力パターン$\varphi \in \Phi$がどの1つのカテゴリに帰属するかについてのカテゴリ帰属知識”のあいまい性を正しく解消できない。任意の通常の認識法を1段の認識過程で模擬できるが、このときの通常の認識法での正認識率を高めるには、多段決定過程を導入することがその1つの解決法であることが、**万能認識定理**の証明内容などから、容易に理解できる。

問題とする処理の対象パターンφが最終的に認識されるためには、1つの候補カテゴリ（類概念）を除き、残りのすべての候補カテゴリが非候補カテゴリとして除去されなければならない［15]。S.Suzuki の提案したカテゴリ帰属知識に関する**不動点方程式**（fixed-point equation）が成立し、認識の働きが終了するという過程［3]，［4］に関し、その途中の認識過程に残存する候補カテゴリの個数を推定するための分析などが成されている［15]。特に、単位時間当りに発見される非候補カテゴリの個数はその時刻に残存している非候補カテゴリの数に比例するという“指数型SRGM”ではなくて、**遅れS字型SRGMの対応する“不動点探索形構造受精多段階帰納推論を行うパターン認識過程”**、即ち、

その認識の働きが、非候補カテゴリの存在を観測・確認する素過程と、
構造受精変換を行って非候補カテゴリの抽出に至る素過程との2つの
過程からなるとした認識過程

が研究されている［15]。

本論文では、1つのパターンφについての認識の働きを備えている**認識システムRECOGNITRON**の研究とは異なり、1つの画面内に、n 個の物体パターン像

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n \tag{1.1}$$

があると、segmentationの処理後判明したとき、各φ_k(k＝1～n) に、m 個のカテゴリ

$$\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots, \mathfrak{C}_m \tag{1.2}$$

の内、如何なるカテゴリを付与すべきかを考えてみよう。

カテゴリ$\mathfrak{C}_i$が付与されているパターンφ_kから見て、カテゴリ$\mathfrak{C}_j$が付与されているパターンφ_ℓとの両立性の程度

$$CM(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j) \tag{1.3}$$

と、パターンφ_kから見て、パターンφ_ℓからの影響の程度

$$\mathrm{IF}\ (\varphi_k, \varphi_\ell) \tag{1.4}$$

とが事前にわかっていることが、カテゴリ名のこの付与問題を解決するにあたって必要であるというのが、**確率的ラベリング弛緩法**（probabilistic relaxation labeling method）である。

2式（1.3），（1.4）のCM（$\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j$），IF（$\varphi_k, \varphi_\ell$）については、本論文では、次の例1, 例2の如く、提案しておくが、本2例は本研究内容を具体的に理解するのに役立つであろう。

［例1］（両立性の程度の1表現）

$$\begin{aligned}
&\mathrm{CM}\,(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j) \\
&= \| [\mathrm{T}\varphi_k - \mathrm{T}\varphi_\ell] - [\mathrm{T}\omega_i - \mathrm{T}\omega_j] \|^{-2} \\
&\quad / \sum_{i \in J} \| [\mathrm{T}\varphi_k - \mathrm{T}\varphi_\ell] - [\mathrm{T}\omega_i - \mathrm{T}\omega_j] \|^{-2} \\
&\quad \text{where } k, \ell \in N \equiv \{1, 2, \cdots, n\} \text{ and } i, j \in J \equiv \{1, 2, \cdots, m\}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

□

［例2］（影響の程度の1表現）

$$\begin{aligned}
&\mathrm{IF}\ (\varphi_k, \varphi_\ell) \\
&= \| \mathrm{T}\varphi_k - \mathrm{T}\varphi_\ell \|^{-2} / \sum_{\ell \in N} \| \mathrm{T}\varphi_k - \mathrm{T}\varphi_\ell \|^{-2} \\
&\quad \text{where } k, \ell \in N \equiv \{1, 2, \cdots, n\}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

□

本研究の新規性・有効性・信頼性について説明しておこう。

Rosenfeld型確率的弛緩法の基本的諸性質については既に研究されているが［5］、本研究はこのRosenfeld型確率的弛緩法とは異なる確率的弛緩法［39］に接したことが端緒になり、始められた。付録Aのaxiom 2を満たす類似関数 SM を式（2.13）の如く、SMの更新アルゴリズムの初期条件として採用した研究は本論文以外には存在しなくて、然も、解析した内容についても、文献［39］の対応する部分についてはその不備を補う形で厳密になっている（新規性・信頼性）。

本更新アルゴリズムは式（1.1）で示されているn 個の物体パターン像$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$は文献［39］とは異なり、一般抽象ヒルベルト（Hilbert）空間の元でありさえすればよく、適用可能性は比較にならないほど拡がっている（有効性）。

実際の場面に適用して、有効性・信頼性について確認することが将来の課題として残されている。

尚、付録Aでは、本研究で新しく提案される更新アルゴリズムの初期条件式（2.13）で採用される類似度関数［3］,［4］,［12］,［18］SM がパターン$\varphi \in \Phi$に対応するモデル［11］$\mathrm{T}\varphi$と、処理の対象とする問題のパターン集合Φとに関連して、解説されており、更に、付録Bでは、本更新アルゴリズムの収束性を明らかにするために必要な基礎が論じられている。そして、付録C～Lでは、類似度関数 SM に関し、様々な話題が提供されている。

2. 問題の設定・定式化, 更新アルゴリズム, 直交条件

本章では、有限個のパターン$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$についてのaxiom 2を満たす類似度関数 SM の値 SM（φ_k, ω_i）（$k=1 \sim n, i=1 \sim m$）を合理的に更新する新しい確率的弛緩ラベリング法（probabilistic labeling method）が説明される。

A pattern with a kind of categorical ambiguity can be interpreted as a fuzzy set［3］.

We can propose a various probabilistic relaxation scheme which aids to solve labeling problems based on the probability theory [21] ~ [25]. However, this method is very complex in calculation, and some approximate procedure is needed.

2.1 問題設定と研究目標

本論文で解決しょうとする問題と、達成しようとするその解決結果は各々、次の問題設定と研究目標で述べられている。

［問題設定］**（有限個のパターンの、同時カテゴリ付け）**

(1) パターン φ_k のn個から成る集まり

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\} = \{\varphi_n \mid n \in N\} \subseteq \Phi_B \quad \text{where } N \equiv \{1, 2, \cdots, n\} \tag{2.1}$$

(2) カテゴリ（類概念）$\mathfrak{C}_i$ の m 個から成る集まり

$$\underline{\mathfrak{C}} \equiv \{\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots, \mathfrak{C}_m\} = \{\mathfrak{C}_j \mid j \in J\} \quad \text{where } J \equiv \{1, 2, \cdots, m\} \tag{2.2}$$

が与えられたとき、各 φ_k に如何なるカテゴリ（例えば、$\mathfrak{C}_i$）を付けるか？ □

を研究しよう。

［研究目標］**（global consistency の達成）**

①$\exists t \in \{0, 1, 2, \cdots\}, \forall k \in N, \forall i \in J,$

$$SM(\varphi_k, \omega_i; t) = \sum_{j \in J} CM(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j) \cdot SM(\varphi_\ell, \omega_j; t) \quad \text{for any } \ell \in N \quad \textbf{(global consistency)} \tag{2.3}$$

が成り立つように、類似度関数 SM の修正値

$$②SM(\varphi_k, \omega_i; t), k \in N, i \in J \quad t = 0, 1, 2, \cdots \tag{2.4}$$

を変更して行き、結果として、

$$③\exists t \in \{0, 1, 2, \cdots\}, \forall k \in N, \forall i \in J, DFF(\varphi_k, \omega_i; t) = 0 \tag{2.5}$$

が成り立ち、然も、

$$④\exists t \in \{0, 1, 2, \cdots\}, \forall k \in N, R(\varphi_k, t) = 1 \tag{2.6}$$

が成り立ち、**平衡状態**

$$⑤\exists t \in \{0, 1, 2, \cdots\}, \forall k \in N, \forall i \in J, SM(\varphi_k, \omega_i; t+1) = SM(\varphi_k, \omega_i; t) \quad \textbf{（不動点方程式）} \tag{2.7}$$

が得られるようにするのが研究目標である（定理B. 2を参照）。 □

さて、上述の問題設定での同時カテゴリ付けの方法は次のように指摘される。

［同時カテゴリ付けの方法］

研究目標の⑤が成立したとき、第 $k \in N$ 番目のパターン φ_k には、カテゴリ番号

$$i(k) \equiv \mathrm{argmax}_{i \in J} SM(\varphi_k, \omega_i; t) \in J \tag{2.8}$$

を発見し、カテゴリ名としてのラベル $\mathfrak{C}_{i(k)}$ を付与する

ことになる。このとき、次の結果が成立することが望ましい。

［**望ましい結果**］

研究目標の⑤が成立したとき、

$\forall k \in N, \exists i \in J,$

$SM(\varphi_k, \omega_i; t) = 1$ (2.9)

$\wedge [\forall i' \in J - \{i\}, SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t) = 0]$ (2.10)

の成立が望ましい。 □

2. 2 A new probabilistic relaxation method using similarity meatures

2. 2. 1 6つの基本量 ①〜⑥

axiom 2を満たす類似度関数

$SM: \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\}$ (2.11)

を導入する。axiom 2, (ii) の規格化条件が成立しているから、パターン φ_k と第 $i \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_i$ の代表パターン ω_i との間の類似度 $SM(\varphi_k, \omega_i)$ を、

$SM(\varphi_k, \omega_i)$: The probability of pattern φ_k having category $\mathfrak{C}_i$ (2.12)

と、解釈する。

次の6基本量 ①〜⑥ を導入する：

①$SM(\varphi_k, \omega_i; t)$: The probability of the k-th pattern φ_k having the i-th category $\mathfrak{C}_i$ at step t

②$CM(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j)$: The compatibility measure of pattern φ_k having category $\mathfrak{C}_i$ when pattern φ_ℓ having $\mathfrak{C}_j$

③$IF(\varphi_k, \varphi_\ell)$: The influence coefficient of pattern φ_k from pattern φ_ℓ

④$NSM(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) \equiv \sum_{\ell \in N} IF(\varphi_k, \varphi_\ell) \cdot \sum_{j \in J} CM(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j) \cdot SM(\varphi_\ell, \omega_j; t)$

: The neighborhood support measure of pattern φ_k having the $\mathfrak{C}_i$ at step t

⑤差 (difference)

$DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) \equiv SM(\varphi_k, \omega_i; t) - NSM(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)$

⑥$R(\varphi_k; t)$

$\equiv \sum_{i' \in J} [SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t) + SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t) \cdot DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_{i'}; t)]$ □

2. 2. 2 更新アルゴリズム

The dynamics of the system depends on its governing equation, i.e.updating rule of the system.

式 (2.12) の SM を更新していく updating algorithmは次のように述べられる:

(i) initialization (初期化)

$SM(\varphi_k, \omega_i; t) \mid t=0 \equiv SM(\varphi_k, \omega_i), k \in N, i \in J$ (2.13)

(ii) updating rule (更新規則)

$SM(\varphi_k, \omega_i; t+1)$

$= [SM(\varphi_k, \omega_i; t) + SM(\varphi_k, \omega_i; t) \cdot DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)] / R(\varphi_k; t), k \in N, i \in J$ (2.14)

□

2. 2. 3 $SM(\varphi_k, \omega_i; t)$ の規格化条件

式 (2.14) からわかるように、規格化条件

$\forall k \in N, \forall t \in \{0, 1, 2, \cdots\}, \sum_{i \in J} SM(\varphi_k, \omega_i; t) = 1$ (2.15)

が成り立っている。よって、2. 2. 1項, ⑥の $R(\varphi_k; t)$ の再表現

$$R(\varphi_k; t) = 1 + \sum_{i' \in J} SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t) \cdot DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_{i'}; t) \tag{2.16}$$

が成り立っている。

2. 2. 4　両立性の程度 CM, 影響の程度 IF の満たさなければならない諸条件

compatibility $CM(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j)$ と、influence coefficient $IF(\varphi_k, \varphi_\ell)$ とは、2. 2. 1項で説明されているが、各々、次の諸条件を満たすことを要求する：

[CM の満たさなければならない axiom CM]

（i）$\forall k, \forall \ell \in N, \forall i, \forall j \in J,\ 0 \leqq CM(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j) \leqq 1$

（ii）$\forall k, \forall \ell \in N, \forall j \in J,\ \sum_{i \in J} CM(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j) = 1$　□

[IF の満たさなければならない axiom IF]

（イ）$\forall k, \forall \ell \in N,\ 0 \leqq IF(\varphi_k, \varphi_\ell) \leqq 1$

（ロ）$\forall k,\ \sum_{\ell \in N} IF(\varphi_k, \varphi_\ell) = 1$　□

2. 3　直交条件を満たす CM, IF

2条件式（2.17），（2.18）を満たす**CMは直交性を備えている**といわれる。同様に、2条件式（2.19），（2.20）を満たす **IF は直交性を備えている**といわれる。

[定理2. 1]　**(直交性CM, IF のNSM-SM相等定理)**

或る $i \in J$ と、或る $k \in N$ とが存在して、

両立性の測度 CM の直交性

$$CM(\varphi_k, \varphi_k; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_i) = 1 \tag{2.17}$$

$$\wedge [\forall \ell \in N - \{k\}, \forall j \in J - \{i\}, CM(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j) = 0] \tag{2.18}$$

が成り立っており、且つ、**影響係数 IF の直交性**

$$IF(\varphi_k, \varphi_k) = 1 \tag{2.19}$$

$$\wedge [\forall \ell \in N - \{k\}, IF(\varphi_k, \varphi_\ell) = 0] \tag{2.20}$$

とが成り立っておれば、

$$NSM(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) = SM(\varphi_k, \omega_i; t) \tag{2.21}$$

$$\therefore \quad DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) = 0. \tag{2.22}$$

が成立し、**平衡状態を実現する不動点方程式**

$$R(\varphi_k; t) > 0 \Rightarrow \tag{2.23}$$

$$SM(\varphi_k, \omega_i; t+1) = SM(\varphi_k, \omega_i; t). \tag{2.24}$$

が成立する。

（証明）$NSM(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)$

$= \sum_{\ell \in N} IF(\varphi_k, \varphi_\ell) \cdot \sum_{j \in J} CM(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j) \cdot SM(\varphi_\ell, \omega_j; t)$

$= \sum_{\ell \in N} IF(\varphi_k, \varphi_\ell) \cdot CM(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_i) \cdot SM(\varphi_\ell, \omega_i; t)$　　$\because$　式（2.18）

$= CM(\varphi_k, \varphi_k; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_i) \cdot SM(\varphi_k, \omega_i; t)$

　　$\because$　2式（2.19），（2.20）

$$= SM(\varphi_k, \omega_i; t) \quad \because \ 式 (2.17) \tag{2.25}$$

を得、式（2.21）の成立が示された。式（2.22）は定義式⑤から明らかである。

$R(\varphi_k; t)$ は不等式（B.8）を満たしているから、式（2.23）は、

$$R(\varphi_k; t) \neq 0 \tag{2.26}$$

と同等である。よって、SM の更新式（2.14）から、式（2.24）が成立することがわかる。　□

3. 類似度更新問題の求解に関する解析

本章では、付録Bでの“SM確率的緩和法における基本的諸性質”などを基盤として、類似度更新問題の求解に関する解析を介し、2. 2. 2項の更新アルゴリズムが終了する諸条件が明らかにされる。

3. 1　不動点方程式を満たす平衡状態に関する3補助定理

先ず、不動点方程式が成立するという意味で、確率的緩和過程を記述する2. 2. 2項の更新アルゴリズムが終了する諸条件を明らかにするのに役立つ3つの補助定理3. 1～3. 3を証明する。

［補助定理3. 1］

The updating rule in equation (2.14) can be rewritten as

$$\begin{aligned}&\mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega_i;t+1)\\&=\mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega_i;t)+\mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega_i;t)\cdot \mathrm{d}(\varphi_k,\ \omega_i;t)/\mathrm{R}(\varphi_k,t) &(3.1)\\&=\mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega_i;t)[1+\mathrm{d}(\varphi_k,\ \omega_i;t)/\mathrm{R}(\varphi_k,t)] &(3.2)\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(\varphi_k,\ \omega_i;t)\\&\equiv \mathrm{q}(\varphi_k,\ \omega_i;t)\cdot \mathrm{DFF}(\varphi_k,\ \mathfrak{C}_i;t)-\Sigma_{i'\in J-\{i\}}\ \mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega_{i'};t)\cdot \mathrm{DFF}(\varphi_k,\ \omega_{i'};t) &(3.3)\\&\mathrm{q}(\varphi_k,\ \omega_i;t)\equiv \Sigma_{i'\in J-\{i\}}\ \mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega_{i'};t)\\&=1-\mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega_i;t) &(3.4)\end{aligned}$$

The dynamical behaviors of the labeling system with the probabilistic updating rule given by its governing equation (2.14) are determined by the quantity NSM(φ_k, $\mathfrak{C}_i$; t) and therefore d(φ_k, ω_i; t) defined by expression (3.3) is known as a controlling variable of the system.

（証明）式（3.2）の成立は式（3.1）から明らかであるから、式（3.1）の成立を示そう。

式（2.14）を変形すれば、

$$\begin{aligned}&\mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega_i;t+1)\\&=\mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega_i;t)+\mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega_i;t)\\&\quad\cdot[1-\mathrm{R}(\varphi_k,t)+\mathrm{DFF}(\varphi_k,\ \mathfrak{C}_i;t)]/\mathrm{R}(\varphi_k,t) &(3.5)\end{aligned}$$

となるが、これに、式（2.16）を変形して得られる等式

$$\begin{aligned}&-\sum_{i'\in J}\mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega_{i'};t)\cdot \mathrm{DFF}(\varphi_k,\ \mathfrak{C}_{i'};t)\\&=1-\mathrm{R}(\varphi_k;t) &(3.6)\end{aligned}$$

を代入すれば、

$$\begin{aligned}&\mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega_i;t+1)\\&=\mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega_i;t)+\mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega_i;t)\cdot[\mathrm{DFF}(\varphi_k,\ \mathfrak{C}_i;t)-\sum_{i'\in J}\mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega_{i'};t)\\&\quad\cdot \mathrm{DFF}(\varphi_k,\ \mathfrak{C}_{i'};t)]/\mathrm{R}(\varphi_k,t)\\&=\mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega_i;t)+\mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega_i;t)\cdot[[1-\mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega_i;t)]\cdot \mathrm{DFF}(\varphi_k,\ \mathfrak{C}_i;t)\\&\quad-\Sigma_{i'\in J-\{i\}}\ \mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega_{i'};t)\cdot \mathrm{DFF}(\varphi_k,\ \mathfrak{C}_{i'};t)]/\mathrm{R}(\varphi_k,t)\\&=\mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega_i;t)+\mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega_i;t)\cdot[\mathrm{q}(\varphi_k,\ \omega_i;t)\cdot \mathrm{DFF}(\varphi_k,\ \mathfrak{C}_i;t)\\&\quad-\Sigma_{i'\in J-\{i\}}\ \mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega_{i'};t)\cdot \mathrm{DFF}(\varphi_k,\ \mathfrak{C}_{i'};t)]/\mathrm{R}(\varphi_k,t)\qquad \because\ \text{式}\ (3.4)\\&=\mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega_i;t)+\mathrm{SM}(\varphi_k,\ \omega\, i;t)\cdot \mathrm{d}(\varphi_k,\ \omega_i;t)/\mathrm{R}(\varphi_k,t)\qquad \because\ \text{式}\ (3.3)\end{aligned}$$

を得、式（3.1）の成立が示された。

［補助定理3. 2］

$$\forall i \in J, \mathrm{DFF}(\varphi_k, \mathfrak{S}_i; t)=0 \tag{3.7}$$

であれば、

$$R(\varphi_k, t)=1 \tag{3.8}$$

が成り立ち、**不動点方程式**

$$\forall i \in J, \mathrm{SM}(\varphi_k, \omega_i; t+1)=\mathrm{SM}(\varphi_k, \omega_i; t) \tag{3.9}$$

を満たす**平衡状態**が成立する。

（補助定理3. 2の証明）　$R(\varphi_k, t)$ の表現式 (2.16) に、式 (3.7) を代入すれば、式 (3.8) が成り立つことがわかる。2式 (3.7), (3.8) を式 (3.5) に代入すれば、式 (3.9) の成立がわかる。 □

［補助定理3. 3］

$$\text{(i-1)}\ R(\varphi_k; t)>0 \tag{3.10}$$

ならば、

$$\mathrm{SM}(\varphi_k, \omega_i; t+1)=\mathrm{SM}(\varphi_k, \omega_i; t) \tag{3.11}$$

$$\Leftarrow$$

$$d(\varphi_k, \omega_i; t)=0. \tag{3.12}$$

(i-2) 不等式 (3.10) が成り立ち、且つ、

$$\mathrm{SM}(\varphi_k, \omega_i; t)>0 \tag{3.13}$$

ならば、

式 (3.11) ⇒ 式 (3.12).

(ii) 式 (3.10) が成立しており、しかも、

$$\mathrm{SM}(\varphi_k, \omega_i; t)=0 \tag{3.14}$$

ならば、式 (3.11) が成り立つ。

(iii) 式 (3.10) が成立していれば、

式 (3.11)

⇔式 (3.14) ∨式 (3.12).

