

# 界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の、 顔画像処理に関する計算機シミュレーション

鈴木 昇一

## Facial Image Processing by Using Model-Construction Operator Based Upon Decrease of Boundary-Surface Energy, and Its Computer Simulation

Shoichi Suzuki

### あらまし

パターン認識の数学的理論 (SS理論) では、次のように、認識システムの持っているカテゴリ  
帰属知識に関する多段階パターン連想法 (不動点連想形多段階認識法) が考えられている: (1)  
まず、処理の対象とする問題の入力パターン  $\varphi$  に対応するパターンモデル  $T\varphi$  を求める。(2) そ  
の後、 $T\varphi$  から “現在の認識段階で確保されているカテゴリ帰属知識を変換する機能を備えた構  
造受精変換” の不動点パターンモデルを連想形認識方程式を得く形式で多段階にわたって連想す  
る。(3) こうして得られた不動点パターンモデルは、極端に変形していた入力パターン  $\varphi$  の場合  
を除いて、ある1つのカテゴリの代表パターンのモデルに近い構造に変換され得られているから、  
入力パターン  $\varphi$  の帰属するカテゴリを容易に決定することができる。 □

濃淡値パターン (画像) の、濃淡値に急激な変化がある画素をつなげたものがセル境界を形成  
すると考えると、例えば、顔画像は、それらの境界が不規則な網目構造になっている多結晶にお  
ける結晶粒系などが持つセル構造 (画素同士の連結構造) を持っている。

セル境界 (界面) での不整合エネルギーを小さくするように、セル構造が平衡状態へと変化し  
て行く自然界での事実が説明可能なセルの運動方程式 (ポテンシャルエネルギーに関する最急降  
下方程式) が知られている。平衡状態へのこの種の変化を、顔画像の各成分 (目、鼻、口、耳、  
眉毛、髪、顔輪郭など) が安定な表情を与える成分へと変わってゆく有様と捉えてみよう。本論  
文では、顔画像  $\varphi$  から特定の表情を取り除いたモデル  $T\varphi$  を決定する前哨戦を想定し、平衡状態  
への変化をC言語で書かれたプログラムによる計算機シミュレーションで求めている。結果は期  
待したほど良くないが、引き続き研究する価値が見いだされた。

### キーワード

パターン認識の数学的理論    モデル構成作用素    多段階パターン変換    界面エネルギー  
セルの運動方程式    顔画像成分    不動点連想形認識

## Abstract

In a mathematical theory of recognizing patterns called SS-theory, a pattern  $\varphi$  in question is processed using a multi-stage associative method of patterns (a multi-stage associative recognition of fixed-point type):

(1) In the first place a corresponding model  $T\varphi$  of  $\varphi$  is determined. (2) Secondly a fixed-point pattern-model of multi-stage structural fertilization transformations about categorical membership knowledges which may be a corresponding typical pattern-model of a category is associated with  $T\varphi$ . (3) Thirdly a category to which  $\varphi$  belongs is determined taking account of the associated fixed-point pattern-model.

□

Connected pixels having sudden changes in the gray-level amplitudes are considered a boundary.

A boundary-surface energy in a crystal becomes less spontaneously in nature. As a natural result a structure of cells are turning into a state of perfect balance called an equilibrium.

We can define a boundary-surface energy of a facial image. Changes of facial images  $\varphi$  to its model  $T\varphi$  which may exhibit a stable expression are calculated by a personal-computer program. The obtained results of computer simulation are not necessarily satisfying expectations. We must make research for furthermore computer simulations.

**Key words** : mathematical theory of recognizing patterns      model-construction operator  
multi-stage pattern transformation      boundary-surface energy      equation of motion about particles  
necessary parts of a facial image      associative recognition of fixed-point type

## 1. まえがき

印刷文字パターン、手書き文字パターンを2値化する技術の確保はパターン認識研究の初期から現在に至るまで、続けられている。また、文字パターンからその構成各成分を抽出する技術も、懸案の課題であり続けている。各種の情報の電子デジタル化がなされる**マルチメディア情報化社会**に突入した現在、文字パターンから、文書、図面、顔画像、人物画像、漫画、ジェスチャ画像、物体画像、風景画像、距離画像、静止芸術作品画像、動画像、言語音声、会話音声、歌声、音楽などの、属性の異なる各種パターンの、計算機による**統合的理解・知能処理**に移行しつつある。本研究では、**SS理論** [C1] ~ [C7] を適用し顔画像の認識技術を確保することを目指し、その基盤に関連した計算機シミュレーション結果が報告される。

顔画像 $\varphi$ を2値化する手法、並びに、その目、鼻、口を抽出する手法が共にパターンモデル  $T\varphi$  を求める形で提案され、その計算機シミュレーション結果が既に、報告されている [C28]。本研究ではこの後続に属する計算機シミュレーション結果が説明される。計算機シミュレーションを介して、SS理論 [C1] ~ [C5] のaxiom 1 を満たす対  $[\Phi, T]$  の具体化効果を確認することになる：

**パターン認識の数学的理論** [C6] (SS理論) を計算機による顔画像処理に適用することを考えよう。

パターンモデル  $T\varphi$  を見たり、聞いたりしたならば、原パターン $\varphi$ のように知覚される

ためには、処理の対象とするパターン $\varphi$ の集合 $\Phi$ と、写像(モデル構成作用素) $T$ との対 $[\Phi, T]$ がSS理論のaxiom 1を満たす必要がある、というのが、SS理論[C1]~[C7]の主張である。このように、処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ はすべて、同一構造形式のパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ に変換されることにより、写像 $T$ の備わっているパターン再現機能が働き、 $\varphi \in \Phi$ のカテゴリ内変形は可能な限り吸収され、カテゴリ間変形は可能な限り拡大されることが期待されている。

