認識行為に向けての、効用最大化原理

鈴木　昇一

A Maximum Principle of Utility for the Action of Recognition

Shoichi Suzuki

あらまし

認識システムは、パターン生成システムがその表現をパターンに託したカテゴリがどのカテゴリであるかは知らないという仮定（認識システムの、パターン生成に関する**無知仮定**）の下で、通信系に関するシャノンの確率模型、言語行為の“水谷の確率模型”に対応して、**認識行為の確率模型**が提案されている。

パターン生成、パターン認識の場面において、**無曖昧性が実現される**とは、効用としての平均正解率が最大になっている場合の特別な状況である事実を、2定理3.1，3.2の系１で明らかにすることが本研究の目的である。

パターン表現（パターン生成）システムの、各カテゴリのパターンによる表現能力が劣っていれば、**効用**として採用された**平均正解率**を維持するためには、パターンがどのカテゴリを表すために生成されたかを推定する機能を備えているパターン認識システムの、パターン認識能力が優秀でなければならないし、また、**表現能力が優秀であれば、認識能力が劣っていてもよい**ことを説明可能な“パターン生成・パターン認識に関する最大化原理理”が研究されている。

パターン認識の働きの底には、パターン生成のもたらす“典型的なパターンからの崩れ・変形”に応じ、**平均正解率を最大ならしめようとする“最大化原理”**が流れていることが明らかになっている。

本研究により、パターン生成の働きの正確さに応じ、パターン認識の働きが考えられることが鮮明になった。

キーワード

パターン生成　シヤノンの通信モデル　平均正解率　生成行列　認識行列
認識行為の確率モデル　認識行為の無曖昧性　健全性　完全性

Abstract

Let us suppose a recognition system does not know to whose category a pattern in question which is generated by a pattern representation belongs.This assumotion is needed to construct a probabilistic model of an action of a generation and a recognition presented here. The model corresponds to the probabilistic model of an action of a representation and an interpretation by use of a language suggested by Sizuo Mizutani.

Two corollaries of theorem 3.1 and 3.2 pointed out the greatest correct recognition-rate of the greatest pattern-set.That is to say,a realization of the nonambiguity in pattern generation and pattern recognition means a special case of that an average rate of correct solution is maximized.

An analysis presented here clarified that both the pattern generation (or representation) system and the pattern recognition system must obtain a maximum of an average rate of correct solution and that the one must compensate an incomplete faculty of the other.
Key words : generation of patterns　Shannon's model of communication
average rate of correct solution　generation matrix　recognition matrix
probabilistic model of an action of recognition　ambiguity of an action of recognition
soundness　completeness

1. まえがき

水谷静夫による“言語による伝達行為（表現･解釈の行為）に関する確率模型”に関する優れた研究［16］は、Shannon情報理論［22］での一般通信系の確率模型［29］にhintを得て、獲得されたものである。この研究によって、2言語間にわたる翻訳作業は通信路に加わる雑音行列で表され、**平均正解率最大化（効用）を規準としての言語行為の方略**が明らかになっている。話し上手になるよりも聞き上手になる方が難しいとか、誠意だけでは話は通じるのではなく、方略が必要であるとか、表現行為の効用は同じ事を言うのにも表し方で相手に起こさせる効果が異なるとか、言語主体間の虚々実々のやり取りを追求できるなどが指摘されている。水谷のこの“言語による伝達行為のモデル”によって、**何らかの効用**（つまり、平均正解率）**を最大化するという原理が言語行為の底に流れている**ことが明らかにされている。

知識には、大きく分類して、**言語知識、パターン知識**の2つがあるといわれるが［13］、“パターンによる伝達行為”、つまり、“パターンによる知識の表現（生成）と、パターンで表された知識の認識とを併せた2つの行為”では、如何なる効用がその底に流れているのであろうか？

本論文では、この水谷研究に刺激を受け、この種の効用が統計的決定理論におけるベイズ解から従う平均正解率（平均認識率）であることを明らかにし、“パターン認識の数学的理論（SS理論）［10］～［15］”における**パターン認識行為の底に流れている効用最大化原理**が指摘される。従来のパターン認識研究［7］では、パターンの、プロトタイプパターンからの崩れ･変形を伴ったパターン生成の場面において、認識の立場から眺め、平均正解率を最大にするパターン生成機能の存在に注目していないのであるが、本研究では、パターン認識機能の性能程度に応じて、パターン生成機能の性能が要求されてよいという“パターン認識に関する新しい考え"が提出される（新規性)。つまり、パターン生成、パターン認識の両働きは、一方の機能不完全性を補う形で、他方

が平均正解率を最大にしようとしているという“**相互補完機能**”存在の必要性が指摘される。

テキスト（文字列）によって計算機の動作を制御可能なことを発明·発見したことは、20世紀における大きな事件であった。テキストによるこの制御から、テキスト以外のマルチメディア情報（オーディオ、ビデオ、グラフィックスなどの画像、音声など）によって、計算機に動作を指示する**知能情報メディア時代**に確実に変わりつつある。

マルチメディア技術により、ありとあらゆる情報の**電子テキスト化**（オープン·コンピュータネットワークを使ったディジタル形ペーパーレス化）が可能になった。

計算機に予め与える意味論理体系は、この体系との照合によってその動作が決まる計算機に、必要なときに必要なマルチメデイア知識を能率的に検索する手法（マルチメデイア情報の検索手法）や、このようなマルチメデイア知識を獲得し、組織的に表現·蓄積する手法（マルチメデイア情報の表現·獲得手法）の確立を要求している。マルチメデイア内部表現から意味関係を考慮して、質問の前提条件からその含意情報を取り出すマルチメデイア情報の推論操作により、情報を生成しなければならないのが、**マルチメデイア計算機**である。

マルチメディアに関する知能·知識情報処理においては、“その表現に冗長性があり、然も、ある種の座標変換の下でその意味が保存され、ある程度の変形にも耐えられる情報としてのパターン” φ の表象 $T\varphi$ とは何か？ その情報圧縮法に関連し追及し、**付加価値の高いパターン処理技術**（パターン検索、動画像処理、テレビ電話、仮想現実感、会話音声処理等）を開発しなければなければならない。

認識機械 RECOGNITRON の上での操作系列（カテゴリ番号のリストに関する操作系列）と、この操作系列による RECOGNITRON の記憶状態変化の記述によって、パターン認識という概念を客観的に定義できることが、S.Suzukiによって示されている：

The method of recognizing a pattern φ in question is to find some recursive procedure which yields a categorical-membership knowledge $\langle \psi, \lambda \rangle$ as a least fixed-point of an equation $\langle \psi, \lambda \rangle =_{\triangle} \langle T\varphi, J\rangle \sqcup TA(J)\,T\cdot\langle\psi, \lambda\rangle$ of an associative recognition which minimizes a potential $E(\psi, \lambda)$. □

（認識システム RECOGNITRON が）パターンモデル

$T\varphi \in \Phi$ を見たら、原パターン $\varphi \in \Phi$ と同じに見える（知覚される） 1.1)

を可能にする“モデル構成作用素

$$T: \Phi \to \Phi \tag{1.2}$$

に関する公理（axiom 1）の存在”を、S.Suzukiは明らかにした［12]，［13]。この指摘が**知能情報学、知能工学**の両分野における“ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}(\supset \Phi)$ でのパターン認識·パターン連想形記憶（パターン情報検索）·ニューラルネット［11]”を展開する**SS理論**［15］の出発点である。

$\eta(x)$ は不等式

$$\forall x \in M,\ 0 < \eta(x) \leqq 1 \tag{1.3}$$

を満たす閾値関数であり、また、$(S\varphi)(x)$ は

$$(S\varphi)(x) = \begin{cases} 0 & \cdots \forall x \in M,\ \varphi(x) = 0 \text{ のとき} \\ \varphi(x)/\sup_{x\in M} |\varphi(x)| & \\ & \cdots \exists x \in M,\ \varphi(x) \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{1.4}$$

と定義される写像Sを導入し、有界実数値パターン $\varphi = \varphi(x)$ に対し

$$(\mathrm{T}\varphi)(\mathrm{x})=\begin{cases}0\cdots(\mathrm{S}\varphi)(\mathrm{x})<\eta(\mathrm{x})\text{ のとき}\\ 1\cdots(\mathrm{S}\varphi)(\mathrm{x})\geqq\eta(\mathrm{x})\text{ のとき}\end{cases}\tag{1.5}$$

と定義される写像 T はaxiom 1を満たし、2値画像 Tφをヒトが知覚するとき、視覚の、ヒトに備わっている平滑化の働きにより、2値画像 Tφはアナログ画像φとして認識されることが知られていることからわかるように、想定（1.1）は、人間の視覚特性が反映された設定である。

パターン情報処理に関するSS理論は、可分な一般抽象ヒルベルト空間（複素無限次元空間）$\mathfrak{H}$の(零元0を含む)或る部分集合 Φ を処理の対象とする問題のパターンφの集合の表現としている。

処理の対象とする問題のパターン$\varphi \in \Phi$ に似ているパターン集合に付けられているカテゴリ名を決定するのに、**モデル構成作用素 T，類似度関数SM，大分類関数 BSC** を使い、連想形認識方程式（SS方程式）の求解過程が利用され得ることを、S.Suzukiが明らかにした。**SS方程式の求解過程はありとあらゆるパターン認識の働きを再現でき、万能性を備えている。**

$\mathfrak{H}$を特に、ユークリッド空間（有限次元の数列空間） R^n にとれば、SS理論での“多段階パターン認識過程の収束に関する挙動”は従来のニューラルネットでの力学的挙動と同様に振る舞う。但し、この同様な振る舞いは、(認識過程で、SSポテンシャルの減少性を保証する）類似度関数SM の**直交性**と、(認識に関する不動点方程式が成立したときの、この方程式の解が記憶アトラクターになることを保証する） SM の**ミックスチュア条件**とが満たされて初めて実現される。SM の**直交性・ミックスチュア条件**は、SS理論が獲得した“パターン連想形認識に基本的に必要とされる性質”である。

この実現は何を意味しているか？

ニューラルネットでは、パターン想起に関する力学的挙動によって、学習の働きで記憶しようとしなかった“偽の記憶”が何故、**パターン情報検索**され、呼び起こされるかを、SS理論は説明しているのである。言い換えれば、直交性・ミックスチュア条件が備わっていないニューラルネットは、学習によって複数個の**記憶アトラクター**がシナプス荷重の組に形成される途中で、必ず、真のアトラクター以外に偽の記憶アトラクターを生ぜせしめてしまうということである。

直交性、ミックスチュア条件を満たさない類似度関数 SM を、その意味するところを失わないで、直交性、ミックスチュア条件を満たすように変換する方法も知られているので、直交性、ミックスチュア条件を意識しないで類似度関数 SM を構成できる。

直交性、ミックスチュア条件を満たさない類似度関数 SM の構成原理も研究され、この構成原理の適用例を多数、指摘されている [12]，[13]，[21]。

記号（symbol）の意味（meaning）とは、その記号によって指示される対象である。順序の付いた記号の系列（string）のある集まりは言語（language）と呼ばれる。**言語とは記号列と意味との連合物である。**記号列とは意味を収納する箱である。

S.Suzukiは、**認識システム RECOGNITRON がパターンφに対しもつ知識を、Tφと γ との連合物**（カテゴリ帰属知識）

$$\langle \mathrm{T}\varphi,\ \gamma\rangle \tag{1.6}$$

で表している。Tφはφと同じに見えると想定したパターンモデルであり、γ はφが帰属する可能性のあると RECOGNITRON が想定した複数のカテゴリの番号のリストである。

本論文は、上述の表現 $\langle \mathrm{T}\varphi, \gamma\rangle$ に関連し、

パターン集合の表現能力の極値性と、認識システム
の認識能力の極値性との間には、何が言えるか？

を研究したものであり、文献［16］での、言語行為の確率模型にhintを得、**表現行為·認識行為の確率模型**を研究したものである。

何らかの**効用**（utility）を最大化しなければならないということが、“パターンに関する表現·認識行為”に見られることを明らかにする。認識行為が不十分の場合、表現行為がこれを補うように、効用を最大化しようとし、また、表現行為が不十分の場合（パターン集合が変形している場合）、認識行為がこれを補うように、効用を最大化しようとすることを指摘する。言い替えれば、統計的決定理論を適用して、ベイズ解を求め、パターン集合の最大正認識率を論じているのが認識行為についての従来の説明［7］であるが、この場合と異なり、行為の最高理想は、

“最大多数者の最大幸福（the greatest happiness of the greatest number）”の達成にある

とする英国のJeremy Bentham等の倫理説に相応して、本研究は、実利的立場からみれば（from the utilitation point of view）、認識行為の最高理想は、

最大パターン集合の最大正認識率（the greatest correct recognition-rate of the greatest pattern-set）**の達成にある**

とする“功利主義（utilitarianism）”を主張するものである（新規性）。

従来のパターン認識論では、パターンが与えられた場合のカテゴリの条件付き生起確率を最大値1にするパターンの多段階変換の意味を明らかにした研究は存在してはいないが、カテゴリ帰属知識の不動点変換論［12］，［13］を適用すれば、この種のパターン多段階変換の基本的重要性が理解できるようになったし、本研究により、パターン生成の働きの正確さの程度に応じ、パターン認識の働きが考えられることが鮮明になった（有効性）。

認識行為における合理性を追求している“シミュレーションを必要としない数理的研究”であり、結論は道理にかなうものである（信頼性）。

A pattern-representation system and a pattern-recognition system have some principle to act upon.

シャノン情報理論における通信のモデルにhintを得、パターン生成システム、パターン認識システムの働きを定式化したが、注意すべきことは、パターン集合が有限集合である場合を論じたのであり、実際のパターン認識場面では通常、この有限性の極限としての可算無限化のみならず、連続無限化の場面を想定しなければならないことであり、本定式化はあくまで、原理的側面に留まっている。にもかかわらず、パターン認識の働きを理解する上において、無用な存在ではないと思えることである。

尚、7付録1～7が設けられていることを付記する。

2. パターンによる表現、パターンの認識の定式化と、効用としての正認識率

①パターン表現システム（pattern－representation system；generator）の役割とは、パターン認識システムの認識能力の程度を推量して、その程度に応じ、可能な限り正しい認識が期待できるように、パターンを上手に生成·表現すること

であり、

②パターン認識システム（pattern-recognition system；recognizer）の役割とは、パターン表現システムの生成表現能力の程度を推量して、その程度に応じ、可能な限り正しい認識が期待できるように、パターンを上手に認識すること

である。本章では、後者の認識システムが

最大にしなければならない効用（utility）

として、**正認識率**（the rate of correct recognition）が考えられることを可能にする定式化がなされる。

2.1 情報検索システム

目的意識のあるところで眺められた**データ**（datum, data）を**情報**（information）という。目的意識の存在しないところでは、情報の価値は感知され得ない。データをある目的意識で解釈して意味を持たせたのが、そのデータに対応する情報である。

一般化された**通信**（generalized communication）とは、空間要素を介して1つの領域で表現された情報を今1つの別の領域で再現することだと考えよう。

情報の媒体とは、一般化された通信における“情報の表現要素”を指しており、**メディア**（medium, media）と称されている。情報を表現するメディアには、身体（で表現される身振り）、文字、言語、音声、映像、静止画像、動画像などがあり、**パターン**（pattern）と称されることがある。**情報学**（informatics）は、不確実なものを確実なものにしていくコンピュータ情報処理の過程でどの程度、知能（intelligence）の働きで**曖昧さ**（equivocation）が解消されていくか？という観点から、知っているということは、コンピュータの記憶している知識が適当な場面で利用できる（検索可能）と考え、情報の世界における法則性を明らかにする学問分科である。本人になり代わって、本人に劣らない判断力を備えた代理人の機能を果たすインテリジェント・エージェント（intelligent agent）が誕生すれば、その成果であろう。

“データ”が“情報”として受容され、この情報がある一定の形式を備えている“**知識**（knowledge)”に脳内知能の働きで質的に高められ構造化され、脳に記憶されている“知識の集合体”の中から必要とする知識を捜し出す作業（検索作業）から始まる“ヒトの思考過程"に注目しよう。

ヒトのこの思考過程においては、“情報が入力され、情報を出力する**情報システム**（information system）"の典型的なものとして、①**情報検索システム**［30］（information retrieval system；IRS）が基本的に重要な役割を果たしている。その他に情報システムとして、②management information system（MIS）③data base management system（DBMS）④decision support system（DSS）⑤question-answering system（QAS）が考えられるが。

情報検索とは、記憶媒体に蓄積されている情報の集合体から不十分な情報（**key information**）を媒介として目的とする完全な情報を引き出してくる操作を指す。計算機によって実現される“情報検索のシステム"の動作は、

（1）収集された情報を分類し、整理する過程（収集･分類･整理過程）

（2）分類整理された情報を知識として蓄積する過程（知識への蓄積･構造化過程）

（3）外部から不完全な情報を入力し、この入力がhintになって、蓄積･構造化された知識集合体の中から加工しながら、求めようとする知識を探索する過程（検索過程）

（4）要求者へ求められた知識を提供する過程（検索出力の表示過程）

の4過程からなるものである：The fields used to obtain access to the stored records are referred to as keys. □

2.2 認識成立の3条件

“認識システム･場面･パターン"を認識行為の成立のための3条件という。

認識行為（action of recognition）とは、認識システム（**処理主体**；recognizer）がある特定の場面においてパターン（**処理対象**）φ について、この事例としてのパターン φ に似ているものの集まりに付いている**カテゴリ**（**類概念**；category）を決定することだと考えよう。入力はパターンという情報であり、出力はパターンのある1つの集まりの抽象化としてのカテゴリという情報であり、**認識システムは情報システムの一種である。**

シャノン（C.E.Shannon）の情報理論における一般化された**通信のモデル** [19]

①情報源（information source）による通報（message）の生成

→②送信機（transmitter）、符号器（encoder）による通報から信号（signal）、符号（code）への変換

→③雑音（noise）のある通信路（communication channel）による信号、符号の伝送

→④受信機（receiver）、復号器（decoder）による信号、符号から通報への変換

→⑤受信者（information sink）による通報の解釈

に対応して、本論文は、**認識のモデル**

①´入力カテゴリ集合 $\underline{\mathfrak{C}}$ $(\{1, 2, \cdots, m\})$

→②´$\underline{\mathfrak{C}}(\{1, 2, \cdots, m\})$ の各元を表現する入力パターン集合 $\Phi(\{1, 2, \cdots, n\})$ on condition that $\underline{\mathfrak{C}}(\{1, 2, \cdots, m\})$ is givenの生成

→③´入力パターン集合 Φ から出力パターン集合 Φ' への多段階変換 $\Phi(\{1, 2, \cdots, n\}) \rightarrow \Phi'(\{1, 2, \cdots, n\})$

→④´出力パターン集合 Φ' の解釈による出力カテゴリ集合 $\underline{\mathfrak{C}}'(\{1, 2, \cdots, m, m+1\})$ on condition that $\Phi'(\{1, 2, \cdots, n\})'$ is givenへの変換

→⑤´出力力カテゴリ集合 $\underline{\mathfrak{C}}'(\{1, 2, \cdots, m, m+1\})$

を考える。各番号同士 ①→①´～⑤→⑤´は対応していることに注意しよう。

ここに、

m, nは2より大きな有限な正整数であり、

$$\underline{\mathfrak{C}}(\{1, 2, \cdots, m\}) \equiv \{\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots, \mathfrak{C}_m\} \tag{2.1}$$

$$\Phi(\{1, 2, \cdots, n\}) \equiv \{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\} \tag{2.2}$$

$$\Phi'(\{1, 2, \cdots, n\}) \equiv \{\varphi_1', \varphi_2', \cdots, \varphi_n'\} \tag{2.3}$$

$$\underline{\mathfrak{C}}'(\{1, 2, \cdots, m, m+1\}) \equiv \{\mathfrak{C}_1', \mathfrak{C}_2', \cdots, \mathfrak{C}_m', \mathfrak{C}_{m+1}'\}. \tag{2.4}$$

上記では、

$\mathfrak{C}_i$：第 $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ 番目の入力カテゴリ (2.5)

φ_j：第 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 番目の入力パターン (2.6)

φ_j'：第 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 番目の出力パターン (2.7)

$\mathfrak{C}_\ell'$：第 $\ell \in \{1, 2, \cdots, m+1\}$ 番目の出力カテゴリ (2.8)

である。但し、

$$\mathfrak{C}_i = \mathfrak{C}_i' \text{ for any } i \in \{1, 2, \cdots, m\} \tag{2.9}$$

としており、

$\mathfrak{C}_{m+1}'$：認識不能の場合、割り当てられるカテゴリ（空カテゴリ；出力パターンが解釈不能の場合、割り当てるカテゴリ；パターン表現システムが生成したパターンが何であるかが理解不能なの場合割り当てられるカテゴリ） (2.10)

とする。

2.3　多段階パターン変換過程がない場合

2.3.1　諸定義

先ず、次の5定義①～⑤を設けるが、①の A, ②の T，④の R を各々、簡単に、入力カテゴリベクトル、**生成行列**、**認識行列**ということがある。また、③の B，⑤の C を各々、簡単に、入力パターンベクトル、出力カテゴリベクトルという：

①入力カテゴリ生起確率ベクトル A

$A \equiv (a_1\ a_2 \cdots am)$（m 個の要素からなる確率行ベクトル）

$\mathbf{a_i} \equiv \mathbf{prob}\{\mathfrak{C}_i\}$（第 $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ 番目の入力カテゴリ $\mathfrak{C}_i$ の生起確率（probability of occurrences of the i-th category $\mathfrak{C}_i$））

ここに、

$$[\forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}, 0 < a_i < 1] \tag{2.11}$$

$$\wedge \sum_{i=1}^{m} a_i = 1. \tag{2.12}$$

②入力パターンの条件付き生起確率行列 T

$T \equiv (t_{ij})$（$m \times n$ の大きさの確率行列）

$\mathbf{t_{ij}} \equiv \mathbf{prob}\ \{\varphi_j / \mathfrak{C}_i\}$（第 $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ 番目の入力カテゴリ $\mathfrak{C}_i$ が与えられた条件の下での、第 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 番目の入力パターン φ_j の生起条件付き確率（conditional probability））

ここに、

$$[\forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \cdots, n\},$$
$$0 \leqq t_{ij} \leqq 1] \tag{2.13}$$

$$\wedge [\forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}, \sum_{j=1}^{n} t_{ij} = 1]. \tag{2.14}$$

t_{ij} は、パターン表現システムが カテゴリ $\mathfrak{C}_i$ を表現するためにパターン φ_j を生成する確率である。

③入力パターン生起確率ベクトル B

$B \equiv (b_1\ b_2 \cdots b_n)$（n 個の要素からなる確率行ベクトル）

$\mathbf{b_j} \equiv \mathbf{prob}\ \{\varphi_j\}$（第 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 番目の入力パターン φ_j の生起確率）

ここに、

$$[\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}, 0 < b_j < 1] \tag{2.15}$$

$$\wedge \sum_{j=1}^{n} b_j = 1. \tag{2.16}$$

④出力カテゴリの条件付き生起確率行列 R

$R \equiv (r_{j\ell})$（$n \times (m+1)$ の大きさの確率行列）

$\mathbf{r_{j\ell}} \equiv \mathbf{prob}\{\mathfrak{C}_\ell' / \varphi_j\}$（第 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 番目の入力パターン φ_j が与えられた条件の下での、第 $\ell \in \{1, 2, \cdots, m+1\}$ 番目の出力カテゴリ $\mathfrak{C}_\ell'$ の生起条件付き確率）