（証明） (i-1) の証明：式 (3.1) から明らか。

(i-2) の証明：不等式 (3.10) が成立しているから、

式 (3.11)

$$\Leftrightarrow \mathrm{SM}(\varphi_k, \omega_i; t)\cdot d(\varphi_k, \omega_i; t)/R(\varphi_k, t)=0 \quad \because\ \text{式 (3.1)} \tag{3.15}$$

$$\Rightarrow d(\varphi_k, \omega_i; t)=0 \quad \because\ 2\text{式 (3.10), (3.13)}$$

(ii) の証明：式 (3.10) を考慮し、式 (3.14) を代入すると、式 (3.15) が成り立つ。式 (3.1) に式 (3.15) を代入すれば、式 (3.11) が成り立つことがわかる。

(iii) の証明：式 (3.10) が成立していれば、

式 (3.11)

⇔式 (3.15)　∵ 式 (3.1)

⇔式 (3.14) ∨式 (3.12). □

3. 2　平衡状態の実現

次の定理3. 1は、2. 2. 1項の差 $\mathrm{DFF}(\varphi_k, \mathfrak{S}_i; t)$ が、

a suitable quantity for measuring the global inconsistency among $SM(\varphi_k, \omega_i; t)$, and

$CM(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j)$ and $SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t)$ $(i' \in J)$ (3.16)

であることを明らかにしており、2. 2. 2項の更新アルゴリズムが平衡状態を実現する条件を指摘している。

［定理3. 1］**（平衡状態の実現基本定理）**

The k-th pattern φ_k with the i-th category $\mathfrak{C}_i$ arrives at a stable state at stept such that

$$【SM(\varphi_k, \omega_i; t+1) = SM(\varphi_k, \omega_i; t) \text{ if } R(\varphi_k, t) > 0 \tag{3.17}$$

$$\Leftarrow$$

$$d(\varphi_k, \omega_i; t) = 0 \text{ if } R(\varphi_k, t) > 0, \tag{3.18}$$

つまり、

$$q(\varphi_k, \omega_i; t) \cdot DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)$$

$$= \Sigma_{i' \in J - \{i\}} SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t) \cdot DFF(\varphi_k, \omega_{i'}; t) \text{ if } R(\varphi_k, t) > 0】 \tag{3.19}$$

$$\vee$$

$$【SM(\varphi_k, \omega_i; t+1) = SM(\varphi_k, \omega_i; t) > 0 \text{ if } R(\varphi_k, t) > 0 \tag{3.20}$$

$$\Rightarrow d(\varphi_k, \omega_i; t) = 0 \tag{3.21}$$

$\Leftrightarrow$式（3.19）】.

（証明） 式（3.19）の成立

$\Leftrightarrow$式(3.18)の成立 $\because$ 式（3.3）

$\Rightarrow$式(3.17)の成立 $\because$ $R(\varphi_k, t) > 0 \wedge$式（3.1）

が得られ、逆に、

式(3.20)の成立

$\Rightarrow SM(\varphi_k, \omega_i; t) \cdot d(\varphi_k, \omega_i; t) / R(\varphi_k, t)$

$\because$ 式（3.1）

$\Rightarrow$式(3.18)の成立

$\because$ $SM(\varphi_k, \omega_i; t) > 0 \wedge R(\varphi_k, t) > 0$

$\Leftrightarrow$式（3.19）の成立 $\because$ 式（3.3） □

3. 3 "2式（2.9），（2.10）で表される望ましい結果"の、更新アルゴリズムによる実現

式(3.1)から従う結論は次の通りである。

$$\exists s \in \{0, 1, 2, \cdots\},$$

$$\forall t \geqq s,$$

$$R(\varphi_k, t) > 0 \tag{3.22}$$

$$\Rightarrow$$

$$\exists i \in J \equiv \{1, 2, \cdots, m\},$$

①$d(\varphi_k, \omega_i; t) > 0$

$\Rightarrow SM(\varphi_k, \omega_i; t+1) > SM(\varphi_k, \omega_i; t)$

②$d(\varphi_k, \omega_i; t) = 0$

$\Rightarrow SM(\varphi_k, \omega_i; t+1) = SM(\varphi_k, \omega_i; t)$

③$d(\varphi_k, \omega_i; t) < 0$

$\Rightarrow SM(\varphi_k, \omega_i; t+1) < SM(\varphi_k, \omega_i; t)$

が、2式（3.1），（B.8）を考慮すると、従うことになるが、このとき、

$$\exists s \in \{0, 1, 2, \cdots\},$$
$$\forall t \geqq s,$$
$$\exists i \in J, d(\varphi_k, \omega_i; t) > 0 \tag{3.23}$$
$$\wedge\ [\forall i' \in J-\{i\}, d(\varphi_k, \omega_{i'}; t) < 0] \tag{3.24}$$
$$\text{if } R(\varphi_k, t) > 0 \tag{3.25}$$

であれば、

$t \to \infty$ に従い、

$$SM(\varphi_k, \omega_i; t) \to 1 \tag{3.26}$$
$$\wedge [\forall i' \in J-\{i\}, SM(\varphi_k, \omega_i; t) \to 0] \tag{3.27}$$

が期待されることになる。

3.4 平衡状態の成立に関する話題

先ず、

$$R(\varphi_k, t) > 0 \tag{3.28}$$

であれば、

$$d(\varphi_k, \omega_i; t) = 0 \tag{3.29}$$
$$\Rightarrow SM(\varphi_k, \omega_i; t+1) = SM(\varphi_k, \omega_i; t)$$
$$\because \text{ 補助定理3.3,（i-1）} \tag{3.30}$$
$$\Leftrightarrow SM(\varphi_k, \omega_i; t) = 0 \vee d(\varphi_k, \omega_i; t) = 0$$
$$\because \text{ 補助定理3.3,（iii）} \tag{3.31}$$
$$\Rightarrow$$
$$[d(\varphi_k, \omega_i; t) = 0 \text{ if } SM(\varphi_k, \omega_i; t) > 0] \tag{3.32}$$
$$\vee [SM(\varphi_k, \omega_i; t) = 0 \text{ if } d(\varphi_k, \omega_i; t) > 0] \tag{3.33}$$
$$\Rightarrow \forall i' \in J-\{i\},$$
$$[\Sigma_{i' \in J-\{i\}}\ SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t)] \cdot DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)$$
$$= \Sigma_{i' \in J-\{i\}}\ SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t) \cdot DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_{i'}; t)$$
$$\because \text{ 式（3.3）} \tag{3.34}$$
$$\Rightarrow \forall i' \in J-\{i\},$$
$$DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) = DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_{i'}; t)$$
$$\text{if } 1 > SM(\varphi_k, \omega_i; t) \quad \because \quad (3.4) \tag{3.35}$$

に注意しておく。

次の定理3.2は、平衡状態式（3.38）が成立していれば、

The quantity $DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)$ is referred to as the degree of inconsistency with regard to $SM(\varphi_k, \omega_i; t)$, $CM(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_{i'})$ and $SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t)$ $(i' \in J)$

であると解釈されることに関連した式（3.42）の成立などを指摘したものである。

［定理3.2］**（平衡状態定理）**

$$\text{(i) } R(\varphi_k; t) > 0 \tag{3.36}$$

ならば、

$$\forall i' \in J-\{i\}, SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t)=0 \tag{3.37}$$
$$\Rightarrow SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t+1)=SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t). \tag{3.38}$$
(ii) 式 (3.36) が成立しているならば、
$$SM(\varphi_k, \omega_i; t)>0 \tag{3.39}$$
$$\wedge SM(\varphi_k, \omega_i; t+1)=SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t) \tag{3.40}$$
$$\Rightarrow d(\varphi_k, \omega_i; t)=0 \tag{3.41}$$
$$\therefore$$
$$[\Sigma_{i' \in J-\{i\}} SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t)] \cdot DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)$$
$$=\Sigma_{i' \in J-\{i\}} SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t) \cdot DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_{i'}; t) \tag{3.42}$$
が成り立つ。

(iii)
$$[\forall i' \in J-\{i\}, SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t)=0] \tag{3.43}$$
$$\vee [\forall i' \in J-\{i\}, DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)=DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_{i'}; t)] \tag{3.44}$$
ならば、式 (3.42) が成り立つ。

(iv)

(iv-a) $SM(\varphi_k, \omega_i; t)=1$ ならば、式 (3.43) が成り立つ。

(iv-b) $\forall i' \in J-\{i\}$,
$$SM(\varphi_k, \omega_i; t)-SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t)$$
$$=NSM(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)-NSM(\varphi_k, \mathfrak{C}_{i'}; t)$$
ならば、式 (3.44) が成り立つ。

(証明) (i) は、補助定理3. 3の (ii) を適用して得られる。

式 (3.41) は、補助定理3. 3の (i-2) を適用して得られる。式 (3.42) は、2式 (3.3), (3.4) を用いて、式 (3.41) を書き直したものである。

(iii) は明らかである。

(iv-a) は、式 (2.15) から明らかである。

(iv-b) は、2. 2. 1項の⑤の定義を用いて、式 (3.44) を書き直したものである。 □

4. むすび

多くの情報が混在する入力画像から特定の形状のみを認識したい場合がある。このような場合に対処可能な **“対応付け形状認識モデル”** では、入力パターンの何番目の特徴と記憶パターンの何番目の特徴とが対応するかを決定しなければならないが、ホップフィールドニューラルネット [2] を利用したこの種の研究には、対応付け確信度間の相関行列 (ニューロンの結合係数) が提案されている [40]。

単一の濃淡画像内に含まれる物体の名前を決定する **“物体認識システム”** を、各々異なった物体を認識するプログラムをマルチエージェントによって統合するシステムとして構築する研究 [41] もあり、対象画像に依存しないような認識を可能にし、存在する物体の種類やその正確な形状などがあらかじめわからないという実世界シーンの画像に対処できるこのシステムでは、エージェントの内部を通信モジュールと認識モジュールに分け、通信と認識を並列に動作させている。

このような2種類の認識システムの構築にも、恐らく、本研究内容が役立つであろう。

然し乍ら、本研究内容は、単一画像から複数の物体がうまく抽出されたときに（segmentation [42]）有効に適用され得るものである。

The relaxation process iteratively modifies the similarity vector $\underline{SM}(\varphi_k; t) \equiv \{SM(\varphi_k, \omega_i; t) \mid i \in J\}$ and generates the final similarity vector $\underline{SM}(\varphi_k; t)$ satisfying a fixed-point equation $\underline{SM}(\varphi_k; t) = \underline{SM}(\varphi; t+1)$ at iteration t.

The dynamical process of the system suggests that a probabilistic relaxation can be regarded as a competitive process among categoies under the probabilistic constraint (i.e. $0 \leq \underline{SM}(\varphi_k, \omega_i; t)$, $CM(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j) \leq 1$, $\sum_{i\in J} \underline{SM}(\varphi, \omega_i; t) = 1$ and $\sum_{i\in J} CM(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j) = 1$). The distance between some m-dimensional unit vector and $\underline{SM}(\varphi; t)$ does not necessarily increase (or decrease) monotonically to the final result. It often increases at the first few steps, and then decreases to the final result.

We could see that the proposed scheme has a reliable property of labeling (classification) based on its recurrent dynamics , i.e. the convergence properties and the behaviors of stable states of the scheme.

本論文では、1つのパターンφについての認識の働きを万能的に備えている**認識システムRECOGNITRON**の研究とは異なり、1つの画面内に、式（1.1）のn個の物体像$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n \in \Phi \subset \mathfrak{H}$があると判明したとき、各物体$\varphi_k (k=1 \sim n)$に、式（1.2）のm個のカテゴリ$\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots, \mathfrak{C}_m$の内、如何なるカテゴリを付与すべきかが、式（1.3）の両立性の程度$CM(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j)$と式（1.4）の 影響の程度$IF(\varphi_k, \varphi_\ell)$が2例1. 1, 1. 2の如く新しく一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}(\supset \Phi)$上で導入され、付録Aの類似度関数SMを初期条件とする2. 2. 2項で説明されている更新アルゴリズムを採用するSM確率的ラベリング弛緩法が収束するための諸条件が厳密かつ詳細に研究された。

将来に残されているのは、実際の場面に適用して、その有効性・信頼性を確認することである。

Let SM $(\varphi_k, \omega_i; t)$, $i \in J$ denote the certainty measure, i.e. the probability of the i-th object φ_k having the i-th category (label) $\mathfrak{C}_i$ at step t. The initial certainty $SM(\varphi_k, \omega_i; t) \mid_{t=0}$ is set such that $SM(\varphi_k, \omega_i; t) \mid_{t=0} = SM(\varphi_k, \omega_i)$ (the similarity measure between the k-th pattern φ_k and the i-th prototypical pattern ω_i). Compared with the updating rule of three expressions (3.1)～(3.3), Rosenfeld's, Zucker's and Chen-Luh's updating rules have a common form

$$SM(\varphi_k, \omega_i; t+1)$$
$$= SM(\varphi_k, \omega_i; t) + SM(\varphi_k, \omega_i; t) \cdot d(\varphi_k, \omega_i; t) / R(\varphi_k, t)$$

where

①$d(\varphi_k, \omega_i; t)$

$\equiv NSM(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) - \overline{NSM}(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)$

②$\overline{NSM}(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)$

$\equiv \sum_{i\in J} NSM(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) \cdot SM(\varphi_k, \omega_i; t)$

③$R(\varphi_k, t) \equiv$

$$\begin{cases} 1 + \overline{NSM}(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) & \text{(Rosenfeld et al.)} \\ \overline{NSM}(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) & \text{(Zucker et al.)} \\ 1 & \text{(Chen-Luh).} \end{cases}$$

文　献

[1] 鈴木昇一："認識工学（上）"，柏書房，Feb.1975

[2] 鈴木昇一："（マルチメディア情報処理のための一般化誤差逆伝播学習）ニューラルネットの新数理"，近代文芸社，Sept.1996

[3] 鈴木昇一："（知能情報メディア情報処理のためのカテゴリ帰属知識を用いた）パターン認識問題の数理的一般解決"，近 代文芸社，June 1997

[4] 鈴木昇一："（カテゴリ帰属知識のポテンシャル論を含む）認識知能情報論の新展開"，近代文芸社，Aug.1998

[5] 鈴木昇一："Rosenfeld 型の確率的弛緩ラベリング法の基本的諸性質"，情報研究（文教大学・情報学部），vol. 11, pp.163-181, Dec.1990

[6] 鈴木昇一、奥野治雄："パターン認識系の特徴抽出構造に関する解析"，電子通信学会インホーメーション理論研究会，IT68-9, May 1968

[7] 鈴木昇一："測度的不変量検出形認識系の構成理論"，電子通信学会論文誌（D），vol.55-D, no.8, pp.513-538, Aug.1972

[8] 鈴木昇一："手書き漢字の側抑制効果的分解とその計算機シミュレーション"，情報処理学会誌，vol.15, no.12, pp.927-934, Dec.1974

[9] 鈴木昇一："画像情報量とその手書き漢字への応用"，画像電子学会誌，vol.4, no.1, pp.4-12, Apr.1975

[10] 鈴木昇一："抽出された特徴による手書き漢字構造の再生" 情報処理学会誌vol.18, no.11, pp.115-1122, Nov.1977

[11] 鈴木昇一："パターンのエントロピーモデル"，電子情報通信学会論文誌（D-Ⅱ），vol.J77-D-Ⅱ，no.10, pp.2220-2238, Nov.1994

[12] 鈴木昇一："パターン認識の数学的理論"，電子情報通信学会技術研究報告［パターン認識と学習，パターン認識と理解］，PRL84-6（第1部），PRL84-30, PRL84-38, PRL85-27, PRU86-8, PRU86-35, PRU86-69, PRU87-1, PRU87-28, PRU88-30，PRU89-1, PRU89-27, PRU89-40, PRU89-66，PRU89-77，PRU89-136，PRU90-5, PRU90-15, PRU90-29, PRU90-125, PRU91-1, PRU91-29, PRU91-42, PRU92-1, PRU92-18, PRU92-25, PRU92-89, PRU92-102（第28部），May 1984～Jan.1993

[13] 鈴木昇一，佐久間拓也，前田英明："数理形態学における諸演算とモデル構成作用素"，情報研究（文教大学・情報学部），vol.17, pp.133-170, Dec.1996

[14] 鈴木昇一："Radial-basis function networks, wavelet-based networksを用いたモデル構成作用素の構成法"，情報研究（文教大学・情報学部），vol.17, pp.71-131, Dec.1996

[15] 鈴木昇一，佐久間拓也，釈氏孝浩，前田英明，下平丕作士："不動点探索形構造受精変換多段階認識の、確率過程論的取り扱い"，vol.18, pp.53-103, Dec.1997

[16] 鈴木昇一："構造受精法と日本語単独母音の認識"，情報研究（文教大学・情報学部），vol.18, pp.17-51, Dec. 1997

[17] 鈴木昇一："高次認知機能における論理表現の要素"，情報研究（文教大学・情報学部），vol.19, pp.29-82, Mar.1998

[18] 鈴木昇一："類似度関数の選定に関する適切さの検証法"，情報研究（文教大学・情報学部），

vol.19, pp.83-120, Mar. 1998
[19] 青木利夫，高橋渉：“集合・位相空間要論”，培風館，Sept.1979
[20] Angus E.Taylor, David C.Lay：“Introduction to function analysis”, John Wiley & Sons, Inc.,1980
[21] 伊藤清：“確率論（現代数学14）”，岩波書店，Nov.1966
[22] 丸山儀四郎：“確率および統計（基礎数学講座10）”，共立出版，Feb.1963
[23] William Feller：“ An introduction to probability theory and its applications ”，vol. I , vol. II , John Wiley & Sons, Inc.,1957, 1966
[24] 河田敬義，丸山文行：“基礎課程 数理統計”，裳華房，p.59, p.88, Mar.1963
[25] 坂本慶行，石黒真木夫，北川源四郎：“情報量統計学（情報科学講座A・5・4）”，共立出版，June 1993
[26] Edited by W. K. Estes ：“Handbook of learning and cognitive processes（Volume 4 Attention and memory)”，Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 1976
[27] Nils J. Nillson ：“Problem-solving methods in artificial intelligence”，McGraw-Hill Book Company, Inc., 1971
[28] Elaine Rich and Kevin Knight ：“Artificial intelligence (Second edition)”，McGraw-Hill, Inc.,1991
[29] Abhijit S.Pandya and Robert B.Macy：“Pattern recognition with neural networks in C++”，A CRC Book Published in Cooperation with IEEE, 1996
[30] Andrzej Cichocki, Rolf Unbehauen：“Neural networks for optimization and signal processing”，John Wiley & Sons, Mar.1994
[31] T.Kohonen：“Content-addressable memories”，Springer-Verlag Beriln Heidelberg New York, 1980
[32] Luc Devroye, Läszlo Györfi and Gäbor Lugosi：“A probabilistic theory of pattern recognition”，Springer-Verlag New York, Inc., 1996
[33] M.A.アービッブ：“脳ー思考と行動の源を探るー”，金子隆芳訳，サイエンス社，Apr.1980
[34] ルーメルハート：“人間の情報処理（新しい認知心理学へのいざない)”，御領謙訳，サイエンス社，Sept.1980
[35] 長尾真：“パターン情報処理（電子通信学会大学シリーズ I -4)”，コロナ社，Mar.1983
[36] 太原育夫：“認知情報処理”，オーム社，Mar.1991
[37] Jeffrey Wood：“Invariant pattern recognition：A review”，Pattern Recognition, vol.29, no.1, pp.1-17, 1996
[38] 池田克夫，田村秀行，全炳東：“知能情報メディア　ーマルチメディアの進化形ー”，電子情報通信学会誌，vol.79, no.8, p.p.788-792, Aug.1996
[39] Alan M.N.Fu and Hong Yan：“A new probabilistic relaxation method based on probability space partition”，Pattern Recognition, vol.30, no.11, pp.1905-1917, 1997
[40] 富川義弘，中山謙二，東野裕一：“不等条件を考慮した相互結合形NNによる対応付け形状認識”，電子情報通信学会論文誌D-II , vol.J81-D-II , no.1, pp.72-83,　Jan.1998
[41] 柳井啓司, 出口光一郎：“マルチエージェントによる多様な画像に対応した物体認識システムの一構成法”，情報処理学会論文誌，vol.39, no.2, pp.170-177, Feb.1998
[42] Lalit Gupta and Thotsapon Sirtrakul：“A Gaussian-mixture-based image segmentation algorithm ”，Pattern Recognition, vol.31, no.3, pp.315-325, 1998
[43] C.H.Li and C.K.Lee：“Minimum cross entropy thresholding”，Pattern Recognition, vol.26, no.4,

pp.617-625, 1993
[44] Pierre A.Devijver："On a new class of bounds on Bayes risk in multihypothesis pattern recognition", IEEE Trans. on computers, vol.C-23, no.1, pp.70-80, Jan.1974
[45] Martin E.Hellman and Josef Raviv："Probability of error, equivocation, and the Chernoff bound", IEEE Trans. on information theory, vol.IT-16, no.4, pp.368-372, July 1970
[46] Biing-Hwang Juang and Shigeru Katagiri："Discriminative learning for minimum error classification", IEEE Trans. on signal processing, vol.40, no.12, pp.3043-3054, Dec.1992
[47] 小川徳子："大学生のカード分類における知識の違いとカテゴリー化の違いについて", The Japanese Journal of Psychology, vol.66, no.5, 1995

付録A. パターンモデル Tφ，パターン集合 Φ，類似度関数 SM

本付録Aでは、類似度関数 SM というものが満たさなければならないaxiom 2が先ず、説明され、その後、事前カテゴリ分布、モデル構成作用素 T、処理の対称とする問題のパターン集合 Φ に関する再帰領域方程式の解、並びに、類似度 SM から定まるパターンの事前生起確率分布が説明される。

A. 1　axiom 2 と類似度関数 SM

"正常なパターン"（well-formed pattern）は、ある1つの**カテゴリ** $\mathfrak{C}_j$（第 $j\in J$ 番目の類概念）のみに帰属しているものとし、このような $\mathfrak{C}_j$ の集まり（有限集合）

$$\underline{\mathfrak{C}} \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid j \in J\} \tag{A.1}$$

を想定する。$\mathfrak{C}_j$ の備えている性質を典型的に備えている**代表パターン**（prototypical pattern）ω_j（$\neq 0$）を1つ選定する。$\mathfrak{C}_j$ は、典型（prototype）としての代表パターン ω_j を中心とした緩やかなカテゴリであることを仮定したことに注意しておく。ここに、

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} \subset \Phi \tag{A.2}$$

が式（A.1）の全カテゴリ集合 $\underline{\mathfrak{C}}$ に対応する代表パターンの集合である。式（A.2）の系 Ω は、

複素定数 a_j の組 $\{a_j \mid j \in J\}$ について

$$\sum_{j\in J} a_j \cdot \omega_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J,\ a_j = 0 \tag{A.3}$$

が成立しているという意味で、**1次独立**（linearly independent）でなければならない。

axiom 1 [3] を満たす式（A.1）のモデル構成作用素 T によって、式（A.2）の代表パターン集合 Ω が変換されて得られる系

$$T \cdot \Omega \equiv \{T\omega \mid \omega \in \Omega\} = \{T\omega_j \mid j \in J\} \tag{A.4}$$

も1次独立であると要請する。このとき、**類似度関数**（similarity-measure function）

$$SM: \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \tag{A.5}$$

を導入し、

SM$(\varphi, \omega_j)=1$, 0 に従って、パターン $\varphi \in \Phi$ は
各々、ω_j と**確定的な類似関係、相違関係**にあり、
また、$0 < SM(\varphi, \omega_j) < 1$ の場合は、**曖昧な類似・**
相違関係にある　(A.6)

と、SMを解釈しよう。

関数SMは次のaxiom 2を満たすように構成されねばならない。特に、axiom 2の（i）なる直交性は、カテゴリ候補の分離・抽出が効果的に行われ、

カテゴリ候補の**鋭利な削減**（a sharp reduction）

をもたらすために要請されていることに注意しておく。

Axiom 2 **（類似度関数SMの満たすべき公理）**

（i）（**正規直交性**; orthonormality）

$\forall i, \forall j \in J, SM(\omega_i, \omega_j) = \delta_{ij}.$

ここに、δ_{ij}はクロネッカーのデルタ記号で、

$\delta_{ij} = 1$ if $i = j$, $= 0$ if $i \neq j$.