$T\varphi \in \{0, 1\}$ であるような2値化パターンとしてのパターンモデル $T\varphi$ には、 $\varphi$ の輪郭形状、構造などが明らかになっているという意味での価値がある。

SS理論は、このようなパターンモデル $T\varphi$ を恰も、原パターン $\varphi$ と錯覚し、構造受精変換を多段階適用し、カテゴリ帰属知識の不動点知識を連想形認識方程式を解くことにより求めるという“不動点探索形構造受精多段階変換に基づく認識の働き(カテゴリ帰属知識に関する不動点多段階連想法)”を提案しており、この認識の働きがありとあらゆる“入力パターンのカテゴリ決定を行うパターン認識の働き”をシミュレートできることが証明されており[C3]、本研究はその1部のモデル構成作用素 $T$ に関する理論的成果の1側面を計算機シミュレーションし、その検討を多少行ったものである(具体化効果)。□

相手と距離をおくことによって初めて本音で話ができることがある。人は証明書、感情・心の窓、コミュニケーションメディアなどとしての顔を隠すことによって、通常では考えられない行動に駆り立てられ、顔を見せないことが、むしろコミュニケーションを促進させることがある。

相手の顔からその人の性別、年齢、職業、性格、血縁、人種などについて何らかの情報を受け取るけれども、マルチメディア社会の到来は顔を隠してコミュニケーションを行う匿顔の社会を積極的に提供することになった。にもかかわらず、コミュニケーションメディアとしての顔の画像計算機処理はマルチメディア情報学から眺めて確保しなければならない基幹技術の1つである。

顔はその表情に暗示的な情報を含む感性的な対象である。1999年末に「日本感性工学会」が設立されるなど、近頃台頭してきた“感性工学”では、顔表情を数値の組の形式で抽出し、各種表情を画像の形で再合成したり、顔のどの部分がある人らしさを決めるのに重要な役割を果たしているかを決定したりする顔画像の計算機処理が問題になっている。米国の心理学グループが開発したFACS(Facial Action Coding System)は顔の筋肉の働きに基づいて顔画像の表情を記述するものであり、人間の任意の表情を44通りの基本動作の組み合わせで記述することを可能にしている[B5]。

濃淡値の急激な変化部分をつなげたものが境界と考え、画像(各小区画・各画素に濃淡があるような濃淡値パターン)は例えば、それらの境界が不規則な網目構造になっている多結晶における結晶粒系が持つセル構造(小粒・小区画の集合としての構造;画素同士の連結構造)を持っている。

多数の顔画像から特定の顔画像を検索し、特定の言語音声で応答するなどの機能を持つマルチメディア顔画像情報システムにおける検索技術を確保するためには、顔画像から特定の表情を取り除く処理が必要とされる。このような処理の1つとして、顔画像の画素結合構造での不整合界面エネルギーを減少させて表情を安定させることが考えられる。

自然界では、セル境界(界面)での不整合エネルギーを小さくするようにセル構造が平衡状態へと変化して行く。この種の変化を顔画像が安定な表情へと変わってゆく有様と捉え、顔画像 $\varphi$ のモデル $T\varphi$ を決定する前哨戦と想定し、本論文では、平衡状態への変化を計算機シミュレーションで求めている。

運動方程式の収束解を処理時間の関係上、求めていなくて、収束に至るその途中処理の変形画像を求めた。

顔画像を計算機処理する技術を確認する前段階として、顔部品（目、鼻、口、耳、眉）の抽出は顔画像の個人判別にとって基本的に必要であるが、この抽出法の計算機シミュレーション [C28] に引き続いて、単純化された顔部品をもつ2値化人工顔画像、並びに実際の顔画像の**界面エネルギーの減少を保証する各頂点（画素）の運動方程式の時間的发展**によって、

○特定の表情（驚き、恐怖、嫌悪、怒り、幸福、悲しみ； Surprise, Fear, Disgust, Anger, Happiness, Sadness）の顔画像を中立的な表情の顔画像、平常心の顔画像に変形するなどの、特定の表情を取り除く処理

○望ましい顔部品をもつ顔画像への変換処理

などを実現して見よう、というのが本研究の目的である。このような処理をSS理論 [C1] ~ [C4] のパターンモデルの形成という観点から捉えたことが、**新規性**である。

**パターン認識の数学的理論**（SS理論）では、入力パターン $\varphi$ に対応するパターンモデル $T\varphi$ を求め、 $T\varphi$ から不動点パターンモデルを連想する形で、 $\varphi$ の帰属するカテゴリを決定し、個人判別できるように多段階パターン変換連想法（**不動点連想形認識法**）が考えられている。ものの形を計算機で判別するというパターン認識技術としての不動点連想形認識法に結びつき、本研究の有効性が従う。SS公理系 [C3], [C4] は4つの公理axiom 1~4から成り立っており、その最初のaxiom 1を満たすモデル構成作用素 $T$ の構成につき、1つの知見が得られたことも指摘できる。

本研究の信頼性はシミュレーションによって保証される。

尚、これまでの、文献Cの諸研究に関連して、付録1~9が設けられている。

## 2. 界面エネルギーの減少と、モデル構成作用素

本章では、界面エネルギー（2つの画像点で定まる2つの位置ベクトルの先端をつなぐ辺の長さの総和）を最小にするように、濃淡画像（パターン）を変形してゆく画像の多段階変換が研究される。特に、濃淡画像についての、その離散近似式を導く。