ここに、

$$[\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}, \forall \ell \in \{1, 2, \cdots, m+1\},$$
$$0 \leqq r_{j\ell} \leqq 1] \tag{2.17}$$

$$\wedge [\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}, \sum_{\ell=1}^{m+1} r_{j\ell} = 1]. \tag{2.18}$$

$r_{j\ell}$ は、パターン認識システムがパターン φ_j の意味を カテゴリ $\mathfrak{C}_\ell'$ と解釈する確率である。

⑤出力カテゴリ生起確率ベクトル C

$C \equiv (c_1\ c_2 \cdots c_m\ c_{m+1})$（m＋1 個の要素からなる確率行ベクトル）

$c_\ell \equiv \mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_\ell'\}$（第 $\ell \in \{1, 2, \cdots, m+1\}$ 番目の出力カテゴリ $\mathfrak{C}_\ell'$ の生起確率）
ここに、

$$[\forall \ell \in \{1, 2, \cdots, m+1\}, 0 < c_\ell < 1] \tag{2.19}$$

$$\wedge \sum_{\ell=1}^{m+1} c_\ell = 1. \tag{2.20}$$

但し、

$$c_{m+1} \equiv \mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_{m+1}'\} \text{：認識不能の確率} \tag{2.21}$$

□

2.3.2 諸定理

前項での諸定義に関し、得られる諸定理を指摘しよう。

$\mathfrak{C}_i$ と φ_j とが同時に生起する確率、結合確率（joint probability）

$\mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_i, \varphi_j\}$

は、

$$\mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_i, \varphi_j\} = \mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_i\} \cdot \mathrm{prob}\{\varphi_j / \mathfrak{C}_i\} \tag{2.22}$$

と分解できることに注意すれば、次の定理2.1が成り立ち、行列 B が2行列 A，T の積であることを指摘するものである。

［定理2.1］**（入力パターン生起確率ベクトル B の表現定理）**

AT＝B, that is to say,

$$\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}, \ \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot t_{ij} = b_j.$$

（証明）$b_j = \mathrm{prob}\{\varphi_j\}$

$$= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_i, \varphi_j\}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_i\} \cdot \mathrm{prob}\{\varphi_j / \mathfrak{C}_i\}$$

∵　式（2.22）

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot t_{ij}.$$

□

φ_j と $\mathfrak{C}_\ell'$ とが同時に生起する確率、結合確率（joint probability）

$\mathrm{prob}\{\varphi_j, \mathfrak{C}_\ell'\}$

は、

$$\mathrm{prob}\{\varphi_j, \mathfrak{C}_\ell'\} = \mathrm{prob}\{\varphi_j\} \cdot \mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_\ell' / \varphi_j\} \tag{2.23}$$

と分解できることに注意すれば、次の定理2.2が成り立ち、行列 C が2行列 B，R の積であることを指摘するものである。

［定理2.2］**（出力カテゴリ生起確率ベクトル C の表現定理1）**

BR＝C, that is to say,

$$\forall \ell \in \{1, 2, \cdots, m+1\}, \ \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot r_{j\ell} = c_\ell.$$

（証明）

$c_\ell = \mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_\ell'\}$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{prob}\{\varphi_j, \mathfrak{C}_\ell'\}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{prob}\{\varphi_j\} \cdot \mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_\ell' / \varphi_j\}$$

∵　式（2.24）

$$= \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot r_{j\ell}$$

□

上の定理2.2は次のことを指摘する：

認識システムにより、c_ℓは、$\mathfrak{C}_\ell'$ が $\mathfrak{C}_\ell$の解釈内容として採用される確率である。 □

次の定理2.3は、行列の積の定義から直ちに得られるものであり、C が3行列 A, T, R の積であることを指摘している。。

［定理2.3］**（出力カテゴリ生起確率ベクトル C の表現定理2）**

$$
\begin{aligned}
&ATR = C, \text{ that is to say,}\\
&\forall \ell \in \{1, 2, \cdots, m+1\},\\
&\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot t_{ij} \cdot r_{j\ell} = c_\ell .
\end{aligned}
$$

（証明）一般に、行列 K の第i行第j列の要素を

$(K)_{ij}$と表すことにすると、

$$
\begin{aligned}
&c_\ell\\
&= \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot r_{j\ell} \quad \because \text{ 定理2.2}\\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot t_{ij}\right] \cdot r_{j\ell}\\
&\qquad \because \text{ 定理2.1}\\
&= \sum_{j=1}^{n} (AT)_j \cdot r_{j\ell}\\
&= (ATR)_\ell
\end{aligned}
$$

□

$$\text{prob}\{\mathfrak{C}_\ell' / \langle \mathfrak{C}_i, \varphi_j \rangle\} \tag{2.24}$$

は、パターン生成システム（パターン表現システム）が$\mathfrak{C}_i$ を表現するためにパターン φ_jを生成したとき、認識システムがこのφ_jの意味を$\mathfrak{C}_\ell'$と解釈する確率であるが、これが

$$r_{j\ell} \equiv \text{prob}\{\mathfrak{C}_\ell' / \varphi_j\} \tag{2.25}$$

であるとする次の仮定1.1は、

認識システムは、パターン生成システムがその表現
をパターン φ_jに託したカテゴリがどのカテゴリであ
るかは知らない (2.26)

とみなしたことになり、道理にかなっている。

ここに、パターン生成システムの生成するパターン総数 n はカテゴリ総数 m より通常、小さくないことに、即ち、

$$m \leqq n \tag{2.27}$$

を仮定することは、パターン認識の働きから眺めて、素直である。m＞n であれば、パターン認識が容易になるからである。

［仮定1.1］**（認識システムの、パターン生成に関する無知仮定）**

$$
\begin{aligned}
&\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}, \quad \forall \ell \in \{1, 2, \cdots, m, m+1\},\\
&\text{prob}\{\mathfrak{C}_\ell' / \varphi_j\} \equiv \text{prob}\{\mathfrak{C}_\ell' / \langle \mathfrak{C}_i, \varphi_j \rangle\}\\
&\quad \text{for any } i \in \{1, 2, \cdots, m\}.
\end{aligned} \tag{2.28}
$$

□

ここで、

$$H \equiv TR\ (m \times (m+1)\text{の大きさの確率行列}) \tag{2.29}$$

$$H = (h_{i\ell}) \tag{2.30}$$

を定義すれば、次の定理2.4が成り立つ。

［定理2.4］**(カテゴリの正解率・誤解率・解釈不能率定理)**

仮定1.1の下で、

$\forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}, \forall \ell \in \{1, 2, \cdots, m, m+1\},$

$h_{i\ell} = \mathrm{prob}\{\mathfrak{C}'_\ell / \mathfrak{C}_i\}.$

(証明) $h_{i\ell} \equiv \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \cdot r_{j\ell}$

$= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{prob}\{\varphi_j / \mathfrak{C}_i\} \cdot \mathrm{prob}\{\mathfrak{C}'_\ell / \varphi_j\}$

$= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{prob}\{\varphi_j / \mathfrak{C}_i\} \cdot \mathrm{prob}\{\mathfrak{C}'_\ell / \langle \mathfrak{C}_i, \varphi_j \rangle\}$

$\because$ 式 (2.28)

$= \sum_{j=1}^{n} [\mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_i, \varphi_j\} / \mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_i\}]$

$\cdot [\mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_i, \varphi_j, \mathfrak{C}'_\ell\} / \mathrm{prob}\{\langle \mathfrak{C}_i, \varphi_j \rangle\}]$

$= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_i, \varphi_j, \mathfrak{C}'_\ell\} / \mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_i\}$

$= \mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}'_\ell\} / \mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_i\}$

$= \mathrm{prob}\{\mathfrak{C}'_\ell / \mathfrak{C}_i\}.$ □

$h_{i\ell}$は第i番目の入力カテゴリ$\mathfrak{C}_i$が第ℓ番目の出力カテゴリ$\mathfrak{C}_\ell$と解釈される確率を表していることを、上の定理2.4は指摘している。詳細に説明すれば、3つの解釈①, ②, ③が得られる：

①h_{ii} $(i \neq m+1)$ はカテゴリ$\mathfrak{C}_i$の正解率である。

②$h_{i\ell}$ $(i \neq \ell \wedge \ell \neq m+1)$ はカテゴリ$\mathfrak{C}_i$の誤解率である。

③h_{im+1} $(i \neq m+1)$ はカテゴリ$\mathfrak{C}_i$の解釈不能率である。 □

上述の解釈①, ②, ③から主張できることは、パターン生成システム、パターン認識システムは共に、正解率h_{ii} $(i \neq m+1)$ を効用として採用し、すべての$i \in \{1, 2, , m\}$にわたってh_{ii}を最大化しようとしていると考えられることである。

2.4 多段階パターン変換過程がある場合

これまでは、2.2節での③´において、

$$\Phi(\{1, 2, \cdots, n\}) = \Phi'(\{1, 2, \cdots, n\}) \tag{2.31}$$

の場合、つまり、単段階のパターン変換

$$\mathfrak{C}_i \rightarrow \varphi_j \rightarrow \mathfrak{C}'_\ell \tag{2.32}$$

を考えてきた。それでは、

$$\Phi(\{1, 2, \cdots, n\}) \neq \Phi'(\{1, 2, \cdots, n\}) \tag{2.33}$$

の場合はどう取り扱うか？　先ず、2段階のパターン変換

$$\mathfrak{C}_i \rightarrow \varphi_k \rightarrow \varphi'_j \rightarrow \mathfrak{C}'_\ell \tag{2.34}$$

を考えよう。

Ⅰ. パターン表現システムの立場からの、生成行列Tの分解

パターン表現システムの立場からは、Tを次のように分解すれば、2.3節の論で同様に取り扱える：

$$t_{ij} \equiv t'_{ik} \cdot t''_{kj} \tag{2.35}$$

$$t'_{ik} \equiv \mathrm{prob}\{\varphi_k / \mathfrak{C}_i\} \tag{2.36}$$

$t''_{kj} \equiv \mathrm{prob}\{\varphi'_j / \varphi_k\}$ (第$k \in \{1, 2, \cdots, n\}$番目のパターン$\varphi_k$が与えられた条件の下での、第$j \in \{1, 2, \cdots, n\}$　番目のパターンφ'_jの生起条件付き確率)　(2.37)

Ⅱ. パターン認識システムの立場からの、認識行列Rの分解

パターン認識システムの立場からは、R を次のように分解すれば、2.3節の論で同様に取り扱える：

$$r_{j\ell} \equiv r_{jk}' \cdot r_{k\ell}'' \tag{2.38}$$

$r_{jk}' \equiv \mathrm{prob}\{\varphi_k'/\varphi_j\}$（第$j \in \{1, 2, \cdots, n\}$番目のパターン$\varphi_j$が与えられた条件の下での、第$k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 番目のパターン φ_k' の生起条件付き確率） (2.39)

$$r_{k\ell}'' \equiv \mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_\ell'/\varphi_k'\}. \tag{2.38}$$

3段階以上の多段階パターン変換についても、上述のⅠ，Ⅱの考え方と同様に処理すればよい。

3. パターン表現（パターン生成）、パターン認識に関する最大化原理

前章において、パターン生成（表現）・パターン認識システムのモデル

$$\underline{\mathfrak{C}} \to \Phi / \underline{\mathfrak{C}} \to \Phi \to \Phi' \to \underline{\mathfrak{C}}' / \Phi' \to \underline{\mathfrak{C}}' \tag{3.1}$$

を、シャノンの通信モデルに習って、考えてきた。

本章では、$\Phi = \Phi'$の場合、パターン表現（パターン生成）システムの、各カテゴリのパターンによる表現能力が劣っていれば、**効用（平均正解率 f_1）を維持するためには**、パターンがどのカテゴリを表すために生成されたかを推定する機能を備えているパターン認識システムの、パターン認識能力が優秀でなければならないし、また、表現能力が優秀であれば、認識能力が劣っていてもよいことを説明可能な“パターン生成・パターン認識に関する最大化原理"が研究される。

3.1 効用としての平均正解率 f_1

$$\forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}, \exists j \in \{1, 2, \cdots, n\},$$
$$t_{ij} \equiv \mathrm{prob}\{\varphi_j/\mathfrak{C}_i\} = 1 \tag{3.2}$$

のとき、パターン生成システムの表現能力は曖昧でないという。表現能力の、この無曖昧性は正しい生成を意味していない。また、

$$\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}, \exists i \in \{1, 2, \cdots, m\},$$
$$r_{ji} \equiv \mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_i'/\varphi_j\} = 1 \tag{3.3}$$

のとき、パターン認識システムの認識能力は曖昧でないという。認識能力の、この無曖昧性は正しい推論を意味していない。

パターン生成、パターン認識の場面において、無曖昧性が実現されるとは、以下の式（3.4）の、効用としての平均正解率 f_1 が最大になっている場合の特別な状況である事実を、2定理3.1，3.2の系1で明らかにすることが本章の目的である。

パターン生成場面

①パターン表現システムがパターン認識システムの認識能力の程度を推量して、可能な限り正しい認識が期待できるように、パターンを生成・表現する

と、パターン認識の場面

②パターン認識システムがパターン表現システムの生成表現能力の程度を推量して、可能な限り正しい認識が期待できるように、パターンを認識する

において、

最大にしなければならない**効用**（utility）として、**平均正解率**（the average rate of correct recognition）

$$f_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i \cdot t_{ij} \cdot r_{ji} \tag{3.4}$$

が考えられる。

平均解釈不能率 f_0

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i \cdot t_{ij} \cdot r_{jm+1} \tag{3.5}$$

を定義すると、

$$\text{平均誤解率 } f_2 = 1 - f_0 - f_1 \tag{3.6}$$

も定義できる。

パターン表現（パターン生成）システム、パターン認識システムは共に、f_1 を最大化する目的で、

T を制御し、パターンを生成し、
R を制御し、パターンを認識する

と考えられる。

以後、パターン生成システムは解釈不能なパターンを生成しないと仮定する、つまり、2.3.1項の④において、

$$r_{jm+1} = 0 \text{ for any } j \in \{1, 2, , n\} \tag{3.7}$$

を仮定する。

3.2 パターン表現（パターン生成）に関する最大化原理

パターン生成システムが制御できるのは、A, T, R の内、T だけである。

例えば、各入力カテゴリ $\mathfrak{C}_i$ ($i \in \{1, 2, , m\}$) の生起確率 a_i が等しい場合、

$$h_{ii} = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \cdot r_{ji} \tag{3.8}$$

を最大にする T を求めよう（定理2.4を参照）。この最大化は、パターン生成（パターン表現）に関する最大化原理と呼ばれ、生成システムの、パターン表現能力を最大にすることを意味する。

$$v_{ji} \equiv a_i \cdot r_{ji} \tag{3.9}$$

を考えると、A, T, R の非負実数値関数

$$f(A, T, R) \equiv \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i \cdot t_{ij} \cdot r_{ji} \tag{3.10}$$

は、式（3.8）の h_{ii} を使えば、

$$f(A, T, R) = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot h_{ii} \tag{3.11}$$

と表現され、また、式（3.9）の v_{ji} を使えば、

$$f(A, T, R) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \cdot v_{ji} \tag{3.12}$$

と表現される。

このとき、不等式

$$f(A, T', R) \leqq f(A, T, R) \tag{3.13}$$

が成り立つとき、T で規定されるパターン表現·生成システムは、T′ で規定されるパターン表現·生成システムよりも、**パターン表現能力に関し、優越する**（dominate）という。

最も優越しているパターン生成システムの構造を規定している2.3.1項の条件付き生起確率行列

Tを決定しよう。それは、次の定理3.1、並びに、その系1で与えられ、パターン生成システムが目的している式（3.10）の効用 $f(A,T,R)$ の最大化を与える**生成行列T**を決定したものである。

［定理3.1］**（パターン生成に関する最大化定理）**

A, Rを固定した条件の下で、Tを動かす操作により、$f(A,T,R)$ を最大化する、つまり、

$$\max_{T'} f(A, T', R) \tag{3.14}$$

をもたらす行列

$$T = \operatorname*{argmax}_{T'} f(A, T', R) \tag{3.15}$$

の各要素 t_{ij} は次の①，②を満たすものとして与えられる：

$$v_i' \equiv \max_{j=1\sim n} v_{ji} = \max\{v_{1i}, v_{2i}, \cdots, v_{ni}\}$$
$$> 0 \quad \text{for } i \in \{1, 2, \cdots, m\} \tag{3.16}$$

を与えるパターン番号

$$j = \operatorname*{argmax}_{j=1\sim n} v_{ji} \in \{1, 2, \cdots, n\} \tag{3.17}$$

の集合

$$J(i)$$
$$\equiv \{j_1(i), j_2(i), \cdots, j_{n(i)}(i)\} \subseteq \{1, 2, \cdots, n\} \tag{3.18}$$

を導入すると、

①$\forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, $\forall j \overline{\in} J(i)$, $t_{ij} = 0$.

②$\forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, $1 = \sum_{j \in J(i)} t_{ij}$.

［定理3.1の系1］**（パターン生成に関する最大化をもたらす等確率定理）**

本定理3.1の①，②を満たす $T = (t_{ij})$ は、例えば、

$$t_{ij} =$$
$$\begin{cases} 1/|J(i)| & \text{if } j \in J(i) \\ 0 & \text{if } j \overline{\in} J(i) \end{cases} \tag{3.19}$$

と与えられる。

（定理3.1、並びに、その系1の証明）

$$\delta_{ij} \equiv v_i' - v_{ji} \geqq 0$$
$$\text{for } i \in \{1, 2, \cdots, m\} \text{ and } j \in \{1, 2, \cdots, n\} \tag{3.20}$$

とおくと、明らかに、

$$v_{ji} = v_i' - \delta_{ij}$$
$$\text{for } i \in \{1, 2, \cdots, m\} \text{ and } j \in \{1, 2, \cdots, n\} \tag{3.21}$$

であり、

$$\delta_{ij}$$
$$\begin{cases} = 0 \text{ if } j \in J(i) \\ > 0 \text{ if } j \overline{\in} J(i) \end{cases} \tag{3.22}$$

に注意しておく。

$$g_i(A, T, R) \equiv \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \cdot v_{ji} \tag{3.23}$$

を導入すると、式（3.14）の $\max_{T'} f(A, T', R)$ は、

$$\max_{T'} f(A, T', R)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \max_{T'} g_i(A, T, R) \tag{3.24}$$

と表され、各カテゴリ毎に $g_i(A, T', R)$ を最大化すれば、$f(A, T', R)$ は最大化されることがわかる。

$$
\begin{aligned}
&\forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}, \\
&g_i(A, T, R) \\
&= \sum_{j \in J(i)} t_{ij} \cdot v_{ji} + \sum_{j \in \overline{J}(i)} t_{ij} \cdot v_{ji} \\
&= \sum_{j \in J(i)} t_{ij} \cdot v_i' \\
&\quad + \sum_{j \in \overline{J}(i)} t_{ij} \cdot [v_i' - \delta_{ij}] \\
&= v_i' \cdot \left[\sum_{j \in J(i)} + \sum_{j \in \overline{J}(i)} \right] t_{ij} \\
&\quad - \sum_{j \in \overline{J}(i)} t_{ij} \cdot \delta_{ij} \\
&\leqq v_i' \quad \because \text{ 式 (2.14)}
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

が成り立つ。ここに、

$$g_i(A, T, R) = v_i' \Leftrightarrow \forall j \in \overline{J}(i),\ t_{ij} = 0 \tag{3.26}$$

であることにも、注意しておく。よって、

$$
\begin{aligned}
&\forall j \in J(i),\ 1 = \left[\sum_{j \in J(i)} + \sum_{j \in \overline{J}(i)} \right] t_{ij} \\
&= \sum_{j \in J(i)} t_{ij} \quad \because \quad \sum_{j \in \overline{J}(i)} t_{ij} = 0
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

を得、①, ②が満たされるときに限り、任意の $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ について $g_i(A, T, R)$ は最大値をとり、よって、$f(A, T', R)$ は最大値をとることがわかった。

定理3.1の系1は明らかである。 □

定理3.1の系1から言える結論は次の通りである：第 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 番目のパターン φ_j を確率 $\mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_i'/\varphi_j\} = r_{ji}$ で認識される第 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_i$ と φ_j とについて、式 (3.9) の $\mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_i\} \cdot \mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_i'/\varphi_j\} = a_i \cdot r_{ji} = v_{ji}$ を最大にするパターン番号 j が $|J(i)|$ 個存在するような各カテゴリ $\mathfrak{C}_i'$ に対しては、$1/|J(i)|$ の確率でパターン φ_j を生成し、また、v_{ji} を最大にしないような残りの $m - |J(i)|$ 個の各カテゴリ $\mathfrak{C}_i'$ に対しては、確率 0 で パターン φ_j を生成する生成行列 T を備えている生成システムが、効用としての、式 (3.4) の平均正解率 f_1 を最大にする。

□

上述の結論は、最適な生成動作を遂行する生成システムの備えなければならない生成性質を勘案すれば、道理に適った結論である。

3.3 パターン認識に関する最大化原理

パターン認識システムが制御できるのは、A, T, R の内、R だけである。

式 (3.4) の平均正解率 f_1 を最大にする R を求めよう。この最大化は、**パターン認識に関する最大化原理**と呼ばれ、認識システムの、パターン認識能力を最大にすることを意味する。

$$u_{ij} \equiv a_i \cdot t_{ij} \tag{3.28}$$

を考えると、A, T, R の式 (3.10) の非負実数値関数 $f(A, T, R)$ は、

$$f(A, T, R) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} u_{ij} \cdot r_{ji} \tag{3.29}$$

と表される。

このとき、不等式

$$f(A, T, R') \leqq f(A, T, R) \tag{3.30}$$

が成り立つとき、R で規定されるパターン認識システムは、R´ で規定されるパターン認識システムよりも、パターン認識能力に関し、優越するという。

最も優越しているパターン認識システムの構造を規定している2.3.1項の条件付き生起確率行列 R を決定しよう。それは、次の定理3.2、並びに、その系1で与えられ、パターン認識システムが目的している式（3.10）の効用 f（A, T, R）の最大化を与える認識行列 R を決定したものである。

［定理3.2］**（パターン認識に関する最大化原理定理）**

A, T を固定した条件の下で、R を動かす操作により、f(A, T, R) を最大化する、つまり、

$$\max_{R'} f(A, T, R') \tag{3.31}$$

をもたらす行列

$$R = \operatorname*{argmax}_{R'} f(A, T, R') \tag{3.32}$$

の各要素 r_{ij} は次の①, ②を満たすものとして与えられる：

$$u_j' \equiv \max_{i=1\sim m} u_{ij} = \max\{u_{1j}, u_{2j}, \cdots, u_{nj}\}$$
$$> 0 \quad \text{for } j \in \{1, 2, \cdots, n\} \tag{3.33}$$

を与えるカテゴリ番号

$$i = \operatorname*{argmax}_{i=1\sim m} u_{ij} \in \{1, 2, \cdots, m\} \tag{3.34}$$

の集合

$$I(j)$$
$$\equiv \{i_1(j), i_2(j), \cdots, i_{n(j)}(j)\} \subseteq \{1, 2, \cdots, m\} \tag{3.35}$$