(ii)（規格化条件, 正規性; probability condition, normality）

$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} SM(\varphi, \omega_j) = 1.$

(iii)（写像Tの下での**不変性**; invariance under mapping T）

$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(T\varphi, \omega_j).$ □

A. 2　事前カテゴリ分布

想定している式（A.1）の**全カテゴリ集合**（a set of all categories）$\underline{\mathfrak{C}}$に注目する。本論文では以後、パターンφは、内積、ノルムを各々、

$$(\varphi, \eta), \ \|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)} \tag{A.7}$$

とする可分な（separable）一般抽象ヒルベルト空間（Hilbert space）[20] $\mathfrak{H}$の元とする。ここに、$\mathfrak{H}$が可分（separable）とは、稠密な（dense）可算部分集合が$\mathfrak{H}$に存在することを指す。$\varphi, \eta \in \mathfrak{H}$間のノルム距離$\|\varphi - \eta\|$は無論、

$$\|\varphi - \eta\| = \sqrt{(\varphi - \eta, \varphi - \eta)} \tag{A.8}$$

と定義される。

理解のためには、例えば、特別な場合として、内積（φ, η）を、

$$(\varphi, \eta) = \int_M dm(x) \quad \varphi(x) \cdot \overline{\eta}(x) \tag{A.9}$$

ここに、$\overline{\eta}$はηの複素共役であり、

$$M : q\text{次元ユークリッド空間}\ R^q\text{の可測部分集合} \tag{A.10}$$

$$dm(x) : \text{正値Lebesgue-Stieltjes式測度} \tag{A.11}$$

$$x = \langle x_1, x_2, \cdots, x_q \rangle \in M \ (= R^q) \tag{A.12}$$

とする可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$で考えておけばよい［11］。

処理の対象とする問題のパターン（pattern in question to be recognized）φの集合Φは、或る可分なHilbert空間$\mathfrak{H}$の、零元0を含む或る部分集合である。

想定している式（A.1）の**全カテゴリ集合**（a set of all categories）$\underline{\mathfrak{C}}$に注目する。正常なパターン$\varphi \in \Phi$は$\underline{\mathfrak{C}}$内の1つのカテゴリ、例えば、**第j∈J番目のカテゴリ**$\mathfrak{C}_j$のみに帰属しているものとされる。Φ内には、全く、どのカテゴリにも帰属しないパターン、2つ以上のカテゴリのどれにも帰属しているパターンなどの異常なパターンが存在しているかもしれない。

任意のパターン$\varphi \in \Phi$は事前に、共通して、事前カテゴリ生起分布（a priori probability of occurrences of any $\mathfrak{C}_j$; a priori categorical grade-of-membership distribution）

$$p(\mathfrak{C}_j), j \in J \tag{A.13}$$

を持っている。ここに、$\mathfrak{C}_j$の生起確率 $p(\mathfrak{C}_j)$ は、確率条件（probability condition）

$$[\forall j \in J,\ 0 < p(\mathfrak{C}_j) < 1] \wedge \sum_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) = 1 \tag{A.14}$$

を満たしている。

A. 3　モデル構成作用素 T と、再帰領域方程式の解

パターンφの集合Φに対し文献［3］の付録Aで説明されているaxiom 1を満たすように、適切に選んだ**モデル構成作用素**（model-construction operator）

$$T : \Phi \to \Phi \tag{A.15}$$

を固定し、先ず、この式（4）の写像（モデル形式）T について、3性質

①$0 \in \Phi$

②$\forall \varphi \in \Phi$, $a \cdot \varphi \in \Phi$ for any positive real number a

③$\forall \varphi \in \Phi$, $T\varphi \in \Phi$

を満たすようなパターン集合 Φ を想定すれば、Φ_Bをパターンと判明しているφの基本集合（**基本領域**; basic domain）として、パターン集合 Φ は、**再帰領域方程式**（reflective domain equation）

$$\Phi = \Phi_B \cup T \cdot \Phi \cup R^{++} \cdot \Phi \tag{A.16}$$

where

$$T \cdot \Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \tag{A.17}$$

$$R^{++} \cdot \Phi \equiv \{a \cdot \varphi \mid \varphi \in \Phi,\ a \in R^{++}\ (\text{a set of positive real numbers})\} \tag{A.18}$$

を満たさなければならない。

再帰領域方程式（A.16）の解としてのパターン集合 Φ は、**初期条件**

$$\Phi(t)\,|_{t=0} = \Phi_B \ni 0 \tag{A.19}$$

の下で、反復式（an iterative equation）

$$\Phi(t+1) = \Phi_B \cup T \cdot \Phi(t) \cup R^{++} \cdot \Phi(t), \tag{A.20}$$

の解が明らかに、

$$\Phi = \lim_{t \to \infty} \Phi(t) \tag{A.21}$$

であるから、T の満たすべきaxiom 1を使えば、

$$\Phi = R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B) \tag{A.22}$$

と表示される。

A. 4　類似度 SM から定まるパターンの事前生起確率分布

さて、axiom 2を満たすように、式（A.5）の**類似度関数** SM を選ぶと、式（E2）のカテゴリ生起確率分布より精密なφの事前生起**確率分布**（a prior distribution of occurrences of φ）

$$SM(\varphi, \omega_j),\ j \in J \tag{A.23}$$

が得られる。ここに、$\omega_j (\neq 0) \in \Phi$は第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の持つ諸性質を典型的に所有している代表パターン（prototypical pattern）であり、その適応的決定法は文献［3］の付録 I で説明されている。式（A.1）の全カテゴリ集合$\underline{\mathfrak{C}}$に関し、式（A.2）の**代表パターン集合** Ω が導入されたことに注意しておく。Ω は1次独立でなければならないが、第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$は、典型としてのω_jを中心とした緩やかな類概念であることを仮定したことに注意しておこう。

axiom 2の（ii）より、**確率条件**

$$[\forall j \in J,\ 0 \leqq SM(\varphi, \omega_j) \leqq 1 \wedge \sum_{j \in J} SM(\varphi, \omega_j) = 1 \tag{A.24}$$

が成立しており、

$\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j)$ は、パターン φ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属している確率（φ が ω_j に似ている確率；ω_j の内に φ が含まれている程度としての、ω_j の内に φ を見い出す確率）である。

(A.25)

と解釈される。

A. 5　パターンモデル $T\varphi$ の満たさなければならないaxiom 1

度々登場している“処理の対象とする問題のパターン φ の集合 $\Phi(\subset \mathfrak{H})$ と式 (A.15) の写像 T との対 $[\Phi, T]$” の満たさなければならないaxiom 1は次のように述べられる。その説明、並びに、モデル構成作用素 T の構成諸例については、例えば、5文献 [1]～[4]，[11] にある。

Axiom 1 **(パターン集合 Φ とモデル構成作用素 T との対【Φ, T】の満たすべき公理)** [3]，[4]

(i)（零元の不動点性; fixed-point property of zero element）$0 \in \Phi \wedge T0 = 0.$

(ii)（錐性; cone property; 或いは、**吸収性**）

$\forall \varphi \in \Phi, a \cdot \varphi \in \Phi \wedge T(a \cdot \varphi) = T\varphi$

for any positive real number a.

(iii)（**ベキ等性**; idempotency; 埋込性）

$\forall \varphi \in \Phi, T\varphi \in \Phi \wedge T(T\varphi) = T\varphi.$

(iv)（写像 T の非零写像性; non-zero mapping property of T）$\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0.$ □

因みに、認識システム RECOGNITRON が**パターンモデル $T\varphi \in \Phi$ を見れば、パターン $\varphi \in \Phi$ と同じに見える**と、想定出来るような公理がaxiom 1であると、SS理論 [3]，[4]，[12] では主張しているのである。

付録B. SM確率的緩和法における基本的諸性質

本付録Bでは、付録Aの axiom 2 を満たす類似度関数 SM を式（2.13）の如く初期条件として採用した2. 2. 3項の更新アルゴリズムの持つ収束性を解明するために必要とされる2. 2. 1項の6基本量①～⑥が備えている簡単な諸性質が解明される。

The relaxation labeling technique [5] was first proposed by Rosenfeld et al. to deal with ambiguity and noise in vision systems. Relaxation labeling methods are iterative parallel procedures for producing reasonable labels (categories) of objects (patterns) based on their incomplete information.

B. 1　NSM, DFF, SMに関する不等式

次の命題B. 1は、2. 2. 1項のneighborhood support measure $\mathrm{NSM}(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)$ が 1 より大きくない非負実数量であり、そのカテゴリ番号 $i \in J$ にわたる総和が 1 になる規格化性を指摘したものである。

[命題B. 1]

$$\forall t \in \{0, 1, 2, \cdots\},$$

$$\forall k \in N,\ [\forall i \in J, 0 \leq \mathrm{NSM}(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) \leq 1] \tag{B.1}$$

$$\wedge \sum_{i \in J} \mathrm{NSM}(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) = 1. \tag{B.2}$$

（証明）$\mathrm{IF}(\varphi_k, \varphi_\ell)$，$\mathrm{CM}(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j)$，$\mathrm{SM}(\varphi_\ell, \omega_j; t) \geq 0$ であるから、2. 2. 1項の④ NSM

$(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)$ は $\geqq 0$ であることがわかる。更に、

$$\sum_{i \in J} \mathrm{NSM}(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)$$
$$= \sum_{\ell \in N} \mathrm{IF}(\varphi_k, \varphi_\ell) \cdot \sum_{j \in J} [\sum_{i \in J} \mathrm{CM}(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j)] \cdot \mathrm{SM}(\varphi_\ell, \omega_j; t)$$
$$= \sum_{\ell \in N} \mathrm{IF}(\varphi_k, \varphi_\ell) \cdot \sum_{j \in J} [\sum_{i \in J} \mathrm{SM}(\varphi_\ell, \omega_j; t)$$

∵ axiom CM の (ii)

$$= \sum_{\ell \in N} \mathrm{IF}(\varphi_k, \varphi_\ell) \quad \because \text{式 (2.15)}$$
$$= 1 \quad \because \text{axiom IF の (ロ)}$$

であるから、

$$\mathrm{NSM}(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) \leqq 1$$

であることもわかる。 □

次の命題B. 2は、$\mathrm{SM}(\varphi_k, \omega_i; t)$からNSM$(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)$を差し引いて得られる両者の違いの量としての2. 2. 1項の DFF$(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)$の絶対値が1より大きくない非負実数量であることを指摘したものである。

[命題B. 2]

$$\forall t \in \{0, 1, 2, \cdots\},$$
$$\forall k \in N, \forall i \in J, -1 \leqq \mathrm{DFF}(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) \leqq +1. \tag{B.3}$$

(証明) 式 (2.15) から、

$$0 \leqq \mathrm{SM}(\varphi_k, \omega_i; t) \leqq 1 \tag{B.4}$$

を得、また、式 (B.1) から、

$$-1 \leqq \mathrm{NSM}(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) \leqq 0 \tag{B.5}$$

も得るから、この2式 (B.4), (B.5) から、2. 2. 1項の DFF$(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)$ について、不等式 (B.3) が明らかに成り立つ。 □

次の命題B. 3は、2. 2. 2項で説明されている更新アルゴリズムでの2つの類似度関数SM$(\varphi_k, \omega_i; t+1)$, SM$(\varphi_k, \omega_i; t)$ に大小関係が生じる諸条件を明らかにしたものである。

[命題B. 3]

(i) $\mathrm{SM}(\varphi_k, \omega_i; t+1)/\mathrm{SM}(\varphi_k, \omega_i; t)$

$$= [1 + \mathrm{DFF}(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)]/\mathrm{R}(\varphi_k; t)$$
$$\text{if } \mathrm{SM}(\varphi_k, \omega_i; t) > 0. \tag{B.6}$$

(ii)

$$0 \leqq \mathrm{SM}(\varphi_k, \omega_i; t+1) \text{ の分子} \leqq 2 \cdot \mathrm{SM}(\varphi_k, \omega_i; t). \tag{B.7}$$

(iii) 不等式

$$0 \leqq \mathrm{R}(\varphi_k; t) \leqq 2 \tag{B.8}$$

が成り立ち、

$$\mathrm{SM}(\varphi_k, \omega_i; t+1)/\mathrm{SM}(\varphi_k, \omega_i; t)$$
$$\geqq 2^{-1} + 2^{-1} \cdot \mathrm{DFF}(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)$$
$$\text{if } \mathrm{SM}(\varphi_k, \omega_i; t) > 0 \tag{B.9}$$
$$\therefore \ \mathrm{SM}(\varphi_k, \omega_i; t) > 0 \wedge \mathrm{DFF}(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) = 0 \tag{B.10}$$

であれば、

$$\mathrm{SM}(\varphi_k, \omega_i; t+1) \geqq 2^{-1} \cdot \mathrm{SM}(\varphi_k, \omega_i; t). \tag{B.11}$$

(iv) $\sum_{i' \in J} SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t) \cdot DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_{i'}; t) \leqq 0$ (B.12)

$\Rightarrow R(\varphi_k; t) \leqq 1$ (B.13)

$\Rightarrow SM(\varphi_k, \omega_i; t+1) / SM(\varphi_k, \omega_i; t)$

$\geqq 1 + DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)$

if $SM(\varphi_k, \omega_i; t) > 0$ (B.14)

が成り立ち、

$R(\varphi_k; t) \leqq 1$ かつ $DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) \geqq 0$ (B.15)

であれば、

$SM(\varphi_k, \omega_i; t+1) / SM(\varphi_k, \omega_i; t) \geqq 1$

if $SM(\varphi_k, \omega_i; t) > 0$ (B.16)

$\therefore$ $SM(\varphi_k, \omega_i; t+1) \geqq SM(\varphi_k, \omega_i; t)$

if $SM(\varphi_k, \omega_i; t) > 0.$ (B.17)

(v) $\sum_{i' \in J} SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t) \cdot DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_{i'}; t) \geqq 0$ (B.18)

$\Rightarrow R(\varphi_k; t) \geqq 1$ (B.19)

$\Rightarrow SM(\varphi_k, \omega_i; t+1) / SM(\varphi_k, \omega_i; t)$

$\leqq 1 + DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)$ (B.20)

が成り立ち、

$R(\varphi_k; t) \geqq 1$ かつ $DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) \leqq 0$ (B.21)

であれば、

$SM(\varphi_k, \omega_i; t+1) / SM(\varphi_k, \omega_i; t) \leqq 1$

if $SM(\varphi_k, \omega_i; t) > 0$ (B.22)

$\therefore$ $SM(\varphi_k, \omega_i; t+1) \leqq SM(\varphi_k, \omega_i; t)$

if $SM(\varphi_k, \omega_i; t) > 0.$ (B.23)

(証明)

(i) の証明：式 (B.6) は式 (2.14) から得られる。

(ii) の証明：

$SM(\varphi_k, \omega_i; t+1)$ の分子

$= SM(\varphi_k, \omega_i; t) \cdot [1 + DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)]$

$\because$ 式 (2.14) (B.24)

であるから、

$0 \leqq 1 + DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) \leqq 2$ $\because$ 式 (B.3) (B.25)

を考慮すると、不等式 (B.7) が得られる。

(iii) の証明：2.2.1項の $R(\varphi_k; t)$ については、

$R(\varphi_k; t)$

$= SM(\varphi_k, \omega_i; t+1)$ の分子の、$i \in J$ にわたる総和 (B.26)

であるから、式 (2.15) を考慮し、式 (B.7) の両辺の、$i \in J$ にわたる総和をとれば、不等式 (B.8) が得られる。

また、等式 (B.6) に不等式 (B.8) を考慮すれば、不等式 (B.9) が得られる。最後に、式 (B.10) の下での不等式 (B.11) の成立は、不等式 (B.9) から明らかである。

(iv) の証明：式 (2.16) の $R(\varphi_k; t)$ を考慮すると、不等式 (B.12) からの不等式 (B.13) の成

立は明らかである。

また、不等式（B.25）が成立しているから、不等式（B.19）を等式（B.6）に考慮すると、不等式（B.20）の成立は明らかである。

更に、条件式（B.15）の下での不等式（B.16）の成立は、2不等式（B.13），（B.14）から明らかである。

最後に、不等式（B.17）の成立は、不等式（B.16）から明らかである。

（v）の証明：式（2.16）の $R(\varphi_k; t)$ を考慮すると、不等式（B.18）からの不等式（B.19）の成立は明らかである。

また、不等式（B.25）が成立しているから、不等式（B.13）を等式（B.6）に考慮すると、不等式（B.14）の成立は、明らかである。

更に、条件式（B.21）の下での不等式（B.22）の成立は、2不等式（B.19），（B.20）から明らかである。

最後に、不等式（B.23）の成立は、不等式（B.22）から明らかである。 □

B. 2　命題B. 3の（ i ）について

命題B. 3の（ i ）から従うことは、次の（A），（B）の様に述べられる：

（A）$DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) \geqq 0$ の場合

（A－1）$SM(\varphi_k, \omega_i; t+1)/SM(\varphi_k, \omega_i; t) \geqq 1/R(\varphi_k; t)$

$$\text{if } SM(\varphi_k, \omega_i; t) > 0. \quad \because \text{ 式（B.8）} \tag{B.27}$$

（A-2）$R(\varphi_k; t) \leqq 1$

$$\Rightarrow SM(\varphi_k, \omega_i; t+1) \geqq SM(\varphi_k, \omega_i; t) \quad \text{if } SM(\varphi_k, \omega_i; t) > 0. \tag{B.28}$$

（B）$DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) \leqq 0$ の場合

（B－1）$SM(\varphi_k, \omega_i; t+1)/SM(\varphi_k, \omega_i; t) \leqq 1/R(\varphi_k; t)$

$$\text{if } SM(\varphi_k, \omega_i; t) > 0. \quad \because \text{ 式（B.8）} \tag{B.29}$$

（B－2）$R(\varphi_k; t) \geqq 1$

$$\Rightarrow SM(\varphi_k, \omega_i; t+1) \leqq SM(\varphi_k, \omega_i; t) \quad \text{if } SM(\varphi_k, \omega_i; t) > 0. \tag{B.30}$$

□

B. 3　命題B. 3の（iv），（v）について

命題B. 3の（iv），（v）から従うことは、次の（C），（D）の様に述べられる：

（C）$\sum_{i' \in J} SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t) \cdot DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_{i'}; t) \leqq 0$であれば、

$DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) \geqq 0$

$$\Rightarrow SM(\varphi_k, \omega_i; t+1) \geqq SM(\varphi_k, \omega_i; t) \quad \text{if } SM(\varphi_k, \omega_i; t) > 0. \tag{B.31}$$

（D）$\sum_{i' \in J} SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t) \cdot DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_{i'}; t) \geqq 0$であれば、

$DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) \leqq 0$

$$\Rightarrow SM(\varphi_k, \omega_i; t+1) \leqq SM(\varphi_k, \omega_i; t) \quad \text{if } SM(\varphi_k, \omega_i; t) > 0. \tag{B.32}$$

□

上述の（C），（D）を適用すると、2. 1節の［望ましい結果］が得られる次の定理B. 1が従う。

［定理B. 1］**(SM確率的緩和法における収束定理)**

任意の $t=0, 1, 2, \cdots$ について、

（イ）$\sum_{i' \in J} SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t) \cdot DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_{i'}; t) \leqq 0$　であれば、

$\exists i \in J, DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) \geqq 0$ であること

（ロ）$\sum_{i' \in J} SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t) \cdot DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_{i'}; t) \geqq 0$　であれば、

$\forall i' \in J - \{i\}, DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) \leqq 0$ であること

が共に満たされれば、

（ハ）$\exists i \in J, SM(\varphi_k, \omega_i; 0) \leqq SM(\varphi_k, \omega_i; 1)$

$$\leqq SM(\varphi_k, \omega_i; 2) \leqq \cdots \to 1 \qquad \text{(B.33)}$$

が成り立ち、並びに、

（ニ）$\forall i' \in J - \{i\}, SM(\varphi_k, \omega_{i'}; 0)$

$$\geqq SM(\varphi_k, \omega_{i'}; 1) \geqq SM(\varphi_k, \omega_{i'}; 2) \geqq \cdots \to 0 \qquad \text{(B.34)}$$

が成り立つ。

□

B. 4　平衡状態の実現

平衡状態がどのように実現されるかを、2. 1節の研究目標に注意し、論じてみよう。

もし、或る時刻 $t \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ で、global consistency を記述する等式（2.3）が成立したならば、2. 2. 1項のneighborhood support measure $NSM(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)$ について、

$$
\begin{aligned}
&NSM(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) \\
&\equiv \sum_{\ell \in N} IF(\varphi_k, \varphi_\ell) \cdot \sum_{j \in J} CM(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j) \cdot SM(\varphi_\ell, \omega_j; t) \\
&= \sum_{\ell \in N} IF(\varphi_k, \varphi_\ell) \cdot SM(\varphi_k, \omega_i; t) \qquad \because \text{式 (2.3)} \\
&= SM(\varphi_k, \omega_i; t) \cdot \sum_{\ell \in N} IF(\varphi_k, \varphi_\ell) \\
&= SM(\varphi_k, \omega_i; t) \qquad \because \text{axiom IF の (ロ)}
\end{aligned}
$$

