

# 平均顔を用いた顔画像の2値化、並びに、目・鼻・口の抽出と、 その計算機シミュレーション

鈴木 昇一

## A Binarization of Face Image Using the Average Face and a Extraction of Eyes, Noses, and Mouths, and Its Computer Simulation

Shoichi Suzuki

あらまし

パターン認識の数学的理論 (SS理論) では、入力パターン  $\varphi$  に対応するパターンモデル  $T\varphi$  を求め、 $T\varphi$  から不動点パターンモデル  $T\omega_j$  を連想する形で、 $\varphi$  の帰属するカテゴリを決定する多段階パターン変換法が考えられている (不動点連想形認識)。本論文では、このようなSS理論での“axiom 1を満たすモデル構成作用素”  $T$  として、2種類の  $[T_1, T_2]$  が導入されている。2次元画像としての顔パターン  $\varphi \in \Phi$  の2値化方法として、axiom 1を満たす対  $[\Phi, T_1]$  に注目し、顔画像の2値化モデル  $T_1\varphi$  を求め、今1つの対  $[\Phi, T_2]$  からは、 $T_2\varphi$  が  $\varphi$  の目、鼻、口 (顔成分) を抽出可能なことを言語Cで書かれたプログラムの実行で確かめたものである。

$T_1, T_2$  の構造成分は5人の女性の平均顔画像を用いて非適応的に決定されたが、結果は大旨、良好である。然しながら、 $T_1, T_2$  の構造各成分を適応的に決定する必要性などが痛感させられ、引き続き研究しなければならないことになった。

### キーワード

パターン認識の数学的理論      モデル構成作用素      平均顔画像      2値化画像  
顔成分      不動点連想形認識

### Abstract

A multi-stage transformation of patterns has been presented in a mathematical theory (SS theory) of recognizing patterns suggested by S.Suzuki, which gets a corresponding pattern-model  $T\varphi$  of an input pattern  $\varphi$  in question to be recognized, solves a fixed-point equation of associative recognition about  $T\varphi$ , and determines a category to which  $\varphi$  belongs so that a recognition system RECOGNITRON may recall a

fixed-point pattern of a structural fertilization transformation. Two kinds  $T_1$  and  $T_2$  of model-construction operators which satisfy axiom 1 of SS theory are presented here. We select a set  $\Phi$  of patterns which contains 31 facial images of two dimensional. Two operators  $T_1$  and  $T_2$  are designed in order to obtain a binary pattern and to extract eyes, a nose and a mouth of  $\varphi$  respectively. We seek for  $T_1\varphi$  and  $T_2\varphi$  of  $\varphi \in \Phi$  by a computer program written with language C.

Constituent elements of  $T_1$  and  $T_2$  are nonadaptively determined by a use of mean facial image of 5 women. Generally  $T_1$  and  $T_2$  proved to serve the purpose. However in order to obtain the better performance it is necessary to adaptively determine constituent elements of  $T$  and so forth. We must study such a model-construction operator  $T$  in succession.

**Key words** : a mathematical theory of recognizing patterns    model-construction operator  
mean facial image    binarized image    components of facial image

associative recognition of fixed-point type

## 1. まえがき

無意識の内に心の状態が顔に出してしまう「心の窓としての顔」。顔にはコミュニケーション・メディアとしての機能がある。

1995年3月に「日本顔学会」が設立され、顔そのものを研究する気運が盛り上がっている [A5]。新しいテレビ電話を開発しようという意欲から始まった顔学（カオガク）、ないしは顔の情報学 [A5] は、人間の感情を計算機で処理するという**感性情報処理**を要求している。

例えば、計算機による顔の個人認識は、コンテンツによる映像データベースの検索・編集で代表される**メディア処理の要素技術**の1つである [A6]。

これまで、

- ワイヤフレームモデルによる表情合成 [A5]
- オプティカルフローによる表情筋の動きの検出 [A10]
- ポテンシャルネット, snakes (動的輪郭モデル) による表情認識 [A10], [A18]
- 離散コサイン変換 (DCT) による顔画像の分析 [A15]
- K-L正規直交系による固有顔を記憶する映像データベース [A16]
- ニューラルネットによる顔画像の処理 [A10], [A15]

などの諸研究がなされている。

**生物が生きてゆくために、先ず、口ができ、次に鼻、目、耳がこの順序にできたい。**

口を三日月形にし、目を細めることによって、笑い顔ができる [A5]。顔画像処理には、基本的には、

- (イ) 顔が、どの人であるかの個人認識
- (ロ) 顔の、多数のパラメータによる合成
- (ハ) 顔から、内面的な心理状態の推定

がある。

米国の心理学研究グループは、FACS (Facial Action Coding System) という“表情記述法”を開発し、人間の表情は44通りの基本動作で記述できるとしている [A5]。

証明書としての顔（個人同定のための顔）、感情を表すための顔、言語を使わないで情報を伝えるノンバーバルコミュニケーションとしての顔、（顔を隠す）日本文化を反映している顔などを取り扱うためには、情報学、心理学、人類学、医学、美学の様々な学問分野が必要である。

顔画像の処理として、

- (i) シーン画像から顔パターンを抽出する
- (ii) 顔画像から顔を構成する要素としての口、鼻、目、耳、眉などを抽出する
- (iii) 中立的な表情の顔画像から特定の表情（驚き、恐怖、嫌悪、怒り、幸福、悲しみ；  
Surprise, Fear, Disgust, Anger, Happiness, Sadness）の顔画像を生成する
- (iv) 正面顔から特定の方向から見た顔画像を生成する
- (v) その顔画像が特定の表情（驚き、恐怖、嫌悪、怒り、幸福、悲しみ）であると、認識する
- (vi) その顔画像が特定の人物であると、認識する
- (vii) 男顔、女顔の内どの1つであるかを、認識する
- (viii) 顔画像からその人物の年齢を推定する
- (ix) 各集団顔（例えば、日本人、米国人など）の特性を抽出し、その顔画像がどの集団顔に  
帰属するかを決定・認識する

が考えられる。

本論文は、2次元画像としての顔パターン $\varphi$ の2値化方法として、第2章のaxiom 1を満たす対 $[\Phi, T]$ に注目し、平均顔画像 $\xi$  [B7]を利用して閾値関数 $h_1$ を決めた後（式（3.8）を参照）、顔画像の2値化モデル $T\varphi$ を求め、その目、鼻、口を抽出する手法を提案し、その有効性を計算機シミュレーションで確かめたものである。

パターン認識の数学的理論（SS理論）[B1]～[B6]を計算機による顔画像処理に適用することを考えよう。

パターンモデル $T\varphi$ をみたら原パターン $\varphi$ と同じようにみえる（知覚される）

ためには、処理の対象とするパターン $\varphi$ の集合 $\Phi$ と、式（2.1）の写像 $T$ との対 $[\Phi, T]$ が付録1のaxiom 1を満たす必要がある、というのが、SS理論[B1]～[B4]の主張である。

パターン認識の数学的理論（SS理論）では、入力パターン $\varphi$ に対応するパターンモデル $T\varphi$ を求め、 $T\varphi$ から不動点パターンモデルを連想する形で、 $\varphi$ の帰属するカテゴリを決定する多段階パターン変換法が考えられている。

$T\varphi \in \{0, 1\}$ であるような2値化パターンとしてのパターンモデル $T\varphi$ には、 $\varphi$ の輪郭形状、構造などが明らかになっているという意味で価値がある。

axiom 1を満たす対 $[\Phi, T]$ の簡単な2例として、 $\Phi$ が付録1の式（2.2）のように与えられるとして、次のパターンモデル $T\varphi$ がある：

$$(一) (T\varphi)(x) = \begin{cases} \|\varphi\|^{-1} \cdot \varphi(x) & \text{if } \|\varphi\| > 0 \\ 0 & \text{if } \|\varphi\| = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

(二) 条件式（2.23）を満たす式（2.25）の $T\varphi$  □

顔画像を計算機処理する技術を確認する前段階として、上記の（二）の $T\varphi$ を求めることにより、顔画像 $\varphi$ を2値化する方法がSS理論（文献B）でのモデル構成作用素 $T$ を使って提案され（新規性）、その計算機シミュレーション結果が説明される（有効性）。

条件式（2.23）を満たす式（2.25）の $T\varphi$ はSS理論で初めて提案されたものである（新規性）。

顔画像から、目、鼻、口を抽出する方法が提案され（新規性）、その計算機シミュレーション結果も説明される（有効性）。

SS理論は、このようなパターンモデル  $T\varphi$  を恰も、原パターン  $\varphi$  と錯覚し、構造受精変換を多段階適用し、カテゴリ帰属知識の不動点知識を**連想形認識方程式**を解くことにより求めるという“不動点探索形構造受精多段階変換に基づく認識の働き”を提案しており、この種の認識の働きがありとあらゆるパターン認識の働きをシミュレートできることが証明されており、その1部のモデル構成作用素  $T$  に関する理論的成果の1側面を計算機シミュレーションしたものである（信頼性）。尚、これまでの諸研究 [B1] ~ [B27] に関連して、付録A~Iが設けられている。

## 2. 処理の対象とするパターン $\varphi$ の集合 $\Phi$ とモデル構成作用素 $T$ の対 $[\Phi, T]$

本章では、処理の対象とする問題のパターン  $\varphi$  の集合  $\Phi$  と、有界実数値パターン  $\varphi \in \Phi$  が入力されたとき、2関数値  $0, h_2$ 、或いは、2値  $0, 1$  の何れかをとりパターン  $T\varphi \in \Phi$  を出力するモデル構成作用素

$$T: \Phi \rightarrow \Phi \quad (2.1)$$

との対  $[\Phi, T]$  が、axiom 1を満たすように構成され、顔画像の2値化、並びに、その目、鼻、口を抽出する手法の基礎が説明される。

### 2.1 axiom 1を満たす対 $[\Phi, T]$ の構成

対  $[\Phi, T]$  が次のaxiom 1を満たすように構成されるとき、式 (2.1) の写像  $T$  はモデル構成作用素 (model-construction operator) と呼ばれる [B3], [B4] :

**Axiom 1** (パターン集合  $\Phi$  とモデル構成作用素  $T$  との対  $[\Phi, T]$  の満たすべき公理)

(i) (零元の  $T$ -不動点性; fixed-point property of zero element under mapping  $T$ )  $0 \in \Phi \wedge T0 = 0$ .

(ii) (錐性, 正定数倍吸収性; cone property)

$$\forall \varphi \in \Phi, a \cdot \varphi \in \Phi \wedge T(a \cdot \varphi) = T\varphi$$

for any positive real number  $a$ .

(iii) (ベキ等性, 埋込性; idempotency, embeddedness)

$$\forall \varphi \in \Phi, T\varphi \in \Phi \wedge T(T\varphi) = T\varphi.$$

(iv) (写像  $T$  の非零写像性; non-zero mapping property of  $T$ )  $\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0$ . □

上述のaxiom 1を満たす対  $[\Phi, T]$  の構成が可能であることは、次の定理2.1で指摘される。

[定理2.1] (モデル構成作用素  $T$  の基本構成定理)

写像  $T$  がaxiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半、並びに、(iv) を満たすとしよう。そして、パターンと判明しているパターン集合 (基本領域; basic domain)  $\Phi_B (\ni 0)$  が与えられたとしよう。ならば、処理の対象とする問題のパターン  $\varphi$  の集合  $\Phi$  を

$$\Phi = R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B)$$

$$\equiv \{r^{++} \varphi \mid \varphi \in \Phi_B, r^{++} \in R^{++}\}$$

$$\cup \{r^{++} T\varphi \mid \varphi \in \Phi_B, r^{++} \in R^{++}\}$$

where  $R^{++}$  is a set of positive real numbers

(2.2)

の如く設定すれば、

$$\Phi \supset \{0\} \wedge \mathbb{R}^{++} \cdot \Phi = \Phi \wedge [T \cdot \Phi = T \cdot \Phi_B \subset \Phi] \quad (2.3)$$

が成立し、axiom 1の (i), (ii), (iii) の3前半を  $\Phi$  は満たし、結局、対  $[\Phi, T]$  は axiom 1を満たす。□

SS理論 [B1] ~ [B6] では、パターン  $\varphi$  は可分な (separable) 一般抽象ヒルベルト空間 (Hilbert space)  $\mathfrak{H}$  の元とする。 $\varphi$  と  $\eta$  との内積は  $(\varphi, \eta)$  と表され、 $\varphi$  のノルムは  $\|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)}$  で表される。ここに、 $\mathfrak{H}$  が可分とは、稠密な (dense) 可算部分集合が  $\mathfrak{H}$  に存在することを指す。 $\varphi, \eta \in \mathfrak{H}$  間のノルム距離  $\|\varphi - \eta\| = \sqrt{(\varphi - \eta, \varphi - \eta)}$  に注意しておこう。

理解のためには、例えば、特別な場合として、内積  $(\varphi, \eta)$  を、

$$(\varphi, \eta) = \int_M dm(x) \varphi(x) \cdot \overline{\eta}(x) \quad (2.4)$$

ここに、 $\overline{\eta}$  は  $\eta$  の複素共役 (a complex conjugate of  $\eta$ ) であり、

$$M : q \text{ 次元ユークリッド空間 } \mathbb{R}^q \text{ の可測部分集合} \quad (2.5)$$

$$dm(x) : \text{ 正值 Lebesgue-Stieltjes 式測度} \quad (2.6)$$

$$x = \langle x_1, x_2, \dots, x_q \rangle \in M (\subseteq \mathbb{R}^q) \quad (2.7)$$

とする可分なヒルベルト空間  $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$  で考えておけばよい [B1]。

## 2.2 2関数値をとる一般的なモデル $T\varphi$ の構成

可分なヒルベルト空間  $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$  を選ぶ。

パターン  $\varphi = \varphi(x) (x \in M)$  を有界な実数値関数とし、 $\varphi \in \Phi(\supset \{0\}) \subset \mathfrak{H}$  とする。1変数  $u$  の2値関数 (positive-sign function)

$$\text{psn}(u) \equiv \begin{cases} 0 & \text{if } u < 0 \\ 1 & \text{if } u \geq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

を導入する。3性質

$$(一) \varphi = 0 \text{ のとき、} T'\varphi = \varphi$$

$$(二) \forall \varphi \in \Phi, T'(a \cdot \varphi) = T'\varphi \text{ for any positive real number } a$$

$$(三) (T\varphi \text{ の、} T' \text{ の吸収性}) \forall \varphi \in \Phi, T'(T\varphi) = T'\varphi$$

を満たす写像

$$T' : \Phi \rightarrow \Phi \quad (2.9)$$

を用いて、2つの有界な正実数値関数  $h_1, h_2$  を用意して、正值条件

$$\forall x \in M, 0 < h_1(x) \quad (2.10)$$

の下で

$$\begin{aligned} (T\varphi)(x) \\ \equiv \text{psn}((T'\varphi)(x) - h_1(x)) \cdot h_2(x) \end{aligned} \quad (2.11)$$

と定義される式 (2.1) の写像  $T$  を考えよう。このとき、次の定理 2.2 が成り立つ。

[定理 2.2] (0,  $h_2$  の何れかの関数値をとるパターンモデル  $T\varphi$  の構成定理)

2つの有界な正実数値関数  $h_1, h_2$  を用意して、上述の3性質 (一), (二), (三) を満たす式 (2.9) の写像  $T'$  が、条件

$$\exists \varphi \in \Phi, \exists x \in M, (T'\varphi)(x) \geq h_1(x) \quad (2.12)$$

を満たせば、式 (2.11) の写像  $T$  は axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半、並びに、(iv) を満たす。特に、

$$\forall x \in M, (T' h_2)(x) \geq h_1(x) \quad (2.13)$$

であれば、不等式 (2.12) が満たされる。

[定理2.2の系1] (対  $[\Phi, T]$  の構成定理)

式 (2.2) で定義されるパターン集合  $\Phi$  と本定理2.2の写像  $T$  との対  $[\Phi, T]$  は axiom 1 を満たす。

(定理2.2の証明)

axiom 1 の (i) の後半の成立:  $\varphi = 0$  とする。

$$\begin{aligned} (T\varphi)(x) &= \text{psn}((T'\varphi)(x) - h_1(x)) \cdot h_2(x) \\ &= \text{psn}(0 - h_1(x)) \cdot h_2(x) \quad \because \text{式 (2.11), (一)} \\ &= 0 \cdot h_2(x) \quad \because \text{2式 (2.8), (2.10)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

axiom 1 の (ii) の後半の成立:  $a$  を任意の正実数として、

$$\begin{aligned} (T(a\varphi))(x) &= \text{psn}((T'(a\varphi))(x) - h_1(x)) \cdot h_2(x) \\ &= \text{psn}((T'\varphi)(x) - h_1(x)) \cdot h_2(x) \quad \because \text{(二)} \\ &= (T\varphi)(x). \end{aligned}$$

axiom 1 の (iii) の後半の成立:

$$\begin{aligned} (T\varphi)(x) &= \text{psn}((T'(T\varphi))(x) - h_1(x)) \cdot h_2(x) \quad \because \text{式 (2.11)} \\ &= \text{psn}((T'\varphi)(x) - h_1(x)) \cdot h_2(x) \quad \because \text{(三)} \\ &= (T'\varphi)(x). \end{aligned}$$

axiom 1 の (iv) の成立:

条件 (2.12) を満たす  $\varphi \in \Phi$  をとれば、

$$\begin{aligned} \exists x \in M, \\ (T\varphi)(x) &= \text{psn}((T'\varphi)(x) - h_1(x)) \cdot h_2(x) \quad \because \text{式 (2.11)} \\ &= 1 \cdot h_2(x) \quad \because \text{式 (2.12)} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

(定理2.2の系1の証明)

定理2.2を定理A2.1に適用すれば、明らかである。 □

### 2.3 最大振幅 1 のパターン $S\varphi$ を用いた2値パターンモデル $T\varphi$

原パターン  $\varphi$  と正の実定数倍だけ異なるパターンモデル  $S\varphi$  を構成しよう。

可分なヒルベルト空間  $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$  の元の内、その振幅が有界な実数値パターン  $\varphi$  の集合  $\Phi$  を選ぶ。有界な実数値の原パターン  $\varphi \in \Phi$  に対し、

$$(S\varphi)(x) \equiv \begin{cases} 0 \cdots \forall x \in M, \varphi(x) = 0 \text{ のとき} \\ \varphi(x) / \sup_{x \in M} |\varphi(x)| \\ \cdots \exists x \in M, \varphi(x) \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (2.14)$$

と定義される写像

$$S : \Phi \rightarrow \Phi \quad (2.15)$$

を考えよう。次の定理2.3は、Tの代りに考えたSを用いて、axiom 1を満たす対  $[\Phi, S]$  を構成できることを指摘している。

[定理2.3] (1より大きくない振幅値をとるパターンモデル  $T\varphi$  の構成定理)

式 (2.14) で定義される式 (2.15) の写像Sについて、

$$\varphi \neq 0 \wedge [\forall x \in M, \varphi(x) \in \{0, 1\}] \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow S\varphi = \varphi \text{ (不動点方程式)} \quad (2.17)$$

が成立し、Tの代りにSを考えると、Sはaxiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半、並びに、(iv) を満たす。

特に、条件式 (2.16) の下で

$$\forall \varphi \in \Phi, \sup_{x \in M} |(S\varphi)(x)| \in \{0, 1\} \quad (2.18)$$

が成り立つ。

[定理2.3の系1] (対  $[\Phi, T]$  の構成定理)

式 (2.2) で定義されるパターン集合  $\Phi$  と本定理2.3の写像  $T(=S)$  との対  $[\Phi, T]$  はaxiom 1を満たす。

(定理2.3の証明) 先ず、

式 (2.16) の成立  $\Rightarrow$

$$\sup_{x \in M} |\varphi(x)| = 1 \Rightarrow \text{式 (2.17) の成立}$$

を得、axiom 1の (iv) も成立することがわかった。

axiom 1の (i) の後半の成立：

式 (2.15) の写像Sの定義式 (2.14) から明らかである。

axiom 1の (ii) の後半の成立：aを任意の正実数とする。

$$\varphi = 0 \Rightarrow a \cdot \varphi = 0$$

$$\Rightarrow S\varphi = 0 = S(a \cdot \varphi) \quad \therefore \text{式 (2.14)}$$

が知れ、

$$\varphi \neq 0 \Rightarrow$$

$$\forall x \in M, (S(a \cdot \varphi))(x) =$$

$$(a \cdot \varphi)(x) / \sup_{x \in M} |(a \cdot \varphi)(x)| \quad \therefore \text{式 (2.14)}$$

$$= [a / |a|] \cdot \varphi(x) / \sup_{x \in M} |\varphi(x)|$$

$$= \varphi(x) / \sup_{x \in M} |\varphi(x)|$$

$$= (S\varphi)(x) \quad \therefore \text{式 (2.14)}$$

が知れる。

axiom 1の (iii) の後半の成立：

$$\varphi = 0 \Rightarrow S\varphi = 0 \quad \therefore \text{式 (2.14)}$$

$$\Rightarrow S(S\varphi) = 0 \quad \therefore \text{式 (2.14)}$$

$$\Rightarrow (S\varphi) = S\varphi$$

が知れ、

$$\varphi \neq 0 \Rightarrow \sup_{x \in M} |(S\varphi)(x)| = 1$$

$$\Rightarrow \forall x \in M,$$

$$\begin{aligned}
& (S(S\varphi))(x) \\
&= (S\varphi)(x) / \sup_{x \in M} |(S\varphi)(x)| \quad \therefore \text{式 (2.14)} \\
&= (S\varphi)(x)
\end{aligned}$$

が知れる。 □

(定理2.3の系1の証明)

定理2.3を定理2.1に適用すれば、明らかである。 □

## 2.4 2関数値 $0, h_2$ をとるパターンモデル $T\varphi$

本節では、式 (2.1) の写像  $T$  の定義式 (2.11) 内に登場する式 (2.9) の写像  $T'$  として、式 (2.14) で定義される式 (2.15) の写像  $S$  を採用して、定理2.1を具体化しよう。

[定理2.4] (2関数値  $0, h_2$  をとるパターンモデル  $T\varphi$  の構成定理)

2つの有界な正実数値関数  $h_1, h_2$  が、不等式

$$\forall x \in M, 0 < h_1(x) \leq (Sh_2)(x) \leq +1 \quad (2.19)$$

を満たせば、 $T$  の定義式 (2.11) 内に登場する式 (2.9) の写像  $T'$  として、式 (2.14) で定義される式 (2.15) の写像  $S$  を採用でき、

$$\begin{aligned}
& (T\varphi)(x) \\
&= \text{psn}((S\varphi)(x) - h_1(x)) \cdot h_2(x) \quad (2.20)
\end{aligned}$$

と定義される式 (2.1) の写像  $T$  について、

式 (2.16) の成立

$$\Rightarrow T\varphi =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{if } x \in \{x \mid \varphi(x) = 0\} \\ h_2(x) & \text{if } x \in \{x \mid \varphi(x) = 1\} \end{cases} \quad (2.21)$$

が成り立ち、axiom 1の (i), (ii), (iii) 3後半、並びに、(iv) が満たされ、定理2.1が適用できる。

(定理2.4の証明) 先ず、式 (2.21) の成立については、

式 (2.16) の成立

$$\Rightarrow \text{式 (2.17) の成立} \quad \therefore \text{定理2.3}$$

$$\Rightarrow (T\varphi)(x)$$

$$= \text{psn}(\varphi(x) - h_1(x)) \cdot h_2(x) \quad \therefore \text{式 (2.20)}$$

$$\Rightarrow \text{式 (2.21)}. \quad \therefore \text{2式 (2.8), (2.19)}$$

を得、示された。同時に、axiom 1の (iv) が成立したことがわかる。

次に、式 (2.20) の写像  $T$  が axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半、並びに、(iv) を満たすことを示す。

axiom 1の (i) の後半の成立:

$$(イ) \varphi = 0$$

$$\Rightarrow S\varphi = 0 \quad \therefore \text{定理2.3}$$

$$\Rightarrow (T\varphi)(x)$$

$$= \text{psn}(0 - h_1(x)) \cdot h_2(x) \quad \therefore (2.20)$$

$$= 0. \quad \therefore \text{2式 (2.8), (2.19)}$$

axiom 1の (ii) の後半の成立:



$$\begin{aligned}
 (\text{ホ-5}) (T\eta)(x) = & \\
 \left\{ \begin{array}{l} h_2(x) > 0 \\ \quad \text{if } x \in \{x \mid (S\varphi)(x) \geq h_1(x) \wedge h_2(x)/\sup_{x \in M} h_2(x) \geq h_1(x)\} \\ 0 \\ \quad \text{if } x \in \{x \mid (S\varphi)(x) \geq h_1(x) \wedge h_2(x)/\sup_{x \in M} h_2(x) < h_1(x)\} \\ 0 \\ \quad \text{if } x \in \{x \mid (S\varphi)(x) < h_1(x)\} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

であることがわかる。

$$(\text{ホ-6}) \quad \forall x \in M, h_2(x)/\sup_{x \in M} h_2(x) \geq h_1(x) \quad (2.22)$$

が成立している。何故ならば、(ホ-2) を考慮すると、式 (2.15) の写像 S の定義式 (2.14) より、

$$(\text{ホ-7}) \quad \forall x \in M,$$

$$(Sh_2)(x) = h_2(x)/\sup_{x \in M} h_2(x)$$

$$\geq h_1(x) \quad \because \text{式 (2.19)}$$

であるからである。よって、(ホ-5) は、

$$(\text{ホ-8}) (T\eta)(x) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_2(x) > 0 \\ \quad \text{if } x \in \{x \mid (S\varphi)(x) \geq h_1(x)\} \\ 0 \\ \quad \text{if } x \in \{x \mid (S\varphi)(x) < h_1(x)\} \end{array} \right.$$

と書き直され、(ホ-3), (ホ-8) から、

$$(\text{ホ-9}) \quad \forall x \in M,$$

$$(T(T\varphi))(x) = (T\eta)(x) = (T\varphi)(x) = (T\varphi)(x)$$

を得、証明が終わった。 □

式 (2.15) の写像 S の定義式 (2.14) からわかるように、或いは、上述の定理2.4の証明中の(ホ-2) からわかるように、条件式 (2.19) を満たす関数  $\eta_2$  は正值関数でなければならない。適切に、正值関数  $\eta_2$  を選定し、上述の定理2.4を適用すると、有界な実数値の原パターン  $\varphi \in \Phi$  の振幅情報を  $0, \eta_2$  の2関数値のいずれかに変換し、例えば、振幅変化の大なる edge-情報 (の一部) を反映したパターンモデル  $T\varphi \in \Phi$  を得ることができる。

## 2.5 2値 0, 1 をとるパターンモデル $T\varphi$

上述の定理2.4を簡単化したのが、次の定理2.5である。

[定理2.5] (2値 0, 1 をとるパターンモデル  $T\varphi$  の構成定理)

有界な正実数値関数  $h_1$  が、式 (2.14) の如く定義される式 (2.15) の写像 S を含む不等式

$$\forall x \in M, 0 < h_1(x) \leq +1 \quad (2.23)$$

を満たせば、式 (2.1) の写像 T の定義式 (2.20) 内に登場する有界な正実数値関数  $h_2$  として、

$$\forall x \in M, h_2(x) = 1 \quad (2.24)$$

を採用でき、

$$(T\varphi)(x)$$

$$\equiv \text{psn}((S\varphi)(x) - h_1(x)) \quad (2.25)$$

と定義される式 (2.1) の写像 T について、

式 (2.16) の成立

$$\Rightarrow T\varphi = \varphi \quad (2.26)$$

が成り立ち、axiom 1 の (i), (ii), (iii) の3後半、並びに、(iv) が満たされ、定理2.1が適用

できる。

(定理2.5の証明)

式 (2.16) の成立

$$\Rightarrow S\varphi = \varphi \quad \because \text{式 (2.16), (2.17)}$$

$$\Rightarrow \forall x \in M,$$

$$T\varphi = \text{psn}(\varphi(x) - h_1(x)) \quad \because \text{式 (2.25)}$$

=

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ if } x \in |x| \mid \varphi(x) \geq h_1(x) \\ 0 \text{ if } x \in |x| \mid \varphi(x) < h_1(x) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ if } x \in |x| \mid \varphi(x) = 1 \geq h_1(x) \\ 0 \text{ if } x \in |x| \mid \varphi(x) = 0 < h_1(x) \end{array} \right\} \quad \because \text{不等式 (2.23)}$$

=

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ if } x \in |x| \mid \varphi(x) = 1 \geq h_1(x) \\ 0 \text{ if } x \in |x| \mid \varphi(x) = 0 < h_1(x) \end{array} \right\} \quad \because \text{不等式 (2.23)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ if } x \in |x| \mid \varphi(x) = 1 \geq h_1(x) \\ 0 \text{ if } x \in |x| \mid \varphi(x) = 0 < h_1(x) \end{array} \right\} \quad \because \text{不等式 (2.23)}$$

$$= \varphi(x)$$

を得、式 (2.26) の成立が示された。

式 (2.14) の如く定義される式 (2.15) の写像 S について、

$$Sh_2 = h_2 = 1 \quad (2.26)$$

が成立し、このとき、不等式 (2.19) が満たされ、定理2.4が適用され、本定理A2.5が成り立つことがわかる。□

(定理2.5の別証明) 式 (2.20) の写像 T が axiom 1 の (i), (ii), (iii) の3後半、並びに、(iv) を満たすことを示す。

axiom 1 の (i) の後半の成立:

$$\varphi = 0 \Rightarrow S\varphi = 0 \quad \because \text{式 (2.14)}$$

$$\Rightarrow \forall x \in M,$$

$$(T\varphi)(x) = \text{psn}(0 - h_1(x)) \quad \because \text{式 (2.25)}$$

$$= 0 \quad \because \text{式 (2.8), (2.23)}$$

$$= \varphi.$$

axiom 1 の (ii) の後半の成立:

a を任意の正実定数とする。

$$\varphi = 0 \Rightarrow T\varphi = 0 \quad \because \text{axiom 1 の (i) の後半}$$

$$\wedge a\varphi = 0 \quad \because \text{式 (2.25)}$$

$$\Rightarrow T\varphi = 0 = T(a\varphi) \quad \because \text{axiom 1 の (i) の後半}$$

であるし、

$$\varphi \neq 0 \Rightarrow S(a\varphi)(x) = S\varphi \quad \because \text{定理2.3}$$

$$\Rightarrow T(a\varphi)(x) = T\varphi \quad \because \text{式 (2.25)}$$

であることがわかる。

axiom 1 の (iii) の後半の成立:

$$\eta \equiv T\varphi \text{ とおく。先ず、} \eta = 0 \text{ のとき、} T\eta = 0 \quad (\because$$

$$\text{axiom 1 の (i) の後半}) \quad \therefore T(T\varphi) = T\eta = 0 = \eta = T\varphi$$

がいえ、よって、以後、 $\eta \neq 0$  とする。

$$\eta \neq 0 \wedge [\forall x \in M, \eta(x) \in \{0, 1\}] \quad \because \text{式 (2.25)}$$

であるから、

$$S\eta = \eta \quad \because \text{式 (2.17)}$$

が成り立つ。よって、

$$\forall x \in M,$$

$$T\eta = \text{psn}(\eta(x) - h_1(x)) \quad \because \text{式 (2.25)}$$

=

$$\begin{cases} 1 & \text{if } x \in \{x \mid \eta(x) - h_1(x)\} \\ 0 & \text{if } x \in \{x \mid \eta(x) - h_1(x)\} \end{cases}$$

=

$$\begin{cases} 1 & \text{if } x \in \{x \mid \eta(x) = 1 \geq h_1(x)\} \\ 0 & \text{if } x \in \{x \mid \eta(x) = 0 < h_1(x)\} \end{cases} \quad \because \text{不等式 (2.23)}$$

$$= \eta(x)$$

を得て、axiom 1の (iii) の後半の成立が示された。

axiom 1の (iv) 成立： 式 (2.26) より明らか。 □

上述の定理2.5は、有界実数値の原パターン  $\varphi \in \Phi$  の振幅情報を 0, 1 の2値のいずれかに変換し、例えば、振幅変化の大なるedge-情報 (の一部) を反映したパターンモデル  $T\varphi \in \Phi$  を得るのに役立つ。

### 3. 2種類のモデル構成作用素によるパターンの2値化と、目、鼻、口の抽出

処理の対象とする問題のパターン  $\varphi$  の集合  $\Phi$  と、有界実数値パターン  $\varphi \in \Phi$  が入力されたとき、パターンモデル  $T\varphi \in \Phi$  を出力する式 (2.1) のモデル構成作用素  $T$  との対  $[\Phi, T]$  は、axiom 1を満たすように構成されなければならない。パターン  $\varphi$  を2値化する機能を備えているモデル構成作用素  $T$  の存在は定理2.5で明らかにされている。また、パターン  $\varphi$  の部分を抽出する機能がある“2関数値  $0, h_2$  の何れかをとるパターンモデル構成作用素  $T$ ”の存在は定理2.4で明らかにされている。

本章では、顔画像  $\varphi_n$  の2値化モデルと、 $\varphi_n$  からその目、鼻、口を抽出するのに必要とされる“2種類の、axiom 1を満たす対  $[\Phi, T]$  での前半の、式 (2.1) のモデル構成作用素  $T$  を選定する方法”が、2定理2.5, 2.4を適用し、説明される。

#### 3.1 採用したヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$

各処理対象画像パターン (第  $n \in \{0, 1, 2, \dots, 30\}$  番目の顔画像)  $\varphi_n = \varphi_n(x, y)$  は、