を導入すると、

①$\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}, \forall i \overline{\in} I(j), r_{ji} = 0.$

②$\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}, 1 = \sum_{i \in I(j)} r_{ji}.$

［定理3.2の系1］**（パターン認識最大化に関する等確率定理）**

本定理3.2の①, ②を満たす $R = (r_{ji})$ は、例えば、

$$r_{ji} = \begin{cases} 1/|I(j)| & \text{if } i \in I(j) \\ 0 & \text{if } i \overline{\in} I(j) \end{cases} \tag{3.36}$$

と与えられる。

（定理3.2、並びに、その系1の証明）

$$\varepsilon_{ij} \equiv u_j' - u_{ij} \geqq 0$$
$$\text{for } i \in \{1, 2, \cdots, m\} \text{ and } j \in \{1, 2, \cdots, n\} \tag{3.37}$$

とおくと、明らかに、

$$u_{ij} = u_j' - \varepsilon_{ij}$$
$$\text{for } i \in \{1, 2, \cdots, m\} \text{ and } j \in \{1, 2, \cdots, n\} \tag{3.38}$$

であり、

$$\varepsilon_{ij} \begin{cases} = 0 & \text{if } i \in I(j) \\ > 0 & \text{if } i \overline{\in} I(j) \end{cases} \tag{3.39}$$

に注意しておく。

$$f_j(A, T, R') \equiv \sum_{i=1}^{m} u_{ij} \cdot r_{ji} \tag{3.40}$$

を導入すると、

$$
\begin{aligned}
&\max_{R'} f(A,T,R') \\
&=\sum_{j=1}^{n} \max_{R'} f_j(A,T,R') \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

が成立し、各パターン毎に $f_j(A, T, R')$ を最大化すれば、$f(A, T, R')$ は最大化されることがわかる。

$$
\begin{aligned}
&\forall j \in \{1,2,\cdots,n\}, \\
&f_j(A,T,R') \\
&=\sum_{i \in I(j)} u_{ij}\cdot r_{ji} + \sum_{i \overline{\in} I(j)} u_{ij}\cdot r_{ji} \\
&=\sum_{i \in I(j)} u_j'\cdot r_{ji} \\
&\quad +\sum_{i \overline{\in} I(j)} [u_j' - \varepsilon_{ij}]\cdot r_{ji} \\
&=u_j'\cdot\Big[\sum_{i \in I(j)} + \sum_{i \overline{\in} I(j)}\Big] r_{ji} \\
&\quad -\sum_{i \overline{\in} I(j)} \varepsilon_{ij}\cdot r_{ji} \\
&\leqq u_j' \quad \because \ \text{式}\ (2.18),\ \text{式}\ (3.7) \qquad (3.42)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。ここに、

$$
f_j(A,T,R') = u_j' \Leftrightarrow \forall i \overline{\in} I(j),\ r_{ji}=0 \qquad (3.43)
$$

であることにも、注意しておく。よって、

$$
\begin{aligned}
&\forall i \in I(j),\ 1=\Big[\sum_{i \in I(j)} + \sum_{i \overline{\in} I(j)}\Big]\ r_{ji} \\
&=\sum_{i \in I(j)} r_{ji} \qquad \because \quad \sum_{i \overline{\in} I(j)} r_{ji}=0 \qquad (3.44)
\end{aligned}
$$

を得、①, ②が満たされるときに限り、任意の $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ について $f_j(A, T, R')$ は最大値をとり、よって、$f(A, T, R')$ は最大値をとることがわかった。

定理3.2の系1は明らかである。 □

定理3.2の系1から言える結論は次の通りである： 第 $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_i$ を確率 $\mathrm{prob}\{\varphi_j/\mathfrak{C}_i\}=t_{ij}$ で表すように、生成された第 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 番目のパターン φ_j と $\mathfrak{C}_i$ とが同時に生起する、式（3.28）の確率（結合確率）$\mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_i, \varphi_j\}=\mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_i\}\cdot\mathrm{prob}\{\varphi_j/\mathfrak{C}_i\}=a_i\cdot t_{ij}=u_{ij}$ を最大にするカテゴリ番号 i が $|I(j)|$ 個存在するような各パターン φ_j に対しては、$1/|I(j)|$ の確率でカテゴリ $\mathfrak{C}_i$ を割り当て、また、同時生起確率 $\mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_i, \varphi_j\}$ を最大にしないような残りの $m-|I(j)|$ 個の各パターン φ_j に対しては、確率 0 でカテゴリ $\mathfrak{C}_i$ を割り当てる認識行列 R を備えている認識システムが、効用としての、式 (3.4) の平均正解率 f_1 を最大にする。 □

上述の結論は、最適な認識動作を遂行する認識システムの備えなければならない認識性質を勘案すれば、道理に適った結論である。

尚、付録6のaxiom 2を満たすように構成された類似度関数 SM を使って、認識システム RECOGNITRON は、式（3.28）の結合確率 $\mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_i, \varphi_j\}$ を、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_i, \varphi_j\} \\
&=SM(\varphi_j, \omega_i)/\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} SM(\varphi_j, \omega_i) \\
&(=SM(\varphi_j, \omega_i)/|n| \\
&\quad \because \ \forall j \in \{1,2,\cdots,n\},\ \sum_{i=1}^{m} SM(\varphi_j, \omega_i)=1 \qquad (3.45)
\end{aligned}
$$

と推定しているというのが、SS理論［10］～［15］の主張である。この式（3.45）から、

$$
a_i \equiv \mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_i\}=\sum_{j=1}^{n} \mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_i, \varphi_j\}
$$

$$=(1/|n|)\cdot\sum_{j=1}^{n}SM(\varphi_j,\omega_i) \tag{3.46}$$

$$b_j\equiv prob\{\varphi_j\}=\sum_{i=1}^{m}prob\{\mathfrak{C}_i,\varphi_j\}$$
$$=1/|n| \tag{3.47}$$

$$t_{ij}\equiv prob\{\varphi_j/\mathfrak{C}_i\}\equiv prob\{\mathfrak{C}_i,\varphi_j\}/prob\{\mathfrak{C}_i\}$$
$$=SM(\varphi_j,\omega_i)\Big/\sum_{j=1}^{n}SM(\varphi_j,\omega_i) \tag{3.48}$$

$$r_{ji}\equiv prob\{\mathfrak{C}_i'/\varphi_j\}\equiv prob\{\mathfrak{C}_i',\varphi_j\}/prob\{\varphi_j\}$$
$$=SM(\varphi_j,\omega_i)$$
$$\because\quad \forall i\in\{1,2,\cdots,m\}\ \mathfrak{C}_i'=\mathfrak{C}_i' \tag{3.49}$$

が成立していることに、注意を払っておこう。

4. むすび

以上の研究により、パターン認識の働きの底には、パターン生成のもたらす“典型的なパターンからの崩れ・変形”に応じ、式（3.4）の平均正解率 f_1 を最大ならしめようとする“最大化原理”が流れていることが判明した。つまり、

パターン生成、パターン認識の場面において、無曖昧性が実現されるとは、効用としての、式（3.4）の平均正解率 f_1 が最大になっている場合の特別な状況である事実が、2定理3.1，3.2の系1で明らかにされた。

パターン認識分野の歴史は、認識方式を考案する･その認識方式の性能を確かめるという反復であった。しかし、このような場当たり的な繰り返しを行っているだけでは、パターン認識分野は認識技術の寄せ集めの域を脱出できない。パターン認識分野を1つの体系だった学問分科とするには、パターン認識の働きに関し、深い理解、例えば、人間における視覚情報処理の初期過程において、画像情報は形（form)、色（color)、運動（movement)、奥行き（depth）などの属性ごとに別々のモジュールで処理されること［23］などの知識群の“**活用化**”と“確かな証拠が反映されらた**公理に基づく理論化**”が必要とされる。

このような活用化と公理化を目指して、S.Suzukiは1984年からほぼ10年間にわたりパターン認識の働きを公理論的に定式化し、万能性認識の働きの存在を証明するするという理論的研究［12］を着実に進展させてきた。

テキスト、数値などに限られていた“コンピュータで扱えるデータ”はマルチメディア時代になり、オーディオ、ビデオ、グラフィックスなどの画像･音声マルチメディアデータになり、マルチメディア技術により、ありとあらゆる情報の電子テキスト化（オープン･コンピュータネットワークを使ったディジタル形ペーパーレス化）が可能となった現在、その表現間の相互変換を前提にした“パターン認識技術”の確保が望まれている。本論文では、言語行為の“**水谷の確率模型**”に対応して、

> 認識システムは、パターン生成･表現システムがその表現を φ_j に託したカテゴリがどのカテゴリであるかは知らない（認識システムの、パターン生成に関する無知仮定；一種のマルコフ過程性）

の下で、認識行為の“**鈴木の確率模型**”が提案されたが、パターン表現システムが制御できるの

は、A, T, R の内、T だけであり、また、パターン認識システムが制御できるのは、A, T, R の内、R だけであり、

入力カテゴリ生起確率分布 A を固定した条件の下で、多段階パターン変換を導入しない場合、次のパターン生成問題･パターン認識問題を解決した：

Ⅰ．パターン生成問題（パターン集合 $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}$ のカテゴリ表現能力を最大化せよ）

確率条件

$$[\forall i \in \{1, 2, \cdots, m\},\ \forall j \in \{1, 2, \cdots, n\},$$
$$0 \leqq t_{ij} \leqq 1]$$
$$\wedge [\forall i \in \{1, 2, \cdots, m\},\ \sum_{j=1}^{n} t_{ij} = 1]$$

の下で、正解率

$$h_{ii} = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \cdot r_{ji} \ \text{for any}\ i \in \{1, 2, \cdots, m\}$$

を最大にする $T = (t_{ij})$ を求めよ。

Ⅱ．パターン認識問題（パターン集合 $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}$ に関するカテゴリ認識能力を最大化せよ）

確率条件

$$[\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\},\ \forall \ell \in \{1, 2, \cdots, m\},$$
$$0 \leqq r_{j\ell} \leqq 1]$$
$$\wedge [\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\},\ \sum_{\ell=1}^{m} r_{j\ell} = 1]$$

の下で、

$$h_{ii} = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \cdot r_{ji} \ \text{for any}\ i \in \{1, 2, \cdots, m\}$$

を最大にする $R = (r_{j\ell})$ を求めよ。 □

この際、指摘しておかねばならないことは、設計された段階から現在までにパターン認識システムが処理したパターンの集合は有限集合であるから、有限集合

$$\Phi(\{1, 2, \cdots, n\}) \equiv \{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}$$

につき、論を進めたのは決して無意味ではないということである。

パターン表現システムの“パターン生成能力の不完全性"を補うように、パターン認識システムが処理の対象とする問題のパターン φ に対し、

$$\exists t \in \{0, 1, 2, \cdots\},\ \mathrm{prob}\{\mathfrak{C}_j / \varphi(t)\} = 1$$

が成立するように、パターン認識システムがパターンの多段階変換

$$\varphi(0)(= \varphi) \in \Phi(\{1, 2, \cdots, n\}) \to \varphi(1) \to \varphi(2) \to \cdots$$
$$\to \varphi(t-1) \to \varphi(t) \in \Phi'(\{1, 2, \cdots, n\})$$

をすることの基本的重要性が、

最大パターン集合の最大正認識率の達成にある

という“認識行為の効用に関する**最大化原理**”の面から研究された。ここに、$\mathfrak{C}_j$ を表現するように、パターン φ がパターン表現システムにより生成されたとしている。

この種の多段階変換を達成するのには、ある種の連想形認識方程式（**SS方程式** [12], [13]）の求解過程を利用すればよい。

残された研究として、健全性、完全性に関する次の話題がある。

例えば、偶数を発生するようにシステムが設計されたとしよう。偶数のすべての集合を E と表

し、このシステムから現実に得られるすべての出力の集合をEVENと表す。

①EVEV⊆E（システムからの現実出力の集合はすべて偶数である）ならば、この設計されたシステムは**健全性**（soundness）、或いは、**正当性**（correctness）を備えているといい、

②E⊆EVEN（偶数はすべてシステムからの現実出力に属する）ならば、この設計されたシステムは完全性（completeness）を備えているという。

設計された一般システムに関する健全性、完全性は上述で説明されたが、設計されたパターン認識システムについては、次の2定理（健全性定理、完全性定理）が成り立つかどうかが問題となる。

導かれる定理が恒真式である（システムから、現実に出力が得られたとすれば、この現実出力はシステム設計の際意図した出力集合の元である）ような形式的論理体系の健全性に対応して、

［**健全性定理**（soundness theorem）］

$$\underset{i\in\{1,2,\cdots,n\}}{\mathrm{argmax}}\ \mathrm{prob}\{\varphi_i/\mathfrak{C}_j\}$$
$$=i^*\in\{1,2,\cdots,n\}$$

ならば、パターンφ_{i*}は第$j\in\{1,2,\cdots,m\}$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に正しく認識できる。 □

上の健全性定理は、

あるカテゴリを表現するように正しく生成された（最も変形の少ない）

パターンφ_{i*}はそのカテゴリに正しく認識できる

ことを指摘している。次に、

恒真式は常に定理として導かれる（システム設計の際意図した出力はすべて現実に得られる出力の集合の元である）ような形式的論理体系の完全性に対応して、

［**完全性定理**（completeness theorem）］

パターンφ_{i*}は第$j\in\{1,2,\cdots,m\}$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に正しく認識できるならば、

$$\underset{i\in\{1,2,\cdots,n\}}{\mathrm{argmax}}\ \mathrm{prob}\{\varphi_i/\mathfrak{C}_j\}$$
$$=i^*\in\{1,2,\cdots,n\}$$

である。 □

上の完全性定理は、

正しく認識されるパターンφ_{i*}はそのカテゴリを表現するように正しく

生成されている（最も変形が少ない）

ことを指摘している。

設計されるパターン認識システムにつき、健全性定理、完全性定理が成り立つかどうかを検証する手法の確立が望まれる。

文　献

[1] 青木利夫，高橋渉：“集合・位相空間要論”，培風館，Sept.1979

[2] Angus E.Taylor, David C.Lay："Introduction to function analysis"，John Wiley & Sons, Inc., 1980

[3] 伊藤清：“確率論（現代数学14）”，岩波書店，Nov.1966

[4] Edited by W.K.Estes："Handbook of learning and cognitive processes（Volume 4 Attention and memory）"，Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 1976

[5] ルーメルハート：“人間の情報処理（新しい認知心理学へのいざない）”，御領謙訳，サイエンス社，Sept.1980

[6] Elaine Rich and Kevin Knight："Artificial intelligence（Second edition）"，McGraw-Hill, Inc., 1991

[7] Luc Devroye, Läszlo Györfi and Gäbor Lugosi："A probabilistic theory of pattern recognition"，Springer-Verlag New York, Inc., 1996

[8] Pierre A.Devijver："On a new class of bounds on Bayes risk in multihypothesis pattern recognition"，IEEE Trans. on computers, vol.C-23, no.1, pp.70-80, Jan.1974

[9] Jeffrey Wood："Invariant pattern recognition：A review"，Pattern Recognition, vol.29, no.1, pp.1-17, 1996

[10] 鈴木昇一：“認識工学（上）”，柏書房，Feb.1975

[11] 鈴木昇一：“（マルチメディア情報処理のための一般化誤差逆伝播学習）ニューラルネットの新数理”，近代文芸社，Sept.1996

[12] 鈴木昇一：“（（知能情報メディア情報処理のための）カテゴリ帰属知識を用いた）パターン認識問題の数理的一般解決”，近代文芸社，June 1997

[13] 鈴木昇一：“（カテゴリ帰属知識のポテンシャル論を含む）認識知能情報論の新展開”，近代文芸社，Aug.1998

[14] 鈴木昇一：“パターンのエントロピーモデル”，電子情報通信学会論文誌（D-Ⅱ），vol.J77-D-Ⅱ，no.10, pp.2220-2238, Nov.1994

[15] 鈴木昇一：“パターン認識の数学的理論”，電子情報通信学会技術研究報告［パターン認識と学習，パターン認識と理解］，PRL84-6（第1部），PRL84-30, PRL84-38, PRL85-27, PRU86-8, PRU86-35, PRU86-69, PRU87-1, PRU87-28, PRU88-30, PRU89-1, PRU89-27, PRU89-40, PRU89-66, PRU89-77, PRU89-136, PRU90-5, PRU90-15, PRU90-29, PRU90-125, PRU91-1, PRU91-29, PRU91-42, PRU92-1, PRU92-18, PRU92-25, PRU92-89, PRU92-102（第28部），May 1984～Jan.1993

[16] 水谷静夫：“言語と数学（数学ライブラリ5）”，森北出版，Aug.1970

[17] C.E.Shannon："A mathematical theory of communications"，Bell System Technical Journal, vol.27, pp.379-423, pp.623-656, 1948

[18] 横沢一彦，下村満子：“高速系列提示される漢字および部首における錯合”，The Japanese Journal of Psychology, vol.69, no.3, pp.216-222, 1998

[19] 瀧保夫：“通信方式（電気通信講座19）”，コロナ社，電気通信学会編，June 1964

[20] 堀田政二，浦浜喜一：“ファジー領域分割に基づく画像検索”，電子情報通信学会論文誌D-Ⅱ，vol.J81-D-Ⅱ，no.9, pp.2215-2218, Sept.Jan.1998

[21] 鈴木昇一：“類似度関数を用いた確率的緩和法”，情報研究（文教大学・情報学部），no.20,

pp.23-75, Dec.1998
[22] 有本卓："情報理論（共立数学講座22）", 共立出版, Feb.1976
[23] M.S.Livingstone, D.H.Hubel："Psychophysical evidence for separate channels for the perception of form, color, movement, and depth", Journal of Neuroscience, vol.7, pp.3416-3468, 1987
[24] 鈴木昇一, 前田英明："有声破裂音の代表パターンの学習的決定と、その計算機シミュレーション", 情報研究（文教大学・情報学部）, no.20, pp.77-95, Dec.1998
[25] 鈴木昇一, 前田英明："変動エントロピーによる有声破裂音の順序付けと、その計算機シミュレーション", 情報研究（文教大学・情報学部）, no.21, pp.51-78, Mar.1999
[26] 鈴木昇一："直交系によるパターンモデルの構成", 情報研究（文教大学・情報学部）, no.21, pp.23-49, Mar.1999
[27] Kunihiko Fukushima："Neural network model for selective attention in visual pattern recognition and associative recall", Applied Optics, pp.4985-4992, vol.26, no.23, Dec.1997
[28] 森田ひろみ, 森田昌彦："形と色の統合における局所結合の働き", The Japanese Journal of Psychology, vol.69, no.5, pp.358-366, 1998
[29] David Middleton："Introduction to statistical communication theory", Peninsula Publishing（Los Altos, California）, 1987
[30] Gerard Salton, Michael J.McGill："Introduction to modern information retrieval（McGraw-Hill Advanced Computer Science Series）", McGraw-Hill International Book Company, 1983
[31] 鈴木昇一："平均顔を用いた顔画像の２値化、並びに、目、鼻、口の抽出", 情報研究（文教大学・情報学部）, no.22, pp.65-150, Dec.1999

付録1．任意の特徴抽出写像 u から特徴量を保存するモデル構成作用素 T に不変な特徴抽出写像 u´の構成

多数の学問分科にわたる複合領域での問題を解決しようとする人工知能学は計算機科学の最前線にある学問分科であり、人が知能的と思えることを計算機上で実現し、計算機を益々、有益なものにしようとすることを目的として、知能の動作原理を明らかにしながら、物質系，生命系から言語活動や政治･経済現象の社会全体まで強く、時には弱く相互に結合しあう部分が多数集まったシステムとしての複雑系を研究する集積物から成っている。

神秘的に実行されたとすると、われわれはそこに知能の働きが発現したと認めるが、1つの情報処理過程が分解され、その実行ができた理由が詳細に判明すると、知能の発現があったという感触が消え去ってしまう。知能行為というものはやはり、外に現われた効果（effect）を観察して測られるものであり、内部メカニズムに微細に立ち入って、極端にその実行行為成立の原因を追及･細分化しても測られるものではない。

ものの外的状況としてのパターンとは、視覚的、触覚的に捉えられる対象であり、形、大きさ、色などを備えている。

パターンに情報が発生するのは、知覚的応答 A，対象としての パターン φ 間の関係による。φ_1（パターン） が A（応答）をもたらし、φ_2（パターン）が同じく A（応答）をもたらすならば、2つのパターン φ_1 と φ_2 とは同じ情報を持っている。応答を期待できないパターン φ は情報を持っていない。区別し得る知覚的応答に対応して、区別し得るパターンがある。類概念、カテゴリ（category）は同じ特徴を持つパターンを集め、1つにまとめあげるという**抽象化**によって得られる。

本付録1では、パターン $\varphi\in\Phi$ から受け取る応答は抽出される特徴量の組であるとした場合、この応答が同じであるパターンモデル $T\varphi\in\Phi$ の存在が示される。

Z を複素数全体の集合として、

$u(\varphi,\ \ell)\in Z$ は、パターン $\varphi\in\Phi$ から抽出された第 $\ell\in L$ 番目の特徴量である　(A1.1)

としよう。

パターン φ から抽出される特徴量の集合が

$$\underline{u}'(\varphi)\equiv\{u'(\varphi,\ \ell)\mid \ell\in L\} \tag{A1.2}$$

であるような特徴抽出写像

$$u' : \Phi\times L\rightarrow Z \tag{A1.3}$$

を、式（A1.7）の**特徴量の保存性**（feature-preserving property）が満たされるように構成するのが、次の定理A1.1である。

［定理A1.1］（**特徴量保存定理**）

axiom 1［12］,［13］,［15］を満たすモデル構成作用素

$$T : \Phi\rightarrow\Phi \tag{A1.4}$$

と、特徴抽出写像

$$u : \Phi\times L\rightarrow Z \tag{A1.5}$$

とが与えられた場合、

$$u'(\varphi,\ \ell)\equiv u(T\varphi,\ \ell)\quad \text{for any }\ \varphi\in\Phi\ \text{ and any }\ \ell\in L \tag{A1.6}$$

と定義される式（A1.3）の特徴抽出写像 u´ は、特徴量の保存性

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall \ell \in L,\ u'(T\varphi,\ \ell) = u'(\varphi,\ \ell) \tag{A1.7}$$

を備えている。

（証明）　axiom 1の（iii）

$$\forall \varphi \in \Phi,\ T\varphi \in \Phi \wedge T(T\varphi) = T\varphi \tag{A1.8}$$

に注意すると、前半から、パターン集合 Φ が埋込性

$$T \cdot \Phi \subseteq \Phi \tag{A1.9}$$

を満たしていることに注意する（文献［13］の式（2.9）を参照）。そうすると、

$$\begin{aligned}
&\forall \varphi \in \Phi,\ \forall \ell \in L,\\
&u'(T\varphi,\ \ell)\\
&= u(T(T\varphi),\ \ell) \quad \because \text{ 式（A1.6）}\\
&= u(T\varphi,\ \ell) \quad \because \text{ 式（A1.8）の後半}\\
&= u'(\varphi,\ \ell) \quad \because \text{ 式（A1.6）}
\end{aligned}$$

□

さて、

ヒトの視覚情報処理における中心的課題は、

処理の対象とする問題のパターンから独立に抽出される初期過程に引き続いて、抽出された特徴が如何にして統合されて、問題のパターンの表象（パターンモデル）が形成されるか（結合過程）？