つまり、

$\forall k \in N, \forall i \in J,$

$$NSM(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) = SM(\varphi_k, \omega_i; t) \qquad \text{(B.35)}$$

が成立し、2. 2. 1項の差 $DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)$ について、式（2.22）、つまり、

$$
\begin{aligned}
&\forall k \in N, \forall i \in J, DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) \\
&\equiv SM(\varphi_k, \omega_i; t) - NSM(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) \\
&= 0 \qquad \text{(B.36)}
\end{aligned}
$$

が成り立ち、よって、この式（B.36）から、

$\forall k \in N, \forall i \in J,$

$$
\begin{aligned}
&SM(\varphi_k, \omega_i; t+1) \\
&= SM(\varphi_k, \omega_i; t) / R(\varphi_k; t) \qquad \because \text{式 (2.14)} \qquad \text{(B.37)}
\end{aligned}
$$

並びに、

$$R(\varphi_k; t) = 1 \qquad \because \text{式 (2.16)} \qquad \text{(B.38)}$$

が得られる。2式（B.37），（B.38）から、結局、平衡状態を実現する不動点方程式（2.7）が成立する。

以上を整理して、2. 1節の研究目標が得られる次の定理B. 2が従う。

［定理B. 2］**（平衡状態を実現する不動点方程式定理）**

或る時刻 $t\in\{0, 1, 2, \cdots\}$ で、global consistency を記述する等式（2.3）が成立したならば、3式（B.36），（B.37），（B.38）が成立し、結局、平衡状態を実現する不動点方程式（2.7）が成立する。 □

上述の定理B. 2が、直交性を満たす2. 2. 1項の CM, IF について平衡状態を実現する不動点方程式（2.7）が成立する場合の定理2. 1の一般化である。

B. 5　SM確率的緩和法続行の不必要性

もし、或る時刻 $t\in\{0, 1, 2, \cdots\}$ で、2. 1節の［望ましい結果］が得られたならば、2. 2. 2項の SM の更新アルゴリズムを時刻 $t+1$ 以降において反復する必要がないことを指摘する次の定理B. 3が成り立つ。更新アルゴリズムでの反復が安定性を備えている事実を明らかにしていることになる。

先ず、命題B. 1での式（B.1）を改めて、別の形で証明し、少し精密化しよう。

［補助定理B. 1］

$\forall t\in\{0, 1, 2, \cdots\}$,

$$\text{(i)}\ \forall k\in N,\ [\forall i\in J, 0\leqq NSM(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)\leqq 1] \qquad \text{(B.39)}$$

が成立ち、

(ii) $\forall \ell\in N, \forall j\in J, CM(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j)=0$

$\Rightarrow NSM(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)=0.$

(iii) $\forall \ell\in N, \forall j\in J, CM(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j)=1$

$\Rightarrow NSM(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)=1.$

（証明）2. 2. 1項の NSM（$\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t$）について、

$\forall \ell\in N, \forall j\in J, IF(\varphi_k, \varphi_\ell), CM(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j),$

$SM(\varphi_\ell, \omega_j; t)\geqq 0$ for any $k\in N$ and any $i\in J$

$\because$ axiom CM の（i），axiom IF の（i） (B.40)

であるから、

$$0\leqq NSM(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) \qquad \text{(B.41)}$$

の成立は明らかである。更に、

$\sum_{\ell\in N} IF(\varphi_k, \varphi_\ell)\cdot\sum_{j\in J} SM(\varphi_\ell, \omega_j; t)\cdot 0$

$\leqq NSM(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)$

$\equiv\sum_{\ell\in N} IF(\varphi_k, \varphi_\ell)\cdot\sum_{j\in J} CM(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j)\cdot SM(\varphi_\ell, \omega_j; t)$

$\because$ axiom CM の（i）

ここで、等号 = は

$\forall \ell\in N, \forall j\in J, CM(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j)=1$

の時である (B.42)

$\leqq\sum_{\ell\in N} IF(\varphi_k, \varphi_\ell)\cdot\sum_{j\in J} SM(\varphi_\ell, \omega_j; t)\cdot 1$

$\because$ axiom CM の（i）

ここで、等号 = は

$\forall \ell\in N, \forall j\in J, CM(\varphi_k, \varphi_\ell; \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j)=1$

の時である (B.43)

$\leqq\sum_{\ell\in N} IF(\varphi_k, \varphi_\ell)$　　$\because$ 式（2.15）

$\leqq 1 \quad \because$ axiom IF の（ロ）

を得、(i)が証明された。(ii), (iii)は各々、2式(B.42), (B.43)から明らかである。 □

［定理B. 3］**(SM確率的緩和法の終端続行不必要定理)**

$$\forall k \in N, \exists t \in \{0, 1, 2, \cdots\},$$

$$\exists i \in J = \{1, 2, \cdots, m\}, SM(\varphi_k, \omega_i; t) = 1 \tag{B.44}$$

$$\wedge [\forall i' \in J - \{i\}, SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t) = 0] \tag{B.45}$$

が成立したならば、

$$\forall i' \in J - \{i\}, NSM(\varphi_k, \omega_{i'}; t) < 1 \tag{B.46}$$

$$\Rightarrow$$

$$SM(\varphi_k, \omega_i; t+1) = 1 \tag{B.47}$$

$$\wedge [\forall i' \in J - \{i\}, SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t+1) = 0]. \tag{B.48}$$

よって、平衡状態を実現する不動点方程式（2.7）が成立する。

（証明） 2. 2. 1項の $DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)$ について、2式(B.44), (B.45) から、

$$DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_q; t)$$
$$\equiv SM(\varphi_k, \omega_q; t) - NSM(\varphi_k, \mathfrak{C}_q; t)$$
$$=$$
$$\begin{cases} 1 - NSM(\varphi_k, \mathfrak{C}_q; t) & \text{if } q = i \\ -NSM(\varphi_k, \mathfrak{C}_q; t) & \text{if } q = i' \in J - \{i\} \end{cases} \tag{B.49}$$

であることがわかる。よって、式（2.16）の $R(\varphi_k; t)$ については、

$$R(\varphi_k; t)$$
$$= 1 + \sum_{i' \in J} SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t) \cdot DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_{i'}; t)$$
$$= 1 + SM(\varphi_k, \omega_i; t) \cdot DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) \qquad \because \text{ 式 (B.45)}$$
$$= 1 + DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t) \qquad \because \text{ 式 (B.45)} \tag{B.50}$$

が成り立つ。式（B.50）に式（B.49）を代入すると、

$$R(\varphi_k; t) =$$
$$\begin{cases} 2 - NSM(\varphi_k, \mathfrak{C}_q; t) & \text{if } q = i \\ 1 - NSM(\varphi_k, \mathfrak{C}_q; t) & \text{if } q = i' \in J - \{i\} \end{cases} \tag{B.49}$$

が得られる。補助定理B. 1を考量すると、

$$\text{式 (B.46) の成立} \Rightarrow R(\varphi_k; t) > 0 \tag{B.50}$$

であることがわかる。定義式（2.14）を考慮すると、

$$SM(\varphi_k, \omega_i; t+1)$$
$$= [SM(\varphi_k, \omega_i; t) + SM(\varphi_k, \omega_i; t) \cdot DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)] / [1 + DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)]$$
$$= [1 + DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)] / [1 + DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)] \qquad \because \text{ 式 (B.44)}$$
$$= 1 \tag{B.51}$$

が判明し、更に、

$$\forall i' \in J - \{i\},$$
$$SM(\varphi_k, \omega_{i'}; t)$$
$$= [SM(\varphi_k, \omega_i; t) + SM(\varphi_k, \omega_i; t) \cdot DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)] / [1 + DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)]$$
$$= 0 / [1 + DFF(\varphi_k, \mathfrak{C}_i; t)] \qquad \because \text{ 式 (B.45)}$$

がわかり、更に、平衡状態を実現する不動点方程式（2.7）の成立も、4式（B.44), (B.45), (B.47), (B.48) から明らかであり、証明が終わった。 □

付録C. 規格化内積で構成される類似度関数 SM と、その一般化

2つのパターンモデル $T\varphi, T\eta$ 間の**ノルム距離** $\| T\varphi - T\eta \|$ に注目すると、axiom 2を満たす式 (A.5) の類似関数 SM の代表的な 1 例として、

非一致条件

$$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}, \| T\omega_i - T\omega_j \| > 0 \tag{C.1}$$

の下で、

$$SM(\varphi, \omega_j) = \| T\varphi - T\omega_j \|^{-2} / \sum_{i \in J} \| T\varphi - T\omega_i \|^{-2} \tag{C.2}$$

がある [3]。本付録Cでは、シュワルツの不等式

① $|(\varphi, \eta)| \leqq \| \varphi \| \cdot \| \eta \|$ (C.3)

②不等式 (C.3) で等号 = の成り立つのは、φ が η の定数 (0を含む) 倍か、或いは、η が φ の定数 (0を含む) 倍のときに限る (C.4)

と、Re [⋯] を ⋯ の実部の意として、ノルム距離と規格化内積との関係

$$\| T\varphi \cdot \| T\varphi \|^{-1} - T\eta \cdot \| T\eta \|^{-1} \| = 2 \cdot \{1 - \mathrm{Re}[(T\varphi, T\eta) / [\| T\varphi \| \cdot \| T\eta \|]]\} \tag{C.5}$$

とに注目し、2つのパターンモデル $T\varphi$, $T\eta$ 間の重なりの度合いを与える規格化内積

$$(T\varphi, T\eta) / [\| T\varphi \| \cdot \| T\eta \|] = \begin{cases} 0 \cdots \| T\varphi \| = 0 \vee \| T\eta \| = 0 & \text{のとき} \\ 1 \cdots \| T\varphi - T\eta \| = 0 & \text{のとき} \end{cases} \tag{C.6}$$

から定まる類似度関数 SM を1つ構成し、その後、この構成例を一般化する。

C. 1 規格化内積の変換に基づく類似度関数 SM の構成

C. 1. 1 指数分布 f(t)

正定数 $a > 0$ をパラメータに持つ指数分布 (exponential distribution) の確率密度 f (t) は、

$$f(t) = \begin{cases} a\exp(-at) \cdots t \geqq 0 & \text{のとき} \\ 0 \qquad \cdots t < 0 & \text{のとき} \end{cases} \tag{C.7}$$

であり、分布関数 F(t)は、

$$F(t) \equiv \int_{-\infty}^{t} d\tau \ f(\tau) = \begin{cases} 1 - \exp(-at) \cdots 0 \leqq t < \infty & \text{のとき} \\ 0 \qquad \cdots t < 0 & \text{のとき} \end{cases} \tag{C.8}$$

と計算される。平均値 (mean value) E, 分散 (variance) Var は、各々、

$$E \equiv \int_0^{\infty} d\tau \ \tau \cdot f(\tau) = (1/a) \tag{C.9}$$

$$Var \equiv \int_0^{\infty} d\tau \ [\tau - E]^2 \cdot f(\tau) = (1/a)^2 \tag{C.10}$$

と計算される。

平均寿命が 1/a である偶発故障が期間 (0, t) の間に発生する確率は、実は、式 (A3) の F(t) のことである。

$F(x)$とxとの間の1対1の連続的対応

$0 \leqq F(x) \leqq 1$

$$\Leftrightarrow 0 \leqq x = -(1/a) \cdot \log_e [1 - F(x)] \leqq \infty \tag{C.11}$$

に注意しておこう。

C. 1. 2 指数分布と類似度関数 SM の変換

式（C.8）の指数形確率分布関数F（x）について、

$$F(x) = SM(\varphi, \omega_j) \tag{C.12}$$

とおこう。ここに、SMは、axiom 2を満たす式（A.5）の類似度関数である。式（C.11）から、

$$sm(\varphi, \omega_j) \equiv x = -(1/a) \cdot \log_e [1 - SM(\varphi, \omega_j)] \tag{C.13}$$

が成り立つ。

式（C.6）の規格化内積は、axiom 2の（iii）を満たすが、（i），（ii）を満たさない。それで、2式（C.12），（C.13）に注目して、式（C.6）の規格化内積をaxiom 2を満たすように変換して得られる次の定理C. 1が成り立つ。

［定理C. 1］**（規格化内積に基づく類似度関数SMの構成定理）**

非一致条件式（C.1）の下で、正の助変数 $a_j > 0$ を導入し、

$$S(\varphi, \omega_j) \equiv -(1/a_j) \cdot \log_e [1 - |(T\varphi, T\omega_j)/[\|T\varphi\| \cdot \|T\omega_j\|]|^2] \tag{C.14}$$

と定義された関数

$$S : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \tag{C.15}$$

を用いて、

$$SM(\varphi, \omega_j) \equiv \begin{cases} p(\mathfrak{C}_j) \cdots \sum_{j \in J} S(\varphi, \omega_j) = 0 \text{ の場合} \\ S(\varphi, \omega_j) / \sum_{j \in J} S(\varphi, \omega_i) \\ \quad \cdots \sum_{j \in J} S(\varphi, \omega_j) > 0 \text{ の場合} \end{cases} \tag{C.16}$$

と定義された式（A.5）の関数 SM はaxiom 2を満たす。

ここに、$p(\mathfrak{C}_j)$は、確率条件式（A.14）を満たす第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の生起確率である。

（証明）　axiom 2の（i），（ii），（iii）を満たすことを示す。

axiom 2の（ii）の成立は、確率条件式（A.14）と式（C.16）から明らか。

axiom 2の（iii）の成立は、axiom 1［3］の（iii）の後半$T \cdot T = T$から明らか。

axiom 2の（i）の成立を示そう。

2式（C.3），（C.4）のシュワルツの不等式を考慮すると、不等式

$$|(T\varphi, T\eta)/[\|T\varphi\| \cdot \|T\eta\|]| \leqq 1 \tag{C.17}$$

が成立しており、よって、

$$0 \leqq S(\varphi, \omega_j) \leqq \infty \tag{C.18}$$

であることに注意しておく。

①$\varphi = \omega_j$ のとき

$(T\varphi, T\omega_j)/[\|T\varphi\| \cdot \|T\omega_j\|] = 1$

$\therefore \quad S(\varphi, \omega_j) = \infty$

②$\varphi = \omega_i \, (i \neq j)$のとき

$|(T\varphi, T\omega_j)/[\|T\varphi\|\cdot\|T\omega_j\|]|<1$ ∵ 式（C.1）

∴ $0\leqq S(\varphi, \omega_j)<\infty$

が成立していることに注意すれば、

③$\varphi=\omega_j$のとき、

$SM(\varphi, \omega_j)$

$=1/[1+\Sigma_{i\in J-\{j\}}\ S(\varphi, \omega_i)/S(\varphi, \omega_j)]$

$=1/[1+0]=1$

④$\varphi=\omega_i(i\neq j)$のとき

$SM(\varphi, \omega_j)$

$=S(\varphi, \omega_j)/[S(\varphi, \omega_i)+\Sigma_{k\in J-\{j\}}\ S(\varphi, \omega_k)]$

＝有限値/［無限＋有限値］＝0

を得、axiom 2の（i）が成立した。 □

C. 2　内積類似度の一般化

定理C. 1の証明内容からわかるように、式（C.16）の内積類似度SMを特別な場合として含む次の定理C. 2が得られる。

［定理C. 2］**（類似度関数SMの一般構成定理）**

非一致条件式（C.1）の下で考える。2条件

$$\forall\varphi\in\Phi, \forall\eta\in\Phi, |f_j(\varphi, \eta)|^2\leqq 1 \tag{C.19}$$

$$\forall\varphi\in\Phi, |f_j(\varphi, \varphi)|^2=1 \tag{C.20}$$

を満たす2変数関数 f_j の系

$$f_j:\Phi\times\Phi\rightarrow\{z\in Z(\text{複素数の全体})\mid |z|^2\leqq 1\} \tag{C.21}$$

を用いて、正の助変数 $a_j>0$ を助変数に持ち、

$$S(\varphi, \omega_j) \equiv -(1/a_j)\cdot\log_e[1-|f_j(T\varphi, T\omega_j)|^2] \tag{C.22}$$

と定義された関数

$$S:\Phi\times\Omega\rightarrow\{s\mid 0\leqq s\leqq 1\} \tag{C.23}$$

を用いて、

$$SM(\varphi, \omega_j)\equiv \begin{cases} p(\mathfrak{C}_j)\cdots\sum_{j\in J} S(\varphi, \omega_j)=0\ \text{の場合} \\ S(\varphi, \omega_j)/\sum_{j\in J} S(\varphi, \omega_i) \\ \qquad\cdots\sum_{j\in J} S(\varphi, \omega_j)>0\ \text{の場合} \end{cases} \tag{C.24}$$

と定義された式（A.5）の関数SMはaxiom 2を満たす。

ここに、$p(\mathfrak{C}_j)$は、確率条件式（A.14）を満たす第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の生起確率である。

（証明）　axiom 2の（ii）の成立は、確率条件式（A.14）と式（C.24）から明らか。

axiom 2の（iii）の成立は、axiom 1［3］の（iii）の後半$T\cdot T=T$から明らか。

axiom 2の（i）の成立は、定理C.1の証明において、式（C.6）の規格化内積の代りに、$f_j(T\varphi, T\omega_j)$を採用すれば、ほぼ同様に示される。 □

［例1］（釣鐘形類似度関数SM）

式（C.21）の関数 f_j として、

$f_j(\varphi, \eta)=\exp(-\|\varphi-\eta\|^2/(a_j)^2),\ a_j>0$ (C.25)

を採用できる。 □

［例2］（3角形類似度関数SM）

式（C.21）の関数 f_j として、

$f_j(\varphi, \eta)$

$=\max[0, (1/a_j)\cdot(-\|\varphi-\eta\|+a_j)],\ a_j>0$ (C.26)

を採用できる。 □

［例3］（非負単調減少関数 g_j を用いた類似度関数SM）

3条件

$g_j(0)=1$

$\wedge[\forall u\geqq 0, g_j(u)\geqq 0]$

$\wedge[0\leqq u_1\leqq u_2\Rightarrow g_j(u_1)\geqq g_j(u_2)]$ (C.27)

を満たす1変数

$g_j : \Phi\rightarrow R^+$（非負実数全体の集合） (C.28)

を用いて、式（C.21）の関数 f_j として、

$f_j(\varphi, \eta)=g_j(\|\varphi-\eta\|)$ (C.29)

を採用できる。 □

付録D. 3角形状類似度関数SMの構成

本付録Dでは、3角形状の類似度関数SMを2種類構成し、特に、2つのパターン間の特徴間Hamming距離 $\mathrm{Ham}(\underline{u}(\varphi), \underline{u}(\eta))$ から定まる類似度関数SMが構成される。

D. 1 3角形状の関数f（x）による類似度関数SMの構成

D. 1. 1. 3角形状関数

実数値変数xの区分的1次関数

$f(x)\equiv\max\{0, 1-|x-m|/a\},\ a>0, m\geqq 0$ (D.1)

に注目しよう。f（x）は3角形状をしており、4性質

①$\forall x\in\{x\mid m-a<x<m+a\},\ 0<f(x)<1$

②$df(x)/dx=1/a>0$ if $m-a<x<m$

③$df(x)/dx=-1/a<0$ if $m<x<m+a$

④$f(x)=$

$$\begin{cases}0 & \text{if } x\leqq m-a\\ 1 & \text{if } x=m\\ 0 & \text{if } x\geqq m+a\end{cases}$$

があることに注意しておく。

D. 1. 2 類似度関数SMの構成

上述の3角形状関数f(x)からhintを得、次の定理D. 1の如く、3角形状類似度関数SMが構成できる。

[定理D. 1]（**3角形状類似度関数 SM の構成定理**）

2条件

$$\forall j \in J, a_j > 0 \tag{D.2}$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \| T\omega_i - T\omega_j \| \geqq a_j \tag{D.3}$$

の下で、

$$SM(\varphi, \omega_j) =$$

$$\begin{cases} \max\{0, 1 - \| T\varphi - T\omega_j \| / a_j\} \\ / \sum_{i \in J} \max\{0, 1 - \| T\varphi - T\omega_i \| / a_i\} \cdots \exists i \in J, \| T\varphi - T\omega_i \| < a_i \text{の場合} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \forall i \in J, \| T\varphi - T\omega_i \| \geqq a_i \text{の場合} \end{cases} \tag{D.4}$$

と定義される式（A.5）の関数 SM はaxiom 2を満たす。 □

先ず、

① $\| T\varphi - T\omega_j \| \geqq a_j \wedge [\exists i \in J - \{j\}, \| T\varphi - T\omega_i \| < a_i] \Rightarrow SM(\varphi, \omega_j) = 0$

② $\| T\varphi - T\omega_j \| < a_j \wedge [\forall i \in J - \{j\}, \| T\varphi - T\omega_i \| \geqq a_i] \Rightarrow SM(\varphi, \omega_j) = 1$

③ $\exists i \in J, \| T\varphi - T\omega_i \| < a_i$ の場合

$0 < SM(\varphi, \omega_j) < 1 \Leftrightarrow 0 < \| T\varphi - T\omega_j \| < a_j$

の成立に注意しておく。

（定理D. 1の証明）

axiom 2の（i），（ii），（iii）の成立を示す。

（i）の直交性については、2条件式（D.2），（D.3）を考慮して、①において、$\varphi = \omega_i\,(i \neq j)$ とおけば、

$$SM(\omega_i, \omega_j) = 0\,(i \neq j)$$

の成立がわかり、②において、$\varphi = \omega_j$とおけば、

$$SM(\omega_j, \omega_j) = 1$$

の成立がわかる。

（ii）の規格化条件については、SM の定義式（D.4）から明らか。

（iii）のT-不変性については、axiom 1 [3] の（iii）の後半での、T のベキ等性から明らかである。

□

D. 1. 3　今1つの類似度関数 SM

$\mathfrak{H}$ の 1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ を選定する。

特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \to Z \text{（複素数全体の集合）} \tag{D.5}$$

を導入する。$u(\varphi, k) \in Z$ はパターン $\varphi \in \Phi$ の第$k \in L$番目の特徴量である。

axiom 1を満たす“パターン集合$\Phi (\subset \mathfrak{H})$と、式（A.15）のモデル構成作用素 T との対 $[\Phi, T]$”における典型的な T の例は、

$$T\varphi \equiv \sum_{k \in L} u(\varphi, k) \cdot \psi_k \tag{D.6}$$

と与えられる形式を備えているものである [11]，[3]，[4]。

2つのパターンモデル$T\varphi, T\eta$ の差 $T\varphi - T\eta$ のノルム $\| T\varphi - T\eta \|$ の自乗は、

$$\| T\varphi - T\eta \|^2$$

$$= (T\varphi - T\eta, T\varphi - T\eta)$$

$$= \sum_{k \in L} \sum_{\ell \in L} [u(\varphi, k) - u(\eta, k)] \cdot \overline{[u(\varphi, \ell) - u(\eta, \ell)]} \cdot (\psi_k, \psi_\ell) \tag{D.7}$$