内積  $(\varphi, \eta)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \varphi(x_1, x_2) \cdot \overline{\eta}(x_1, x_2) \quad (3.1)$$

$$\text{ノルム } \|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \quad (3.2)$$

$$\text{where } x_1 \equiv x, x_2 \equiv y \quad (3.3)$$

を採用する可分なヒルベルト空間  $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$  の元である。ここに、 $\overline{\eta}$  は  $\eta$  の複素共役であり、

$$M = \{x = \langle x_1, x_2 \rangle \mid -\infty < x_1, x_2 < +\infty\} \quad (3.4)$$

$$dm(x) = dx_1 dx_2, \text{ where } x = \langle x_1, x_2 \rangle \quad (3.5)$$

と設定されている。

計算機シミュレーションでは、内積  $(\varphi, \eta)$  の近似式として、

$$(\varphi, \eta) \doteq \sum_{x_1=-53}^{+53} \sum_{x_2=-39}^{+40} \varphi(x_1, x_2) \cdot \overline{\eta}(x_1, x_2) \quad (3.6)$$

$$\text{where } \Delta x_1=1, \Delta x_2=1 \quad (3.7)$$

が採用された。

### 3.2 顔画像の2値化モデル $T\varphi$ を得るためのモデル構成作用素 $T$

パターンを2値化する機能を備えているモデル構成作用素  $T$  の存在は定理2.5で明らかにされている。

第  $n \in (0, 1, 2, \dots, 30)$  番目の顔画像  $\varphi_n$  の2値化モデル  $T\varphi_n$  を求めるため、定理2.5を適用しよう。

式 (2.14) の写像  $S$  と、式 (3.9) の平均顔画像  $\xi$  とを用い、条件式 (2.23) を満たす定理2.5での関数  $h_1 = h_1(x, y)$  として、

$$h_1 = S\xi \quad (3.8)$$

と定義されるものを採用する。このようにして、定理2.5が適用され、式 (2.25) のモデル構成作用素  $T$  が選ばれ、顔画像  $\varphi_n$  の2値化モデル  $T\varphi_n$  が計算機シミュレーションで求められる。

ここに、 $\xi = \xi(x)$  は平均顔画像と称されるものであり、

$$\begin{aligned} \xi(x_1, x_2) &= \sum_{j \in J} p(\mathcal{C}_j) \cdot \omega_j(x_1, x_2) \cdot \|\omega_j\|^{-1} \quad (3.9) \\ \text{where } x = \langle x_1, x_2 \rangle = \langle x, y \rangle & \quad (3.10) \end{aligned}$$

のように定義される [B7]。

### 3.3 目、鼻、口を抽出するためのモデル構成作用素 $T$

顔画像  $\varphi_n = \varphi_n(x, y)$  からその眼、鼻、口を抽出するため、定理2.4を適用しよう。

式 (2.20) で定義されるモデル構成作用素  $T$  内の、条件式 (2.19) を満たす2つの関数  $h_1(x)$ ,  $h_2(x)$  は、式 (2.14) の写像  $S$  と、式 (3.9) の平均顔画像  $\xi$  とを用い、次のように選定された：

$$\begin{aligned} \textcircled{1} h_1(x) - \varepsilon_1(x) &= \\ \begin{cases} 0 & \text{if } h_2(x) = 0 \\ (S\xi)(x) & \text{if } h_2(x) \neq 0 \end{cases} \quad (3.11) \end{aligned}$$

ここに、定理2.4の条件式 (2.19) を考慮し、実数値関数  $\varepsilon_1(x)$  は、2性質

$$\begin{aligned} \text{(イ)} & \\ \forall x \in \{x \in M \mid h_2(x) = 0\}, 0 < \varepsilon_1(x) \leq (Sh_2)(x) & \quad (3.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ロ)} & \\ \forall x \in \{x \in M \mid h_2(x) \neq 0\}, (S\xi)(x) + \varepsilon_1(x) \leq (Sh_2)(x) & \quad (3.13) \end{aligned}$$

を満たすように選ばれる任意関数である。

$$\begin{aligned} \textcircled{2} h_2(x) - \varepsilon_2(x) &= \xi_{\text{name}}(x), \text{ name} \in \{\text{eye, nose, mouth}\} \quad (3.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{\text{eye}}(x) &= \text{背景濃淡値を } 0 \text{ とした } \xi(x) \text{ の目の画像関数} \quad (3.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{\text{nose}}(x) &= \text{背景濃淡値を } 0 \text{ とした } \xi(x) \text{ の鼻の画像関数} \quad (3.16) \end{aligned}$$

$$\xi_{\text{mouth}}(x) \equiv \text{背景濃淡値を } 0 \text{ とした } \xi(x) \text{ の口の画像関数} \quad (3.17)$$

ここに、実数値関数  $\varepsilon_2(x)$  は、定理2.4の条件式 (2.19) を考慮し、不等式

$$\forall x \in M, 0 < \varepsilon_2(x) + \xi_{\text{name}}(x) \quad (3.18)$$

を満たすように選ばれる任意関数である。

$$\forall x \in R^2, \varepsilon_1(x) = 0 \quad (3.19)$$

$$\forall x \in R^2, \varepsilon_2(x) = 0 \quad (3.20)$$

という極限下で、計算機シミュレーションが実施された。□

#### 4. 顔画像の作成と、特性の抽出に関する計算機シミュレーション1

本章では、デジタルカメラで撮影されたカラー原画像から、計算機処理の対象となるように、右手の座標系表示による入力画像を得る手法が説明され、その後、位置づれを矯正する作用素  $T$  を5枚の顔画像  $\varphi_1 \sim \varphi_5$  に作用させ、平均顔画像  $\xi$  を作り、5枚の顔画像  $\varphi_1 \sim \varphi_5$  よりも平均顔画像  $\xi$  の方が画像を特徴付ける5種類の量の絶対値が小さくなることを、計算機シミュレーションで明らかにする。

##### 4.1 入力顔画像の作成方法

液晶デジタルカメラ QV-10AC (CASIO製) で撮影された大きさ (画素数)  $320 \times 240$  のカラー顔画像 (原画像)

$$\varphi^0(x^0, y^0) \in \{0, 1, 2, \dots, 255\} \quad (x^0 = 0 \sim 319, y^0 = 0 \sim 239) \quad (4.1)$$

に対し、灰色の256 ( $=2^8$ ) 階調画像

$$\begin{aligned} \varphi'(x', y') &\equiv (1/3) \cdot [r(x', y') + g(x', y') + b(x', y')] \in \{0, 1, 2, \dots, 255\}, \\ x' &= 0 \sim 319, y' = 0 \sim 239 \end{aligned} \quad (4.2)$$

を作る。r, g, b は  $\varphi^0$  の赤、緑、青の成分値である。

その後、この灰色256階調画像  $\varphi'$  は、約1/9に圧縮された灰色画像 ( $\varphi'$  の約1/9圧縮画像)

$$\begin{aligned} \varphi''(x'', y'') &\equiv (1/9) \cdot \sum_{x' \in N(x'')} \sum_{y' \in N(y'')} \varphi'(x', y') \in \{0, 1, 2, \dots, 255\}, \\ x'' &= 0 \sim 106, y'' = 0 \sim 79 \end{aligned} \quad (4.3)$$

に変換される。ここに、 $N(x'')$ ,  $N(y'')$  は各々、 $x''$ ,  $y''$  の3近傍であり、

$$N(x'') \equiv \{x''-1, x'', x''+1\} \quad (4.4)$$

$$N(y'') \equiv \{y''-1, y'', y''+1\} \quad (4.5)$$

と定義される。

式 (4.3) の  $\varphi''$  においては、黒, 白が0, 255レベルになっているので、 $\varphi''$  の白黒を反転させて、それを反転させた灰色の画像

$$\begin{aligned} \varphi'''(x''', y''') &\equiv 255 - \varphi''(x'', y'') \in \{0, 1, 2, \dots, 255\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$= \begin{cases} 0 & \dots \text{白のとき} \\ 1 \sim 254 & \dots \text{灰色のとき} \\ 255 & \dots \text{黒のとき} \end{cases} \quad (4.7)$$

$$, x''' = 0 \sim 106, y''' = 0 \sim 79$$

を最終的に作る。

以上を簡単に要約すると、画像変換順序は次のようになる：

$$\begin{aligned} & \text{カメラ画像 (カラー原画像)} \\ & \varphi^0(x^0, y^0) \in \{0, 1, 2, \dots, 255\} \\ & , x^0 = 0 \sim 319, y^0 = 0 \sim 239 \\ & \rightarrow \text{灰色256階調画像 } \varphi'(x', y') \in \{0, 1, 2, \dots, 255\} \\ & , x' = 0 \sim 319, y' = 0 \sim 239 \\ & \rightarrow \text{灰色画像 } (\varphi' \text{の約} 1/9 \text{圧縮画像}) \varphi''(x'', y'') \in \{0, 1, 2, \dots, 255\} \\ & , x'' = 0 \sim 106, y'' = 0 \sim 79 \\ & \rightarrow \text{灰色反転画像 } \varphi'''(x''', y''') \\ & \equiv 255 - \varphi''(x'', y'') \in \{0, 1, 2, \dots, 255\} \\ & , x''' = 0 \sim 106, y''' = 0 \sim 79 \end{aligned} \quad (4.8)$$

## 4.2 30枚の入力顔画像

整数値

$$x''' = 0 \sim 106, y''' = 0 \sim 79 \quad (4.9)$$

をとる直交座標系  $\langle x''', y''' \rangle$  を、整数値

$$x = -53 \sim +53, y = -39 \sim +40 \quad (4.10)$$

をとる右手の直交座標系  $\langle x, y \rangle$  に変換するため、

$$x \equiv x''' - 53 \in \{-53, -52, \dots, -1, 0, +1, \dots, -52, +53\}$$

$$y \equiv 40 - y''' \in \{-39, -38, \dots, -1, 0, +1, \dots, +39, +40\}$$

と1次変換し、得られた式 (4.7) の形式を備えた30枚の顔画像

$$\varphi_n(x, y) \in \{0, 1, 2, \dots, 255\}$$

$$x = x''' - 53 \in \{-53, -52, \dots, -1, 0, +1, \dots, +52, +53\}$$

$$y = 40 - y''' \in \{-39, -38, \dots, -1, 0, +1, \dots, +39, +40\}$$

$$(x''' = 0 \sim 106, y''' = 0 \sim 79) \quad (4.11)$$

が、第  $n$  ( $= 1 \sim 30$ ) 番目の処理の対象とするパターン (顔画像) である。得られた30枚の顔画像  $\varphi_1 \sim \varphi_{30}$  に図1～5に示されている。



図1 6枚の顔画像  $\varphi_1 \sim \varphi_6$  と、その2値化画像 (パターンモデル)  $T\varphi_1 \sim T\varphi_6$

Fig.1 Six facial images  $\varphi_1 \sim \varphi_6$  and the corresponding binarized images (the pattern-models)  $T\varphi_1 \sim T\varphi_6$

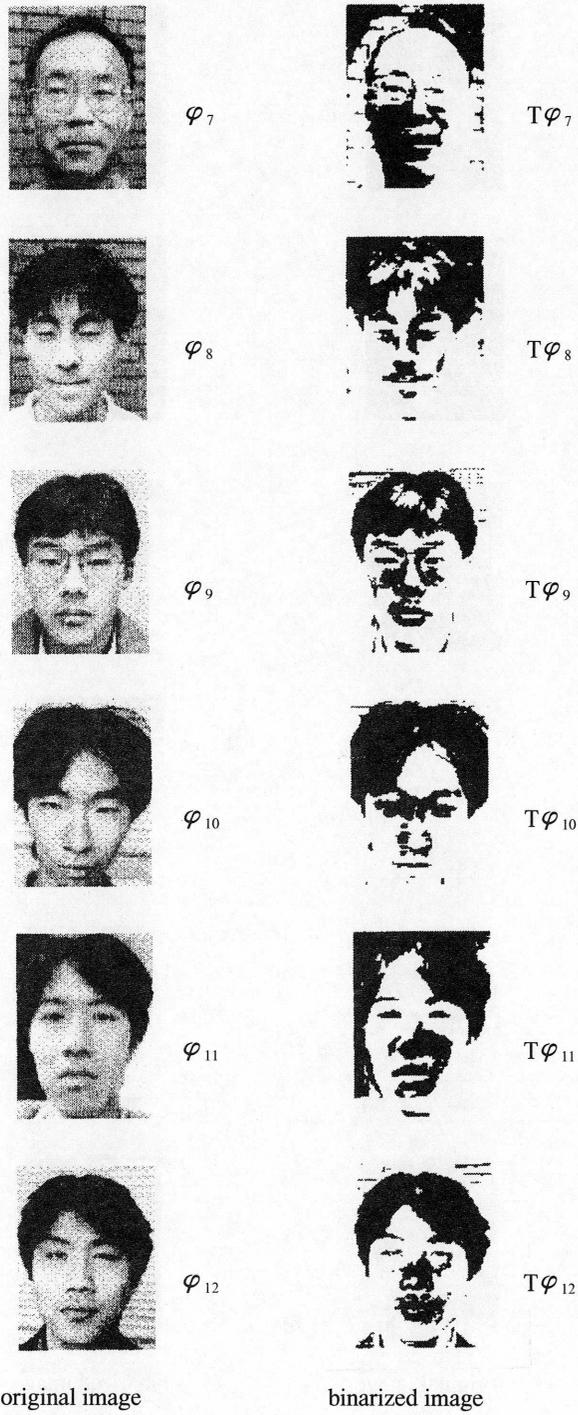


図2 6枚の顔画像  $\varphi_7 \sim \varphi_{12}$  と、その2値化画像 (パターンモデル)  $T\varphi_7 \sim T\varphi_{12}$

Fig.2 Six facial images  $\varphi_7 \sim \varphi_{12}$  and the corresponding binarized images (the pattern-models)  $T\varphi_7 \sim T\varphi_{12}$



図3 6枚の顔画像  $\varphi_{13} \sim \varphi_{18}$  と、その2値化画像 (パターンモデル)  $T\varphi_{13} \sim T\varphi_{18}$

Fig.3 Six facial images  $\varphi_{13} \sim \varphi_{18}$  and the corresponding binarized images (the pattern-models)  $T\varphi_{13} \sim T\varphi_{18}$



図4 6枚の顔画像 $\varphi_{19} \sim \varphi_{24}$ と、その2値化画像（パターンモデル） $T\varphi_{19} \sim T\varphi_{24}$

Fig.4 Six facial images  $\varphi_{19} \sim \varphi_{24}$  and the corresponding binarized images (the pattern-models)  $T\varphi_{19} \sim T\varphi_{24}$



図5 6枚の顔画像 $\varphi_{25} \sim \varphi_{30}$ と、その2値化画像（パターンモデル） $T\varphi_{25} \sim T\varphi_{30}$

Fig.5 Six facial images  $\varphi_{25} \sim \varphi_{30}$  and the corresponding binarized images (the pattern-models)  $T\varphi_{25} \sim T\varphi_{30}$

$n=1, 2, 3, 4, 5, 13, 14, 15, 22$  の番号を有する9人分の画像は女性であり、その他の番号の21人分の画像は男性である。

$$(i) \text{ (左上の隅) } x'''=0, y'''=0$$

$$\Leftrightarrow x=-53, y=40$$

$$(ii) \text{ (右上の隅) } x'''=106, y'''=0$$

$$\Leftrightarrow x=53, y=40$$

$$(iii) \text{ (左下の隅) } x'''=0, y'''=79$$

$$\Leftrightarrow x=-53, y=-39$$

$$(iv) \text{ (右下の隅) } x'''=106, y'''=79$$

$$\Leftrightarrow x=53, y=-39$$

であり、頭部は  $x=-53$  の側にあり、口は  $x=+53$  の側にあり、左の耳が  $y=-53$  の側にあり、右の耳が  $y=+53$  にある。

### 3.3 平均顔画像 $\xi$

実数値入力画像  $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$  について、その重心座標値

$$t_j(\varphi) \equiv \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 x_j \cdot \varphi(x_1, x_2)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \varphi(x_1, x_2)} \quad (4.12)$$

$$\doteq \frac{\sum_{x_1=-53}^{+53} \sum_{x_2=-39}^{+40} x_j \cdot \varphi(x_1, x_2)}{\sum_{x_1=-53}^{+53} \sum_{x_2=-39}^{+40} \varphi(x_1, x_2)} \quad (4.13)$$

( $j=1, 2$ )

を算出した後、 $\varphi(x_1, x_2)$  を  $x_1, x_2$  軸に沿って、各々、 $-t_1(\varphi)$ 、 $-t_2(\varphi)$  だけ平行移動して得られるパターン

$$(T\varphi)(x_1, x_2) \equiv \varphi(x_1 + t_1(\varphi), x_2 + t_2(\varphi)) \quad (4.14)$$

を求め、

$$(T\varphi)(x_1, x_2) \equiv \begin{cases} \|T\varphi\|^{-1} \cdot (T\varphi)(x_1, x_2) & \text{if } \|\varphi\| > 0 \\ 0 & \text{if } \|\varphi\| = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

と定義される式 (2.1) の写像  $T$  を考えてみよう。このとき、次の定理4.1が成り立ち、axiom 1を満たす1つの、式 (2.1) のモデル構成作用素  $T$  が得られた。

[定理4.1] (位置ずれに不変なパターンモデルの構成定理)

2つの実数値パターン  $\varphi = \varphi(x_1, x_2) \in \Phi$  について、式 (3.22) で定義される式 (3.23) の写像  $T$  は axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半、並びに、(iv) を満たす。

[定理4.1の系1] (対  $[\Phi, T]$  の構成定理)

式 (A1.2) で定義されるパターン集合  $\Phi$  と本定理4.1の写像  $T$  との対  $[\Phi, T]$  は axiom 1を満たす。□

第  $j \in J$  番目のカテゴリ  $\mathcal{C}_j$  の持つ諸性質を典型的に代表するパターン  $\omega_j = \omega_j(x_1, x_2)$  を

$$\omega_j(x_1, x_2) \equiv (T\varphi_j)(x_1, x_2) \quad (4.16)$$

と設定し、 $\mathcal{C}_j$  の出現確率  $p(\mathcal{C}_j)$  を、

$$p(\mathcal{G}_j) \equiv 1/5 \quad (4.17)$$

と設定する。ここに、カテゴリ番号集合  $J$  は、

$$J \equiv \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad (4.18)$$

である。全カテゴリ集合

$$\mathcal{G} \equiv \{\mathcal{G}_j \mid j \in J\} \quad (4.19)$$

上の、式 (3.9) の平均化パターン (平均顔画像)  $\xi(x_1, x_2)$  が図6に示されている。



図6 平均画像  $\xi$

Fig.6 Mean images  $\xi$

### 3.4 1枚の顔画像の平均、分散、スキュー、エネルギー、エントロピー

顔画像  $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$  の濃度値は 0~255 であることに注目して、

$$N(a) = \text{濃度 } a = (0 \sim 255) \text{ を持つ画素の総数} \quad (4.20)$$

$$M = 107 \times 80 \text{ (画像領域の総画素数)} \quad (4.21)$$

を求め、

$$\begin{aligned} p(a) &\equiv N(a)/M \\ &= \text{濃度 } a \text{ を1枚の顔画像 } \varphi = \varphi(x_1, x_2) \text{ がとる確率} \end{aligned} \quad (4.22)$$

を求める。勿論、確率分布の性質

$$[\forall a \in \{0, 1, 2, \dots, 255\}, 0 \leq p(a) \leq 1] \quad (4.23)$$

$$\wedge \sum_{a=0}^{255} p(a) = 1 \quad (4.24)$$

が成立している。1枚の顔画像  $\varphi$  の濃度分布が得られることになる。

このとき、1枚の画像  $\varphi$  を特性付ける次の5種類の量①~⑤が計算機シミュレーションで求められた。

$$\textcircled{1} \text{ 平均 } \underline{a} \equiv \sum_{a=0}^{255} a \cdot p(a) \text{ (1枚の顔画像 } \varphi \text{ の平均濃度)} \quad (4.25)$$

$$\textcircled{2} \text{分散 } \sigma^2 \equiv \sum_{a=0}^{255} [a - \underline{a}]^2 \cdot p(a) \quad \text{(1枚の顔画像 } \varphi \text{ の濃度分布の、平均濃度を基準にしてのバラツキ)} \quad (4.26)$$

$$\textcircled{3} \text{スキュー } s \equiv (1/\sigma^3) \cdot \sum_{a=0}^{255} [a - \underline{a}]^3 \cdot p(a) \quad \text{(1枚の顔画像 } \varphi \text{ の濃度分布の、平均濃度からの非対称性)} \quad (4.27)$$

$$\textcircled{4} \text{エネルギー } e \equiv \sum_{a=0}^{255} p(a)^2 \quad \text{(1枚の顔画像 } \varphi \text{ の濃度の強さ)} \quad (4.28)$$

$$\textcircled{5} \text{エントロピー } h \equiv - \sum_{a=0}^{255} p(a) \cdot \log_2 p(a) \quad \text{(1枚の顔画像 } \varphi \text{ の濃度分布の、均一性)} \quad (4.29)$$

$$\text{(I-}\textcircled{1}\text{)} \text{ 5枚の顔画像 } \varphi_1 \sim \varphi_5 \text{ の平均濃度の平均値} = 159.7346 \quad (4.30)$$

$$\text{(II-}\textcircled{1}\text{)} \text{ 平均顔画像 } \xi \text{ の平均濃度} = 82.734 \quad (4.31)$$

$$\text{(I-}\textcircled{2}\text{)} \text{ 5枚の顔画像 } \varphi_1 \sim \varphi_5 \text{ の分散の平均値} = 6134.845 \quad (4.32)$$

$$\text{(II-}\textcircled{2}\text{)} \text{ 平均顔画像 } \xi \text{ の分散} = 920.4046 \quad (4.33)$$

$$\text{(I-}\textcircled{3}\text{)} \text{ 5枚の顔画像 } \varphi_1 \sim \varphi_5 \text{ のスキューの平均値} = -0.28921 \quad (4.34)$$

$$\text{(II-}\textcircled{3}\text{)} \text{ 平均顔画像 } \xi \text{ のスキュー} = -0.1992 \quad (4.35)$$

$$\text{(I-}\textcircled{4}\text{)} \text{ 5枚の顔画像 } \varphi_1 \sim \varphi_5 \text{ のエネルギーの平均値} = 0.010601 \quad (4.36)$$

$$\text{(II-}\textcircled{4}\text{)} \text{ 平均顔画像 } \xi \text{ のエネルギー} = 0.010006 \quad (4.37)$$

$$\text{(I-}\textcircled{5}\text{)} \text{ 5枚の顔画像 } \varphi_1 \sim \varphi_5 \text{ のエントロピーの平均値} = 7.343716 \quad (4.38)$$

$$\text{(II-}\textcircled{5}\text{)} \text{ 平均顔画像 } \xi \text{ のエントロピー} = 6.738384 \quad (4.39)$$

何れの量の絶対値も、5枚の顔画像  $\varphi_1 \sim \varphi_5$  よりも、平均顔画像  $\xi$  の方が小さくなっていることがわかる。

## 5. 計算機シミュレーション2

本章では、言語 C で書かれたプログラムで実施された前章計算機シミュレーション引き続き、顔画像  $\varphi_n$  を2値化した結果と、 $\varphi_n$  から目、鼻、口を抽出した結果との一部を明らかにし、検討を加えよう。

### 5.1 顔画像 $\varphi_n$ の2値化

定理2.5が適用され、30枚の顔画像  $\varphi_1 \sim \varphi_{30}$  を2値化して得られるパターンモデル  $T\varphi_1 \sim T\varphi_{30}$  が求められ、それらが図1~5の左側と右側とに示されている。ほぼ、各顔画像  $\varphi_n (= 1 \sim 30)$  の特徴が抽出されている。 $\varphi_3, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_{11}, \varphi_{13}, \varphi_{14}, \varphi_{18}, \varphi_{20}, \varphi_{24}, \varphi_{26}, \varphi_{30}$  などでは、余計な雑音成分が加わっているが。

### 5.2 目、鼻、口を抽出するための3画像 $\xi_{\text{eye}}, \xi_{\text{nose}}, \xi_{\text{mouth}}$

定理2.4でのモデル構成作用素 T の定義式 (2.20) に登場する2関数  $h_1, h_2$  の内、 $h_1$  は式 (3.8) からわかるように、図6に示されている平均顔画像  $\xi$  と正の定数倍しか変わらないので、その表示は省略される。

また、式 (3.14) での  $h_2$  を定義する3式 (3.15) ~ (3.17) での  $\xi_{\text{eye}}, \xi_{\text{nose}}, \xi_{\text{mouth}}$  が図7に濃淡の程度を反転して、示されている。この  $\xi_{\text{eye}}, \xi_{\text{nose}}, \xi_{\text{mouth}}$  は  $\xi$  から視察で決定された。

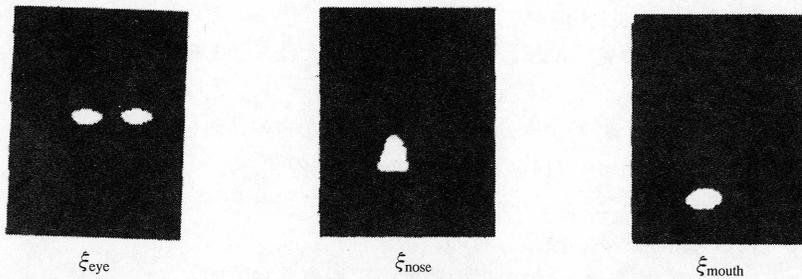


図7 第 $n$  ( $=1\sim 30$ ) 番目の入力顔画像  $\varphi_n$  から目、鼻、口を抽出するときに用いられた3画像

$\xi_{\text{eye}}, \xi_{\text{nose}}, \xi_{\text{mouth}}$

Fig.7 The three images  $\xi_{\text{eye}}, \xi_{\text{nose}},$  and  $\xi_{\text{mouth}}$  use to extract the eyes, the nose and the mouth from the  $n$ -th input facial image  $\varphi_n$

### 5.3 目の抽出結果と検討

30枚の顔画像  $\varphi_1\sim\varphi_{30}$  から定理2.4でのモデル構成作用素  $T$  の定義式 (2.20) を用い、目を抽出した結果  $T\varphi_1\sim T\varphi_{30}$  の内、その1/5の  $T\varphi_{25}\sim T\varphi_{30}$  が図8に示されている。細い目なら、細い目がうまく抽出されることが  $T\varphi_{29}$  をみれば理解できる。眼鏡ありの場合でも、うまく目が抽出されることも、 $\varphi_{30}$  から理解できる。平均画像  $\xi$  が  $\varphi_1\sim\varphi_5$  の女性顔画像から決定されているが、その目の成分が抽出される画像  $\varphi_{25}\sim\varphi_{30}$  は男性顔画像であることに注意しておこう。

### 5.4 鼻の抽出結果と検討

30枚の顔画像  $\varphi_1\sim\varphi_{30}$  から定理2.4でのモデル構成作用素  $T$  の定義式 (2.20) を用い、鼻を抽出した結果  $T\varphi_1\sim T\varphi_{30}$  の内、その1/5の  $T\varphi_{25}\sim T\varphi_{30}$  が図9に示されている。 $T\varphi_{30}$  には、 $\varphi_{30}$  の鼻がうまく抽出されている。

### 5.5 口の抽出結果と検討

30枚の顔画像  $\varphi_1\sim\varphi_{30}$  から定理2.4でのモデル構成作用素  $T$  の定義式 (2.20) を用い、鼻を抽出した結果  $T\varphi_1\sim T\varphi_{30}$  の内、その1/5の  $T\varphi_{25}\sim T\varphi_{30}$  が図10に示されている。 $T\varphi_{28}$  には、 $\varphi_{28}$  の鼻がうまく抽出されている。



図8 入力顔画像  $\varphi_{25} \sim \varphi_{30}$  から抽出された目

Fig.8 The corresponding eyes extracted from the input facial images  $\varphi_{25} \sim \varphi_{30}$



図9 入力顔画像  $\varphi_{25} \sim \varphi_{30}$  から抽出された鼻  
 Fig.9 The corresponding noses extracted from the input facial images  $\varphi_{25} \sim \varphi_{30}$

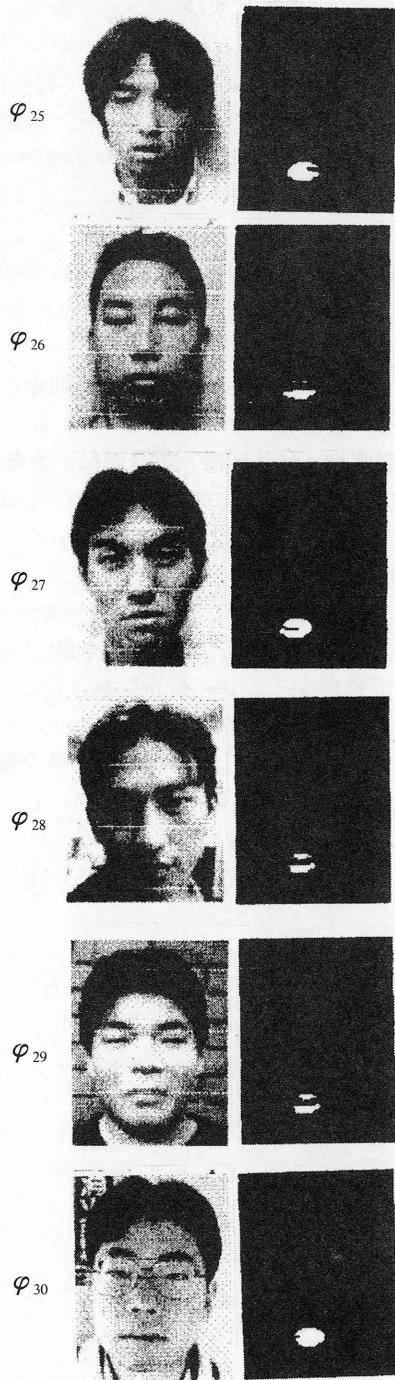


図10 入力顔画像  $\varphi_{25} \sim \varphi_{30}$  から抽出された口

Fig.10 The corresponding mouths extracted from the input facial images  $\varphi_{25} \sim \varphi_{30}$

## 6. むすび

SS公理系 [B3], [B4] は4つの公理axiom 1~4から成り立っており、その最初のaxiom 1を満たすモデル構成作用素  $T$  がパターン  $\varphi$  を2値化出来たり、パターン構成成分を抽出できるかどうかは理論上期待されていた。近年、顔画像研究は情報文化論の立場からも盛んになりつつあるが、マルチメディア情報検索技術論の立場から顔画像の分析法を確立しようという目的から、axiom 1の意義を検証しようと、本研究はなされた。

顔画像を計算機処理する技術を確保する前段階として、顔画像  $\varphi$  を2値化する手法、並びに、その目、鼻、口を抽出する手法が共にパターンモデル  $T\varphi$  を求める形で提案され、言語  $C$  で実施されたその計算機シミュレーション結果が説明された。

文字パターンを2値化する技術の確保はパターン認識研究の初期から現在に至るまで、続けられている。また、文字パターンからその構成各成分を抽出する技術も、懸案の課題であり続けている。その後、文字パターンから、顔画像、物体画像、風景画像、距離画像、動画画像などの各種パターンの処理に移行しつつある現在に至っても、この“パターンの2値化、並びに、パターンの各構成成分抽出”に関する2パターン処理技術の研究は続けられている。

本論文は、2次元画像としての顔パターン  $\varphi$  を2値化する方法として、axiom 1を満たす対  $[\Phi, T]$  に注目し、定理2.5を適用し、顔画像の、式 (2.25) の2値化モデル  $T\varphi$  を求め、定理2.4を適用し、式 (2.20) の  $T\varphi$  が顔画像  $\varphi$  から、その目、鼻、口を抽出できることを計算機シミュレーションで確かめたものである。本計算機シミュレーションを介して、SS理論 [B1] ~ [B6] の axiom 1 を満たす対  $[\Phi, T]$  の具体化効果が確認されたと言えよう。

2種類のモデル構成作用素  $T_1, T_2$  の構造各成分は5人の女性の平均顔画像を用いて非適応的に決定され、この5人分を含む女性9人、男性21人の30枚の顔画像に対し、その2値化、並びに、目、鼻、口の抽出に関し適用され得られた結果は大旨、良好である。然しながら、 $T_1, T_2$  の構造各成分を適応的に決する必要性など、引き続いて研究することの必要性が痛感させられることになった。

**謝辞** 文教大学・情報学部・前田英明教授の作成した画像入出力プログラムを文教大学・情報学部・情報システム学科の1997年度卒論学生である井上岳裕君が修正した入出力プログラムを使用した。また、井上岳裕君のみならず卒論学生諸氏には、シミュレーションプログラムの作成に協力して頂いた。感謝します。

## 文 献 A

- [A 1] 青木利夫, 高橋渉: “集合・位相空間要論”, 培風館, Sept.1979
- [A 2] Angus E.Taylor, David C.Lay: “Introduction to function analysis”, John Wiley & Sons, Inc., 1980
- [A 3] David Middleton: “Introduction to statistical communication theory”, Peninsula Publishing (Los Altos, California), 1987
- [A 4] Gerard Salton, Michael J.McGill: “Introduction to modern information retrieval (McGraw-Hill Advanced Computer Science Series)”, McGraw-Hill International Book Company, 1983
- [A 5] 原島博: “顔学への招待”, 岩波書店, June 1998
- [A 6] 赤松茂: “招待論文 コンピュータによる顔の認識 -サーベイ-”, 電子情報通信学会論文誌A, vol.J80-A, no.8, pp.1215-1230, Aug.1997
- [A 7] 永田明徳, 金子正秀, 原島博: “平均顔を用いた顔印象分析”, 電子情報通信学会論文誌A, vol.J80-A, no.8, pp.1266-1272, Aug.1997
- [A 8] 黒須康雄: “線分と疑似濃淡の保存を考慮した文書画像の縮小変換法”, 情報処理学会論文誌, vol.39, no.4, Apr.1998
- [A 9] 村瀬洋: “解説 古くて新しい画像認識法-固有空間法による画像認識-”, 情報処理 (情報処理学会誌), vol.38, no.1, pp.54-60, Jan.1997
- [A10] 長谷川修, 森島繁生, 金子正秀: “招待論文「顔」の情報処理”, 電子情報通信学会論文誌 (D-II), vol.J80-D-II, no.8, pp.2047-2065, Aug.1997
- [A11] 向川康博, 中村裕一, 大田友一: “複数の顔画像の組合せによる任意方向・任意表情の顔画像の生成”, 電子情報通信学会論文誌 (D-II), vol.J80-D-II, no.6, pp.1555-1562, June 1997
- [A12] 丸山稔, 寺岡照彦, 阿部茂: “学習ネットワークGRBFの変形する3次元物体の認識能力”, 電子情報通信学会論文誌 (D-II), vol.J76-D-II, no.11, pp.2357-2364, Nov.1997
- [A13] 市村直幸: “ロボスタクラスタリングに基づいた特徴空間と画像空間の併用による領域分割”, 電子情報通信学会論文誌 (D-II), vol.J80-D-II, no.7, pp.1752-1763, July 1997
- [A14] Xinquan Shen, Michael Spann, Peter Nacken: “Segmentation of 2D and 3D images through a Hierarchical clustering based on region modelling”, Pattern Recognition, vol.31, no.9, pp.1295-1309, 1998
- [A15] 肖業貴, N.P.チャンドラシリ, 田所嘉昭, 尾田政臣: “2-D DCTとニューラルネットワークを用いた顔画像の表情認識”, 電子情報通信学会論文誌A, vol.J81-A, no.7, pp.1077-1086, July 1998
- [A16] Peter N.Belhumeur, João P.Hespanha, and David J.Kriegman: “Eigenfaces vs. Fisherfaces: Recognition using class specific linear projection”, IEEE Trans. on pattern analysis and machine intelligence, vol.19, no.7, pp.711-720, Jan.1997
- [A17] Wei-Chung Lin and Chen-Kuo Tsao: “Document classification using associative memories”, Journal of Neural Network Computing, pp.33-41, April 1990
- [A18] Kin-Man Lam, Hong Yan: “An analytic-to-holistic approach for face recognition based on a single frontal view”, IEEE Trans. on pattern analysis and machine intelligence, vol.20, no.7, pp.673-686, July 1998
- [A19] Lin Hong, Anil Jain: “Integrating faces and fingerprints for personal identification”, IEEE Trans.

