直交系によるパターンモデルの構成

鈴木　昇一

A Construction of the Corresponding Model of an Original Pattern by the Help of an Orthogonal System

Shoichi Suzuki

あらまし

直交系の助けで原パターンから抽出された知覚的に意味のある特徴を使ったパターンモデル化機構が提供されている。直交系による展開係数の絶対値の2乗の規格化値をパターンから抽出される特徴量の2乗として採用し、原パターンと同一の特徴量の組を持つパターンモデルを、雑音除去性かつ次元軽減的冗長度圧縮性、並びにユニタリ不変性が備わった形式で構成している。実ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ では、一般的な条件のもとで構成されたある種の2つのモデルが、ノルム規格化原パターンを絶対値1の実定数倍を除いて一意的に決定することも示される。

特徴抽出の場面におけるフェイズ不確定性をパターンの、2つのエントロピーで表示することもなされ、パターンモデルのユニタリ同値性が特徴抽出に関連して説明される。

このようなパターンモデルの構成に関する研究は、他では全くなされていない。本研究内容への理解を容易にするため、多数ある諸例のうち、特に、フーリェ変換の下で不変なパターンモデルが構成例として、掲げられている。

キーワード

測度的ユニタリ不変量　　パターンモデル　　ユニタリ不変性

平坦パワー性　　直交展開係数

Abstract

A new pattern-modelling mechanism is provided with a form of using a perceptually meaningful set of features extracted from a deformed pattern by the help of an orthogonal system.

We shall explain how an unitary invariant model is synthesized. The model obtained by this method has two properties of noise-and dimensionality-reduction and redundancy-compression, and is possessed of the same set of features that an original pattern has on condition that the absolute values of orthogonal expansion coefficients of the pattern to be modeled are adopted as features extracted from the patterns. Two models of the original pattern on a real Hilbert space enable us to bring a norm-normalized original pattern into a unique representation except for a real constant number whose absolute value is 1.

We shall make clear that a phase-uncertainty in the stage of feature-extraction is represented by a positivity of a sum of two entropies. An unitary equivalence between models is explained relating to the feature-extraction .

Researches for such an model have not found so far now so far as we knows . We now can construct a model picked out in many meaningful examples, which remains invariant under the Fourier transformation .This model allows us to understand a theoretical framework for a model-construction operator presented here.

Key words : metrically unitary invariants pattern-model model-construction operato
unitary invariance primitive shape-components flat-power property
orthogonal expansion coefficients

1. まえがき

処理の対象とする問題のパターンφの代りとなり、雑音除去性かつ次元軽減的冗長度圧縮性、並びに、ある種のユニタリ座標変換の下での不変性を備えたパターン（正規化パターン） Tφを確保するための**正規化技術**は、パターンからの特徴抽出技術、パターンの識別・類別技術と合わせて、パターン認識技術の確保に必要な3大技術の1つである [2], [45]。

平均化パターンを射影分解して得られる直交系を使ったこのようなパターンモデル Tφ はすでに提案され [3], [6], [33]、手書き漢字パターン、日本語単独母音の構造再生 [5], [10], [23]、認識 [9], [28]、連想 [8] に関し計算機シミュレーション済である。

本研究の主目的は、同様な目的に役立つ同様なパターンモデルTφを、**平坦パワー性 を持つ直交系**、例えば、正規直交系としてのK-L直交系 [2] ～ [4], [8], [9], [12], [30], [33], [36], [38] を用いて、付録Aに説明されているように、新たに確保することである。

重回帰分析 [43] を行い得られた線形回帰式をパターン とみなし、このパターンφを最終的に古典2値真理関数で近似することも提案されているが [14]、このとき途中で得られている“定義域、値域を拡張して得られる真理関数”が、特別の内積、特別の完全正規直交系を選定すれば、式（A20）で定義される本パターンモデルTφの定数倍と一致することがわかっている。

それのみならず、リー（Lie）座標変換をユニタリ化可能な内積を持つヒルベルト空間$\mathfrak{H}$で考えた場合、このリー座標変換を特別な場合として含むユニタリ座標変換の下で不変なパターンモデル Tφを構成できることを考慮すると、次の①, ②の研究とは、パターンモデルTφを用いた“付録Bでの5種類の認識法”をみてわかるように、本研究内容は異なっている：

①知覚の恒常性 [5], [33] を“ユニタリ化されていないリー座標変換群 [41], [42]”の下で不変な軌道と関連づける諸研究 [26], [27].

②リー座標変換群の固有ベクトル系によるパターン展開係数のフェイズ（phase）を捨て去ることの可能な標準座標系（文献 [7] の第25～28部を参照）への変換手段に基づいて、処理対象とするパターン内に存在する“リー座標変換群のもたらす線形な歪”を取り除くだけのパターン識別研究 [37]. □

本パターンモデル$T\varphi$は、パターンφから抽出される各特徴量$u(\varphi, k)$を直交展開係数に持つ直交展開式である。文献［33］のパターンモデル$T\varphi$とは異なるのは、$u(\varphi, k)$の定義、使われる直交系$\{\psi_k\}_{k\in L}$である。本$u(\varphi, k)$はφを直交直和分解して得られる各閉部分空間に存在する程度の平方根としている［2］～［13］，［15］，［24］，［28］，［33］。この存在する程度は各部分空間への射影成分のノルムの自乗としての、量子力学的観測確率［30］，［39］，［40］と形式的に一致している。この一致については、文献［3］の第2，3章、並びに文献［33］の付録2に解説がある。

その応用研究［2］～［16］，［18］，［21］～［24］，［28］，［33］があるこのようなパターンモデル構成技術は著者の研究を除いて、存在しない。これまでのパターンモデルと同様な諸性質を備えたパターンモデル$T\varphi$が提案されており、それ故、最大類似度法［28］、不動点探索形構造受精認識法［7］，［9］，［21］などの識別を含んだパターン認識法、パターン系列連想法［8］、ニューラルネット構成法（文献［7］の第16～23部を参照）［24］，［45］に対し、その適用が可能である。

尚、フェイズ情報限定可能定理［4］，［15］は、実ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$では成立するが、複素ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$では成立しないことが判明したので、第4章では、上記の②に関連し、実ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$でのフェイズ情報限定可能定理の不変的パターン認識［44］への応用として、本パターンモデル形式のパターン表現上の完全性が説明されている。

2. パターンモデル$T\varphi$の諸性質とその意味

パターンφに対応するパターンモデル$T\varphi$は付録Aの式（A20）で定義されているが、本章では、この$T\varphi$が雑音除去性、次元軽減的冗長度圧縮性、ユニタリ座標変換不変性を備えていることが指摘され、パターン情報処理におけるその役割が説明される。

2.1　自己共役作用素Hの表現

本論文では、処理の対象とする問題のパターンφの集合Φは内積(φ, η)が与えられた可分な（separable）なヒルベルト（Hilbert）空間$\mathfrak{H}$のある部分集合である。ここで、ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$が可分というのは、稠密な（dense）可算部分集合が$\mathfrak{H}$に存在することを指す［29］。φのノルム$\|\varphi\|$は$\|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)}$と定義される。理解のためには、例えば、内積$(\varphi, \eta)$が、

$(\varphi, \eta) = \int_M dm(x)\ \varphi(x) \cdot \overline{\eta}(x)$

ここに、$\overline{\eta}$はηの複素共役であり、

M：n次元ユークリッド空間R^nの可測部分集合

dm(x)：正値ルベーグ・スティルチェス（Lebesgue-Stieltjes）式測度　　(1)

と与えられる可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$を想定しておけばよい。

例えば、内積(φ, η)が、

$(\varphi, \eta) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k$

ここに、

$\varphi = \mathrm{col}(a_1\ a_2 \cdots a_n)$（実数列としての列ベクトル）

$\eta = \mathrm{col}(b_1\ b_2 \cdots b_n)$　　(2)

と表わされる可分な実ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$としてのn次元ユークリッド空間R^nは、M, dm(x)が、

$M \equiv \{1, 2, \cdots, n\}$, $dm(x) = 1$ if $x \in M$　　(3)

と選ばれた$L_2(M; dm)$である。

付録Aの式（A1）を満たす直交系$\{\psi_k\}_{k\in L}$を導入する。$\mathfrak{H}$での自己共役作用素 H を用意し、その表現を

$$H\varphi \equiv \sum_{k\in L} \lambda_k \cdot (\varphi, \psi_k \|\psi_k\|^{-1}) \cdot \psi_k \|\psi_k\|^{-1} \in \mathfrak{H}$$
$$\text{for any } \varphi \in \mathrm{Domain}(H) \qquad (4)$$

とする。ここに、Domain（H）は線形作用素 H の定義域であり、具体的には、**作用素解析の理論**［17］，［29］によれば、

$$\mathrm{Domin}(H) = \{\eta \in \mathfrak{H} \mid \sum_{k\in L} \lambda_k^2 \cdot |(\eta, \psi_k \|\psi_k\|^{-1})|^2 < \infty\} \qquad (5)$$

のことである［29］。但し、この点スペクトル型自己共役作用素 H は単純［29］であるとは限らないとし、実数列$\{\lambda_k\}_{k\in L}$について、

$$\exists k, \exists m (k \neq m) \in L, \ \lambda_k = \lambda_m \qquad (6)$$

を許しておくものとする。2式(A1)，(4) から、**固有値方程式**

$$H\psi_k = \lambda_k \cdot \psi_k \qquad (7)$$

が成り立っていることに注意しておく。

本論文では、空集合、虚数単位$\sqrt{-1}$、複素数 z の共役複素数、s は集合 S の元ではないことの表現として各々、ϕ, i, $\overline{z}$、$s \notin S$ を用いる。

2.2 平坦パワー性を持つ直交系

本論文で使用される直交系$\{\psi_k\}_{k\in L}$は付録Aの式（A14）でいう“**平坦パワー性**”を満たさなければならいが、任意の直交系$\{\eta_k\}_{k\in L}$は常にこの性質を備えたものに直せることを説明しておこう。

ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元η_kの組$\{\eta_k\}_{k\in L}$が直交系であるとしよう。

$$(\text{イ}) \ \psi_k \equiv \eta_k \cdot \|\eta_k\|^{-1} \qquad (8)$$

とおけば、$\{\psi_k\}_{k\in L}$は依然として直交系であり、然も、

$$\forall k \in L, \ \|\psi_k\|^2 = 1 \qquad (9)$$

となり、この$\{\psi_k\}_{k\in L}$は条件式 (A14) を満たす。

（ロ）正定数$C>0$に対し、

$$|c_k| \equiv \sqrt{C} \cdot \|\eta_k\|^{-1} \qquad (10)$$

と定義される複素定数c_kを考え、

$$\psi_k \equiv c_k \cdot \eta_k \qquad (11)$$

とおけば、$\{\psi_k\}_{k\in L}$は依然として直交系であり、然も、この$\{\psi_k\}_{k\in L}$は条件式（A14）を満たす。

尚、パターンφの直交展開式（A3）、並びに、その特別な直交展開としての式（A20）のパターンモデル$T\varphi$に関しては、**実数値直交系と複素数値直交系とを区別する必要はない**ことは、付録Cの定理C1で示されている。

2.3 パターンモデル Tφ の備えている6性質

本章以降、これ以上分解できないという意味で極小のパターンとしての基本的なパターン形状素［33］ψ_kの組$\{\psi_k\}_{k\in L}$については、直交関係式（A1）を仮定し、更に、式（A14）で示されている 平坦パワー性 を要請する。確率条件式（A17）を満たし、1より大きくない、式（A16）の非負量$p(\varphi, k)$を用いて、式（A18）のごとく、パターン$\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$から抽出される第$k\in L$番目の特徴量$u(\varphi, k)$は定義されるとしよう。このようにして、**特徴抽出写像**