### 2.1 パターンからパターンへの多段階変換

本節では、A9.1節の“任意のパターンから任意のパターンへの多段階変換”と同様な変換が式(2.4)のポテンシャル $V$ を持つ最急降下の微分方程式(2.5)で記述されることが説明され、次節で説明される多段階変換への理解を容易にしよう。

一般に、2つのパターン $\varphi$ ,  $\psi$ が与えられたとき、初期条件

$$\eta_i|_{t=0} = \varphi \quad (2.1)$$

の下で、 $a(t)$ は実数値変数 $t$ の十分小さい正の関数として、微分方程式

$$(d/dt)\eta_i = -a(t) \cdot [\eta_i - \psi], \quad 0 \leq t < +\infty \quad (2.2)$$

つまり、

$$(d/dt)\eta_i = a(t) \cdot [\psi - \eta_i] \quad (2.3)$$

を解けばよい。

ポテンシャル関数 $V(t)$ として、

$$V(t) = (1/2) \cdot [\eta_i - \psi]^2 \quad (2.4)$$



を選べば、方程式 (2.2) は

$$\left(\frac{d}{dt}\right) \eta_i = -a(t) \cdot [\partial V(t)/\partial \eta_i] \quad (2.5)$$

と表現され、ポテンシャル関数  $V(t)$  の、時刻変数  $t$  に関する微分係数の非正性

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt}\right) V(t) \\ &= [\partial V(t)/\partial \eta_i] \cdot [d\eta_i/dt] \\ &= -a(t) \cdot [\partial V(t)/\partial \eta_i]^2 \quad \because \text{式 (2.5)} \\ &\leq 0 \text{ for any } t \end{aligned} \quad (2.6)$$

が成立し、よって、ポテンシャル非増加性

$$t_1 < t_2 \Rightarrow V(t_1) \geq V(t_2) \quad (2.7)$$

が成立しており、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0 \quad (2.8)$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_i = \psi \quad (2.9)$$

が期待されるからである。

言い替えば、不等式 (2.6) が成立し、式 (2.4) の  $V=V(t)$  は微分方程式 (2.2), (2.3), (2.5) の解曲線の上で決して増加しないことがわかり、従って、この微分方程式 (2.2), (2.3), (2.5) を解き、十分時間が経過したときの  $\eta_i$  を求めれば、式 (2.4) の  $V=V(t)$  を最小にする  $\eta_i$  が得られる。

正関数  $a(t)$  は、2性質

$$t_1 < t_2 \Rightarrow a(t_1) \geq a(t_2) \quad (2.10)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0 \quad (2.11)$$

を満たしていることが望ましい。

このようにして、パターン  $\varphi$  からパターン  $\psi$  への多段階変換

$$\eta_i \Big|_{t=0} = \varphi \rightarrow \dots \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_i = \psi \quad (2.12)$$

が期待されることになる。

以上を離散化しよう。

初期条件式 (2.1) の下で、微分方程式 (2.3) の離散近似式は、

$$\begin{aligned} \eta_{i+1} &= \eta_i + b(t) \cdot [\psi - \eta_i] \\ , t &= 0, (\Delta t), 2 \cdot (\Delta t), \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

ということになる。ここに、 $b(t) = (\Delta t) \cdot a(t)$  は  $t$  を実変数とする十分小さい正の関数である。

パターン  $\varphi$  からパターン  $\psi$  への多段階変換

$$\begin{aligned} \eta_i \Big|_{t=0} &= \varphi \rightarrow \eta_{(\Delta t)} \rightarrow \eta_{2 \cdot (\Delta t)} \rightarrow \dots \\ &\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_{n \cdot (\Delta t)} = \psi \end{aligned}$$

が期待される。 (2.14)

## 2.2 処理の対象とする問題のパターン集合 $\Phi$ とモデル構成作用素 $T$ との対 $[\Phi, T]$

処理の対象とする問題のパターン  $\varphi$  の集合  $\Phi$  と、パターン  $\varphi \in \Phi$  が入力されたとき、そのパターンモデル  $T\varphi \in \Phi$  を出力するモデル構成作用素

$$T: \Phi \rightarrow \Phi \quad (2.15)$$

との対  $[\Phi, T]$  が、axiom 1 を満たすように構成される。パターンモデル  $T\varphi$  が原パターン  $\varphi$  と同じように見え、聞こえるような式 (2.15) の写像  $T$  を後半に持つ対  $[\Phi, T]$  が次の axiom 1 を満た

すように構成されるとき、式 (2.15) の写像  $T$  はモデル構成作用素 (model-construction operator) と呼ばれる [C3], [C4] :

**Axiom 1** (パターン集合  $\Phi$  とモデル構成作用素  $T$  との対  $[\Phi, T]$  の満たすべき公理)

(i) (零元の  $T$ -不動点性; fixed-point property of zero element under mapping  $T$ )  $0 \in \Phi \wedge T0 = 0$ .

(ii) (錐性, 正定数倍吸収性; cone property)

$$\forall \varphi \in \Phi, a \cdot \varphi \in \Phi \wedge T(a \cdot \varphi) = T\varphi$$

for any positive real number  $a$ .