- on pattern analysis and machine intelligence, vol.20, no.12, pp.1295-1307, Dec.1998
- [A20] Shimon Ullman, Ronen Basri: "Recognition by linear combinations of models", IEEE Trans. on pattern analysis and machine intelligence, vol.13, no.10, pp.992-1006, Oct.1991
- [A21] 瀧保夫: "通信方式 (電気通信講座19)", コロナ社, 電気通信学会編, June 1964
- [A22] 星子幸男: "通信伝送工学", コロナ社, Dec.1978
- [A23] 太原育夫: "人工知能の基礎知識 (コンピュータサイエンス大学講座20)", 近代科学社, Feb.1999
- [A24] C.K.Chow and S.S.M.Wang: "Sequential classification of patient recovery patterns after coronary artery bypass graft surgery", Computers and Biomedical Research, vol.12, pp.589-613, 1979

## 文 献 B

- [B 1] 鈴木昇一: "認識工学 (上)", 柏書房, Feb.1975
- [B 2] 鈴木昇一: "(マルチメディア情報処理のための一般化誤差逆伝播学習) ニューラルネットの新数理", 近代文芸社, Sept.1996
- [B 3] 鈴木昇一: "(知能情報メディア情報処理のための) カテゴリ帰属知識を用いた) パターン認識問題の数理的一般解決", 近代文芸社, June 1997
- [B 4] 鈴木昇一: "(カテゴリのポテンシャル識知能情報論の新展開", 近代文芸社, Aug.1998
- [B 5] 鈴木昇一: "パターンのエントロピーモデル", 電子情報通信学会論文誌 (D-II), vol.J77-D-II, no.10, pp.2220-2238, Nov.1994
- [B 6] 鈴木昇一: "パターン認識の数学的理論", 電子情報通信学会技術研究報告 [パターン認識と学習, パターン認識と理解], PRL84-6 (第1部), PRL84-30, PRL84-38, PRL85-27, PRU86-8, PRU86-35, PRU86-69, PRU87-1, PRU87-28, PRU88-30, PRU89-1, PRU89-27, PRU89-40, PRU89-66, PRU89-77, PRU89-136, PRU90-5, PRU90-15, PRU90-29, PRU90-125, PRU91-1, PRU91-29, PRU91-42, PRU92-1, PRU92-18, PRU92-25, PRU92-89, PRU92-102 (第28部), May 1984~Jan.1993
- [B 7] 鈴木昇一: "測度的不変量検出形認識系の構成理論", 電子通信学会論文誌 (D), vol.55-D, no.8, pp.513-538, Aug.1972
- [B 8] 鈴木昇一: "手書き漢字の側抑制効果的分解とその計算機シミュレーション", 情報処理学会誌, vol.15, no.12, pp.927-934, Dec.1974
- [B 9] 鈴木昇一: "測度的不変量検出形認識系に関する研究", 博士論文 (工学院大学博乙第1号), Mar.1975
- [B10] 鈴木昇一: "画像情報量とその手書き漢字への応用", 画像電子学会誌, vol.4, no.1, pp.4-12, Apr.1975
- [B11] 鈴木昇一: "パターン認識における構造化モデルの4性質とその応用", 電子通信学会論文誌 (D), vol.J60-D, no.9, pp.710-717, Sept.1977
- [B12] 鈴木昇一: "抽出された特徴による手書き漢字構造の再生", 情報処理学会誌, vol.18, no.11, pp.1115-1122, Nov.1977
- [B13] 鈴木昇一, 斉藤静昭, 奥野治雄, 太田芳雄: "画像の復元とその計算機シミュレーション"

工学院大学研究報告, no.39, pp.198-206.Jan.1976

- [B14] 鈴木昇一：“回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学情報学部），vol.4, pp.36-56, Dec.1983
- [B15] 鈴木昇一：“連想形記憶器 MEMOTRON と日本語母音系列の再生に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学情報学部），vol.7, pp.14-29, Dec.1986
- [B16] 鈴木昇一：“収縮写像の構成用空間回路とその計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），vol.9, pp.17-29, Dec.1988
- [B17] 鈴木昇一：“多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），vol.10, pp.35-49, Dec.1989
- [B18] 鈴木昇一：“帰属係数法に基づく類似度、帰属関係あいまい度、認識情報量の計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），vol.11, p.p.51-68, Dec.1990
- [B19] 鈴木昇一，佐久間拓也，前田英明：“数理形態学における諸演算とモデル構成作用素”，情報研究（文教大学・情報学部），vol.17, pp.133-170, Dec.1996
- [B20] 鈴木昇一：“Radial-Basis Function Networks, Wavelet-Based Networks を用いたモデル構成作用素の構成法”，情報研究（文教大学・情報学部），vol.17, pp.71-132, Dec.1997
- [B21] 鈴木昇一：“構造受精法と日本語単独母音の認識”，情報研究（文教大学・情報学部），vol.18, pp.17-51, Dec.1998
- [B22] 鈴木昇一，佐久間拓也，积氏孝浩，前田英明，下平 丕作士：“不動点探索形構造受精多段階認識の確率過程論的取り扱い”，情報研究（文教大学・情報学部），vol.18, pp.53-103, Dec.1998
- [B23] 鈴木昇一：“類似度関数を用いた確率的緩和法”，情報研究（文教大学・情報学部），no.20, pp.23-75, Dec.1998
- [B24] 鈴木昇一，前田英明：“有声破裂音の代表パターンの学習的決定と、その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.20, pp.77-95, Dec.1998
- [B25] 鈴木昇一，前田英明：“変動エントロピーによる有声破裂音の順序付けと、その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.21, pp.51-78, Mar.1999
- [B26] 鈴木昇一：“直交系によるパターンモデルの構成”，情報研究（文教大学・情報学部），no.21, pp.23-49, Mar.1999
- [B27] 鈴木昇一：“認識行為に向けての、効用最大化原理”，情報研究（文教大学・情報学部），no.22, pp.151-210, Dec.1999

## 付録A. 代表パターン集合の凸結合によるパターン $\varphi$ の生成と、パターン集合 $\Phi$ の双対錐 $\Phi^*$

認識知能情報論の現代化は、知能の働きに基づいて抽出される情報の流れ

“パターン情報→パターンの表象→カテゴリ情報”

に適う公理系を発見し、その公理系を満たす情報処理体系を構成することによってなされなければならない。S.Suzukiによって、この種の4公理系 axiom1~4が提案され、これまで明らかにされているありとあらゆる認識の働きをシミュレート可能な認識知能情報処理体系 [B3], [B4], [B6] が構築されている。

本付録1では、生成されるパターン $\varphi$ の表現と、この生成表現からもたらされる“代表パターン $\omega_j$ からの標準的な変形 $\varphi_{j,k}$ ”について、説明される。次に、パターン集合 $\Phi$ の、地となるパターン集合とは、ある場合、その双対錐 $\Phi^*$ であることが明らかにされる。

最後に、各 $\omega_j$ を端点 (extreme point) に持つ場合のパターン集合 $\Phi_B$ の元 $\varphi$ がどのように生成されるかを論じる。

### A1. 代表パターン $\omega_j$ ( $j \in J$ ) の凸結合によるパターン $\varphi$ の生成と、 $\omega_j$ からの標準的な変形 $\varphi_{j,k}$ について

可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の元 $\omega_j, \eta_k$ から成る1次独立な2つの系 $\{\omega_j\}_{j \in J}, \{\eta_k\}_{k \in K}$ と、2条件

$$\sum_{j \in J} s_j = 1 \wedge [\forall j \in J, 0 \leq s_j \leq 1] \quad (A.1)$$

$$\forall k \in K, 0 \leq v_k \quad (A.2)$$

を満たす2つの実定数の組 $\{s_j\}_{j \in J}, \{v_k\}_{k \in K}$ とを用い、パターン $\varphi \in \mathfrak{H}$ を

$$\varphi = \sum_{j \in J} s_j \cdot \omega_j + \sum_{k \in K} v_k \cdot \eta_k + \varphi' \quad (A.3)$$

と分解することが、SS理論の基本である。ここに、剰余項 $\varphi' \in \mathfrak{H}$ は、

$$\forall j \in J, (\varphi', \omega_j) = 0 \quad (A.4)$$

$$\forall k \in K, (\varphi', \eta_k) = 0 \quad (A.5)$$

を満たすものである。式 (A.3) 内の $\sum_{j \in J} s_j \cdot \omega_j$ は各カテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン $\omega_j$ の系 $\{\omega_j\}_{j \in J}$ の凸結合であり、 $\sum_{k \in K} v_k \cdot \eta_k$ は $\{\eta_k\}_{k \in K}$ の非負1次結合であり、 $\varphi' = 0$ であれば、 $\varphi$ は有界でない凸多面体 (polyhedral convex set, polyhedron) の元である。 $\sum_{j \in J} s_j \cdot \omega_j + \sum_{k \in K} v_k \cdot \eta_k$ はこのような非有界凸多面体の有限基底は $\{\omega_j\}_{j \in J}, \{\eta_k\}_{k \in K}$ であり、 $\sum_{j \in J} s_j \cdot \omega_j$ の集まりとしての有界な凸多面体の有限基底は $\{\omega_j\}_{j \in J}$ である。有界な凸多面体の各端点が各代表パターン $\omega_j$ であることに注意しておく。尚、 $\mathfrak{H}$ をユークリッド空間 $R^n$ に選んだ場合、連立1次方程式、線形不等式系、並びに、これらの適当な組み合わせの系の解集合は、いずれも凸多面体であり、また、 $R^n$ の有限錐 (有限個のベクトルの張る凸錐) は凸多面体であることが知られている。

有界な凸多面体 $\varphi' = 0$ と選定された時の、式 (A.1) がパターン生成方程式であると考えられる。パターン

$$\varphi_{j,k} = \omega_j + v_k \cdot \eta_k \quad (A.6)$$

は第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン $\omega_j$ の標準的な変形であり、 $\omega_j$ の $\eta_k$ 方向への変形を表す。

### A2. パターン集合 $\Phi$ の、地としての双対錐 $\Phi^*$

$\mathfrak{H}$ の部分集合 $\mathfrak{D}$ が、すべての $\varphi \in \mathfrak{D}$ と非負実数 $a \geq 0$ とに対し、 $a \cdot \varphi \in \mathfrak{D}$ を満たすとき、 $\mathfrak{D}$

は錐 (cone) であるという。

パターンと判明している  $\varphi$  の集合 (基本領域; basic domain)  $\Phi_B$  から、axiom 1 に適うように帰納的に定義されるのが、処理の対象とするパターン  $\varphi$  の集合  $\Phi$  であり、 $\Phi$  は式 (2.2) のように表され、 $\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B$  を含む錐である。 $\Phi$  は次第に漸増的に構成されてゆくという意味で、構成的集合である。 $\Phi_B$  の各元は、少なくとも、式 (A.13) のように表されるものからなっている。

$$\Phi^* \equiv \{ \eta \in \mathcal{F} \mid (\eta, \varphi) \leq 0 \text{ for any } \varphi \in \Phi \} \quad (\text{A.7})$$

は、 $\Phi$  の双対錐 (dual cone 或いは、polar cone) と呼ばれる。

明らかに、

$\eta \in \Phi^*$  ならば、

$a \in \mathbb{R}^{++}$  (正実数全体の集合)、或いは、 $a=0$

として、 $a \cdot \eta \in \Phi^*$  である

(A.8)

ことがわかり、 $\Phi^*$  は錐である。

まず、双対錐  $\Phi^*$  の定義式 (A.7) から、

$$(0, \varphi) = 0 \text{ for any } \varphi \in \Phi \quad \therefore 0 \in \Phi^* \quad (\text{A.9})$$

がわかる。次に、

$b \in -\mathbb{R}^{++}$  とすると、

$$(b \cdot \eta, \varphi) = b \cdot (\eta, \varphi) \leq 0 \text{ for any } (\eta, \varphi) \geq 0 \quad (\text{A.10})$$

$$(b \cdot \eta, T\varphi) = b \cdot (\eta, T\varphi) \leq 0 \text{ for any } (\eta, T\varphi) \geq 0 \quad (\text{A.11})$$

もわかる。

特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \rightarrow \mathbb{R} \text{ (実数全体の集合)} \quad (\text{A.12})$$

と、 $\mathcal{F}$  の元からなる1次独立な系  $\{ \psi_k \}_{k \in L}$  を使って、モデル構成作用素  $T$  が

$$T\varphi = \sum_{k \in L} u(\varphi, k) \cdot \psi_k \quad (\text{A.13})$$

という形式を持つ場合 [B3], [B4]、双対錐  $\Phi^*$  は実ヒルベルト空間  $\mathcal{F}$  の部分集合  $\Phi$  の地 (ground) であると考えられる。何故ならば、式 (A.7) で双対錐  $\Phi^*$  は  $\Phi$  と直角か、鈍角をなすパターン集合であると定義されているからである。

次の定理A1は、 $\Phi$  が有限集合であるときの、双対錐  $\Phi^*$  を決定したものである。

[定理A1] (双対錐  $\Phi^*$  の決定定理)

$$\Phi_B = \{ \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \} \quad (\text{A.14})$$

のとき、 $\Phi^*$  は

$$\Phi^* = \bigcap_{k=1}^n \{ \eta \in \mathcal{F} \mid (\eta, \varphi_k) \leq 0 \wedge (\eta, T\varphi_k) \leq 0 \} \quad (\text{A.15})$$

と表される。

$$\text{(証明)} \quad \Phi_B = \{ 0, \varphi \} \quad (\text{A.16})$$

であれば、

$$T \cdot \Phi_B = \{ T0, T\varphi \} = \{ 0, T\varphi \} \quad \therefore \text{axiom 1 の (i) の後半} \quad (\text{A.17})$$

であることがわかる。よって、

$$\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B = \{ 0, \varphi, T\varphi \} \quad (\text{A.18})$$

$$\therefore \Phi = \mathbb{R}^{++} \cdot (\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B) \quad \therefore \text{式 (2.2)}$$

$$= \{ 0, r^{++} \cdot \varphi, r^{++} \cdot T\varphi \mid r^{++} \in \mathbb{R}^{++} \} \quad (\text{A.19})$$

である。双対錐  $\Phi^*$  の定義式 (A.7) から、

$\Phi^*$

$$= \{ \eta \in \mathcal{S} \mid (\eta, 0) \leq 0 \wedge (\eta, r^{++} \cdot \varphi) \leq 0 \wedge (\eta, r^{++} \cdot T\varphi) \leq 0 \} \quad (\text{A.20})$$

$$= \{ \eta \in \mathcal{S} \mid (\eta, 0) \leq 0 \wedge (\eta, \varphi) \leq 0 \wedge (\eta, T\varphi) \leq 0 \} \quad (\text{A.1.21})$$

$$= \{ \eta \in \mathcal{S} \mid (\eta, \varphi) \leq 0 \wedge (\eta, T\varphi) \leq 0 \} \quad (\text{A.1.22})$$

であることがわかる。 $\Phi_B$ が式 (A.16) である場合の、 $\Phi^*$ の表現式 (A.21) から、 $\Phi_B$ が式 (A.14) である場合、 $\Phi^*$ が式 (A.1.15) で表現されることがわかる。□

### A3. 各 $\omega_j$ を端点に持つパターン集合 $\Phi_B$ の具体的生成法

#### A3.1 パターン $\varphi \in \Phi_B$ の生成表現

$\varphi$  の生成表現式 (A.3) において、

$$\forall k \in K, 0 = v_k \quad (\text{A.23})$$

$$\varphi' = 0 \quad (\text{A.24})$$

とした場合、

$$\varphi = \sum_{j \in J} s_j \cdot \omega_j \quad (\text{A.25})$$

となるが、以下では、

$$J = \{1, 2, \dots, m\} \quad (\text{A.26})$$

$$K = \{1, 2, \dots, n\} \quad (\text{A.27})$$

$$0 \leq a_j \leq 1 \quad (j = 1 \sim m) \quad (\text{A.28})$$

とする。条件式 (A.1) に注意しておく。

生成表現式 (A.25) は次の段階 (i) ~ (m) のようにして得られる。

$$\text{段階 (i)} \quad \varphi_1 \equiv s_1 \cdot \omega_1 \quad (\text{A.29})$$

where

$$s_1 = 1 \quad (\text{A.30})$$

$$\text{段階 (ii)} \quad \varphi_2 \equiv \varphi_1 + a_1 \cdot (\omega_2 - \varphi_1) \quad (\text{A.31})$$

$$= [1 - a_1] \cdot \varphi_1 + a_1 \cdot \omega_2 \quad (\text{A.32})$$

$$= [1 - a_1] \cdot \omega_1 + a_1 \cdot \omega_2 \quad (\text{A.33})$$

$$= s_1 \cdot \omega_1 + s_2 \cdot \omega_2 \quad (\text{A.34})$$

where

$$s_1 = 1 - a_1, \quad s_2 = a_1 \quad (\text{A.35})$$

を考えれば、

$$s_1 + s_2 = 1 \quad (\text{A.36})$$

が成立している。

$$\text{段階 (iii)} \quad \varphi_3 \equiv \varphi_2 + a_2 \cdot (\omega_3 - \varphi_2) \quad (\text{A.37})$$

$$= [1 - a_2] \cdot \varphi_2 + a_2 \cdot \omega_3 \quad (\text{A.38})$$

$$= [1 - a_2] \cdot [[1 - a_1] \cdot \omega_1 + a_1 \cdot \omega_2] + a_2 \cdot \omega_3 \quad \therefore \text{式 (A3.3)} \quad (\text{A.39})$$

$$= [1 - a_1] \cdot [1 - a_2] \cdot \omega_1 + a_1 \cdot [1 - a_2] \cdot \omega_2 + a_2 \cdot \omega_3 \quad (\text{A.40})$$

$$= s_1 \cdot \omega_1 + s_2 \cdot \omega_2 + s_3 \cdot \omega_3 \quad (\text{A.41})$$

where

$$s_1 = [1 - a_1] \cdot [1 - a_2], \quad s_2 = a_1 \cdot [1 - a_2], \quad s_3 = a_2 \quad (\text{A.42})$$

を考えれば、

$$s_1 + s_2 + s_3 = 1 \quad (\text{A.43})$$

が成立している。

$$\text{段階 (iv) } \varphi_4 \equiv \varphi_3 + a_3 \cdot (\omega_4 - \varphi_3) \quad (\text{A.44})$$

$$= [1 - a_3] \cdot \varphi_3 + a_3 \cdot \omega_4 \quad (\text{A.45})$$

$$\begin{aligned} &= [1 - a_3] \cdot [[1 - a_1] \cdot [1 - a_2] \cdot \omega_1 \\ &+ a_1 \cdot [1 - a_2] \cdot \omega_2 \\ &+ a_2 \cdot \omega_3] + a_3 \cdot \omega_4 \\ &\therefore \text{式 (A1.40)} \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

$$\begin{aligned} &= [1 - a_1] \cdot [1 - a_2] \cdot [1 - a_3] \cdot \omega_1 \\ &+ a_1 \cdot [1 - a_2] \cdot [1 - a_3] \cdot \omega_2 \\ &+ a_2 \cdot [1 - a_3] \cdot \omega_3 \\ &+ a_3 \cdot \omega_4 \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

$$= s_1 \cdot \omega_1 + s_2 \cdot \omega_2 + s_3 \cdot \omega_3 + s_4 \cdot \omega_4 \quad (\text{A.48})$$

where

$$\begin{aligned} s_1 &= [1 - a_1] \cdot [1 - a_2] \cdot [1 - a_3] \\ s_2 &= a_1 \cdot [1 - a_2] \cdot [1 - a_3] \\ s_3 &= a_2 \cdot [1 - a_3] \\ s_4 &= a_3 \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

を考えれば、

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 1 \quad (\text{A.50})$$

が成立している。

...

段階 (k+1) よって、

$$\varphi_k \equiv \varphi_{k-1} + a_{k-1} \cdot (\omega_k - \varphi_{k-1}) \quad (\text{A.51})$$

$$= [1 - a_{k-1}] \cdot \varphi_{k-1} + a_{k-1} \cdot \omega_k \quad (\text{A.52})$$

$$\begin{aligned} &= \prod_{i=1}^{k-1} [1 - a_i] \cdot \omega_1 \\ &+ a_1 \cdot \prod_{i=2}^{k-1} [1 - a_i] \cdot \omega_2 \\ &+ a_2 \cdot \prod_{i=3}^{k-1} [1 - a_i] \cdot \omega_3 \\ &\dots \\ &+ a_{j-1} \cdot \prod_{i=j}^{k-1} [1 - a_i] \cdot \omega_j \\ &\dots \\ &+ a_{k-1} \cdot \omega_k \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

と仮定すれば、

$$\varphi_{k+1} \equiv \varphi_k + a_k \cdot (\omega_{k+1} - \varphi_k) \quad (\text{A.54})$$

$$= [1 - a_k] \cdot \varphi_k + a_k \cdot \omega_{k+1} \quad (\text{A.55})$$

$$= \prod_{i=1}^k [1 - a_i] \cdot \omega_1 \\ + a_1 \cdot \prod_{i=2}^k [1 - a_i] \cdot \omega_2 \\ + a_2 \cdot \prod_{i=3}^k [1 - a_i] \cdot \omega_3 \\ \dots \\ + a_{j-1} \cdot \prod_{i=j}^k [1 - a_i] \cdot \omega_j \\ \dots \\ + a_k \cdot \omega_{k+1} \quad \because \text{式 (A.53)} \quad (\text{A.56})$$

$$= \sum_{j=1}^{k+1} s_j \cdot \omega_j \quad (\text{A.57})$$

where

$$s_1 = \prod_{i=1}^k [1 - a_i] \quad (\text{A.58})$$

$$s_2 = a_1 \cdot \prod_{i=2}^k [1 - a_i] \quad (\text{A.59})$$

$$s_3 = a_2 \cdot \prod_{i=3}^k [1 - a_i] \quad (\text{A.60})$$

...

$$s_j = a_{j-1} \cdot \prod_{i=j}^k [1 - a_i] \quad (\text{A.61})$$

...

$$s_{k+1} = a_k \quad (\text{A.62})$$

を考えれば、

$$\sum_{j=1}^{k+1} s_j = 1 \quad (\text{A.63})$$

が成立している。

...

最終段階 (m)

$$\varphi_m \equiv \varphi_{m-1} + a_{m-1} \cdot (\omega_m - \varphi_{m-1}) \quad (\text{A.64})$$

$$= [1 - a_{m-1}] \cdot \varphi_{m-1} + a_{m-1} \cdot \omega_m \quad (\text{A.65})$$

$$= \prod_{i=1}^{m-1} [1 - a_i] \cdot \omega_1 \\ + a_1 \cdot \prod_{i=2}^{m-1} [1 - a_i] \cdot \omega_2 \\ + a_2 \cdot \prod_{i=3}^{m-1} [1 - a_i] \cdot \omega_3 \\ \dots \\ + a_{j-1} \cdot \prod_{i=j}^{m-1} [1 - a_i] \cdot \omega_j \\ \dots \\ + a_{m-1} \cdot \omega_m \quad (\text{A.66})$$

$$= \sum_{j=1}^m s_j \cdot \omega_j \quad (\text{A.67})$$

where

$$s_1 = \prod_{i=1}^{m-1} [1 - a_i] \quad (\text{A.68})$$

$$s_2 = a_1 \cdot \prod_{i=2}^{m-1} [1 - a_i] \quad (\text{A.69})$$

$$s_3 = a_2 \cdot \prod_{i=3}^{m-1} [1 - a_i] \quad (\text{A.70})$$

...

$$s_j = a_{j-1} \cdot \prod_{i=j}^{m-1} [1 - a_i] \quad (\text{A.71})$$

...

$$s_m = a_{m-1} \quad (\text{A.72})$$

を考えれば、等式 (A.1)、つまり、

$$\sum_{j=1}^m s_j = 1 \wedge [\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}, 0 \leq s_j \leq 1] \quad (\text{A.73})$$

が成立している。

尚、式 (A.1) が成立しているので、パターン  $\varphi$  のエントロピー  $\text{etpy}(\varphi)$  を

$$\text{etpy}(\varphi) \equiv - \sum_{j=1}^m s_j \cdot \log_e s_j \quad (\text{A.74})$$

と定義できる。このエントロピー  $\text{etpy}(\varphi)$  が大きい値をとればとるほど、パターン  $\varphi$  は代表パターン集合

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J \equiv \{1, 2, \dots, m\}\} \quad (\text{A.75})$$

の特定の元  $\omega_j$  に似ていないと言えよう。以後、 $\Omega$  は1次独立な系として、非一致条件

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \|\omega_i - \omega_j\| \neq 0 \quad (\text{A.76})$$

が満足されているとしよう。

### A3.2 類似度関数 SM を用いたパターン $\varphi \in \Phi_B$ の生成表現

$\varphi_k$  から  $\omega_{k+1}$  へ向かうベクトル  $\omega_{k+1} - \varphi_k$  の  $a_k$  倍をベクトル  $\varphi_k$  の先端に加えて得られる式 (A.54) の第  $(k+1)$  生成段階のパターン  $\varphi_{k+1}$  を見てわかるように、前節の最終段階 ( $m$ ) での諸式は式 (A.67) の各  $s_j$  がどのようにして得られ、各  $\omega_j$  からどのような変形を受けて、パターン  $\varphi$  が得られるかを明らかにしている。

ところで、各  $a_k (1 \leq k \leq m)$  を具体的に設定していないので、実は、前節のパターン生成法は完結していないことに気づく。本節では、この設定を axiom 2 の (i), (ii) を満たす類似度関数

$$\text{sm} : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \quad (\text{A.77})$$

を使って行い、完結させよう。

#### A3.2.1 axiom 2 の (i), (ii) を満たす類似度関数 sm の選定法

種類 (1) 式 (A.26) において  $m=2$  の場合

$$\begin{aligned} \text{sm}(\varphi, \omega_1) \\ = \|\varphi - \omega_2\| / [\|\varphi - \omega_2\| + \|\varphi - \omega_1\|] \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

$$\begin{aligned} \text{sm}(\varphi, \omega_2) \\ = \|\varphi - \omega_1\| / [\|\varphi - \omega_2\| + \|\varphi - \omega_1\|] \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

種類 (2) 式 (A.26) において  $m \geq 2$  の場合

$$\begin{aligned} \text{sm}(\varphi, \omega_j) \\ = \|\varphi - \omega_j\|^{-2} / [\sum_{i \in J} \|\varphi - \omega_i\|^{-2}], j \in J \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

種類 (3) 式 (A.26) において  $m \geq 2$  の場合

2つのパターン  $\varphi, \eta \in \Phi$  間の規格化内積 (normalized inner product)  $\text{nip}(\varphi, \eta)$

$$\begin{aligned} \text{nip}(\varphi, \eta) = \\ \begin{cases} (\varphi, \eta) / [\|\varphi\| \cdot \|\eta\|] & \text{if } \|\varphi\| \cdot \|\eta\| > 0 \\ 0 & \text{if } \|\varphi\| \cdot \|\eta\| = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

を定義すると、Schwarzの不等式

$$\forall \varphi, \forall \eta \in \mathfrak{F}, 0 \leq |\text{nip}(\varphi, \eta)| \leq 1 \quad (\text{A.82})$$

が成り立つ。ここに、

$$(i) \quad |\text{nip}(\varphi, \eta)| = 0 \\ \Leftrightarrow [(\varphi, \eta) = 0 \vee \|\varphi\| \cdot \|\eta\| = 0] \quad (\text{A.83})$$

$$(ii) \quad |\text{nip}(\varphi, \eta)| = 1 \\ \Leftrightarrow [\exists a (\neq 0) \in \mathbb{Z} (\text{複素数全体の集合}), \varphi = a \cdot \eta (\neq 0)] \quad (\text{A.84})$$

が成り立っている。非負量

$$s_1(\varphi, \omega_j) \equiv -(1/2) \cdot \log_e [1 - |\text{nip}(\varphi, \omega_j)|^2] \quad (\text{A.85})$$

を用いて、

$$\text{sm}(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} s_1(\varphi, \omega_j) / [\sum_{i \in J} s_1(\varphi, \omega_i)] \\ \quad \text{if } \sum_{i \in J} s_1(\varphi, \omega_i) = 0 \\ p(\mathfrak{C}_j) \text{ if } \sum_{i \in J} s_1(\varphi, \omega_i) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.86})$$

と定義できる。

種類 (4) 式 (A.26) において  $m \geq 2$  の場合

非負量

$$s_2(\varphi, \omega_j) \equiv [1 - |\text{nip}(\varphi, \omega_j)|^2]^{-1/2} \quad (\text{A.87})$$

を用いて、

$$\text{sm}(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} s_2(\varphi, \omega_j) / [\sum_{i \in J} s_2(\varphi, \omega_i)] \\ \quad \text{if } \sum_{i \in J} s_2(\varphi, \omega_i) = 0 \\ p(\mathfrak{C}_j) \text{ if } \sum_{i \in J} s_2(\varphi, \omega_i) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.88})$$

と定義できる。

種類 (5) 式 (A.26) において  $m \geq 2$  の場合

不動点性質

$$\forall j \in J, B\omega_j = \omega_j \quad (\text{A.89})$$

を満たすという意味で**想起作用素**と呼ばれる写像  $B$  を使って、例えば、種類 (2) の、言い替えれば、式 (A.80) のノルム距離形類似度関数  $\text{sm}$  を次のように定義し直すことができる。

$$\text{sm}(\varphi, \omega_j) \\ = \|\mathbf{B}\varphi - \omega_j\|^{-2} / \sum_{i \in J} \|\mathbf{B}\varphi - \omega_i\|^{-2} \quad (\text{A.90})$$

と定義し直すことができる。

種類 (1), 種類 (3), 種類 (4) についても、同様である。

### A3.2.2 想起作用素 $B$ の決定

式 (A.89) を満たす前項の写像  $B$  は次のように構成できる。

$$c_{ij} \equiv (\omega_j, \omega_i) \quad (\text{A.91})$$

を第  $i \in J$  行第  $j \in J$  列の要素とする行列  $C$  の逆行列  $C^{-1}$  は、 $\Omega$  が1次独立な系であるから、存在する。 $C^{-1}$  の第  $i \in J$  行第  $j \in J$  列の要素を  $(C^{-1})_{ij}$  と表す。

このとき、

$$\mathbf{B}\eta = \sum_{i \in J} \omega_i \cdot \sum_{j \in J} (C^{-1})_{ij} \cdot (\eta, \omega_j) \quad \text{for any } \eta \in \mathfrak{F} \quad (\text{A.92})$$

と定義される線形作用素  $B$  は次の定理A2で指摘されているように、各  $\omega_j$  を不動点に持つ。この意味で、 $B$  は  $\Omega$  を記憶している想起作用素と呼ばれる。クロネッカーの  $\delta$  記号

$$\delta_{ij} = 1 \text{ if } i=j, = 0 \text{ if } i \neq j \quad (\text{A.93})$$

を導入しておく。

[定理A2] (想起作用素  $B$  の不動点定理)

$$\forall j \in J, B\omega_j = \omega_j. \quad (\text{A.94})$$

(証明) 任意に、 $k \in J$  を選ぶ。

$$\begin{aligned} B\omega_k &= \sum_{i \in J} \omega_i \cdot \sum_{j \in J} (C^{-1})_{ij} \cdot (\omega_k, \omega_j) \\ &= \sum_{i \in J} \omega_i \cdot \sum_{j \in J} (C^{-1})_{ij} \cdot C_{jk} \quad \because \text{式 (A.91)} \\ &= \sum_{i \in J} \omega_i \cdot \sum_{i \in J} (C^{-1})_{ij} \cdot C_{jk} \\ &= \sum_{i \in J} \omega_i \cdot \delta_{ik} \\ &= \omega_k. \end{aligned}$$

□

### A3.2.3 $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$ の決定

その各1次結合係数  $s_j$  が条件式 (A.73) を満たす式 (A.67) の  $\varphi_m$  に注目し、任意のパターン  $\varphi \in \Phi$  に対し、

$$\varphi' \equiv \varphi - \varphi_m \in \mathfrak{F} \quad (\text{A.95})$$

を考えると、等式

$$\varphi = \varphi_m + \varphi' \quad (\text{A.96})$$

が成り立つ。

$$s_j \equiv sm(\varphi, \omega_j), j \in J \quad (\text{A.97})$$

と置いた場合、式 (A.68) ~ (A.72) での

$$a_1, a_2, \dots, a_{m-1} \quad (\text{A.98})$$

を求める方法は次のように表現される。

( $m-1$ ) 段階

$$\begin{aligned} a_{m-1} & (= sm) \\ &= sm(\varphi, \omega_m) \quad \because \text{式 (A.72)} \end{aligned}$$

( $m-2$ ) 段階

$$\begin{aligned} a_{m-2} & (= s_{m-1} / [1 - a_{m-1}]) \\ &= sm(\varphi, \omega_{m-1}) / [1 - a_{m-1}] \end{aligned}$$

...