と計算される。

特に、$\{\psi_k\}_{k\in L}$が直交性

$$(\psi_k,\ \psi_\ell)=0\,(k\neq\ell) \tag{D.8}$$

を満たし、直交系の場合、

$$\|T\varphi-T\eta\|^2=\sum_{k\in L}|u(\varphi,k)-u(\eta,k)|^2\cdot\|\psi_k\|^2 \tag{D.9}$$

となることがわかる。

尚、

$$\begin{aligned}&SM(\varphi,\ \omega_j)\\&=\|T\varphi)-T\omega_j\|^{-1}/\sum_{i\in J}\|T\varphi-T\omega_i\|^{-1}\\&\text{on condition that}\\&\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},\ \|T\omega_i-T\omega_j\|>0\end{aligned} \tag{D.10}$$

と定義される式（A.5）の関数SMもaxiom 2を満たすが、定理D. 1で構成された類似度関数SMの方が実用的に有効に機能する場合が多いと考えられる。

D. 2　特徴間Hamming距離に基づく3角形状類似度関数 SM の構成

$u(\varphi,k)\in\{0,1\}$の場合、

$$\begin{aligned}&u(\varphi,k)=1\\&\Leftrightarrow\text{パターン}\varphi\text{には特徴抽出写像}u\text{から定まる性質につき、}\\&\text{第}k\in L\text{番目の特徴量が存在する}\end{aligned} \tag{D.11}$$

と解釈できる。2つの2値ベクトル

$$\underline{a}=col(a_1\,a_2\cdots a_m),\ a_k\in\{0,1\} \tag{D.12}$$

$$\underline{b}=col(b_1\,b_2\cdots b_m),\ b_k\in\{0,1\} \tag{D.13}$$

間のHamming距離 Ham（$\underline{a}$, $\underline{b}$）とは、

$$Ham(\underline{a},\underline{b})\equiv\sum_{k\in L}|a_k-b_k| \tag{D.14}$$

$$\text{where } L=[1,2,\cdots,m\} \tag{D.15}$$

と定義される。

$$u(\varphi,k)\in\{-1,+1\} \tag{D.16}$$

の場合、

$$u'(\varphi,k)=[1+u(\varphi,k)]/2\in\{0,1\} \tag{D.17}$$

と変換しておけば、以下の論がそのまま、成立する。

以後、

パターン$\varphi\in\Phi$から抽出される2値特徴量の組

$$\begin{aligned}&\underline{u}(\varphi)\equiv col(u(\varphi,1)\ \ u(\varphi,2)\cdots u(\varphi,m))\\&\text{where } L=[1,2,\cdots,m\}\end{aligned} \tag{D.18}$$

のみを考える。2つの2値特徴量の組 $\underline{u}(\varphi)$と$\underline{u}(\eta)$との間のHamming距離

$$Ham(\underline{u}(\varphi),\ \underline{u}(\eta))=\sum_{k\in L}|u(\varphi,k)-u(\eta,k)| \tag{D.19}$$

を導入する。

［定理D. 2］**（3角形状類似度関数 SM の構成定理）**

2条件

$\forall j \in J, a_j > 0$ (D.20)

$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}$, $\mathrm{Ham}(\underline{u}(T\omega_i), \underline{u}(T\omega_j)) \geqq a_j$ (D.21)

の下で、

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} \max\{0, 1-\mathrm{Ham}(\underline{u}(T\varphi), \underline{u}(T\omega_j))/a_j\} \\ /\sum_{i\in J} \max\{0, 1-\mathrm{Ham}(\underline{u}(T\varphi), \underline{u}(T\omega_i))/a_i\} \\ \quad \cdots \exists i \in J, \mathrm{Ham}(\underline{u}(T\varphi), \underline{u}(T\omega_i)) < a_i \text{ の場合} \\ p(\mathfrak{C}_j) \\ \quad \cdots \forall i \in J, \mathrm{Ham}(\underline{u}(T\varphi), \underline{u}(T\omega_i)) \geqq a_i \text{ の場合} \end{cases} \quad \text{(D.22)}$$

と定義される式（A.5）の関数SMはaxiom 2を満たす。 □

尚、

$$SM(\varphi, \omega_j) = \mathrm{Ham}(\underline{u}(T\varphi), \underline{u}(T\omega_j))^{-1} / \sum_{i\in J} \mathrm{Ham}(\underline{u}(T\varphi), \underline{u}(T\omega_i))^{-1}$$

on condition that

$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}$, $\mathrm{Ham}(\underline{u}(T\omega_i), \underline{u}(T\omega_j)) > 0$ (D.23)

と定義される式式（A.5）の関数SMもaxiom 2を満たすが、定理D. 2で構成された類似度関数SMの方が実用的に有効に機能する場合が多いと考えられる。

付録E. 台形形状類似度関数SMの構成

本付録Eでは、台形形状の類似度関数SMを2種類構成し、特に、2つのパターン間の特徴間Hamming距離 $\mathrm{Ham}(\underline{u}(\varphi), \underline{u}(\eta))$ から定まる類似度関数SMが構成される。

E. 1 台形形状の関数f(x)による類似度関数SMの構成

E. 1. 1 台形3角形状運関数

実数値変数xの区分的1次関数

$$f(x) \equiv \begin{cases} 0 & \cdots x \leqq m-a \text{ の場合} \\ (x-m+a)/(a-b) & \\ & \cdots m-a < x \leqq m-b \text{ の場合} \\ 1 & \cdots m-b < x < m+b \text{ の場合} \\ -(x-m-a)/(a-b) & \\ & \cdots m+b \leqq x < m+a \text{ の場合} \\ 0 & \cdots m+a \leqq x \text{ の場合} \end{cases}$$

$$, a > b \geqq 0, m \geqq 0 \quad \text{(E.1)}$$

に注目しよう。b=0と選べば3角形状になる関数f（x）は台形形状をしており、3性質

①$\forall x \in \{x \mid m-a < x < m-b\}$
$\cup \{x \mid m+b < x < m+a\}, 0 < f(x) < 1$

②$df(x)/dx = 1/(a-b) > 0$

if $m-a<x<m-b$

③$df(x)/dx=-1/(a-b)<0$

if $m+b<x<m+a$

があることに注意しておく。

E. 1. 2　類似度関数 SM の構成

上述の台形形状関数 f (x) から hint を得、次の定理E.1の如く、台形形状類似度関数 SM が構成できる。

［定理E. 1］**(台形形状類似度関数 SM の構成定理)**

2条件

$$\forall j\in J,\ a_j>b_j\geqq 0 \tag{E.2}$$

$$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},\ a_j\leqq \| T\omega_i-T\omega_j \| \tag{E.3}$$

の下で、

(1#) $\exists i\in J,\ \| T\varphi-T\omega_i \| <a_i$ の場合

$$S(\varphi,\ \omega_j)=\begin{cases}0 & \cdots \| T\varphi-T\omega_j \| \geqq a_j \text{ の場合}\\ (a_j-\| T\varphi-T\omega_j \|)/(a_j-b_j) & \\ \quad \cdots b_j< \| T\varphi-T\omega_j \| <a_j \text{ の場合} & \\ 1 & \cdots \| T\varphi-T\omega_j \| \leqq b_j \text{ の場合}\end{cases} \tag{E.4}$$

として、

$$SM(\varphi,\ \omega_j)=S(\varphi,\ \omega_j)/\sum_{i\in J} S(\varphi,\ \omega_i) \tag{E.5}$$

(2#) $\forall i\in J,\ \| T\varphi-T\omega_i \| \geqq a_i$ の場合

$$SM(\varphi,\ \omega_j)=p(\mathfrak{C}_j) \tag{E.6}$$

と定義される式 (A.5) の関数 SM はaxiom 2を満たす。 □

先ず、

① $\| T\varphi-T\omega_j \| \geqq a_j \wedge [\exists i\in J-\{j\},$
$\| T\varphi-T\omega_i \| <a_i] \Rightarrow SM(\varphi,\ \omega_j)=0$

② $\| T\varphi-T\omega_j \| \leqq a_j \wedge [\forall i\in J-\{j\},$
$\| T\varphi-T\omega_i \| \geqq a_i] \Rightarrow SM(\varphi,\ \omega_j)=1$

③ $\exists i\in J,\ b_i< \| T\varphi-T\omega_i \| <a_i$ の場合
$0<SM(\varphi,\ \omega_j)<1 \Leftrightarrow b_j< \| T\varphi-T\omega_j \| <a_j$

の成立に注意しておく。

(定理E. 1の証明)

axiom 2の (i), (ii), (iii) の成立を示す。

(i) の直交性については、2条件式 (E.2), (E.3) を考慮して、①, ②において、各々、$\varphi=\omega_i$ $(i\neq j)$, $\varphi=\omega_j$ とおけば、

$$S(\omega_i,\ \omega_j)=0\,(i\neq j)\wedge S(\omega_j,\ \omega_j)=1$$

$$\therefore\ SM(\omega_i,\ \omega_j)=0\,(i\neq j)\wedge SM(\omega_j,\ \omega_j)=1 \tag{E.7}$$

の成立がわかる。

(ii) の規格化条件については、SM の2定義式 (E.5), (E.6) から明らか。

(iii) のT-不変性については、axiom 1 [3] の (iii) の後半での、T のベキ等性から明らかである。

□

E. 1. 3　今1つの類似度関数 SM

$\mathfrak{C}$ の 1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ を選定する。

式 (D.5) の特徴抽出写像 u

を導入する。$u(\varphi, k)\in Z$ はパターン $\varphi\in\Phi$ の第$k\in L$番目の特徴量である。

A. 5章のaxiom 1を満たす“パターン集合 $\Phi(\subset\mathfrak{C})$ と、式 (A.15) のモデル構成作用素 T との対 $[\Phi, T]$” における典型的な T の例は、式 (D.6) で与えられる形式を備えているものである。

2つのパターンモデル $T\varphi$, $T\eta$ の差 $T\varphi-T\eta$ のノルム $\|T\varphi-T\eta\|$ の自乗は、式 (D.7) のごとく、計算される。特に、$\{\psi_k\}_{k\in L}$ が式 (D.8) の直交性を満たし、直交系の場合、式 (D.9) のごとく、表現される。

尚、式 (D.10) のごとく、定義される式 (A.5) の関数 SM も axiom 2を満たすが、定理E. 1で構成された類似度関数 SM の方が実用的に有効に機能する場合が多いと考えられる。

E. 2　特徴間Hamming距離に基づく3角形状類似度関数 SM の構成

$u(\varphi, k)\in\{0, 1\}$ の場合、$u(\varphi, k)=1$ について、式(D.11) のごとく、解釈できる。2つの2式 (D.12), (D.13) の2値ベクトル $\underline{a}$, $\underline{b}$ 間のHamming距離 Ham ($\underline{a}$, $\underline{b}$) とは、式 (D.14) のごとく、定義される。

式 (D.16) が成り立つ場合、式 (D.17) のごとく、変換しておけば、以下の論がそのまま、成立する。

以後、

パターン $\varphi\in\Phi$ から抽出される2値特徴量の、式 (D.18) のみを考える。2つの2値特徴量の組 $\underline{u}(\varphi)$ と $\underline{u}(\eta)$ との間の、式 (D.19) のHamming距離 $\mathrm{Ham}(\underline{u}(\varphi), \underline{u}(\eta))$ を導入する。

［定理E. 2］**(3角形状類似度関数 SM の構成定理)**

2条件

$$\forall j\in J,\ a_j>b_j\geqq 0 \tag{E.8}$$

$$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},\ \mathrm{Ham}(\underline{u}(T\omega_i),\ \underline{u}(T\omega_j))\geqq a_j \tag{E.9}$$

の下で、

(1#) $\exists i\in J, \mathrm{Ham}(\underline{u}(T\varphi), \underline{u}(T\omega_j))<a_i$ の場合

$$S(\varphi,\ \omega_j)=\begin{cases} 0 & \cdots \mathrm{Ham}(\underline{u}(T\varphi),\ \underline{u}(T\omega_j))\geqq a_j \text{の場合} \\ (a_j-\mathrm{Ham}(\underline{u}(T\varphi),\ \underline{u}(T\omega_j)))/(a_j-b_j) & \\ \qquad \cdots b_j<\mathrm{Ham}(\underline{u}(T\varphi),\ \underline{u}(T\omega_j))<a_j \text{の場合} & \\ 1 & \cdots \mathrm{Ham}(\underline{u}(T\varphi),\ \underline{u}(T\omega_j))\leqq b_j \text{の場合} \end{cases} \tag{E.10}$$

として、

$$SM(\varphi,\ \omega_j)=S(\varphi,\ \omega_j)\ /\sum_{i\in J} S(\varphi,\ \omega_i) \tag{E.11}$$

(2#) $\forall i\in J, \mathrm{Ham}(\underline{u}(T\varphi), \underline{u}(T\omega_j))\geqq a_i$ の場合

$$SM(\varphi,\ \omega_j)=p(\mathfrak{C}_j) \tag{E.12}$$

と定義される式 (A.5) の関数 SM はaxiom 2を満たす。 □

尚、式 (D.23) のごとく、定義される式 (A.5) の関数 SM も axiom 2を満たすが、定理E. 2で構成された類似度関数 SM の方が実用的に有効に機能する場合が多いと考えられる。

付録F. Hamming距離に基づいた類似度関数SMの構成

本付録Fでは、先ず、正負2値ベクトル間の、よく知られているHamming距離を実数値ベクトル間のHamming距離へと拡張し（F. 1章）、その後、n次元ユークリッド空間 R^n 内の実数値ベクトルとしてのパターン $\varphi \in \Phi$ について、2条件F.1, F.2の下で、axiom 2を満たす類似度関数 SM を構成し（F.2章）、最後に、条件A3.1（不動点条件）を満たす重みベクトル $\underline{W_k}$ を構成する手法が2種類、説明される（F.3章）。

F.1　実数値ベクトル間のHamming距離 Ham

各成分 a_i, b_i が±1の2値を取る2つのベクトル

$$\underline{a} = \mathrm{col}(a_1\ a_2 \cdots a_n)\ \text{（n次元列ベクトル）} \tag{F.1}$$

$$\underline{b} = \mathrm{col}(b_1\ b_2 \cdots b_n) \tag{F.2}$$

の間の、対応する成分 a_k, b_k の違いの、$k=1 \sim n$ にわたる総和は、**$\underline{a}$，$\underline{b}$ 間のHamming距離**といわれる：

$$\begin{aligned}&\underline{a}, \underline{b}\ \text{間のHamming距離}\\ &\equiv \sum_{k=1}^{n} | 2^{-1} \cdot [1+a_k] - 2^{-1} \cdot [1+b_k] |\\ &= 2^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{n} | a_k - b_k |,\\ &\quad \text{where } a_k, b_k \in \{-1, +1\}\ (k=1 \sim n).\end{aligned} \tag{F.3}$$

□

1実変数 u の2値関数

$$\mathrm{psn}^+(u) \equiv \begin{cases} 0 & \text{if } u \leqq 0 \\ 1 & \text{if } u > 0 \end{cases} \tag{F.4}$$

を導入すると、

各成分 a_k, b_k が2値 ±1 をとる2つのベクトル

$$\begin{aligned}&\underline{a}, \underline{b}\ \text{間のHamming距離 Ham}(\underline{a}, \underline{b})\\ &= n - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{psn}^+(a_k \cdot b_k)\end{aligned} \tag{F.5}$$

が成り立つことに注目して、任意の2つの実数値ベクトル $\underline{a}, \underline{b} \in R^n$ 間のHamming距離を次の定義F. 1で与える。

［定義F. 1］（**2つの実数値ベクトル $\underline{a}$，$\underline{b}$ 間のHamming距離**）

任意の2つの実数値ベクトル $\underline{a}, \underline{b} \in R^n$ 間のHamming距離 Ham$(\underline{a}, \underline{b})$ とは、式（F.5）のことである。

□

このように、各成分 a_k, b_k が2値 ±1 をとるベクトル $\underline{a}, \underline{b}$ 間のHamming距離については、式（F.3）での定義と定義F.1とは一致することになる。

F. 2　2条件F. 1, F. 2を満たす類似度関数 SM の構成

正整数 n を十分、大に取っておく。

$$\begin{aligned}&\varphi = \mathrm{col}(a_1\ a_2 \cdots a_n) \in \Phi,\\ &\quad \text{where } a_k \in \in R\ \text{（実数全体の集合）}\ (k=1 \sim n)\end{aligned} \tag{F.6}$$

$$T\omega_j = \mathrm{col}(b_1(j)\ \ b_2(j) \cdots b_n(j)),$$

where $b_k(j) \in R (k=1 \sim n)$ (F.7)

について、

$(\varphi)k \equiv a_k,\ (T\omega_j)_k \equiv b_k(j)\ (k=1 \sim n)$ (F.8)

と、約束しておく。ここに、全カテゴリ番号集合 J は、

$J=[1, 2, \cdots, m\}$ (F.9)

としておく。

実数値の重みベクトル

$\underline{W_k} \equiv \{W_{k\ell} \mid \ell \in \{1, 2, \cdots, n\}\},\ k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ (F.10)

をも導入しておく。

次の2条件F. 1, F. 2を考えておく。

［条件F. 1］**(不動点条件)**

$\forall j \in J,\ \forall k \in \{1, 2, \cdots, n\},$

$\sum_{\ell=1}^{n} W_{k\ell} \cdot (T\omega_j)_\ell = (T\omega_j)_k.$ (F.11)

［条件F. 2］（式（A.2）の Ω 内の各代表パターン ω_j 間の不一致条件）

$\forall j \in J,$

$0 \leqq e_j$

$\equiv \max_{i \in J-\{j\}} \sum_{\ell=1}^{n} psn^+((T\omega_i)_k \cdot (T\omega_j)_k)$

$< \sum_{\ell=1}^{n} psn^+((T\omega_j)_k \cdot (T\omega_j)_k)\ (>0)$

$\leqq n.$ (F.12)

□

更に、定義F.1を適用すれば、次の命題F.1の如く、$c(\varphi)$, $T\omega_j$ 間のHamming距離

$Ham(c(\varphi), T\omega_j) = n - d_j(\varphi)$ (F.13)

が求められる。

［命題F. 1］(Hamming距離 $n-d_j(\varphi)$)

$c_k(\varphi) \equiv \sum_{\ell=1}^{n} W_{k\ell} \cdot (T\varphi)_\ell,\ k=1 \sim n,\ \varphi \in \Phi$ (F.14)

$\underline{c}\ (\varphi)$

$\equiv col(c_1(\varphi)\ c_2(\varphi) \cdots c_n(\varphi))$ (F.15)

として、$\underline{c}(\varphi)$, $T\omega_j$ 間の、式（F.13）のHamming距離 $Ham(\underline{c}(\varphi), T\omega_j)$ での $d_j(\varphi)$ は、

$d_j(\varphi)$

$= \sum_{k=1}^{n} psn^+((\underline{c}(\varphi))_k \cdot (T\omega_j)_k).$ (F.16)

□

このとき、次の定理F. 1が成り立つ。

［定理F.1］**(Hamming 距離に基づいた類似度関数 SM の構成定理)**

2条件F.1, F.2の下で、axiom 2を満たす類似度関数

$SM: \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\}$ (F.17)

の1つは、

$S(\varphi, \omega_j) \equiv$

$\begin{cases} 0 & \text{if } d_j(\varphi) \leqq e_j & \text{(F.18)} \\ d_j(\varphi)/d_j(\omega_j) & \text{if } d_j(\varphi) > e_j & \text{(F.19)} \end{cases}$

として、

$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_j) \equiv$

$$\begin{cases} p(\mathfrak{C}_j) \text{ if } \sum_{i \in J} S(\varphi, \omega_i) = 0 & \text{(F.20)} \\ S(\varphi, \omega_j) / \sum_{i \in J} S(\varphi, \omega_i) \text{ if } \sum_{i \in J}^{S} (\varphi, \omega_i) > 0 & \text{(F.21)} \end{cases}$$

と与えられる。

（証明）　A. 1章のaxiom 2の（i），(ii)，(iii) が成立することを示す。

（ii）の正規性の成立は3式（F.20），（F.6），（F.21）から明らかである。

A. 5章のaxiom 1の（iii）の後半 T·T＝T から、式（F.14）の $c_k(\varphi)$ について、T-不変性

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall k \in \{1, 2, \cdots, n\} \ c_k(T\varphi) = c_k(\varphi) \tag{F.22}$$

が成立し、よって、式（F.15）の $\underline{c}(\varphi)$，式（F.16）の $d_j(\varphi)$，2式（F.18），（F.19）の $S(\varphi, \omega_j)$ についても同様なT-不変性が成立し、2式（F.20），（F.21）のSMについての、（i）のT-不変性の成立は明らかである。

最後に、axiom 2の（i）が成立していることを示そう。

①$\varphi = \omega_j$のとき

3式（F.14）～（F.16）を用いて、$d_j(\varphi)$ を計算すると、不等式

$$\begin{aligned} & d_j(\omega_j) \\ & = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{psn}^+ ((\underline{c}(\omega_j))_k \cdot (T\omega_j)_k) \\ & = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{psn}^+ ([\sum_{\ell=1}^{n} W_{k\ell} \cdot (T\omega_j)_\ell] \cdot (T\omega_j)_k) \\ & = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{psn}^+ ((T\omega_j)_k \cdot (T\omega_j)_k) (>0) \quad \because \text{ 式（A3.11），式（A3.12）} \\ & > e_j \geqq 0 \quad \because \text{ 式（F.12）} \end{aligned} \tag{F.23}$$