(iii) (ベキ等性, 埋込性; idempotency, embeddedness)

$$\forall \varphi \in \Phi, T\varphi \in \Phi \wedge T(T\varphi) = T\varphi.$$

(iv) (写像  $T$  の非零写像性; non-zero mapping property of  $T$ )  $\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0$ . □

上述の axiom 1 を満たす対  $[\Phi, T]$  の構成が可能であることは、次の定理 2.1 で指摘される。

**[定理 2.1] (パターン集合  $\Phi$  とモデル構成作用素  $T$  との対  $[\Phi, T]$  の基本構成定理)**

写像  $T$  が axiom 1 の (i), (ii), (iii) の 3 後半, 並びに, (iv) を満たすとしよう。そして、パターンと判明している集合  $\Phi_B (\supset \{0\})$  が与えられたとしよう。ならば、処理の対象とする問題のパターンの集合  $\Phi$  を、

$$\Phi = R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B)$$

$$\equiv \{r^{++}\varphi \mid \varphi \in \Phi_B, r^{++} \in R^{++}\}$$

$$\cup \{r^{++}T\varphi \mid \varphi \in \Phi_B, r^{++} \in R^{++}\}$$

where  $R^{++}$  is a set of positive real numbers

(2.16)

の如く設定すれば、

$$\Phi \supset \{0\} \wedge a \cdot \Phi = \Phi \wedge [T \cdot \Phi = T \cdot \Phi_B \subset \Phi]$$

(2.17)

が成立し、axiom 1 の (i), (ii), (iii) の 3 前半を  $\Phi$  は満たし、結局、対  $[\Phi, T]$  は axiom 1 を満たす。

(証明) 文献 [C4] の 2.2 節、文献 [C4] の付録 1 の定理 A1.1 から、明らかである。 □

## 2.3 界面エネルギー $V$ の減少に伴う濃淡画像の変形

本節では、式 (2.37) のパターン  $\varphi(x)$  から式 (2.37) のパターン  $\varphi(y(t^*))$  への変形を与える座標変換 “ $x \rightarrow y(t^*)$ ” が式 (2.26) のポテンシャル  $V$  を持ち、初期条件式 (2.31) の最急降下微分方程式 (2.32) で記述され、結局、座標変換後の座標  $y(t^*)$  を使って、2式 (2.37), (2.38) での、axiom 1 を満たすパターンモデル  $T$  が得られることが説明される。

### 2.3.1 Dirac の超関数 $\delta$ を用いたパターン $\varphi$ の表現

原点から第  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  番目の頂点へ向かう位置ベクトル  $x_i = \langle x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^n \rangle \in R^n$  に質量  $a_i$  があるようなパターン  $\varphi(x)$  は、

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^m a_i \cdot \delta(x - x_i) \tag{2.18}$$

$$\text{where } x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in R^n \text{ (} n \text{次元実数値空間)} \tag{2.19}$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, a_i \geq 0 \tag{2.20}$$

と表される。Dirac の 1 次元超関数  $\delta$  は、

その台 (support)

$$\text{supp}(f) \equiv \{u \in R \mid f(u) \neq 0\} \text{ にその集積点を付加したもの} \tag{2.21}$$

が有界閉集合であるような任意の関数  $f = f(u)$  に対し、任意の実数  $a$  についての等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du f(u) \cdot \delta(u-a) = f(a) \quad (2.22)$$

を満たすものであり、 $n$  次元関数としての  $\delta(x-x_i)$  は、

$$\delta(x-x_i) = \prod_{k=1}^n \delta(x^k-x_i^k) \quad (2.23)$$

と表される。 $\delta(u)$  はガウス形関数を用いて、

$$\delta(u) = \lim_{v \rightarrow +0} [2\pi v]^{-1/2} \cdot \exp[-u^2/(2v)] \quad (2.24)$$

と近似できるから、式 (2.18) の  $\varphi = \varphi(x)$  は、

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lim_{v \rightarrow +0} \sum_{i=1}^m a_i \cdot \prod_{k=1}^n [2\pi v]^{-1/2} \cdot \exp[-(x_k-x_i^k)^2/(2v)] \end{aligned} \quad (2.25)$$

と表現される。

### 2.3.2 各頂点 $x_i$ の運動方程式

式 (2.18) のパターン  $\varphi$  に対し、頂点の移動に際して速度に比例する摩擦が働くとは仮定しよう。このとき、辺の長さの総和としての界面エネルギー

$$\begin{aligned} V &\equiv V(x_1, x_2, \dots, x_m; \varphi) \\ &\equiv \sigma \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_i \cdot a_j \cdot |x_i - x_j| \cdot (1/2) \end{aligned} \quad (2.26)$$

が減少すると、考えよう。ここに、

$$|x_i - x_j|^2 = \sum_{k=1}^n [x_i^k - x_j^k]^2 \quad (2.27)$$

$$\sigma (> 0) : \text{セル境界の界面張力係数} \quad (2.28)$$

である。頂点  $x_i$  の有効な重み  $a_i$  の添字の部分集合

$$m^+(\varphi) \equiv \{i \in \{1, 2, \dots, m\} \mid a_i > 0\} \quad (2.29)$$

を導入すれば、式 (2.18) のパターン  $\varphi$  は、

$$\varphi(x) = \sum_{i \in m^+(\varphi)} a_i \cdot \delta(x-x_i) \quad (2.30)$$

と再表現され、各位置  $x_i$  ( $i \in m^+(\varphi)$ ) に正なる質量  $a_i$  が存在するパターンがこの  $\varphi$  ということになる。

式 (2.26) の界面エネルギー  $V$  を減少するように、各頂点  $x_i$  ( $i \in m^+(\varphi)$ ) が運動するものとすれば、**最急降下法** (method of steepest descent) の適用によって、各頂点  $x_i$  ( $i \in m^+(\varphi)$ ) の運動方程式 (勾配力学での最急降下方程式)

初期条件

$$\begin{aligned} y_i^k(t) \big|_{t=0} &= x_i^k, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}, \\ &\quad k \in \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned} \quad (2.31)$$

の下で、

$$\begin{aligned} b \cdot (d/dt) y_i^k(t) &= -(\partial/\partial y_i^k(t)) V(y_1(t), y_2(t), \dots, \\ &\quad y_m(t)), \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}, \\ &\quad k \in \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned} \quad (2.32)$$