( $j+1$ ) 段階

$$\begin{aligned} a_j & (= s_{j+1} / \prod_{i=j+1}^{m-1} [1 - a_i]) \\ &= sm(\varphi, \omega_{j+1}) / \prod_{i=j+1}^{m-1} [1 - a_i] \end{aligned}$$

( $j$ ) 段階

$$\begin{aligned} a_{j-1} & (= (s_j / \prod_{i=j}^{m-1} [1 - a_i]) \\ &= sm(\varphi, \omega_j) / \prod_{i=j}^{m-1} [1 - a_i] \quad \because \text{式 (A.71)} \end{aligned}$$

...

(2) 段階

$$a_1 = s_2 / \prod_{i=2}^{m-1} [1 - a_i] \\ = \text{sm}(\varphi, \omega_2) / \prod_{i=2}^{m-1} [1 - a_i] \quad \because \text{式 (A.69)}$$

(1) 段階

$$s_1 = \prod_{i=1}^{m-1} [1 - a_i] \\ = \text{sm}(\varphi, \omega_1) \quad \because \text{式 (A.68)}$$

上述によって、

$$\varphi_1 = \omega_1$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + a_1 \cdot (\omega_2 - \varphi_1) \quad (0 < a_1 < 1)$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 + a_2 \cdot (\omega_3 - \varphi_2) \quad (0 < a_2 < 1)$$

...

$$\varphi_{j+1} = \varphi_j + a_j \cdot (\omega_{j+1} - \varphi_j) \quad (0 < a_j < 1)$$

...

$$\varphi_m = \varphi_{m-1} + a_{m-1} \cdot (\omega_m - \varphi_{m-1}) \quad (0 < a_{m-1} < 1)$$

での、各係数  $a_j$  が求まった。

## 付録B 各種パターンモデルとユニタリ座標変換共変性・不変性

実際に処理の対象とするパターン  $\varphi$  というものは、その帰属するカテゴリを決定する場面では、冗長な表現である。この種の冗長な情報を排除して、 $\varphi$  の反映物として、いかなるパターンをも同一形式に変換する機能を備えた式 (2.1) のモデル構成作用素  $T$  を使い得られるパターンモデルと称されるパターン  $T\varphi$  を原パターン  $\varphi$  の代りに、処理すれば良いという考えがある [B1] ~ [B7]。

本付録Bでは、パターンモデル  $T\varphi$  の満たすべき4性質を指摘し (B1章)、この4性質を備えたパターンモデル  $T\varphi$  の諸例を掲げた後 (B2章)、パターン認識システムに効率的な認識性能を付与するために必要とされる“ユニタリ座標変換共変性を備えたパターンモデル  $T\varphi$ ”と、“ユニタリ座標変換不変性を備えたパターンモデル  $T\varphi$ ”が説明される (B3, B4両章)。

### B1. モデル構成作用素 $T: \Phi \rightarrow \Phi$ の満たすべき4性質

処理の対象とするパターン  $\varphi$  の集合  $\Phi$  は、可分なヒルベルト空間  $\varphi$  のある部分集合である。

入力  $\varphi \in \Phi$  に対するその出力がそのパターンモデル  $T\varphi \in \Phi$  であるような写像  $T: \Phi \rightarrow \Phi$  は、次の4性質①~④を満たさなければならないとしてみよう。

性質②, ④は各々、 $a$ 倍、 $T$ 作用という変形の下で、パターンという意味概念が保存されることを要請している。

- ① (零元不動点性)  $\varphi = 0$  について  $T\varphi = \varphi \in \Phi$ .
- ② (正定数倍不変性)  $\forall \varphi \in \Phi, T(a \cdot \varphi) = T\varphi \in \Phi$   
for any positive real number  $a$ .
- ③ (べき等性)  $\forall \varphi \in \Phi, T(T\varphi) = T\varphi$ .

④ (非零写像性)  $\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0$ . □

4性質①～④を満たすという意味でモデル構成作用素と呼ばれる式 (2.1) の写像  $T: \Phi \rightarrow \Phi$  を導入することの1つの意義は、実際に処理の対象とするパターン  $\varphi$  というものの帰納的定義が可能になり、パターン認識システムの自己組織化などが精密に論じられることである [B3], [B4]。直接的には、パターンモデル  $T\varphi$  をパターン  $\varphi$  に対応する正規化パターン (a corresponding normalized pattern of the original pattern  $\varphi$ ) と想定すると、パターン認識分野におけるいわゆる正規化パターンが最小限満たさなければならない4性質①～④を指摘していることである。ということは、モデル  $T\varphi$  を見たり聞いたりしたならば、原パターン  $\varphi$  と同じに見えたり、同じに聞こえたりするパターンモデル構成原理 (パターン、パターンモデル間の同一知覚原理) が4性質①～④であるということである (文献 [B3], [B4] での、対  $[\Phi, T]$  の満たさなければならない axiom 1 を参照)。

## B2. パターンモデル $T\eta$ の諸例

本章では、多品種パターン認識に有用とされ、前節で指摘された4性質①～④を満たすモデル構成作用素  $T: \Phi \rightarrow \Phi$  の構築諸例を与えよう。

[例B1] (非負実数値パターンモデル  $T\eta$ )

実際に処理対象とする実数値パターン  $\eta = \eta(x) \in \Phi \subset \mathfrak{R}$  は、振幅有界の条件

$$\sup_{x \in M} |\eta(x)| < \infty \tag{B.1}$$

を満たしているとみてよいだろう。ならば、例えば、

$$(T\eta)(x) \equiv \begin{cases} 0 \cdots \sup_{x \in M} \eta(x) - \inf_{x \in M} \eta(x) = 0 \text{ のとき} \\ \left[ \eta(x) - \inf_{x \in M} \eta(x) \right] \\ / \left[ \sup_{x \in M} \eta(x) - \inf_{x \in M} \eta(x) \right] \\ \cdots \text{その他のとき} \end{cases} \tag{B.2}$$

と変換し (線形スケールリング; linear scaling)、この  $T\eta$  を実数値原パターン  $\eta$  の代りに採用すれば、非負実数値性

$$(T\eta)(x) \geq 0 \text{ for every } x \in M \tag{B.3}$$

が成立する。B1章の4性質①～④を満たすことは、容易に確かめられる。

[例B2] (絶対値1以下のパターンモデル  $T\eta$ )

振幅有界の条件式 (B.1) の下で、実数値パターン  $\eta = \eta(x) \in \Phi \subset \mathfrak{R}$  を、

$$\eta(x) \equiv \begin{cases} 0 & \cdots \forall x \in M, \eta(x) = 0 \text{ のとき} \\ \eta(x) / \sup_{x \in M} |\eta(x)| & \cdots \exists x \in M, \eta(x) \neq 0 \end{cases} \tag{B.4}$$

$$\tag{B.5}$$

と変換すれば、振幅の絶対値が1を超えないという有界性

$$|(T\eta)(x)| \leq 1 \text{ for every } x \in M \tag{B.6}$$

が成立する。無論、B1章の4性質①～④を満たすことは、容易に確かめられる。

[例B3] (2値化パターンモデル  $T\eta$ )

正值有界条件

$$\forall x \in M, 0 < \eta'(x) \leq 1 \quad (\text{B.7})$$

を満たすパターン  $\eta'$  を用意する。

例えば、例B2の定義式 (B.4) を用い、閾値関数  $\eta'$  を、

$$\eta'(x) = \xi(x) \quad (\text{B.8})$$

と置くことができる場合がある。ここに、 $\xi$  は平均化パターン [B7] と称せられるものであり、生起確率  $p(\mathcal{G}_j)$  を持つ第  $j \in J$  番目のカテゴリ  $\mathcal{G}_j$  の代表パターン  $\omega_j \in \Phi \subset \mathcal{G}$  を導入して、

$$\xi(x) \equiv \sum_{j \in J} p(\mathcal{G}_j) \cdot \omega_j \| \omega_j \|^{-1} \quad (\text{B.9})$$

と定義されるものである (各  $\omega_j$  の適応的決定法については、文献 [B3], 付録 I にある)。

実数値パターン  $\eta = \eta(x) \in \Phi \subset \mathcal{F}$  に対し、

$$(T\eta)(x) \equiv \begin{cases} 0 \cdots \eta(x) < \eta'(x) \text{ のとき} \\ 1 \cdots \eta(x) \geq \eta'(x) \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

と定義される写像  $T: \Phi \rightarrow \Phi$  が無論、B1章の4性質①~④を満たすことは、容易に確かめられる。

[例B4] (3値化パターンモデル  $T\eta$ )

不等式 (B.7) を満たす閾値関数  $\eta'$  を用意して、

$$(T\eta)(x) \equiv \begin{cases} -1 \cdots -1 \leq \eta(x) < -\eta'(x) \text{ のとき} \\ 0 \cdots -\eta'(x) \leq \eta(x) \leq +\eta'(x) \text{ のとき} \\ +1 \cdots +\eta'(x) < \eta(x) \leq +1 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

と定義される写像  $T: \Phi \rightarrow \Phi$  が、B1章の4性質①~④を満たすことは、容易に確かめられる。

[例B5] (ノルム規格化パターンモデル  $T\eta$ )

入力パターン  $\eta (\neq 0) \in \Phi$  を、

$$\eta \rightarrow \eta \| \eta \|^{-1} \quad (\text{B.12})$$

と、ノルム規格化パターン  $\eta \| \eta \|^{-1}$  に変換することは、通常、よく行われる。

$$(T\eta) \equiv \begin{cases} 0 \cdots \| \eta \| = 0 \text{ のとき} \\ \eta \| \eta \|^{-1} \cdots \| \eta \| \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

と定義される写像  $T: \Phi \rightarrow \Phi$  が、B1章の4性質①~④を満たすことは、容易に確かめられる。

□

以下の例B6, 例B7において必要な完全正規直交系  $\{\psi_k\}_k$  として、例えば、次の2次元walsh関数系

$$\{\text{wal}(k_1, x_1) \cdot \text{wal}(k_2, x_2)\}_{k_1, k_2=0, 1, 2, \dots} \quad (\text{B.14})$$

があることに注意しておこう：

$$M \equiv \langle x_1, x_2 \mid 0 \leq x_1, x_2 < 1 \rangle \quad (\text{B.15})$$

として、ヒルベルト空間  $\mathcal{G} = L_2(M; dx_1 dx_2)$  を考えよう。

$$k \equiv \langle k_1, k_2 \rangle, x \equiv \langle x_1, x_2 \rangle \quad (\text{B.16})$$

として、

$$\begin{aligned} \psi_k(x) & \equiv \text{wal}(k_1, x_1) \cdot \text{wal}(k_2, x_2) \\ & k_j = 0, 1, 2, \dots (j=1, 2) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

ここに、

$$\text{wal}(k_j, x_j) \equiv \prod_{i=0}^{m-1} \text{sgn}(|\cos(2^i \pi x_j)|^{n_i})$$

$$n_i \in \{0, 1\}$$

$$i \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$$

$$k_j = \sum_{i=0}^{m-1} n_i \cdot 2^i \quad (m \text{ は、} 2_m > k_j \text{ であるような最小の整数})$$

$$\text{sgn}(t) \equiv$$

$$\begin{cases} -1 & \text{if } t < 0 \\ +1 & \text{if } t > 0 \end{cases}$$

(B.18)

と定義される関数系  $\{\psi_k\}_k$  は、

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^y = 1$$

(B.19)

を考慮すれば、

正規直交性 (orthonormality)

$$(\psi_p, \psi_q) = 0 \text{ if } p \neq q, = 1 \text{ if } p = q$$

(B.20)

完全性 (completeness)

$$\forall \eta \in \mathcal{H}, \quad \eta(x) = \sum_k (\eta, \psi_k) \cdot \psi_k(x)$$

(B.21)

を満たすことが知られている。 □

[例B6] (直交展開に基づくパターンモデル  $T\eta$ )

集合  $L$  を有限集合であっても構わないとして、集合  $L$  の各元を添字に持つ系  $\{\psi_k\}_{k \in L}$  を、

$$(\psi_p, \psi_q) = 0 \text{ if } p \neq q$$

(B.22)

を満たす直交系とすると、処理の対象とする問題のパターン  $\eta \in \Phi$  に関し、不等式

$$\begin{aligned} & \left\| \eta - \sum_{k \in L} [(\eta, \psi_k) / (\psi_k, \psi_k)] \cdot \psi_k \right\| \\ & \leq \left\| \eta - \sum_{k \in L} a_k \cdot \psi_k \right\| \end{aligned}$$

$$\text{for any complex number } a_k (k \in L)$$

(B.23)

が成り立ち、

条件

$$\forall k \in L, (\eta_{\perp}, \psi_k) = 0$$

(B.24)

を満たすヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  のある元  $\eta_{\perp}$  が存在して、

$$\eta = S\eta + \eta_{\perp}$$

(B.25)

ここに、

$$S\eta = \sum_{k \in L} [(\eta, \psi_k) / (\psi_k, \psi_k)] \cdot \psi_k$$

(B.26)

と直交展開される

ことは、よく知られている。問題のパターン  $\eta \in \Phi$  とは異なり、各  $\psi_k$  はこれ以上変形・分解できないという意味で、**極小のパターン形状素** (the primitive shape-component) といわれる [B5]。

パターン  $\eta \in \Phi$  から抽出される第  $k \in L$  番目の特徴量  $u(\eta, k)$  を、

$$u(\eta, k) \equiv$$

$$\begin{cases} 0 \cdots \forall k \in L, (\eta, \psi_k) = 0 \text{ のとき} \\ [(\eta, \psi_k) / (\psi_k, \psi_k)] \\ / \left[ \sum_{k \in L} |(\eta, \psi_k) / (\psi_k, \psi_k)|^2 \right]^{1/2} \\ \cdots \exists k \in L, (\eta, \psi_k) \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

(B.27)

と定義し、各  $u(\eta, k)$  を展開係数に持つ直交展開

$$T\eta = \sum_{k \in L} u(\eta, k) \cdot \psi_k \quad (\text{B.28})$$

で定義される写像  $T: \Phi \rightarrow \Phi$  は、B1章の4性質①~④を満たすことは、容易に確かめられる。

不等式 (B.23) を満たす式 (B.26) の  $S_\eta$  は、原パターン  $\eta \in \Phi$  の、閉部分空間

$$\left\{ \sum_{k \in L} a_k \cdot \psi_k \mid a_k \in \mathbb{Z} \text{ (複素数体)} \right\} \text{ の閉包} \quad (\text{B.29})$$

での再表現としての主成分であり、式 (B.28) のパターンモデル  $T\eta$  も同様な再表現であることになる。

$$\forall \eta \in \Phi, TS\eta = T\eta \quad (\text{B.30})$$

$$\forall k \in L, T\psi_k = \psi_k \quad (\text{不動点方程式}) \quad (\text{B.31})$$

の成立が知れ、式 (B.30) は、パターン  $\eta$  の主成分  $S_\eta$  に対し、その加法的雑音成分  $\eta_\perp$  が除去された形で、パターンモデル  $T\eta$  が得られていることを指摘しており、また、式 (B.31) は、各  $\psi_k$  が変形不能性パターン形状素であるからして、成立すべきことであった。式 (B.26) で定義される主成分  $S_\eta$  は、系  $\{\psi_k\}_{k \in L}$  が完全正規直交系ならば、原パターン  $\eta$  そのものになるが (フーリエ式展開)、式 (B.28) のパターンモデル  $T\eta$  は、原パターン  $\eta$  のノルム規格化パターン、つまり、式 (B.13) の  $T\eta$  にこの場合、一致することに注意しておく。  $\square$

[例B7] (直交展開係数の3値化に基づくパターンモデル  $T\eta$ )

$\{\psi_k\}_{k \in L}$  は直交系であるとして、各  $(\eta, \psi_k)$  は実数値であるようなパターン  $\eta \in \Phi$  を考えよう。

不等式

$$\forall k \in L, |a_k(\eta)| \leq 1 \quad (\text{B.32})$$

を満たす  $a_k(\eta)$  を、

$$a_k(\eta) \equiv \begin{cases} 0 \cdots \forall k \in L, (\eta, \psi_k) = 0 \text{ のとき} \\ (\eta, \psi_k) / \sup_{k \in L} |(\eta, \psi_k)| \\ \cdots \exists k \in L, (\eta, \psi_k) \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{B.33})$$

と定義し、その後、パターン  $\eta \in \Phi$  から抽出される第  $k \in L$  番目の特徴量  $u(\eta, k)$  を、

$$u(\eta, k) \equiv \begin{cases} +1 \cdots +e_k < a_k(\eta) \leq +1 \text{ のとき} \\ 0 \cdots -e_k \leq a_k(\eta) \leq +e_k \text{ のとき} \\ -1 \cdots -1 \leq a_k(\eta) < -e_k \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{B.34})$$

と設定してみよう。各閾値  $e_k, e'_k$  が不等式

$$0 \leq e_k, e'_k < \|\psi_k\|^2 / \sup_{k \in L} \|\psi_k\|^2 \quad (\text{B.35})$$

を満たすように選ばれていれば、各  $u(\eta, k)$  を展開係数に持つ直交展開式 (B.26) で定義される写像  $T: \Phi \rightarrow \Phi$  が、B1章の4性質①~④を満たすことは、容易に確かめられる。2式 (B.28)、(B.29) も成り立つことも確かめられる。

例B6のパターンモデル  $T\eta$  と異なり、規格化直交展開係数  $a_k(\eta)$  を3値化して得られた特徴量  $u(\eta, k)$  を採用した本パターンモデル  $T\eta$  の、“パターン変形に対する頑健性”について、説明しよう。

本パターンモデル  $T\eta \in \Phi$  を持つパターン  $\eta \in \Phi$  から抽出された各  $a_k(\eta)$  が、

- (あ)  $+e_k < a_k(\eta)$  のとき、  
 $+e_k < a_k(\eta) \leq a_k(\eta') \vee a_k(\eta) \leq a_k(\eta')$   
 (い)  $-e_k' \leq a_k(\eta) \leq +e_k$  のとき、  
 $-e_k' \leq a_k(\eta') \leq a_k(\eta)$   
 $\vee a_k(\eta) \leq a_k(\eta') \leq +e_k$   
 (う)  $a_k(\eta) < -e_k'$  のとき、 $a_k(\eta') \leq a_k(\eta)$   
 $\vee a_k(\eta) \leq a_k(\eta') < -e_k'$

と変動した  $u(\eta', k)$  を持つパターン  $\eta' \in \Phi$  について、

$$\forall k \in L, u(\eta', k) = u(\eta, k) \quad (\text{抽出された特徴量の組の保存性}) \quad (\text{B.36})$$

$$\therefore T\eta' = T\eta \quad (\text{パターンモデルの保存性}) \quad (\text{B.37})$$

が成立し、(あ)、(い)、(う) のいう原パターン  $\eta \in \Phi$  の少量の変形 “ $\eta \rightarrow \eta'$ ” に対し、パターンモデルの頑健性があることがわかる。

同様な“変形に対する頑健性”は、例B3、例B4でも指摘され得ることがわかる。  $\square$

上の例B3、例B4、例B7、B4章の例B9における各閾値を適応的に決定することは、文献 [B6]、第8部の付録での手法とほぼ同様にしてなされる。

### B3. ユニタリ座標変換共変性を備えたパターンモデル $T\eta$

例B6、例B7並びに、次節の例8、例9のパターンモデル  $T\eta$  について、パターンモデル  $T\eta$  のユニタリ座標変換共変性を指摘する次の定理B6が成り立つ。

パターンモデルを選ぶとき、重要なことの1つは、

パターンモデル  $T\eta$  が任意のユニタリ座標変換  $U$

の下で、その構造形式が変わらないものを選ぶ

ことである。この構造形式の不変性は、ユニタリ同値性で表される。本定理B6によって、写像  $T: \Phi \rightarrow \Phi$  を固定して、ユニタリ作用素  $U$  を変えることにより、多品種パターンの認識に適切と思われる式 (B.40) のユニタリ同値なパターンモデル  $T\eta'$  を選べる可能性が開けたことになる。

本章においては、直交系  $\{\phi_k\}_{k \in L}$  を用い構成された式 (B.28) の形式のパターンモデル  $T\eta$  を、改めて、

$$T\eta = \sum_{k \in L} u(\eta, \phi_k) \cdot \phi_k \quad (\text{B.38})$$

と表そう。

[定理B6] (パターンモデル  $T\eta$  のユニタリ座標変換共変定理)

式 (B.28) の写像  $T: \Phi \rightarrow \Phi$  がB1章の4性質①～④を満たせば、任意のユニタリ作用素  $U$  について、

$$T\eta' \equiv \sum_{k \in L} u'(\eta, \phi_k') \cdot \phi_k' \quad (\text{B.39})$$

ここに、 $\phi_k' \equiv U^{-1}\phi_k$

と定義される写像  $T': \Phi \rightarrow \Phi$  は、同様に、B1章の4性質①～④を満たし、然も、 $T$  と、

$$T' = U^{-1}TU \quad (\text{B.40})$$

という“ユニタリ共変性 (ユニタリ同値性)” の関係にある。

(証明) ユニタリ作用素  $U$  の逆作用素  $U^{-1}$  はユニタリ作用素であり、 $\{\phi_k\}_{k \in L}$  は直交系であるから、式 (B.40) で定義される  $\{\phi_k'\}_{k \in L}$  は直交系である。よって、式 (B.40) の写像  $T': \Phi \rightarrow \Phi$  がB1章の4性質①～④を満たすことがわかる。

また、逆作用素  $U^{-1}$  はその共役作用素  $U^*$  であり、

$$\begin{aligned} \forall \eta \in \mathfrak{H}, \quad \forall k \in L, \\ (U\eta, \phi_k) &= (\eta, U^*\phi_k) = (\eta, U^{-1}\phi_k) = (\eta, \phi_k') \\ \therefore u(U\eta, \phi_k) &= u'(\eta, \phi_k') \end{aligned} \tag{B.41}$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} TU\eta &= \sum_{k \in L} (U\eta, \phi_k) \cdot \phi_k \\ &= \sum_{k \in L} u'(\eta, \phi_k') \cdot \phi_k \end{aligned}$$

がいえ、式 (B.40) での  $\phi_k'$  の定義を思い起こせば、 $U^{-1}$  の線形性から、

$$\begin{aligned} \forall \eta \in \mathfrak{H}, \quad U^{-1}TU\eta &= \sum_{k \in L} u'(\eta, \phi_k') \cdot U^{-1}\phi_k \\ &= \sum_{k \in L} u'(\eta, \phi_k') \cdot \phi_k' \\ &= T'\eta \end{aligned}$$

が得られ、証明が終わった。 □

尚、B1章の4性質①～④を満たす同様なパターンモデル（構造化モデル） $T\eta$  のユニタリ共変性が文献 [B5] の参考文献 [6] の4.4節で指摘されている。

#### B4. ユニタリ座標変換不変性を備えたパターンモデル $T\eta$

次の例B8, 例B9において必要な完全正規直交系  $\{\phi_k\}_k$  として、複素指数関数系  $\{\psi_k\}_k$  があることに注意しておこう。

$$M \equiv \{x_1, x_2\} \mid a_j \leq x_j < b_j \quad (j=1, 2) \tag{B.42}$$

と選び、ヒルベルト空間  $\mathfrak{H} = L_2(M; dx_1 dx_2)$  で考えよう。

$$k \equiv \langle k_1, k_2 \rangle, \quad x \equiv \langle x_1, x_2 \rangle, \quad i \equiv \sqrt{-1} \tag{B.43}$$

として、

$$\begin{aligned} \psi_k(x) &\equiv \text{cpt}(k_1, x_1) \cdot \text{cpt}(k_2, x_2) \\ k_j &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (j=1, 2) \end{aligned} \tag{B.44}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \text{cpt}(k_j, x_j) \\ \equiv [b_j - a_j]^{-1/2} \cdot \exp(+ik_j 2\pi (b_j - a_j)^{-1} (x_j - a_j)) \end{aligned} \tag{B.45}$$

と定義される関数系  $\{\psi_k\}_k$  は、2式 (B.20), (B.21) を満たすことがよく知られている。

$$H \equiv i^{-1} \partial / \partial x_1 + i^{-1} \partial / \partial x_2 \tag{B.46}$$

と定義される線形作用素  $H$  は、自己共役作用素であり、固有値方程式

$$(H\psi_k)(x) = \lambda_k \cdot \psi_k(x)$$

ここに、

$$\lambda_k = k_1 2\pi (b_1 - a_1)^{-1} + k_2 2\pi (b_2 - a_2)^{-1} \tag{B.47}$$

が成立しており、平行移動の性質

$$\begin{aligned} (\exp(-itH)\eta)(x_1, x_2) &= \eta(x_1 - t, x_2 - t) \\ (\exp(-itH_1)\eta)(x_1, x_2) &= \eta(x_1 - t, x_2) \\ (\exp(-itH_2)\eta)(x_1, x_2) &= \eta(x_1, x_2 - t) \end{aligned} \tag{B.48}$$

ここに、 $t$  は任意の実数であり、

$$H_1 \equiv i^{-1} \partial / \partial x_1 \tag{B.49}$$

$$H_2 \equiv i^{-1} \partial / \partial x_2 \quad (\text{B.50})$$

が成り立つ。式 (B.48) における3つの線形作用素

$$\exp(-itH), \exp(-itH_1), \exp(-itH_2) \quad (\text{B.51})$$

は、共に、H と可換なユニタリ作用素であることに注意しておこう。

[例B8] (規格化直交展開係数  $a_k(\eta)$  の絶対値に基づくパターンモデル  $T_\eta$ )

ノルムの自乗一致条件

$$\forall k \in L, \|\psi_k\|^2 = C \quad (k \in L \text{ に無関係な定数}) > 0 \quad (\text{B.52})$$

を満たす  $\{\psi_k\}_{k \in L}$  は直交系であるとしよう。

不等式

$$\forall k \in L, 0 \leq b_k(\eta) \leq 1 \quad (\text{B.53})$$

を満たす  $b_k(\eta)$  を、式 (B.33) の  $a_k(\eta)$  の絶対値  $|a_k(\eta)|$  を採って、

$$b_k(\eta) \equiv |a_k(\eta)| \quad (\text{B.54})$$

と定義し、その後、パターン  $\eta \in \Phi$  から抽出される第  $k \in L$  番目の特徴量  $u(\eta, k)$  を、

$$u(\eta, k) \equiv b_k(\eta) \quad (\text{B.55})$$

と設定してみよう。この各  $u(\eta, k)$  を展開係数に持つ直交展開式 (B.28) で定義される写像  $T: \Phi \rightarrow \Phi$  が、B1章の4性質①~④を満たし、2式 (B.30), (B.31) も成り立つことも、次の補助定理 B1 を適用して確かめられる。

[補助定理B1] (不動点定理)

条件式 (B.52) を満たす直交系  $\{\psi_k\}_{k \in L}$  について、

$$\eta = \sum_{k \in L} c_k \cdot \psi_k + \eta_\perp \quad (\text{B.56})$$

$$\text{ここに、} \forall k \in L, (\eta_\perp, \psi_k) = 0 \quad (\text{B.57})$$

から抽出される第  $k \in L$  番目の特徴量  $u(\eta, k)$  は、

$$u(\eta, k) = \begin{cases} 0 & \cdots \forall k \in L, c_k = 0 \text{ のとき} \\ |c_k| / \sup_{k \in L} |c_k| & \cdots \exists k \in L, c_k \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{B.58})$$

と計算され、よって、条件

$$\sup_{k \in L} |c_k| \in [0, 1] \wedge [\forall k \in L, c_k \geq 0] \quad (\text{B.59})$$

の下では、

$$T\eta = \begin{cases} 0 & \cdots \sup_{k \in L} |c_k| = 0 \text{ のとき} \\ \eta & \cdots \sup_{k \in L} |c_k| = 1 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{B.60})$$

が成り立つ。

(証明)  $\{\psi_k\}_{k \in L}$  は正規直交系であり、式 (B.56) の  $\eta \in \mathfrak{H}$  について、

$$\forall k \in L, (\eta, \psi_k) = c_k \cdot (\psi_k, \psi_k) = c_k \cdot c \quad (\text{B.61})$$

の成立がわかり、これから、本補助定理B1の成立は容易に確かめられる。□

例B6のパターンモデル  $T_\eta$  と異なる点は、

式 (B.33) の規格化直交展開係数  $a_k(\eta)$  の絶対値  $b_k(\eta)$  を採用して得られた本パターンモデル  $T_\eta$  が、例えば、直交系  $\{\psi_k\}_{k \in L}$  として、式 (B.44) の複素指数関数系を選定すれば、

式 (B.46) の自己共役作用素  $H$  と可換なユニタリ作用素、例えば、式 (B.48) でいう平行移動をもたらす式 (B.51) の3つの線形作用素についてのユニタリ座標変換不変性 (位置ずれ) を備えている

ことである。 □

[例B9] (規格化直交展開係数  $a_k(\eta)$  の絶対値の2値化に基づくユニタリ不変パターンモデル  $T_\eta$ )  
 $\{\phi_k\}_{k \in L}$  は直交系であるとしよう。

式 (B.54) の  $b_k(\eta)$  を用いて、パターン  $\eta \in \Phi$  から抽出される第  $k \in L$  番目の特徴量  $u(\eta, k)$  を、

$$u(\eta, k) \equiv \begin{cases} +1 \cdots +e_k \leq b_k(\eta) \leq +1 & \text{のとき} \\ 0 \cdots 0 \leq b_k(\eta) < +e_k & \text{のとき} \end{cases} \quad (\text{B.62})$$

と設定してみよう。各閾値  $e_k$  が不等式

$$0 < e_k \leq \|\phi_k\|^2 / \sup_{k \in L} \|\phi_k\|^2 \quad (\text{B.63})$$

を満たすように選ばれていれば、各  $u(\eta, k)$  を展開係数に持つ直交展開式 (B.28) で定義される写像  $T: \Phi \rightarrow \Phi$  が、B1章の4性質①~④を満たすことは、容易に確かめられる。2式 (B.30), (B.31) も成り立つことも確かめられる。

例B7のパターンモデル  $T_\eta$  と異なり、規格化直交展開係数  $a_k(\eta)$  の絶対値  $b_k(\eta)$  を2値化して得られた特徴量  $u(\eta, k)$  を採用した本パターンモデル  $T_\eta$  は、例B8で指摘したようなユニタリ座標変換不変性を備えていることであり、然も、例B7と同様な“パターン変形に対する頑健性”が成り立つことである。 □

## 付録C 組み合わせ山登り法に基づいた多段階想起形認識

本付録Cでは、古典的人工知能学での古典的状態空間探索法における“発見的探索法 (method of heuristic search) の最も簡単なものとしての山登り法 (hill-climbing method; HCM) [A23]”を適用して、処理の対象とする問題のパターン  $\varphi$  から多段階的に想起されるパターンモデル  $T_{\omega_{\text{cnr}}}(\varphi)$  を求める手法が研究される。ここに、第  $j \in J$  番目のカテゴリ  $\mathcal{C}_j$  の代表パターンが  $\omega_j$  である。また、処理の対象とする問題のパターン  $\varphi$  の集合  $\Phi$  とモデル構成作用素  $T$  との対  $[\Phi, T]$  は axiom 1 [B3], [B4] を満たすものとしておく。

このとき、パターン  $\varphi$  は第  $\text{cnr}(\varphi) \in J$  番目のカテゴリ  $\mathcal{C}_{\text{cnr}(\varphi)}$  に帰属すると決定され、この多段階的パターン想起法は、同時に、パターン認識の働きを提供しており、**多段階想起形認識法 (multi-stage associative recognition)** と呼ばれてもよいことに注意しておこう。

必ず最適順路 (optimal path) を見つけることのできる  $A^*$ -アルゴリズムより劣るけれども、有用な発見的探索としての  $A$ -アルゴリズムを適用可能にするために、探索途中の節点  $\eta \in \Phi$  の評価関数  $f(\eta)$  の推定値  $f'(\eta)$  についても、説明を加えよう。

### C1. 有限個のパターン変換作用素を用いた組み合わせ山登り法

探索場面において、経験で得られたヒューリスティック関数 (heuristic function)  $h$  などを使い、経験上最も有利な“1つの出発節点から有限個の目標節点の内の1つに至る最適順路”を、発見に

よって求めるのが発見的探索法である。出発節点から探索途中の中間節点  $\eta$  までに到達するのに要した順路のコストに関係なく、探索途中の中間節点  $\eta$  からもっとも確からしい目標節点を見つけるのにあとどれくらいの探索の労力を必要とするかを表すのがヒューリスティック関数  $h(\eta)$  であり、実際の探索場面では、その推定値  $h'(\eta)$  しか用いることができない。中間節点  $\eta$  を展開するとは、 $\eta$  の子節点をすべて求めることを指すのであるが、発見的探索法で最も簡単なのは山登り法であり、探索途中の中間節点  $n$  の展開によって得られた子節点の中から推定値  $h'$  が最も小さい節点  $\psi$  を選び、次にその節点  $\psi$  を展開するという戦略で探索を続けるものである。

処理の対象とする問題のパターン  $\varphi$  の集合  $\Phi$  を想定し、パターン  $\varphi$  を変換する作用素（探索作用素としてのパターン変換作用素）が  $n$  個あるものとし、その作用素集合を

$$A(k) : \Phi \rightarrow \Phi, k \in N \equiv \{1, 2, \dots, n\} \quad (C.1)$$

とおく。そして、

- (イ) 十分小さい正数  $\epsilon > 0$  を選び、固定し、
- (ロ) 十分大きい正整数  $t^* (\gg |J|)$  を選び、固定する。