が得られる。よって、式（F.19）から、

$$S(\omega_j, \omega_j) = 1 \tag{F.24}$$

が成り立つ。

②$\varphi = \omega_i (i \neq j)$ のとき

3式（F.14）～（F.16）を用いて、$d_j(\varphi)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} & d_j(\omega_i) \\ & = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{psn}^+ ((\underline{c}(\omega_i))_k \cdot (T\omega_j)_k) \\ & = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{psn}^+ ([\sum_{\ell=1}^{n} W_{k\ell} \cdot (T\omega_i)_\ell] \cdot (T\omega_j)_k) \\ & = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{psn}^+ ((T\omega_i)_k \cdot (T\omega_j)_k) \quad \because \text{ 式（F.11）} \\ & \leqq e_j (\geqq 0) \quad \because \text{ 式（F.12）} \end{aligned} \tag{F.25}$$

が得られる。よって、式（F.18）から、

$$S(\omega_i, \omega_j) = 0 \tag{F.26}$$

が成り立つ。

以上の①,②から、axiom 2の（i）の成立を示す次の③,④が得られ、証明が終わった：

先ず、2式（F.24），（F.26）から、

$$\forall j \in J, \sum_{k \in J} S(\omega_j, \omega_k) = 1 > 0 \tag{F.27}$$

を得ていることに注意しておく。

③$\varphi = \omega_j$のとき

$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_j) = S(\omega_j, \omega_j) / \sum_{k \in J} S(\omega_j, \omega_k) = 1.$

④$\varphi=\omega_i\ (i\neq j)$のとき

$$SM(\varphi,\ \omega_j)=S(\omega_i,\ \omega_j)/\sum_{k\in J}S(\omega_i,\ \omega_k)=0. \qquad \square$$

F.3 条件F.1（不動点条件）を満たす2つの構成手法

F.2章の条件F.1（不動点条件）を満たす式（F.10）の各$\underline{W_k}$を求める手法を2つ示そう。それは、次の①,②で与えられる。

①不動点条件を満たす構成法1

$$W_{k\ell}\equiv 0 \text{ if } k\neq\ell,\ \equiv 1 \text{ if } k=\ell. \tag{F.28}$$

②不動点条件を満たす構成法2

$$c_{ij}\equiv\sum_{k=1}^{n}(T\omega_i)_k\cdot(T\omega_j)_k \tag{F.29}$$

を第i行第j列の要素とする行列

$$C=(c_{ij})i,\ j\in J \tag{F.30}$$

の逆行列は、式（A.4）の系$T\cdot\Omega$は1次独立であるから、存在する。この逆行列を

$$C^{-1}=((c^{-1})_{ij})i,\ j\in J \tag{F.31}$$

で表そう。

次に、

$$(T\omega_i)^{\perp}\equiv\sum_{r\in J}(c^{-1})_{ir}\cdot T\omega_r \tag{F.32}$$

のように定義された$(T\omega_i)^{\perp}$を用いて、式（F.10）の実数値の各重み$\underline{W_k}$の成分$W_{k\ell}$を

$$W_{k\ell}\equiv\sum_{j\in J}((T\omega_j)^{\perp})_k\cdot(T\omega_j)_{\ell} \tag{F.33}$$

と定義すれば、所要の不動点方程式（F.11）の成立が次の定理F.2で指摘される。

［定理F.2］（不動点定理）

式（F.33）のように定義された実数値の各重み$\underline{W_k}$は、不動点方程式（F.11）を満たす。

（証明）　任意の$j\in J$と、任意の$k\in\{1,2,\cdots,n\}$をとる。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}^{n}W_{k\ell}\cdot(T\omega_j)_{\ell}\\
&=\sum_{\ell=1}^{n}\Big[\sum_{i\in J}((T\omega_i)^{\perp})_k\cdot(T\omega_i)_{\ell}\Big]\cdot(T\omega_j)_{\ell} && \because\ \text{式（A3.33）}\\
&=\sum_{i\in J}((T\omega_i)^{\perp})_k\cdot\sum_{\ell=1}^{n}(T\omega_i)_{\ell}\cdot(T\omega_j)_{\ell}\\
&=\sum_{i\in J}((T\omega_i)^{\perp})_k\cdot c_{ij} && \because\ \text{式（F.29）}\\
&=\sum_{i\in J}\Big(\sum_{r\in J}(c^{-1})_{ir}\cdot T\omega_r\Big)_k\cdot c_{ij} && \because\ \text{式（F.32）}\\
&=\Big(\sum_{i\in J}\sum_{r\in J}(c^{-1})_{ir}\cdot T\omega_r\cdot c_{ij}\Big)_k\\
&=\Big(\sum_{r\in J}\Big[\sum_{i\in J}c_{ij}\cdot(c^{-1})_{ir}\Big]\cdot T\omega_r\Big)_k\\
&=\Big(\sum_{r\in J}\Big[\sum_{i\in J}c_{ji}\cdot(c^{-1})_{ir}\Big]\cdot T\omega_r\Big)_k && \because\ c_{ij}=c_{ji}\\
&=\Big(\sum_{r\in J}\delta_{jr}\cdot T\omega_r\Big)_k\\
&=(T\omega_j)_k.
\end{aligned}
\tag{F.34}
$$

を得、式（F.11）の成立が示された。ここに、δ_{iq}は、

$$\delta_{iq}=0 \text{ if } i\neq q,\ \equiv 1 \text{ if } i=q \tag{F.35}$$

と定義されたKroneckerのデルタ記号である。 $\square$

付録G. パターンモデル間ノルム距離に基づいた類似度関数 SM の構成1

本付録Gでは、式 (A.22) のパターン集合Φと式 (A.15) のモデル構成作用素 T の対 $[\Phi, T]$ が本付録A、A.5章のaxiom 1を満たした条件で構成済という場合、本付録A、A.1章のaxiom 2の3性質 ((i) 正規直交性, (ii) 確率性 (規格化条件), (iii) T-不変性) を満たす式 (A.5) の類似度関数SMの1構成例を指摘する。

入力 $\varphi \in \Phi$ に対するその出力がそのパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ であるような式 (A.15) の写像 T が、次の4性質①～④を満たさなければならないとすることであり、その後、Φ を式 (A.22) のように設定すれば、

対 $[\Phi, T]$ が本付録A、A. 5章のaxiom 1を満たすようになる (文献 [4] の定理A1. 1 (対 $[\Phi, T]$ の基本構成定理) を参照) :

①**(零元不動点性)** $\varphi = 0$ について $T\varphi = \varphi \in \Phi$.

②**(正定数倍不変性)** $\forall \varphi \in \Phi$, $T(a \cdot \varphi) = T\varphi \in \Phi$

for any positive real number a.

③**(ベキ等性)** $\forall \varphi \in \Phi$, $T(T\varphi) = T\varphi$.

④**(非零写像性)** $\exists \varphi \in \Phi$, $T\varphi \neq 0$. □

性質②, ④は各々、正定数倍、T作用というパターン変形の下で、パターンという意味概念が保存されることを要請している。

4性質①～④を満たすという意味でモデル構成作用素と呼ばれる式 (A.15) の写像 T を導入することの1つの意義は、実際に処理の対象とするパターンφというものの帰納的定義が可能になり (文献 [3] の2. 3節を参照)、パターン認識システムの自己組織化が精密に論じられることである。直接的には、パターンモデル $T\varphi$を、変形前に戻された処理対象とする問題のパターンφの近似としての正規化パターンと想定すると、パターン認識分野におけるいわゆる式 (A.15) の正規化写像 T が最小限満たさなければならない4性質①～④を指摘していることである [3]。認識システム RECOGNITRON が $T\varphi$を見ると、φのように見えると云う訳である。

以後、カテゴリ $\mathfrak{C}_j$の代表パターンω_jの、式 (A.2) の組 Ω については、性質

(一) Ω は1次独立な系

を仮定し、更に、この Ω と、axiom 1を満た式 (A.15) の写像 T とについて、

(二) $T \cdot \Omega \equiv \{T \cdot \omega_j \mid j \in J\}$ は1次独立な系

(三) $\forall i \in J, \forall j \in J - \{i\}, \| T\omega_i - T\omega_j \| > 0$

を仮定する。

確率条件式 (A.14) を満たす各カテゴリ $\mathfrak{C}_j$の生起確率 $p(\mathfrak{C}_j)$をも導入しておく。

[定理G.1] **(パターンモデル間ノルム距離に基づいたSM の構成定理1)**

容易に満たされるであろう各代表パターンモデル $T\omega_j$間の分離条件

$$\begin{aligned}
&\forall j \in J, (\| T\omega_j - T\omega_j \| =) 0 < d_j \\
&\leqq \min i \in J - \{j\} \| T\omega_i - T\omega_j \| \\
&\leqq \| T\omega_k - T\omega_j \| \text{ for any } k \in J - \{j\}
\end{aligned} \tag{G.1}$$

が満たされる各正実定数 d_jが存在するとしょう。

処理の対象とするパターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ に対し、

$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_j) \equiv$

$$\begin{cases} \max\{d_j - \| T\varphi - T\omega_j \|, 0\} \\ / \sum_{i \in J} \max\{d_i - \| T\varphi - T\omega_i \|, 0\} \\ \quad \cdots \exists k \in J,\, d_k - \| T\varphi - T\omega_k \| > 0 \text{ のとき} & \text{(G.2)} \\ p(\mathfrak{C}_j) \\ \quad \cdots \forall k \in J,\, d_k - \| T\varphi - T\omega_k \| \leqq 0 \text{ のとき} & \text{(G.3)} \end{cases}$$

と定義される式（A.5）の写像SMは、本付録A、A.1章のaxiom 2を満たす。

（証明）直ちに、axiom 2の（ii）確率性（規格化条件）の成立がわかる。また、③のベキ等性より、axiom 2の（ii）T-不変性の成立もわかる。更に、分離条件式（G.1）より、2性質

$$\forall j \in J, \max\{d_j - \| T\varphi - T\omega_j \|, 0\} \mid_{\varphi = \omega_j} > 0 \qquad \text{(G.4)}$$

$$[\forall i \in J - \{j\}, \max\{d_j - \| T\varphi - T\omega_j \|, 0\} \mid_{\varphi = \omega_i} = 0] \qquad \text{(G.5)}$$

が成立しており、よって、axiom 2の3性質（i）直交性の成立もわかり、証明が終わった。 □

明らかに、2カテゴリ$\mathfrak{C}_j$, $\mathfrak{C}_i$に対し、入力パターン$\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$の、類似性の望ましい性質

$\exists k \in J, d_k - \| T\varphi - T\omega_k \| > 0$ のとき

$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\},$

$$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_j) \geqq \mathrm{SM}(\varphi, \omega_i) \qquad \text{(G.6)}$$

$$\Leftrightarrow \max\{d_j - \| T\varphi - T\omega_j \|, 0\} \geqq \max\{d_i - \| T\varphi - T\omega_i \|, 0\} \qquad \text{(G.7)}$$

$$\Leftrightarrow d_j - \| T\varphi - T\omega_j \| \geqq d_i - \| T\varphi - T\omega_i \| \qquad \text{(G.8)}$$

$\Rightarrow d_j = d_i$ であれば、

$$\| T\varphi - T\omega_j \| \leqq \| T\varphi - T\omega_i \| \qquad \text{(G.9)}$$

ここに、式（G.6）で等号が成り立つのは、

3式（G.7）～（G.9）で等号が成り立つ場合に限る (G.10)

が、式（G.2）より成り立っていることが判明する。

付録H. パターンモデル間ノルム距離に基づいた類似度関数 SM の構成2

本付録Hでは、式（A.5）の 類似度関数 SM の1例を、付録Gに続き、付録Gでの諸条件を仮定し、構成する。

［定理H. 1］**（パターンモデル間ノルム距離に基づいた SM の構成定理2）**

容易に満たされる2条件

$$[\forall j \in J, \| T\omega_j \| > 0] \qquad \text{(H.1)}$$

$$\wedge [\forall i \in J - \{j\}, \| T\omega_i - T\omega_j \| > 0] \qquad \text{(H.2)}$$

の下で考えよう。各正数 ε_j を、分離条件に関する不等式

$\forall j \in J, 0 < \varepsilon_j \leqq$

$\min_{k \in J - \{j\}} \| T\omega_k - T\omega_j \| / [\| T\omega_k \| + \| T\omega_j \|]$

$$\leqq \| T\omega_i - T\omega_j \| / [\| T\omega_i \| + \| T\omega_j \|] \quad \text{if } i \neq j \qquad \text{(H.3)}$$

を満たすように選び、固定しておく。その後、各$s_j(\varphi)$を、

$$（一）\quad \| T\varphi - T\omega_j \| < \varepsilon_j \cdot [\| T\varphi \| + \| T\omega_j \|] \qquad \text{(H.4)}$$

のとき

$s_j(\varphi) \equiv$

$\varepsilon_j - \| T\varphi - T\omega_j \| / [\| T\varphi \| + \| T\omega_j \|]$ (H.5)

（二） $\| T\varphi - T\omega_j \| \geqq \varepsilon_j \cdot [\| T\varphi \| + \| T\omega_j \|]$ (H.6)

のとき

$s_j(\varphi) \equiv 0$ (H.7)

と定義する。そうすると、

$SM(\varphi, \omega_j) \equiv$

$$\begin{cases} s_j(\varphi)/\sum_{k \in J} s_k(\varphi) \\ \quad \cdots \exists k \in J,\ \| T\varphi - T\omega_k \| / [\| T\varphi \| + \| T\omega_k \|] < \varepsilon_k \text{のとき} & \text{(H.8)} \\ p(\mathfrak{C}_j) \\ \quad \cdots \forall k \in J,\ \| T\varphi - T\omega_k \| / [\| T\varphi \| + \| T\omega_k \|] \geqq \varepsilon_j \text{のとき} & \text{(H.9)} \end{cases}$$

と定義される式（A.5）の写像 SM は、本付録A、A. 1章のaxiom 2を満たす。

（証明）直ちに、2式（H.8），（H.9）で定義される関数 SM は、axiom 2の (ii) 確率性（規格化条件）を満たすことがわかる。また、付録Gの③ベキ等性より、axiom 2の (iii) T-不変性の成立もわかる。

更に、2条件式（H.1），（H.2）を考慮すると、分離条件式（H.3）より、2性質

$\forall j \in J, s_j(\omega_j) = \varepsilon_j > 0$ ∵式（H.5） (H.10)

$\wedge [\forall i \in J - \{j\}, s_j(\omega_i) = 0]$ ∵式（H.7） (H.11)

が成立しており、よって、axiom 2の3性質 (i) 直交性の成立もわかり、証明が終わった。 □

明らかに、2カテゴリ $\mathfrak{C}_j, \mathfrak{C}_i$に対し、入力パターン$\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$の、類似性の望ましい性質

不等式 (H.4) と、不等式

$\| T\varphi - T\omega_i \| < \varepsilon_i \cdot [\| T\varphi \| + \| T\omega_i \|]$ (H.13)

とが成り立っているとき、

$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\},$

$SM(\varphi, \omega_j) \geqq SM(\varphi, \omega_i)$ (H.14)

$\Leftrightarrow$

$s_j(\varphi) = \varepsilon_j - \| T\varphi - T\omega_j \| / [\| T\varphi \| + \| T\omega_j \|] \geqq s_i(\varphi)$

$= \varepsilon_i - \| T\varphi - T\omega_i \| / [\| T\varphi \| + \| T\omega_i \|]$ (H.15)

$\Leftrightarrow \varepsilon_j - \varepsilon_i \geqq \| T\varphi - T\omega_j \| / [\| T\varphi \| + \| T\omega_j \|]$

$- \| T\varphi - T\omega_i \| / [\| T\varphi \| + \| T\omega_i \|]$ (H.16)

$\Rightarrow \varepsilon_j = \varepsilon_i \wedge \| T\omega_j \| = \| T\omega_i \|$であれば、

$\| T\varphi - T\omega_j \| \leqq \| T\varphi - T\omega_i \|$ (H.17)

ここに、式（H.14）で等号が成り立つのは、

3式（H.15）～（H.17）で等号が成り立つ場合に限る (H.18)

が、2式（H.5），（H.8）より成り立っていることが判明する。

付録I. カルバック情報量を用いた類似度関数 SM の構成

本付録Iでは、S.Kullback の cross entropy（information theoretic distance）を使い、本付録A, A. 1

章のaxiom 2を満たす（A.5）の類似度関数SMを構成する。

これまで［1］～［4］と同様に、カテゴリ番号の集合Jについて、

$$|J| \text{ (cardinality of set J)} \geqq 2 \tag{I.1}$$

とする。

$$R^+ \text{：非負実数全体の集合} \tag{I.2}$$

として、式（D.5）の特徴抽出写像の値域をZからR^+へと制限した特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \rightarrow R^+ \tag{I.3}$$

を導入する。ここに、パターン$\varphi \in \Phi$から抽出される第$\ell \in L$番目の非負実数値特徴量$u(\varphi, \ell)$について、

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \ell \in L, u(\varphi, \ell) \geqq 0 \tag{I.4}$$

が成り立っている。

“式（A.2）の代表パターン集合Ωについて抽出された規格化特徴量の非一致条件”

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\},$$

$$\exists \ell \in L, u(T\omega_j, \ell) / \sum_{k \in L} u(T\omega_j, k) \neq u(T\omega_i, \ell) / \sum_{k \in L} u(T\omega_i, k) \tag{I.5}$$

の下で考える。この非一致条件の成立は無理な仮定ではないことは、Ωの意味からわかる。

Kullbackのcross entropy、言い替えれば、

$T\varphi$の$T\omega_j$からのsome sort of distortion measure

$$d(\varphi, \omega_j) \equiv \sum_{\ell \in L} [u(T\omega_j, \ell) / \sum_{k \in L} u(T\omega_j, k)] \cdot \log_e [[u(T\omega_j, \ell) / \sum_{k \in L} u(T\omega_j, k)] / [u(T\varphi, \ell) / \sum_{k \in L} u(T\varphi, k)]] \geqq 0 \tag{I.6}$$

を導入して、関数$f(\varphi, \omega_j)$を次のように定義する：

$$f(\varphi, \omega_j) \equiv \begin{cases} 1 - d(\varphi, \omega_j) / \sum_{k \in J} d(\varphi, \omega_k) \text{ if } \sum_{k \in J} d(\varphi, \omega_k) > 0 & \text{(I.7)} \\ p(\mathfrak{C}_j) \text{ if } \sum_{k \in J} d(\varphi, \omega_k) = 0. & \text{(I.8)} \end{cases}$$

ここに、$p(\mathfrak{C}_j)$は確率条件式（A.14）を満たす第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の生起確率である。

□

このとき、次の定理I. 1が成り立ち、1つの類似度関数SMが構成されることがわかる。

［定理I. 1］**(cross entropyによるSM構成定理)**

$$s(\varphi, \omega_j) \equiv g_j(f(\varphi, \omega_j)) \tag{I.9}$$

を定義し、2つのパターンφ, ω_j間の類似度$SM(\varphi, \omega_j)$を

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} s(\varphi, \omega_j) / \sum_{k \in J} s(\varphi, \omega_k) \quad \cdots \exists k \in J, f(\varphi, \omega_k) > u_0(k) & \text{(I.10)} \\ p(\mathfrak{C}_j) \quad \cdots \forall k \in J, f(\varphi, \omega_k) > u_0(k) & \text{(I.11)} \end{cases}$$

と定義される式（A.5）の写像SMは、本付録A, A. 1章のaxiom 2を満たす。

ここに、関数

$$g_j : [0, 1] \equiv \{x \mid 0 \leqq x \leqq 1\} \rightarrow [0, 1] \tag{I.12}$$

について、

$$\text{（イ）} g_j(1) = 1 \tag{I.13}$$

であり、かつ、不等式

$$0 \leqq \max_{k \in J-\{j\}} f(\omega_k, \omega_j) \leqq u_0(j) < 1 \tag{I.14}$$

を満たす $u_0(j)$ が存在して、

(ロ) $g_j(x) = 0$ if $x \leqq u_0(j)$ (I.15)

(ハ) $u_0(j) < x \Rightarrow 0 < g_j(x)$ (I.16)

が成り立つ系 $g_j, j \in J$ が導入されているものとする。

(証明) 本付録A, A. 1章のaxiom 2の (i), (ii), (iii) の成立を確かめよう。

axiom 2の (i) の成立：任意に、$j \in J$ を選び、$\varphi = \omega_j$ とする。先ず、

$$d(\varphi, \omega_j) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \ell \in L, u(T\omega_j, \ell) / \sum_{k \in L} u(T\omega_j, k) = u(T\varphi, \ell) / \sum_{k \in L} u(T\varphi, k) \tag{I.17}$$

に注意すれば、

$$d(\varphi, \omega_j) = 0$$

$$\wedge [\forall i \in J - \{j\}, d(\varphi, \omega_i) > 0]$$

$$\because \text{条件式 (I.5)} \wedge \text{式 (I.6)} \tag{I.18}$$

を得て、

$$f(\varphi, \omega_j) = 1$$

$$\wedge [\forall i \in J - \{j\}, 1 > f(\varphi, \omega_i) > 0]$$

$$\because \text{2式 (I.18), (I.7)} \tag{I.19}$$

が成立する。よって、

$$s(\varphi, \omega_j) = 1 \quad \because \text{式 (I.13)}$$

$$\wedge [\forall i \in J - \{j\}, s(\varphi, \omega_i) = 0]$$

$$\because \text{3式 (I.14), (I.15), (I.16)} \tag{I.20}$$

を得て、結局、任意の $j \in J$ につき、

$$SM(\varphi, \omega_j) = 1$$

$$\wedge [\forall i \in J - \{j\}, SM(\varphi, \omega_i) = 0]$$

$$\because \text{2式 (I.20), (I.10)} \tag{I.21}$$

が成立し、証明が終わった。

axiom 2の (ii) の成立：SM の定義式 (I.10), (I.11) から明らか。

axiom 2の (iii) の成立：axiom 1の (iii) を適用すれば、

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, d(T\varphi, \omega_j) = d(\varphi, \omega_j)$$

$$\because \text{式 (I.6)} \tag{I.22}$$

が成り立つ。よって、

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, f(T\varphi, \omega_j) = f(\varphi, \omega_j)$$

$$\because \text{式 (I.7)} \tag{I.23}$$

$$\wedge s(T\varphi, \omega_j) = s(\varphi, \omega_j) \quad \because \text{式 (I.9)} \tag{I.24}$$

$$\wedge SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j)$$

$$\because \text{2式 (I.10), (I.11)} \tag{I.25}$$

を得る。 □

The cross entropy was proposed by Kullback under the name of directed divergence.The cross entropy measures the information theoretic distance between two distributions $P = \{p_1, p_2, \cdots, p_N\}$ and $Q = \{q_1, q_2, \cdots, q_N\}$ by

$$D(Q, P) = \sum_{k=1}^{N} q_k \log_2 (q_k/p_k). \tag{I.26}$$

This measure D(Q, P) is also studied by Renyi as the information theoretical distance between the two distributions P and Q.Renyi also points out that the formula can be interpreted as the expectation of the change in the information content when we are using Q instead of P.The minimum cross entropy method can be seen as an extension of the maximum entropy method by setting equal initial estimates for all p_i when no prior information is available.