という結合問題である。文献［18］によれば、

Treisman, A., Gelade, G.（1980）の特徴統合理論（a feature integration theory of attention）では、位置の同一性を手かがりとして、特定の領域へ注意を焦点付けることによって、別々に処理されていた特徴が統合される。 □

［特徴保存問題］

式（A1.5）の特徴抽出写像 u が与えられた場合、式（A1.7）の特徴量の保存性を備えている式（A1.3）の特徴抽出写像 u′ を構成せよ

を解決している上記の定理A1.1は、パターンモデル $T\varphi$ が φ と同じに見えるための axiom 1を満たすパターンモデル $T\varphi$ の形成過程

$$\varphi \rightarrow T\varphi \tag{A1.9}$$

が結合問題を解決しているといえよう。

付録2. 認識知能，学習，パターン変形，誤認識確率，特徴量，パターンモデル，類似度関数，パターン間の包含情報量等

パターン認識現象を知能の働きの観点から取り扱う知能情報学（認識知能情報学）が科学になり得るためには、五官を通じての素朴な観察以外に何かが必要である。それには、経験から出発して、発想（仮説形成）、帰納（仮説検定）、演繹を反復しながら、論理操作をなまのデータ（original data）に作用させ、矛盾の無くなる迄繰り返され得られ到達した結果としての法則が存在しなければならない。認識知能情報学の応用としての“認識知能工学"はパターン認識に関する知能現象を技術として確保しようとするものである。

本付録2では、知能と学習、パターン変形と誤認識確率などの関係に説明を加えながら、抽出さ

れる特徴量の定義、原パターンφと同じに見えるパターンモデル Tφ、類似度関数 SM の構成などを論じる。

A2.1 知能と学習

心理学では、**学習**（learning）とは経験に基づき、行動を変容させていくことを指す。思考とは、外界に対する表象をもち、自らの行動に対し、長期記憶を基盤として短期記憶を（作業状態）を変容させることだ。知能情報学は、知能心理学と異なり、知能の働きで処理されている情報の持つ不確定さがどのように解消されていくかを常に意識していることである。

思考（thinking）は知能の働きによってなされる。

すべての機械の構成原理は人体に見い出せるという。ならば、内部に立ち入ってそれと判明するものではなく、外に表れたものを効果（effect）として観察して得られる“知能の働き”の原理も、人間の思考、行動を模倣することから始まって発見されることになろう。例えば、言語運用機能などで代表される学習される機能が少ない動物は一般に、知能の程度が低い。環境の変化に対応しつつ自ら新しい規範を確保するためには、言い替えれば、知能の働きが確保されるためには、生れながらにして仕組まれている構造が巧妙でありさえすればよいだけでなく、学習機能の付与が必要である。

機械が動作を反復している内に、次第に最適な動作を実行するようになれば、その機械を製作したものの意図した範囲を出ていないかも知れないが、学習の働きがその機械にあるといえるかも知れない。

A2.2 パターン変形と誤認識確率

パターンの変形に対処できるためには、学習に裏付けられた認識知能の働きが必要である。知性のみに偏するのみではなく、情動、感性をも考慮した新しい価値観の下で、知能の働きを解明しなければならない。

パターンに変形が許されるということは、パターンに構造が存在するということである。

一方、記号（言語表現に使用される極小単位）に変形が許されないということは、記号に構造が存在しないということである。多少変形した記号を元の記号と同一視した場合、その記号をパターンと見ていることである。

パターンの変形が過度になれば、パターン認識の誤りが生じてしまう。SS理論が処理の対象とする問題のパターンの集合 Φ に関し認識システムが誤認識する確率を陽に導入しないのは、認識システムの構造が Φ に対し、ある程度適切に設定されていなければ、誤認識確率というものが無意味になると考えているからである。

A2.3 抽出される特徴量とは？

感覚は主観的なもので、それ故、**感受性**（感覚を引き起こすのできる物理的または化学的刺激の最小限界値（閾値；threshold values）より上のある刺激の強さ I を最小限どれだけ増減すると感覚に捕らえられるという**識別閾**（threshold of difference）の逆数）をもって、感覚の増加する割合の目安としている。

パターンとは物理的刺激に対応した表現である。物理的刺激に反応する感覚器官としては、光に感じる目、音に感じる耳などがある。人間の目は、非常に暗い場所以外では波長555［nm］の光

に対し感度が最も大きい。また、人間の耳で聞こえる音の振動数の範囲は、およそ16～20,000［Hz］である。基本的に重要なこの2つの他に、圧力・振動・温度に感じる皮膚の受容器、化学的刺激に反応する感覚としての臭覚・味覚がある。

識別域を ΔI として、刺激の強さが I から $I\pm\Delta I$ へと変化したとき、$\Delta I/I$＝定数 が感覚について近似的に成立することを発見したのが、E.H.Weber（ウェーバー）であり、**ウェーバーの法則**（Weber's law）と呼ばれている。微分公式

$$d\log_e I = dI/I$$

に注目すると、$\Delta I/I$ を集計したものとしての感覚の強さ L は、

$$L \equiv \int_{I_0}^{I_1} dx/x = \log_e I_1 - \log_e I_0$$

と表現されることに注意しておこう。ここに、$\log_e I_0$ は感覚を引き起こすのできる物理的または化学的刺激の最小限界値（閾値）I_0 に対応する感覚である。

パターンの存在する領域（パターンを記述する座標系の x のとる値のある集合）は、位置によってその性質が違わないという意味で、均質な（homogeneous）ものであり、更に方向によってその性質が違わないという意味で等方性（isotropic）ものであると、通常仮定される。

3次元直交座標系 $\underline{x} = \langle x_1, x_2, x_3\rangle$ を採用した空間では、標準的なパターン φ は

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$$
$$= 1 + \prod_{k=1}^{3} \exp(-x_k^2/\sigma_k^2)\cdot\cos(2\pi a_k x_k)$$

ここに、σ_k, a_k は共に任意の正実数

と表されてよい。

パターンの2つの相異なる集まり Φ_1, Φ_2 がある。Φ_1 内の任意のパターン φ_1 と、φ_2 内の任意のパターン φ_2 とを区別する“**感受性の示強因子**（intensive factor）”に注目し、パターン φ から抽出された感受性示強因子の値を、**パターン φ から抽出された特徴量**（features）という。

パターン φ から抽出される第 $\ell\in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, \ell)$ として、

$$u(\varphi, \ell) = |(T\varphi, \psi\ell)|^2 / \sum_{k\in L} |(T\varphi, \psi_k)|^2$$

を採用できる。ここに、$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$ は内積を（，）とする可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の1次独立な系であり、$T\varphi$ は原パターン $\varphi\in\Phi$ に対応するパターンモデルである。

パターン φ から抽出された特徴量が実在であるためには、パターンの存在する空間での座標系のとり方（更に、その他の勝手な思考上の操作）に無関係に特徴量が定まらなければならない。特徴量が意味のあるものであるためには、それが座標系の変換に対し、不変であらねばならない。

A2.4 原パターン φ と同じに見えるパターンモデル $T\varphi$

特徴量が実在であるためには、それがパターンの意味する表象（パターンモデル）が形成され、その帰属する類概念（category）が決定され得るのに役立つように、座標変換に対する不変量（invariant）であらねばならない。パターンモデルが原パターンと同じ特徴量の組を持たねばならない。このとき、**パターンモデルは原パターンと同じように見える**ことが、その特徴抽出写像の出力が同じパターン同士は互いに区別が付かない想定の下では、保証される。

Z を複素数全体の集合として、

$u(\varphi, \ell)\in Z$ は、パターン $\varphi\in\Phi$ から抽出された第 $\ell\in L$番目の特徴量である　　(A2.1)

としよう。

パターンφから抽出される特徴量の集合が

$$\underline{u}(\varphi) \equiv \{u(\varphi, \ell) \mid \ell \in L\} \tag{A2.2}$$

であるような特徴抽出写像

$$u: \Phi \times L \to Z \tag{A2.3}$$

は、**特徴量の保存性**（feature-preserving property）

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \ell \in L, u(T\varphi, \ell) = u(\varphi, \ell) \tag{A2.4}$$

が満たされるように構成することができる（付録1を参照）。

網膜像（網膜上に結像された外界情報）と、後続の大脳中枢での処理によって形成され外界情報に対応する視知覚像というものは、同じでないけれども、通常、視知覚像は網膜像（の座標変換像）と同じに見えるのは、**認識知能**の働きによる。この意味で、**記憶に基づいた知覚の働き**により、パターンモデル$T\varphi$は、原パターンφと同じに見えなければならない。記憶に基づいた知覚の働きに対し、原パターンφからその帰属しているあるカテゴリ$\mathfrak{C}_j$（第$j \in J$番目のカテゴリ）のモデル$T\omega_j$が想起されるようになるのは、記憶に基づいた知能の働きである。

$T\varphi$がφと同じに見えるために、処理の対象とする問題のパターン集合Φとモデル構成写像Tとの対［Φ, T］が満たさなければならない公理は、axiom 1で指摘される。ここに、$0 \in \Phi$ は外界からの入力無しの場合に相当する。また、原パターンφ内のある程度以上細かい情報を忠実に再現しないで得られたパターン$T\varphi$がφと同じに見えるのは、Φ より大きい集合 Φ'（$\supset \Phi$）ではないことである。

変形があるかもしれない原パターンφから変形していないモデル$T\omega_j$が想起される原理は、多段階不動点認識知能の帰納法則における“認識過程の進展に伴い、カテゴリ帰属知識のポテンシャルが減少していって、0 になった場合の連想形不動点方程式（SS方程式）の解がカテゴリ帰属知識$\langle T\omega_j, [j]\rangle$になること”で説明される。

A2.5 類似度関数 SM の構成

本節では、感覚の大きさは、刺激の強さの対数に比例するというウェーバーの法則に相応した“axiom 2を満たす式（A2.5）の類似度関数SM”を構成してみよう。

A2.5.1 スペクトル関数の系による類似度関数 SM の構成

axiom 2を満たす類似度関数

$$SM: \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \tag{A2.5}$$

の1例は、次の定理A2.1で指摘される。

角周波数変数（スペクトル変数）λの、式（A2.9）の関数$V(T\varphi, T\omega_j; \lambda)$は、$T\omega_j$から$T\varphi$を主観的に眺めたときの視覚系の感度特性（**視覚感度スペクトル特性**）を表していると考えられる。

［定理A2.1］（**スペクトル関数の系 $V(T\varphi, T\omega_j; \lambda)$, $j \in J$ による類似度関数 SM の構成定理**）

2条件

$\forall j \in J$,

$$[(\text{正条件})\ V(T\omega_j, T\omega_j; \lambda) > 0] \tag{A2.6}$$

$$\wedge\ [(\text{排他条件})\ \forall i \in J - \{j\}, V(T\omega_i, T\omega_j; \lambda) = 0]$$
$$\text{for any } \lambda \in \{\lambda \mid -\infty < \lambda < +\infty\} \tag{A2.7}$$

を満たすスペクトル関数$V(T\varphi, T\omega_j; \lambda)$に関する重み関数$f(\lambda)$を非負条件

$$\forall \lambda \in \{\lambda \mid -\infty < \lambda < +\infty\},\ f(\lambda) \geqq 0 \tag{A2.8}$$

の下で導入して、

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\ f(\lambda)\cdot V(T\varphi, T\omega_j;\ \lambda) \\ \quad / \sum_{i\in J} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\ f(\lambda)\cdot V(T\varphi, T\omega_i;\ \lambda) \\ \quad \cdots \sum_{i\in J} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\ f(\lambda)\cdot V(T\varphi, T\omega_i;\ \lambda) > 0 \quad \text{の場合} \\ p(\mathfrak{C}_j) \\ \quad \cdots \sum_{i\in J} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\ f(\lambda)\cdot V(T\varphi, T\omega_i;\ \lambda) = 0 \quad \text{の場合} \end{cases} \tag{A2.9}$$

と定義される式（A2.5）の関数 SM はaxiom 2を満たす。ここに、$p(\mathfrak{C}_j)$ は第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の生起確率である。

尚、2条件式（A2.6),（A2.7）を満たす V の1構成例は、非負条件

$$\forall \mu \in \{\mu \mid -\infty < \mu \leqq +\infty\},\ G(\mu) \geqq 0 \tag{A2.10}$$

を満たす重み関数 $G(\mu)$ を導入して、

$$\begin{aligned} & V(T\varphi, T\omega_j;\ \lambda) \\ & \equiv \int_{-\infty}^{\lambda} d\mu\ G(\mu)\cdot g(\mu;\ T\varphi, T\omega_j) \\ & \text{, where} \\ & g(\mu;\ T\varphi, T\omega_j) \\ & \equiv \prod_{i\in J-\{j\}} \| \exp(-T\varphi/\mu^2) \\ & \qquad\qquad - \exp(-T\omega_i/\mu^2) \|^2 \\ & / \prod_{k\in J-\{j\}} \| \exp(-T\omega_j/\mu^2) \\ & \qquad\qquad - \exp(-T\omega_k/\mu^2) \|^2 \\ & \quad \text{for any } \lambda \in \{\lambda \mid -\infty < \lambda < +\infty\} \end{aligned} \tag{A2.11}$$

と与えられる。

（証明）axiom 2の（ i),（ii),（iii）を満たすことを示す。

2条件式（A2.6),（A2.7）の下では、

$$\begin{aligned} & SM(\omega_j, \omega_j) \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\ f(\lambda)\cdot V(T\omega_j, T\omega_j;\ \lambda) \\ & \quad / \sum_{i\in J} \int_{-\infty}^{0} d\lambda\ f(\lambda)\cdot V(T\omega_j, T\omega_i;\ \lambda) \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\ f(\lambda)\cdot V(T\omega_j, T\omega_j;\ \lambda) \\ & \quad / \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\ f(\lambda)\cdot V(T\omega_j, T\omega_j;\ \lambda) \\ & = 1 \end{aligned} \tag{A2.12}$$

であり、また、

$$\begin{aligned} & i \neq j \Rightarrow \\ & SM(\omega_j, \omega_j) \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\ f(\lambda)\cdot V(T\omega_i, T\omega_j;\ \lambda) \\ & \quad / \sum_{k\in J} \int_{-\infty}^{0} d\lambda\ f(\lambda)\cdot V(T\omega_i, T\omega_k;\ \lambda) \end{aligned}$$

$$=0/\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\ f(\lambda)\cdot V(T\omega_i, T\omega_i; \lambda)$$
$$\fallingdotseq 0 \tag{A2.13}$$
を得、(i)（直交性）の成立が示された。

（ii）（規格化条件）の成立は、定義式（A2.9）より明らかである。

（iii）（T－不変性）の成立は、T·T＝T (axiom 1,（iii）の後半）から、明らかである。

最後に、式（A2.10）の V（$T\varphi, T\omega_j$；λ）が2条件式（A2.6),（A2.7）を満たすことは、

$$g(\mu; T\omega_j, T\omega_j)=1 \tag{A2.14}$$
$$i\neq j \Rightarrow g(\mu; T\omega_i, T\omega_j)=0 \tag{A2.15}$$
から、明らかである。 □

A2.5.2 パターン間の情報量 I (φ, ψ)

パターン間の情報量 I (φ, ψ) とは、一方のパターン φ が他方のパターン ψ に含まれる程度を表す情報量のことである。

パターン $\varphi\in\mathfrak{H}$ が
$$\exists\psi, \exists\eta\in\mathfrak{H}, \varphi=\psi+\eta\wedge(\psi, \eta)=0 \tag{A2.16}$$
と直交分解されると、エネルギー等式·不等式
$$\|\varphi\|^2=\|\psi\|^2+\|\eta\|^2\geqq\|\eta\|^2 \tag{A2.17}$$
が成り立つ。
$$\|\eta\|/\|\varphi\|=0 \text{ if } \|\varphi\|=0 \tag{A2.18}$$
と約束すると、不等式
$$0\leqq\|\eta\|^2/\|\varphi\|^2=1-\|\psi\|^2/\|\varphi\|^2\leqq 1 \tag{A2.19}$$
が成立するから、パターン ψ に含まれているパターン φ の程度のもたらす**包含情報量**（the amount of information about the pattern φ contained in the pattern ψ） I（φ, ψ）は、

$$\begin{aligned} &I(\varphi, \psi)\\ &\equiv-(1/2)\cdot\log_e(\{\|\varphi\|^2-\|\psi\|^2\}/\|\varphi\|^2)\\ &=-(1/2)\cdot\log_e(\|\eta\|^2/\|\varphi\|^2)\\ &=-(1/2)\cdot\log_e[1-\|\psi\|^2/\|\varphi\|^2] \end{aligned} \tag{A2.20}$$
と定義できる。

内積を (,) とする可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の1次独立な系
$$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L} \tag{A2.21}$$
を選ぶ。

①L＝{1} の場合

パターン φ の直交分解式（A2.16）において、
$$\begin{aligned} &\psi=[(\varphi, \psi_1)/(\psi_1, \psi_1)]\cdot\psi_1\\ &\therefore\quad(\psi, \psi_1)=(\varphi, \psi_1) \end{aligned} \tag{A2.22}$$
と、ψ_1 を設定してみよう。式（A2.16）の後半の直交性が
$$\begin{aligned} &(\varphi, \psi_1)=(\psi, \psi_1)+(\eta, \psi_1)\\ &\qquad\because\quad \varphi=\psi+\eta\\ &\therefore\quad 0=(\eta, \psi_1)\quad\therefore\quad 0=(\eta, \psi) \end{aligned} \tag{A2.23}$$
の成立からわかる。

$$\|\psi\|^2/\|\varphi\|^2 = |(\varphi,\psi_1)/[\|\varphi\|\cdot\|\psi_1\|]|^2 \tag{A2.24}$$

が成立するから、式（A2.20）の$I(\varphi, \psi)$は、

$$\begin{aligned} &I(\varphi, \psi)\\ &=-(1/2)\cdot\log_e[1-|(\varphi,\psi_1)/[\|\varphi\|\cdot\|\psi_1\|]|^2]\\ &=\log_e 1/\sqrt{1-|(\varphi,\psi_1)/[\|\varphi\|\cdot\|\psi_1\|]|^2} \end{aligned} \tag{A2.25}$$

と、表現される。この情報量$I(\varphi, \psi)$はウェーバーの法則に相応していると、考えることができる。

②一般の場合

最小自乗法を適用し、パターン$\varphi\in\mathfrak{H}$の、代表パターンω_jの集合

$$\Omega\equiv\{\omega_j \mid j\in J\} \tag{A2.26}$$

への1次従属性は、パターンφを各代表パターンω_jの線形1次結合を含む以下の形式（A2.29）で表わすことができる。

与えられた$\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$に対し、

$$\|\varphi-\sum_{k\in J} c_k\cdot\omega_k\|^2\to\min \tag{A2.27}$$

ならしめる各1次結合係数$c_k(\varphi)\equiv c_k$を求めよう。最小自乗法によれば、連立1次方程式

$$\sum_{k\in J}(\omega_k, \omega_j)\cdot c_k(\varphi)=(\varphi, \omega_j),\ j\in J \tag{A2.28}$$

を解けば良い。このとき、パターンφの、各カテゴリ$\mathfrak{C}_k$の代表パターンω_kによる1次結合表現

$$\begin{aligned} &\exists\varphi_\perp\in\mathfrak{H},\ \varphi=\sum_{k\in J} c_k(\varphi)\cdot\omega_k+\varphi_\perp\\ &\quad\wedge[\forall k\in J,\ (\varphi_\perp, \omega_k)=0] \end{aligned} \tag{A2.29}$$

が成り立つ。

このとき、次の補助定理A2.1がなりたつ。

［補助定理A2.1］

$c_k(\omega_j)=1$ if $k=j$, $=0$ if $k\neq j$.

（証明）式（A2.28）から明らかである。 □

式（A2.29）から、式（A2.16）のψ, ηを、

$$\psi=\sum_{k\in J} c_k(\varphi)\cdot\omega_k\wedge\eta=\varphi\perp \tag{A2.30}$$

とおくことができることは、式（A2.29）の後半から、（A2.16）の後半が成り立つことでわかる。

よって、式（A2.20）の$I(\varphi, \psi)$は、

$$\begin{aligned} &I(\varphi, \psi)=I(\varphi, \sum_{k\in J} c_k(\varphi)\cdot\omega_k)\\ &=-(1/2)\cdot\\ &\quad\log_e[1-\|\sum_{k\in J} c_k(\varphi)\cdot\omega_k\|^2/\|\varphi\|^2] \end{aligned} \tag{A2.31}$$

と、表される。

上述を、パターンモデル$T\varphi$に関し、書き直そう。

$$\text{系}\ T\cdot\Omega\equiv\{T\omega_j \mid j\in J\}\ \text{は1次独立である} \tag{A2.32}$$

を仮定し、最小自乗法を適用する。

パターンモデル$T\varphi$の、代表パターンモデル$T\omega_j$の集合$T\cdot\Omega$への1次従属性は、パターンモデル$T\varphi$を各代表パターンモデル$T\omega_j$の線形1次結合を含む以下の形式（A2.35）で表わすことができる。

与えられた$\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$に対し、

$$\|T\varphi-\sum_{k\in J} d_k\cdot T\omega_k\|^2\to\min \tag{A2.33}$$

ならしめる各1次結合係数 $d_k(\varphi) \equiv d_k$ を求めよう。最小自乗法によれば、連立1次方程式

$$\sum_{k \in J} (T\omega_k, T\omega_j) \cdot d_k(\varphi) = (T\varphi, T\omega_j),\ j \in J \tag{A2.34}$$

を解けば良い。このとき、モデル $T\varphi$ の、各カテゴリ $\mathfrak{C}_k$ の代表パターン ω_k のモデル $T\omega_k$ による1次結合表現

$$\exists (T\varphi)_\perp \in \mathfrak{H},\ T\varphi = \sum_{k \in J} d_k(\varphi) \cdot T\omega_k + (T\varphi)_\perp$$
$$\wedge [\forall k \in J, ((T\varphi)_\perp, T\omega_k) = 0] \tag{A2.35}$$

が成り立つ。

このとき、次の補助定理A2.2がなりたつ。

[補助定理A2.2]

（ i ） $\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J,\ d_j(T\varphi) = d_j(\varphi)$.

（ii） $d_k(\omega_j) = 1$ if $k = j$, $= 0$ if $k \neq j$.