$u：\Phi \times L \to R^+$（非負実数全体の集合） (12)

が導入され、式（A20）で定義される式（21）の写像Tが用意される。

さて、式（A16）のように定義される写像

$p：\Phi \times L \to R^+$ (13)

について、2条件式（A1），（A14）を満たす直交系$\{\psi_k\}_{k \in L}$と、任意の複素定数c_kの組$\{c_k\}_{k \in L}$に対し、

$$\forall k \in L, \ (\sum_{k \in L} c_k \cdot \psi_k, \psi_k) = c_k \cdot \| \psi_k \|^2 = c_k \cdot C \tag{14}$$

が成り立っているから、表現

$$\begin{cases} \forall k \in L, p(\sum_{k \in L} c_k \cdot \psi_k, k) = \\ \quad |c_k|^2 / [\sum_{k \in L} |c_k|^2] \cdots \exists k \in L, c_k \neq 0 \text{ のとき} \\ 0 \qquad\qquad \cdots \forall k \in L, c_k = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{15}$$

が得られる。従って、次節の定理1の（iii）が成り立つ根拠を与える次の不動点定理が成り立つ。

［補助定理1］（**不動点定理**）

条件式（A14）の下で、任意の実定数c_kの組$\{c_k\}_{k \in L}$を1次結合係数に持つ

$$\eta \equiv \sum_{k \in L} c_k \cdot \psi_k \in \mathfrak{H} \tag{16}$$

について、確率条件式

$$[\forall k \in L, \ 0 \leqq c_k] \wedge \sum_{k \in L} c_k^2 \in \{0, 1\} \tag{17}$$

が成り立っているならば、式（A20）のごとく定義される写像Tについて、**不動点方程式**

$$T\eta = \eta \tag{18}$$

が成り立つ。 □

実定数λ_kを第$k \in L$番目の固有値とする固有値方程式（7）を満たす自己共役作用素Hは、式（4）のごとく、スペクトル表現［17］，［29］されることに注意すれば、上の補助定理1などから次の定理1が証明される。その証明中に登場する式（23）からわかるように、式（A16）の$p(\varphi, k)$は、$f(\lambda)$を実変数λのボレル（Borel）可測関数［29］として、S.Suzukiが提案した、自己共役作用素Hの関数としての半正値自己共役作用素$f(H)$とパターンφの規定する**測度的ユニタリ不変量**（metrically unitary invariants）［3］，［11］，［12］

$$(f(H)\varphi, \varphi)$$

$$= \sum_{k \in L} f(\lambda_k) \cdot |(\varphi, \psi_k \| \psi_k \|^{-1})|^2 \geqq 0 \tag{19}$$

の特別なものであることに注意しておく。

［定理1］（**直交系によるモデル構成定理**）

式（A1）を満たす直交系$\{\psi_k\}_{k \in L}$について式（A14）が成立しているとしよう。3式（A16），（A18），（A20）で定義される写像Tについて、次の（i）～（vi）が成り立つ。

（i）（写像Tの、零元保存性）

例えば、$\varphi = 0$がそうであるように、$\forall k \in L, (\varphi, \psi_k) = 0$を満たすパターン$\varphi \in \Phi$に対しては、$T\varphi = 0$.

（ii）（写像Tの、正定数倍の吸収性）

正実定数aに対しては、

$$\forall \varphi \in \Phi, \ [\forall k \in L, \ u(a \cdot \varphi, k) = u(\varphi, k)] \wedge T(a \cdot \varphi) = T\varphi \in \Phi.$$

（iii）（特徴量の再現性（モデル変換不変性）と写像Tのベキ等性）

$$\forall \varphi \in \Phi, \ [\forall k \in L, \ u(T\varphi, k) = u(\varphi, k)] \wedge T(T\varphi) = T\varphi \in \Phi.$$

（iv）（写像Tの非零性）

$\exists\varphi\in\Phi$, $T\varphi\neq 0$.

(v)（写像Tのユニタリ不変性）

式(4)の自己共役作用素Hと可換な任意のユニタリ作用素Uに対し、

$$\forall\varphi\in\Phi,\ [\forall k\in L,\ u(U\varphi,k)=u(\varphi,k)]\wedge T(U\varphi)=T\varphi\in\Phi.$$

(vi)（各形状素ψ_kの不動点性）

$$u(\psi_k,\ell)=0 \text{ if } \ell\neq k, =1 \text{ if } \ell=k$$
$$\wedge[\forall k\in L, T\psi_k=\psi_k\in\Phi].$$

（証明）(i)，(ii) の成立は3式(A16)，(A18)，(A20) から明らかである。

(iii) は、2式 (A17)，(A18) を考慮すると、式 (15)、補助定理1から明らかである。

特に、$\varphi=\psi_k$については、式 (15) から、

$$p(\varphi,\ell)=0 \text{ if } \ell\neq k, =1 \text{ if } \ell=k$$

を得て、(iv)，(vi) の成立は明らかである。

最後に、(v)を証明しよう。

$$\forall k\in L,\ [\lambda_k\in S_k]\wedge[\forall\ell\in L-\{k\},\ \lambda_k\overline{\in}S_\ell] \tag{20}$$

を満たすボレル可測な集合S_kの系$\{S_k\}_{k\in L}$を用意し、実変数λのボレル可測関数$\theta_k(\lambda)$を、

$$\theta_k(\lambda)\equiv 1 \text{ if } \lambda\in S_k, \equiv 0 \text{ if } \lambda\overline{\in}S_k \tag{21}$$

と定義する。式 (4) での自己共役作用素Hは単純点スペクトル形 [29] としよう。そうでない場合も、$\{\psi_k\}_{k\in L}$は直交系であるから、以下とほぼ同様に証明される。Hの関数としての$\theta_k(H)$は、

$$\theta_k(H)\varphi=(\varphi,\ \psi_k\|\psi_k\|^{-1})\cdot\psi_k\|\psi_k\|^{-1}$$
$$\text{for any } \varphi\in\mathfrak{H} \tag{22}$$

と表される。$\theta_k(H)$は射影作用素であり、条件式 (A14) の下では、

$$\forall\varphi\in\mathfrak{H},\ \forall k\in L,\ \theta_k(H)\varphi=C^{-1}\cdot(\varphi,\psi_k)\cdot\psi_k$$
$$\therefore\quad(\theta_k(H)\varphi,\ \varphi)=C^{-1}\cdot|(\varphi,\ \psi_k)|^2$$

が得られ、式 (A16) の$p(\varphi,k)$に関し、

$$\forall k\in L,\ (\theta_k(H)\varphi,\ \varphi)/\sum_{k\in L}(\theta_k(H)\varphi,\varphi)$$
$$=p(\varphi,k) \tag{23}$$

の成立がわかる。

さて、Hと可換なユニタリ作用素Uは有界作用素θk(H) と可換であり [29]、Uの共役作用素U^*は逆作用素U^{-1}であるから、

$$\forall k\in L,\ (\theta_k(H)\ U\varphi,U\varphi)=(U^*\ \theta_k(H)\ U\varphi,\ \varphi)$$
$$=(U^{-1}U\ \theta_k(H)\ \varphi,\ \varphi)=(\theta_k(H)\ \varphi,\ \varphi)$$

を得、式(23)を考慮し、これを2式(A18)，(A20)に代入すれば、証明されたことがわかる。 □

次節で、上記の定理1の意味を説明する。

2.4 パターンモデル$T\varphi$の持つ6性質の意味

前節の定理1での (i)～(vi) の意味付けを論じておこう。

2.4.1 雑音除去性

パターン$\varphi\in\mathfrak{H}$の直交展開式 (A3) に注目する。先ず、定理1の (i) より、$\varphi=0$で雑音$\varphi_\perp$が皆無の時、雑音が全く混入しないモデル$T\varphi=0$が得られていることがわかる。この性質は無論、望

ましいことである。更に、雑音$\varphi_{\perp}$が除去されて、モデル$T\varphi$が得られることは、(i) より、

$$\varphi=\varphi_{\perp}\Rightarrow T\varphi=0 \tag{24}$$

が成立することより、わかる。以上は、

(一)(**雑音除去性**)

$$\forall\varphi\in\Phi, T(C^{-1}\cdot\sum_{k\in L}(\varphi,\ \psi_k)\cdot\psi_k+\varphi_{\perp})$$
$$=T(\sum_{k\in L}(\varphi,\ \psi_k)\cdot\psi_k)$$

に要約される。

2.4.2 線形スケーリングへの無影響性

次に、例えば、$a=\|\varphi\|>0$ の場合を考えればわかるように、正実定数 a について、原パターンφの線形スケーリング

$$\text{“}\varphi\rightarrow a\cdot\varphi\text{”} \tag{25}$$

の影響を受けていないモデル$T\varphi$が得られているというのが、定理1の (ii) の内容である。

2.4.3 多段階モデル化過程と次元軽減的冗長度圧縮性

原パターンφから$u(\varphi, k), k\in L$という特徴量の組を抽出し、φのモデル$T\varphi$を構成した後、得られた$T\varphi$から$u(T\varphi, k), k\in L$という特徴量の組を抽出し、$T\varphi$のモデル$T(T\varphi)$を構成しても、$T(T\varphi)=T\varphi$が成立するので、文献 [6] の第5章と同様な**多段階モデル化過程**

$$\varphi\rightarrow T\varphi\rightarrow T(T\varphi)\rightarrow T(T(T\varphi))\rightarrow\cdots \tag{26}$$

は1段で完結しており、モデル化のために$T\varphi$から再度特徴抽出する必要はないことを、定理1の (iii) は指摘している。この事実は、モデル$T\varphi$が原パターンφからの特徴抽出後の“**完結した正規化形**”であるという解釈を可能ならしめるものである。つまり、

(二)(**次元軽減的冗長度圧縮性**)

$$\forall k\in L, (\varphi,\ \psi_k)=0\Rightarrow\|\varphi\|=0\quad(\text{完全性}) \tag{27}$$

が必ずしも成立しなくてもよい直交系$\{\psi_k\}_{k\in L}$を使用し、然も、直交展開係数(φ, ψ_k)のphaseを捨て去った$|(\varphi,\ \psi_k)|$を使った展開係数$u(\varphi, k)$を持つ直交展開式として、パターンモデル$T\varphi$が式 (A20) のごとく、定義されている。それ故、定理1の (iii) が成り立つことが、モデル$T\varphi$に次元軽減的冗長度圧縮性が存在することを意味しているのである。

2.4.4 モデルであるための最小限必要な性質

$$\forall\varphi\in\Phi,\ T\varphi=0 \tag{28}$$

が成立することは、勿論、$T\varphi$がφのモデルという観点からは望ましくはないので、この式 (28) の否定を要請したのが、定理1の (iv) である。

2.4.5 ユニタリ座標変換の下で不変な処理

定理1の (v) について論じよう。

(三)(**ユニタリ座標変換不変性**)

式 (4) の自己共役作用素Hと可換なユニタリ座標変換Uによって、原パターンφが、

$$\varphi\rightarrow U\varphi \tag{29}$$

という座標変換を受けていても、その座標変換前後の2つのモデル$T\varphi$, $T(U\varphi)$は一致し、式 (A20) で定義される式 (A21) の写像TがHと可換な座標変換Uの作用を除去する効果を持っており、よって、観測された$U\varphi$からそのモデル$T(U\varphi)$を構成し、原パターンφの構造としてのモデル$T\varphi$を推定しているというのが、定理2の (v) の内容である。モデル$T\varphi$のこのユニタリ座標変換不変性は、$U\varphi$とφとに共通な情報のみを使用し、従って、Uによる座標変換前のパターン