次章の組み合わせ山登り法 (combinatorial HCM) に基づく多段階パターン想起法は、簡単にいえば、

各カテゴリ番号  $i \in J$  について、

$$\|T\varphi - T\omega_i\| \geq \epsilon \quad (C.2)$$

の場合、

$$\|TA(k_1)T\varphi - T\omega_i\| \geq \epsilon$$

$$\|TA(k_1)T\cdot TA(k_1)T\varphi - T\omega_i\| \geq \epsilon$$

...

$$(C.3)$$

が成立するが、或る1つのカテゴリ番号  $j \in J$  についてのみ、

$$\|TA(k_1)T\cdot TA(k_{t-1})T\cdots TA(k_2)T\cdot TA(k_1)T\varphi - T\omega_j\| < \epsilon \quad (C.4)$$

が成立するようなパターン変換作用素の列

$$A(k_1), A(k_2), \dots, A(k_{t-1}), A(k_t) \quad (C.5)$$

を選定してゆく方法である。このとき、パターン  $\varphi$  は第  $j \in J$  番目のカテゴリ  $\mathcal{C}_j$  に帰属すると認識される訳である。

山登り法は、次に展開する節点を探索途中の中間節点としての親節点の展開から得られた子節点の中からのみ選び、**最良優先探索法** (best-first search method) が次に展開する節点を、探索途中の中間節点としての親節点の展開から得られた子節点の中からと、それまで得られた節点でまだ展開されていないすべての節点とから  $h'$  が最小のものを選ぶのと異なり、探索の視野が狭い。それ故、**循環路** (cycle) の生成を避けるためために**閉路** (circuit) の排除が行われず、まして、最適順路の発見をも保証しない。目標節点が2つ以上であれば、真の目標節点以外の目標節点に到達することすらある。閉路の排除が行われ、最適順路の発見を保障する戦略ではないが、有限の状態空間では探索に必ず成功する最良優先探索とは異なり、探索上のこの3つの欠点を有する上述の山登り法では、探索途中の中間節点  $\eta \in \Phi$  のヒューリスティック関数  $h$  の予測値  $h'$  として、

$$h'(\eta) = \min_{j \in J} \|\eta - T\omega_j\| \quad (C.6)$$

を使用可能なことに注意しておこう。

## C2. 多段階パターン想起形認識法のアルゴリズム

提案される組み合わせ多段階パターン想起法は次のように説明される。組み合わせという修飾語の意味は、式 (C.1) の作用素集合が有限集合であり、従って、1つの親節点としてのパターン  $\varphi \in \Phi$  に1つの探索作用素  $A(k)$  を適用して得られるすべての子節点の集合が有限 ( $= |N| = n$  個) であるからである。

### [組み合わせ山登り法に基づく多段階パターン想起法]

処理の対象とする問題のパターンを  $\varphi \in \Phi$  とする。

① (第0想起段階；初期段階)

$t=0$  のとき

$$\varphi_t|_{t=0} \equiv T\varphi \quad (C.7)$$

とおき、

$$\exists j \in J, \|\varphi_t|_{t=0} - T\omega_j\| < \varepsilon \quad (C.8)$$

ならば、

$$\text{cnr}(\varphi) \equiv j \in J \quad (C.9)$$

$\text{stp}(t; j, \varphi)|_{t=0} =$

$$\begin{cases} 0 & \text{if } j = \text{CN}(\varphi) \\ \infty & \text{if } j \neq \text{CN}(\varphi) \end{cases} \quad (C.10)$$

とおき、④へ進む。

ここに、式 (1.10) の  $\text{cnr}$  は category number の意であり、式 (1.11) の  $\text{stp}$  は step の意である。

$$\forall j \in J, \|\varphi_t|_{t=0} - T\omega_j\| \geq \varepsilon \quad (C.11)$$

というように、式 (C.8) が成立していなければ、

$$t=1 \quad (C.12)$$

とおき、②へ進む。

$t=1, 2, 3, \dots$  につき、

$$\varphi_t(k) \equiv TA(k)T \cdot \varphi_{t-1} \in \Phi, k \in N \quad (C.13)$$

$$\text{OPN}(j; t) \equiv \text{argmin}_{k \in N} \|\varphi_t(k) - T\omega_j\| \in N \quad (C.14)$$

$\text{CN}(\varphi; t)$

$$\equiv \text{argmin}_{j \in J} \|\varphi_t(\text{OPN}(j; t)) - T\omega_j\| \in J \quad (C.15)$$

を定義しておく。式 (C.14) の  $\text{OPN}$  は operator number の意である。

このとき、任意のパターン  $\varphi \in \Phi$  につき、2つの不等式

$$\begin{aligned} \forall t \in \{1, 2, \dots\}, \forall j \in J, \forall k \in N, \\ \|\varphi_t(\text{OPN}(j; t)) - T\omega_j\| \leq \|\varphi_t(k) - T\omega_j\| \end{aligned} \quad (C.16)$$

$$\begin{aligned} \forall t \in \{1, 2, \dots\}, \forall j \in J, \\ \|\varphi_t(\text{OPN}(\text{CN}(\varphi; t); t)) - T\omega_{\text{CN}(\varphi; t)}\| \\ \leq \|\varphi_t(\text{OPN}(j; t)) - T\omega_j\| \end{aligned} \quad (C.17)$$

が成り立っている。

② (想起探索打ち切りの判定)

$t=t^*+1$  に到達したとき、

$$\text{cnr}(\varphi) = \text{argmin}_{j \in J} \|\varphi_t - T\omega_j\| \in J \quad (C.18)$$

$\text{stp}(t; j, \varphi) =$

$$\begin{cases} t^*+1 & \text{if } j = \text{cnr}(\varphi) \\ \infty & \text{if } j \neq \text{cnr}(\varphi) \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

とおき、④へ進む。

③ (反復想起段階)

$t-1 (= 0, 1, 2, \dots) < t^*$  のとき、

$$\forall j \in J, \|\varphi_{t-1} - T\omega_j\| \geq \epsilon \quad (\text{C.20})$$

が成立していることに注意する。

任意であるが、固定した1つのカテゴリ番号  $j \in J$  を選ぶ。このとき、式 (C.13) の各  $\varphi_t(k) \in \Phi$  ( $k \in N$ ) を求め、式 (C.14) の  $\text{OPN}(j; t) \in N$  を決定し、

$$\exists j \in J, \|\varphi_t(\text{OPN}(j; t)) - T\omega_j\| < \epsilon \quad (\text{C.21})$$

であれば、式 (C.15) の  $\text{CN}(\varphi; t) \in J$  を求め、

$$\text{cnr}(\varphi) = \text{CN}(\varphi; t) \in J \quad (\text{C.22})$$

$\text{stp}(t; j, \varphi) =$

$$\begin{cases} t & \text{if } j = \text{cnr}(\varphi) \\ \infty & \text{if } j \neq \text{cnr}(\varphi) \end{cases} \quad (\text{C.23})$$

とおき、④へ進む。

$$\forall j \in J, \|\varphi_t(\text{OPN}(j; t)) - T\omega_j\| \geq \epsilon \quad (\text{C.24})$$

であれば、

$$\varphi_t = \varphi_t(\text{OPN}(\text{CN}(\varphi; t); t)) \quad (\text{C.25})$$

とおき、その後、 $t$  を1つ増加させ、②へ戻る。

④ (終了段階)

パターンモデル  $T\omega_{\text{cnr}(\varphi)}$  は、入力パターン  $\varphi$  を probe として、記憶内容

$\{T\omega_j\}_{j \in J}$  から組合せ山登り法に基づいて第  $\text{stp}(t; \text{cnr}(\varphi), \varphi)$  段階で想起された内容である (C.26)

という。 □

また、上述の組み合わせ山登り法に基づく多段階パターン想起法によって、

入力パターン  $\varphi$  は第  $\text{cnr}(\varphi)$  番目のカテゴリ

$\mathcal{C}_{\text{cnr}(\varphi)}$  に帰属している

と、認識されるという。 (C.27)

式 (C.1) のパターン変換作用素の集合  $\{A(k)\}_{k=1,2,\dots,N}$  を如何に適切に選定するかが問題である。

### C3. 組合せ山登り法に基づいた多段階想起法の検討

単段階の想起過程では、当初予定された記憶パターンが正確に検索され得ない“probeとしての入力パターン”が多すぎる。それ故、記憶パターンに近い入力パターンしか、probeとして用いられない。特に、線形なパターン想起作用素  $A$  による単段階想起過程

$$“\varphi \rightarrow A\varphi” \quad (\text{C.28})$$

では、入力  $\varphi$  が当初予定された記憶パターンである場合のみ、出力パターン

$$A\varphi \quad (\text{C.29})$$

がその記憶パターンになるだけである。

それで、多段階の非線形な想起過程を採用することになるが、このとき、以下のことを考慮す

る必要がある：

(i) 線形なパターン想起作用素 A は当初予定された記憶パターン以外のパターン（この種の偽の不動点パターンは記憶パターンの1次結合であり、通常連続無限個存在する）を A の不動点としてしまう。この不都合な事態を避ける1つの方法として、線形な A の代わりに、axiom 1を満たすモデル構成作用素 T をその両側に配置した非線形な TAT を採用することがある。axiom 1を満たすモデル構成作用素 T は非線形である。探索作用素 A 自体も非線形なものを採用することが必要とされよう。

この場合、式 (C.28) のパターン想起過程は

$$“\varphi \rightarrow (TAT) T\varphi” \quad (C.30)$$

となり、方程式

$$\exists j \in J, (TAT) T\varphi = T\omega_j \quad (C.31)$$

が成立していれば、想起された出力パターン

$$(TAT) T\varphi \quad (C.32)$$

は第  $j \in J$  番目のカテゴリ  $\mathcal{C}_j$  の代表パターン  $\omega_j$  のモデル  $T\omega_j$  であるといえ、入力パターン  $\varphi \in \Phi$  は第  $j \in J$  番目のカテゴリ  $\mathcal{C}_j$  に帰属すると、決定される。

(ii) 上述の不都合な事態を避ける1つの方法として、或る段階の想起で得られたパターンに雑音を加えたものを次の想起段階の入力として用いることが考えられる。勿論、終了に近い段階の想起においては、この種の雑音を加えると、終了することが阻止されてしまうことに注意しておく必要がある。

(iii) 上述の不都合な事態を避ける1今つの方法として、その想起段階で得られた想起内容に関する不動点方程式の成立

$$\exists t \in \{0, 1, 2, \dots\} \varphi_t = (TAT) \varphi_t \quad (C.33)$$

where

$$\varphi_0 = T\varphi \quad (C.34)$$

$$\varphi_{t+1} = (TAT) \varphi_t, t=0, 1, 2, \dots \quad (C.35)$$

を多段階想起過程の終了としないで、当初予定された記憶パターンに関してのみ 0 となるポテンシャルエネルギー E を定義して、 $E=0$  を多段階想起過程の終了基準として採用することがある。しかしながら、このような E を発見することは難しい。

(iv) 多段階想起過程が進展するにつれて、特に、多段階想起過程が終了に近い時点以後、ポテンシャルエネルギー E が減少し続けることが多段階想起過程の収束のために要求される。このような E を定義することは難しい。

(v) ある1つの記憶パターン  $T\omega_j$  が多段階想起の働きによって正確に想起できるような “probe としての入力パターン  $\varphi \in \Phi$ ” の集合

$$\Phi(j)$$

$$\equiv \{ \varphi \in \Phi \mid \text{第 } j \in J \text{ 番目のカテゴリ } \mathcal{C}_j \text{ に帰属し}$$

ているパターン  $\varphi$  からの想起出力パターンは

$$T\omega_j \text{ である。} \} \quad (C.36)$$

につき、

$$i \neq j \Rightarrow \Phi(i) \cap \Phi(j) = \emptyset \quad (C.37)$$

という具合に、記憶パターンが異なれば、互いに素（非交差）である（共通部分を持たない）こ

とは通常成立する。しかしながら、与えられた  $\Phi_0$  に対し、 $\Phi(j)$  を当初予定された記憶パターンすべてにわたって和をとって得られるパターン集合  $\cup_{j \in J} \Phi(j)$  に関し、

$$\cup_{j \in J} \Phi(j) = \Phi - \Phi_0 \quad (C.38)$$

が成立するような多段階想起の働き<sup>2)</sup>を発見することも難しい。□

尚、多段階パターン想起過程に付随する上述の (iii), (iv) でのポテンシャル  $E$  の例として、SSポテンシャル [B3], [B4] がある。

#### C4. A-アルゴリズムに基づいた多段階想起法の検討

C2章で説明された山登り法を最良優先探索法に改良することは容易である。そのみならず、ヒュリスティック関数  $h$  の推定値  $h'$  が不完全であっても出発節点から目標節点へ至る順路の発見が確実であると言う意味で、最良優先探索法よりも優秀な探索法としてのA-アルゴリズムに改良することもできる。A-アルゴリズムは探索には成功するが、最適順路を発見できるという保証はない。

ある探索作用素  $A$  の適用で、パターン  $\eta \in \Phi$  からパターン  $\psi \in \Phi$  へと、

$$\psi = A\eta \quad (C.39)$$

と変換でき、このときの節点  $\eta \in \Phi$  から節点  $\psi \in \Phi$  へ至る枝  $e = \langle \eta \rightarrow \psi \rangle$  の探索労力 ( $A$  の運用に伴うコスト)  $\text{cost}(e) \equiv \text{cost}(\langle \eta \rightarrow \psi \rangle)$  として、

$$\begin{aligned} \text{cost}(e) &\equiv \text{cost}(\langle \eta \rightarrow \psi \rangle) \equiv \|\psi - \eta\| \\ &= \|A\eta - \eta\|, \text{ where } \psi = A\eta \end{aligned} \quad (C.40)$$

を採用して、方向付けられた枝  $e_i$  の系列  $\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$  の探索労力を

$$\text{cost}(\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle) \equiv \sum_{i=1}^n \text{cost}(e_i) \quad (C.41)$$

と定義しよう。

その探索時点までに見つけられた出発節点  $T\varphi$  から  $\eta$  へ至る最適順路の探索労力  $g(\eta)$  の推定値  $g'(\eta)$  として、

$$\begin{aligned} g'(\eta) &\equiv \text{cost}(\langle \varphi \rightarrow \eta_1, \eta_1 \rightarrow \eta_2, \eta_2 \rightarrow \dots, \rightarrow \eta \rangle) \end{aligned} \quad (C.42)$$

を採用し、式 (C.6) の  $h'(\eta)$  との和

$$f'(\eta) = g'(\eta) + h'(\eta) \quad (C.43)$$

を節点  $\eta$  の評価関数 (evaluation function) の推定値としよう。そうすると、式 (C.1) のパターン変換作用素の集合  $\{A(k)\}_{k=1,2,\dots,N}$  が適切に選定されており、出発節点  $T\varphi$  から目標節点の1つ  $T\omega_j$  へ至る順路が存在すれば、必ず求めることが可能であるが、コストの最小  $\min_{j \in J} g(T\omega_j)$  の順路 (最適順路) を発見できるという保証がない **A-探索アルゴリズム** [A23] を考えることができる。しかしながら、現在の探索時点までに生成されたすべての展開済み、並びに未展開の節点の中から、循環路の生成を避けながら、 $f'(\eta)$  が最小の節点  $\eta$  を展開しながら、探索を行うこのA-アルゴリズムの記述は紙面の都合上、割愛される。

#### 付録D $\epsilon$ -認識法 ( $\epsilon$ -最小ステップ認識法)

本付録Dでは、単なる最大類似度認識法 (単段階認識法) [B4] とは異なり、認識の途中の第1

段階で強制的に打ち切ったとき最大類似度認識法と等価となる計算機シミュレーション [B21] 済の不動点変換形想起認識法 (多段階認識法) の原理 [B2], [B3] を踏まえ、1つの“**仮説立証主義的多段階認識法**”が説明される。

まず、第 $j \in J$ 番目のカテゴリ  $\mathcal{C}_j$  の代表パターン  $\omega_j$  のモデル  $T\omega_j$  の系  $T\omega_j, j \in J$  は1次独立であることを要請し、**補間条件**

$$AT\omega_j = T\omega_j, j \in J \quad (D.1)$$

を満たす自己想起作用素 (autoassociative operator)  $A$  を構成する。

認識処理の対象とする問題のパターン  $\varphi \in \Phi$  に対し、仮説

認識処理しなければならない問題のパターン  $\varphi$  は

$$\text{第 } i \in J \text{ 番目のカテゴリに帰属する} \quad (D.2)$$

を立て、与えられた正数  $\epsilon$  について、

$$\|T\omega_i - (TAT)^n T\varphi\| < \epsilon \quad (D.3)$$

$$\text{ここに、}(TAT)^0 \equiv I \text{ (恒等作用素), } (TAT)^n \equiv A^{n-1} \cdot A \quad (D.4)$$

を満たす最小の非負正数  $n$  を、 $n_i(\epsilon)$  と表す。

その後、

$$n_i(\epsilon)' \equiv \begin{cases} n_i(\epsilon) & \text{if } 0 \leq n_i(\epsilon) \leq \text{card}(J) \\ \text{card}(J) + 1 & \text{if } \text{card}(J) < n_i(\epsilon) \end{cases} \quad (D.5)$$

ここに、 $\text{card}(J)$  は集合  $J$  に含まれる要素の総数である。高々、カテゴリ総数  $\text{card}(J)$  プラス1より大きくないこの非負整数  $n_i(\epsilon)'$  は、入力パターン  $\varphi$  のモデル  $T\varphi$  が自己想起作用素  $A$  の何回の適用によって第  $i \in J$  番目のカテゴリ  $\mathcal{C}_i$  の代表パターン  $\omega_i$  のモデル  $T\omega_i$  にノルム距離誤差  $\epsilon$  の範囲内に落ちるかを上限回数を決けて評価したものである。このように、 $n_i(\epsilon)'$  は、自己想起認識ステップ数を表している。従って、以下の (i), (ii) で提案される手法は、 **$\epsilon$ -最小ステップ認識法**と呼ばれてよいものである。

**[ $\epsilon$ -最小ステップ認識法]**

$$(i) \exists i \in J, 0 \leq n_i(\epsilon)' \leq \text{card}(J) \quad (D.6)$$

のとき、

$$\begin{aligned} \text{argmin}_{i \in J} n_i(\epsilon)' &= j \in J \\ \Rightarrow \varphi &\text{ belongs to the } j\text{-th category } \mathcal{C}_j \end{aligned} \quad (D.7)$$

と、認識推断する。

$$(ii) \forall i \in J, n_i(\epsilon)' = \text{card}(J) + 1 \quad (D.8)$$

のとき、 $\varphi$  は認識不能であると推断する。□

補間条件式 (D.1) を満たす写像  $A$  を構成する手法として、例えば、以下の3構成 I, II, IIIがある。

**構成 I. 直交性**

$$(T\omega_i, T\omega_j) = 0 (i \neq j) \quad (D.9)$$

が成立していれば、

$$AT\varphi = \sum_{i \in J} [(T\varphi, T\omega_i) / (T\omega_i, T\omega_i)] \cdot T\omega_i \quad (D.10)$$

と設定される写像  $A$  は、補間条件式 (D.1) を満たす。

構成Ⅱ. 式 (D.9) の直交性が成立していない場合、  
 カテゴリ番号の成す有限集合  $J$  が

$$J = \{1, 2, \dots, m\} \quad (D.11)$$

と表されるとしよう。

$$\varphi_i' \equiv T\omega_i \quad (D.12)$$

$$\varphi_{k+1}' \equiv T\omega_{k+1} - \sum_{j=1}^k (T\omega_{k+1}, \varphi_j' \parallel \varphi_j' \parallel^{-1}) \cdot \varphi_j' \parallel \varphi_j' \parallel^{-1}, \quad k+1 \in \{2, 3, \dots, m\} \quad (D.13)$$

とすれば、直交性

$$(\varphi_i', \varphi_j') = \parallel \varphi_i' \parallel^{-1} \cdot \parallel \varphi_j' \parallel^{-1} \cdot \delta_{ij} \quad (D.14)$$

$$\text{ここに、} \delta_{ij} = 1 \text{ if } i=j, = 0 \text{ if } i \neq j \quad (D.15)$$

が成り立つ。以下の

$$A_1, A_2, \dots, A_m$$

を構成し、

$$A = A_m, A_m \equiv A_1 + \sum_{j=1}^{m-1} (\Delta A_j) \quad (D.16)$$

$$(D.17)$$

とすればよい。そうすれば、この写像  $A$  は、補間条件式 (D.1) を満たす：

任意の  $\varphi \in \Phi$  に対し、

$$A_1 \varphi \equiv (\varphi, \varphi_1' \parallel \varphi_1' \parallel^{-1}) \cdot T\omega_1 \parallel \varphi_1' \parallel^{-1} \quad (D.18)$$

$$A_{k+1} \varphi$$

$$\equiv A_k \varphi + (\Delta A_k) \varphi, \quad k+1 \in \{2, 3, \dots, m\} \quad (D.19)$$

ここに、

$$(\Delta A_k) \varphi$$

$$\equiv (\varphi, \varphi_{k+1}' \parallel \varphi_{k+1}' \parallel^{-1}) \cdot [T\omega_{k+1} - A_k T\omega_{k+1}] \parallel \varphi_{k+1}' \parallel^{-1}. \quad (D.20)$$

構成Ⅲ. 式 (D.9) の直交性が成立していない場合、SS理論における構造受精作用素 [B3], [B4], [B6]  $A(J)$  は補間条件式 (D.1) を満たす。□

尚、構成Ⅱで指摘されている“式 (D.17) の写像  $A$  が補間条件式 (D.1) を満たすこと”の証明は紙面の都合上、割愛される。

## 付録E 特徴抽出写像 $u : \Phi \times L \rightarrow R$ の推定法

本付録Eでは、その認識結果が知られている試験入力パターンモデル  $T\varphi_n$  の集合  $T\varphi_n$ ,  $n \in N$  から抽出された特徴量の集合  $\underline{u}(T\varphi_n)$  の族  $\underline{u}(T\varphi_n)$ ,  $n \in N$  から、一般的な試験入力パターンモデル  $T\varphi$  の特徴量の集合  $\underline{u}(T\varphi)$  を推定する手法が研究される。

### E1. サンプルパターン集合と、関数 $C\epsilon(t)$

#### E1.1 2つのパターンモデル $T\varphi$ , $T\varphi_n$ のなす角 $a_n(\varphi)$

特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \rightarrow R \text{ (実数全体の集合)} \quad (E.1)$$

が判明していて、サンプルパターン  $\varphi_n$  のパタンモデル  $T\varphi_n$  の集合

$$T\varphi_n, n \in N \quad (E.2)$$

$$\text{where } \|T\varphi_n - T\varphi_q\| > 0 (n \neq q) \quad (E.3)$$

についての特微量の組  $\underline{u}(\varphi_n)$  の集合

$$\underline{u}(T\varphi_n) \equiv \{ \underline{u}(T\varphi_n, \ell) \mid \ell \in L \}, n \in N \quad (E.4)$$

が判明しているものとする。ここに、 $\underline{u}(T\varphi_n, \ell)$  は第  $n \in N$  番目のパターンモデル  $T\varphi_n \in \Phi$  から抽出された第  $\ell \in L$  番目の特微量である。条件

$$(T\varphi, T\varphi_n) \text{ は実数値である} \quad (E.5)$$

の下で、2つのパターンモデル  $T\varphi, T\varphi_n$  のなす角

$$\begin{aligned} a_n(\varphi) \\ \equiv \cos^{-1} [(T\varphi, T\varphi_n) / (\|T\varphi\| \cdot \|T\varphi_n\|)] \end{aligned} \quad (E.6)$$

が与えられたとする。ここに、

$$0 \leq a_n(\varphi) \leq \pi \quad (E.7)$$

である。

### E1.2 関数 $C_\epsilon(t)$

正の実数パラメータ  $\epsilon > 0$  を導入して、

$$C_\epsilon(t) \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } |t| \leq \epsilon \\ -|t|/\epsilon + 2 & \text{if } \epsilon < |t| < 2\epsilon \\ 0 & \text{if } 2\epsilon \leq |t| \end{cases} \quad (E.8)$$

$$\quad (E.9)$$

$$\quad (E.10)$$

と定義される関数

$$C_\epsilon: R \rightarrow \{y \mid 0 \leq y \leq 1\} \quad (E.11)$$

は、

$$\epsilon < |t| < 2\epsilon \text{ のとき, } 0 < C_\epsilon(t) < 1 \quad (E.12)$$

$$\wedge [\epsilon < t_1 < t_2 < 2\epsilon \Rightarrow C_\epsilon(t_1) > C_\epsilon(t_2)] \quad (E.13)$$

$$\wedge [-2\epsilon < t_1 < t_2 < -\epsilon \Rightarrow C_\epsilon(t_1) < C_\epsilon(t_2)] \quad (E.14)$$

を満たす。

## E2.一般的な試験入力パターンモデル $T\varphi$ の特微量の集合 $\underline{u}(T\varphi)$

### E2.1 関数 $s: \Phi \times N \rightarrow \{y \mid 0 \leq y \leq 1\}$ の構成

各パターンモデル  $T\varphi_n$  のなす角  $a_n(\varphi)$  が確率  $s(\varphi, n)$  で存在するようなパターンモデル  $T\varphi$  の特微量の集合が

$$\underline{u}(\varphi) \equiv \{u(\varphi, \ell) \mid \ell \in L\} \quad (E.15)$$

であるような特徴抽出写像

$$u: \Phi \times L \rightarrow R \quad (E.16)$$

を構成しよう。

$$\begin{aligned} s(\varphi, n) \\ \equiv [1 - C_\epsilon(a_n(\varphi))]^{-1} / \sum_{m \in N} [1 - C_\epsilon(a_m(\varphi))]^{-1}, \varphi \in \Phi, n \in N, \end{aligned} \quad (E.17)$$

と定義される関数

$$s: \Phi \times N \rightarrow \{y \mid 0 \leq y \leq 1\} \quad (E.18)$$

を導入すれば、次の定理E1が成り立ち、

$S(\varphi_n, n)$  は、

パターンモデル  $T\varphi \in \Phi$  が第  $n \in N$  番目のパターンモデル  $T\varphi_n \in \Phi$  となす角が  $a_n(\varphi)$  である確率であること

を解釈ならしめる。

[定理E1] (関数  $S$  の諸性質)

条件

$$\forall n \in N, \forall q \in N - \{n\}, \varepsilon < a_n(\varphi_q) \quad (E.19)$$

の下で、次の (i) ~ (iii) が成り立つ。

(i) (直交性; orthogonality)

$$\forall n \in N, S(\varphi_n, n) = 1.$$

$$\forall n \in N, \forall q \in N - \{n\}, S(\varphi_n, q) = 0.$$

(ii) (規格化条件; probability condition)

$$\forall n \in N, \sum_{n \in N} S(\varphi, n) = 1.$$

(iii) (写像  $T$  の下での不変性; invariance under mapping  $T$ )

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall n \in N, S(T\varphi, n) = S(\varphi, n).$$

(証明) (i), (ii), (iii) の成立を示す。

まず、

(一)  $\varphi = \varphi_n$  とすると、

$$(T\varphi, T\varphi_n) / [\|T\varphi\| \cdot \|T\varphi_n\|] = 1$$

$$\therefore a_n(\varphi) = 0 \quad \therefore \text{式 (E.5)}$$

$$\therefore C_\varepsilon(a_n(\varphi)) = 1 \quad \therefore \text{式 (E.8)}$$

$$\therefore C_{nn} \equiv [1 - C_\varepsilon(a_n(\varphi))]^{-1} = \infty$$

(E.20)

(二) 任意の  $q \in N - \{n\}$  を選び、 $\varphi = \varphi_q$  とすると、

$$|(T\varphi, T\varphi_n) / [\|T\varphi\| \cdot \|T\varphi_n\|]| < 1 \quad \therefore \text{式 (#4)}$$

であるが、

$$\varepsilon < a_n(\varphi) \quad \therefore \text{式 (E.19)}$$

$$\therefore 0 \leq C_\varepsilon(a_n(\varphi)) < 1 \quad \therefore \text{2式 (E.9), (E.10)}$$

$$\therefore 0 \leq C_{nq} \equiv [1 - C_\varepsilon(a_n(\varphi))]^{-1} < \infty$$

(E.21)

に注意する。

(i) については、

$$S(\varphi_n, n)$$

$$= [1 - C_\varepsilon(a_n(\varphi_n))]^{-1} / \sum_{m \in N} [1 - C_\varepsilon(a_m(\varphi_n))]^{-1} \quad \therefore \text{式 (E.16)}$$

$$= 1 / [1 + \sum_{m \in N - \{n\}} C_{mn} / C_{nn}]$$

$$= 1/1 \quad \therefore \text{2式 (E.20), (E.21)}$$

$$= 1$$

であり、

(二) 任意の  $k \in J - \{j\}$  を選び、 $\varphi = \omega_k$  とすると、

$$S(\varphi_q, n)$$

$$= [1 - C_\varepsilon(a_n(\varphi_q))]^{-1} / \sum_{m \in N} [1 - C_\varepsilon(a_m(\varphi_q))]^{-1} \quad \therefore \text{式 (E.17)}$$

$$= C_{nq} / [C_{qq} + \sum_{m \in N} C_{mq}] \quad \therefore \text{式 (E.21)}$$

$$= C_{nq} / [\infty + \sum_{m \in N} C_{mq}] \quad \therefore \text{式 (E.20)}$$

$$= 0 \quad \therefore \text{式 (E.21)}$$

を得、(i) の成立が示された。

(ii) の成立は、条件式 (E.19) の下での、S の定義式 (E.17) から明らかである。

(iii) の成立は、

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall n \in N, a_n(T\varphi) = a_n(\varphi) \quad (\text{E.22})$$

から明らかである。 □

## E.2.2 特徴抽出写像 $u: \Phi \times L \rightarrow R$ の構成

関数  $s$  の定義式 (E.17) に引き続いて、

$$u(\varphi, \ell) \equiv \sum_{n \in N} s(\varphi, n) \cdot u'(T\varphi_n, \ell) \quad \ell \in L, \varphi \in \Phi \quad (\text{E.23})$$

と定義される式 (E.16) の特徴抽出写像  $u$  を定義すれば、次の定理E2が成り立つ。つまり、

その認識結果が知られている試験入力パターンモデル  $T\varphi_n$  の集合  $T\varphi_n, n \in N$  から抽出された特徴量の集合  $\underline{u}(T\varphi_n)$  の族

$$\underline{u}(T\varphi_n), n \in N$$

から、一般的な試験入力パターンモデル  $T\varphi$  の特徴量の集合  $\underline{u}(T\varphi)$  が得られたことになる。

[定理E2] (構成された特徴抽出写像  $u$  の3性質)

(i) (T-不変性)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \ell \in L, u(T\varphi, \ell) = u(\varphi, \ell)$$

が成り立ち、条件式 (E.19) の下で、次の (ii), (iii) が成立する。

(ii) (補間性)  $\forall n \in N, \forall \ell \in L,$

$$u(\varphi_n, \ell) = u'(\varphi_n, \ell)$$

(iii) 2条件

$$a_n(\varphi) \leq \epsilon \quad (\text{E.24})$$

$$\wedge \forall q \in N - \{n\}, \epsilon < a_q(\varphi) \quad (\text{E.25})$$

の下で、直交性

$$\forall n \in N, S(\varphi, n) = 1 \quad (\text{E.26})$$

$$\forall n \in N, \forall q \in N - \{n\}, S(\varphi, q) = 0 \quad (\text{E.27})$$

と、補間性

$$\forall \ell \in L, u(\varphi, \ell) = u'(\varphi_n, \ell) \quad (\text{E.28})$$

とが成り立つ。

(証明) (i) については、

$$\begin{aligned} u(T\varphi, \ell) &= \sum_{n \in N} s(T\varphi, n) \cdot u'(T\varphi_n, \ell) \quad \therefore \text{式 (E.23)} \\ &= \sum_{n \in N} s(\varphi, n) \cdot u'(T\varphi_n, \ell) \quad \therefore \text{定理1の (iii)} \\ &= u(\varphi, \ell) \quad \therefore \text{式 (E.23)} \end{aligned}$$

を得、示された。

(ii) については、

$$u(\varphi_n, \ell)$$

$$= \sum_{q \in N} s(\varphi_n, q) \cdot u(T\varphi_q, \ell) \quad \because \text{式 (E.23)}$$

$$= u(T\varphi_n, \ell)$$

を得、示された。

(iii) については、

(一)

$$\therefore C_e(a_n(\varphi)) = 1 \quad \because \text{2式 (E.8), (E.24)}$$

$$\therefore C_{nn} \equiv [1 - C_e(a_n(\varphi))]^{-1} = \infty \quad (\text{E.26})$$

(二) 任意の  $q \in N - \{n\}$  を選び、

$$\therefore 0 \leq C_e(a_n(\varphi)) < 1 \quad \because \text{3式 (E.9), (E.10), (E.25)}$$

$$\therefore 0 \leq C_{nq} \equiv [1 - C_e(a_n(\varphi))]^{-1} < \infty \quad (\text{E.27})$$

を得、定理E1の (i) の証明と同様にして、2式 (E.26), (E.27) が示される。

補間性である式 (E.28) については、2式 (E.26), (E.27) を考慮すると、(ii) と同様にして、示される。□

## 付録F 包含情報量 $I(\varphi, \psi)$ の意味

本付録Fでは、Shannonの情報理論での通信容量に対応して、包含情報量 [B27]  $I(\varphi, \psi)$  が考えられることが説明される。

### A3.1 包含情報量 $I(\varphi, \psi)$ の意味

瞬時振幅の確率分布が正規分布に従うような雑音をガウス雑音といい、その電力スペクトル密度が問題とする周波数範囲で一定であるような雑音を白色雑音であるという。周波数帯域と電力とが与えられた情報源において最大エントロピー（平均情報量）を与えるのは、**白色ガウス雑音** (white gaussian noise) であることに注意する。