（証明）（ i ）は、axiom 1, （iii）の後半から明らかである。（ii）は、式（A2.34）から明らかである。 □

パターン φ の直交分解式（A2.16）において、φ の代りに、そのパターンモデル $T\varphi$ を考え、式（A2.16）の ψ, η を、

$$\psi = \sum_{k \in J} d_k(\varphi) \cdot T\omega_k \wedge \eta = (T\varphi)_\perp \tag{A2.36}$$

とおくと、式（A2.34）のパターンモデル $T\varphi$ の直交分解式

$$T\varphi = \psi + \eta \wedge (\psi, \eta) = 0 \tag{A2.37}$$

が成り立つ。よって、式（A2.20）の I（φ, ψ）に対応する I（$T\varphi$, ψ）は、

$$\begin{aligned}
I(T\varphi, \psi) &= I(T\varphi, \sum_{k \in J} d_k(\varphi) \cdot T\omega_k) \\
&= -(1/2) \cdot \\
&\quad \log_e [1 - \| \sum_{k \in J} d_k(\varphi) \cdot T\omega_k \|^2 / \| T\varphi \|^2] \\
&= -(1/2) \cdot \\
&\quad \log_e [1 - \{ \| T\varphi \|^2 - \| (T\varphi) \perp \|^2 \} / \| T\varphi \|^2] \\
&= -(1/2) \cdot \log_e [\| (T\varphi)_\perp \|^2 / \| T\varphi \|^2] \\
&= \log_e [\| T\varphi \| / \| (T\varphi)_\perp \|]
\end{aligned} \tag{A2.38}$$

と、表される。

A2.5.3 パターン間の包含情報量 I（φ, ψ）に基づく SM の構成

パターン φ の直交分解式（A2.16）において、φ の代りに、そのパターンモデル $T\varphi$ を考え、ψ_j を、

$$\psi_j = [(T\varphi, T\omega_j) / (T\omega_j, T\omega_j)] \cdot T\omega_j$$
$$\wedge T\varphi = \psi_j + \eta_j \tag{A2.39}$$

とおくと、

$$(\eta_j, T\omega_j) = 0 \quad \therefore \ (\psi_j, \eta_j) = 0 \tag{A2.40}$$

が成り立ち、式（A2.39）の後半は、パターンモデル $T\varphi$ の直交分解式を与えている。

よって、式（A2.20）の I（φ, ψ）に対応するの I（$T\varphi$, ψ_j）は、

$$\begin{aligned}
&I(T\varphi, \psi_j) \\
&= I(T\varphi, [(T\varphi, T\omega_j) / (T\omega_j, T\omega_j)] \cdot T\omega_j) \\
&= -(1/2) \cdot
\end{aligned}$$

$$\log_e [1-|(T\varphi, T\omega_j)/[\|T\varphi\|\cdot\|T\omega_j\|]|^2] \tag{A2.41}$$

と、表わされる。

式（A2.41）の I（$T\varphi$, ψ_j）は、パターン ψ_j に含まれているパターンモデル $T\varphi$の程度のもたらす包含情報量（the amount of information about the pattern $T\varphi$ contained in the pattern ψ_j）である。この包含情報量 I（$T\varphi$, ψ_j）はウェーバーの法則に相応していると、考えることができ、情報量 I（$T\varphi$, ψ_j）を利用して、axiom 2を満たす式（A2.5）の類似度関数 SM を次の定理A2.2のように構成できる。

［定理A2.2］**(パターンモデル間の情報量 I（$T\varphi$, ψ_j） に基づく類似度関数 SM の構成定理)**

非一致条件

$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}$,

$$(T\omega_i, T\omega_j)/[\|T\omega_i\|\cdot\|T\omega_j\|] \neq 1 \tag{A2.42}$$

の下で、

$$SM(\varphi, \omega_j) \equiv$$

$$\begin{cases} I(T\varphi, \psi_j)/\sum_{i\in J} I(T\varphi, \psi_i) \\ \qquad \cdots \sum_{i\in J} I(T\varphi, \psi_i)>0 \text{ の場合} \\ p(\mathfrak{C}_j)\cdots \sum_{i\in J} I(T\varphi, \psi_i)=0 \text{ の場合} \end{cases} \tag{A2.43}$$

と定義される式（A2.5）の SM はaxiom 2を満たす。

（証明）　axiom 2の（i），（ii），（iii）を満たすことを示す。

$\forall j \in J, I(T\omega_j, \psi_j)=+\infty$

であり、非一致条件式（A2.42）から、

$\forall i \in J-\{j\}$，$I(T\omega_i, \psi_j)=$正の有限値

であるから、

$$\begin{aligned} &SM(\omega_j, \omega_j) \\ &=[1+\sum_{i\in J-\{j\}} I(T\omega_i, \psi_j)/I(T\omega_j, \psi_j)]^{-1} \\ &=1 \end{aligned} \tag{A2.44}$$

であり、また、

$$\begin{aligned} &i \neq j \Rightarrow \\ &SM(\omega_i, \omega_j) \\ &=I(T\omega_i, \psi_j) \\ &\quad /\ [I(T\omega_i, \psi_i)+\sum_{i\in J-\{j\}} I(T\omega_k, \psi_j)] \\ &=0 \end{aligned} \tag{A2.45}$$

を得、（i）（直交性）の成立が示された。

（ii）（規格化条件）の成立は、定義式（A2.43）より明らかである。

（iii）（T－不変性）の成立は、T·T＝T（axiom 1,（iii）の後半）から、明らかである。

□

A2.5.4　パターンモデル間の相関値による類似度関数 SM の構成

2つのパターンモデル $T\varphi, T\omega_j$ 間の相関値 （$T\varphi, T\omega_j$） を利用して、axiom 2を満たす式（A2.5）の類似度関数 SM を次の定理A2.2のように構成できる。

［定理A2.2］**(パターンモデル間の相関値 （$T\varphi, T\omega_j$） に基づく類似度関数 SM の構成定理)**

文章式（A2.32）を仮定する。

非一致条件

$$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\},$$
$$(T\omega_i, T\omega_i) \neq (T\omega_i, T\omega_j) \tag{A2.46}$$

の下で、正定数の組 $a_j, j \in J$ を選定·固定し、

$$v_j(\varphi) \equiv \exp(a_j^{-1} \cdot |(T\varphi, T\varphi)-(T\varphi, T\omega_j)|^{-1}) \tag{A2.47}$$

と導入すると、

$$SM(\varphi, \omega_j) \equiv v_j(\varphi) / \sum_{i \in J} v_i(\varphi) \tag{A2.48}$$

と定義される式（A2.5）の SM はaxiom 2を満たす。

（証明）axiom 2の（i），（ii），（iii）を満たすことを示す。

$$\forall j \in J, v_j(\omega_j) = +\infty \tag{A2.49}$$

であり、非一致条件式（A2.46）から、

$$\forall i \in J-\{j\}, v_j(\omega_i) = \text{正の有限値} \tag{A2.50}$$

であるから、

$$\begin{aligned} &SM(\omega_j, \omega_j) \\ &= [1 + \sum_{i \in J-\{j\}} v_i(\omega_j)/v_j(\omega_j)]^{-1} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{A2.51}$$

であり、また、

$$\begin{aligned} &i \neq j \Rightarrow \\ &SM(\omega_i, \omega_j) \\ &= v_j(\omega_i) \\ &\quad / [v_i(\omega_i) + \sum_{k \in J-\{j\}} v_k(\omega_i)] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A2.52}$$

を得、（i）（直交性）の成立が示された。

（ii）（規格化条件）の成立は、定義式（A2.48）より明らかである。

（iii）（T-不変性）の成立は、$T \cdot T = T$ (axiom 1,（iii）の後半)から、明らかである。 □

更に、以下のSchwarzの不等式（A2.59）を適用すると、不等式

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, |NIP(T\varphi, T\omega_j)| \leqq 1 \tag{A2.53}$$

が成り立つことに注意して、

2つのパターンモデル $T\varphi, T\omega_j$ 間の規格化内積値（normalized inner product）

$$NIP(T\varphi, T\omega_j) \equiv \begin{cases} 0 \cdots \|T\varphi\| = 0 \vee \|T\omega_j\| = 0 \text{ のとき} \\ (T\varphi, T\omega_j)/[\|T\varphi\| \cdot \|T\omega_j\|] \\ \quad \cdots \|T\varphi\| \neq 0 \wedge \|T\omega_j\| \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{A2.54}$$

を利用して、axiom 2を満たす式（A2.5）の類似度関数 SM を次の定理A2.3のように構成できる。

［定理A2.3］**（パターンモデル間の規格化内積値 NIP（$T\varphi$, $T\omega_j$）に基づく類似度関数 SM の構成定理）**

文章式（A2.32）を仮定する。

非一致条件

$$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}, \|T\omega_i - T\omega_j\| \neq 0 \tag{A2.55}$$

の下で、正定数の組 a_j, $j \in J$ を選定･固定し、

$$q_j(\varphi) \equiv \exp(a_j^{-1} \cdot \{1 - |\mathrm{NIP}(T\varphi, T\omega_j)|^2\}^{-1}) \quad (A2.56)$$

と導入すると、

$$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_j) \equiv q_j(\varphi) / \sum_{i \in J} q_i(\varphi) \quad (A2.57)$$

と定義される式（A2.5）の SM はaxiom 2を満たす。

（証明）axiom 2の（i），（ii），（iii）を満たすことを示す。

先ず、非一致条件式（A2.55）を考慮すれば、

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\},$$
$$|\mathrm{NIP}(T\omega_i, T\omega_j)| < 1 \quad (A2.58)$$

の成立が、Schwarzの不等式

$\forall \varphi \in \mathfrak{H}, \forall \eta \in \mathfrak{H}, |(\varphi, \eta)| \leqq \|\varphi\| \cdot \|\eta\|$

ここに、等号 = の成立は、

（i） $\|\varphi\| \cdot \|\eta\| = 0$

（ii） $\exists a(\neq 0) \in Z$（複素数の集まり），$\varphi = a \cdot \eta \neq 0$

のいずれかの場合に限る (A2.59)

から従うことに注意する。

$$\forall j \in J, q_j(\omega_j) = +\infty \quad (A2.60)$$

であり、非一致条件式（A2.55）から、

$$\forall i \in J - \{j\}, c_j(\omega_i) = \text{正の有限値} \quad (A2.61)$$

であるから、

$$\begin{aligned} &\mathrm{SM}(\omega_j, \omega_j) \\ &= [1 + \sum_{i \in J - \{j\}} q_i(\omega_j) / q_j(\omega_j)]^{-1} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (A2.62)$$

であり、また、

$$\begin{aligned} &i \neq j \Rightarrow \\ &\mathrm{SM}(\omega_i, \omega_j) \\ &= q_j(\omega_i) \\ &\quad / [q_i(\omega_i) + \sum_{k \in J - \{j\}} q_k(\omega_i)] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (A2.63)$$

を得、（i）（直交性）の成立が示された。

（ii）（規格化条件）の成立は、定義式（A2.57）より明らかである。

（iii）（T-不変性）の成立は、$T \cdot T = T$（axiom 1,（iii）の後半）から、明らかである。 □

更に、以上のSchwarzの不等式（A2.59）を考慮し、不等式

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J,$$
$$|(T\varphi, T\omega_j)| \leqq \|T\varphi\| \cdot \|T\omega_j\| \quad (A2.64)$$

を利用して、axiom 2を満たす式（A2.5）の類似度関数 SM を次の定理A2.4のように構成できる。

[定理A2.4] **（パターンモデル間の内積値（$T\varphi$, $T\omega_j$）に基づく類似度関数 SM の構成定理）**

文章式（A2.32）を仮定する。

非一致条件

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \|T\omega_i - T\omega_j\| \neq 0 \quad (A2.65)$$

の下で、正定数の組 a_j, $j \in J$ を選定·固定し、

$$r_j(\varphi) \equiv \exp(a_j^{-1} \cdot \{\|T\varphi\| \cdot \|T\omega_j\| - |(T\varphi, T\omega_j)|\}^{-1}) \quad \text{(A2.66)}$$

と導入すると、

$$SM(\varphi,\ \omega_j) \equiv r_j(\varphi) / \sum_{i \in J} r_i(\varphi) \quad \text{(A2.67)}$$

と定義される式（A2.5）の SM はaxiom 2を満たす。

（証明） axiom 2の（i），（ii），（iii）を満たすことを示す。

先ず、非一致条件式（A2.55）を考慮すれば、

$$\forall j \in J, \forall j \in J - \{j\},$$
$$\|T\omega_i\| \cdot \|T\omega_j\| - |(T\omega_i, T\omega_j)| > 0 \quad \text{(A2.68)}$$

の成立が、Schwarzの不等式（A2.59）から従うことに注意する。

$$\forall j \in J,\ r_j(\omega_j) = +\infty \quad \text{(A2.69)}$$

であり、非一致条件式（A2.65）から、

$$\forall i \in J - \{j\},\ r_j(\omega_i) = \text{正の有限値} \quad \text{(A2.70)}$$

であるから、

$$SM(\omega_j,\ \omega_j) = [1 + \sum_{i \in J - \{j\}} r_i(\omega_j) / r_j(\omega_j)]^{-1} = 1 \quad \text{(A2.71)}$$

であり、また、

$$i \neq j \Rightarrow SM(\omega_i,\ \omega_j) = r_j(\omega_i) / [r_i(\omega_i) + \sum_{k \in J - \{j\}} r_k(\omega_i)] = 0 \quad \text{(A2.72)}$$

を得、（i）（直交性）の成立が示された。

（ii）（規格化条件）の成立は、定義式（A2.67）より明らかである。

（iii）（T-不変性）の成立は、$T \cdot T = T$（axiom 1,（iii）の後半）から、明らかである。 □

最後に、axiom 2を満たす式（A2.5）の類似度関数SM を次の定理A2.5のように構成できる。

［定理A2.5］**（パターンモデル間の2つの内積値（$T\varphi$, $T\varphi$）（$T\omega_j$, $T\omega_j$）に基づく類似度関数 SM の構成定理）**

文章式（A2.32）を仮定する。

非一致条件

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\},\ (T\omega_i, T\omega_i) \neq (T\omega_j, T\omega_j) \quad \text{(A2.73)}$$

の下で、正定数の組 aj, $j \in J$ を選定·固定し、

$$r_j(\varphi) \equiv \exp(a_j^{-1} \cdot |(T\varphi, T\varphi) - (T\omega_j, T\omega_j)|^{-1}) \quad \text{(A2.74)}$$

と導入すると、

$$SM(\varphi,\ \omega_j) \equiv r_j(\varphi) / \sum_{i \in J} r_i(\varphi) \quad \text{(A2.75)}$$

と定義される式（A2.5）の SM はaxiom 2を満たす。

（証明） axiom 2の（i），（ii），（iii）を満たすことを示す。

先ず、

$$\forall j \in J, r_j(\omega_j) = +\infty \tag{A2.76}$$

であり、非一致条件式（A2.73）を考慮すれば、

$$\forall i \in J-\{j\},\ r_j(\omega_i) = \text{正の有限値} \tag{A2.77}$$

であるから、

$$\begin{aligned}&SM(\omega_j, \omega_j)\\&= [1+\sum_{i\in J-\{j\}} r_i(\omega_j)/r_j(\omega_j)]^{-1}\\&=1\end{aligned} \tag{A2.78}$$

であり、また、

$$\begin{aligned}&i \neq j \Rightarrow\\&SM(\omega_i, \omega_j)\\&=r_j(\omega_i)\\&\quad/ [r_i(\omega_i)+\sum_{k\in J-\{j\}} r_k(\omega_i)]\\&=0\end{aligned} \tag{A2.79}$$

を得、（i）（直交性）の成立が示された。

（ii）（規格化条件）の成立は、定義式（A2.75）より明らかである。

（iii）（T-不変性）の成立は、$T\cdot T=T$（axiom 1,（iii）の後半）から、明らかである。 □

付録3. 有界実数値パターン$\eta=\eta(x)$を有界非負実数値パターン$\varphi=\varphi(x)$へと変換する4方法

本付録3では、有界実数値パターン$\eta=\eta(x)$を有界非負実数値パターン$\varphi=\varphi(x)$へと変換し、ηの代りとなるφが認識システムRECGNITRONへ入力される事態を想定した場合、この種のパターン変換方法

$$\eta \rightarrow \varphi \tag{A3.1}$$

が研究される。

A3.1 変換法1（対数パターン法）

q次元ユークリッド空間R^qのある領域Mで定義された実数値パターン

$$\eta = \{\eta(x) \mid x \in M\} \tag{A3.2}$$

は、有界条件

$$\sup_{x\in M} |\eta(x)| < \infty \tag{A3.3}$$

を満たすとする。有界実数値パターンηを有界**非負**実数値パターンφへと変換する4方法では、常に有界条件式（A3.3）が仮定される。

$$\begin{aligned}&\eta\ \text{の正成分}\ \eta^+(x) \equiv \max\{\eta(x), 0\}\\&=2^{-1}\cdot[\eta(x)+|\eta(x)|] \geqq 0\end{aligned} \tag{A3.4}$$

$$\begin{aligned}&\eta\ \text{の負成分}\ \eta^-(x) \equiv -\max\{-\eta(x), 0\}\\&=\min\{\eta(x), 0\}\\&=2^{-1}\cdot[\eta(x)-|\eta(x)|] \leqq 0\end{aligned} \tag{A3.5}$$

を導入すると、

$$\eta(x) = \eta^{+}(x) + \eta^{-}(x) \tag{A3.6}$$
$$\wedge\ \eta^{+}(x)\cdot\eta^{-}(x) = 0 \tag{A3.7}$$
が成り立ち、$\eta(x)$ は2成分 $\eta^{+}(x)$, $\eta^{-}(x)$ の和に分解できる。

このとき、式（A3.1）のパターン変換法として、正実数 a を1つ選定して、
$$\varphi(x) \equiv \log_e[1 + a^{-1}\cdot\eta^{+}(x)] \tag{A3.8}$$
が考えられる。対数パターン（logarithmic pattern）と称される
$$\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in M\} \tag{A3.9}$$
は、非負条件
$$\forall x \in M,\ \varphi(x) \geqq 0 \tag{A3.10}$$
を満たす。このとき、逆に、
$$\eta^{+}(x) = a\cdot[\exp(\varphi(x))^{-1}] \tag{A3.11}$$
が成り立つ。

性質
$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \eta(x) \leqq 0 \tag{A3.12}$$
が成り立つ。

A3.2　変換法2（振幅差規格化パターン法）

式（A3.1）のパターン変換法として、
$$\varphi(x) \equiv \begin{cases} 0 & \cdots \max_{x\in M}\eta(x) = \min_{x\in M}\eta(x) \text{ のとき} \\ [\eta(x) - \min_{x\in M}\eta(x)] \ / \ [\max_{x\in M}\eta(x) - \min_{x\in M}\eta(x)] & \cdots \max_{x\in M}\eta(x) > \min_{x\in M}\eta(x) \text{ のとき} \end{cases} \tag{A3.13}$$
が考えられる。式（A3.10）が成り立つ。逆に、
$$\varphi \neq 0 \Rightarrow \forall x \in M,\ \eta(x) = [\max_{x\in M}\eta(x) - \min_{x\in M}\eta(x)]\cdot\varphi(x) + \min_{x\in M}\eta(x) \tag{A3.14}$$
が成り立つ。

このとき、3性質

（i）$\forall x \in M, 0 \leqq \varphi(x) \leqq 1$

（ii）$\max_{x\in M}\eta(x) = 1 \wedge \min_{x\in M}\eta(x) = 0 \Rightarrow \varphi = \eta$

（iii）$\varphi = 0 \Leftrightarrow \eta =$ 定数

が成り立つ。

A3.3　変換法3（振幅差規格化対数パターン法）

式（A3.1）のパターン変換法として、

$\varphi(x) \equiv$

$$\begin{cases} 0 & \cdots \max_{x\in M} \eta(x) = \min_{x\in M} \eta(x) \text{ のとき} \\ \log_e [1 + (1/a) \cdot \{\eta(x) - \min_{x\in M} \eta(x)\} \\ \quad / \{\max_{x\in M} \eta(x) - \min_{x\in M} \eta(x)\}] \\ \quad \cdots \max_{x\in M} \eta(x) > \min_{x\in M} \eta(x) \text{ のとき} \end{cases} \tag{A3.15}$$

が考えられる。式（A3.10）が成り立ち、

このとき、3性質

（ⅰ）$\forall x \in M, 0 \leqq \varphi(x) \leqq \log_e [1+(1/a)]$

（ⅱ）$\max_{x\in M} \eta(x) = 1 \wedge \min_{x\in M} \eta(x) = 0$

$\Rightarrow \forall x \in M, \varphi(x) = \log_e [1+(1/a) \cdot \eta(x)]$

（ⅲ）$\varphi = 0 \Leftrightarrow \eta =$ 定数 が成り立ち、

$\exists x \in M, \varphi(x) \neq 0 \Rightarrow$

$$\eta(x) = a \cdot [\max_{x\in M} \eta(x) - \min_{x\in M} \eta(x)] \cdot [\exp(\varphi(x)) - 1] + \min_{x\in M} \eta(x) \tag{A3.16}$$

が成り立つ。

A3.4　変換法4（最大振幅規格化2値パターン法）

不等式

$$\forall x \in M, 0 < h(x) \leqq 1 \tag{A3.17}$$

を満たすような最大振幅が1より大きくない閾値関数 $h(x)$ を選定する。

$$(S\psi)(x) \equiv \begin{cases} 0 & \cdots \forall x \in M, \psi(x) = 0 \text{ のとき} \\ \psi(x) / \sup_{x\in M} |\psi(x)| & \\ & \cdots \exists x \in M, \psi(x) \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{A3.18}$$

と定義される写像

$$S : \Psi \to \Phi \tag{A8.19}$$

を定義し、このとき、式（A3.1）のパターン変換法として、

$$\varphi(x) \equiv \begin{cases} 0 \cdots (S\eta)(x) \leqq h(x) \text{ のとき} \\ 1 \cdots (S\eta)(x) > h(x) \text{ のとき} \end{cases} \tag{A3.20}$$

が考えられる。式（A3.10）が成り立つ。性質

$$\eta \neq 0 \wedge [\forall x \in M, \eta(x) \in \{0, 1\}] \Rightarrow \varphi = \eta \tag{A3.21}$$

が成り立っている。

付録4. 科学の前線としての境界領域と、情報学における情報媒体の持つ“シンボル・パターン”の二重性

情報学を数学から切り離すことができない。それ程、両者の関係は緊密である。

情報学が数学に多くを負うているのと同時に、数学もまた、情報学に多く負うていることを考えると、情報学を学ぶものにとって最少限の数学は基本的に必要である。その研究領域が広くなり、然も、過去の集積が大きくなり、一人の研究者が理論構築もシミュレーションも両者を兼ねて行うことが困難になったが、数学的なものの考え方は、数学を駆使して展開を行う数理情報学（mathematical informatics）を目指さない者にとっても、また、現在なお、記述的（descriptive）な段階にとどまっている情報学のある部門を学ぶものにとっても、基本的に必要である。

多くの対象に共通なものは必然的に抽象的になり、この抽象的総体は通常、限られた表現手段によって無限の可能な道から発見された法則の形で規定される。

情報の保存法則が確立された“情報を運んでいるもの（情報媒体；carriers of information）”は情報的実在物と見做されてよい。情報的実在物には、シンボル（symbol）とパターン（pattern）がある。情報の粒子（**情報子**［10］；information particle）がシンボルである。情報の波（情報波；information wave）がパターンである。

シンボルは伝達の際変形しない。少しでも変形するとその担っている意味が失われるのシンボルである。他方、パターンはその担っている意味が失われない程度に変形しながら伝達されるのが通常である。

変形が許されないシンボルは構造を備えていないが、変形が許されるパターンは構造を備えていると、考えなければならない。

情報媒体のこの二重性質（粒子/波動性）は量子力学によって明らかにされた“光の粒子/波動の二重性”に対応させられ、時空の特定の領域に閉じ込められた粒子性を備えているであろう頭脳に時空のあらゆる領域にわたり拡がることのできる波動性を備えているであろう精神の働きがあることにも対応させられる［10］。

情報波に含まれる強度は振幅の自乗に比例する。パターンが空間的に分布している場所はパターンの場（field）といい、パターンの中で振幅が大きい場所が主として、観測される。