が得られる。ここに、

$$b (> 0) : \text{頂点の易動度 (動摩擦係数の逆数)} \quad (2.33)$$

である。

このとき、 $V$  は各  $x_i$  を介して時間  $t$  の関数となるが、その時間変動は、

$$\begin{aligned} & (d/dt) V(y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n [\partial V(y_1(t), y_2(t), \dots, \\ & \quad y_m(t))/\partial y_i^k(t)] \cdot [dy_i^k(t)/dt] \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n [\partial V(y_1, y_2, \dots, y_m)/\partial y_i^k] \cdot \\ & \quad (-1/b) \cdot [\partial V(y_1, y_2, \dots, y_m)/\partial y_i^k] \\ & \quad \therefore \text{式(A10.32)} \end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\leq 0 \tag{2.35}$$

となり (文献 [A1], 6.2節, b.セル構造の動力学での式 (6.13) を参照)、 $V$  は微分方程式 (2.32) の解曲線の上で決して増加しないことがわかる。従って、この微分方程式 (2.32) を解き十分時間が経過したときの、

$$\begin{aligned} y(t^*) &= y(t^*; \varphi) \\ &= \langle y_1(t^*; \varphi), y_2(t^*; \varphi), \dots, y_m(t^*; \varphi) \rangle \end{aligned} \tag{2.36}$$

を求めれば、この  $y(t)$  が式 (2.26) の  $V$  を最小にし、式 (2.18) の  $\varphi(x)$  に代入して、

$$\varphi(y(t^*)) = \sum_{i=1}^m a_i \cdot \delta(x - y_i(t^*)) \tag{2.37}$$

が求めようとした“界面エネルギー  $V$  の最小を与えるパターン”である。

### 2.3.3 パターンモデル $T\varphi$

次の定理2.2は、式 (2.37) のパターン  $\varphi(y(t^*))$  の正定数倍だけ異なるパターンが式 (2.18) のパターン  $\varphi(x)$  のモデルであることを指摘している。

[定理2.2] (界面エネルギー  $V$  の最小を与えるモデル構成作用素  $T$  の構成定理)

式 (2.18) のパターン  $\varphi = \varphi(x)$  に対し、

$$\begin{aligned} (T\varphi)(x) &= \\ & \begin{cases} 0 & \text{if } \sup_{i=1 \sim m} |a_i| = 0 \\ \sum_{i=1}^m [a_i / \sup_{i=1 \sim m} |a_i|] \cdot \delta(x - y_i(t)) & \\ & \text{if } \sup_{i=1 \sim m} |a_i| > 0 \end{cases} \\ & \text{for any } x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in R_n \end{aligned} \tag{2.38}$$

と定義される式 (2.5) の写像  $T$  について、処理の対象とする問題のパターン  $\varphi$  の集合  $\Phi$  を式 (2.16) の如く設定すれば、式 (2.17) が成立し、axiom 1の (i), (ii), (iii) の3前半を  $\Phi$  は満たし、対  $[\Phi, T]$  はaxiom 1を満たす。

(証明) 定理2.1から、写像  $T$  がaxiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半、並びに、(iv) を満たすことを示せば、本定理2.2が成り立つことがわかる。

よって、axiom 1の (i), (ii), (iii) の3後半、並びに、(iv) を満たすことを以下に示す。

axiom 1の (i) の後半の成立:  $\varphi = 0$  とすれば、

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, a_i = 0 \tag{2.39}$$

であり、式 (2.26) の  $V(x_1, x_2, \dots, x_m; \varphi)$  について

$$V(x_1, x_2, \dots, x_m; \varphi) = 0 \tag{2.40}$$

であり、初期条件式 (2.31) の下での微分方程式 (2.32) の解である式 (2.36) の  $y(t^*)$  は、

$$\begin{aligned} y(t^*) &= y(t^*; \varphi) \\ &= \langle y_1(t^*; \varphi), y_2(t^*; \varphi), \dots, y_m(t^*; \varphi) \rangle \end{aligned}$$

$$= \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle \quad (2.41)$$

も得、よって、 $T\varphi=0$  であることは定義式 (2.38) から明らか。

axiom 1 の (ii) の後半の成立:  $a$  を正実数とする。

式 (2.18) のパターン  $\varphi = \varphi(x)$  について、

$$(a \cdot \varphi)(x) = \sum_{i=1}^m (a \cdot a_i) \cdot \delta(x - x_i) \quad (2.42)$$

であり、式 (2.39) が成立すれば、 $\varphi = 0 = T\varphi$  が axiom 1 の (i) の後半の成立からわかる。また、 $a \cdot \varphi = 0 = T(a \cdot \varphi)$  も axiom 1 の (i) の後半の成立からわかる。

$$\therefore T(a \cdot \varphi) = 0 = T\varphi \quad (2.43)$$

がわかった。よって、以後、

$$\exists i \in \{1, 2, \dots, m\}, a_i > 0 \quad (2.44)$$

とする。このとき、式 (2.26) の  $V$  について、

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, \dots, x_m; a \cdot \varphi) \\ = a^2 \cdot V(x_1, x_2, \dots, x_m; \varphi) \end{aligned} \quad (2.45)$$

を得、式 (A10.36) の  $y(t^*)$  について、

$$y(t^*; a \cdot \varphi) = y(t^*; \varphi) \quad (2.46)$$

が成立し、 $T$  の定義式 (2.38) から、

$$\begin{aligned} (T(a \cdot \varphi))(x) \\ = \sum_{i=1}^m [a \cdot a_i / \sup_{i=1 \sim m} |a \cdot a_i|] \\ \cdot \delta(x - y_i(t)) \\ = \sum_{i=1}^m [a_i / \sup_{i=1 \sim m} |a_i|] \cdot \delta(x - y_i(t^*)) \\ = (T\varphi)(x) \end{aligned}$$

$$\text{for any } x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in \mathbb{R}^n \quad (2.47)$$