Shannonの情報理論では、雑音  $n$  が送信信号  $x$  と独立に加わる通信路を介し、 $x$  を送信した場合の受信信号

$$y = x + n \quad (\text{F.1})$$

に注目し、送信信号  $x$  の電力  $S$  が一定とした場合の、通信容量（通信路を通して、送り得る1秒あたりの平均情報量；channel capacity） $C$  は、通信路に加わる“各標本値が独立な白いガウス雑音の分散（雑音電力） $N$ ”を導入して、

$$C/(2W) = (1/2) \cdot \log_e [ \{S+N\}/N ] = (1/2) \cdot \log_e [ S/N + 1 ] \quad (\text{F.2})$$

つまり、

$$C/(2W) = (1/2) \cdot \log_e [ \{ \text{受信信号 } y = x + n \text{ のエネルギー } S + N \} / \{ \text{雑音 } n \text{ のエネルギー } N \} ] \quad (\text{F.3})$$

と表される [A21]。このように、 $C$  はその周波数帯域幅  $-W \sim +W$  と、信号対雑音電力比  $S/N$  の関数である。

パターン  $\varphi$  の直交分解

$$\varphi = \psi + \eta \wedge (\psi, \eta) = 0$$

での、パターン  $\psi$  に含まれているパターン  $\varphi$  の程度のもたらす**包含情報量**

$$I(\varphi, \psi) = (1/2) \cdot \log_e (\|\varphi\|^2 / \|\eta\|^2) \quad (\text{F.4})$$

は、直交分解から成り立つピタゴラスの定理

$$\|\varphi\|^2 = \|\psi\|^2 + \|\eta\|^2$$

を代入すれば、

$$I(\varphi, \psi) = (1/2) \cdot \log_e \left[ \frac{\{\varphi = \psi + \eta \text{ のエネルギー } \|\psi\|^2 + \|\eta\|^2\}}{\{\text{雑音 } \eta \text{ のエネルギー } \|\eta\|^2\}} \right] \quad (\text{F.5})$$

と表され、対応

$$\begin{aligned} y &\leftrightarrow \varphi \\ x &\leftrightarrow \psi \\ n &\leftrightarrow \eta \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

$$\begin{aligned} \therefore S &\leftrightarrow \|\psi\|^2 \\ N &\leftrightarrow \|\eta\|^2 \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

の下では、式 (F.3) になる。

## 付録G 最大類似度法における認識ひずみ

ある忠実度規準 (fidelity criterion)、例えば、最小自乗規準に基づいて、原信号を忠実に再生することは信号処理の基本である。忠実な信号再生の働きを設定する場合、次の2つの対処法①、②が考えられる：

- ①雑音に埋もれた信号から原信号を出来るだけ忠実に再生する方法、つまり、**復号化** (decoding) する方法
- ②予め上手に**符号化** (encoding) する方法を原信号に施し、雑音に乱された信号から、原信号を出来るだけ忠実に再生する復号化する方法

ウィナーの予測理論は①を取り扱い、シャノンの情報理論 [17] は②を取り扱っている。パターン認識の理論は信号の代りにパターンを考え、①を取り扱うものであり、復号化の操作に対応するのは**パターン復元** (restoration) の操作、**パターン想起** (recall)・**パターン連想** (association) の操作である。②での符号化の操作に対応するのは、**パターン生成** (generation) の操作である。

本付録Gでは、シャノンの情報伝送理論と双対の関係にあるシャノンの“rate-distortion theory (データ圧縮の理論；情報縮約の理論) [A22]”に注目して得られた“**パターン認識の歪み理論**”の初歩を展開する。

### G1. パターン想起に基づくパターン認識の働き

処理の対象とする問題のパターン  $\varphi$  の集合  $\Phi$  の中から  $m$  個の元  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$  からなる集合 (**代表パターン**  $\omega$  の集合)  $\Omega (\subset \Phi)$  を選び、各々、

$$\Phi = \text{入力} \text{ の集合}, \quad \Omega = \text{出力} \text{ の集合}$$

とする。集合  $\Phi$  内の各々の元を  $\Omega$  内の何れか1つの元  $\omega$  に対応させることを、**パターン想起**

(pattern-recall) に基づく “パターン認識 (pattern-recognition) の働き” という。

## G2. 最大類似度法における認識ひずみ

axiom 1 を満たす順序対  $[\Phi, T]$  を導入しておく。更に、axiom 2 を満たすという意味で、**類似度関数 (similarity-measure function)** と呼ばれる写像

$$SM: \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leq s \leq 1\}$$

を導入する。

可分な一般抽象 Hilbert 空間  $\mathfrak{H}$  の部分集合  $\Phi$  の任意の元  $\varphi$  に対し、 $\Omega$  の中から歪み測度 (distortion measure)

$$dtm(\varphi, \omega) \equiv 1 - SM(\varphi, \omega)$$

を最小にする  $\omega$  を対応させるのが自然である。

$$\min_{\omega \in \Omega} [1 - SM(\varphi, \omega)] = 1 - \max_{\omega \in \Omega} SM(\varphi, \omega)$$

が成立していることに注目した “最大類似法というパターン認識の働き” を説明しよう。

入力パターン  $\varphi \in \Phi$  について

$$SM(\varphi, \omega_i), i \in J$$

の最大値  $SM(\varphi, \omega_j)$  を選び、このようなカテゴリ番号  $k \in J$  の内最も若いカテゴリ番号を

$$j = \operatorname{argmax}_{i \in J} SM(\varphi, \omega_i) \in J$$

と決め、

$\varphi$  を  $\omega_j$  に対応させるのが最大類似 (の選定に伴うパターン認識) 法である。このとき、 $\varphi \in \Phi$  は第  $j \in J$  番目のカテゴリ (category; 類概念)  $\mathfrak{C}_j$  に**最大類似度法 (method of maximum similarity)** で認識されるという。ここで、

$$\mathfrak{C} = \{\mathfrak{C}_j \mid j \in J\}$$

は、正常なパターン (well-formed pattern)  $\varphi$  がこの内の唯一つのカテゴリに帰属しているような全カテゴリ集合である。 $\omega_j \in \Omega$  は第  $j \in J$  番目のカテゴリ  $\mathfrak{C}_j$  の備えている諸性質を典型的に代表しているパターンであり、 $\Omega$  は、

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\}$$

と表現される。

この対応

$$RG: \Phi \rightarrow \Omega \rightarrow \mathfrak{C}$$

を備えているシステムが、パターン想起に基づく認識システム recognizer である。

確率条件

$$[\forall \varphi \in \Phi, 0 \leq p(\varphi) \leq 1] \wedge \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) = 1$$

を満たすパターン  $\varphi$  の出現確率  $p(\varphi)$  を導入すれば、最大類似度法における認識歪み (recognition distortion)  $RD(\Phi, \Omega)$  は、

$$\begin{aligned} RD(\Phi, \Omega) & \\ & \equiv \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot \min_{\omega \in \Omega} dtm(\varphi, \omega) \\ & = \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot \min_{\omega \in \Omega} [1 - SM(\varphi, \omega)] \end{aligned}$$

と定義される。

次の定理 G1 は、 $RD(\Phi, \Omega)$  が 1 より大きくない非負実数であることを明らかにするものであり、

$$\max_{\omega \in \Omega} SM(\varphi, \omega)$$

は、最大類似度法において、“パターン  $\varphi \in \Phi$  を (axiom 1 を満たす順序対  $[\Phi, T]$  を導入したとき、パターンモデル  $T\varphi \in \Phi$  として) 再現できる指標としての忠実度”を表していることを指摘している。

[定理G1] (最大類似度法における認識歪みの表現定理)

$$RD(\Phi, \Omega) = 1 - \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot \max_{\omega \in \Omega} SM(\varphi, \omega).$$

(証明)

$$\begin{aligned} RD(\Phi, \Omega) &= \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot \min_{\omega \in \Omega} [1 - SM(\varphi, \omega)] \\ &= \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot [1 - \max_{\omega \in \Omega} SM(\varphi, \omega)] \\ &= \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \\ &\quad - \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot \max_{\omega \in \Omega} SM(\varphi, \omega) \\ &= 1 - \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot \max_{\omega \in \Omega} SM(\varphi, \omega). \quad \square \end{aligned}$$

ある種の連想形認識方程式を解く形で、カテゴリ帰属知識の不動点を探索し、各認識段階が帰納推理の働きで得られる多段階認識 [B3], [B4] では、最終の第  $t$  認識段階で得られたパターン  $\varphi_t$  について、

$$\max_{\omega \in \Omega} SM(\varphi_t, \omega) = 1$$

が満たされ、認識歪み  $RD(\Phi_t, \Omega)$  は零になることを、次の定理G1の系1は指摘している。ここに、 $\Phi_t$  は最終の認識段階で得られたパターン  $\varphi_t$  の集まりである。

[定理G1の系1] (零認識歪み定理)

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \Phi, \max_{\omega \in \Omega} SM(\varphi, \omega) &= 1 \\ \Rightarrow RD(\Phi, \Omega) &= 0. \end{aligned}$$

(定理G1の系1の証明)

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \Phi, \max_{\omega \in \Omega} SM(\varphi, \omega) &= 1 \\ \Rightarrow RD(\Phi, \Omega) &= 1 - \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

### G3. 認識圧縮率

パターンと判明しているものの集合 (基本領域; basic domain)  $\Phi_B$  を先ず、想定する。

パターン  $\varphi$  とは、錐として表現可能な集合

$$\begin{aligned} \Phi &= R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B) \\ &\equiv \{r^{++} \varphi \mid r^{++} \in R^{++}, \varphi \in [\Phi_B \cup T\eta \mid \eta \in \Phi_B]\} \end{aligned}$$

where  $R^{++}$  is a set of positive real numbers

の中から、1つを選びだしたものである。この  $\Phi$  は処理の対象とする問題のパターン  $\varphi$  のすべての集合である。

$M$  個の元からなる集合から1つを選びだす場合、つまり、起こり得る  $M$  個の可能性の1つが多数回生起して、この内の任意の1つの生起を2者択一操作の同数の回数で確定させる場合、1回の2者択一操作が  $2^{-1}$  の確率で実施されるとすると、この確定に必要な2者択一操作の平均回数は、

$\log_2 M$ である [A21]。この意味で、 $M$  個の元からなる集合の情報は  $\log_2 M$  であるという。

パターン認識とは、 $|\Phi|$  個の元からなる集合  $\Phi$  の任意の元を  $|\Omega|$  個の元からなる集合  $\Omega$  の1つの元を対応させることであり、 $|\Phi|$  個を  $|\Omega|$  個に圧縮して表現する働きである。

よって、認識圧縮率 (compression-rate of recognition)  $CRR(\Phi, \Omega)$  とは、2つの集合  $\Omega, \Phi$  の持つ情報量  $\log_2 |\Omega|, \log_2 |\Phi|$  の比であると考えてよいだろう：

$$CRR(\Phi, \Omega) \equiv (\log_2 |\Omega|) / (\log_2 |\Phi|). \quad \square$$

$CRR(\Phi, \Omega) = 1$  ならば、最も簡単な認識の働きで  $\Phi$  を正しく認識できることが理解できよう。 $CRR(\Phi, \Omega) < 1$  の場合の認識の働きを問題としなければならない。

確率条件

$$[\forall \omega \in \Omega, 0 \leq q(\omega/\varphi) \leq 1] \\ \wedge [\forall \omega \in \Omega, \sum_{\varphi \in \Phi} q(\omega/\varphi) = 1 \text{ for any } \varphi \in \Phi]$$

を満たす“パターン  $\varphi \in \Phi$  が出現したときのパターン  $\omega \in \Omega$  の条件付き出現確率”  $q(\omega/\varphi)$  を導入すれば、パターン  $\varphi \in \Phi$  とパターン  $\omega \in \Omega$  との同時出現確率  $r(\varphi, \omega)$  は

$$r(\varphi, \omega) = p(\varphi) \cdot q(\omega/\varphi)$$

と表され、平均の認識歪み (average recognition-distortion)  $ARD(q)$  は、

$$ARD(r) \equiv \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot dtm(\varphi, \omega) \\ = \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} p(\varphi) \cdot q(\omega/\varphi) \cdot dtm(\varphi, \omega)$$

と表される。パターン  $\varphi \in \Phi$  がパターン  $\omega \in \Omega$  と同じカテゴリを表現している場合、 $\omega \in \Omega$  から  $\varphi \in \Phi$  の崩れを少ないほど、大きい値を取る条件確率測度  $q(\omega/\varphi)$  に応じて、良好な認識の働きを備えている認識システム recognizer を設定しなければならない。

$p(\varphi), \varphi \in \Phi$  を固定した条件の下で、与えられた“1 より大きくない正数  $\epsilon$ ” より大きい平均認識歪み  $ARD(r)$  の場合、つまり、

$$ARD(r) > \epsilon$$

の場合、 $\Phi$  の各元  $\varphi$  を正しく認識できる認識技術を確保することが重要である。

#### G4. パターン列を最大類似度法で認識する場合の平均認識歪み

##### G4.1 認識歪み $RD(\Phi, \Omega)$ の再表現

まず、最大類似度法における認識歪み  $RD(\Phi, \Omega)$  を再表現しよう。

次の定理G2は、 $RD(\Phi, \Omega)$  を条件付き出現確率  $q(\omega/\varphi)$ 、或いは、同時出現確率  $r(\varphi, \omega)$  を用いて再表現したものである。

[定理G2] (最大類似度法における認識歪み  $RD(\Phi, \Omega)$  の再表現定理)

$$RD(\Phi, \Omega) \\ = \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot \sum_{\omega \in \Omega} q(\omega/\varphi) \cdot \min_{\omega \in \Omega} dtm(\varphi, \omega) \\ = \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot \min_{\omega \in \Omega} dtm(\varphi, \omega). \\ (\text{証明}) \text{ 変形していけば、} \\ RD(\Phi, \Omega) \\ \equiv \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot \min_{\omega \in \Omega} dtm(\varphi, \omega) \\ = \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot \left[ \sum_{\omega \in \Omega} q(\omega/\varphi) \right] \cdot \min_{\omega \in \Omega} dtm(\varphi, \omega) \quad \because \sum_{\omega \in \Omega} q(\omega/\varphi) = 1$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot \sum_{\omega \in \Omega} q(\omega/\varphi) \cdot \min_{\omega \in \Omega} \text{dtm}(\varphi, \omega) \\
&= \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} p(\varphi) \cdot q(\omega/\varphi) \cdot \min_{\omega \in \Omega} \text{dtm}(\varphi, \omega) \\
&= \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot \min_{\omega \in \Omega} \text{dtm}(\varphi, \omega). \quad \square
\end{aligned}$$

#### G4.2 統計的独立性の仮定から得られる $\text{dtm}_N(\Omega)$ の上界評価 1

次に、パターン列の各パターン  $\varphi_t \in \Phi_B$  を最大類似度法で認識する場合、平均認識歪みの上界評価を求めてみよう。

基本領域  $\Phi_B$ 、代表パターン集合  $\Omega$  から、各々、高々可算のパターンからなる2つのパターン系列

$$\varphi = \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N \rangle \in \Phi_B^N$$

$$\omega = \langle \omega_{j(1)}, \omega_{j(2)}, \dots, \omega_{j(N)} \rangle \in \Omega^N$$

を選び、このような  $\varphi, \omega$  の集まり

$$\Phi = \{ \varphi = \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N \rangle \mid \varphi_t \in \Phi_B, t=1, 2, \dots, N \}$$

$$\Omega = \{ \omega = \langle \omega_{j(1)}, \omega_{j(2)}, \dots, \omega_{j(N)} \rangle \mid j(t) \in J, t=1, 2, \dots, N \}$$

を導入し、出現確率  $p(\varphi)$  と条件付き出現確率  $q(\omega/\varphi)$  とに関し、**統計的独立性**

$$p(\varphi) = p(\varphi_1) \cdot p(\varphi_2) \cdots p(\varphi_N)$$

$$q(\omega/\varphi)$$

$$= q(\omega_{j(1)}/\varphi_1) \cdot q(\omega_{j(2)}/\varphi_2) \cdots q(\omega_{j(N)}/\varphi_N)$$

を仮定すると、同時出現確率  $r(\varphi, \omega)$  の統計的独立性

$$r(\varphi, \omega) \equiv p(\varphi) \cdot q(\omega/\varphi)$$

$$= r(\varphi_1, \omega_{j(1)}) \cdot r(\varphi_2, \omega_{j(2)}) \cdots r(\varphi_N, \omega_{j(N)})$$

が成り立つことがわかる。その後、

$$\text{dtm}_N(\varphi, \omega) = (1/N) \cdot \sum_{t=1}^N \text{dtm}(\varphi_t, \omega_{j(t)})$$

$$\text{dtm}_N(\varphi/\Omega) = \min_{\omega \in \Omega} \text{dtm}_N(\varphi, \omega)$$

$$\text{dtm}_N(\Omega)$$

$$\equiv \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot \text{dtm}_N(\varphi/\Omega)$$

$$= \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot \min_{\omega \in \Omega} \text{dtm}_N(\varphi, \omega)$$

を定義する。直ちに、

$$(0 \leq) \text{dtm}(\varphi_t, \omega_{j(t)}) = 1 - \text{SM}(\varphi_t, \omega_{j(t)})$$

$$\leq d_0 (\leq 1), \quad t=1, 2, \dots, N$$

(G.1)

が成立していれば、その定義から、3不等式

$$0 \leq \text{dtm}_N(\varphi, \omega) \leq d_0$$

(G.2)

$$0 \leq \text{dtm}_N(\varphi/\Omega) \leq d_0$$

(G.3)

$$0 \leq \text{dtm}_N(\Omega) \leq d_0$$

(G.4)

が成立することに、注意しておく。

このとき、 $\text{dtm}_N(\Omega)$  の上界を評価する次の定理G3が指摘できる。

[定理G3] ( $\text{dtm}_N(\Omega)$  の上界評価定理1)

$\text{dtm}_N(\Omega)$  の上界評価

$$\text{dtm}_N(\Omega)$$

$$\leq \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot \text{dtm}_N(\varphi, \omega)$$

が成立し、

よって、 $N=1$  の場合、 $\text{dtm}_N(\Omega) \leq \text{ARD}(r)$  .

(証明)

$$\begin{aligned}
 & \text{dtm}_N(\Omega) \\
 & \equiv \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot \text{dtm}_N(\varphi/\Omega) \\
 & = \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot \min_{\omega \in \Omega} \text{dtm}_N(\varphi, \omega) \\
 & = \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot \left[ \sum_{\omega \in \Omega} q(\omega/\varphi) \right] \cdot \min_{\omega \in \Omega} \text{dtm}_N(\varphi, \omega) \quad \because \sum_{\omega \in \Omega} q(\omega/\varphi) = 1 \\
 & = \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot \left[ \sum_{\omega \in \Omega} q(\omega/\varphi) \cdot \min_{\omega \in \Omega} \text{dtm}_N(\varphi, \omega) \right] \\
 & = \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot \min_{\omega \in \Omega} \text{dtm}_N(\varphi, \omega) \\
 & \leq \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot \text{dtm}_N(\varphi, \omega)
 \end{aligned}$$

が得られ、 $N=1$  の場合、不等号  $\leq$  の右辺である最終式は  $\text{ARD}(r)$  に等しい。 □

### G4.3 統計的独立性の仮定から得られる $\text{dtm}_N(\Omega)$ の上界評価2

その定義から、

$$\text{dtm}_N(\varphi/\Omega) \leq \text{dtm}_N(\varphi, \omega) \quad \text{for any } \varphi \in \Phi \text{ and any } \omega \in \Omega \quad (\text{G.5})$$

が成立しているから、

$$\text{dtm}_N(\Omega) \leq \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot \text{dtm}_N(\varphi, \omega) \quad (\text{G.6})$$

の成立がわかる故に、

$$\begin{aligned}
 & g(\varphi, \omega, \Omega) \equiv \\
 & \begin{cases} 1 & \text{if } \text{dtm}_N(\varphi, \omega) < \text{dtm}_N(\Omega) \\ 0 & \text{if } \text{dtm}_N(\varphi, \omega) \geq \text{dtm}_N(\Omega) \end{cases} \quad (\text{G.7})
 \end{aligned}$$

の定義は無意味ではない。そうすると、直ちに、不等式

$$\text{dtm}_N(\Omega) \cdot [1 - g(\varphi, \omega, \Omega)] \leq \text{dtm}_N(\varphi, \omega) \quad (\text{G.8})$$

の成立がわかる。

更に、不等式 (G.6) の右辺で認識の平均歪み  $\text{ARD}(r)$  を再表現する次の定理G4が成り立っていることに注意しておく。

#### [定理G4] ( $\text{ARD}(r)$ の再表現定理)

$$\begin{aligned}
 & \text{ARD}(r) \\
 & = \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot \text{dtm}_N(\varphi, \omega). \\
 & \text{(証明)} \quad \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot \text{dtm}_N(\varphi, \omega) \\
 & = (1/N) \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot \text{dtm}_N(\varphi_i, \omega_{j(i)}) \\
 & = (1/N) \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{\varphi_i \in \Phi} \sum_{\omega_{j(i)} \in \Omega} r(\varphi_i, \omega_{j(i)}) \cdot \text{dtm}_N(\varphi_i, \omega_{j(i)}) \\
 & = (1/N) \cdot \sum_{i=1}^N \text{ARD}(r) \\
 & = \text{ARD}(r)
 \end{aligned}$$

□

次の定理G5は、 $\text{dtm}_N(\varphi)$  の上界を  $\text{ARD}(q)$ ,  $d_0$ ,  $g(\varphi, \omega, \Omega)$  を用いて、評価するものである。

#### [定理G5] ( $\text{dtm}_N(\Omega)$ の上界評価定理2)

$\text{dtm}_N(\Omega)$  の上界評価

$$\text{dtm}_N(\Omega)$$

$\leq \text{ARD}(r) + d_0 \cdot \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot g(\varphi, \omega, \Omega)$   
 が成り立つ。

(証明) 変形していけば、

$$\begin{aligned} & \text{dtm}_N(\Omega) \\ &= \left[ \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \right] \cdot \text{dtm}_N(\Omega) \quad \because \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) = 1 \\ &= \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot \text{dtm}_N(\Omega) \\ &= \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot [\text{dtm}_N(\Omega) \cdot \{1 - g(\varphi, \omega, \Omega)\} + \text{dtm}_N(\Omega) \cdot g(\varphi, \omega, \Omega)] \\ &\leq \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot \text{dtm}_N(\varphi, \omega) + \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot \text{dtm}_N(\Omega) \cdot g(\varphi, \omega, \Omega) \\ &\quad \because \text{式 (G.8)} \\ &\leq \text{ARD}(r) + \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot \text{dtm}_N(\Omega) \cdot g(\varphi, \omega, \Omega) \quad \because \text{定理G4} \\ &\leq \text{ARD}(r) + d_0 \cdot \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot g(\varphi, \omega, \Omega) \quad \because \text{式 (G.4)} \end{aligned}$$

□

## G5. RD( $\Phi, \Omega$ ), ARD( $r$ ), $\text{dtm}_N(\Omega)$ の効用

### G5.1 G2章の RD( $\Phi, \Omega$ ) について

$$\text{RD}(\Phi, \Omega_1) \geq \text{RD}(\Phi, \Omega_2)$$

であれば、

$\Omega_1$  よりも  $\Omega_2$  の方が劣っていない最大類似度法を提供すると言える。

### G5.2 G3章の平均認識歪み $\text{ARD}(r; q) \equiv \text{ARD}(r)$

$p(\varphi)$ ,  $\varphi \in \Phi$  を固定した条件の下で、 $\Phi$  の各元  $\varphi$  を認識できる認識技術が  
 $q(\omega/\varphi)$ ,  $\varphi \in \Phi, \omega \in \Omega$

で規定されると考えられる。ならば、G3章の平均認識歪み  $\text{ARD}(r; q) \equiv \text{ARD}(r)$  について、

$$\text{ARD}(r; q_1) \geq \text{ARD}(r; q_2)$$

の場合、 $q_1$  で規定される認識技術より、 $q_2$  で規定される認識技術の方が劣っていないと言える。

### G5.3 G4.2節の $\text{dtm}_N(\Omega)$ について

G4.2項の

$$\begin{aligned} & \text{dtm}_N(\Omega) \\ &\equiv \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot \text{dtm}_N(\varphi/\Omega) \\ &= \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot \min_{\omega \in \Omega} \text{dtm}_N(\varphi, \omega) \end{aligned}$$

について、

$$\text{dtm}_N(\Omega_1) \geq \text{dtm}_N(\Omega_2)$$

であれば、

$\underline{\Omega}_1$ 、つまり、 $j(1), j(2), \dots, j(N) \in J$  を決定する認識法 (最大類似度法とは限らない) よりも、 $\underline{\Omega}_2$  を決定する認識法の方が劣っていないと言える。

## G6. $\text{dtm}(\varphi, \omega)$ の設定

注意深く検討すればわかるように、G2章の歪み測度  $\text{dtm}(\varphi, \omega) = 1 - \text{SM}(\varphi, \omega)$  以外の、以下の①~④を用いても、G3, G4両章の論はそのまま、成立する。

① (ノルム距離による表現)

$$\begin{aligned} \text{dtm}(\varphi, \omega) &= \|T\varphi - T\omega\| / \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} \|T\varphi - T\omega\| \end{aligned}$$

② (規格化内積による表現)

$$\begin{aligned} \text{dtm}(\varphi, \omega) &= [1 - |(T\varphi, T\omega)| / \{ \|T\varphi\| \cdot \|T\omega\| \} |^2] \\ & / \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} [1 - |(T\varphi, T\omega)| \\ & \quad / \{ \|T\varphi\| \cdot \|T\omega\| \} |^2] \end{aligned}$$

③ (相違度による表現)

$$\begin{aligned} \text{dtm}(\varphi, \omega) &= \text{DM}(\varphi, \omega) \end{aligned}$$

where

相違度関数 (dissimilarity-measure function)

$$\begin{aligned} \text{DM}(\varphi, \omega) &= \\ & 1 - \exp[-d_j^{-1} \cdot \{1 - \text{SM}(\varphi, \omega)\} \cdot \text{SM}(\varphi, \omega)^{-1}] \\ & , d_j > 0 (j \in J) \end{aligned}$$

④ (g-max構成法による表現)

類似度関数 SM の g-max構成法 (文献 [B3], 付録Bの命題B4) を先ず、説明しよう。

関数  $\text{SM}'(j \in J)$  が axiom 2 を満たすとしよう。

添字  $i \in J$  を助変数に持実数値つ関数  $g_i : T \cdot \Phi \rightarrow \mathbb{R}$  を用意し、

$$\begin{aligned} \text{SM}(\varphi, \omega_j) &= [\text{SM}'(\varphi, \omega_j) + \max \{g_j(T\varphi), 0\}] \\ & / [1 + \sum_{i \in J} \max \{g_i(T\varphi), 0\}] \end{aligned} \tag{G.9}$$

と定義される関数 SM は、排他的非正条件

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, g_j(T\omega_i) \leq 0 \tag{G.10}$$

の下で、axiom 2 を満たす。 □

以上が、類似度関数 SM の g-max構成法である。

排他的非正条件式 (G.10) の下で、式 (G.9) から hint を得、

$$\begin{aligned} \text{dtm}(\varphi, \omega) &= 1 - [\text{SM}(\varphi, \omega_j) + \max \{g_j(T\varphi), 0\}] \\ & \quad [1 + \sum_{i \in J} \max \{g_i(T\varphi), 0\}] \end{aligned}$$

と、おくことができる。

例えば、 $g_j(T\varphi)$  は、パーセプトロン表現

$$g_j(T\varphi) = \sum_{\ell \in L} W(j, \ell) \cdot u(\varphi, \ell) - b(j)$$

の如く、設定できる。ここに、

$W(j, \ell)$  : 重み行列  $W \equiv (W(j, \ell))_{j \in J, \ell \in L}$  の第  $j \in J$  番目の行重み

$W(j)$   $\equiv (W(j, \ell))_{\ell \in L}$  の第  $\ell \in L$  番目の列成分

$u(\varphi, \ell)$  : パターン  $\varphi \in \Phi$  から抽出された第  $\ell \in L$  番目の特徴量

$b(j)$  : 第  $j \in J$  番目の閾値。

## G7. 類似度関数 SM を用いた $p(\varphi)$ , $q(\omega/\varphi)$ , $r(\varphi, \omega)$ , $s(\omega)$ , $v(\varphi/\omega)$ の設定

### G7.1 同時出現確率 $r(\varphi, \omega)$ の設定

axiom 2 を満たす類似度関数 SM を使って、G2章の  $p(\varphi)$  と、G3章の  $q(\omega/\varphi)$ ,  $r(\varphi, \omega)$  とを、設定してみよう。

axiom 2 を満たす “パターン  $\varphi$ , 代表パターン  $\omega$  との間の類似度関数”  $SM(\varphi, \omega)$ ,  $\varphi \in \Phi$ ,  $\omega \in \Omega$  を用いて、 $\varphi, \omega$  同時出現確率  $r(\varphi, \omega)$  を、

$$\begin{aligned} \textcircled{1} r(\varphi, \omega) \\ \equiv SM(\varphi, \omega) / \sum_{\varphi' \in \Phi} \sum_{\omega' \in \Omega} SM(\varphi', \omega'), \varphi \in \Phi, \omega \in \Omega \end{aligned}$$

と定義できる。具体的には、axiom 2、つまり、

$$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{\omega' \in \Omega} SM(\varphi, \omega') = 1 \quad (\text{G.11})$$

を適用すれば、表現

$$r(\varphi, \omega) = SM(\varphi, \omega) / |\Phi|, \varphi \in \Phi, \omega \in \Omega$$

が得られる。

### G7.2 出現確率 $p(\varphi)$ , 条件付き出現確率 $q(\omega/\varphi)$ の表現

パターン  $\varphi \in \Phi$  の出現確率  $p(\varphi)$  は、

$$\begin{aligned} \textcircled{2} p(\varphi) &\equiv \sum_{\omega' \in \Omega} r(\varphi, \omega') \\ &= \sum_{\omega' \in \Omega} SM(\varphi, \omega') / \sum_{\varphi' \in \Phi} \sum_{\omega'' \in \Omega} SM(\varphi', \omega'') \end{aligned}$$

と求められる。式 (G.11) を適用して、表現

$$p(\varphi) = 1/|\Phi|, \varphi \in \Phi$$

が得られる。

パターン  $\varphi \in \Phi$  が与えられたときの代表パターン  $\omega \in \Omega$  の条件付き出現確率  $q(\omega/\varphi)$  は、

$$\begin{aligned} \textcircled{3} q(\omega/\varphi) \\ \equiv r(\varphi, \omega) / p(\varphi) \\ = SM(\varphi, \omega) / \sum_{\omega' \in \Omega} SM(\varphi, \omega'), \varphi \in \Phi, \omega \in \Omega \end{aligned}$$

と求められる。式 (G.11) を適用して、表現

$$q(\omega/\varphi) = SM(\varphi, \omega)$$

と求められる。

### G7.3 出現確率 $s(\omega)$ , 条件付き確率 $v(\varphi/\omega)$ の表現

更に、 $\omega \in \Omega$  の出現確率  $s(\omega)$  は、

$$\begin{aligned} \textcircled{4} s(\omega) \\ \equiv \sum_{\varphi' \in \Phi} r(\varphi', \omega) \\ = \sum_{\varphi' \in \Phi} SM(\varphi', \omega) / \sum_{\varphi' \in \Phi} \sum_{\omega'' \in \Omega} SM(\varphi', \omega'') \end{aligned}$$

と求められる。式 (G.11) を適用して、表現

$$s(\omega) = \sum_{\varphi' \in \Phi} SM(\varphi', \omega) / |\Phi|$$

と求められる。最後に、 $\omega \in \Omega$  が与えられたときの  $\varphi \in \Phi$  の条件付き出現確率  $v(\varphi/\omega)$  は、

$$\begin{aligned} \textcircled{5} v(\varphi/\omega) \\ \equiv r(\varphi, \omega) / s(\omega) \\ = SM(\varphi, \omega) / \sum_{\varphi' \in \Phi} SM(\varphi', \omega) \end{aligned}$$

と求められる。

### G8. 相互情報量 $MI(\varphi, \omega)$ , 平均相互情報量 $MI(\Phi, \Omega)$ の表現

$\varphi, \omega$  間の相互情報量 (amount of mutual information)  $MI(\varphi, \omega)$  は、

$$MI(\varphi, \omega) \equiv \log_e [r(\varphi, \omega) / \{p(\varphi) \cdot s(\omega)\}] \quad (G.12)$$

$$= -\log_e p(\varphi) - [-\log_e v(\varphi/\omega)] \quad (G.13)$$

$$= -\log_e s(\omega) - [-\log_e q(\omega/\varphi)] \quad (G.14)$$

と定義される。2式 (G.13), (G.14) は共に、2つの不確定さ

$$-\log_e p(\varphi), \quad -\log_e v(\varphi/\omega)$$

$$-\log_e s(\omega), \quad -\log_e q(\omega/\varphi)$$

の差による表現であることに注意しておく。

$p(\varphi), s(\omega)$  の設定から、式 (G.12) は、

$$MI(\varphi, \omega) = \log_e [r(\varphi, \omega) / [\{\sum_{\omega' \in \Omega} r(\varphi, \omega')\} \cdot \{\sum_{\varphi' \in \Phi} r(\varphi', \omega)\}]] \quad (G.15)$$

と表現される。 $MI(\varphi, \omega)$  を変形すれば、

$$\begin{aligned} MI(\varphi, \omega) &= \log_e [SM(\varphi, \omega) \cdot a(\varphi, \omega)] \\ &= \log_e SM(\varphi, \omega) + \log_e a(\varphi, \omega) \end{aligned} \quad (G.16)$$

where

$$a(\varphi, \omega) = \frac{\sum_{\varphi' \in \Phi} \sum_{\omega' \in \Omega} SM(\varphi', \omega')}{[\{\sum_{\omega' \in \Omega} SM(\varphi, \omega')\} \cdot \{\sum_{\varphi' \in \Phi} SM(\varphi', \omega)\}]} \quad (G.17)$$