φに含有されているフェイズ情報を捨て去ることにより、可能となったものである。

式（4）の自己共役作用素Hと可換な任意のユニタリ作用素Uの典型的な1例 $\exp(-itH)$ については、シュレリンガー方程式（D2）に関連して、付録Dで論じられている。この付録Dでは、座標変換が少なくとも、ユニタリ作用素でないと、座標変換不変的パターン認識［44］を達成するのに都合が悪いことが説明されている。

今1つ、式（4）の自己共役作用素Hと可換な重要なユニタリ作用素Uとして、行列を3重対角行列に変換するときに用いれられるハウスホルダー（House-holder）変換と呼ばれているものがある。

パターンφの、直交展開式(A3)での$\varphi_\perp$と、式(22)の射影作用素$\theta_k(H)$を用い、固定した、任意の1つの$\ell \in L$について、

$$
\begin{aligned}
U\varphi &\equiv [I-2\cdot\theta_\ell(H)]\,\varphi \\
&= \sum_{k(\neq \ell)\in L} (\varphi, \psi_k \|\psi_k\|^{-1})\cdot\psi_k\|\psi_k\|^{-1} \\
&\qquad -(\varphi, \psi_\ell\|\psi_\ell\|^{-1})\cdot\psi_\ell\|\psi_\ell\|^{-1}+\varphi_\perp
\end{aligned}
$$

ここに、Iは恒等作用素 (30)

と表現されるハウスホルダー変換Uは"軸$\psi_\ell\|\psi_\ell\|^{-1}$に直交している、原点を通る無限次元平面"を**鏡**と見立てた場合の、**鏡映変換**であり、3次元の点集合同士を回転させて一致させるときの回転行列としても使用されている［32］。

一般に、自己共役作用素Hと可換な有界作用素の全体をユニタリ作用素Uと可換な有界作用素の全体が部分集合として含めば、到る所その絶対値が1のBorel可測複素数値関数$g(\lambda)$が存在して、$U=g(H)$と表され［29］(Neumann-Riesz-Mimuraの定理)、このときのユニタリ作用素UはHと可換であるが、**Hと可換なユニタリ作用素Uはg(H)のごとく表されるとは限らない**ことに注意しておこう。このことは、付録Eのヒルベルト空間$\mathfrak{H}=L_2(M; dx_1dx_2)$における自己共役作用素

$$G_2 \equiv i^{-1}\cdot\partial/\partial x_2 \tag{31}$$

の、1実パラメータtの指数関数 $\exp(-itG_2)$ は式（D5）の自己共役作用素Hと可換なユニタリ作用素であることから、簡単に理解できよう。

尚、2付録B, Eにおいても、定理1の（v）について検討されている。

2.4.6 完全忠実的に再現される形状素ψ_k

最後に、定理1の（vi）は、各形状素ψ_kがパターン復元作用素としての写像Tの不動点として、誤差なく完全忠実的に再現されることを意味し、この事実は、各形状素ψ_kの形状が極小であるからして、要求されて当然のことであった。

3. ユニタリ同値なモデル

シュレリンガー方程式（D2）での自己共役作用素Hは、初期条件式（D1）のφに対するユニタリ座標変換Uによってユニタリ同値な自己共役作用素$U^{-1}HU$に変わること［40］が知られている。本章では、この事実に注目し、パターンφに対するユニタリ座標変換Uによって、式（A20）で定義される式（A21）のモデル形式Tがユニタリ同値な形$U^{-1}TU$に変わることを証明し、その後、Uとしてフーリェ変換を採用した1例を説明する。

3.1 パターンモデル Tφ のユニタリ座標変換

すべてのユニタリ作用素は1つの完全正規直交系を今1つの完全正規直交系に写す線形作用素によって定義されること［17］が知られている。言い換えれば、

$\mathfrak{H}$での直交座標系とは完全正規直交系のことであり、直交座標変換とはユニタリ作用素のことである。

上述に注意し、任意のユニタリ作用素 U を採り、固定したパターン $\varphi \in \mathrm{Domain(H)} \subset \Phi \subset \mathfrak{H}$ の、U による座標変換

$$\varphi \rightarrow \mathrm{U}\varphi \tag{32}$$

を想定しょう。

ならば、式（4）の自己共役作用素 H からの出力$\mathrm{H}\varphi \in \mathfrak{H}$も、

ある$\eta \in \mathfrak{H}$が存在して、

$$\mathrm{H}\varphi \rightarrow \mathrm{HU}\varphi \equiv \mathrm{U}\eta \quad \therefore\ \eta = \mathrm{U}^{-1}\mathrm{HU}\varphi \tag{33}$$

と変換され、H とユニタリ同値な自己共役作用素 $\mathrm{U}^{-1}\mathrm{HU}$ は、H の表現式（4）から、

$$\begin{aligned}\eta &= \mathrm{U}^{-1}\mathrm{HU}\varphi \\ &= \mathrm{U}^{-1}\cdot\sum_{k\in L}\lambda_k\cdot(\mathrm{U}\varphi,\ \psi_k\|\psi_k\|^{-1})\cdot\psi_k\|\psi_k\|^{-1} \\ &= \sum_{k\in L}\lambda_k\cdot(\varphi,\mathrm{U}^{-1}\psi_k\|\mathrm{U}^{-1}\psi_k\|^{-1})\cdot \\ &\quad \mathrm{U}^{-1}\psi_k\|\mathrm{U}^{-1}\psi_k\|^{-1}\end{aligned} \tag{34}$$

$$\because\ (\mathrm{U}\varphi,\ \psi_k) = (\varphi, \mathrm{U}^{-1}\psi_k) \wedge \|\mathrm{U}^{-1}\psi_k\| = \|\psi_k\| \tag{35}$$

と、スペクトル分解［29］されることになる。式（A14）の平坦パワー性を備えた直交系（直交座標系）$\{\psi_k\}_{k\in L}$の各元（各直交座標軸）ψ_kに、直交座標変換としてのユニタリ作用素 U^{-1}を、

$$\sigma_k \equiv \mathrm{U}^{-1}\psi_k \in \mathfrak{H},\ k \in L \tag{36}$$

と作用させて得られる$\{\sigma_k\}_{k\in L}$も同様に、平坦パワー性を備えた直交系であり、固有値方程式

$$\mathrm{U}^{-1}\mathrm{HU}\sigma_k = \lambda_k\sigma_k \qquad \because \text{式（7）} \tag{37}$$

が成立することからわかるように、$\mathrm{U}^{-1}\mathrm{HU}$ の固有ベクトル系である。

以上により、

$\{\psi_k\}_{k\in L}$による定義式（A20）の $\mathrm{T}\varphi \equiv \sum_{k\in L} u(\varphi;\psi_k)\cdot\psi_k$のモデル構成過程

“$\varphi \rightarrow \mathrm{T}\varphi$”に対し、

$\{\sigma_k\}_{k\in L}$によるモデル$\mathrm{T}'\varphi \equiv \sum_{k\in L} u(\varphi;\sigma_k)\cdot\sigma_k$のモデル構成過程“$\varphi \rightarrow \mathrm{T}'\varphi$”　(38)

が考えられてよい。

次の定理2は、次の事実を指摘している：

任意のユニタリ作用素 U について、写像 T と**ユニタリ同値**の関係にある写像 $\mathrm{U}^{-1}\mathrm{TU}$ は実は、T′である。このとき、パターンφが U によって直交座標変換されて得られるパターン Uφの、モデル構成写像 T によるモデル TUφは、原パターンφ の、T′ によるモデルT′φを U により座標変換して得られるUT′φに等しい。　□

この定理2によって、**ユニタリ作用素 U を変えることにより、固定した写像 T を基礎にして、固定したパターンφの多数のモデルが得られる**ことになった。

［定理2］**（ユニタリ同値モデル定理）**

式（A14）を満たす直交系$\{\psi_k\}_{k\in L}$に対し、任意に選ばれたユニタリ作用素 U を用い、式（36）で定義されて得られる$\{\sigma_k\}_{k\in L}$は、式（A14）と同様な等式を満たす直交系であり、2つの直交系$\{\psi_k\}_{k\in L}$, $\{\sigma_k\}_{k\in L}$による各々のモデル Tφ, T′φについて、

ユニタリ同値性

$$\forall\varphi\in \mathrm{Domain}(H),\ T'\varphi=U^{-1}TU\varphi \tag{39}$$

が成立し、同時に、

$$UT'\varphi=TU\varphi. \tag{40}$$

（証明）　式(35)の前半とσ_kの定義式(36)とから、

$$\forall\varphi\in \mathrm{Domain}(H),\ (U\varphi,\psi_k)=(\varphi,\sigma_k)$$
$$\text{for any } k\in L \tag{41}$$

が成立するから、直交系$\{\psi_k\}_{k\in L}$を使用しての、式(A18)の$u(\varphi;\psi_k)$に関し、

$$\forall\ \varphi\in \mathrm{Domain}(H),\ u(U\varphi;\psi_k)=u(\varphi;\sigma_k)$$
$$\text{for any } k\in L \tag{42}$$

の成立がわかり、よって、

$$\begin{aligned}U^{-1}TU\varphi&=U^{-1}\cdot\sum_{k\in L}u(U\varphi;\psi_k)\cdot\psi_k\\&=\sum_{k\in L}u(\varphi;\sigma_k)\cdot U^{-1}\psi_k\\&=T'\varphi\end{aligned} \tag{43}$$

を得て、証明された。　□

ユニタリ作用素Uが自己共役作用素Hと可換であれば、

$$U^{-1}HU=H \tag{44}$$

が成立するから、この場合の定理2は定理1の（v）に相当することに注意しておこう。

3.2　調和振動子とフーリェ変換

定理2と同様なユニタリ同値性は、文献［6］の4.4節でもそこでのパターンモデルに関し得られているが、理解を深めるためもあって、上述の定理2に関連して、フーリェ変換の下で不変なパターンモデル$T\varphi$を構成するために必要な基礎を、次の例1で与えておこう。

［例1］（**直交座標変換としてのフーリェ変換**）

$$\begin{aligned}&(H\varphi)(x_1,x_2)\\&\equiv 2^{-1}\cdot\sum_{j=1}^{2}\left[(i^{-1}\cdot\partial/\partial x_j)^2+x_j^2-1\right]\varphi(x_1,x_2)\end{aligned} \tag{45}$$

と定義される線形作用素Hは、$M=R^2$（2次元全平面）としてヒルベルト空間$\mathfrak{H}=L_2(M;dx_1dx_2)$では、自己共役作用素であり、量子力学では**2次元調和振動子**のエネルギー作用素［39］,［40］と事実上等価である。式（45）のHは、

$$\begin{aligned}&(H\varphi)(x1,x2)\\&=\sum_{k(1)=0}^{\infty}\sum_{k(2)=0}^{\infty}\lambda_{k(1)\ k(2)}\cdot(\varphi,\eta_{k(1)\ k(2)})\cdot\eta_{k(1)\ k(2)}(x_1,x_2)\end{aligned} \tag{46}$$

ここに、$k(1),k(2)=0,1,2,\cdots$として、

$$\lambda_{k(1)\ k(2)}\equiv k(1)+k(2) \tag{47}$$

$$\eta_{k(1)\ k(2)}(x_1,x_2)\equiv\eta_{k(1)}(x1)\cdot\eta_{k(2)}(x_2) \tag{48}$$

$$\eta_\ell(x)\equiv[2^\ell\cdot\ell!\cdot\sqrt{\pi}]^{-1/2}\cdot\exp(-x^2/2)\cdot Q_\ell(x) \tag{49}$$

$$Q_\ell(x)\equiv(-1)^\ell\cdot\exp(x^2)\cdot(d^\ell/dx^\ell)\exp(-x^2)$$
$$(\ell=0,1,2,\cdots) \tag{50}$$