The maximum entropy principle allows us to select the solution which gives the largest entropy [43].

□

付録J. 一般化類似度関数 GSM

本付録Jでは、A.1章のaxiom 2を満たす類似度関数 SM_1 が一般化された類似度関数 GSM_{12} を研究する。

処理の対象とする問題のパターン集合 $(0\in)\Phi\subset\mathfrak{H}$ の2つの部分集合

$$\Phi_1,\ \Phi_2\subseteq\Phi \tag{J.1}$$

を導入し、包含性質

$$\forall j\in J,\ \omega_j\in\Phi_1\cap\Phi_2 \tag{J.2}$$

を要請しておく。ここに、$\omega_j\in\Omega$ は第$j\in J$番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$の代表パターンである。

制限性質を表す等式

$$\forall\varphi\in\Phi_1,\ \forall j\in J,$$
$$GSM_{12}(\varphi,\ \omega_j)=SM_1(\varphi,\ \omega_j) \tag{J.3}$$

が成り立つような写像

$$GSM_{12}:\ \Phi_1\times\Phi_2\to\{s\,|\,0\leqq s\leqq 1\} \tag{J.4}$$

は、axiom 2を満たす類似度関数

$$SM_1:\ \Phi_1\times\Omega\to\{s\,|\,0\leqq s\leqq 1\} \tag{J.5}$$

の**一般化類似度関数**（generalized similarity-measure function）であるという。

式（J.5）に登場している Ω は、式（A.1）の全カテゴリ集合 $\underline{\mathfrak{C}}$ に対応する代表パターン集合である。

$GSM_{12}(\varphi,\ \eta)$ は、2つのパターン $\varphi\in\Phi_1$, $\eta\in\Phi_2$ の一致の程度（the degree of coincidence between $\varphi\in\Phi_1$ and $\eta\in\Phi_2$）を表しているとみなせよう。式（J.4）の GSM_{12} の構成を指摘する次の定理J. 1は、結局、式（A.2）の代表パターン集合Ωを介して、式（J.4）の一般化類似度関数 GSM_{12} が定義されていることがわかる。

［定理J. 1（拡張定理）］**（一般化類似度関数 GSM の構成定理）**

式（J.5）の SM_1 と、axiom 2を満たす今1つの類似度関数

$$SM_2:\ \Phi_2\times\Omega\to\{s\,|\,0\leqq s\leqq 1\} \tag{J.6}$$

を導入すると、次の（i）～（vi）で定義される GSM_{12} は、等式（J.3）を満たし、式（J.5）のSM_1の一般化類似度関数である：

（i）$GSM_{12}(\varphi,\ \eta)$

$$\equiv\sum_{j\in J} SM_1(\varphi,\ \omega_j)\cdot SM_2(\eta,\ \omega_j).$$

特に、$SM \equiv SM_1 \equiv SM_2$ の場合、

$GSM_{12}(\varphi, \eta)$

$\equiv \sum_{j \in J} SM(\varphi, \omega_j) \cdot SM(\eta, \omega_j)$.

(ii) $GSM_{12}(\varphi, \eta)$

$\equiv \sum_{j \in J} \min\{SM_1(\varphi, \omega_j), SM_2(\eta, \omega_j)\}$.

特に、$SM \equiv SM_1 \equiv SM_2$ の場合、

$GSM_{12}(\varphi, \eta)$

$\equiv \sum_{j \in J} \min\{SM(\varphi, \omega_j), SM(\eta, \omega_j)\}$.

(iii) $GSM_{12}(\varphi, \eta)$

$\equiv \max_{j \in J} \min\{SM_1(\varphi, \omega_j), SM_2(\eta, \omega_j)\}$.

特に、$SM \equiv SM_1 \equiv SM_2$ の場合、

$GSM_{12}(\varphi, \eta)$

$\equiv \max_{j \in J} \min\{SM(\varphi, \omega_j), SM(\eta, \omega_j)\}$.

(iv) $GSM_{12}(\varphi, \eta)$

$\equiv [\sum_{j \in J} SM_1(\varphi, \omega_j)^q \cdot SM_2(\eta, \omega_j)^q]^{1/q}$

ここに、q は任意の正実数.

特に、$q = 1/2$ の場合、

$GSM_{12}(\varphi, \eta)$

$\equiv [\sum_{j \in J} SM(\varphi, \omega_j)^{1/2} \cdot SM(\eta, \omega_j)^{1/2}]^2$.

(v) $GSM_{12}(\varphi, \eta)$

$\equiv [\sum_{j \in J} \min\{SM_1(\varphi, \omega_j)^q, SM_2(\eta, \omega_j)^q\}]^{1/q}$

ここに、q は任意の正実数.

特に、$q = 1/2$ の場合、

$GSM_{12}(\varphi, \eta)$

$\equiv [\sum_{j \in J} \min\{SM(\varphi, \omega_j)^{1/2}, SM(\eta, \omega_j)^{1/2}\}]^2$.

(vi) $GSM_{12}(\varphi, \eta)$

$\equiv [\max_{j \in J} \min\{SM_1(\varphi, \omega_j)^q, SM_2(\eta, \omega_j)^q\}]^{1/q}$

ここに、q は任意の正実数.

特に、$q = 1/2$ の場合、

$GSM_{12}(\varphi, \eta)$

$\equiv [\max_{j \in J} \min\{SM(\varphi, \omega_j)^{1/2}, SM(\eta, \omega_j)^{1/2}\}]^2$.

（証明）axiom 2の（i）を利用して、（i）～（vi）のGSM_{12}が式（J.3）(#1）を満たすことを容易に確かめることができる。 □

次の系1は、定理J. 1で構成された式（J.4）のGSM_{12}がaxiom 2を満たす式（J.5）のSM_1として使えることを指摘するものである。

［定理J.1（拡張定理）の系1］**（正規直交性・確率性・不変性の成立定理）**

本拡張定理の（i）～（vi）で定義されるGSM_{12}は、axiom 2を満たす、言い替えれば、次の①, ②, ③を満たす：

①（**正規直交性**; orthogonormality）

$\forall i, \forall j \in J, GSM_{12}(\omega_i, \omega_j) = \delta_{ij}$.

② (規格化条件, 確率条件;probability condition)

$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} GSM_{12}(\varphi, \omega_j) = 1$.

③ (2つの写像 $T_1 : \Phi_1 \to \Phi_1, T_2 : \Phi_2 \to \Phi_2$ の下での**不変性**; invariance under mappings T_1 and T_2)

axiom 1を満たす2つの写像

$$T_1 : \Phi_1 \to \Phi_1 \tag{J.7}$$

$$T_2 : \Phi_2 \to \Phi_2 \tag{J.8}$$

について、

$\forall \varphi \in \Phi_1, \forall \varphi \in \Phi_2$,

$$GSM_{12}(T_1\varphi, T_2\eta) = GSM_{12}(\varphi, \eta) \tag{J.9}$$

特に、

$\forall \varphi \in \Phi_1, \forall j \in J$,

$GSM_{12}(T_1\varphi, T_2\omega_j)$

$$= GSM_{12}(T_1\varphi, \omega_j) \tag{J.10}$$

$$= GSM_{12}(\varphi, \omega_j) \tag{J.11}$$

が成り立つ。

(証明) ①, ②の成立は、式 (J.3) の成立から明らかである。③の成立は、SM_1, SM_2 がaxiom 2の (iii) を満たすことから明らかである。 □

付録K. 類似度関数 SM と誤認識確率 $P_{e,\gamma}(\varphi)$ との関係

本付録Kでは、式 (A.5) の類似度関数 SM とBayes risk or the error probability Pe, $\gamma(\varphi)$ associated with the Bayes decision ruleとの関係などについて、研究される。

K. 1　誤認識確率の表現

知覚の働きは、外界の事物をそれぞれ個別的ではなく、カテゴリ化 (categorization) して捕らえている。つまり、何らかの共通性が見い出せる事物集合を1つのまとまり (カテゴリ, 類概念;category) とみなし、その間に何らかの異質性を見い出せる2つ以上の事物集合を相異なるまとまりとみなしている。処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ を複数個のカテゴリの何れか1つに認識分類する際、誤って誤認識する確率 $P_{e,\gamma}(\varphi)$ などについて論じよう。

K. 1. 1　事後生起確率 $p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)$ を使った認識

認識システムが処理の対象とする問題の入力パターン $\varphi \in \Phi$ に対し、事前カテゴリ帰属知識 [3], [4], [12]

$$\langle \varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle \tag{K.1}$$

を持っている場合を考えよう。パターン $\varphi \in \Phi$ について、φ がカテゴリ $\mathfrak{C}_j$, $j \in \gamma \in 2^J$ の何れか1つに帰属しているというカテゴリ帰属知識 (categorical membership-knowledge) を認識システムが持っている場合、このときのカテゴリ帰属知識を式 (K.1) の $\langle \varphi, \gamma \rangle$ で表すのである。2^J は全カテゴリ番号集合 J のすべての部分集合のなす集合を表している。

このパターン φ に対し、**事後生起確率分布** (a posteriori probability of occurrences)

$p\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)$, $j\in\gamma\in 2^J$ (K.2)

を算出し、カテゴリ番号jを、

$j=\mathrm{argmax}_{i\in\gamma}\ p_\gamma(\mathfrak{C}_i/\varphi)\in\gamma$ (K.3)

と、求め、

φ belongs to the j-th category $\mathfrak{C}_j$ (K.4)

と、認識する。ここに、式（K.2）の各$p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)$は、確率分布の2性質

$[\forall j\in\gamma, 0\leqq p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)\leqq 1]$（1より大きくない非負性）$\wedge$ (K.5)

$\sum_{j\in\gamma} p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)=1$（総和規格性） (K.6)

を満たしていなければならない。

以後、Φ内の高々可算集合としての基本領域（basic domain;the sample space of the pattern variate φ）Φ_Bに付き、議論する。

K. 1. 2　パターンφの誤認識確率 $P_{e,\gamma}(\varphi)$

誤認識確率（probability of misrecognition）$P_{e,\gamma}(\varphi)$は、

パターン$\varphi\in\Phi_B$が式（K.3）のカテゴリ番号$j\in\gamma$の

カテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属するとき、 (K.7)

$P_{e,\gamma}(\varphi)\equiv 1-\max_{i\in\gamma}\ p_\gamma(\mathfrak{C}_i/\varphi)$ (K.8)

である

ことがわかる。また、$\varphi\in\Phi_B$についての平均値$P_{e,\gamma}(\Phi_B)$は、

仮定（K.7）が各パターン $\varphi\in\Phi_B$について成り立つとき

$P_{e,\gamma}(\Phi_B)\equiv\sum_{\varphi\in\Phi B}\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)\cdot P_{e,\gamma}(\varphi)$ (K.9)

$=\sum_{\varphi\in\Phi_B}\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)\cdot[1-\max_{i\in\gamma}\ p_\gamma(\mathfrak{C}_i/\varphi)]$ (K.10)

$=1-\sum_{\varphi\in\Phi_B}\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)\cdot\max_{i\in\gamma}\ p_\gamma(\mathfrak{C}_i/\varphi)$ (K.11)

と表される。ここに、3式（K.9）～（K.11）内の$\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)$は、認識システムがパターン$\varphi\in\Phi_B$に対し、式（K.1）の事前カテゴリ帰属知識$\langle\varphi,\gamma\rangle\in\langle\Phi, 2^J\rangle$を持っている状況下で、$\varphi\in\Phi_B$が生起する確率であり、確率分布の2性質

$[\forall\varphi\in\Phi_B, 0\leqq\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)\leqq 1]$（1より大きくない非負性）$\wedge$ (K.12)

$\sum_{\varphi\in\Phi_B}\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)=1$（総和規格性） (K.13)

を満たしていなければならない。

K. 1. 3　$p_\gamma(\varphi/\mathfrak{C}_j)$と$\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)$

ここで、式（A.5）の類似度関数SMを導入して、

第$j\in\gamma\subset J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$が与えられたとき、パターン$\varphi\in\Phi_B$の**条件付き生起確率**(conditional probability) **$p_\gamma(\varphi/\mathfrak{C}_j)$は、**

$p_\gamma(\varphi/\mathfrak{C}_j)\equiv\mathrm{SM}(\varphi,\omega_j)/\sum_{\varphi\in\Phi_B}\mathrm{SM}(\varphi,\omega_j)$ (K.14)

と表現されると、約束する。勿論、確率分布の2性質

$[\forall\varphi\in\Phi_B, 0\leqq p_\gamma(\varphi/\mathfrak{C}_j)\leqq 1]$（1より大きくない非負性）$\wedge$ (K.15)

$\sum_{\varphi\in\Phi_B} p_\gamma(\varphi/\mathfrak{C}_j)=1$（総和規格性） (K.16)

を満たしていることがわかる。

また、式（K.14）の$p_\gamma(\varphi/\mathfrak{C}_j)$と，以下の式（K.20）の$\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j)$を用いて、パターン$\varphi\in\Phi_B$の**事前生起確率**（a priori probability）$\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)$は、

$\forall\varphi\in\Phi_B, \mathrm{prob}_\gamma(\varphi)$

$$\equiv \sum_{j\in\gamma} \mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j)\cdot p_\gamma(\varphi/\mathfrak{C}_j) \tag{K.17}$$

と表現されると、約束する。

確率分布の2性質

$$[\forall j\in J, 0<p(\mathfrak{C}_j)<1] \text{（1より大きくない非負性）} \wedge \tag{K.18}$$

$$\sum_{j\in J} p(\mathfrak{C}_j)=1 \text{（総和規格性）} \tag{K.19}$$

を満たしている第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の生起確率 $p(\mathfrak{C}_j)$ を導入して、式（K.17）に登場している非負量

$$\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j)\equiv p(\mathfrak{C}_j)/\sum_{j\in\gamma} p(\mathfrak{C}_j) \tag{K.20}$$

は、カテゴリ番号 $j\in J$ を $j\in\gamma$ と制限した場合の、第 $j\in\gamma\subset J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の事前生起確率であり、確率分布の2性質

$$[\forall\varphi\in\Phi_B, 0\leqq \mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j)\leqq 1] \text{（1より大きくない非負性）} \tag{K.21}$$

$$\wedge \sum_{j\in\gamma} \mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j)=1 \text{（総和規格性）} \tag{K.22}$$

を満たしていることがわかる。

K. 1. 4 $p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)$ の表現

$\mathfrak{C}_j(j\in\gamma)$ と $\varphi\in\Phi_B$ との結合生起確率（joint probability of occurrences）$p(\mathfrak{C}_j, \varphi)$ を、

$$p_\gamma(\mathfrak{C}_j, \varphi)\equiv \mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j)\cdot p_\gamma(\varphi/\mathfrak{C}_j)$$

$$j\in\gamma, \varphi\in\Phi_B \tag{K.23}$$

と定義する。

このとき、認識システムがパターン $\varphi\in\Phi_B$ に対し、式（K.1）の事前カテゴリ帰属知識 $\langle\varphi, \gamma\rangle \in \langle\Phi, 2^J\rangle$ を持っている状況下で、パターン $\varphi\in\Phi_B$ が与えられたとき、式（K.20）の事前生起確率 $\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j)$ から変容していく結果としての、

「第 $j\in\gamma\subset J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の、式（K.2）の
条件付き事後生起確率（a posteriori conditional probability）$p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)$」 (K.24)

は、次の定理K. 1, ③の如く、表現される。

［定理K. 1］$p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)$ の表現定理）

4定義式（K.14），（K.17），（K.20），（K.23）の下では、

①式（K.17）の $\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)$ は、2式（K.12），（K, 13）を満たす。

②$\forall j\in\gamma, \sum_{\varphi\in\Phi_B} p_\gamma(\mathfrak{C}_j, \varphi)=\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j)$

が成り立つ。

③式 (K.2) の $p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)$ の表現

$$\forall j\in\gamma, \forall\varphi\in\Phi_B, p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)$$
$$=\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j)\cdot\{SM(\varphi, \omega_j)/\sum_{\varphi\in\Phi B} SM(\varphi, \omega_j)\}$$
$$/[\sum_{i\in\gamma} \mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_i)\cdot\{SM(\varphi, \omega_i)/\sum_{\varphi\in\Phi_B} SM(\varphi, \omega_i)\}]$$

が成り立ち、2式（K.5），（K.6）が満たされている。

④2式（K.8），（K.9）の $P_{e,\gamma}(\varphi)$，$P_{e,\gamma}(\Phi_B)$ は、

$$\forall\varphi\in\Phi_B, P_{e,\gamma}(\varphi)$$

$$=1-\max_{i\in\gamma} \mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_i, \varphi)/\mathrm{prob}_\gamma(\varphi) \tag{K.25}$$

$$=1-[\max_{i\in\gamma} \mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_i)\cdot p_\gamma(\varphi/\mathfrak{C}_i)]/\mathrm{prob}_\gamma(\varphi) \tag{K.26}$$

$$\forall\Phi_B\in\Phi, P_{e,\gamma}(\Phi_B)$$

$$=1-\sum_{\varphi\in\Phi_B} \max_{j\in\gamma} p_\gamma(\mathfrak{C}_j, \varphi) \tag{K.27}$$

と、具体的に表される。

（証明）　①の証明：

$$\sum_{\varphi\in\Phi_B}\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)$$
$$=\sum_{\varphi\in\Phi_B}\sum_{j\in\gamma}\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j)\cdot p_\gamma(\varphi/\mathfrak{C}_j)\qquad\because\ \text{式（K.17）}$$
$$=\sum_{j\in\gamma}\sum_{\varphi\in\Phi_B}\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j)\cdot p_\gamma(\varphi/\mathfrak{C}_j)\qquad\because\ \text{2つの総和の交換}$$
$$=\sum_{j\in\gamma}\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j)\cdot\sum_{\varphi\in\Phi_B}p_\gamma(\varphi/\mathfrak{C}_j)$$
$$=\sum_{j\in\gamma}\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j)\qquad\because\ \text{式（K.16）}$$
$$=1\qquad\because\ \text{式（K.22）}$$

を得て、式（K.13）の成立が示された。式（K.12）の成立は、$\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)$ は、非負量であるから、

$$\forall\varphi\in\Phi_B,\ 0\leqq\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)$$
$$\leqq\sum_{\varphi\in\Phi_B}\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)=1\qquad\because\ \text{式（K.13）}$$

を得て、示された。

②の証明：

$$\sum_{\varphi\in\Phi_B}p_\gamma(\mathfrak{C}_j,\varphi)$$
$$=\sum_{\varphi\in\Phi_B}\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j)\cdot p_\gamma(\varphi/\mathfrak{C}_j)\qquad\because\text{式（K.23）}$$
$$=\sum_{\varphi\in\Phi_B}\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j)\cdot\sum_{\varphi\in\Phi_B}p_\gamma(\varphi/\mathfrak{C}_j)$$
$$=\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j)\qquad\because\ \text{式（K.16）}$$

を得て、証明が終わった。

③の証明：ベイズの定理（Bayes' theorem）を適用して、

$$p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)$$
$$=p_\gamma(\mathfrak{C}_j,\varphi)/\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)\qquad\because\ \text{条件付き確率}p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)\text{の定義}\tag{K.28}$$
$$=p_\gamma(\mathfrak{C}_j,\varphi)/\sum_{j\in\gamma}p_\gamma(\mathfrak{C}_i,\varphi)\qquad\because\ \text{同時結合確率}p_\gamma(\mathfrak{C}_i,\varphi)\text{の性質}$$
$$=\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j)\cdot p_\gamma(\varphi/\mathfrak{C}_j)$$
$$/\sum_{j\in\gamma}\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_i)\cdot p_\gamma(\varphi/\mathfrak{C}_i)\qquad\because\ \text{式（K.23），（K.17）（ベイズの定理）}$$
$$=\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j)\cdot\{\mathrm{SM}(\varphi,\omega_j)/\sum_{\varphi\in\Phi_B}\mathrm{SM}(\varphi,\omega_j)\}$$
$$/\left[\sum_{j\in\gamma}\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_i)\cdot\{\mathrm{SM}(\varphi,\omega_i)/\sum_{\varphi\in\Phi_B}\mathrm{SM}(\varphi,\omega_i)\}\right]\qquad\because\ \text{式（K.14）}\tag{K.29}$$

を得る。更に、2式（K.5），（K.6）が満たされていることは、この式（K.29）から明らかであり、証明が終わった。

④の証明：

$$P_{e,\gamma}(\varphi)$$
$$=1-\max_{i\in\gamma}p_\gamma(\mathfrak{C}_i,\varphi)/\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)\qquad\because\ \text{式（K.27）}\tag{K.30}$$
$$=1-\max_{i\in\gamma}\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_i)\cdot p_\gamma(\varphi/\mathfrak{C}_i)/\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)\qquad\because\ \text{式（K.23）}$$
$$=1-[\max_{i\in\gamma}\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_i)\cdot p_\gamma(\varphi/\mathfrak{C}_i)]/\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)\tag{K.31}$$

を得て、2式（K.25），（K.26）の成立が示された。

次に、式（K.27）の成立を示そう。

$$P_{e,\gamma}(\Phi_B)$$
$$=\sum_{\varphi\in\Phi_B}\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)\cdot[1-\max_{i\in\gamma}p_\gamma(\mathfrak{C}_i,\varphi)/\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)]\qquad\because\ \text{2式（K.9），（K.30）}$$
$$=\sum_{\varphi\in\Phi_B}\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)-\sum_{\varphi\in\Phi_B}\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)\cdot\max_{i\in\gamma}p_\gamma(\mathfrak{C}_i,\varphi)/\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)]$$
$$=1-\max_{i\in\gamma}p_\gamma(\mathfrak{C}_i,\varphi)\qquad\because\ \text{式（K.13）}\qquad\square$$

を得て、式（K.27）の成立がわかった。

尚、式（K.28）から、同時結合確率 $p_\gamma(\mathfrak{C}_j, \varphi)$ の表現

$$\forall\varphi\in\Phi_B, \forall j\in\gamma,$$

$$\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)\cdot p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)=p_\gamma(\mathfrak{C}_j, \varphi) \tag{K.32}$$

も成立していることにも、注意しておこう。

K. 2　最大事後確率認識方式から最大類似度法への転換

Let us consider the usual decision-theory problem of classifying an observation φ as coming from one of $|\gamma|$ possible categories $\mathfrak{C}_j, j\in\gamma$.