ということになる。式 (G.11) を適用して、表現

$$a(\varphi, \omega) = |\Phi| / \sum_{\varphi' \in \Phi} SM(\varphi', \omega) \quad (G.18)$$

を得、同時出現確率  $r(\varphi, \omega)$  の  $\sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega}$  にわたる  $MI(\varphi, \omega)$  の平均値 (mean)、或いは、期待値 (expectation) としての平均相互情報量 (average amount of mutual information)  $MI(\Phi, \Omega)$  は、

$$\begin{aligned} MI(\Phi, \Omega) &= \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot MI(\varphi, \omega) \end{aligned}$$

と定義されるから、

$$MI(\Phi, \Omega) = \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} [SM(\varphi, \omega) / \sum_{\varphi' \in \Phi} \sum_{\omega' \in \Omega} SM(\varphi', \omega')] \cdot MI(\varphi, \omega)$$

と表される。式 (G.16) を使って、 $MI(\Phi, \Omega)$  を変形すれば、

$$\begin{aligned} MI(\Phi, \Omega) &= [\sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} SM(\varphi, \omega)]^{-1} \\ &\cdot [-\sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} [SM(\varphi, \omega) \cdot \log_e a(\varphi, \omega)]^{-1} \\ &\quad - \{-\sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} [SM(\varphi, \omega) \cdot \log_e SM(\varphi, \omega)]\}] \end{aligned} \quad (G.19)$$

となり、式 (G.11) を適用して、具体的に、axiom 2を満す類似度関数  $SM$  による表現

$$\begin{aligned}
& \text{MI}(\Phi, \Omega) \\
&= \log_e |\Phi| \\
&+ |\Phi|^{-1} \cdot \left[ - \sum_{\omega \in \Omega} \left\{ \sum_{\varphi \in \Phi} \text{SM}(\varphi, \omega) \right\} \right. \\
&\quad \cdot \log_e \left\{ \sum_{\varphi \in \Phi} \text{SM}(\varphi', \omega) \right\} \\
&- |\Phi|^{-1} \cdot \left[ - \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} \text{SM}(\varphi, \omega) \right. \\
&\quad \cdot \log_e \text{SM}(\varphi, \omega) \left. \right] \tag{G.20}
\end{aligned}$$

が得られる。

2式 (G.19), (G.20) の導出は次の通りである。

$$\begin{aligned}
& \text{MI}(\Phi, \Omega) \\
&= \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} [\text{SM}(\varphi, \omega) \\
&\quad / \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} \text{SM}(\varphi', \omega')] \\
&\quad \cdot [\log_e \text{SM}(\varphi, \omega) + \log_e a(\varphi, \omega)] \quad \because \text{式 (G.16)} \\
&= \left[ \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} \text{SM}(\varphi', \omega') \right]^{-1} \cdot \\
&\quad \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} \text{SM}(\varphi, \omega) \cdot [\log_e \text{SM}(\varphi, \omega) + \log_e a(\varphi, \omega)] \\
&= \left[ \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} \text{SM}(\varphi', \omega') \right]^{-1} \\
&\quad \cdot \left[ - \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} \text{SM}(\varphi, \omega) \cdot \log_e a(\varphi, \omega) \right]^{-1} \\
&\quad - \left[ - \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} \text{SM}(\varphi, \omega) \cdot \log_e \text{SM}(\varphi, \omega) \right]
\end{aligned}$$

が得られ、式 (G.19) が得られた。更に、式 (G.11) を適用すれば、

$$\begin{aligned}
& \text{MI}(\Phi, \Omega) \\
&= |\Phi|^{-1} \cdot \left[ - \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} \text{SM}(\varphi, \omega) \right. \\
&\quad \cdot \log_e \left\{ \sum_{\varphi \in \Phi} \text{SM}(\varphi', \omega) / |\Phi| \right\} \\
&\quad \left. - \left\{ - \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} \text{SM}(\varphi, \omega) \cdot \log_e \text{SM}(\varphi, \omega) \right\} \right] \quad \because \text{式 (G.18)} \\
&= |\Phi|^{-1} \cdot \left[ \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} \text{SM}(\varphi, \omega) \cdot \log_e |\Phi| \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} \text{SM}(\varphi, \omega) \cdot \log_e \left\{ \sum_{\varphi \in \Phi} \text{SM}(\varphi', \omega) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \left\{ - \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} \text{SM}(\varphi, \omega) \cdot \log_e \text{SM}(\varphi, \omega) \right\} \right] \\
&= \log_e |\Phi| + |\Phi|^{-1} \cdot \left[ \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} \text{SM}(\varphi, \omega) \cdot \log_e \left\{ \sum_{\varphi \in \Phi} \text{SM}(\varphi', \omega) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \left\{ - \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} \text{SM}(\varphi, \omega) \cdot \log_e \text{SM}(\varphi, \omega) \right\} \right] \\
&= \log_e |\Phi| + |\Phi|^{-1} \cdot \left[ \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\omega \in \Omega} \left\{ \sum_{\varphi \in \Phi} \text{SM}(\varphi, \omega) \right\} \cdot \log_e \left\{ \sum_{\varphi \in \Phi} \text{SM}(\varphi', \omega) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \left\{ - \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} \text{SM}(\varphi, \omega) \cdot \log_e \text{SM}(\varphi, \omega) \right\} \right]
\end{aligned}$$

を得、式 (G.20) の成立が示された。

## G9.相互情報量 $\text{MI}(\varphi, \omega)$ , 平均相互情報量 $\text{MI}(\Phi, \Omega)$ の、2つの平均不確定差による表現

### G9.1 $\varphi$ に注目した2つの平均不確定差による表現

平均不確定さを表す3つのエントロピー

①パターン集合  $\Phi$  のエントロピー

$$H(\Phi) \equiv -\sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot \log_e p(\varphi)$$

②代表パターン  $\omega$  が与えられたときの、パターン集合  $\Phi$  のエントロピー

$$H(\Phi/\omega) \equiv -\sum_{\varphi \in \Phi} v(\varphi/\omega) \cdot \log_e v(\varphi/\omega)$$

③代表パターン集合  $\Omega$  が与えられたときの、パターン集合  $\Phi$  のエントロピー

$$\begin{aligned} H(\Phi/\Omega) \\ &\equiv \sum_{\omega \in \Omega} s(\omega) \cdot H(\Phi/\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} s(\omega) \cdot \left\{ -\sum_{\varphi \in \Phi} v(\varphi/\omega) \cdot \log_e v(\varphi/\omega) \right\} \end{aligned}$$

を定義すると、2つの平均不確定さ  $H(\Phi)$ ,  $H(\Phi/\Omega)$  の差による表現

$$\begin{aligned} \text{④MI}(\Phi, \Omega) \\ &= H(\Phi) - H(\Phi/\Omega) \\ &= H(\Phi) - \sum_{\omega \in \Omega} s(\omega) \cdot H(\Phi/\omega) \end{aligned}$$

が成立する。それは、

$$\begin{aligned} \text{MI}(\Phi, \Omega) \\ &\equiv \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot \text{MI}(\varphi, \omega) \\ &= -\sum_{\varphi \in \Phi} \left[ \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \right] \cdot \log_e p(\varphi) \\ &\quad - \left[ -\sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot \log_e \{r(\varphi, \omega)/s(\omega)\} \right] \\ &= -\sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot \log_e p(\varphi) - \left[ -\sum_{\omega \in \Omega} \sum_{\varphi \in \Phi} r(\varphi, \omega) \cdot \log_e v(\varphi/\omega) \right] \\ &= -\sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot \log_e p(\varphi) \\ &\quad - \left[ \sum_{\omega \in \Omega} s(\omega) \cdot \left\{ -\sum_{\varphi \in \Phi} v(\varphi/\omega) \cdot \log_e v(\varphi/\omega) \right\} \right] \end{aligned} \tag{G.21}$$

から明らかである。

式 (G.11) を適用すれば、G7.2, G7.3両節の  $p(\varphi)$ ,  $v(\varphi/\omega)$ ,  $s(\omega)$  を使えば、 $H(\Phi)$ ,  $H(\Phi/\omega)$ ,  $H(\Phi/\Omega)$  は具体的に、次のように表現される：

$$\text{⑤} H(\Phi) = \log_e |\Phi|$$

$$\text{⑥} H(\Phi/\omega)$$

$$= \log_e \left\{ \sum_{\varphi \in \Phi} \text{SM}(\varphi, \omega) - \left[ \sum_{\varphi \in \Phi} \text{SM}(\varphi, \omega) \right]^{-1} \cdot \sum_{\varphi \in \Phi} \text{SM}(\varphi, \omega) \cdot \log_e \text{SM}(\varphi, \omega) \right\}$$

$$\text{⑦} H(\Phi/\Omega)$$

$$= |\Phi|^{-1} \cdot \sum_{\omega \in \Omega} \left\{ \sum_{\varphi \in \Phi} \text{SM}(\varphi, \omega) \right\} \cdot \log_e \sum_{\varphi \in \Phi} \text{SM}(\varphi, \omega)$$

$$+ |\Phi|^{-1} \cdot \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{\varphi \in \Phi} \left\{ \text{SM}(\varphi, \omega) / \left[ \sum_{\varphi \in \Phi} \text{SM}(\varphi, \omega) \right] \right\} \cdot \left\{ -\sum_{\varphi \in \Phi} \text{SM}(\varphi, \omega) \cdot \log_e \text{SM}(\varphi, \omega) \right\}$$

$$= |\Phi|^{-1} \cdot \sum_{\omega \in \Omega} \left\{ \sum_{\varphi \in \Phi} \text{SM}(\varphi, \omega) \right\} \cdot \log_e \sum_{\varphi \in \Phi} \text{SM}(\varphi, \omega)$$

$$+ |\Phi|^{-1} \cdot \sum_{\omega \in \Omega} \left\{ -\sum_{\varphi \in \Phi} \text{SM}(\varphi, \omega) \cdot \log_e \text{SM}(\varphi, \omega) \right\}$$

□

## G9.2 $\omega$ に注目した2つの平均不確定差による表現

平均不確定さを表す3つのエントロピー

⑧代表パターン集合  $\Omega$  のエントロピー

$$H(\Omega) \equiv - \sum_{\omega \in \Omega} s(\omega) \cdot \log_e s(\omega)$$

⑨パターン  $\varphi$  が与えられたときの、代表パターン集合  $\Omega$  のエントロピー

$$H(\Omega/\varphi) \equiv - \sum_{\omega \in \Omega} q(\omega/\varphi) \cdot \log_e q(\omega/\varphi)$$

⑩パターン集合  $\Phi$  が与えられたときの、代表パターン集合  $\Omega$  のエントロピー

$$H(\Omega/\Phi) \equiv \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot H(\Omega/\varphi)$$

を定義すると、2つの平均不確定さ  $H(\Phi)$ ,  $H(\Phi/\Omega)$  の差による表現

$$\textcircled{11} \text{MI}(\Phi, \Omega)$$

$$= H(\Omega) - H(\Omega/\Phi)$$

$$= H(\Omega) - \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot H(\Omega/\varphi)$$

が成立する。それは、

$$\text{MI}(\Phi, \Omega)$$

$$\equiv \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot \text{MI}(\varphi, \omega)$$

$$= - \sum_{\omega \in \Omega} \left[ \sum_{\varphi \in \Phi} r(\varphi, \omega) \right] \cdot \log_e s(\omega)$$

$$- \left[ - \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot \log_e \{r(\varphi, \omega)/p(\varphi)\} \right]$$

$$= - \sum_{\omega \in \Omega} s(\omega) \cdot \log_e s(\omega) - \left[ - \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot \log_e q(\omega/\varphi) \right]$$

$$= - \sum_{\omega \in \Omega} s(\omega) \cdot \log_e s(\omega)$$

$$- \left[ \sum_{\varphi \in \Phi} p(\varphi) \cdot \left\{ - \sum_{\omega \in \Omega} r(\varphi, \omega) \cdot \log_e q(\omega/\varphi) \right\} \right]$$

(G.22)

から明らかである。

式 (G.11) を適用すれば、G7.2, G7.3両節の  $p(\varphi)$ ,  $q(\omega/\varphi)$ ,  $s(\omega)$  を使えば、 $H(\Omega)$ ,  $H(\Omega/\varphi)$ ,  $H(\Omega/\Phi)$  は具体的に、次のように表現される：

$$\textcircled{12} H(\Omega)$$

$$= \log_e |\Phi| - \sum_{\omega \in \Omega} s(\omega) \cdot \log_e \sum_{\varphi \in \Phi} \text{SM}(\varphi, \omega)$$

$$= \log_e |\Phi| - \sum_{\omega \in \Omega} s(\omega) \cdot \log_e \sum_{\varphi \in \Phi} \text{SM}(\varphi, \omega)$$

$$= \log_e |\Phi|$$

$$- |\Phi|^{-1} \cdot \sum_{\omega \in \Omega} \left\{ \log_e \sum_{\varphi \in \Phi} \text{SM}(\varphi, \omega) \right\} \cdot \log_e \sum_{\varphi \in \Phi} \text{SM}(\varphi, \omega)$$

$$\textcircled{13} H(\Omega/\varphi)$$

$$= - \sum_{\omega \in \Omega} \text{SM}(\varphi, \omega) \cdot \log_e \text{SM}(\varphi, \omega)$$

$$\textcircled{14} H(\Omega/\Phi)$$

$$= |\Phi|^{-1} \cdot \sum_{\varphi \in \Phi} \left\{ - \sum_{\omega \in \Omega} \text{SM}(\varphi, \omega) \cdot \log_e \text{SM}(\varphi, \omega) \right\}$$

□

## 付録H 量子力学的観測の働きを取り入れたパターン想起

量子力学的観測の働きを取り入れたパターン想起の働きを実現する非線形作用素  $B$  を研究し、不動点探索を行う構造受精多段階変換での構造受精作用素 [B3], [B4]  $A(J)$  の形式との相似性、相違性を検討する。

併せて、線形作用素としての想起作用素  $H$  をも研究し、自乗形想起作用素  $Q$  も提案される。

## H1. 量子力学的観測と、パターン想起

### H1.1 単一の記憶状態からの想起

量子力学 (Quantum mechanics) では、対象としている物理系の状態  $\varphi$  はある可分な (separable) ヒルベルト空間 (Hilbert space)  $\mathfrak{H}$  の元であるとされる。 $\mathfrak{H}$  での内積、ノルムを各々、 $(\varphi, \eta)$ ,  $\varphi \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)}$  とすると、物理状態  $\varphi$  は

$$\begin{aligned} P_{[\varphi]}\eta &= (\eta, \varphi \| \varphi \|^{-1}) \cdot \varphi \| \varphi \|^{-1} \\ &= [(\eta, \varphi) / (\varphi, \varphi)] \cdot \varphi \text{ for any } \eta \in \mathfrak{H} \end{aligned} \quad (\text{H.1})$$

と定義される射影作用素 (projector)  $P_{[\varphi]}$  に対応させることも行われる。物理状態  $\varphi$  が今1つの物理状態  $\eta$  に見いだされる確率  $\text{prob}\{\varphi/\eta\}$  とは、

$$\text{prob}\{\varphi/\eta\} \equiv |(\eta \| \eta \|^{-1}, \varphi \| \varphi \|^{-1})|^2 \quad (\text{H.2})$$

のことであり、この確率が  $\eta \| \eta \|^{-1}$  と  $P_{[\varphi]}$  からのその出力  $P_{[\varphi]}\eta \| \eta \|^{-1}$  との内積で、

$$\begin{aligned} & (P_{[\varphi]}\eta \| \eta \|^{-1}, \eta \| \eta \|^{-1}) \\ &= \text{prob}\{\varphi/\eta\} \end{aligned} \quad (\text{H.3})$$

と表されて都合がよいからである。

ここで、次の定義H1を設ける。

[定義H1] (記憶状態  $\eta$  においてパターン  $\varphi$  が見いだされる内容と、その確率)

記憶状態  $\eta$  においてパターン  $\varphi$  が見いだされる内容 (パターン) とは、 $\eta$  の、ノルム規格化軸成分  $\varphi \| \varphi \|^{-1}$  への射影 (projection)

$$P_{[\varphi]}\eta \quad (\text{H.4})$$

であり、記憶状態  $\eta$  においてパターン  $\varphi$  が見いだされる確率  $\text{prob}\{\varphi/\eta\}$  とは、

$$\begin{aligned} \text{prob}\{\varphi/\eta\} & \equiv (P_{[\varphi]}\eta, \eta) / (\eta, \eta) \end{aligned} \quad (\text{H.5})$$

$$= (P_{[\varphi]}\eta \| \eta \|^{-1}, \eta \| \eta \|^{-1}) \quad (\text{H.6})$$

$$= |(\eta \| \eta \|^{-1}, \varphi \| \varphi \|^{-1})|^2 \quad (\text{H.7})$$

$$= |(\eta, \varphi)|^2 / [\|\eta\| \cdot \|\varphi\|]^2 \quad (\text{H.8})$$

のことである。 □

### H1.2 量子力学的観測と、純粋状態、混合状態

量子力学では、観測される物理量に一意的に

$$(H\varphi, \psi) = (\varphi, H\psi) \text{ for any } \varphi, \psi \in \text{Domain}(H) \quad (\text{H.9})$$

を満たすという意味で自己共役作用素 (self-adjoint operator) と呼ばれる線形作用素  $H$  を対応させている。ここに、 $\text{Domain}(H)$  は  $H$  の定義域であり、

$$\text{Domain}(H) \equiv \{\eta \in \mathfrak{H} \mid \|H\eta\| < \infty\} \quad (\text{H.10})$$

と定義されているものである。実数値列

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots \quad (\text{H.11})$$

と、正規直交性

$$\begin{aligned} & (\psi_k, \psi_l) = \\ & \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq l \\ 1 & \text{if } k = l \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{H.12})$$

と、完全性

$$\forall n \in \{1, 2, \dots\}, (\varphi, \psi_n) = 0 \Rightarrow \|\varphi\| = 0 \quad (\text{H.13})$$

とを満たす**完全正規直交系**  $\{\psi_n\}_{n=1,2,\dots}$  により、自己共役作用素  $H$  が

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot P_{[\psi_n]} \quad (\text{H.14})$$

とスペクトル表現されるとすると、 $H$  に対応するこの物理量の取り得る値としての各  $\lambda_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) が (純粋物理状態  $\psi_n$  において) 確率 1 で観測される値である。

固有値方程式

$$H\psi_n = \lambda_n \psi_n \quad (n=1, 2, \dots) \quad (\text{H.15})$$

を満たすノルム規格化固有ベクトルの列

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n, \dots \quad (\text{H.16})$$

を持つ式 (H.14) の自己共役作用素  $H$  の各  $\lambda_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) について観測がなされるとき、**純粋物理状態** (pure state)  $P_{[\varphi]}$  は、

$$P_{[\psi_n]} \varphi = (\varphi, \psi_n) \cdot \psi_n \text{ for any } \varphi \in \mathfrak{H} \quad \because \text{式 (H.1)} \quad (\text{H.17})$$

と定義される各純粋物理状態  $P_{[\psi_n]}$  を式 (H.27) の確率  $\text{prob}\{\varphi/\psi_n\}$  で重み付けて得られる混合物理状態 (mixture)  $B$  へ

$$P_{[\varphi]} \rightarrow B \equiv B[\{\psi_n\}_{n=1,2,\dots}; \varphi] \quad (\text{H.18})$$

$$\equiv \sum_{n=1}^{\infty} (P_{[\varphi]} \psi_n, \psi_n) \cdot P_{[\psi_n]} \quad (\text{H.19})$$

という具合に、移行しているといわれる。

式 (H.19) の自己共役作用素 (混合状態)  $B$  は、式 (H.27) の各

$$\lambda_n = \text{prob}\{\varphi/\psi_n\} \quad (\text{H.20})$$

を固有値に持ち、式 (H.15) と同様な固有値方程式

$$B\psi_n = \lambda_n \psi_n \quad (\text{H.21})$$

が成立する自己共役作用素である。

確率 1 で  $\lambda_n$  が観測されたとき、混合状態  $B$  は純粋状態  $P_{[\psi_n]}$  へ**収縮**するといわれる。

完全正規直交系  $\{\psi_n\}_{n=1,2,\dots}$  の線形1次結合

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \psi_n \quad (\text{H.22})$$

で、 $\varphi \in \mathfrak{H}$  を近似することを考えるとき、

$$\|\varphi - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \psi_n\| \quad (\text{H.23})$$

を最小ならしめる各1次結合係数 (複素定数)  $a_n$  は

$$a_n = (\varphi, \psi_n), \quad n=1, 2, \dots \quad (\text{H.24})$$

であり、 $\varphi \in \mathfrak{H}$  の**フーリエ式直交展開**

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \psi_n) \cdot \psi_n \quad (\text{H.25})$$

が成立しており、更に、**パーセバルの等式** (Parseval equality)

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, \psi_n)|^2 \quad (\text{H.26})$$

も成立している。

純粋状態  $P_{[\varphi]}$  において  $\lambda_n$  が観測される確率 (観測確率) は、実は4式 (H.5) ~ (H.8) で定義されている“記憶状態  $\psi_n$  にパターン  $\varphi$  が見いだされる確率”

$$\text{prob}\{\varphi/\psi_n\}$$

$$\begin{aligned}
&= (P_{[\varphi]} \psi_n, \psi_n) \\
&= |(\varphi \| \varphi \|^{-1}, \psi_n)|^2
\end{aligned} \tag{H.27}$$

である。その総和が1になるという“確率としての規格化条件”

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} (P_{[\varphi]} \psi_n, \psi_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi \| \varphi \|^{-1}, \psi_n)|^2 \\
&= \| \varphi \| \varphi \|^{-1} \|^2 \quad \because \text{式 (H.22)} \\
&= 1 \text{ if } \| \varphi \| > 0
\end{aligned} \tag{H.28}$$

が成立しているということは、 $\{\psi_n\}_{n=1,2,\dots}$  が完全正規直交系から言えることである。

## H2. 多重の記憶状態からの想起と、起想作用素 B

パターンの、式 (H.16) の集まりとしての完全正規直交系  $\{\psi_n\}_{n=1,2,\dots}$  が多重に記憶されているとする。

このとき、式 (H.16) の多重記憶状態において、パターン  $\varphi \in \mathfrak{H}$  から想起される内容は、パターン  $\varphi \in \mathfrak{H}$  に式 (H.19) の自己共役作用素 (混合状態) B を作用素させた結果

$$\begin{aligned}
B\varphi &\equiv B[\{\psi_n\}_{n=1,2,\dots}; \varphi] \\
&\equiv \sum_{n=1}^{\infty} (P_{[\varphi]} \psi_k, \psi_k) \cdot P_{[\psi_n]} \varphi
\end{aligned} \tag{H.29}$$

であると、定義する。B は式 (H.16) の多重記憶状態で規定される**想起作用素** (associator) と呼ばれる。

B の固有値としての、式 (H.27) の各  $\lambda_n = \text{prob}\{\varphi/\psi_n\}$  は、記憶状態  $\psi_n$  においてパターン  $\varphi \in \mathfrak{H}$  が想起される確率 (**想起確率**) であるといわれる。

次の定理H1は、式 (H.29) の想起作用素 B を具体的に表現したものであり、パターン  $\varphi$  のフーリエ展開式 (H.25) において、各直交展開係数  $(\varphi, \psi_k)$  を式 (H.27) の想起確率  $\text{prob}\{\varphi/\psi_n\} = |(\varphi \| \varphi \|^{-1}, \psi_k)|^2$  で

$$(\varphi, \psi_k) \cdot |(\varphi \| \varphi \|^{-1}, \psi_k)|^2 \tag{H.30}$$

の如く、変調したものであることがわかる。

想起作用素 B は、任意の  $\varphi, \eta \in \mathfrak{H}$  と任意の複素定数 a, b について、

$$\begin{aligned}
&B[\{\psi_n\}_{n=1,2,\dots}; \varphi] (a \cdot \varphi + b \cdot \eta) \\
&= a \cdot B[\{\psi_n\}_{n=1,2,\dots}; \varphi] \varphi \\
&\quad + b \cdot B[\{\psi_n\}_{n=1,2,\dots}; \varphi] \eta
\end{aligned} \tag{H.31}$$

を満たさなくて、明らかに線形作用素ではない。

[定理H1] (**想起作用素 B の表現定理**)

$$\begin{aligned}
&\forall \varphi \in \mathfrak{H}, B\varphi \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \psi_k) \cdot |(\varphi \| \varphi \|^{-1}, \psi_k)|^2 \cdot \psi_k
\end{aligned} \tag{H.32}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \psi_k) \cdot \text{prob}\{\varphi/\psi_k\} \cdot \psi_k. \tag{H.33}$$

(証明) 2式 (H.32), (H.33) は、式 (H.17) の  $P_{[\psi_n]} \varphi$  の表現と、式 (H.27) の  $\text{prob}\{\varphi/\psi_n\}$  とを式 (H.29) に代入して得られる。残っているのは、

$$\text{Domain}(B) = \mathfrak{H} \tag{H.34}$$

であることを示すことである。

先ず、 $\{\psi_n\}_{n=1, 2, \dots}$  が2式 (H.12), (H.13) を満たす完全正規直交系であることに注意し、不等式

$$\begin{aligned} & \forall \varphi \in \mathfrak{H}, \forall k \in \{1, 2, \dots\}, \\ & 0 \leq |(\varphi \| \varphi \|^{-1}, \psi_k)|^2 \leq 1 \end{aligned} \quad (\text{H.35})$$

を考慮すれば、

$$\begin{aligned} \|B\varphi\|^2 &= (B\varphi, B\varphi) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} (\varphi, \psi_k) \cdot \overline{(\varphi, \psi_\ell)} \cdot \\ & \quad |(\varphi \| \varphi \|^{-1}, \psi_k)|^2 \cdot |(\varphi \| \varphi \|^{-1}, \psi_\ell)|^2 \cdot (\psi_k, \psi_\ell) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, \psi_k)|^2 \cdot |(\varphi \| \varphi \|^{-1}, \psi_k)|^4 \cdot \|\psi_k\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, \psi_k)|^2 \\ &= \|\varphi\|^2 < \infty \quad \because \varphi \in \mathfrak{H} \end{aligned} \quad (\text{H.36})$$

より、式 (H.34) の成立が判明する。  $\square$

次の定理H2は、固有値方程式 (H.21) を満たす各記憶状態  $\psi_n$  からなる式 (H.16) の多重記憶状態において、 $\psi_n$  の非零複素定数倍  $a \cdot \psi_n$  が想起確率 1 で誤差なく想起されることを指摘している。

[定理H2] (各固有記憶状態  $\psi_n$  の完全再現定理)

$$\varphi = a \cdot \psi_n \quad (n=1, 2, \dots) \quad \text{for any non-zero complex number } a \quad (\text{H.37})$$

と定義されるパターン  $\varphi$  については、式 (H.27) の想起確率  $\text{prob}\{\varphi/\psi_k\}$  は、

$$\begin{aligned} \text{prob}\{\varphi/\psi_k\} &= |(\psi_n, \psi_k)|^2 = \\ & \begin{cases} 1 & \text{if } k=n \\ 0 & \text{if } k \neq n \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{H.38})$$

であり、**不動点方程式** (fixed-point equation)

$$B\varphi = \varphi \quad (\text{H.39})$$

が成立する。

$$\begin{aligned} (\text{証明}) \quad \text{prob}\{\varphi/\psi_n\} &= |(\varphi \| \varphi \|^{-1}, \psi_n)|^2 \quad \because \text{式 (H.27)} \\ &= |(a \cdot \psi_n \| a \cdot \psi_n \|^{-1}, \psi_n)|^2 \\ &= | |a|/|a| \cdot (\psi_n \| \psi_n \|^{-1}, \psi_n) |^2 \\ &= |(\psi_n \| \psi_n \|^{-1}, \psi_n)|^2 \\ &= |(\psi_n, \psi_n)|^2 \quad \because \text{式 (H.12)} \end{aligned} \quad (\text{H.40})$$

を得、式 (H.12) から式 (H.38) が成立することがわかる。更に、 $B\varphi$  は、

$$\begin{aligned} B\varphi &= B(a \cdot \psi_n) \quad \because \text{式 (H.37)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (a \cdot \psi_n, \psi_k) \cdot \text{prob}\{\varphi/\psi_n\} \cdot \psi_k \quad \because \text{式 (H.33)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a \cdot (\psi_n, \psi_k) \cdot |(\psi_n, \psi_k)|^2 \cdot \psi_k \quad \because \text{式 (H.40)} \\ &= a \cdot \psi_n \quad \because \text{式 (H.12)} \\ &= \varphi \quad \because \text{式 (H.37)} \end{aligned} \quad \square$$

### H3. 想起作用素 B の、ヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ での表現

一般に、 $n$  次元直交座標系  $x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in R_n$  ( $n$ 次元実数値空間) での、パターン  $\varphi = \varphi(x)$

は可分なヒルベルト空間  $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$  の元ではないことがあるが、その適切な近似を考えておき、次の約束をする。

SS理論 [B1] ~ [B6] では、パターン  $\varphi$  は可分な (separable) 一般抽象ヒルベルト空間 (Hilbert space)  $\mathfrak{H}$  の元とする。内積は  $(\varphi, \eta)$  と表され、ノルムは  $\|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)}$  で表される。ここに、 $\mathfrak{H}$  が可分とは、稠密な (dense) 可算部分集合が  $\mathfrak{H}$  に存在することを指す。 $\varphi, \eta \in \mathfrak{H}$  間のノルム距離

$$\|\varphi - \eta\| = \sqrt{(\varphi - \eta, \varphi - \eta)} \quad (\text{H.41})$$

に注意しておこう。

理解のためには、例えば、特別な場合として、内積  $(\varphi, \eta)$  を、

$$(\varphi, \eta) = \int_M dm(x) \varphi(x) \cdot \overline{\eta}(x) \quad (\text{H.42})$$

ここに、 $\overline{\eta}$  は  $\eta$  の複素共役 (a complex conjugate of  $\eta$ ) であり、

$$M : n \text{次元ユークリッド空間 } R^n \text{ の可測部分集合} \quad (\text{H.43})$$

$$dm(x) : \text{正值Lebesgue-Stieltjes式測度} \quad (\text{H.44})$$

$$x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in M (\subseteq R^n) \quad (\text{H.45})$$

とする可分なヒルベルト空間  $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$  で考えておけばよい [B1]。

次の定理H3は、第  $k$  相関関数 (correlation function) 成分  $\psi_k(x) \cdot \overline{\psi_k}(y)$  を式 (H.27) の想起確率  $\text{prob}|\varphi/\psi_k|$  で重み付けた、式 (H.46) の関数  $W_k(x, y)$  を核に持つ積分作用素として、ヒルベルト空間  $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$  では、式 (H.29) の想起作用素  $B$  が表現されることを指摘したものである。

[定理H3] (想起作用素  $B$  の、ヒルベルト空間  $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$  での表現定理)

$$W_k(x, y; \varphi) \equiv \psi_k(x) \cdot \overline{\psi_k}(y) \cdot |(\varphi \| \varphi|^{-1}, \psi_k)|^2 \quad (\text{H.46})$$

$$= \psi_k(x) \cdot \overline{\psi_k}(y) \cdot \text{prob}|\varphi/\psi_k|, x \in M, y \in M \quad (\text{H.47})$$

を第  $k (= 1, 2, \dots)$  成分に持つ核関数

$$W(x, y; \varphi) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} W_k(x, y; \varphi), x \in M, y \in M \quad (\text{H.48})$$

を導入すれば、

$$\begin{aligned} & \forall x \in M, (B\varphi)(x) \\ &= \int_M dm(y) W(x, y; \varphi) \cdot \varphi(y) \quad \text{for any } \varphi \in \mathfrak{H} = L_2(M; dm). \end{aligned} \quad (\text{H.49})$$

(証明) 式 (H.47) は、式 (H.46) に式 (H.27) を代入したものである。式 (H.49) の  $(B\varphi)$  については、

$$\begin{aligned} & (B\varphi)(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, \psi_k) \cdot |(\varphi \| \varphi|^{-1}, \psi_k)|^2 \cdot \psi_k(x) \quad \because \text{式 (H.32)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \int_M dm(y) \varphi(y) \cdot \overline{\psi_k}(y) \right] \cdot |(\varphi \| \varphi|^{-1}, \psi_k)|^2 \cdot \psi_k(x) \\ & \quad \because \text{内積 } (\varphi, \eta) \text{ の定義式 (H.42)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \int_M dm(y) \varphi(y) \cdot \psi_k(x) \cdot \overline{\psi_k}(y) \cdot |(\varphi \| \varphi|^{-1}, \psi_k)|^2 \right] \\ &= \int_M dm(y) \varphi(y) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) \cdot \overline{\psi_k}(y) \cdot |(\varphi \| \varphi|^{-1}, \psi_k)|^2 \\ &= \int_M dm(y) \varphi(y) \cdot W(x, y; \varphi) \cdot |(\varphi \| \varphi|^{-1}, \psi_k)|^2 \quad \because \text{式 (H.48)} \quad \square \end{aligned}$$