とスペクトル表現される。

tを任意の実数として、

$$(\exp(-itH)\varphi)(x_1, x_2)$$
$$= \sum_{k(1)=0}^{\infty} \sum_{k(2)=0}^{\infty} \exp(-it\lambda_{k(1)\,k(2)}) \cdot (\varphi,\ \eta_{k(1)\,k(2)}) \cdot \eta_{k(1)\,k(2)}(x_1, x_2) \tag{51}$$

とスペクトル表現される作用素 $\exp(-itH)$ は、H と可換なユニタリ作用素であり、特に、

$$\begin{aligned}(\exp(-i(\pi/2)H)\varphi)(x_1, x_2)&\\ = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \exp(-iy_1x_1) \cdot&\\ (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dy_2 \exp(-iy_2x_2) \cdot&\\ \varphi(y_1, y_2)&\end{aligned} \tag{52}$$

と表されることが、式 (50) のエルミットの多項式 $Q_\ell(x)$ の性質から示され、**$t=\pi/2$ のとき、$\exp(-itH)$ は2次元フーリエ変換である** [17]。

2式 (A1), (A14) を満たす直交系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ として、

$$\psi_k(x_1, x_2) \equiv \eta_{k(1)\,k(2)}(x_1, x_2)$$
$$\text{ここに、} k = \langle k_1, k_2 \rangle \in L \tag{53}$$

を採用出来、この場合、式 (A20) のパターンモデル $T\varphi$ を考えることができる。

このようにして、定理1の (v) からわかるように、少なくとも、式 (52) のフーリエ変換に不変なパターンモデル $T\varphi$ が得られる。

更に、式 (45) の H とユニタリ同値な、式 (33) での1例としての自己共役作用素 $U_t^{-1}HU_t$ の具体的表現を求めておこう。

$$G_1 \equiv i^{-1} \cdot \partial/\partial x_1,\ K_1 \equiv x_1 \tag{54}$$

として、作用素 A, B の**交換子積**

$$[A, B] \equiv A \cdot B - B \cdot A \tag{55}$$

を用意すれば、3つの自己共役作用素 H, G_1, K_1 の間に、

$$[G_1, H] = 2^{-1} \cdot i^{-1} \cdot 2K_1 \tag{56}$$
$$[G_1, K_1] = i^{-1} \tag{57}$$
$$[H, K_1] = -2^{-1} \cdot 2i \cdot G_1 \tag{58}$$

の成立が確かめられ、リーの公式 [39]

$$\begin{aligned}&\exp(+A) \cdot B \cdot \exp(-A)\\ &= B + [A, B] + (2!)^{-1}[A, [A, B]]\\ &\qquad + (3!)^{-1}[A, [A, [A, B]]] + \cdots\end{aligned} \tag{59}$$

を使えば、

$$V_t \equiv \exp(-itG_1) \tag{60}$$

として、**H とユニタリ同値な $V_tHV_t^{-1}$ の表現**

$$V_tHV_t^{-1} = H + 2^{-1} \cdot t \cdot (t - 2K_1) \tag{61}$$

が成立する。任意の実数 t と任意の φ に対し、

$$(V_t\varphi)(x_1, x_2) = \varphi(x_1 - t, x_2) \tag{62}$$

が成立していることに注意する。

このとき、

$$[V_tHV_t^{-1}, H] = i^{-1} \cdot (\pi/2) \cdot t \cdot G_1 \tag{63}$$

を得て、

$$U_t \equiv V_t^{-1} = V_{-t} \tag{64}$$

と定義されるユニタリ作用素 Ut を導入すると、**自己共役作用素 H とユニタリ同値な自己共役作用素$U_t^{-1}HU_t$は H と非可換である。** □

尚、位置ずれ［3］,［13］,［23］、縮小拡大･回転［5］,［10］のもとで不変なパターンモデルも、自己共役作用素 H を各々、適切に選定すれば、同様に構成できる。

4. 完全な表象機能を持った2つのパターンモデル

本章では、先ず、実ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ では、パターン φ から抽出された特徴量としての不変量の集まりが φ を一意的に定めるというユニタリ座標変換不変的パターン認識における**特徴抽出の働きの完全性**［44］の存在を示す。その後、この完全な特徴抽出の働きを採用して得られる2つのパターンモデル $T_1\varphi, T_2\varphi$ が処理対象としての実数値パターン φ を定数倍を除いて一意的に表象できる事実を示そう。

4.1　2つの特徴抽出の働きの完全性

4.1.1　不完全な特徴抽出法

式（A20）のパターンモデル $T\varphi$ は、特定の直交系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ を採用したことからもたらされる**パターン情報システムの主観**の立場で、2式（A16），（A18）で示されているように、各直交展開係数（φ, ψ_k）のフェイズを捨て去るという **“不完全な特徴抽出法”** を使い、問題とするパターン φ の構造を明らかにしているといえよう。勿論、フェイズを捨て去るからこそ、定理1,（v）の如く、“付録Dで説明されているヒルベルト空間同士の位相同型写像であるユニタリ作用素”の下で不変なパターンモデル $T\varphi$ が構成され得たのである。そして、例えば、付録Bの式（B2）から、式（B4）が成り立つというユニタリ座標変換 U の下で不変なパターン認識の働きが得られるのである。

4.1.2　完全な特徴抽出の働きの構成

式（27）が成り立つという意味で、複素数値の正規直交系 $\{\psi_k'\}_{k\in L'}$ が複素ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}'$ で完全としよう。定理C1の（a）を適用して、実数値の正規直交系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ を求める。系C1により、$\{\psi_k\}_{k\in L}$ は $\mathfrak{H}'$ に対応する実ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ で完全である。例えば、$\mathfrak{H}'=L_2(M;dm)$ であれば、$\mathfrak{H}$ での内積 (φ, η) として、式（1）の内積 (φ, η) に対応して、

$$(\varphi, \eta)=\int_M dm(x)\,\varphi(x)\cdot\eta(x) \tag{65}$$

を採用すればよい。

無論、2.2節の（イ）からわかるように、$\{\psi_k\}_{k\in L}$ は式（A14）の平坦パワー性を満たしている。同様に、今1つの完全正規直交系 $\{\sigma_k\}_{k\in L}$ をも用意する。集合

$$K(n)\equiv\{k\in L \mid (\sigma_n, \psi_k)\neq 0\}\subset L \tag{66}$$

を導入し、集合 L の各元をすべて並べて、

$$L\equiv\{n(1), n(2), n(3), \cdots\} \tag{67}$$

と表現しておく。

正規直交系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ が完全であるから、

$$\forall\varphi\in\mathfrak{H},\ \|\varphi\|^2=\sum_{k\in L}|(\varphi, \psi_k)|^2 \tag{68}$$

が成り立っており、よって、式（A16）の $p(\varphi;\psi_k)$ は、式（A10）の形に、

$$p(\varphi;\psi_k)=\begin{cases}|(\varphi\|\varphi\|^{-1},\ \psi_k)|^2\cdots\|\varphi\|\neq 0\text{のとき}\\ 0\qquad\qquad\qquad\cdots\|\varphi\|=0\text{のとき}\end{cases}\tag{69}$$

と再表現されることに注意すれば、次の定理3は、フェイズ情報限定可能定理［15］において、そこで登場する $f(\lambda)$，$g(\lambda)$ を

$$\forall\lambda,\ f(\lambda)=g(\lambda)=1\tag{70}$$

とおいて得られる。

［定理3］（**完全な特徴量の集合の構成定理**）

可分な実ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ で考えよう。

完全的交差条件

$$\cup_{n\in L}K(n)=L\ \text{（完全性）}\tag{71}$$

$$\wedge[\forall j\in\{1,2,\cdots\},K(n(j))\cap K(n(j+1))\neq\phi\ \text{（交差性）}\tag{72}$$

の下で、

$$\forall k\in L,\ p(\varphi;\psi_k)=p(\eta;\psi_k)\wedge$$
$$p(\varphi;\sigma_k)=p(\eta;\sigma_k)\tag{73}$$

⇒その絶対値が1の実定数 c が存在して、

$$\varphi\|\varphi\|^{-1}=c\cdot\eta\|\eta\|^{-1}\tag{74}$$

が成り立つ。 □

2つの不完全な特徴抽出法が**完全**［15］になるためには、その間に、量子力学の不確定性原理［35］が成立するための十分条件（2つの特徴抽出法において登場する2つの自己共役作用素の非可換性）より詳細な諸条件が必要であり、上述の定理3は、この諸条件を明らかにしているのである。

2式（71），（72）で表されるこの完全的交差条件は、2つの特徴抽出の不確定性原理を指摘している付録Eの定理E1での2条件式（E2），（E3）より精密であることに注意しておかねばならない。完全的交差条件を課することは、集合 K（n）の定義式（66）を考えてみれば、パターン φ から抽出された式（A23）の特徴量の組 $\underline{u}(\varphi;\{\psi_k\}_{k\in L})$ が例えば、パターン φ の局所的性質を表現すれば、今1つの抽出された特徴量の組 $\underline{u}(\varphi;\{\sigma_k\}_{k\in L})$ の方は同じパターン φ の局所的でない性質を表現することになることが、了解できよう。

4.2 2つのモデル T1φ，T2φ による原パターン φ の一意的表象化

さて、上述の定理3を適用すると、次の定理4が成り立ち、$T_1\varphi$，$T_2\varphi$ が処理対象としてのパターン φ を定数倍を除いて一意的に表象できる2つのモデルであることがわかる。定理2で示されたように、1つのモデルとユニタリ同値なモデルが多数存在するが、線形作用素 U^{-1} を式（36）のごとく、定義すれば、この U^{-1} はユニタリ作用素であり、定理2の証明と同様にして、

$$T_2=U^{-1}T_1U\tag{75}$$

というユニタリ同値性が成立していることがわかる。

［定理4］（**2つのモデルによるパターン構造再生の完全性定理**）

定理3での $p(\cdot;\psi_k)$，$p(\cdot;\sigma_k)$ で式（A18）のごとく定義される $u(\cdot;\psi_k)$，$u(\cdot;\sigma_k)$ を使い、パターン $\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$ の2つのモデル

$$T_1\varphi\equiv\sum_{k\in N}u(\varphi;\psi_k)\cdot\psi_k\tag{76}$$

$$T_2\varphi\equiv\sum_{k\in N}u(\varphi;\sigma_k)\cdot\sigma_k\tag{77}$$

を構成したとする。このとき、

$$T_1\varphi=T_1\eta\wedge T_2\varphi=T_2\eta \qquad (78)$$

⇒その絶対値が1の実定数cが存在して、式（74）が成り立つ。

（証明）$\{\psi_k\}_{k\in L}$、或いは、$\{\sigma_k\}_{k\in L}$の直交性から、1次独立性が従うから、

$$\text{式}(78)\Rightarrow \forall k\in L, u(\varphi;\psi_k)=u(\eta;\psi_k) \wedge u(\varphi;\sigma_k)=u(\eta;\sigma_k)$$

を得る。この後、定理3を適用すればよい。 □

尚、上記の定理3での完全的交差条件は、文献［33］の定理4でも登場しており、グラム−シュミット（Gram-Schmidt）の直交化法［29］、平均類似度法［2］,［3］,［12］、摂動法［39］,［40］で容易に実現可能であり、2定理3, 4の具体例で、この3手法を適用し、興味深い2モデル $T_1\varphi$, $T_2\varphi$の自己組織化形成を論じることができるが、紙面の都合上割愛される。