を得、証明が終わる。

axiom 1 の (iii) の後半の成立:

$$\eta = T\varphi \quad (2.48)$$

とおき、

$$T\eta = \eta \quad (2.49)$$

を示せばよい。

(イ)  $\eta = 0$  の場合

axiom 1 の (i), 後半の成立の証明と同様にして、

$$T\eta = 0 = \eta \quad (2.50)$$

の成立がわかる。

(ロ)  $\eta \neq 0$  の場合

$T$  の定義式 (2.38) からわかるように、

$$\begin{aligned} \eta(x) = (T\varphi)(x) = \\ \sum_{i=1}^m [a_i / \sup_{i=1 \sim m} |a_i|] \cdot \delta(x - y_i(t^*)) \end{aligned} \quad (2.51)$$

であり、式 (2.44) が成立している。このとき、式 (2.26) の  $V$  について、

$$\begin{aligned} V(y_1(t^*), y_2(t^*), \dots, y_m(t^*); \eta) \\ = [1 / \sup_{i=1 \sim m} |a_i|]^2 \end{aligned}$$

$$\cdot V(y_1(t^*), y_2(t^*), \dots, y_m(t^*); \eta) \quad (2.52)$$

を得、初期条件

$$y_i^k(t) \big|_{t=0} = y_i^k(t^*), \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}, \\ k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.53)$$

の下での微分方程式 (2.32) の解である式 (2.36) の  $y(s^*) = y(s^*; \eta)$  は、実は、

$$y(s^*; \eta) = y(t^*; \eta) \quad (2.54)$$

である。よって、式 (2.37) の  $\varphi(y(t^*))$  に対応するパターン  $\eta(y(s^*))$  は

$$\eta(y(s^*)) \\ = \sum_{i=1}^m [a_i / \sup_{i=1}^m |a_i|] \cdot \delta(x - y_i(s^*)) \quad (2.55)$$

であることがわかる。

$$\sup_{i=1}^m |a_i / \sup_{i=1}^m |a_i| | = 1 \quad (2.56)$$

であり、式 (2.54) を考慮すれば、T の定義式 (2.38) から、式 (2.49) の成立がわかる。□

### 2.3.4 微分方程式 (2.32) の具体化

微分方程式 (2.32) の右辺を計算し、具体化したのが次の定理 2.3 である。

[定理 2.3] (微分方程式 (2.32) の具体化定理)

$$K \equiv \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_i \cdot a_j \cdot |x_i - x_j| \quad (2.57)$$

について、

$$(\partial K / \partial x_i^k) \\ = 2 \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{(j \neq i)} a_i \cdot a_j \\ \cdot [(x_i^k - x_j^k) / |x_i - x_j|], \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}, \\ k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.58)$$

が成立し、よって、微分方程式 (2.32) は、具体的に、

$$b \cdot (d/d_t) y_i^k(t) \\ = -\sigma \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{(j \neq i)} a_i \cdot a_j \\ \cdot [ \{y_i^k(t) - y_j^k(t)\} / |y_i(t) - y_j(t)| ] \\ , i \in \{1, 2, \dots, m\}, k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.59)$$

と表される。

(証明) 2式 (2.26), (2.57) との対応関係を考慮し、式 (2.58) を微分方程式 (2.32) に代入すれば、微分方程式 (2.59) が得られる。よって、式 (2.58) を導けばよい。

まず、式 (2.27) の  $|x_i - x_j|^2$  に留意して、

$$d|x_i - x_j| / d|x_i - x_j|^2 \\ = 1 / \{2 \cdot |x_i - x_j|\} \quad (2.60)$$

であることに注意すれば、

$$(\partial |x_i - x_j| / \partial x_i^k) \\ = [d|x_i - x_j| / d|x_i - x_j|^2] \\ \cdot [\partial |x_i - x_j|^2 / \partial x_i^k] \\ = [1 / \{2 \cdot |x_i - x_j|\}] \\ \cdot [\partial \sum_{\ell=1}^n [x_i^\ell - x_j^\ell]^2 / \partial x_i^k] \\ = [1 / \{2 \cdot |x_i - x_j|\}] \cdot 2 \cdot [x_i^k - x_j^k]$$

$$= [x_i^k - x_j^k] / |x_i - x_j|, k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$$i, j \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (2.61)$$

が得られる。よって、式 (2.57) の  $K$  を  $x_i^k$  について偏微分すれば、

$$(\partial K / \partial x_i^k)$$

$$= (\partial \sum_{j=1, j \neq i}^m a_i \cdot a_j \cdot |x_i - x_j| / \partial x_i^k)$$

$$+ (\partial \sum_{q=1, q \neq i}^m a_q \cdot a_i \cdot |x_q - x_i| / \partial x_i^k)$$

$$= (\partial \sum_{j=1, j \neq i}^m a_i \cdot a_j \cdot |x_i - x_j| / \partial x_i^k)$$

$$+ (\partial \sum_{q=1, q \neq i}^m a_i \cdot a_q \cdot |x_i - x_q| / \partial x_i^k)$$

$$= 2 \cdot (\partial \sum_{j=1, j \neq i}^m a_i \cdot a_j \cdot |x_i - x_j| / \partial x_i^k)$$

$$= 2 \cdot \sum_{j=1, j \neq i}^m a_i \cdot a_j \cdot (\partial |x_i - x_j| / \partial x_i^k)$$