この種の観測のされ方の簡単な1つは次のように説明される。

例えば、2変数 y，x の関数 h（y，x） の1つは

$$h(y,x) \equiv \exp(-|y-x|/a),\quad a>0 \tag{A4.1}$$

と与えられる。第$k \in K$番目の場所 x_k に生じた原因 $\varphi(x_k)$ が拡がり伝わって、場所 y に第$k \in K$番目の結果 $h(y, x_k)\cdot\varphi(x_k)$ が生じるとしよう。重ね合わせの原理が成立するとすれば、第 $\ell \in L$番目の場所 y_ℓ における観測結果 $\eta(y)$ は

$$\eta(y_\ell) = \sum_{k \in K} h(y_\ell, x_k)\cdot\varphi(x_k) \tag{A4.2}$$

と、与えられることになる。**式（A4.2）は線形なニューラルネット［11］の入出力を表す基本式である。**

$$\varphi \equiv \{\varphi(x_k) \mid k \in K\} \tag{A4.3}$$

$$\eta \equiv \{\eta(y_\ell) \mid \ell \in L\} \tag{A4.4}$$

は各々、入力パターン、出力パターンと呼ばれ、

$$h \equiv \{h(y_\ell, x_k) \mid \ell \in L,\ k \in K\} \tag{A4.5}$$

は単位入力（に）応答（する）関数と呼ばれてよい。何故ならば、

$$\varphi(x_k)=\begin{cases}1 \text{ if } k=j\\ 0 \text{ if } k\neq j\end{cases} \tag{A4.6}$$

を入力すると、出力

$$\eta(y_\ell)=h(y_\ell, x_j) \tag{A4.7}$$

が得られるからである。

$\underset{k\in K}{\mathrm{argmax}}\ |\ \varphi(x_k)\ |^2$ 番目の場所にある強度 $\max_{k\in K}\ |\ \varphi(x_k)|^2$ が $\underset{\ell\in L}{\mathrm{argmax}}|\ \eta(y_\ell)|^2$ の場所にある強度 $\max_{\ell\in L}\ |\ \eta(y_\ell)|^2$ にその担っている意味が保存されるように、伝達されると想定される。

情報に関する保存の法則（law of conservation）**を研究しようとする情報学**は数学とは異なり、シンボル、パターンの列で表される情報が入力され、シンボル、パターンの列で表される情報が出力されるシステム（マルチメディア情報システム）そのものを相手にする“開いた論理体系の科学”である。決して、自己矛盾を含まない体系（閉じた論理体系）ではない。

情報学（マルチメディア情報学）の一部門である人工知能学が計算機科学の最先端に位置付けられる。それ故、他の各学問分科を支える情報学が情報学以外の学問分科と大きく異なるのは、その性格上、**開世界仮説**を採用していることである。

真である事柄はすべて情報システムの内部に記述されているという“**閉世界仮説**（closed world assumption）”を採用している情報システムは、何らかの推論結果知らないことが判明したことを問われた場合（蓄積された知識を基にして、推論結果が得られない場合)、その解答として“知らない或いは、解答不能”"を採用しないで、“偽”と答えるが、開世界仮説を採用している情報システムは知らないことが問われた場合、その推論結果として“偽”という解答をしない。

人類にとって、情報学は永遠に論理的に開いた学問分科である。

例えば、物理学（physics）は生物学（biology）と接触し、その結果、生物物理学（biophysics）が誕生した。境界領域の科学の1つである。**境界領域こそ、科学の前線であろう。**今や、生物学は数学の助けなしに理解のできない分野に大きく成長しているけれども。

情報学は境界領域の学問である。

付録5. パターン変形が大である場合、正値線形作用素 H，非線形であってもよい作用素 G を使っての、axiom 2を満たす類似度関数 SM の構成

本付録5では、認識処理の対象とする入力パターンφの変形が大で、モデル構成作用素 T で変形を吸収できないと予想される場合に、パターンモデル Tφに、変形を吸収するために、パターン変換としての非線形であってもよい作用素 G，線形作用素（正値自己共役作用素）H を施して、axiom 2を満たす類似度関数 SM を構成する手法が研究される。

A5.1 パターン認識の働き（歪みを最小にする代表パターンを見つける最大類似度法）と、規格化内積 NIP (φ, η) を用いた類似度関数 SM の構成

本節では、入力パターンφに各代表パターンωからの変形があまりみられない場合の、類似度関数SM の構成手法が、定理5.1，その系1，系2で説明される。その前に、SM を使って、パター

ン認識する手法としての最大類似度法をA5.1.1項で説明しておく。SM を使っての本格的なパターン認識法、つまり、入力パターンφをあるカテゴリの代表パターンのモデルへ多段階変換し、φのパターン変形を吸収し、初期の認識段階の最大類似法の認識誤りを訂正可能な“万能形不動点認識計算法”については、2文献［12]，［13］で説明されている。

A5.1.1　パターン認識の働き（歪みを最小にする代表パターンを見つける最大類似度法）

処理の対象とする問題のパターンφの集合Φの中から m 個の元$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m$からなる集合（1次独立な系）

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} (\subset \Phi), \text{ where } J \equiv \{1, 2, \cdots, m\} \tag{A5.1}$$

を選び、各々、

Φ＝入力の集合, Ω＝出力の集合

とする。集合 Φ 内の各々の元を Ω 内の何れか1つの元 ω に対応させることを、**“パターン認識の働き”**という。

axiom 1［12]，［13］を満たす Φ, T のなす順序対［Φ, T］を想定する。Φは処理の対象とする問題のパターンφの集合である。また、**モデル構成作用素**（model-construction operator）と称される写像

$$T: \Phi \to \Phi \tag{A5.2}$$

をパターン$\varphi \in \Phi$ に作用させて得られるパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ はφと同じに見え、同じに聞こえるということを期待されたパターンである。

axiom 2［12]，［13］を満たすという意味で**類似度関数**（similarity-measure function）と称される写像

$$SM: \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \tag{A5.3}$$

を導入する。このaxiom 2の（T-不変性）

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j) \tag{A5.4}$$

が成立していることに、つまり、パターン$\varphi \in \Phi$ からパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ へのパターン変換

$$\varphi \in \Phi \to T\varphi \in \Phi \tag{A5.5}$$

において各類似度 $SM(\varphi, \omega_j)$ $(j \in J)$ は保存されることに、以下で注意しておく。

Φ の任意の元φに対し、φと同じに見えるパターンモデル $T\varphi$を導入し、Ω の中から**歪み測度**(distortion measure)

$$dtm(T\varphi, \omega) \equiv 1 - SM(T\varphi, \omega) \tag{A5.6}$$

を最小にするωを対応させるのが自然である。

$$\min_{\omega \in \Omega} [1 - SM(T\varphi, \omega)] = \max_{\omega \in \Omega} SM(T\varphi, \omega) \tag{A5.7}$$

が成立していることに注目した“最大類似法というパターン認識の働き”を説明しよう。

入力パターン$\varphi \in \Phi$ について、1より大きくない$|J|$個の非負実数値(類似度の値)の集合

$$SM(T\varphi, \omega_i), \ i \in J \tag{A5.8}$$

の内の最大値 $SM(T\varphi, \omega_j)$ を選び、このようなカテゴリ番号$k \in J$の内最も若いカテゴリ番号を

$$j = \operatorname*{argmax}_{i \in J} SM(T\varphi, \omega_i) \in J \tag{A5.9}$$

と決め、

φをモデル $T\omega_j$ に対応させるのが**最大類似**（の選定に伴うパターン認識）**法**である。このとき、$\varphi \in \Phi$ は、$\omega_j \in \Omega$ を代表パターンに持つ第$j \in J$番目のカテゴリ（category；類概念）$\mathfrak{C}_j$に認識されるという。カテゴリ$\mathfrak{C}_j$は典型（prototype）$\omega_j \in \Omega$ を中心とした緩やかな類概念であることを仮

定したことになる。

この対応を与える写像

$$f: \Phi \to \Omega \tag{A5.10}$$

を備えているシステムが**認識システム**（recognizer）である。

A5.1.2 規格化内積 NIP（φ, η）を用いた類似度関数 SM の3構成

$$T\omega_j,\ j \in J \text{ は1次独立な系である} \tag{A5.11}$$

とする。**規格化内積**（normalized inner product）NIP（φ, η）は

$$\mathrm{NIP}(\varphi, \eta) \equiv \begin{cases} (\varphi, \eta)/[\|\varphi\| \cdot \|\eta\|] & \text{if } \|\varphi\| \cdot \|\eta\| > 0 \\ 0 & \text{if } \|\varphi\| \cdot \|\eta\| = 0 \end{cases} \tag{A5.12}$$

と定義される。

Schwarzの不等式

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H},\ \forall \eta \in \mathfrak{H},\ |(\varphi, \eta)| \leqq \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \tag{A5.13}$$

から、不等式

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H},\ \forall \eta \in \mathfrak{H},\ |\mathrm{NIP}(\varphi, \eta)| \leqq 1 \tag{A5.14}$$

が成立していることに注意しておく。

次の定理A5.1は、規格化内積 NIP（φ, η）を用い、axiom 2を満たす類似度関数 SM を構成したものである。

$$s_j(\varphi) \equiv 1/\sqrt{1-|\mathrm{NIP}(T\varphi, T\omega_j)|^2} \text{ or } |\mathrm{NIP}(T\omega_j, T\omega_j)|/\sqrt{1-|\mathrm{NIP}(T\varphi, T\omega_j)|^2} \tag{A5.15}$$

をも定義しておく。

［定理A5.1］**（規格化内積を用いた類似度関数 SM の構成定理）**

非一致条件

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J-\{j\},\ \|T\omega_i - T\omega_j\| > 0 \tag{A5.16}$$

の下で、

$$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_j) = s_j(\varphi)/\sum_{k \in J} s_k(\varphi) \tag{A5.17}$$

と定義された式（A5.3）の写像SM はaxiom 2を満たす。

（証明）
$$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall j \in J,\ s_j(\varphi) > 0 \tag{A5.18}$$

$$\therefore\ \forall \varphi \in \Phi,\ \sum_{k \in J} s_k(\varphi) > 0 \tag{A5.19}$$

に注意しておく。

$$\forall j \in J,\ 1-|\mathrm{NIP}(T\omega_j, T\omega_j)|^2 = 0$$
$$\therefore\ s_j(\omega_j) = +\infty \tag{A5.20}$$

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J-\{j\},\ 1-|\mathrm{NIP}(T\omega_i, T\omega_j)|^2 > 0$$
$$\therefore\ s_j(\omega_i) = \text{有限} \tag{A5.21}$$

を使えば、

$$\begin{aligned} &\forall j \in J, \\ &\mathrm{SM}(\omega_j, \omega_j) = s_j(\omega_j)/\sum_{k \in J} s_k(\omega_j) \\ &= 1/[1+\sum_{k \in J-\{j\}} s_k(\omega_j)/s_j(\omega_j)] \\ &= 1/[1+0] = 1 \end{aligned} \tag{A5.22}$$

$\forall j \in J,\ \forall i \in J-\{j\},$

$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_j) = s_j(\omega_i)/\sum_{k \in J} s_k(\omega_i)$

$=s_j(\omega_i)/[s_i(\omega_i)+\sum_{k\in J-\{i\}} s_k(\omega_i)]$

$=$有限$/[\infty+$有限$]=0$ (A5.23)

を得、axiom 2の（i）(直交性) の成立が示された。

axiom 2の（ii）(規格化条件) の成立は、SM(φ, ω_j) の定義式（A5.17）から明らかである。

axiom 2の（iii）(T-不変性) の成立は、axiom 1, (iii) の後半 $T\cdot T=T$ から明らかである。 □

次の定理A5.1の系1、系2も容易に証明される。

[定理A5.1の系1]（**指数関数 exp による SM の構成定理**）

指数関数の系

$$f_j(x)=c_j\cdot\exp(x^2/(2\sigma_j^2)),\ \ j\in J \tag{A5.24}$$

where

$$c_j>0,\ \sigma_j>0,\ j\in J \tag{A5.25}$$

と、式（A5.15）の $s_j(\varphi)$ とを導入し、

$$SM(\varphi,\ \omega_j)=f_j(s_j(\varphi))/\sum_{k\in J} f_k(s_k(\varphi)) \tag{A5.26}$$

と定義された式（A5.3）の写像 SM はaxiom 2を満たす。

（証明）式（A5.18）に注意しておく。

$$\forall j\in J,\ 1-|NIP(T\omega_j, T\omega_j)|^2=0 \tag{A5.27}$$

$$\therefore\ \ s_j(\omega_j)=+\infty \quad \therefore\ \ f_j(s_j(\omega_j))=+\infty \tag{A5.28}$$

$\forall j\in J, \forall i\in J-\{j\},\ 1-|NIP(T\omega_i, T\omega_j)|^2=0$

$$\therefore\ \ s_j(\omega_i)=\text{有限} \quad \therefore\ \ f_j(s_j(\omega_i))=\text{有限} \tag{A5.29}$$

を使えば、

$\forall j\in J,$

$SM(\omega_j,\ \omega_j)=s_j(\omega_j)/\sum_{k\in J} s_k(\omega_j)$

$=1/[1+\sum_{k\in J-\{j\}} s_k(\omega_j)/s_j(\omega_j)]$

$=1/[1+0]=1$ (A5.30)

$\forall j\in J, \forall i\in J-\{j\},$

$SM(\varphi,\ \omega_j)=s_j(\omega_i)/\sum_{k\in J} s_k(\omega_i)$

$=s_j(\omega_i)/[s_i(\omega_i)+\sum_{k\in J-\{i\}} s_k(\omega_i)]$

$=$有限$/[\infty+$有限$]=0$ (A5.31)

を得、axiom 2の（i）(直交性) の成立が示された。

axiom 2の（ii）(規格化条件) の成立は、SM（φ, ω_j）の定義式（A5.26）から明らかである。

axiom 2の（iii）(T-不変性) の成立は、axiom 1, (iii) の後半 $T\cdot T=T$ から明らかである。 □

[定理A5.1の系2]（**一般関数 f_j による SM の構成定理**）

2条件

$$\lim_{x\to+\infty} f_j(x)=+\infty \tag{A5.32}$$

$0\leqq\lim_{x\to a} f_j(x)<+\infty$

for any non-negative real number a $(\neq\infty)$ (A5.33)

を満たす関数の系

$$f_j:[0,\infty]\ (\equiv\{x\mid 0\leqq x\})\to[0,\infty],\ \ j\in J \tag{A5.34}$$

を導入して、

$$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} f_j(s_j(\varphi)) / \sum_{k\in J} f_k(s_k(\varphi)) \\ \quad \cdots \sum_{k\in J} f_k(s_k(\varphi)) > 0 \text{ の場合} \\ p(\mathfrak{C}_j) \\ \quad \cdots \sum_{k\in J} f_k(s_k(\varphi)) = 0 \text{ の場合} \end{cases} \tag{A5.35}$$

と定義された式（A5.3）の写像 SM はaxiom 2を満たす。

（証明）式（A5.18）に注意しておく。

$$\forall j \in J,\ 1 - |\mathrm{NIP}(T\omega_j, T\omega_j)|^2 = 0 \tag{A5.36}$$

$$\therefore\ s_j(\omega_j) = +\infty \quad \therefore\ f_j(s_j(\omega_j)) = +\infty \tag{A5.37}$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\},\ 1 - |\mathrm{NIP}(T\omega_i, T\omega_j)|^2 = 0$$

$$\therefore\ s_j(\omega_i) = \text{有限} \quad \therefore\ f_j(s_j(\omega_i)) = \text{有限} \tag{A5.38}$$

を使えば、

$$\begin{aligned} &\forall j \in J, \\ &\mathrm{SM}(\omega_j, \omega_j) = f_j(s_j(\omega_j)) / \sum_{k\in J} f_k(s_k(\omega_j)) \\ &= 1/[1 + \sum_{k\in J-\{j\}} f_k(s_k(\omega_j)) / f_j(s_j(\omega_j))] \\ &= 1/[1+0] = 1 \end{aligned} \tag{A5.39}$$

$$\begin{aligned} &\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \\ &\mathrm{SM}(\omega_i, \omega_j) = f_j(s_j(\omega_i)) / \sum_{k\in J} f_k(s_k(\omega_i)) \\ &= s_j(\omega_i) / [f_i(s_i(\omega_i)) + \sum_{k\in J-\{i\}} f_k(s_k(\omega_i))] \\ &= \text{有限}/[\infty + \text{有限}] = 0 \end{aligned} \tag{A5.40}$$

を得、axiom 2の（ i ）（直交性）の成立が示された。

axiom 2の（ii）（規格化条件）の成立は、SM(φ, ω_j) の定義式（A5.35）から明らかである。

axiom 2の（iii）（T-不変性）の成立は、axiom 1,（iii）の後半 T·T＝T から明らかである。 □

A5.2　非線形であってよい作用素 G からの出力を用いての類似関数 SM の構成

例えば、パターン $\varphi \in \Phi$ を

$$\varphi = G\varphi + [I - G]\varphi \tag{A5.41}$$

と分解できる。ここに、作用素 G は線形とは限らない。I は恒等写像（identity operator）である。

次の定理A5.2は、2つのパターンモデル Tφ, Tω_j の、作用素 G からの出力 GTφ, GTω_j 同士間のノルム距離 $\| GT\varphi - GT\omega_j \|$ を用いて、axiom 2を満たす類似関数 SM を構成したものである。式（A5.2）のモデル構成作用素 T で認識処理の対象とする入力パターン $\varphi \in \Phi$ の変形を吸収できない場合

$$\varphi \to T\varphi \to GT\varphi,\ \omega_j \to T\omega_j \to GT\omega_j\ (j \in J) \tag{A5.42}$$

というパターン変換を施し、axiom 2を満たす式（A5.3）の類似度関数 SM を構成している。

［定理A5.2］**（作用素 G を含む類似関数 SM の構成定理）**

非一致条件

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\},\ \| GT\omega_i - GT\omega_j \| > 0 \tag{A5.43}$$

を満たす作用素

$$G : \Phi \to \Phi \tag{A5.44}$$

を導入する。

$\forall j \in J, a_j > 0$ (A5.45)

であるような助変数ajの組 $\{a_j \mid j \in J\}$ を導入し、

$$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_j) = \exp(a_j^{-1} \cdot \| GT\varphi - GT\omega_j \|^{-2}) / \sum_{k \in J} \exp(a_k^{-1} \cdot \| GT\varphi - GT\omega_k \|^{-2}) \quad \text{(A5.46)}$$

と定義された式（A5.3）の写像SMはaxiom 2を満たす。

（証明）$\forall j \in J$,

$$s_j(\varphi) \equiv \exp(a_j^{-1} \cdot \| GT\varphi - GT\omega_j \|^{-2}) > 0 \quad \text{(A5.47)}$$

に注意しておく。

$$\forall j \in J, s_j(\omega_j) = +\infty \quad \text{(A5.48)}$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \ 0 < s_j(\omega_i) < +\infty \quad \text{(A5.49)}$$

を使えば、

$\forall j \in J$,

$$\begin{aligned} \mathrm{SM}(\omega_j, \omega_j) &= s_j(\omega_j) / \sum_{k \in J} s_k(\omega_j) \\ &= 1/[1 + \sum_{k \in J - \{j\}} s_k(\omega_j)/s_j(\omega_j)] \\ &= 1/[1+0] = 1 \end{aligned} \quad \text{(A5.50)}$$

$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{SM}(\varphi, \omega_j) &= s_j(\omega_i) / \sum_{k \in J} s_k(\omega_i) \\ &= s_j(\omega_i) / [s_i(\omega_i) + \sum_{k \in J - \{i\}} s_k(\omega_i)] \\ &= \text{有限} / [\infty + \text{有限}] = 0 \end{aligned} \quad \text{(A5.51)}$$

を得、axiom 2の（ i ）（直交性）の成立が示された。

axiom 2の（ii）（規格化条件）の成立は、$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_j)$ の定義式（A5.46）から明らかである。

axiom 2の（iii）（T-不変性）の成立は、axiom 1,（iii）の後半 $T \cdot T = T$ から明らかである。 □

A5.3 正値作用素Hを含む類似関数SMの構成

パターン φ の分解式（A5.41）と同様に、例えば、パターン $\varphi \in \Phi$ を

$$\varphi = H\varphi + [I - H]\varphi \quad \text{(A5.52)}$$

と分解できる。ここに、正値条件

$$\forall \varphi \in \mathrm{Domain}(H) \equiv \{\varphi \in \mathfrak{H} \mid \| H\varphi \| < \infty\}, \quad (H\varphi, \varphi) \geq 0 \quad \text{(A5.53)}$$

を満たすという意味で**正値自己共役作用素**と称される線形作用素Hを導入する。5.3節の定理A5.2でのSMの構成内容より、詳細な設定法が下の定理5.3で確保される。

例えば、

$$H = \sum_{j=1}^{q} (\sqrt{-1} \cdot \partial / \partial x_j)^2 \quad \text{on } L_2(R^q ; dx_1 dx_2 \cdots dx_q) \quad \text{(A5.54)}$$

$$H \cdot = \sum_{j \in J} \sum_{i \in J(j)} p_{ij} \cdot (\cdot, T\eta_{ij}) \cdot T\eta_{ij}$$

on condition that

$$[\forall j \in J, \forall i \in J(j), \ 0 \leq p_{ij} \leq 1]$$

$$\wedge \sum_{j\in J} \sum_{i\in J(j)} p_{ij}=1 \quad \text{(A5.55)}$$

などがそうである。

さて、式（A5.11）を仮定し、式（A5.12）の規格化内積 NIP（φ, η）を考えておく。同時に、不等式（A5.14）に注意しておく。2性質

$$(HT\varphi, T\varphi)\cdot(HT\eta, T\eta)>0 \Rightarrow$$
$$NIP(H^{1/2}T\varphi, H^{1/2}T\eta)$$
$$=(H^{1/2}T\varphi, H^{1/2}T\eta)/[\| H^{1/2}T\varphi \| \cdot \| H^{1/2}T\eta \|]$$
$$=(HT\varphi, T\eta)/[\sqrt{(HT\varphi, T\varphi)}\cdot\sqrt{(HT\eta, T\eta)}] \quad \text{(A5.56)}$$
$$(HT\varphi, T\varphi)\cdot(HT\eta, T\eta)>0 \Rightarrow$$
$$NIP(H^{1/2}T\varphi, H^{1/2}T\eta)=0 \quad \text{(A5.57)}$$

に注意しておく。

確率条件

$$[\forall j\in J, 0\leqq p(\mathfrak{C}_j)\leqq 1]\wedge \sum_{j\in J} p(\mathfrak{C}_j)=1 \quad \text{(A5.58)}$$

を満たす第j∈J番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の生起確率 $p(\mathfrak{C}_j)$ が導入し得られた次の定理A5.2は、作用素 H を含む形でaxiom 2を満たす類似関数 SM を構成したものである。式（A5.2）のモデル構成作用素 T で認識処理の対象とする入力パターン $\varphi\in\Phi$ の変形を吸収できない場合

$$\varphi\to T\varphi\to HT\varphi,\ \omega_j\to T\omega_j\,(j\in J) \quad \text{(A5.59)}$$

というパターン変換を施し、axiom 2を満たす式（A5.3）の類似度関数 SM を構成している。

［定理A5.3］**（作用素 H を含む類似関数 SM の構成定理）**

$$\forall j\in J,\ T\omega_j\in \mathrm{Domain}(H)\equiv\{\varphi\in\mathfrak{H}\mid H\varphi\in\mathfrak{H}\} \quad \text{(A5.60)}$$
$$\forall \varphi\in\Phi, T\varphi\in \mathrm{Domain}(H) \quad \text{(A5.61)}$$