5. むすび

文全体の意味はその諸部分の意味の関数であるという“合成性原理［1］”に対応して、

パターンφの構造（パターンモデル）$T\varphi$はその諸部分の

構造$u(\varphi, k)\cdot\psi_k$の関数（1次形式）である

とみなした。条件式（A14）の下で式（A20）のごとく定義された$T\varphi$はφを知識表現した結果としてのパターンであり、1種の合成性原理に基づき得られた**モジュール性に優れた表現**である、と考えられよう。

変形が許されない2つの事物（記号列）が同一物か相異なるものかの判断は、計算機による記号処理においては例えば、**最汎単一化置換**を見つけて容易であり、アルゴリズム的になされる［19］,［20］。ある程度の変形が許される2つのパターンφ, ηが類似しているか、相異なっているかの判断は、一方のパターンがユニタリ座標変換されている簡単な場合［32］でさえ、計算機では通常難しい［21］,［22］。似たパターン同士は、Tの構造形式からわかるように、似たパターンモデルを生じやすいので、本研究では、写像Tをあたかも、最汎単一化置換かのごとくみなせ、自己共役作用素Hと可換なユニタリ座標変換Uによって変形を受けた2つのパターンφ, $\eta=U\varphi$同士に共通なパターンモデル$T\varphi$が提案され、パターン照合に関するこの種の問題点は少なくとも解決された。

フェイズ情報限定可能定理［15］は複素ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$では成立しない。この誤りを訂正し、実ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$で適用された定理4に示されているように、2つのパターモデル$T_1\varphi$, $T_2\varphi$が、ノルム規格化原パターン$\varphi\cdot\|\varphi\|^{-1}$を**絶対値1の実定数倍を除いて、一意的に表象できるような“パターン2モデル構成法”**も存在することも示された。本パターンモデル形式のパターン表現上の、実ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$での完全性［44］が、不変量を抽出する特徴抽出の2つの働きで達成されたのである。

モデル$T\varphi$をどう利用するかは、$T\varphi$が確保された段階ではあらかじめ決まっていないので、状況に応じていろいろな使いわけが可能であるが［7］,［8］,［10］,［13］,［16］,［21］〜［23］,［24］,［28］、本論文を終えるにあたって、指摘しておきたいことは次の通りである。

（1）1つのパターンモデル$T\varphi$が原パターンφをどの程度再現するかの解析

(2) 部分空間法［25］を精密に構成し直すこと
(3) 文献［7］の第17～23部と同様な、無限次元ニューラルネット構成［8］,［21］,［24］への応用
(4) 記号列情報処理と同様に精密な推論技術［19］～［21］の確保に役立つように、ある程度の変形を許される情報としてのパターンというものを帰納的に定義すること［7］への応用

など、紙面の都合上割愛された内容が多いのが残念であるが、本写像Tは、付録Bの5種類の認識法の内、Vの不動点探索形構造受精認識法において用いれられて初めて、その真の効力が発揮されることを付記する。

謝辞　フェイズ情報限定可能定理［15］の、複素ヒルベルト空間での反例を指摘された文教大学情報学部助手佐久間拓也修士（理学）に感謝する。

文　　献

［1］東条敏：“自然言語処理入門”，p.82，近代科学社，1988
［2］鈴木昇一：“認識工学（上）”，柏書房，1975
［3］鈴木昇一：“測度的不変量検出形認識系の構成理論”信学論(D)，vol.55-D, no.8, pp.531-538, Aug.1972
［4］鈴木昇一：“測度的不変量検出形認識系に関する研究”，博士論文（工学院大学博乙第1号），Mar.1975
［5］鈴木昇一：“抽出された特徴による手書き漢字構造　の再生”，情報処理，vol.18, no.11, pp.1115-1122, Nov.1977
［6］鈴木昇一：“パターン認識における構造化モデルの4性質とその応用”，信学論（D），vol.J60-D, no.9, pp.710-717, Sept.1977
［7］鈴木昇一：“パターン認識の数学的理論”，信学技報［パターン認識と学習，パターン認識と理解］，PRL84-6（第Ⅰ部），PRL84-30, PRL84-38, PRL85-27, PRU86-8, PRU86-35, PRU86-69, PRU87-1, PRU87-28, PRU88-30, PRU89-1, PRU89-27, PRU89-40, PRU89-66, PRU89-77, PRU89-136, PRU90-5, PRU90-15, PRU90-29, PRU90-125, PRU91-1, PRU91-29, PRU91-42, PRU92-1, PRU92-18, PRU92-25, PRU92-89, PRU92-102（第28部），May 1984～Jan.1993
［8］鈴木昇一：“連想形記憶器MEMOTRONと日本語母音系列の再生に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学情報学部），vol.7, pp.14-29, Dec.1986
［9］鈴木昇一：“平均類似度を用いた構造受精法による日本語単独母音の認識”，信学会技報，PRL82-4, May.1982
［10］鈴木昇一：“回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学情報学部），vol.4, pp.36-56, Dec.1983
［11］鈴木昇一，奥野治雄：“パターン認識系の特徴抽出構造に関する解析”，信学会インホメーション理論研究会，IT68-9, May 1968
［12］鈴木昇一：“平均類似度の概念に基づく特徴抽出及び識別法（Φu（m）-核型第1種特徴抽出作用素の固有値問題）”，信学会インホーメーション理論研究会，IT71-10, Apr.1971
［13］鈴木昇一：“画像情報量とその手書き漢字への応用”，画像電子学会誌，vo.4, no.1, pp.4-12,

1975
[14] 月本洋："数値データからの論理命題の発見"，人工知能学会誌，vol.8, no.6, pp.752-759, Nov.1993
[15] 鈴木昇一："特徴量としての測度的ウニタリ不変量の完全な集合の一構成"，信学論（D），vol.J59-D, no.9, pp.678-680, Sept.1976
[16] 鈴木昇一，佐久間拓也："パターンモデルを用いた不動点探索形連想記憶システム方程式"，情報研究（文教大学・情報学部），vol.15, pp.97-128, Dec.1994
[17] スミルノフ："高等数学教程V巻第二分冊 12"，p.515, 一松信訳，共立出版，1966
[18] 鈴木昇一，柴山秀雄，福永一保，古田晋吾："認識の量子論と画像の微分エントロピー"，芝浦工業大学研究報告理工系編，vol.23, no.1, pp.117-125, Mar.1979
[19] 鈴木昇一，中村三郎："最汎アトムを用いない精密化方法によるprologプログラムの帰納的自動合成システムの、C言語による実現"，情報研究（文教大学情報学部），vol.10, pp.151-167.Dec.1989
[20] 中村三郎，田代達也，鈴木昇一："ソフトウェアをコンピュータに作らせる夢ー1つの提案「MIS」についてー"，コンピュータアクセス, pp.54-62, Jan.1990
[21] 鈴木昇一："半順序と情報処理"，情報研究（文教大学情報学部），vol.12, pp.121-174, Dec.1991
[22] 鈴木昇一："新しい情報の測度とパターン情報処理"，情報研究（文教大学情報学部），vol.13, pp.273-358, Dec.1992
[23] 鈴木昇一，斎藤静昭，奥野治雄，太田芳雄："画像の復元とその計算機シミュレーション"，工学院大学研究報告，vol.39, pp.198-206, Jan.1976
[24] 鈴木昇一："誤差確率分布を考慮した誤差逆伝播学習"，情報研究（文教大学情報学部），vol.13, pp.173-202, Dec,1992
[25] E.Oja, J.Parkkin, K.Selkainaho, T.Karki："Regularity measurement, classification, and segmentation of textures"，From Pixels to Features, Simon（ed.），pp.207-218, North-Holland, 1989
[26] William C.Hoffman："The Lie algebra of visual perception"，Journal of Mathematical Psychology, vol.3, pp.65-98, 1966
[27] William C.Hoffman："The Lie transformation group approach to visual neuropsychology"，E. L.J.Leeuwenberg and H.F.J.M.Buffart（ed.），Formal Theories of Visual Perception, pp.27-66, John Wiley & Sons.Ltd, 1978
[28] 鈴木昇一："帰属係数法に基づく類似度，帰属関係あいまい度，認識情報量の計算機シミュレーション"，情報研究（文教大学情報学部），vol.11, pp.51-68, Dec.1990
[29] 吉田耕作："近代解析（基礎数学講座20）"，pp.162-163，共立出版, 1963
[30] Ronald R.Coifman and Mladen Victor Wickerhauser："Entropy-based algorithms for best basis selection"，IEEE Trans.Inf.Theory, vol.38, no.2, pp.713-718, Mar.1992
[31] Martin E.Hellman, and Josef Raviv："Probability of error，equivocation，and the Chernoff bound"，IEEE Trans.Inf.Theory, vol.IT-16，no.4，pp.368-372, July 1970
[32] Kenichi Kanatani："Analysis of 3-D rotation fitting "，IEEE Trans.Pattern Anal. & Mach. Intell.，vol.16，no.5，pp.543-549, May 1994
[33] 鈴木昇一："パターンのエントロピーモデル"，信学論（D-Ⅱ），信学論（D-Ⅱ），vol.J77-D-

Ⅱ, no.11, pp.2220-2238（1994-11）
[34] M.ミンスキー，S.パパートD“パーセプトロン（パターン認識理論への道)”，斎藤正男訳，東京大学出版会, 1971
[35] 梅垣壽春：“情報数理の展開－関数解析的展開－”，サイエンス社, 1993
[36] Jeff B. Burl：“Estimating the basis functions of the Karhunen-Loéve transform”，IEEE Trans.Acoust., Speech & Signal Process., vol.37, no.1, pp.99-105, Jan.1989
[37] Jacob Rubinstein, Joseph Segman and Yehoshua Zeevi：“Recognition of distorted patterns by invariance kernels”，Pattern Recognition, vol.24, no.10, pp.959-967, 1991
[38] James B. Roseborough and Hiroshi Murase：“Partial eigenvalue decomposition for large image sets using run-length encoding”，Pattern Recognition, vol.28, no.3, pp.421-430, 1995
[39] Summer N. Levine：“エレクトロニクスのための量子物理”，p.26, 神山雅英・稲葉文男・宅間宏共訳, 1996
[40] 金沢秀夫：“量子力学（朝倉物理学講座13)”，p.40, Mar.1971
[41] A.Cohen：“リー群論の応用（コーエンの微分方程式)”，高野一夫訳, pp.8-15, pp.22-24, 森北出版, May1971
[42] 松島与三：“多様体入門（数学選書5)”，p.24, p.27, pp.72-73, p.173, p.178, pp.184-190, p.222, 裳華房, May 1966
[43] 鈴木昇一、前田英明：“パターンの変形理論”，情報研究（文教大学情報学部)，vol.16, pp.209-267, Dec, 1995
[44] Jeffrey Wood：“Invariant pattern recognition：A review”，Pattern Recognition, vol.29, no.1, pp.1-17, 1996
[45] 鈴木昇一：“マルチメディア情報処理のための一般化誤差逆伝播学習ニューラルネットの新数理”，近代文芸社, 1996
[46] 鈴木昇一：“知能情報ﾒﾃﾞｨｱ情報処理のためのカテゴリ帰属知識を用いたパターン認識問題の数理的一般解決”，近代文芸社, 1997
[47] 鈴木昇一：“カテゴリ帰属知識のポテンシャル論を含む認識知能情報論の新展開”，近代文芸社, 1998