#### H4. モデル構成作用素 $T$ を用いた想起変換 TBT

本章では、式 (H.29) の想起作用素  $B$  の両側に式 (H.52) のモデル構成作用素  $T$  を配置した写像

$$\text{TBT} : \Phi \rightarrow \Phi \quad (\text{H.50})$$

と、不動点探索を行う構造受精多段階変換での構造受精作用素

$$\text{TA(J)T} : \Phi \rightarrow \Phi \quad (\text{H.51})$$

の形式との相似性、相違性が検討される。ここに、 $\Phi$  は処理の対象とする問題のパターン  $\varphi$  の集合である。

#### H4.1 axiom 1を満たす対 $[\Phi, T]$

処理の対象とする問題のパターン集合  $\Phi$  とモデル構成作用素  $T$  との対  $[\Phi, T]$  について、説明しよう。

処理の対象とする問題のパターン  $\varphi$  の集合  $\Phi$  と、パターン  $\varphi \in \Phi$  が入力されたとき、そのパターンモデル  $T\varphi \in \Phi$  を出力するモデル構成作用素

$$T : \Phi \rightarrow \Phi \quad (\text{H.52})$$

との対  $[\Phi, T]$  が、axiom 1を満たすように構成される。パターンモデル  $T\varphi$  が原パターン  $\varphi$  と同じように見え、聞こえるような式 (H.52) の写像  $T$  を後半に持つ対  $[\Phi, T]$  が次の axiom 1を満たすように構成されるとき、式 (H.52) の写像  $T$  はモデル構成作用素 (model-construction operator) と呼ばれる [B3], [B4] :

#### Axiom 1 (パターン集合 $\Phi$ とモデル構成作用素 $T$ との対 $[\Phi, T]$ の満たすべき公理)

(i) (零元の  $T$ -不動点性; fixed-point property of zero element under mapping  $T$ )

$$0 \in \Phi \wedge T0 = 0.$$

(ii) (錐性, 正定数倍吸収性; cone property)

$$\forall \varphi \in \Phi, a \cdot \varphi \in \Phi \wedge T(a \cdot \varphi) = T\varphi \quad \text{for any positive real number } a.$$

(iii) (ベキ等性, 埋込性; idempotency, embeddedness)

$$\forall \varphi \in \Phi, T\varphi \in \Phi \wedge T(T\varphi) = T\varphi.$$

(iv) (写像  $T$  の非零写像性; non-zero mapping property of  $T$ )

$$\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0. \quad \square$$

上述の axiom 1を満たす対  $[\Phi, T]$  の構成が可能であることは、次の定理 H4 で指摘される。

#### [定理 H4] (モデル構成作用素 $T$ の基本構成定理)

写像  $T$  が axiom 1 の (i), (ii), (iii) の後半, 並びに, (iv) を満たすとしよう。そして、パターンと判明している集合  $\Phi_B (\supset \{0\})$  が与えられたとしよう。ならば、処理の対象とする問題のパターンの集合  $\Phi$  を、

$$\begin{aligned} \Phi &= R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B) \\ &\equiv \{r^{++} \varphi \mid \varphi \in \Phi_B, r^{++} \in R^{++}\} \\ &\cup \{r^{++} T\varphi \mid \varphi \in \Phi_B, r^{++} \in R^{++}\} \\ &\text{where } R^{++} \text{ is a set of positive real numbers} \end{aligned} \quad (\text{H.53})$$

の如く設定すれば、

$$\Phi \supset \{0\} \wedge R^{++} \cdot \Phi = \Phi \wedge [T \cdot \Phi = T \cdot \Phi_B \subset \Phi] \quad (\text{H.54})$$

が成立し、axiom 1 の (i), (ii), (iii) の前半を  $\Phi$  は満たし、結局、対  $[\Phi, T]$  は axiom 1 を満たす。  $\square$

#### H4.2 モデル構成作用素 $T$ を両側に配置した想起変換 TBT

##### H4.2.1 構造受精作用素 $A(J)$ との対応

式 (H.27) の、“記憶状態  $\psi_k$  にパターン  $\varphi$  が見いだされる確率”  $\text{prob}\{\varphi/\psi_k\}$  を用いて、

$$0 \leq \text{sm}(\varphi, \psi_k) \equiv |(\varphi \parallel \varphi \parallel^{-1}, \psi_k)|^2 \leq 1 \quad (\text{H.55})$$

と定義される写像

$$\text{sm} : \Phi \times \{\psi_k \mid k=1,2,\dots\} \rightarrow \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \quad (\text{H.56})$$

は、式 (H28) より、その総和が1になるという“確率としての規格化条件”

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{sm}(\varphi, \psi_k) = \begin{cases} 1 & \text{if } \|\varphi\| > 0 \\ 0 & \text{if } \|\varphi\| = 0 \end{cases} \quad (\text{H.57})$$

を満たしており、定理H1の式 (H.32) は、

$$\begin{aligned} & \forall \varphi \in \mathfrak{H}, B\varphi \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, \psi_k) \cdot \text{sm}(\varphi, \psi_k) \cdot \psi_k \end{aligned} \quad (\text{H.58})$$

と書き直される。式 (H.55) の  $\text{sm}(\varphi, \psi_k)$  はパターン  $\varphi$  がパターン  $\psi_k$  に似ている程度を表していると考え直し、

$$(\varphi, \psi_k) \rightarrow \text{BSC}(\varphi, k) \quad (\text{H.59})$$

$$\text{sm}(\varphi, \psi_k) \rightarrow \text{SM}(\varphi, \omega_k) \quad (\text{H.60})$$

$$\psi_k \rightarrow T\omega_k \quad (\text{H.61})$$

と置き直すと、想起作用素 B の表現式 (H.57) から、文献 [B4]、付録5の式 (A5.5) の構造受精作用素 A(J) の表現式

$$\begin{aligned} & A(J)\varphi \\ & = \sum_{k \in J} \text{BSC}(\varphi, k) \cdot \text{SM}(\varphi, \omega_k) \cdot T\omega_k \quad \text{if } \text{BSC}(\varphi, k) > 0 \end{aligned} \quad (\text{H.62})$$

が得られる。ここに、

①大分類関数 (binary-state function)

$$\text{BSC} : \Phi \times J \rightarrow \{0, 1\} \quad (\text{H.63})$$

②類似度関数 (similarity-measure function)

$$\text{SM} : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \quad (\text{H.64})$$

③カテゴリ集合

$$\mathfrak{C} \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid j \in J\} \quad (\mathfrak{C}_j \text{ は第 } j \in J \text{ 番目のカテゴリ}) \quad (\text{H.65})$$

と1対1の対応関係にある代表パターン集合

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} \subset \Phi \quad (\text{H.66})$$

である。

#### H4.2.2 想起変換 TBT の表現

式 (H.61) の構造受精作用素 A(J) は、axiom 1 を満たす式 (H.52) のモデル構成作用素 T をその両側に配置して、式 (H.51) の  $\text{TA}(J)T : \Phi \rightarrow \Phi$  という形で使用されるとき、構造受精変換と呼ばれ、多段階の連想形認識の働きの構成に用いられる。

同様に、式 (H.57) の想起作用素 B の両側に式 (H.52) のモデル構成作用素 T を配置した式 (H.50) の写像  $\text{TBT} : \Phi \rightarrow \Phi$  が考えられる。この TBT と、不動点探索を行う構造受精多段階変換での、式 (H.51) の構造受精作用素  $\text{TA}(J)T : \Phi \rightarrow \Phi$  の形式との相似性、相違性を検討してみよう。

さて、 $u(\varphi, \ell) \in Z$  (複素数全体の集合) は、パターン  $\varphi \in \Phi$  から抽出された第  $\ell \in L \equiv \{1, 2, \dots\}$  番目の特徴量とすると、**特徴抽出写像** (feature-extracting mapping)

$$u : \Phi \times L \rightarrow Z \quad (\text{H.67})$$

が導入される。

$$T\varphi = \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell) \cdot \psi_\ell, \text{ where } L \equiv \{1, 2, \dots\} \quad (\text{H.68})$$

という構造形式を備えた、axiom 1を満たす式 (H.52) のモデル構成作用素 T を用いた場合、式 (H.50) の写像 TBT の表現を、次の定理H5は指摘している。

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \text{TBT}\varphi \\ &= T \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (T\varphi, \psi_k) \cdot \text{sm}(T\varphi, \psi_k) \cdot \psi_k \quad \because \text{式 (H.58)} \end{aligned} \quad (\text{H.69})$$

に、

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \forall \ell \in \Phi, \forall k \in L, (T\varphi, \psi_k) \\ &= \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell) \cdot (\psi_\ell, \psi_k) \quad \because \text{式 (H.68)} \\ &= u(\varphi, k) \quad \because \text{式 (A12)} \end{aligned} \quad (\text{H.70})$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \forall \varphi \in \Phi, \|T\varphi\|^2 \\ &= \sum_{\ell \in L} |(T\varphi, \psi_\ell)|^2 \quad \because \text{式 (H.26)} \\ &= \sum_{\ell \in L} |u(\varphi, \ell)|^2 \quad \because \text{式 (H.70)} \end{aligned} \quad (\text{H.71})$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \forall \varphi \in \Phi, \forall k \in L, \text{sm}(T\varphi, \psi_k) \\ &= |(T\varphi, \psi_k)|^2 / \|T\varphi\|^2 \quad \because \text{式 (H.55)} \\ &= |u(\varphi, k)|^2 / \sum_{\ell \in L} |u(\varphi, \ell)|^2 \quad \because \text{2式 (H.70), (H.71)} \end{aligned} \quad (\text{H.72})$$

を代入すれば、次の定理H5が成り立つ。

[定理H5] (想起変換 TBT の表現定理)

axiom 1を満たす式 (H.52) のモデル構成作用素 T を使うと、表現式 (H.69) が成り立ち、特に、T として、式 (H.68) を採用すると、表現

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \Phi, \text{TBT}\varphi \\ &= T \cdot \sum_{\ell=1}^{\infty} u(\varphi, k) \cdot [ |u(\varphi, k)|^2 / \sum_{\ell=1}^{\infty} |u(\varphi, \ell)|^2 ] \cdot \psi_k \end{aligned} \quad (\text{H.73})$$

が成り立つ。□

## H5. 想起作用素としての、B の線形化 H

射影作用素  $P_{[\varphi]}$  の定義式 (H.1) に注意し、式 (H.14) の自己共役作用素 H を書き直すと、

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \Phi, H\varphi \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \lambda_k \cdot (\varphi, \psi_k) \cdot \psi_k. \end{aligned} \quad (\text{H.74})$$

となる。但し、式 (H.74) の各  $\lambda_k$  はパターン  $\varphi \in \Phi$  に依存しないとする。式 (H.74) の線形作用素 H の表現は、形式的には非線形作用素 B の表現式 (H.14) において想起確率  $\text{prob}\{\varphi/\psi_k\}$  の代りに、固有値方程式 (H.15) の固有値  $\lambda_k$  を採用したものである。

核関数

$$K(x, y) \equiv \sum_{\ell=1}^{\infty} \lambda_k \cdot \psi_k(x) \cdot \overline{\psi_k(y)}, \quad x \in M, y \in M \quad (\text{H.75})$$

を導入すれば、線形作用素 H の表現

$$\begin{aligned} \forall x \in M, (H\varphi)(x) \\ &= \int_M dm(y) K(x, y) \cdot \varphi(y) \quad \text{for any } \varphi \in \Phi = L_2(M; dm) \end{aligned} \quad (\text{H.76})$$

の成立が、定理H3の証明と同様にしてわかる。

次の定理H6は、式 (H.74) の自己共役作用素 H によって、想起変換

$$\text{THT} : \Phi \rightarrow \Phi \quad (\text{H.77})$$

を表現したものである。

[定理H6] (自己共役作用素 H による想起変換 THT の表現定理)

$$\begin{aligned} & \forall \varphi \in \Phi, \text{THT } \varphi \\ & = T \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot (T\varphi, \psi_k) \cdot \psi_k \end{aligned} \quad (\text{A78})$$

が成り立ち、積分表現

$$\begin{aligned} & \forall \varphi \in \Phi, \forall x \in M, (\text{THT } \varphi)(x) \\ & = T \cdot \int_M dm(y) K(x, y) \cdot (T\varphi)(y) \quad \text{for any } \varphi \in \mathfrak{F} = L_2(M; dm) \end{aligned} \quad (\text{H.79})$$

が成り立つ。特に、式 (H.68) のモデル構成作用素 T を使うと、

$$\begin{aligned} & \forall \varphi \in \Phi, \text{THT } \varphi \\ & = T \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot u(\varphi, k) \cdot \psi_k. \end{aligned} \quad (\text{H.80})$$

(証明) 式 (H.78) の THT の表現は式 (H.74) の H から明らかである。また、式 (H.79) の THT の表現は式 (H.76) の H から明らかである。最後に式 (H.80) の THT の表現は式 (H.78) の THT に、式 (H.70) の  $(T\varphi, \psi_k) = u(\varphi, k)$  を代入したものである。□

### H6. 自乗形想起作用素 Q と、想起変換 TQT

n 次元実数空間

$$R^n = \{x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid -\infty < x_1, x_2, \dots, x_n < +\infty\} \quad (\text{H.81})$$

を導入し、

内積  $(\varphi, \eta)$

$$= \int_{R^n} dx \varphi(x) \cdot \overline{\eta}(x) \quad (\text{H.82})$$

$$\text{ノルム } \|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \quad (\text{H.83})$$

を採用する可分なヒルベルト空間  $\mathfrak{F} = L_2(M; dm)$  を考えよう。ここに、 $\overline{\eta}$  は  $\eta$  の複素共役であり、

$$M = R^n \quad (\text{H.84})$$

$$dm(x) = dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (\text{H.85})$$

と設定されている。

$\{\psi_n\}_{n=1,2,\dots}$  を完全正規直交系とし、式 (H.75) の核関数  $K(x, y)$  を定義すると、

$$\begin{aligned} & \forall x \in R^n, \int_{R^n} dy K(x, y) \cdot \psi_n(y) \\ & = \int_{R^n} dy \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot \psi_k(x) \cdot \overline{\psi_k}(y) \right] \cdot \psi_n(y) \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot \psi_k(x) \cdot \int_{R^n} dy \overline{\psi_k}(y) \cdot \psi_n(y) \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot \psi_k(x) \cdot (\psi_n, \psi_k) \\ & = \lambda_n \cdot \psi_n(x) \quad \because \text{式 (H.12)} \end{aligned} \quad (\text{H.86})$$

が成立し、固有値方程式 (H.15) の積分核表現

$$\begin{aligned} & \forall x \in R^n, \\ & \int_{R^n} dy K(x, y) \cdot \psi_n(y) = \lambda_n \cdot \psi_n(x) \end{aligned} \quad (\text{H.87})$$

が成り立っていることがわかる。

ここで、文献 [A22] で論じられている作用素を  $R^1$  から  $R^n$  へと拡張し、

$$\begin{aligned} & (Q\varphi)(x) \\ & \equiv \int_{R^n} du \overline{\varphi}(x-u) \cdot \\ & \quad \int_{R^n} dv K(u, v) \cdot \varphi(x-v) \end{aligned} \quad (\text{H.88})$$

と定義される **自乗形想起作用素** (quadratic associator) Q を導入してみよう。

次の定理H7は、式 (H.88) の  $(Q\varphi)(x)$  が正に  $\varphi(x)$  と  $\psi_n(x)$  との畳み込み積分

$$\int_{\mathbb{R}^n} dy \varphi(x-y) \cdot \overline{\psi_n}(y) \quad (\text{H.89})$$

の絶対値の自乗を各固有値  $\lambda_k$  で重み付けた項の総和であることを明らかにしている。

[定理H7] (自乗形想起作用素 Q の表現定理)

$\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}^n; dx_1 dx_2 \cdots dx_n)$  とする。

$$\textcircled{1} \forall \varphi \in \text{Domain}(Q)$$

$$\equiv \{ \varphi \in \mathfrak{H} \mid \|Q\varphi\| < \infty \}$$

$$\subset \mathfrak{H}, \forall x \in \mathbb{R}^n, (Q\varphi)(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot \left| \int_{\mathbb{R}^n} dy \varphi(x-y) \cdot \overline{\psi_n}(y) \right|^2. \quad (\text{H.90})$$

$$\textcircled{2} \forall \varphi \in \Phi, \forall x \in \mathbb{R}^n, (TQT\varphi)(x)$$

$$= T \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot \left| \int_{\mathbb{R}^n} dy (T\varphi)(x-y) \cdot \overline{\psi_n}(y) \right|^2. \quad (\text{H.91})$$

(証明)  $(Q\varphi)(x)$

$$\equiv \int_{\mathbb{R}^n} du \overline{\varphi}(x-u) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} dv K(u,v) \cdot \varphi(x-v) \quad \because \text{式 (H.88)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} du \overline{\varphi}(x-u) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} dv \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot \psi_k(u) \cdot \overline{\psi_k}(v) \right] \cdot \varphi(x-v) \quad \because \text{式 (H.75)}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot \int_{\mathbb{R}^n} du \overline{\varphi}(x-u) \cdot \psi_k(u) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} dv \overline{\psi_k}(v) \cdot \varphi(x-v)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot$$

$$\left[ \int_{\mathbb{R}^n} du \varphi(x-u) \cdot \overline{\psi_k}(u) \text{ の複素共役} \right] \cdot \int_{\mathbb{R}^n} dv \varphi(x-v) \cdot \overline{\psi_k}(v)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot \left| \int_{\mathbb{R}^n} dy \varphi(x-y) \cdot \overline{\psi_n}(y) \right|^2.$$

を得、式 (H.90) の成立が示された。式 (H.91) は自乗形想起作用素 Q の表現式 (H.90) から明らかである。□

## 付録I 基本的な3種類の類似度関数 SM と、ノルム距離を用いた指数関数形・分数関数形類似度 SM

axiom 2 を満たす類似度関数

$$SM: \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \quad (\text{I.1})$$

には、逆ノルム距離  $\|T\varphi - T\omega_j\|^{-1}$ 、内積  $(T\varphi, T\omega_j)$ 、線形1次結合  $\sum_{j \in J} d_j(\varphi) \cdot T\omega_j$  に基づく基本的な3種類のものがあり (I1~I3)、特に、ノルム距離  $\|T\varphi - T\omega_j\|$  に基づくものに関連して、指数関数形、分数関数形の類似度関数 SM が、パターンモデル間の分離があからさまに曖昧でない形でなされるように存在することが示される (I3, I4)。

以下では、全カテゴリ集合

$$\mathfrak{C} \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid j \in J\} \quad (\text{I.2})$$

についての全代表パターン集合

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} \quad (\text{I.3})$$

は1次独立であり、同時に、全代表パターンモデル集合

$$T \cdot \Omega \equiv \{T\omega_j \mid j \in J\} \quad (\text{I.4})$$

も1次独立であることを要請し、 $T \cdot \Omega$  間の任意の2要素  $T\omega_i$ ,  $T\omega_j$  間の分離性

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \|T\omega_i - T\omega_j\| > 0 \quad (I.4)$$

が成立していると仮定しておく。

## 11. 逆自乗ノルム距離形類似度 (タイプ1のSS類似度) SM

処理の対象とする問題のパターン  $\varphi$  の集合  $\Phi$  が有限集合であると仮定して得られる汎関数

$$\begin{aligned} F(\{a_j \mid j \in J, \varphi \in \Phi\}; T \cdot \Phi, T \cdot \Omega) \\ = \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{j \in J} a_j^2 \cdot \|T\varphi - T\omega_j\|^2 \quad \text{on condition that } \sum_{j \in J} a_j = 1 \\ \text{for any } \varphi \in \Phi \end{aligned} \quad (I.5)$$

は各  $T\omega_j$  の回りに  $T\varphi$  が集中している程度を計量化したもの (自乗ノルム基準) であり、この  $F(\{a_j \mid j \in J, \varphi \in \Phi\}; T \cdot \Phi, T \cdot \Omega)$  を極小にする各変数  $a_j$  の値  $a_j(\varphi)$  は、fuzzy  $|J|$ -means algorithm によれば、

$$\begin{aligned} a_j(\varphi) \\ = \|T\varphi - T\omega_j\|^{-2} / \sum_{i \in J} \|T\varphi - T\omega_i\|^{-2} \quad \text{for any } j \in J \text{ and } \varphi \in \Phi \end{aligned} \quad (I.6)$$

と与えられる (Let  $T \cdot \Omega$  represent a  $|J|$ -tuple of prototypes, each of which characterizes one of the  $|J|$  clusters.  $a_j(\varphi)$  represents the degree to which  $\varphi$  belongs to the  $j$ -th one of the  $|J|$  clusters.)。このとき、無限集合であってもよい  $\Phi$  について、極小値となっている汎関数  $F$  内の重み  $a_j(\varphi)^2$  の平方根  $a_j(\varphi)$  を

$$\begin{aligned} SM(\varphi, \omega_j) (= a_j(\varphi)) \\ = \|T\varphi - T\omega_j\|^{-2} / \sum_{i \in J} \|T\varphi - T\omega_i\|^{-2} \end{aligned} \quad (I.7)$$

と採用し、各  $T\omega_j$  の回りに  $T\varphi$  が集中している程度を計量化し定義された式 (I.1) の写像  $SM$  は axiom 2 を満たすことが確かめられ、逆自乗ノルム距離形類似度 (タイプ1のSS類似度) と称される  $SM$  が得られたことになる。

## 12. 対数自乗内積形類似度 (タイプ2のSS類似度) SM

パターンモデル  $T\varphi \in \Phi$  が

$$T\varphi = \psi + \eta \wedge (\psi, \eta) = 0 \quad (I.8)$$

$$\therefore \|T\varphi\|^2 = \|\psi\|^2 + \|\eta\|^2 \geq \|\psi\|^2 \quad (I.9)$$

$$\therefore 1 \geq \|\psi\|^2 / \|T\varphi\|^2 \quad (I.10)$$

と直交分解されるとき、 $\psi$  に含まれているパターンモデル  $T\varphi$  の程度を情報量 (amount of information)  $I(T\varphi, \psi)$  として計量化した  $I(T\varphi, \psi)$  は、

$$I(T\varphi, \psi) = -(1/2) \cdot \log_e [1 - \|\psi\|^2 / \|T\varphi\|^2] \quad (I.11)$$

と定義できる [B27]。任意の  $j \in J$  につき、

$$\begin{aligned} \psi &\equiv \psi_j \equiv [(T\varphi, T\omega_j) / (T\omega_j, T\omega_j)] \cdot T\omega_j \\ &= (T\varphi, T\omega_j \|T\omega_j\|^{-1}) \cdot T\omega_j \|T\omega_j\|^{-1} \end{aligned} \quad (I.12)$$

$$\therefore (\psi_j, T\omega_j) = (T\varphi, T\omega_j) \quad (I.13)$$

とおくことができることは、

$$(\psi_j, \eta) = 0 \quad (I.14)$$

からわかる。このとき、

$$\begin{aligned} \|\psi_j\|^2 &= (\psi_j, \psi_j) \\ &= |(\mathbf{T}\varphi, \mathbf{T}\omega_j \|\mathbf{T}\omega_j\|^{-1})|^2 \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

を得、よって、式 (I.11) から表現

$$\begin{aligned} I(\mathbf{T}\varphi, \psi_j) &= -(1/2) \cdot \log_e [1 - |(\mathbf{T}\varphi, \mathbf{T}\omega_j \|\mathbf{T}\omega_j\|^{-1})|^2 / \|\mathbf{T}\varphi\|^2] \\ &= -(1/2) \cdot \log_e [1 - |(\mathbf{T}\varphi, \mathbf{T}\omega_j)|^2 / [\|\mathbf{T}\varphi\|^2 \cdot \|\mathbf{T}\omega_j\|^2]] \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

が得られる。よって、

$$\text{SM}(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} I(\mathbf{T}\varphi, \psi_j) / \sum_{i \in J} I(\mathbf{T}\varphi, \psi_i) \\ \quad \dots \sum_{i \in J} I(\mathbf{T}\varphi, \psi_i) > 0 \text{ の場合} \\ p(\mathcal{C}_j) \dots \sum_{i \in J} I(\mathbf{T}\varphi, \psi_i) = 0 \text{ の場合} \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

と定義された式 (I.1) の写像 SM は axiom 2 を満たすことが確かめられ、対数自乗内積形類似度 (タイプ2のSS類似度) と称される SM が得られたことになる。

但し、 $\psi_j$  に含まれているパターンモデル  $\mathbf{T}\varphi$  の程度を計量化して得られる2式 (I.17), (I.18) の SM においては、

$$(\mathbf{T}\varphi, \mathbf{T}\omega_j) / [\|\mathbf{T}\varphi\| \cdot \|\mathbf{T}\omega_j\|] = 0 \text{ if } \|\mathbf{T}\varphi\| = 0 \vee \|\mathbf{T}\omega_j\| = 0 \quad (\text{I.19})$$

と解釈する。

一般に、2つの確率変数 X, Y 間のシャノン相互情報量 (mutual information between X and Y)  $I(X, Y)$  とは、X の持つ不確定さから Y を観測しても尚残存している不確定さを差し引いたもの (X に関し解消された不確定さ) であり、これを X に関し獲得された情報量 (= 解消された不確定さ) と考えたものである。対称性  $I(X, Y) = I(Y, X)$  が成立することが知られている。

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}\varphi, \mathbf{T}\omega_j) / [\|\mathbf{T}\varphi\| \cdot \|\mathbf{T}\omega_j\|] \\ = (\mathbf{T}\varphi, \mathbf{T}\omega_j) / [\sqrt{(\mathbf{T}\varphi, \mathbf{T}\varphi)} \cdot \sqrt{(\mathbf{T}\omega_j, \mathbf{T}\omega_j)}] \end{aligned}$$

が  $\mathbf{T}\varphi, \mathbf{T}\omega_j$  間の相関係数 (correlation coefficient between  $\mathbf{T}\varphi$  and  $\mathbf{T}\omega_j$ ) に相当すると考えよう。そうすると、式 (I.16) の  $I(\mathbf{T}\varphi, \psi_j)$  は、 $\mathbf{T}\varphi, \mathbf{T}\omega_j$  を共に正規分布に従う確率変数 (正規形確率変数) とみなしたときの、シャノン相互情報量であることは、

次の指摘よりわかる：

2つの正規形確率変数 X, Y 間の相互情報量  $I(X, Y)$  は、その相関係数を  $\rho_{X,Y}$  と表すと、

$$I(X, Y) = -(1/2) \cdot \log_e [1 - \rho_{X,Y}^2]$$

と表される [A24]。 □

### 13. 1次従属形類似度 (タイプ3のSS類似度) SM

パターンモデル  $\mathbf{T}\varphi$  を各  $\mathbf{T}\omega_j$  の1次結合

$$\sum_{j \in J} d_j \cdot \mathbf{T}\omega_j \quad (\text{I.20})$$

で近似するときの、誤差

$$\mathbf{T}\varphi - \sum_{j \in J} d_j \cdot \mathbf{T}\omega_j \quad (\text{I.21})$$

の平均自乗ノルム

$$\|\mathbf{T}\varphi - \sum_{j \in J} d_j \cdot \mathbf{T}\omega_j\|^2 \quad (\text{I.22})$$

を極小ならしめ、 $\mathbf{T} \cdot \Omega$  への1次従属性を表す1次結合係数  $d_j$  は、連立1次方程式

$$\sum_{i \in J} (T\omega_i, T\omega_j) \cdot d_i(\varphi) = (T\varphi, T\omega_j), \quad j \in J \quad (I.23)$$

を解いて得られる。得られた各  $d_j$  は  $d_j(\varphi)$  と表現される。

このとき、 $T\varphi$  の、 $T \cdot \Omega$  による1次結合式

$$\exists (T\varphi)_\perp \in \mathfrak{F},$$

$$T\varphi = \sum_{j \in J} d_j(\varphi) \cdot T\omega_j + (T\varphi)_\perp \quad (I.24)$$

$$\wedge [\forall j \in J, ((T\varphi)_\perp, T\omega_j) = 0] \quad (I.25)$$

が成り立つ。第  $j \in J$  番目の1次結合係数  $d_j(\varphi)$  の絶対値の自乗

$$|d_j(\varphi)|^2 \quad (I.26)$$

は、 $T\varphi$  が  $T\omega_j$  と1次従属の関係にある強さの程度を反映したものであり、

$$SM(\varphi, \omega_j) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |d_j(\varphi)|^2 / \sum_{i \in J} |d_i(\varphi)|^2 \\ \dots \sum_{i \in J} |d_i(\varphi)|^2 > 0 \text{ の場合} \\ p(\mathbb{C}_j) \dots \sum_{i \in J} |d_i(\varphi)|^2 = 0 \text{ の場合} \end{array} \right. \quad (I.27)$$

$$\dots \sum_{i \in J} |d_i(\varphi)|^2 > 0 \text{ の場合} \quad (I.28)$$

$$p(\mathbb{C}_j) \dots \sum_{i \in J} |d_i(\varphi)|^2 = 0 \text{ の場合}$$

と定義された式 (I.1) の写像  $SM$  は axiom 2 を満たすことが確かめられ、 $T\varphi$  が各  $T\omega_j$  と1次従属の関係にある程度を計量化した1次従属形類似度 (タイプ3のSS類似度) と称される  $SM$  が得られたことになる。

以下の  $\|T\varphi - T\omega_j\|$  の代りに、2性質

$$\text{dis}(T\varphi, T\eta) > 0 \text{ if } \|T\varphi - T\eta\| > 0 \quad (I.29)$$

$$\text{dis}(T\varphi, T\eta) = 0 \text{ if } \|T\varphi - T\eta\| = 0 \quad (I.30)$$

を満たす2変数関数

$$\text{dis} : \Phi \times \Phi \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (I.31)$$

で定義される  $\text{dis}(T\varphi, T\omega_j)$  を用いても、全く同様に、axiom 2 を満たす式 (I.1) の類似度関数  $SM$  が得られる。

#### 14. ノルム距離を用いた指数関数形類似度 $SM$

2つの定数  $a_j, b_j$  を、条件

$$a_j > 0 \wedge 0 \leq b_j < \min_{i \in J - |j|} \|T\omega_i - T\omega_j\| \quad (I.32)$$

を満たすように選ぶ。関数  $s(\varphi, \omega_j)$  を

$$s(\varphi, \omega_j) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ if } \|T\varphi - T\omega_j\| \geq \min_{i \in J - |j|} \|T\omega_i - T\omega_j\| \\ \exp[-a_j^{-1} \cdot \|T\varphi - T\omega_j\|] \\ \text{if } b_j < \|T\varphi - T\omega_j\| \\ < \min_{i \in J - |j|} \|T\omega_i - T\omega_j\| \\ 1 \text{ if } \|T\varphi - T\omega_j\| \leq b_j \end{array} \right. \quad (I.33)$$

と定義して得られる関数  $s(\varphi, \omega_j)$  を用いて

$$SM(\varphi, \omega_j) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S(\varphi, \omega_j) / \sum_{i \in J} S(\varphi, \omega_i) \text{ if } \sum_{i \in J} S(\varphi, \omega_i) > 0 \\ p(\mathbb{C}_j) \text{ if } \sum_{i \in J} S(\varphi, \omega_i) = 0 \end{array} \right. \quad (I.34)$$

$$p(\mathbb{C}_j) \text{ if } \sum_{i \in J} S(\varphi, \omega_i) = 0 \quad (I.35)$$

と定義して得られる式 (I.1) の写像 SM は、axiom 2 を満たす。以下は、その証明である。

式 (I.32) より、

$$\forall j \in J, S(\omega_j, \omega_j) = 1 \quad (\text{I.36})$$

$$\wedge [\forall i \in J - \{j\}, S(\omega_i, \omega_j) = 0] \quad (\text{I.37})$$

がいえ、よって、

$$SM(\omega_i, \omega_j) = 1 \text{ if } i=j, = 0 \text{ if } i \neq j \quad (\text{I.38})$$

が成り立つし、更に、

$$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} SM(\varphi, \omega_j) = 1 \quad (\text{I.39})$$

も明らかに成り立っている。最後に、

$$T \cdot T = T \quad \therefore \text{axiom 1 の (iii) の後半} \quad (\text{I.40})$$

より、

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j) \quad (\text{I.41})$$

も成立していることがわかるからである。

2つのパターンモデル  $T\varphi, T\omega_j$  間の分離があからさまに曖昧でない形でなされるように、式 (I.1) の SM が存在することを、3式 (I.33) ~ (I.35) が示している。

## 15. ノルム距離を用いた分数関数形類似度 SM

2つの定数  $a_j, b_j$  を条件式 (I.32) を満たすように選ぶ。関数  $s(\varphi, \omega_j)$  を

$$s(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} 0 & \text{if } \|T\varphi - T\omega_j\| \geq \min_{i \in J - \{j\}} \|T\omega_i - T\omega_j\| \\ 1/[1 + a_j^{-1} \cdot \|T\varphi - T\omega_j\|] & \text{if } b_j < \|T\varphi - T\omega_j\| < \min_{i \in J - \{j\}} \|T\omega_i - T\omega_j\| \\ 1 & \text{if } \|T\varphi - T\omega_j\| \leq b_j \end{cases} \quad (\text{I.42})$$

と定義して得られる関数  $s(\varphi, \omega_j)$  を用いて

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} S(\varphi, \omega_j) / \sum_{i \in J} S(\varphi, \omega_i) & \text{if } \sum_{i \in J} S(\varphi, \omega_i) > 0 \end{cases} \quad (\text{I.43})$$

$$\begin{cases} p(\mathcal{C}_j) & \text{if } \sum_{i \in J} S(\varphi, \omega_i) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.44})$$

と定義して得られる式 (I.1) の写像 SM は、axiom 2 を満たす。以下は、その証明は6式 (I.36) ~ (I.41) によるのと全く、同様である。

2つのパターンモデル  $T\varphi, T\omega_j$  間の分離があからさまに曖昧でない形でなされるように、式 (I.1) の SM が存在することを、3式 (I.42) ~ (I.44) が示している。□

以上の5種類の SM のいずれか1つを用い、

$$\text{assign } \varphi \text{ to } \mathcal{C}_j \text{ if } SM(\varphi, \omega_j) \geq \max_{i \in J - \{j\}} SM(\varphi, \omega_i) \quad (\text{I.45})$$

と、パターン  $\varphi \in \Phi$  を認識することができる。この認識法が最大類似度法 (maximum-similarity method) である。

(鈴木昇一, 文教大学・情報学部・情報システム学科, “文教大学・情報学部・情報研究 no.22” 投稿論文, 論文題目 平均顔を用いた顔画像の2値化、並びに、目・鼻・口の抽出と、その計算機シミュレーション, 投稿年月日 1999年8月3日 (木))