次の定理K. 2は、最大事後確率認識方式を最大類似度法ならしめる2条件が（イ），（ロ）であることを指摘している。

［定理K. 2］**（最大事後確率認識方式から最大類似度法への転換定理）**

認識システムが処理の対象とする問題の入力パターン $\varphi\in\Phi_B$ に対し、式（K.1）の事前カテゴリ帰属知識 $\langle\varphi, \gamma\rangle\in\langle\Phi, 2^J\rangle$ を持っている場合、

このパターン φ に対し、カテゴリ番号 j を式（K.3）の如く求める最大事後生起確率認識方式によって、式（K.4）の様に認識することは、2条件

（イ） $\forall i\in\gamma, \mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_i)=\text{constant number}$

（ロ） $\forall i\in\gamma, \sum_{\varphi\in\Phi_B} SM(\varphi, \omega_i)=\text{constant number}$

が成立していれば、式（K.3）のカテゴリ番号 $j\in\gamma$ に関し、

$$j=\mathrm{argmax}_{i\in\gamma}\ SM(\varphi, \omega_i)\in\gamma \tag{K.33}$$

が成立し、最大類似度認識法則となる。

（証明）式（K.3）のカテゴリ番号 $j\in\gamma$ を変形してゆこう。

$$\begin{aligned}
j&=\mathrm{argmax}_{i\in\gamma}\ p_\gamma(\mathfrak{C}_i/\varphi)\in\gamma \qquad \because\ 式（K.3）\\
&=\mathrm{argmax}_{i\in\gamma}\ [p_\gamma(\mathfrak{C}_i, \varphi)/\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)]\in\gamma \qquad \because\ 式（K.28）\\
&=\mathrm{argmax}_{i\in\gamma}\ [\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_i)\cdot p_\gamma(\varphi/\mathfrak{C}_i)/\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)]\in\gamma \qquad \because\ 式（K.24）\\
&=\mathrm{argmax}_{i\in\gamma}\ [\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_i)\cdot p_\gamma(\varphi/\mathfrak{C}_i)]
\end{aligned} \tag{K.34}$$

であるが、条件（イ）が成立していれば、更に、

$$=\mathrm{argmax}_{i\in\gamma}\ p_\gamma(\varphi/\mathfrak{C}_i)$$

と変形され、よって、具体的には、

$$=\mathrm{argmax}_{i\in\gamma}\ [SM(\varphi, \omega_i)/\sum_{\varphi\in\Phi_B} SM(\varphi, \omega_i)\in\gamma] \qquad \because\ 式（K.14）$$

と表される。ここで、条件（ロ）が成立していれば、更に、

$$=\mathrm{argmax}_{i\in\gamma}\ SM(\varphi, \omega_i)\in\gamma$$

と変形され、証明が終わったことがわかる。 □

K. 3　誤認識確率 $P_{e,\gamma}(\varphi)$，$P_{e,\gamma}(\Phi_B)$ の上限, 下限

本章では、2式（K.8），（K.9）の誤認識確率 $P_{e,\gamma}(\varphi)$，$P_{e,\gamma}(\Phi_B)$ の上限，下限を求めよう。

K. 3. 1　誤認識確率 $P_{e,\gamma}(\varphi)$，$P_{e,\gamma}(\Phi_B)$ の上限

さて、the Bayesian probability vector と称される“2式（K.2），（K.24）の $p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)$ を第 $j\in J$ 番目の要素とする列ベクトル”

$$\underline{p}_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)$$

$$\equiv \mathrm{col}(p_\gamma(\mathfrak{C}_1/\varphi)\ p_\gamma(\mathfrak{C}_2/\varphi)\cdots p_\gamma(\mathfrak{C}_m/\varphi)) \tag{K.35}$$

ここに、

$$J \equiv \{1, 2, \cdots, m\} \tag{K.36}$$

を導入しよう。更に、**ベイズ距離**（Bayesian distance）$BD_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)$ を、

$$BD_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi) \equiv \sum_{j\in\gamma} [p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)]^2 \quad (\underline{p}_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)\text{のノルムの自乗}) \tag{K.37}$$

と定義し、その $\varphi \in \Phi_B$ にわたる平均値 $BD_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\Phi_B)$ を、

$$\begin{aligned} BD_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\Phi_B) &\equiv E_{\Phi_B}(BD_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)) \\ &= \sum_{\varphi\in\Phi_B} prob_\gamma(\varphi)\cdot BD_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi) \end{aligned} \tag{K.38}$$

で定義する。ここに、$E_{\Phi_B}(\cdots)$ は、… に関する the expectation operator である。

$\gamma = J$ の場合は、2式（K.37），（K.38）の定義は文献［44］で与えられている。

先ず、誤認識確率 $P_{e,\gamma}(\varphi)$，$P_{e,\gamma}(\Phi_B)$ の上限は、次の定理K. 3で与えられる。

［定理K. 3］（**誤認識確率 $P_{e,\gamma}(\varphi)$，$P_{e,\gamma}(\Phi_B)$ の上限定理**）

（i）$\forall\gamma\in 2^J, \forall\varphi\in\Phi_B, P_{e,\gamma}(\varphi) \leqq 1 - BD_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)$.

（ii）$\forall\gamma\in 2^J, P_{e,\gamma}(\Phi_B) \leqq 1 - BD_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\Phi_B)$.

（証明）$BD_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)$ を評価していくと、

$$\begin{aligned} BD_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi) &= \sum_{j\in\gamma} p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)\cdot p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi) && \because \text{式（K.37）} \\ &\leqq [\max_{j\in\gamma} p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)]\cdot \sum_{j\in\gamma} p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi) \\ &= [\max_{j\in\gamma} p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)] && \because \text{式（K.6）} \quad \text{(K.39)} \\ &= 1 - P_{e,\gamma}(\varphi) && \because \text{式（K.8）} \quad \text{(K.40)} \end{aligned}$$

が得られるが、この式（K.40）において、$P_{e,\gamma}(\varphi)$ を左辺に移行すれば、（i）が得られる。

式（K.39）の両辺について、$\varphi\in\Phi_B$ にわたる平均を取れば、

$$\begin{aligned} &BD_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\Phi_B) \\ &= \sum_{\varphi\in\Phi_B} prob_\gamma(\varphi)\cdot BD_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi) && \because \text{式（K.38）} \\ &\leqq \sum_{\varphi\in\Phi_B} prob_\gamma(\varphi)\cdot[\max_{j\in\gamma} p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)] \\ &= 1 - P_{e,\gamma}(\Phi_B) && \because \text{式（K.11）} \end{aligned} \tag{K.41}$$

を得て、この式（K.41）において、$P_{e,\gamma}(\Phi_B)$ を左辺に移行すれば、（ii）が得られる。 □

K. 3. 2　誤認識確率 $P_{e,\gamma}(\varphi)$，$P_{e,\gamma}(\Phi_B)$ の下限

先ず、2つの補助定理K. 1，K. 2を指摘しておく。

［補助定理K. 1］

任意の複素数 $z_i\,(i=1\sim m)$ について、不等式

$$\max_{i=1\sim m}|z_i| \leqq \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{m}|z_i|^2}$$

が成り立つ。 □

［補助定理K. 2］（イエンセンの不等式；Jensen's inequality）

2条件

$$a_i \geqq 0\,(i=1\sim m),\ \sum_{i=1}^{m} a_i = 1 \tag{K.42}$$

が満たされているとしよう。このとき、凸関数 f（x）について、不等式

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} a_i\cdot f(x_i) \\ &\leqq f\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\cdot x_i\right) \end{aligned} \tag{K.43}$$

が変数xのとり得るm個の値 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ について成り立つ。 □

上述の補助定理K. 1, K. 2を適用して、誤認識確率 $P_{e,\gamma}(\varphi)$，$P_{e,\gamma}(\Phi_B)$ の下限は、次の定理K. 4で与えられる。

［定理K. 4］**（誤認識確率 $P_{e,\gamma}(\varphi)$，$P_{e,\gamma}(\Phi_B)$ の下限定理）**

（i）$\forall\gamma\in 2^J, \forall\varphi\in\Phi_B,$

$1-[BD_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)]^{1/2}\leqq P_{e,\gamma}(\varphi).$

（ii）$\forall\gamma\in 2^J, 1-[BD_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\Phi_B)]^{1/2}\leqq P_{e,\gamma}(\Phi_B).$

（証明）補助定理K. 1において、$z_i=p_\gamma(\mathfrak{C}_i/\varphi)$ とおけば、不等式

$$\begin{aligned}
&\max_{i\in\gamma} p_\gamma(\mathfrak{C}_i/\varphi)\\
&=1-P_{e,\gamma}(\varphi) \quad \because\ \text{式 (K.8)}\\
&\leqq\Big[\sum_{i\in\gamma} p_\gamma(\mathfrak{C}_i/\varphi)^2\Big]^{1/2}\\
&=BD_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)^{1/2} \quad \because\ \text{式 (K.37)}
\end{aligned} \tag{K.44}$$

を得、$P_{e,\gamma}(\varphi)$ を左に移項すれば、（i）が示されたことがわかる。

式（K.44）の両辺に、$\sum_{\varphi\in\Phi_B}\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)\cdots$ を作用させれば、

$$\begin{aligned}
&\sum_{\varphi\in\Phi_B}\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)\cdot\max_{i\in\gamma} p_\gamma(\mathfrak{C}_i/\varphi)\\
&=1-P_{e,\gamma}(\Phi_B) \quad \because\ \text{式 (K.11)}\\
&\leqq\sum_{\varphi\in\Phi_B}\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)\cdot\Big[\sum_{i\in\gamma} p_\gamma(\mathfrak{C}_i/\varphi)^2\Big]^{1/2}\\
&\leqq\Big[\sum_{\varphi\in\Phi_B}\mathrm{prob}_\gamma(\varphi)\cdot\sum_{i\in\gamma} p_\gamma(\mathfrak{C}_i/\varphi)^2\Big]^{1/2}\\
&\qquad \because\ \text{凸関数}\ f(x)=\sqrt{x}\ \text{に補助定理K. 2を適用}\\
&=[BD_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\Phi_B)]^{1/2} \quad \because\ \text{式 (K.38)}
\end{aligned} \tag{K.45}$$

を得、$P_{e,\gamma}(\Phi_B)$ を左に移項すれば、（ii）が示されたことがわかる。 □

K. 4 logarithmic information measure (entropy) による誤認識確率 $P_{e,\gamma}(\varphi)$, $P_{e,\gamma}(\Phi_B)$ の評価

認識システムが処理の対象とする問題の入力パターン $\varphi\in\Phi_B$ に対し、式（K.1）の事前カテゴリ帰属知識 $\langle\varphi, \gamma\rangle\in\langle\Phi, 2^J\rangle$ を持っている場合、そのカテゴリ帰属に関する事前**不確定さ** (uncertainty) は、式 (K.20) の $\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j)$ を用いて、**エントロピー** (entropy)

$$\begin{aligned}
&ETPY_\gamma(\underline{\mathfrak{C}})\\
&\equiv-\sum_{j\in\gamma}\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j)\cdot\log_2\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j)
\end{aligned} \tag{K.46}$$

で表される。

認識システムRECOGNITRONが処理の対象とする問題の入力パターン $\varphi\in\Phi_B$ に対し、式（K.1）の事前カテゴリ帰属知識 $\langle\varphi, \gamma\rangle\in\langle\Phi, 2^J\rangle$ を持っている場合、そのカテゴリ帰属に関する事後**不確定さ** (uncertainty) は、エントロピー

$$\begin{aligned}
&ETPY_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)\\
&\equiv-\sum_{j\in\gamma} p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)\cdot\log_2 p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)
\end{aligned} \tag{K.47}$$

であり、式（K.4）のごとく、最大事後確率認識方式で断定されれば、

仮定（K.7）の下での式（K.8）の誤認識確率 $P_{e,\gamma}(\varphi)$ でもって、

$$\begin{aligned}
&p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)=1\\
&\wedge[\forall i\in\gamma-\{j\}, p_\gamma(\mathfrak{C}_i/\varphi)=0]
\end{aligned} \tag{K.48}$$

となる

と考えられ、式（K.47）の示す不確定さは、

$$ETPY_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)\,\Big|_{\text{式 (1.49) が成り立っているとき}}=0 \tag{K.49}$$

に減少する。

その差

$$
\begin{aligned}
&[\mathrm{ETPY}_{\gamma}(\underline{\mathfrak{C}})-\mathrm{ETPY}_{\gamma}(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)]+\\
&[\mathrm{ETPY}_{\gamma}(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)-\mathrm{ETPY}_{\gamma}(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)\mid_{\text{式(1.49)が成り立っているとき}}]\\
&=[\mathrm{ETPY}_{\gamma}(\underline{\mathfrak{C}})-\mathrm{ETPY}_{\gamma}(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)]+[\mathrm{ETPY}_{\gamma}(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)-0]\\
&=\mathrm{ETPY}_{\gamma}(\underline{\mathfrak{C}})
\end{aligned}
\tag{K.50}
$$

は、最大事後確率認識方式を用いて、問題の入力パターン $\varphi\in\Phi_B$ を認識処理した場合の**認識システムが受け取る平均情報量**（average amount of received information）であるであると、考えられる。

式（K.47）の $\mathrm{ETPY}_{\gamma}(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)$ を $\sum_{\varphi\in\Phi_B}\mathrm{prob}_{\gamma}(\varphi)\cdot$ で平均化すれば、量

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{ETPY}_{\gamma}(\underline{\mathfrak{C}}/\Phi_B)\equiv\sum_{\varphi\in\Phi_B}\mathrm{prob}_{\gamma}(\varphi)\cdot\mathrm{ETPY}_{\gamma}(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)\\
&=-\sum_{\varphi\in\Phi_B}\sum_{j\in\gamma}\mathrm{prob}_{\gamma}(\varphi)\cdot p_{\gamma}(\mathfrak{C}_j/\varphi)\cdot\log_2 p_{\gamma}(\mathfrak{C}_j/\varphi)
\end{aligned}
\tag{K.51}
$$

が得られるが、2式（K.47），（K.51）の $\mathrm{ETPY}_{\gamma}(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)$，$\mathrm{ETPY}_{\gamma}(\underline{\mathfrak{C}}/\Phi_B)$ と2式（K.8），（K.11）の $P_{e,\gamma}(\varphi)$，$P_{e,\gamma}(\Phi_B)$ との間には、次の定理K. 5で示される関係がある。

エントロピー $\mathrm{ETPY}_{\gamma}(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)$，$\mathrm{ETPY}_{\gamma}(\underline{\mathfrak{C}}/\Phi_B)$ の半値による誤認識確率 $P_{e,\gamma}(\varphi)$，$P_{e,\gamma}(\Phi_B)$ の上限を求めるために、次の補助定理K. 3を用意する。

［補助定理K. 3］［45］

条件式（K.42）が満たされているとしよう。このとき、エントロピー

$$
\begin{aligned}
&H(a_1,a_2,\cdots,a_m)\\
&\equiv-\sum_{i=1}^{m}a_i\cdot\log_2 a_i
\end{aligned}
\tag{K.52}
$$

につき、不等式

$$
1-[\max_{i=1\sim m}a_i]\leqq 2^{-1}\cdot H(a_1,a_2,\cdots,a_m)
\tag{K.53}
$$

が成り立つ。 □

次の定理K. 5は、誤認識確率 $P_{e,\gamma}(\Phi_B)$ の上限を与えるものである。

［定理K. 5］**（エントロピー $\mathrm{ETPY}_{\gamma}(\underline{\mathfrak{C}}/\Phi_B)$ の半値による誤認識確率 $P_{e,\gamma}(\Phi_B)$ の上限定理）**

（i） $\forall\gamma\in 2^J,\ \forall\varphi\in\Phi_B$,

$P_{e,\gamma}(\varphi)\leqq 2^{-1}\cdot\mathrm{ETPY}_{\gamma}(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)$.

（ii） $\forall\gamma\in 2^J,\ P_{e,\gamma}(\Phi_B)\leqq 2^{-1}\cdot\mathrm{ETPY}_{\gamma}(\underline{\mathfrak{C}}/\Phi_B)$.

（証明） $a_i=p_{\gamma}(\mathfrak{C}_i/\varphi)$ とおいて、補助定理K. 3を適用すれば、不等式

$$
\begin{aligned}
&1-\max_{i\in\gamma}p_{\gamma}(\mathfrak{C}_i/\varphi)\\
&=P_{e,\gamma}(\varphi)\quad\because\ \text{式（1.09）}\\
&\leqq 2^{-1}\cdot\mathrm{ETPY}_{\gamma}(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)\quad\because\ \text{式（K.47）}
\end{aligned}
\tag{K.54}
$$

が得られ、（i）が示された。

（K.54）の両辺に、$\sum_{\varphi\in\Phi_B}\mathrm{prob}_{\gamma}(\varphi)\cdot\cdots$ を作用させれば、（ii）が得られる。 □

尚、次の2命題K. 1, K. 2に注意しておこう。

式（A.1）の全カテゴリ集合 $\mathfrak{C}$ の部分集合

$$
\underline{\mathfrak{C}}_{\gamma}\equiv\{\mathfrak{C}_j\mid j\in\gamma\}\subseteq\underline{\mathfrak{C}}
\tag{K.55}
$$

と、処理対象パターンの有限集合 $\Phi_B\subseteq\Phi$ との**相互情報量**（mutual information）

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{MI}(\underline{\mathfrak{C}}_{\gamma};\Phi_B)\\
&\equiv\sum_{j\in\gamma}\sum_{\varphi\in\Phi_B}p_{\gamma}(\mathfrak{C}_j,\varphi)\cdot\\
&\quad\log_2[p_{\gamma}(\mathfrak{C}_j,\varphi)/\{\mathrm{prob}_{\gamma}(\mathfrak{C}_j)\cdot\mathrm{prob}_{\gamma}(\varphi)\}]
\end{aligned}
\tag{K.56}
$$

を導入する。そうすると、次の命題K. 1が成り立つ。

［命題K. 1］**（各カテゴリ $\mathfrak{C}_j$ $(j\in\gamma)$ の事前生起確率 $\mathrm{prob}_{\gamma}(\mathfrak{C}_j)$ の表現）**

$$\forall j \in \gamma \subseteq J,\ \sum_{\varphi \in \Phi_B} \mathrm{prob}_\gamma(\varphi) \cdot p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)$$
$$= \mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j). \qquad \text{(K.57)}$$

（証明） $\sum_{\varphi \in \Phi_B} \mathrm{prob}_\gamma(\varphi) \cdot p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)$

$$= \sum_{\varphi \in \Phi_B} p_\gamma(\mathfrak{C}_j, \varphi) \qquad \because \text{ 式 (K.32)}$$
$$= \sum_{\varphi \in \Phi_B} \mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j) \cdot p_\gamma(\varphi/\mathfrak{C}_j) \qquad \because \text{ 式 (K.23)}$$
$$= \mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j) \cdot \sum_{\varphi \in \Phi_B} p_\gamma(\varphi/\mathfrak{C}_j)$$
$$= \mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j). \qquad \because \text{ 式 (K.16)} \qquad \Box$$

命題K. 1を適用して、次の命題K. 2が成り立つ。

［命題K. 2］（**相互情報量 MI($\underline{\mathfrak{C}}_\gamma$; Φ_B)の表現**）

$$\forall j \in \gamma \subseteq J,\ \forall \Phi_B \subseteq \Phi \in 2^J,\ \mathrm{MI}(\underline{\mathfrak{C}}_\gamma; \Phi_B)$$
$$= \sum_{\varphi \in \Phi_B} \mathrm{prob}_\gamma(\varphi) \cdot [\mathrm{ETPY}_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}) - \mathrm{ETPY}_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)]$$
$$(= \mathrm{ETPY}_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}) - \sum_{\varphi \in \Phi_B} \mathrm{prob}_\gamma(\varphi) \cdot \mathrm{ETPY}_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)). \qquad \text{(K.58)}$$

（証明）　$\sum_{\varphi \in \Phi_B} \mathrm{prob}_\gamma(\varphi) \cdot$式（K.50）の第1項

$$= \sum_{\varphi \in \Phi_B} \mathrm{prob}_\gamma(\varphi) \cdot [\mathrm{ETPY}_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}) - \mathrm{ETPY}_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi)] \qquad \text{(K.59)}$$
$$= \mathrm{ETPY}_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}) - \sum_{\varphi \in \Phi_B} \mathrm{prob}_\gamma(\varphi) \cdot \mathrm{ETPY}_\gamma(\underline{\mathfrak{C}}/\varphi) \qquad \because \text{ 式 (K.13)}$$
$$= \sum_{j \in \gamma} \sum_{\varphi \in \Phi_B} \mathrm{prob}_\gamma(\varphi) \cdot p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi) \cdot$$
$$\log_2 [p_\gamma(\mathfrak{C}_j/\varphi)/\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j)] \qquad \because \text{ 式 (K.57)} \qquad \text{(K.60)}$$
$$= \sum_{j \in \gamma} \sum_{\varphi \in \Phi_B} p_\gamma(\mathfrak{C}_j, \varphi) \cdot$$
$$\log_2 [p_\gamma(\mathfrak{C}_j, \varphi)/\{\mathrm{prob}_\gamma(\mathfrak{C}_j) \cdot \mathrm{prob}_\gamma(\varphi)\}] \qquad \because \text{ 式 (K.32)}$$
$$= \mathrm{MI}(\mathfrak{C}; \Phi_B) \qquad \because \text{ 式 (K.56)} \qquad \text{(K.61)}$$

を得るが、2式（K.61），（K.59）が求めるものである。 □

(鈴木昇一, 文教大学・情報学部・情報システム学科, “文教大学・情報学部・情報研究 no.20” 投稿論文, 論文題目 類似度関数を用いた確率的緩和法, 投稿年月日 1998年9月2日(水))