注意：信学会とは電子通信学会、或いは、電子情報通信学会の略であり、信学論とは信学会の論文誌の略であり、信学技報とは信学会の技術研究報告の略である。また、情報処理とは情報処理学会の学会誌である。

付録A（本論文で提案するパターンモデル $T\varphi$）

本付録Aでは、閉部分空間への距離の自乗［25］に基づき、パターン $\varphi \in \mathfrak{H}$ のモデル $T\varphi$ の定義とその意味が簡単に説明される。

A1. パターン φ の直交展開

$$(\psi_k, \psi_m)$$
$$= 0 \text{ if } k \neq m, = \|\psi_k\|^2 > 0 \text{ if } k = m \tag{A1}$$

を満たす直交系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ によって、任意のパターン $\varphi \in \mathfrak{H}$ は、次のように直交展開される：

$$\forall k \in L, (\varphi_\perp, \psi_k) = 0 \tag{A2}$$

を満たすある $\varphi_\perp \in \mathfrak{H}$ が存在して、

$$\varphi = \sum_{k\in L} (\varphi, \psi_k \|\psi_k\|^{-1}) \cdot \psi_k \|\psi_k\|^{-1} + \varphi_\perp \tag{A3}$$

□

本論文では、

$$\varphi = 0 \text{ のとき } \varphi \|\varphi\|^{-1} = 0 \tag{A4}$$

と約束しておく。

A2. 閉部分空間 SB へのノルム距離 dis(φ, SB)

一般に、パターン $\varphi \in \mathfrak{H}$ が

$$\varphi = \varphi' + \varphi'', \text{ここに、} (\varphi', \varphi'') = 0$$
$$\therefore \quad \|\varphi\|^2 = \|\varphi'\|^2 + \|\varphi''\|^2 \tag{A5}$$

と直交直和分解されると、$\|\varphi''\|^2$ は φ から φ'' と直交する最大の閉部分空間（closed subspace）SB へのノルム距離 dis（φ, SB）の自乗を表している［30］：

$$\mathrm{dis}(\varphi, \mathrm{SB})^2 = \|\varphi''\|^2 = \|\varphi\|^2 - \|\varphi'\|^2 \tag{A6}$$

□

特に、SBとして、直交系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ で張られる閉部分空間［29］

$$\mathrm{SB}$$
$$\equiv \{\sum_{k\in L} a_k \cdot \psi_k \mid a_k \in Z\text{(複素数体)}\} \text{の閉包［29］} \tag{A7}$$

を選ぶと、3式（A2），（A3），（A6）から、

$$\mathrm{dis}(\varphi \|\varphi\|^{-1}, \mathrm{SB})$$
$$= [1 - \sum_{k\in L} |(\varphi \|\varphi\|^{-1}, \psi_k \|\psi_k\|^{-1})|^2]^{1/2}$$
$$\cdots\cdots \|\varphi\| \neq 0 \text{ のとき} \tag{A8}$$

と表される。式（A4）での約束から、

$$\|\varphi\| = 0 \text{ のとき、} \mathrm{dis}(\varphi \|\varphi\|^{-1}, \mathrm{SB}) = 0 \tag{A9}$$

が成り立つ。

式（A8）で登場している1より大きくない非負量

$$|(\varphi \|\varphi\|^{-1}, \psi_k \|\psi_k\|^{-1})|^2 \tag{A10}$$

は、文献［3］の第2, 3章にあるその簡単な解説からもわかるように、量子力学における確率論的物理解釈によれば［11］,［40］、パターン φ が ψ_k で張られる1次元閉部分空間

$$\langle\psi_k\rangle \equiv \{a \cdot \psi_k \mid a \in Z\text{(複素数体)}\} \text{の閉包} \tag{A11}$$

に含まれている確率であり、パターン φ が部分的に ψ_k の状態にあることの確率である [2], [30], [33]。

A3. 白色性パターン ψ

形式的に考えた $\psi \equiv \sum_{k \in L} \psi_k$ のエネルギー

$$E \equiv \| \psi \|^2 = \sum_{k \in L} \| \psi_k \|^2 \tag{A12}$$

は、添字集合 L が無限集合ならば、有限値とは限らなくて、$\psi \equiv \sum_{k \in L} \psi_k$ はヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の元とは限らないが、

$$\| \psi_k \|^2 = (\psi, \psi_k), k \in L \tag{A13}$$

を線エネルギー分布とみなそう。エネルギー分布が問題とする周波数範囲で一定であるような雑音を**白色雑音**というが、この概念にならうと、$\psi \equiv \sum_{k \in L} \psi_k$ 内の各直交成分 ψ_k が、同一の一定のエネルギー値 $C(>0)$ を持つという“白色性”は、

$$\forall k \in L,\ \| \psi_k \|^2 = C\,(k \in L \text{に無関係な定数}) > 0 \quad \text{(平坦パワー性)} \tag{A14}$$

と表される。特に、$C=1$ の場合、$\{\psi_k\}_{k \in L}$ は正規直交系と呼ばれている。

A4. パターン φ から抽出される各特徴量 $u(\varphi, k)$ を直交展開係数に持つパターンとしてのパターンモデル $T\varphi$

本論文では、常に式 (A14) を仮定する。また、処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ を想定する。Φ は、$0 \in \Phi$ を満たし、Φ のある部分集合である [7], [33]。

この条件式 (A14) の下では、式 (A7) の閉部分空間SB への、式 (A8) の $\mathrm{dis}(\varphi \| \varphi \|^{-1}, SB)$ の自乗は、直交展開式 (A2), (A3) での $\varphi_\perp$ を用いて、

$$\begin{aligned} &\mathrm{dis}(\varphi \| \varphi \|^{-1}, SB)^2 \\ &= 1 - \sum_{k \in L} (1/C) \cdot |(\varphi, \psi_k)|^2 \\ &\quad / \{(1/C) \cdot \sum_{k \in L} |(\varphi, \psi_k)|^2 + \| \varphi_\perp \|^2\} \end{aligned} \tag{A15}$$

と表される。この式 (A15) で登場した各成分

$$p(\varphi, k) \equiv p(\varphi; \psi_k) \equiv \begin{cases} |(\varphi, \psi_k)|^2 / [\sum_{k \in L} |(\varphi, \psi_k)|^2] & \cdots \exists k \in L,\ (\varphi, \psi_k) \neq 0 \text{のとき} \\ 0 & \cdots \forall k \in L,\ (\varphi, \psi_k) = 0 \text{のとき} \end{cases} \tag{A16}$$

は、確率条件式

$$[\forall k \in L, 0 \leqq p(\varphi, k) \leqq 1] \wedge \sum_{k \in L} p(\varphi, k) = \begin{cases} 1 & \cdots \exists k \in L, (\varphi, \psi_k) \neq 0 \text{のとき} \\ 0 & \cdots \forall k \in L, (\varphi, \psi_k) = 0 \text{のとき} \end{cases} \tag{A17}$$

を満たし、この各非負実数値成分 $p(\varphi, k)$ の正の平方根

$$u(\varphi, k) \equiv u(\varphi; \psi_k) \equiv \sqrt{p(\varphi, k)} \tag{A18}$$

を用いて、**白色性パターン**

$$\psi \equiv \sum_{k \in L} \psi_k \tag{A19}$$

を変調し、

$$T\varphi \equiv \sum_{k \in L} u(\varphi, k) \cdot \psi_k = \sum_{k \in L} u(\varphi; \psi_k) \cdot \psi_k \in \Phi \tag{A20}$$

と定義される写像

$T : \Phi \rightarrow \Phi$ (A21)

を導入しょう。ここに、式（A18）の $u(\varphi, k)$ は、

式（A11）でいう、ψ_k の張る1次元閉部分空間 $\langle \psi_k \rangle$ の内に、
原パターン $\varphi \in \Phi$ から冗長な成分 $\varphi_\perp \in \mathfrak{H}$ を取り除いて得られる
パターン $\varphi - \varphi_\perp \in \Phi$ がどの程度根含まれているか、その程度を
反映している非負量 $p(\varphi, k)$ (A22)

の正の平方根である。式（A18）で定義されるこの $u(\varphi, k)$ を、パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出される**第 $k \in L$ 番目の特徴量**として採用する。すると、

$$\underline{u}(\varphi) \equiv \underline{u}(\varphi; \{\psi_k\}_{k \in L}) \equiv \{\underline{u}(\varphi, k)\}_{k \in L} \tag{A23}$$

は、パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出される特徴量の組である。

式（27）が成り立つという意味で、直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ が完全であれば、パターン φ の直交展開式（A2），（A3）における $\varphi_\perp$ は、常に、$\varphi_\perp = 0$ であり、よって、この場合、3式（A15），（A16），（A18）の間に、

$$\mathrm{dis}(\varphi \| \varphi \|^{-1}, SB)^2$$
$$= 1 - \sum_{k \in L} p(\varphi, k) \tag{A24}$$
$$= 1 - \sum_{k \in L} u(\varphi, k)^2 \tag{A25}$$

が成立していることに注意しておこう。

式（A20）からわかるように、$T\varphi \in \Phi$ は各特徴量 $u(\varphi, k)$ を直交展開係数に持つパターンであり、原パターン $\varphi \in \Phi$ に対応するパターンモデル（φ の代りとなるパターン）と呼ばれる。

A5. 部分空間法でのパターンモデル $T\varphi$

式（A25）に、定理1,（iii）の前半を適用すると、

直交系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ が完全系の場合、等式

$$\mathrm{dis}(\varphi \| \varphi \|^{-1}, SB)^2 = \mathrm{dis}(T\varphi \| T\varphi \|^{-1}, SB)^2 \tag{A26}$$

が得られることに注意する。つまり、$T\varphi$ は、閉部分空間 SB から原パターン φ と等距離にあるあるパターンであり、

モデル $T\varphi$ を見たり聞いたりすると、原パターン φ のように見え聞こえ、
$T\varphi$ は、部分空間法［25］での、φ のパターンモデルである

と解釈ならしめる1つの根拠が、等式（A26）のごとく、成立している。

付録B（パターンモデル $T\varphi$ を用いた5種類の認識法）

本付録Bでは、式（A20）のパターンモデル $T\varphi$ を使って、処理の対象とするパターン $\varphi \in \Phi$ の帰属するカテゴリを決定する技術としての5種類の認識法が説明される。

先ず、式（A21）で定義される写像（モデル形式）$T : \Phi \rightarrow \Phi$ について、3性質

① $0 \in \Phi$

② $\forall \varphi \in \Phi, a \cdot \varphi \in \Phi$ for any positive real number a

③ $\forall \varphi \in \Phi, T\varphi \in \Phi$

を満たすようなパターン集合 Φ を想定しておく。このようなパターン集合 Φ の逐次決定法につい

ては、文献［7］，第ＸＸⅣ部を参照［33］。

入力パターンφの帰属すべきカテゴリ（類概念）を決定するという**認識の働き**としては、パターンφの代りとしてのパターンモデル$T\varphi$を使い、次の5種類Ⅰ～Ⅴが考えられる：

Ⅰ．最小特徴間距離による認識［3］，［4］，［11］，［12］，［28］

2つのパターン$\varphi, \eta \in \Phi$ 間の特徴間距離［3］，［6］

(Feature distance)

$$\mathrm{Fdis}(\varphi, \eta) \equiv \Big[\sum_{k \in L} w_k \cdot |u(\varphi, k) - u(\eta, k)|^2\Big]^{1/2}$$

ここに、$[\forall k \in L, 0 < w_k < 0] \wedge \sum_{k \in L} w_k < \infty$ (B1)