$$= 2 \cdot \sum_{j=1, j \neq i}^m a_i \cdot a_j \cdot [x_i^k - x_j^k] / |x_i - x_j|$$

$$\therefore \text{式 (2.61)} \quad (2.62)$$

$$i \in \{1, 2, \dots, m\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

が得られ、証明が終わる。 □

### 2.3.5 微分方程式 (2.32) の離散化

計算機を用いて、微分方程式 (2.59) を解くために必要な離散化を与えるのが、次の定理 2.4 である。

#### [定理 2.4] (微分方程式 (2.32) の離散化定理)

整数値の集合

$$I \equiv \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad (2.63)$$

を導入して、式 (2.19) の実数値座標系  $x = \langle x^1, x^2, \dots, x^n \rangle \in R^n$  ( $n$ 次元実数値空間) の代りに、整数値座標系

$$x = \langle x^1, x^2, \dots, x^n \rangle \in I^n, \text{ where } x^k \in I \quad (2.64)$$

を採用した場合での微分方程式 (2.59) を、離散時刻  $t \in [0, \Delta t, 2 \cdot \Delta t, \dots]$  で表現すれば、

$$y_i^k(t + \Delta t)$$

$$= y_i^k(t) - (\Delta t) \cdot (\sigma/b) \cdot \sum_{j=1 (j \neq i)}^m a_i \cdot a_j$$

$$\cdot [ |y_i^k(t) - y_j^k(t)| / |y_i(t) - y_j(t)| ]$$

$$i \in \{1, 2, \dots, m\}, k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.65)$$

となる。

(証明) 微分方程式 (2.59) の左辺は、

$$b \cdot (d/dt) y_i^k(t)$$

$$= b \cdot [y_i^k(t+1) - y_i^k(t)] / \Delta t$$

と近似されることから、明らかである。 □

以上により、式 (2.26) の界面エネルギー (2つの画像点で定まる2つの位置ベクトルの先端をつなぐ辺の長さの総和)  $V$  を最小にするように、式 (2.18) の濃淡画像 (パターン)  $\varphi = \varphi(x)$  を式 (2.37) のパターン  $\varphi(y(t^*))$  へと変形してゆく画像の**多段階変換**

$$\varphi(y(0)) (\equiv \varphi(x)) \rightarrow \varphi(y(\Delta t)) \rightarrow \varphi(y(2 \cdot \Delta t))$$

$$\rightarrow \dots \rightarrow \varphi(y(t^*)) \quad (2.66)$$

が得られることになった。ここに、式 (2.36) の  $y(t^*)$  での終了離散時刻  $t^*$  は、与えられた十分小さい正数  $\varepsilon$  について、少なくとも、終了規準 (termination criterion)

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n |y_i^k(t^* + \Delta t) - y_i^k(t^*)|^2 < \varepsilon \quad (2.67)$$

を満たさなければならない。

## 2.4 可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$

SS理論 [B1] ~ [B6] では、パターン  $\varphi$  は可分な (separable) 一般抽象ヒルベルト空間 (Hilbert space)  $\mathfrak{H}$  の元とする。内積は  $(\varphi, \eta)$  と表され、ノルムは  $\|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)}$  で表される。ここに、 $\mathfrak{H}$  が可分とは、稠密な (dense) 可算部分集合が  $\mathfrak{H}$  に存在することを指す。  $\varphi, \eta \in \mathfrak{H}$  間のノルム距離  $\|\varphi - \eta\| = \sqrt{(\varphi - \eta, \varphi - \eta)}$  に注意しておこう。

理解のためには、例えば、特別な場合として、内積  $(\varphi, \eta)$  を、

$$(\varphi, \eta) = \int_M dm(x) \varphi(x) \cdot \overline{\eta(x)} \quad (2.68)$$

ここに、 $\overline{\eta}$  は  $\eta$  の複素共役 (a complex conjugate of  $\eta$ ) であり、

$$M: n \text{次元ユークリッド空間 } \mathbb{R}^n \text{ の可測部分集合} \quad (2.69)$$

$$dm(x): \text{ 正值 Lebesgue-Stieltjes 式測度} \quad (2.70)$$

$$x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in M (\subseteq \mathbb{R}^n) \quad (2.71)$$

とする可分なヒルベルト空間  $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$  で考えておけばよい [C1]。

一般に、 $n$ 次元直交座標系  $x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in \mathbb{R}^n$  ( $n$ 次元実数値空間) での、式 (A10.18) のパターン  $\varphi = \varphi(x)$  は可分なヒルベルト空間  $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}^n; dx_1 dx_2 \dots dx_n)$  の元ではないが、式 (2.25) の  $\varphi$  を

十分小さい正実数  $v$  を選定し、

$$\begin{aligned} \varphi(x) & \doteq \sum_{i=1}^m a_i \cdot \prod_{k=1}^n [2\pi v]^{-1/2} \cdot \exp[-(x_k - x_k^i)^2 / (2v)] \end{aligned} \quad (2.72)$$

と近似しておけば、式 (2.72) の右辺はSS理論で処理可能な“ $\mathfrak{H}$ の元”であることに注意しておく。

式 (2.26) の界面エネルギー  $V$  を最小にする式 (2.37) のパターン  $\varphi(y(t^*))$ 、並びに、式 (2.18) のパターン  $\varphi = \varphi(x)$  の、式 (2.38) で定義されているパターンモデル  $(T\varphi)(y(t^*))$  についても、式 (2.72) と同様な近似を考え、SS理論で処理可能な対象としておく。