とする。

非一致条件

$$\forall j\in J, \forall i\in J-\{j\},$$
$$\| H^{1/2}T\omega_i - H^{1/2}T\omega_j \| = \| H^{1/2}(T\omega_i - T\omega_j) \|$$
$$=\sqrt{(H(T\omega_i-T\omega_j), T\omega_i-T\omega_j)}>0 \quad \text{(A5.62)}$$

を満たす正値自己共役作用素

$$H: \mathrm{Domain}(H)\to \mathrm{Range}(H)\equiv\{\eta\mid \exists\varphi\in \mathrm{Domain}(H), \eta$$
$$=H\varphi\in\mathfrak{H}\} \quad \text{(A5.63)}$$

を導入する。パターン集合 Φ は

$$\Phi\subseteq \mathrm{Domain}(H)\cap \mathrm{Range}(H) \quad \text{(A5.64)}$$

を満たすように選ばれているものとして、

$$\forall j\in J, a_j>0 \quad \text{(A5.65)}$$

であるような助変数 a_j の組 $\{a_j \mid j\in J\}$ を導入し、

$$S(\varphi, \omega_j; H)$$
$$=-(1/a_j)\cdot\log_e[1-|NIP(H^{1/2}T\varphi, H^{1/2}T\omega_j)|^2] \quad \text{(A5.66)}$$

を用いて、

$SM(\varphi, \omega_j)\equiv$

$$
\begin{cases}
S(\varphi, \omega_j ; H)/\sum_{k\in J} S(\varphi, \omega_k ; H) \\
\quad \cdots \sum_{k\in J} S(\varphi, \omega_k ; H) > 0 \text{の場合} \\
p(\mathfrak{C}_j) \\
\quad \cdots \sum_{k\in J} S(\varphi, \omega_k ; H) = 0 \text{の場合}
\end{cases}
\tag{A5.67}
$$

と定義された式（A5.3）の写像 SM はaxiom 2を満たす。

（証明） $\forall j\in J, S(\varphi, \omega_j ; H) \geqq 0$ (A5.68)

に注意しておく。

$$\forall j\in J, S(\omega_j, \omega_j ; H) = +\infty \tag{A5.69}$$

$$\forall j\in J, \forall i\in J-\{j\},\ 0 < S(\omega_i, \omega_j ; H) < +\infty \tag{A5.70}$$

を使えば、

$$
\begin{aligned}
&\forall j\in J,\\
&SM(\omega_j, \omega_j) = S(\omega_j, \omega_j ; H)/\sum_{k\in J} S(\omega_j, \omega_k ; H)\\
&= 1/[1 + \sum_{k\in J-\{j\}} S(\omega_j, \omega_k ; H)/S(\omega_j, \omega_j ; H)]\\
&= 1/[1+0] = 1
\end{aligned}
\tag{A5.71}
$$

$$
\begin{aligned}
&\forall j\in J, \forall i\in J-\{j\},\\
&SM(\varphi, \omega_j) = S(\omega_i, \omega_j ; H)/\sum_{k\in J} S(\omega_i, \omega_k ; H)\\
&= S(\omega_i, \omega_j ; H)\\
&\quad /[S(\omega_i, \omega_i ; H) + \sum_{k\in J-\{i\}} S(\omega_i, \omega_k ; H)]\\
&= \text{有限}/[\infty + \text{有限}] = 0
\end{aligned}
\tag{A5.72}
$$

を得、axiom 2の（ i ）（直交性）の成立が示された。

axiom 2の（ii）（規格化条件）の成立は、$SM(\varphi, \omega_j)$ の定義式（A5.67）から明らかである。

axiom 2の（iii）（T-不変性）の成立は、axiom 1,（iii）の後半 $T\cdot T = T$ から明らかである。 □

A5.4 想起作用素 G による類似度関数 SM の構成（想起作用素法）

式（A5.11）を仮定し、然も、パターンモデルの系

$$T\cdot\Omega \equiv \{T\omega_j \mid j\in J\} \tag{A5.73}$$

も1次独立とする。

$$c_{ij} \equiv (T\omega_j, T\omega_i) \tag{A5.74}$$

を第 $i\in J$ 行第 $j\in J$ 列の要素とする行列 C の逆行列 C^{-1} は $T\cdot\Omega$ が1次独立な系であるから、存在する。C^{-1} の第$i\in J$行第$j\in J$列の要素を $(C^{-1})_{ij}$ と表す。

このとき、

$$
\begin{aligned}
&G\eta = \sum_{i\in J} T\omega_i \cdot \sum_{j\in J} (C^{-1})_{ij} \cdot (\eta, T\omega_j)\\
&\text{for any } \eta \in \mathfrak{H}
\end{aligned}
\tag{A5.75}
$$

と定義される線形作用素 G は次の定理A5.4で指摘されているように、各 $T\omega_j$ を不動点に持つ。この意味で、G は **$T\cdot\Omega$ を記憶している想起作用素**と呼ばれる。クロネッカーの δ 記号

$$\delta_{ij} = 1 \text{ if } i=j, = 0 \text{ if } i\neq j \tag{A5.76}$$

を導入しておく。

［定理A5.4］**（想起作用素 G の不動点定理）**

$$\forall j\in J, GT\omega_j = T\omega_j. \tag{A5.77}$$

（証明）任意に、$k \in J$ を選ぶ。

$GT\omega_k$

$= \sum_{i \in J} T\omega_i \cdot \sum_{j \in J} (C^{-1})_{ij} \cdot (T\omega_k, T\omega_j)$

$\because$　式（A5.75）

$= \sum_{i \in J} T\omega_i \cdot \sum_{j \in J} (C^{-1})_{ij} \cdot C_{jk}$

$\because$　式（A5.74）

$= \sum_{i \in J} T\omega_i \cdot \delta_{ik}$　$\because$　逆行列の定義

$= T\omega_k.$ □

非一致条件式（A5.16）の下で、

$SM(\varphi, \omega_j)$

$$= \| T\varphi - T\omega_j \|^{-2} / \sum_{k \in J} \| T\varphi - T\omega_k \|^{-2} \tag{A5.78}$$

と定義される式（A5.3）の写像SMはaxiom 2を満たすが、定理A11.4からわかるように、このSMをパターン分離機能に関し、改良したものを、次の定理A5.5が与えている。つまり、式（A5.2）のモデル構成作用素Tで認識処理の対象とする入力パターン $\varphi \in \Phi$ の変形を吸収できない場合

$$\varphi \to T\varphi \to GT\varphi,\ \omega_j \to T\omega_j\ (j \in J) \tag{A5.79}$$

というパターン変換を施し、axiom 2を満たす式（A5.3）の類似度関数SMを構成している。

［定理A5.5］**（想起作用素Gによる類似度関数SMの構成定理）**

$T \cdot \Omega$ は1次独立な系とする。

非一致条件

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \| GT\omega_i - T\omega_j \| > 0 \tag{A5.80}$$

の下で、

$SM(\varphi, \omega_j)$

$$= \| GT\varphi - T\omega_j \|^{-2} / \sum_{k \in J} \| GT\varphi - T\omega_k \|^{-2} \tag{A5.81}$$

と定義された式（A5.3）の写像SMはaxiom 2を満たす。

次の定理A5.5の系1も容易に証明される。

［定理A5.5の系1］**（想起作用素Gによる類似度関数SMの構成定理）**

非一致条件式（A5.80）の下で、

$$\forall j \in J, a_j > 0 \tag{A5.82}$$

であるような助変数 a_j の組 $\{a_j \mid j \in J\}$ を導入し、

$SM(\varphi, \omega_j)$

$$= \exp(a_j^{-1} \cdot \| GT\varphi - T\omega_j \|^{-2}) / \sum_{k \in J} \exp(a_k^{-1} \cdot \| GT\varphi - T\omega_k \|^{-2}) \tag{A5.83}$$

と定義された式（A5.3）の写像SMはaxiom 2を満たす。

（定理A5.5の証明）

$$\forall j \in J, s_j(\varphi) \equiv \| GT\varphi - T\omega_j \|^{-2} > 0 \tag{A5.84}$$

に注意しておく。定理A5.4より成り立つ2つの関係

$$\forall j \in J, s_j(\omega_j) = +\infty \tag{A5.85}$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, 0 < s_j(\omega_i) < +\infty \tag{A5.86}$$

を使えば、

$$\forall j \in J,$$
$$SM(\omega_j, \omega_j) = s_j(\omega_j) / \sum_{k \in J} s_k(\omega_j)$$
$$= 1/[1 + \sum_{k \in J - \{j\}} s_k(\omega_j)/s_j(\omega_j)]$$
$$= 1/[1+0] = 1 \tag{A5.87}$$
$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\},$$
$$SM(\varphi, \omega_j) = s_j(\omega_i) / \sum_{k \in J} s_k(\omega_i)$$
$$= s_j(\omega_i) / [s_i(\omega_i) + \sum_{k \in J - \{i\}} s_k(\omega_i)]$$
$$= 有限/[\infty + 有限] = 0 \tag{A5.88}$$

を得、axiom 2の（i）（直交性）の成立が示された。

axiom 2の（ii）（規格化条件）の成立は、SM(φ, ω_j) の定義式から明らかである。

axiom 2の（iii）（T-不変性）の成立は、axiom 1,（iii）の後半 T·T=T から明らかである。 □

（定理A5.5の系1の証明）

$$\forall j \in J,$$
$$s_j(\varphi) \equiv \exp(a_j^{-1} \cdot \| GT\varphi - T\omega_j \|^{-2}) > 0 \tag{A5.89}$$

に注意しておく。定理A5.4より成り立つ2つの関係

$$\forall j \in J, s_j(\omega_j) = +\infty \tag{A5.90}$$
$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, 0 < s_j(\omega_i) < +\infty \tag{A5.91}$$

を使えば、

$$\forall j \in J,$$
$$SM(\omega_j, \omega_j) = s_j(\omega_j) / \sum_{k \in J} s_k(\omega_j)$$
$$= 1/[1 + \sum_{k \in J - \{j\}} s_k(\omega_j)/s_j(\omega_j)]$$
$$= 1/[1+0] = 1 \tag{A5.92}$$
$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\},$$
$$SM(\varphi, \omega_j) = s_j(\omega_i) / \sum_{k \in J} s_k(\omega_i)$$
$$= s_j(\omega_i) / [s_i(\omega_i) + \sum_{k \in J - \{i\}} s_k(\omega_i)]$$
$$= 有限/[\infty + 有限] = 0 \tag{A5.93}$$

を得、axiom 2の（i）（直交性）の成立が示された。

axiom 2の（ii）（規格化条件）の成立は、SM(φ, ω_j) の定義式（A5.83）から明らかである。

axiom 2の（iii）（T-不変性）の成立は、axiom 1,（iii）の後半 T·T=T から明らかである。 □

A5.5 今1つの想起作用素法による SM の構成

2つのパターンφ, η 間の、式（A5.12）の規格化内積 NIP(φ, η)と、不等式（A5.14）に注意しておく。

非一致条件式（A5.16）の下で、正の助変数 $a_j > 0$ を導入し定義される関数

$$S(\varphi, \omega_j)$$
$$\equiv -(1/a_j) \cdot \log_e [1 - | NIP(T\varphi, T\omega_j) |] \tag{A5.94}$$

を用いて、

$$S(\varphi, \omega_j) \equiv$$

$$\begin{cases} p(\mathfrak{C}_j) \cdots \sum_{k\in J} S(\varphi,\ \omega_k)=0 \text{ のとき} \\ S(\varphi,\ \omega_j)/\sum_{i\in J} S(\varphi,\ \omega_i) \\ \qquad \cdots \sum_{k\in J} S(\varphi,\ \omega_k)>0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{A5.95}$$

と定義される式（A5.3）の写像 SM はaxiom 2を満たすが、定理A5.4からわかるように、この SM をパターン分離機能に関し改良したものを、次の定理A5.6が与えている。

［定理A5.6］**（想起作用素 G による類似度関数 SM の構成定理）**

T·Ω は1次独立な系とする。

定理A5.4での想起作用素 G を導入する。

非一致条件式（A5.80）の下で、正の助変数 $a_j>0$ を導入し定義される関数

$$S(\varphi,\ \omega_j)$$
$$\equiv -(1/a_j)\cdot \log_e [1-|\mathrm{NIP}(GT\varphi, T\omega_j)|] \tag{A5.96}$$

を用いて、

$$S(\varphi,\ \omega_j)\equiv$$
$$\begin{cases} (\mathfrak{C}_j) \cdots \sum_{k\in J} S(\varphi,\ \omega_k)=0 \text{ のとき} \\ S(\varphi,\ \omega_j)/\sum_{i\in J} S(\varphi,\ \omega_i) \\ \qquad \cdots \sum_{k\in J} S(\varphi,\ \omega_k)>0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{A5.97}$$

と定義される式（A5.3）の写像SMはaxiom 2を満たす。

（定理A5.6の証明）

$$\forall j\in J,\ S(\varphi,\ \omega_j)\geqq 0 \tag{A5.98}$$

に注意しておく。定理A5.4より成り立つ2つの関係

$$\forall j\in J,\ s_j(\omega_j)\ =+\infty \tag{A5.99}$$

$$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},\ \ 0\leqq s_j(\omega_i)<+\infty \tag{A5.100}$$

を使えば、

$$\begin{aligned} &\forall j\in J, \\ &SM(\omega_j,\ \omega_j)=s_j(\omega_j)/\sum_{k\in J} s_k(\omega_j) \\ &=1/[1+\sum_{k\in J-\{j\}} s_k(\omega_j)/s_j(\omega_j)] \\ &=1/[1+0]=1 \end{aligned} \tag{A5.101}$$

$$\begin{aligned} &\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\}, \\ &SM(\varphi,\ \omega_j)=s_j(\omega_i)/\sum_{k\in J} s_k(\omega_i) \\ &=s_j(\omega_i)/[s_i(\omega_i)+\sum_{k\in J-\{i\}} s_k(\omega_i)] \\ &=\text{有限}/[\infty+\text{有限}]=0 \end{aligned} \tag{A5.102}$$

を得、axiom 2の（ｉ）（直交性）の成立が示された。

axiom 2の（ii）（規格化条件）の成立は、SM（φ, ω_j）の定義式（A5.97）から明らかである。

axiom 2の（iii）（T-不変性）の成立は、axiom 1,（iii）の後半 T·T＝T から明らかである。 □

付録6. 類似度関数 SM の構成原理 I

式（A2.5）の関数 SM が類似度関数と称されるためには、次のaxiom 2を満たさなければならないことに留意する。

Axiom 2 **（類似度関数 SM の満たすべき公理）**

（i）（**直交性**；orthogonality）

$\forall i, \forall j \in J, \mathrm{SM}(\omega_i, \omega_j) = \delta_{ij}.$

（ii）（**規格化条件，正規性**；probability condition, normality）

$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} \mathrm{SM}(\varphi, \omega_j) = 1.$

（iii）（写像 T の下での**不変性**；invariance under mapping T）

$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \mathrm{SM}(T\varphi, \omega_j) = \mathrm{SM}(\varphi, \omega_j).$ □

本章では、axiom 2を満たすように、式（A2.5）の類似度関数 SM を構成する（定理A6.1）。同時に、定理A6.1を適用できる諸例を明らかにする。

$$T \cdot \Omega \equiv \{T\omega_j \mid j \in J\} \text{ が1次独立である} \qquad (A6.1)$$

ように選定されているとする。

A6.1 関数 $f(\cdot, \omega_j)$ を用いた類似度関数 SM の構成原理

3条件

①$\forall j \in J, f(\omega_j, \omega_j) > d_j \equiv \max_{i \in J - \{j\}} f(\omega_i, \omega_j)$

②$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, f(T\varphi, \omega_j) = f(\varphi, \omega_j)$

③$d_j > e_j \equiv \min_{i \in J - \{j\}} f(\omega_i, \omega_j)$

を満たすように、実数値関数 f の系

$$f(\cdot, \omega_j): \Phi \to R \text{（実数全体の集合）}, \ j \in J \qquad (A6.2)$$

を導入する。

その後、

$$S(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} 0 & \cdots f(\varphi, \omega_j) \leqq d_j \text{ のとき} \\ [f(\varphi, \omega_j) - e_j] / [d_j - e_j] & \\ & \cdots f(\varphi, \omega_j) > d_j \text{ のとき} \end{cases} \qquad (A6.3)$$

と定義された $S(\varphi, \omega_j)$ を用いて、$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_j)$ を

$$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} S(\varphi, \omega_j) / \sum_{i \in J} S(\varphi, \omega_i) & \\ & \cdots \sum_{i \in J} S(\varphi, \omega_i) > 0 \text{ のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j) & \cdots \sum_{i \in J} S(\varphi, \omega_i) = 0 \text{ のとき} \end{cases} \qquad (A6.4)$$

と定義する。$p(\mathfrak{C}_j)$ は第$j \in J$番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の生起確率である［12］，［13］。

条件③より、

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, S(\varphi, \omega_j) \geqq 0 \qquad (A6.5)$$

が成立している。

次の定理A6.1は、関数 SM が直交性の他に、規格化条件、写像 T の下での不変性を備え、上述のaxiom 2を満たすための構成原理を指摘している。

［定理A6.1］**（類似度関数 SM の構成原理 I）**

式（A6.4）の如く構成されている式（A2.5）の関数SMは、axiom 2を満たす。

（証明）axiom 2の（i），（ii），（iii）の成立を示す。

axiom 2の（i）を示す。

任意に固定した $j \in J$ につき、任意の $i \in J-\{i\}$ を選ぶ。先ず、

（一）$\varphi=\omega_i$ のとき、条件①より、

$f(\varphi,\omega_j) \leqq d_j \quad \therefore \quad S(\varphi,\omega_j)=0$

（二）$\varphi=\omega_j$ のとき、2条件①，③より、

$f(\varphi,\omega_j) > d_j \quad \therefore \quad S(\varphi,\omega_j)>0$

に注意し、

（三）$\varphi=\omega_i$ のとき、

$SM(\varphi,\omega_j)=0/\sum_{k\in J} S(\varphi,\omega_k)=0$

（四）$\varphi=\omega_j$ のとき、

$SM(\varphi,\omega_j)=S(\varphi,\omega_j)/S(\varphi,\omega_j)=1$

が得られ、axiom 2の（i）の成立がわかった。

axiom 2の（ii）の成立は、SM の定義式（A6.4）より明らかである。

axiom 2の（iii）の成立は、条件②より明らかである。 □

A6.2 定理A6.1の適用3例

［**適用例1**］（規格化内積に基づく類似度関数 SM）

任意の $\varphi \in \Phi$，任意の $j \in J$ につき、$(T\varphi, T\omega_j)$ が実数値であるとする。分離条件

$$\forall j \in J, \forall i \in J-\{i\}, \| T\omega_i - T\omega_j \| > 0 \tag{A6.6}$$

の下で、$f(\varphi,\omega_j)$ を、

$$f(\varphi,\omega_j) \equiv \begin{cases} (T\varphi, T\omega_j)/[\,\|T\varphi\|\cdot\|T\omega_j\|\,] \\ \qquad \cdots \|T\varphi\|\cdot\|T\omega_j\| > 0 \text{ のとき} \\ 0 \quad \cdots \|T\varphi\|\cdot\|T\omega_j\| = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{A6.7}$$

と選ぶと、

$$f(\omega_j,\omega_j)=1 > \min_{i\in J-\{j\}} f(\omega_i,\omega_j) \tag{A6.8}$$

を得、条件①が満たされている。

条件②の成立は、axiom 1の（iii）の後半（T のべき等性）を考慮すれば、明らかである。

条件③の成立は、式（A6.1）を考慮すれば、明らかである。 □

［**適用例2**］（ノルム距離に基づく類似度関数 SM）

分離条件式（A6.6）の下で、$f(\varphi,\omega_j)$ を、

$$f(\varphi,\omega_j) \equiv \begin{cases} 1-\|T\varphi - T\omega_j\|/\max_{k\in J}\|T\varphi - T\omega_k\| \\ \qquad \cdots \max_{k\in J}\|T\varphi - T\omega_k\| > 0 \text{ のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \max_{k\in J}\|T\varphi - T\omega_k\| = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{A6.9}$$

と選ぶと、

$$f(\omega_j,\ \omega_j)=1>\max_{i\in J-\{j\}} f(\omega_i,\ \omega_j) \tag{A6.10}$$

を得、条件①が満たされている。

条件②の成立は、axiom 1の（iii）の後半（Tのべき等性）を考慮すれば、明らかである。

条件③の成立は、式（A6.1）を考慮すれば、明らかである。 □

［**適用例3**］（抽出された特徴量の2次形式に基づく類似度関数SM）

任意の$k,\ \ell\in L$につき実数値である$W_{k\ell}$は対称であり、

任意の$k,\ \ell\in L$につき、$W_{k\ell}=W_{\ell k}$ (A6.11)

が成立しているとしよう。

特徴抽出写像

$u:\Phi\times L\rightarrow R$（実数全体の集合） (A6.12)

を用いて、非負実数値条件

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall j\in J,\ Q(\varphi,\ \omega_j)\geqq 0 \tag{A6.13}$$

を満たすように、2次形式

$$Q(\varphi,\ \omega_j) =\sum_{k\in L}\sum_{\ell\in L} W_{k\ell}\cdot[u(T\varphi, k)-u(T\omega_j, k)]\cdot [u(T\varphi,\ \ell)-u(T\omega_j,\ \ell)] \tag{A6.14}$$

を定義する。3条件

（イ）分離条件

$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{i\},$

$\exists\ \ell\in L, u(T\omega_i,\ \ell)\neq u(T\omega_j,\ \ell)$

（ロ）$T\cdot\Omega\equiv\{T\omega_j\mid j\in J\}$の正数値条件

$\forall j\in J, \max_{k\in J} Q(\omega_k,\ \omega_j)>0$

（ハ）$\forall j\in J,$

$$\max_{i\in J-\{j\}}[Q(\omega_i,\ \omega_j)/\max_{k\in J} Q(\omega_i,\ \omega_k)] >\min_{i\in J-\{j\}}[Q(\omega_i,\ \omega_j)/\max_{k\in J} Q(\omega_i,\ \omega_k)]$$

の下で、$f(\varphi,\ \omega_j)$を、

$$f(\varphi,\ \omega_j)\equiv \begin{cases} 1-Q(\varphi,\ \omega_j)/\max_{k\in J} Q(\varphi,\ \omega_k) \\ \qquad\cdots \max_{k\in J} Q(\varphi,\ \omega_k)>0 \text{のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j)\cdots \max_{k\in J} Q(\varphi,\ \omega_k)=0 \text{のとき} \end{cases} \tag{A6.15}$$

と選ぶと、

$$Q(\omega_j,\ \omega_j)=0 \tag{A6.16}$$

$$\therefore\quad f(\omega_j,\ \omega_j)=1>\max_{i\in J-\{j\}} f(\omega_i,\ \omega_j) \tag{A6.17}$$