と、各カテゴリ$\mathfrak{C}_j$（第$j \in J$番目のカテゴリ）の代表パターンω_jのモデル$T\omega_j$とを用意して、1つのカテゴリ番号

$$j = \mathrm{argmin}_{k \in J}\, \mathrm{Fdis}(T\varphi, T\omega_k) \in J \qquad \text{(B2)}$$

を求め、

$$\varphi \text{ belongs to the j-th category } \mathfrak{C}_j \qquad \text{(B3)}$$

と、認識する。

尚、定理1の（v），(ii)，(iii) からわかるように、式（B1）の特徴間距離Fdisには、3性質

（i）式（4）の自己共役作用素Hと可換なユニタリ座標変換Uの下での不変性

$$\forall \varphi \in \Phi, \mathrm{Fdis}(U\varphi, \eta) = \mathrm{Fdis}(\varphi, \eta)$$

(ii) 正の定数倍不変性

$$\forall \varphi \in \Phi, \mathrm{Fdis}(a \cdot \varphi, \eta) = \mathrm{Fdis}(\varphi, \eta)$$

for any positive real number a

(iii) モデル構成作用素Tの下での不変性

$$\forall \varphi \in \Phi, \mathrm{Fdis}(T\varphi, \eta) = \mathrm{Fdis}(\varphi, \eta)$$

があり、表現式（B2）が成り立てば、次の3表現式（B4），（B5），（B6）が成り立つ。3表現式（B4），（B5），（B6）のいずれか1つが成り立てば、表現式（B2）が成り立つ：

$$U\varphi \text{ belongs to the j-th category } \mathfrak{C}_j \qquad \text{(B4)}$$

$$a \cdot \varphi \text{ belongs to the j-th category } \mathfrak{C}_j \qquad \text{(B5)}$$

$$T\varphi \text{ belongs to the j-th category } \mathfrak{C}_j \qquad \text{(B6)}$$

□

3式（B4）～（B6）で表される3**不変的認識**の働きは、以下のⅡ～Ⅴについても達成されている。

Ⅱ．木状類別器（tree-classifier）を構成したパーセプトロン法［34］による認識［5］，［24］

実数値の重みw_kの組$\{w_k\}_{k \in L}$を、誤り訂正学習で決定しておいて、空間パーセプトロンによる類別法［33］、つまり、

$$\sum_{k \in L} w_k \cdot [2 \cdot u(T\varphi, k) - 1] \geqq 0 \text{ or } < 0 \qquad \text{(B7)}$$

かどうかで、2分割することを、必要な回数だけ繰り返して、パターン$\varphi \in \Phi$を認識する。

Ⅲ．ニューラルネットの不動点への変換による認識［7］，［16］，［45］

各カテゴリ$\mathfrak{C}_j$（第$j \in J$番目のカテゴリ）の代表パターンω_jのモデル$T\omega_j$を不動点に持つニューラルネットを構成しておいて、処理の対象とするパターン$\varphi \in \Phi$を 偽吸引点（spurious attractors）ではない不動点、例えば、$T\omega_j$に収束させて、表現式（B3）のごとく、認識する。

Ⅳ. 最大類似度法による認識 [7], [22], [28]

各代表パターン ω_j の集合

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} \tag{B8}$$

を、文献 [7] の第21部, 付録1の適応的手法で決定しておく [33]。

3性質

（一）（直交性） $SM(\omega_i, \omega_j)$

$= 1$ if $i = j$, $= 0$ if $i \neq j$

（二）（確率性） $\forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} SM(\varphi, \omega_j) = 1$

（三）（T－不変性）

$\forall \varphi \in \Phi, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j)$

を満たす類似度関数

$$SM : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \tag{B9}$$

を構成する。例えば、簡単なものでは、

$$SM(\varphi, \omega_j) \equiv \| T\varphi - T\omega_j \|^{-2} / \sum_{i \in J} \| T\varphi - T\omega_i \|^{-2} \tag{B10}$$

がそうであり、この SM には、“類似度はノルム距離で評価されている相違性の反映物である”という好ましい性質

$$SM(\varphi, \omega_j) \geqq SM(\varphi, \omega_i) \Leftrightarrow \| T\varphi - T\omega_j \| \leqq \| T\varphi - T\omega_i \| \tag{B11}$$

がある。

このとき、1つのカテゴリ番号

$$j = \mathrm{argmin}_{k \in J}\, SM(T\varphi, \omega_k) \in J \tag{B12}$$

を求め、表現式（B3）のごとく、認識する。

Ⅴ. 不動点探索形構造受精認識法 [7], [9], [21]

各カテゴリ番号 $j \in J$ の集合 J のすべての部分集合のなす集合を 2^J と表そう。$\gamma \in 2^J$ を、パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属する可能性のあるカテゴリ番号のリストとして採用しながら、この γ を助変数に持つパターン変換作用素（構造受精作用素）

$$A(\gamma) : \Phi \rightarrow \Phi \tag{B13}$$

を用意し、パターンモデル $T\varphi$ を、

$$TA(\gamma)T\varphi = \eta \in \Phi \tag{B14}$$

というように、パターンモデル $T\eta$ へと変換することを考えよう。このとき、写像 T のベキ等性（2.3節, 定理1の（iii））より、不動点性

$$T\eta = \eta \tag{B15}$$

が成立しており、この構造受精変換段階で得られた式（B14）のパターン η は写像 T の不動点となっている。

このような $\gamma \in 2^J$ を、多段階認識過程における各多段階でその都度、適切に選び、式（B14）の構造受精変換を多段階的に何回か繰り返して行き、最終的にパターンモデルの帰属する可能性のあるカテゴリの番号を唯1つに、例えば、第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に絞ることによって、入力パターン $\varphi \in \Phi$ を、表現式（B3）のごとく、認識する。 □

付録C（実直交系、複素直交系間の等価変換）

以下の定理C1に示されるように、付録Aの直交展開式（A3）について、実数値直交系を用いた展開と、複素数値直交系を用いた展開との間に等価変換が存在し、実数値直交系と複素数値直交系とを区別する必要がないことがわかる。

先ず、次の（i），（ii），（iii），（iv）[43] に注意する。

（i）（複素数値元から実数値元への変換）

$\varphi_k{}^+$はヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の、実数値ではなくして複素数値の、パラメータ $k \in K$ に依存する元とする。$\mathfrak{H}$の元$\varphi_k{}^-$を、

$$\varphi_k{}^- \equiv \overline{\varphi_k{}^+} \tag{C1}$$

と定義した後、2元η_k, ψ_kを、

$$\eta_k \equiv (\sqrt{2})^{-1} \cdot [\varphi_k^+ + \varphi_k^-] \tag{C2}$$

$$\psi_k \equiv (\sqrt{2}\,\mathrm{i})^{-1} \cdot [\varphi_k^+ - \varphi_k^-] \tag{C3}$$

と定義する。2元η_k, ψ_kは共に、$\mathfrak{H}$の実数値元である。

（ii）（実数値元から複素数値元への変換）

逆に、2元η_k, ψ_kはヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の、実数値の、パラメータ$k \in K$に依存する元とする。$\mathfrak{H}$の元φ_k^+を、

$$\varphi_k^+ \equiv (\sqrt{2})^{-1} \cdot [\eta_k + \mathrm{i}\,\psi_k] \tag{C4}$$

と定義し、$\mathfrak{H}$の元φ_k^-を、

$$\varphi_k^- \equiv \overline{\varphi_k^+}$$

$$= (\sqrt{2})^{-1} \cdot [\eta_k - \mathrm{i}\,\psi_k] \tag{C5}$$

と定義しょう。2元φ_k^+, φ_k^-は共に、φの複素数値元である。

（iii）（実数値展開内の2つの項の和から成る部分系と複素数値展開内の2つの項の和から成る部分系との間の等価変換の存在）

φ_k^+が与えられ、φ_k^-, η_k, ψ_kが定義される（i）においても、逆に、η_k, ψ_kが与えられ、φ_k^+, φ_k^-が定義される(ii)においても、ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の任意の元φについて、

$$\forall k \in K,\ (\varphi, \eta_k) \cdot \eta_k + (\varphi, \psi_k) \cdot \psi_k$$

$$= (\varphi, \varphi_k^+) \cdot \varphi_k^+ + (\varphi, \varphi_k^-) \cdot \varphi_k^-. \tag{C6}$$

（iv）（実数値直交系内の2つの項の和から成る部分系と複素数値直交内の2つの項の和から成る部分系との間の等価変換の存在）

クロネッカー（Kronecker）のデルタ記号

$$\delta_{km} = 1 \text{ if } k = m, = 0 \text{ if } k \neq m \tag{C7}$$

を用意する。

（iv－1）φ_k^+が与えられ、φ_k^-, η_k, ψ_kが定義される（i）において、

$$(\varphi_k^+, \varphi_m^+) = (\varphi_k^-, \varphi_m^-) = \delta_{km}$$

$$\wedge (\varphi_k^+, \varphi_m^-) = (\varphi_k^-, \varphi_m^+) = 0 \tag{C8}$$

$$\Rightarrow (\eta_k, \eta_m) = (\psi_k, \psi_m) = \delta_{km} \wedge (\eta_k, \psi_m) = 0 \tag{C9}$$

がいえ、また、

（iv－2）η_k, ψ_kが与えられ、φ_k^+, φ_k^-が定義される（ii）において

式（C9）⇒式（C8）. □

次の定理C1、並びに、系C1は、(iii), (iv) から、直ちに証明される。

[定理C1] (**実・複素直交展開間変換に関する基本定理**) [43]

(a) φ_k^+が与えられ、φ_k^-, η_k, ψ_kが定義される上述の (i) において、式 (C8) が成り立っていれば、任意の$\varphi \in \mathfrak{H}$は、

$$\forall k \in K, (\varphi_\perp, \varphi_k^+) = (\varphi_\perp, \varphi_k^-) = 0 \tag{C10}$$

を満たす$\mathfrak{H}$の元$\varphi_\perp$が存在して、

$$\varphi = \sum_{k \in K} (\varphi, \varphi_k^+) \cdot \varphi_k^+ + \sum_{k \in K} (\varphi, \varphi_k^-) \cdot \varphi_k^- + \varphi_\perp \tag{C11}$$

と直交展開される。このとき、2式 (C6), (C9) が成り立つから、式 (C11) のφは、次のように、書き換えられる:

$$\forall k \in K, (\varphi_\perp, \eta_k) = (\varphi_\perp, \psi_k) = 0 \tag{C12}$$

を満たす$\mathfrak{H}$の元$\varphi_\perp$が存在して、

$$\varphi = \sum_{k \in K} (\varphi, \eta_k) \cdot \eta_k + \sum_{k \in K} (\varphi, \psi_k) \cdot \psi_k + \varphi_\perp \tag{C13}$$

と直交展開される。

(b) η_k, ψ_kが与えられ、φ_k^+, φ_k^-が定義される上述の (ii) において、式 (C9) が成り立っていれば、任意の$\varphi \in \mathfrak{H}$は、式 (C12) を満たす$\mathfrak{H}$の元$\varphi_\perp$が存在して、式 (C13) のごとく、直交展開される。このとき、2式 (C6), (C8) が成り立つから、式 (C13) のφは、次のように、書き換えられる:

任意の$\varphi \in \mathfrak{H}$は、式 (C10) を満たす$\mathfrak{H}$の元$\varphi_\perp$が存在して、式 (C11) のごとく、直交展開される。

[系C1]

実数値正規直交系$\{\eta_k\}_{k \in K} \cup \{\psi_k\}_{k \in K}$が完全⇔複素数値正規直交系$\{\varphi_k^+\}_{k \in K} \cup \{\varphi_k^-\}_{k \in K}$が完全.