を得、条件①が満たされている。

条件②の成立は、axiom 1の（iii）の後半（Tのべき等性）を考慮すれば、明らかである。

条件③の成立は、（ハ）より、

$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},\ \min_{i\in J-\{j\}} f(\omega_i,\ \omega_j)$

$$=1-\max_{i\in J-\{j\}}\ [Q(\omega_i,\ \omega_j)/\max_{k\in J} Q(\omega_i,\ \omega_k)]$$
$$<1-\min_{i\in J-\{j\}}\ [Q(\omega_i,\ \omega_j)/\max_{k\in J} Q(\omega_i,\ \omega_k)]$$
$$=\max_{i\in J-\{j\}} f(\omega_i,\ \omega_j) \tag{A6.17}$$

を得、条件③の成立がわかる。 □

付録7．類似度関数 SM の構成原理Ⅱ，Ⅲ

本章では、特徴量の組 $\underline{u}(T\varphi)$ の関数 $f_j(\underline{u}(T\varphi))$ の系を利用して、axiom 2を満たす類似度関数 SM を構成する手法が説明され、その適用例があげられる（A7.2，A7.4両節）。

先ず、$f_j(\underline{u}(T\varphi))$ がカテゴリ番号変数 $j\in J$ に依存しない場合が説明され（A7.1節）、その後、依存する場合が説明される（A7.3節）。

ニューラルネット理論における“力学系としてのホップフィールド形ネットの時間的発展場面でのエネルギー減少定理［11］～［13］”に対応した**“SS理論におけるカテゴリ帰属知識に関する多段階認識過程におけるポテンシャル減少性（文献［13］の第8章などを参照）”**を保証する類似度関数 SM の構成が、2定理7.1，7.2で研究されている。

A7.1　共通の関数 f を用いる場合

本節では、特徴量の組 $\underline{u}(T\varphi)$ の、カテゴリ番号変数 $j\in J$ に依存しない関数 $f(\underline{u}(T\varphi))$ の系を利用して、axiom 2を満たす類似度関数 SM を構成する原理が指摘される（定理A7.2）。

特徴抽出写像

$$u: \Phi\times L\rightarrow R\ (\text{実数全体の集合}) \tag{A7.1}$$

を導入する。$u(\varphi,\ell)\in R$ はパターン $\varphi\in\Phi$ から抽出された第 $\ell\in L$ 番目の特徴量である。パターン $\varphi\in\Phi$ から抽出された特徴量の組 $\underline{u}(\varphi)$ は、

$$\underline{u}(\varphi)=\mathrm{col}\,(u(\varphi,1)\ u(\varphi,2)\ \cdots\ u(\varphi,n))\qquad(\text{列ベクトル}) \tag{A7.2}$$
$$\text{where } L=\{1,2,\cdots,n\} \tag{A7.3}$$

と表される。

実変数ベクトル

$$\underline{x}=\mathrm{col}\,(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n) \tag{A7.4}$$

の関数

$$f(\underline{x}): R^{|L|}\rightarrow R \tag{A7.5}$$

は、次の条件c1を満たすとしよう。

［条件c1］

$\underline{x}=\underline{u}(T\omega_j)$ で $f(\underline{x})$ は値 b_j をとる

ものとし、

$$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\}\ \ b_i\neq b_j. \tag{A7.6}$$

□

代表パターン集合

$$\Omega\equiv\{\omega_j\mid j\in J\} \tag{A7.7}$$

から得られるモデル集合

$$T\cdot\Omega \equiv \{T\omega_j \mid j \in J\} \tag{A7.8}$$

から抽出される特徴量の組の集合

$$\underline{u}(T\omega_j),\ j \in J \tag{A7.9}$$

について、非一致条件

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J-\{j\},\ \exists\, \ell \in L,$$
$$u(T\omega_i,\ \ell) \neq u(T\omega_j,\ \ell) \tag{A7.10}$$

は、条件c1の成立のために通常、必要とされるだろう。

［定理A7.1］**（類似度関数 SM の構成原理Ⅱ）**

正実数 $a_j > 0$ の組

$$a_j,\ j \in J \tag{A7.11}$$

を選定・固定する。

条件 c1 の下で、

$$\begin{aligned} &SM(\varphi,\ \omega_j) \\ &= \exp\left[a_j^{-1}\cdot\{f(\underline{u}(T\varphi)) - b_j\}^{-2}\right] \\ &/ \sum_{i\in J} \exp\left[a_i^{-1}\cdot\{f(\underline{u}(T\varphi)) - b_i\}^{-2}\right] \end{aligned} \tag{A7.12}$$

と定義される関数

$$SM:\ \Phi\times\Omega \to \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \tag{A7.13}$$

は、付録6のaxiom 2を満たす。

（証明）axiom 2の（ i ），（ii），（iii）の成立を示す。

$$f(\underline{u}(T\omega_i)) - b_j = \begin{cases} b_i - b_j \neq 0 & \text{if } i \neq j \quad \because\ \text{条件c1の式（A7.6）} \\ 0 & \text{if } i = j \end{cases} \tag{A7.14}$$

であるから、

$$s_{ij} \equiv \exp\left[a_j^{-1}\cdot\{f(u(T\omega_i)) - b_j\}^{-2}\right] = \begin{cases} \exp\left[a_j^{-1}\cdot\{b_i - b_j\}^{-2}\right] > 0 & \text{if } i \neq j \\ \infty & \text{if } i = j \end{cases} \tag{A7.15}$$

である。よって、

①$SM(\omega_j,\ \omega_j) = 1/\left[1 + \sum_{k\in J-\{j\}} s_{jk}/s_{jj}\right] = 1$

②$i \neq j$ のとき

$SM(\omega_i,\ \omega_j) = s_{ij}/\left[s_{ii} + \sum_{k\in J-\{i\}} s_{ik}\right] = 0$

を得、axiom 2の（ i ）（直交性）の成立が示された。

axiom 2の（ii）（確率性；総和規格性）の成立はSMの定義式（A7.12）から明らかである。

axiom 2の（iii）の成立（T-不変性）はaxiom 1の（iii）の後半であるモデル構成作用素 Tのべき等性 TT＝Tから明らかである。 □

特に、条件c1における値 b_j は関数 $f(\underline{x})$ の極小値である場合が意味を持ってくるだろう。

A7.2 定理A7.1の適用例

本章では、定理A7.1を適用して、具体的に、axiom 2を満たす類似度関数SMが構成される。

［定理A7.1の適用例1］

2つの実数値列ベクトル

$\underline{a}=\mathrm{col}(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)$ （列ベクトル） (A7.16)

$\underline{b}=\mathrm{col}(b_1\ b_2\ \cdots\ b_n)$ (A7.17)

間の内積

$[\underline{a},\underline{b}]=\sum_{k\in L} a_k\cdot b_k$ (A7.18)

を定義する。集合Lは式（A7.3）で与えられている。　正値条件

$\forall j\in J,\ [\underline{u}(T\omega_j),\ \underline{u}(T\omega_j)]>0$ (A7.19)

の下で、3実定数 a_2, a_1, a_0 を選定･固定して、2次形式

$$
\begin{aligned}
&f(\underline{u}(T\varphi))\\
&=a_2\cdot[W\underline{u}(T\varphi),\ \underline{u}(T\varphi)]\\
&\quad +a_1\cdot[V,\underline{u}(T\varphi)]+a_0\\
&=a_2\cdot\sum_{k\in L} u(T\varphi,k)\cdot\sum_{\ell\in L} W_{k\ell}\\
&\quad \cdot u(T\varphi,\ \ell)+a_1\cdot\sum_{k\in L} V_k\cdot u(T\varphi,k)+a_0
\end{aligned}
\tag{A7.20}
$$

を考えよう。ここに、行列

$W=(\underline{W}_1\ \underline{W}_2\ \cdots\ \underline{W}_n)$

の各成分を、

$\underline{W}_\ell$

$=\mathrm{col}(W_{1\ell}\ W_{2\ell}\cdots W_{n\ell})$ （列ベクトル） (A7.21)

$W_{k\ell}$

$=\sum_{i\in J} p(\mathfrak{C}_i)\cdot u(T\omega_i,k)\cdot u(T\omega_i,\ \ell)$ (A7.22)

と設定し、列ベクトルVを、

$\underline{V}=\mathrm{col}(V_1\ V_2\ \cdots\ V_n)$ (A7.23)

$V_k=\sum_{i\in J} p(\mathfrak{C}_i)\cdot u(T\omega_i,k)$ (A7.24)

と設定する。

このとき、次の命題A7.1が成り立つ。

[命題A7.1]

$\forall j\in J,\ [W\underline{u}(T\omega_j),\underline{u}(T\omega_j)]$

$=\sum_{i\in J} p(\mathfrak{C}_i)\cdot[\underline{u}(T\omega_i),\ \underline{u}(T\omega_j)]^2.$

（証明）任意の $k\in L$ について、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\ell\in L} W_{k\ell}\cdot u\ (T\omega_j,\ \ell)\\
&=\sum_{\ell\in L}\Big[\sum_{i\in J} p(\mathfrak{C}_i)\cdot u(T\omega_i,k)\\
&\quad\cdot u(T\omega_i,\ \ell)\Big]\cdot u(T\omega_j,\ \ell)\qquad \because\ \text{式（A7.22）}\\
&=\sum_{i\in J} p(\mathfrak{C}_i)\cdot u(T\omega_i,k)\cdot\sum_{\ell\in L}\\
&\quad\cdot u(T\omega_i,\ \ell)]\cdot u(T\omega_j,\ \ell)\\
&=\sum_{i\in J} p(\mathfrak{C}_i)\cdot u(T\omega_i,k)\\
&\quad\cdot\ [\underline{u}(T\omega_i),\underline{u}(T\omega_j)]
\end{aligned}
$$

を得、

$$
\begin{aligned}
&[W\underline{u}(T\omega_j),\ \underline{u}(T\omega_j)]\\
&=\sum_{k\in L}\ \Big[\sum_{i\in J} p(\mathfrak{C}_i)\cdot u(T\omega_i,k)
\end{aligned}
$$

$\cdot\ [\underline{u}(T\omega_i),\ \underline{u}(T\omega_j)]] \cdot u(T\omega_j, k)$

$= \sum_{i \in J} p(\mathfrak{C}_i) \cdot [\underline{u}(T\omega_i),\ \underline{u}(T\omega_j)]$

$\cdot \sum_{k \in L} u(T\omega_i, k) \cdot u(T\omega_j, k)$

$= \sum_{i \in J} p(\mathfrak{C}_i) \cdot [\underline{u}(T\omega_i),\ \underline{u}(T\omega_j)]^2.$ □

[命題A7.2]

$\forall j \in J,\ [\underline{V}, \underline{u}(T\omega_j)]$

$= \sum_{i \in J} p(\mathfrak{C}_i) \cdot [\underline{u}(T\omega_i),\ \underline{u}(T\omega_j)].$

(証明)

$[\underline{V},\ \underline{u}(T\omega_j)]$

$= \sum_{k \in L} [\sum_{i \in J} p(\mathfrak{C}_i) \cdot u(T\omega_i, k)]$

$\cdot u(T\omega_j, k)$ ∵ 式 (A7.24)

$= \sum_{i \in J} p(\mathfrak{C}_i) \cdot \sum_{k \in L} u(T\omega_i, k) \cdot u(T\omega_j, k)$

$= \sum_{i \in J} p(\mathfrak{C}_i) \cdot [\underline{u}(T\omega_i),\ \underline{u}(T\omega_j)].$ □

[命題A7.3]

$\forall j \in J,\ f(\underline{u}(T\omega_j))$

$= \sum_{i \in J} p(\mathfrak{C}_i) \cdot [\underline{u}(T\omega_i),\ \underline{u}(T\omega_j)]$

$\cdot \{a_2 \cdot [\underline{u}(T\omega_i),\ \underline{u}(T\omega_j)] + a_1\} + a_0.$

(証明) 2命題A7.1, A7.2を式 (A7.20) の $f(\underline{u}(T\omega_j))$ に代入したものである。 □

上述の命題A7.3から、3実定数 a_2, a_1, a_0 の適切な選定の下で、条件c1は容易に満たされることがわかる。

[定理A7.1を適用出来ない例2]

$$c_{ij} \equiv \sum_{\ell \in L} u(T\omega_i, \ell) \cdot u(T\omega_j, \ell) \tag{A7.25}$$

を第 i 行第 j 列の要素とする行列 $C = (c_{ij})$ を考え、C の逆行列 C^{-1} の要素を $(C^{-1})_{ij}$ と表す。ここに、式 (A7.7) の代表パターン集合 Ω の、式 (A7.8) のモデル集合 T・Ω から抽出される特徴量の組の集合

$$\underline{u}(T\omega_j),\ j \in J \tag{A7.26}$$

は1次独立な系であるとすれば、C^{-1} は存在することがわかる。このとき、行列 W の成分 $W_{k\ell}$ を

$$W_{k\ell} = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} u(T\omega_i, k) \cdot (C^{-1})_{ij} \cdot u(T\omega_j, \ell) \tag{A7.27}$$

とおく。ここに、k, $\ell \in L$ である。

$$\begin{aligned} f(\underline{u}(T\varphi)) &\equiv -2^{-1} \cdot [W\underline{u}(T\varphi),\ \underline{u}(T\varphi)] \\ &\quad + 2^{-1} \cdot [\underline{u}(T\varphi),\ \underline{u}(T\varphi)] \\ &= -2^{-1} \cdot \sum_{k \in L} u(T\varphi, k) \cdot \sum_{\ell \in L} W_{k\ell} \cdot u(T\varphi, \ell) \\ &\quad + 2^{-1} \cdot \sum_{k \in L} u(T\varphi, k) \cdot u(T\varphi, k) \end{aligned} \tag{A7.28}$$

と、2次形式 $f(\underline{u}(T\varphi))$ を定義する。

$$\delta_{ij} = 1 \text{ if } i = j,\ = 0 \text{ if } i \neq j \tag{A7.29}$$

を導入しておく。

[命題A7.4]（不動点方程式）

$\forall j \in J, \forall k \in L,$

$\sum_{\ell \in L} W_{k\ell} \cdot u(T\omega_j, \ell) = u(T\omega_j, k)$

つまり、

$\forall j \in J, W\underline{u}(T\omega_j) = \underline{u}(T\omega_j).$

（証明）$\forall j \in J, \forall k \in L,$

$\sum_{\ell \in L} W_{k\ell} \cdot u(T\omega_j, \ell)$

$= \sum_{\ell \in L} [\sum_{i \in J} \sum_{q \in J} u(T\omega_i, k) \cdot (C^{-1})_{iq}$

$\cdot u(T\omega_q, \ell)] \cdot u(T\omega_j, \ell) \quad \because$ 式（A7.27）

$= \sum_{i \in J} \sum_{q \in J} u(T\omega_i, k) \cdot (C^{-1})_{iq}$

$\cdot \sum_{\ell \in L} u(T\omega_q, \ell) \cdot u(T\omega_j, \ell)$

$= \sum_{i \in J} \sum_{q \in J} u(T\omega_i, k) \cdot (C^{-1})_{iq} \cdot c_{qj}$

$\because$ 式（A7.25）

$= \sum_{i \in J} u(T\omega_i, k) \cdot \sum_{q \in J} (C^{-1})_{iq} \cdot c_{qj}$

$= \sum_{i \in J} u(T\omega_i, k) \cdot \delta_{ij} \quad \because$ 逆行列の定義

$= u(T\omega_j, k).$ □

[命題A7.5]（関数fの、$\underline{x} = \underline{u}(T\omega_j)$ における値）

$\forall j \in J, f(\underline{u}(T\omega_j)) = 0.$

（証明）

$f(\underline{u}(T\omega_j))$

$\equiv -2^{-1} \cdot [W\underline{u}(T\omega_j), \underline{u}(T\omega_j)]$

$+2^{-1} \cdot [\underline{u}(T\omega_j), \underline{u}(T\omega_j)]$

$= -2^{-1} \cdot [\underline{u}(T\omega_j), \underline{u}(T\omega_j)] \quad \because$ 命題A7.4

$+2^{-1} \cdot [\underline{u}(T\omega_j), \underline{u}(T\omega_j)]$

$= 0.$ □

上述の命題A7.5は条件C1が成立しないことを明らかにしており、従って、式（A7.28）のfの代わりに次の式（A7.30）の形式のfを少なくとも採用しなければならない。

$f(\underline{u}(T\varphi))$

$$\equiv [W\underline{u}(T\varphi), \underline{u}(T\varphi)] + [\underline{V}, \underline{u}(T\varphi)] + c \tag{A7.30}$$

□

A7.3 共通の関数fを用いない場合

本節では、特徴量の組 $\underline{u}(T\varphi)$ の、カテゴリ番号変数 $j \in J$ に依存する関数 $f_j(\underline{u}(T\varphi))$ の系を利用して、axiom 2を満たす類似度関数SMを構成する原理が指摘される（定理A7.2）。

式（A7.1）の特徴抽出写像uを導入し、式（A7.4）の実変数ベクトル$\underline{x}$の関数$f_j(\underline{x})$は、次の条件c2を満たすものとしよう。

[条件c2]

$\underline{x} = \underline{u}(T\omega_j)$ で $f_j(\underline{x})$ は値 b_j をとる

ものとし、

$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}, f_j(\underline{u}(T\omega_i)) \neq b_j.$ (A7.31)

□

代表パターン集合 Ω のモデル T·Ω から抽出される特徴量の組の、式（A7.9）の集合 $\underline{u}(T\omega_j)$, $j \in J$ について、非一致条件式（A7.10）は、条件c2の成立のために必要とされるだろう。

［定理A7.2］**（類似度関数 SM の構成原理Ⅲ）**

正実数 $a_j > 0$ の、式（A7.11）の組 $a_j, j \in J$ を選定·固定する。

条件式 c2 の下で、

$$SM(\varphi, \omega_j) = \exp[a_j^{-1}\{f_j(\underline{u}(T\varphi)) - b_j\}^{-2}] / \sum_{i \in J} \exp[a_i^{-1}\{f_i(\underline{u}(T\varphi)) - b_i\}^{-2}] \quad \text{(A7.32)}$$

と定義される式（A7.13）の関数SMは、付録6のaxiom 2を満たす。

（証明）axiom 2の（ i ），（ii），（iii）の成立を示す。

$$f_j(\underline{u}(T\omega_i)) - b_j \begin{cases} \neq 0 & \text{if } i \neq j \quad \because \text{ 条件c2の式（A7.31）} \\ = 0 & \text{if } i = j \end{cases} \quad \text{(A7.33)}$$

であるから、

$$s_{ij} \equiv \exp[a_j^{-1} \cdot \{f_j(\underline{u}(T\omega_i)) - b_j\}^{-2}] \begin{cases} \neq \infty & \text{if } i \neq j \\ = \infty & \text{if } i = j \end{cases} \quad \text{(A7.34)}$$

である。よって、

①$SM(\omega_j, \omega_j) = 1/[1 + \sum_{k \in J-\{j\}} s_{jk}/s_{jj}] = 1$

②$i \neq j$ のとき

$SM(\omega_i, \omega_j) = s_{ij}/[s_{ii} + \sum_{k \in J-\{i\}} s_{ik}] = 0$

を得、axiom 2の（ i ）（直交性）の成立が示された。

axiom 2の（ii）（確率性；総和規格性）の成立は SM の定義式（A7.32）から明らかである。

axiom 2の（iii）の成立（T-不変性）はaxiom 1の（iii）の後半であるモデル構成作用素 Tのべき等性 TT＝Tから明らかである。 □

特に、条件c2における値 b_j は関数 $f_j(\underline{x})$ の極小値である場合が意味を持ってくるだろう。

A7.4　定理A7.2の適用例

本章では、定理A7.2を適用して、具体的に、axiom 2を満たす類似度関数 SM が構成される。

［定理A7.2の適用例1］

2つの、式（A7.16），（A7.17）の列ベクトル a，b 間の、式（A7.18）の内積［a，b］を定義する。式（A7.19）の正値条件式の下で、2次形式

$$\begin{aligned} f_j(\underline{u}(T\varphi)) &= [W(j)\underline{u}(T\varphi), \underline{u}(T\varphi)] - [V(j), \underline{u}(T\varphi)] + d(j) \\ &= \sum_{k \in L} u(T\varphi, k) \cdot \sum_{\ell \in L} W_{k\ell}(j) \cdot u(T\varphi, \ell) - \sum_{k \in L} V_k(j) \cdot u(T\varphi, k) + d(j) \end{aligned} \quad \text{(A7.35)}$$

を考えよう。ここに、行列

$$w(j)=(\underline{w_1}(j)\ \underline{w_2}(j)\ \cdots\ \underline{w_n}(j)) \quad \text{(A7.36)}$$

の各成分 $\underline{w_\ell}(j)$ は、

$$\underline{w_\ell}(j)$$
$$=\mathrm{col}(W_{1\ell}(j)\ W_{2\ell}(j)\ \cdots W_{n\ell}(j))\ \text{(列ベクトル)} \quad \text{(A7.37)}$$
$$W_{k\ell}(j)$$
$$=u(T\omega_j,k)\cdot u(T\omega_j,\ell)/[\underline{u}(T\omega_j),\ \underline{u}(T\omega_j)] \quad \text{(A7.38)}$$

と設定し、$V(j)$ は、

$$\underline{V}(j)=\mathrm{col}(V_1(j)\ V_2(j)\ \cdots\ V_n(j)) \quad \text{(A7.39)}$$
$$V_k(j)=u(T\omega_j,k) \quad \text{(A7.40)}$$

と設定し、$d(j)$ は、

$$d(j)=\text{実定数} \quad \text{(A7.41)}$$

と設定するものとする。このとき、次の命題A7.6が成り立つ。

[命題A7.6]（不動点方程式）

$\forall j\in J, w(j)\ \underline{u}(T\omega_j)=\underline{u}(T\omega_j).$

（証明）任意の $k\in L$ について、

$$\sum_{\ell\in L} W_{k\ell}(j)\cdot u(T\omega_j,\ell)$$
$$=\sum_{\ell\in L}\{u(T\omega_j,k)\cdot u(T\omega_j,\ell)$$
$$/[\underline{u}(T\omega_j),\ \underline{u}(T\omega_j)]\}\cdot u(T\omega_j,\ell)$$
$$=u(T\omega_j,k)\cdot[\underline{u}(T\omega_j),\ \underline{u}(T\omega_j)]$$
$$/[\underline{u}(T\omega_j),\ \underline{u}(T\omega_j)]$$
$$=u(T\omega_j,k).$$

□

[命題A7.7]

$\forall j\in J, f_j(\underline{u}(T\omega_j))=d(j).$

（証明）

$$f_j(\underline{u}(T\omega_j))$$
$$=[W(j)\underline{u}(T\omega_j),\ \underline{u}(T\omega_j)]$$
$$-[\underline{V}(j),\ \underline{u}(T\omega_j)]+d(j)$$
$$=[\underline{u}(T\omega_j),\ \underline{u}(T\omega_j)]-[\underline{u}(T\omega_j),\ \underline{u}(T\omega_j)]$$
$$+d(j)$$

∵　命題A7.6，2式（A7.39)，（A7.40)

$$=d(j)$$

□

上述の命題A7.7を考慮すれば、

$$\forall j\in J,\ d(j)=b_j \quad \text{(A7.42)}$$

であることがわかり、条件c2は、

$$\forall j\in J, \forall i\in J-\{j\}, f_j(\underline{u}(T\omega_i))\neq d(j) \quad \text{(A7.43)}$$

のとき満たされていることがわかる。 □

（鈴木昇一，文教大学・情報学部・情報システム学科，“文教大学・情報学部・情報研究 no.22”投稿論文，論文題目認識行為に向けての、効用最大化原理，投稿年月日　1999年 8月 3日（木））