□

付録D (シュレリンガー方程式の規定するユニタリ座標変換)

本付録Dでは、定理1の (v) につき、検討する。つまり、付録Aの条件式 (A14) の下で3式 (A16), (A18), (A20) で定義される本モデル$T\varphi$の、1つの**ユニタリ座標変換不変性**をもたらすユニタリ作用素の意味、並びに、典型的な1例$\exp(-i t H)$については検討する。

E1. 自己共役作用素 H の指数関数 exp (−i t H)

式 (7) の自己共役作用素 H と可換なユニタリ作用素の重要な1例を説明する。

t を任意の実数として、式 (7) の自己共役作用素 H の指数関数$\exp(-i t H)$は H と可換なユニタリ作用であり [17], [29]、

$$\text{初期条件}\ \varphi t \mid_{t=0} = \varphi \tag{D1}$$

を採用した場合の、量子力学系の時間的発展を記述する方程式は、シュレリンガー (**Schrödinger**) 方程式 [2], [6], [13], [39], [40]

$$i(\partial/\partial_t)\varphi_t = H\varphi_t \tag{D2}$$

であり、この方程式 (E2) の解 φ_t は、

$$\varphi_t = \exp(-i\,t\,H)\,\varphi \tag{D3}$$

であることが知られている。

例えば、a_j, b_j を有限な実数とし、M として、

$$M \equiv \{x = \langle x_1, x_2 \rangle \mid a_j \leqq x_j \leqq b_j,\ j = 1, 2\} \tag{D4}$$

と設定したヒルベルト空間 $L_2(M; dx_1dx_2)$ において、自己共役作用素 H として、

$$H\varphi = (i-1\cdot\partial/\partial x_1)\varphi + (i-1\cdot\partial/\partial x_2)\varphi$$

ここに、境界条件 $\varphi(a_1, a_2) = \varphi(b_1, b_2)$ (D5)

と定義される運動量作用素を選定している場合、解 φ_t は、

$$\varphi_t(x_1, x_2) = (\exp(-i\,t\,H)\,\varphi)(x_1, x_2)$$

$$= \varphi(x_1 - t, x_2 - t) \tag{D6}$$

と表わされ、$\varphi(x_1, x_2)$ を t だけ x_1, x_2 両軸に関し平行移動したものである。この場合の固有値方程式 (7) の解 ψ_k (固有ベクトル), λ_k (固有値) は各々、

$$\psi_k(x_1, x_2)$$

$$= \Pi_{j=1}{}^2\,[b_j - a_j]^{-1/2}\cdot\exp[i\,\mu_{k(j)}(x_j - a_j)] \tag{D7}$$

$$\lambda_k = \Sigma_{j=1}{}^2\,\mu_{k(j)} \tag{D8}$$

である。ここに、

$$k(j) \in \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\} \tag{D9}$$

として、

$$\mu_{k(j)} \equiv 2\,\pi\cdot k(j)/(b_j - a_j) \tag{D10}$$

$$k = \langle k(1), k(2) \rangle \tag{D11}$$

である。

E2. ヒルベルト空間同士の位相同型写像と、不完全な特徴抽出写像

量子力学 [39], [40]、並びに、**認識の量子論** [2] ～ [3], [6], [13], [18], [33] においては、シュレリンガー方程式 (D2) での線形作用素 H は自己共役作用素であることが前提とされている。それは、次の基本定理D1から来ている：

[**基本定理D1**] [29]

シュレリンガー方程式 (D2) の解である式 (D3) の φ_t
に登場している線形作用素 $\exp(-i\,t\,H)$ が任意の
実数 t に対し、ユニタリ作用素である
⇔ 線形作用素 H は自己共役作用素である. □

上述を一般化して、座標変換としてのユニタリ作用素について、考えてみよう。

リー座標変換をその特別の場合として含むパターンの座標変換 U は何故、ユニタリ作用素でなければならないか？　その理由は、次のように説明される：

U がユニタリ作用素である場合に限り、U は位相空間としてのヒルベルト空間同士の位相同型写像である。つまり、U がユニタリ作用素でなくて、唯単にその逆が存在する有界作用素 [29] の場合、$U\varphi$ と $U\eta$ との内積 $(U\varphi, U\eta)$ が (φ, η) と等しくなくて、U が位相空間としてのヒルベルト空間同士の位相同型写像を与えない。座標変換後のパターン $U\varphi$ は座標変換前のパターン φ と位相同型なヒルベルト空間に属さないからである [3]。

E3. 多パラメータのリー座標変換群

式（D6）に登場する平行移動の集まり$\{\exp(-itH)\}_{-\infty<t<+\infty}$は1パラメータ t の、ユニタリ作用素化されたリー座標変換群である。このとき、

$$
\begin{aligned}
A &\equiv (d/dt)\exp(-itH)\,|_{t=0} \\
&= -iH \\
&= -\partial/\partial x_1 - \partial/\partial x_2 \quad \because \text{式（D5）}
\end{aligned}
\tag{D12}
$$

と定義される線形作用素 A はこのリー座標変換群の無限小変換と呼ばれ、等式

$$\exp(-itH) = \exp(tA) \quad \text{for any real number } t \tag{D13}$$

が成り立っている。

多パラメータを備えているリー群の構造は単位元の近傍の性質によって決まってしまう。即ち、各t_jを無限小の実パラメータとして、単位の近傍の要素を

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{n} t_j \cdot A_j\right) \tag{D14}$$

と表すと、各無限小変換 Aj の相互関係

$$A_jA_k - A_kA_j = \sum_{\ell=1}^{n} c^{\ell}_{jk} \cdot A_{\ell} \tag{D15}$$

を満たす構造定数［30］c^{ℓ}_{jk}の組により、多パラメータのリー群の大局的構造以外のことは決まってしまうのである。本研究では、ひとまず、シュレリンガー方程式（D2）に転換可能なリー座標変換群を処理の対象とするので、多パラメータのリー群［41］，［42］は取り扱わない。

付録E（不確定性原理と2つの特徴抽出法）

粒子の位置、運動量の観測に関し、一方が確定すれば、他方が確定しないという量子力学上の不確定性に関し、その情報**微分エントロピー**［18］表示がフーリェ変換を使って与えられている［35］。本付録Eでは、文献［3］，［4］，［13］，［33］でのエントロピーと同様な**離散エントロピー** $\mathrm{ETPY}(\varphi;\{\psi_k\}_{k\in L})$ を定義し、同様なエントロピー表示が特徴抽出に関し、成立することを示そう。

$0\cdot\log_e 0=0$ と約束し、2式（A17），（A18）に注意すると、直交系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$の下で、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{ETPY}(\varphi;\{\psi_k\}_{k\in L}) \\
&\equiv -\sum_{k\in L} u(\varphi,;\psi_k)^2\cdot\log_e u(\varphi;\psi_k)^2
\end{aligned}
\tag{E1}
$$

と定義されるパターンφのエントロピーを考えることができる。

このとき、次の定理E1がなりたつ。2条件式（E2），（E3）は定理3の完全交差条件に関係していることに注意しておこう。

［定理E1］（**特徴抽出の場面におけるphase不確定性のエントロピー表示定理**）

2つの完全正規直交系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$, $\{\sigma_k\}_{k\in L}$ につき、

$$
\begin{aligned}
&\forall n\in N,\ \exists k(1),\ \exists k(2)\ (k(1)\neq k(2))\in L, \\
&\qquad (\sigma_n,\ \psi_{k(1)})\neq 0 \wedge (\sigma_n,\ \psi_{k(2)})\neq 0
\end{aligned}
\tag{E2}
$$

$$
\begin{aligned}
&\forall m\in N,\ \exists \ell(1),\ \exists \ell(2)\ (\ell(1)\neq \ell(2))\in L, \\
&\qquad (\sigma_{\ell(1)},\ \psi_m)\neq 0 \wedge (\sigma_{\ell(2)},\ \psi_m)\neq 0
\end{aligned}
\tag{E3}
$$

が共に満たされるとしょう。このとき、

$$
\begin{aligned}
&\forall \varphi\ (\neq 0)\in \mathfrak{H}, \\
&\mathrm{ETPY}(\varphi;\{\psi_k\}_{k\in L}) + \mathrm{ETPY}(\varphi;\{\sigma_k\}_{k\in L}) > 0
\end{aligned}
\tag{E4}
$$

が成り立つ。

（証明）

$$\mathrm{ETPY}(\varphi;\{\sigma_k\}_{k\in L})=0 \tag{E5}$$

であるとすれば、

$\{\sigma_k\}_{k\in L}$が完全正規直交系であり、$\varphi\neq0$であるから、式(A16)と同様な$p(\varphi;\sigma_k)$の定義を考えればわかるように、

$$\exists k\in L, p(\varphi;\sigma_k)=1 \wedge [\forall \ell\in L-\{k\}, p(\varphi;\sigma_\ell)=0] \tag{E6}$$

が成り立つ。これは、

$$\exists n\in L, (\varphi, \sigma_n)=1\wedge [\forall \ell\in L-\{n\}, (\varphi, \sigma_\ell)=0] \tag{E7}$$

と書き直され、完全正規直交系$\{\sigma_k\}_{k\in L}$によるφの直交展開から、パターンφの表現

$$\varphi=\sum_{k\in L}(\varphi, \sigma_k)\cdot\sigma_k=(\varphi, \sigma_n)\cdot\sigma_n \tag{E8}$$

が成立し、よって、完全正規直交系$\{\psi_k\}_{k\in L}$によるφの直交展開から、式(66)の集合$K(n)$を使い、

$$\begin{aligned}\varphi&=\sum_{k\in L}((\varphi, \sigma_n)\cdot\sigma_n, \psi_k)\cdot\psi_k\\&=(\varphi, \sigma_n)\cdot\sum_{k\in L}(\sigma_n, \psi_k)\cdot\psi_k\\&=(\varphi, \sigma_n)\cdot\sum_{k\in K(n)}(\sigma_n, \psi_k)\cdot\psi_k\end{aligned} \tag{E9}$$

が成立する。つまり、式（E2）より、$K(n)\neq\phi$がわかり、

$$(\varphi, \psi_k)=\begin{cases}(\varphi, \sigma_n)\cdot(\sigma_n, \psi_k)\neq0 & \cdots k\in K(n)\text{の場合}\\ 0 & \cdots k\overline{\in} K(n)\text{の場合}\end{cases} \tag{E10}$$

を得て、

式（E2）から、$(\varphi,\psi_k)\neq0$なる$k\in L$が少なくとも2つ以上存在し、よって、2式（A16），（A18）に注意すると、

$$\mathrm{ETPY}(\varphi;\{\psi_k\}_{k\in L})>0 \tag{E11}$$

であることがわかり、式（E4）が成立した。

式（E5）の代りに、

$$\mathrm{ETPY}(\varphi;\{\psi_k\}_{k\in L})=0 \tag{E12}$$

を仮定しても、同様に、式(E4)が成立することが示され、証明が完了したことがわかる。 □

上述の定理E1は、パターンφのphaseを捨て去って特徴抽出すれば、一方の特徴抽出の働きが局所的でない特徴を抽出すれば、他方の特徴抽出の働きが局所的特徴を抽出するという、2つの特徴抽出の働きの間の不確定原理を指摘していると思われる。

尚、従来の情報理論で知られているエントロピーの性質［31］を使って、式（E1）のETPY$(\varphi;\{\psi_k\}_{k\in L})$の評価を与えることができるが、紙面の都合上、割愛される。

（鈴木昇一，文教大学・情報学部・情報システム学科，“文教大学・情報学部・情報研究　no.21”投稿論文，論文題目　直交系によるパターンモデルの構成，投稿年月日　1999年1月6日（水））