## 3. 計算機シミュレーション

本章では、前章の、初期条件 (2.31) の下での微分方程式 (2.32) の具体化式 (2.59) の離散化表現式 (2.65) を使用し、濃淡画像として簡単な幾何図形、単純化された顔画像、実際の顔画像を選び、その計算機シミュレーション結果について報告される。



### 3.1 画像表示のための右手の座標系と、可分なヒルベルト画像空間 $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^2; dx_1 dx_2)$

2次元平面  $\mathbb{R}^2$  を導入し、画像  $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$  が可分なヒルベルト空間  $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^2; dx_1 dx_2)$  の元であるとしよう。内積  $(\varphi, \eta)$  は式 (A3.14)、ノルム  $\|\varphi\|$  は式 (A3.15) で表される。

計算機シミュレーションでは、内積  $(\varphi, \eta)$  の近似式として、式 (A3.24) が採用された。

### 3.2 カラー画像からの灰色顔画像の作成

デジタルカメラで撮影されたカラー原画像から、計算機処理の対象となるように、右手の座標系表示による灰色入力画像を得る手法を説明しよう。

テレビジョン方式の1つであるNTSC (National Television System Committee) を採用して、1枚のカラー画像の輝度 (白黒単色モード画像の濃淡値)  $\varphi(x_1, x_2)$  を

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2) \\ = 0.299 \cdot R(x_1, x_2) + 0.587 \cdot G(x_1, x_2) + 0.114 \cdot B(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

とする (文献 [A11] の p.11, 1.3.2項の式 (1.4) を参照)。ここに、

$R(x_1, x_2)$ : 赤成分の輝度値

$G(x_1, x_2)$ : 緑成分の輝度値

$B(x_1, x_2)$ : 青成分の輝度値

(3.2)

以下の計算機シミュレーションでは、パターン (顔画像)  $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$  は、濃淡値が256レベルのdigital画像であり、

$$\varphi(x, y) \in \{0, 1, 2, \dots, 255\}$$

$$x = x''' - 53 \in \{-53, -52, \dots, -1, 0, +1, \dots, +52, +53\}$$

$$y = 40 - y''' \in \{-39, -38, \dots, -1, 0, +1, \dots, -39, +40\}$$

$$(x''' = 0 \sim 106, y''' = 0 \sim 79)$$

$$\text{ここに、} x \equiv x_1, y \equiv x_2$$

(3.3)

ということになる。

右手系の2次元直交整数値座標系  $\underline{x} = \langle x_1, x_2 \rangle (x_1, x_2 \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\})$  の設定法は、Fig.1に示されている。

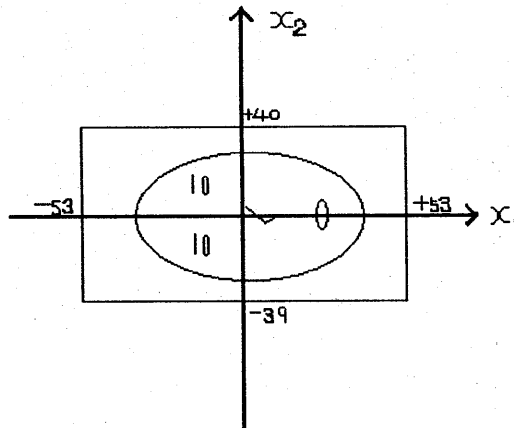


Fig.1 a face-image on a right-hand coordinate system  $\langle x_1, x_2 \rangle$

### 3.3 シミュレーション近似式と結果、考察

#### 3.3.1 パターンモデル $T\varphi$ の求め方の概略

離散時刻  $t (= 0, 1, 2, \dots)$  のときの  $i$  ( $x_1$ -軸の整数座標値) の値を  $i(t)$  で表す。同様に、時刻  $t$  のときの  $j$  ( $x_2$ -軸の整数座標値) の値を  $j(t)$  で表す。

$a(i, j)$  は、

$$a(i, j) = [\text{顔画像 } \varphi(x_1, x_2) \text{ の、座標 } x_1=i, x_2=j \text{ での濃淡値}] \quad (3.4)$$

とし、初期条件

$$a(i(t), j(t)) |_{t=0} = a(i, j) \quad (3.5)$$

を設ける (式 (2.31) を参照)。

[ $a(i, j)$  ( $i = -53 \sim +53, j = -39 \sim +40$ ) から  $a^*(i, j)$  ( $i = -53 \sim +53, j = -39 \sim +40$ ) を次の方法で求め、その後、式 (2.38) のパターンモデル ( $T\varphi$ ) ( $x_1, x_2$ ) を求めればよい。

#### 3.3.2 収束後の、各整数値2次元座標 $\langle i, j \rangle$ での各振幅値 $a^*(i, j)$ の求め方

式 (2.65) において  $n=2$  と設定し、初期条件

$$\textcircled{1} i(t) |_{t=0} = i \quad (i = -53 \sim +53)$$

$$\textcircled{2} j(t) |_{t=0} = j \quad (j = -39 \sim +40) \quad (3.6)$$

の下で、 $t=0, 1, 2, \dots$  にわたり、

$$\textcircled{3} \text{式 (2.65) の、} k=1 \text{ での近似式 } i(t+1)$$

$$\begin{aligned} &= i(t) + a(i(t), j(t)) \cdot (-\sigma/b) \cdot \\ &\quad \sum_{k=-53}^{+53} \sum_{\ell=-39, k \neq i(t) \text{ or } \ell \neq j(t)}^{+40} a(k, \ell) \cdot [i(t) - k] \\ &\quad / [ |i(t) - k|^2 + |j(t) - \ell|^2 ]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\textcircled{4} \text{式 (2.65) の、} k=2 \text{ での近似式 } j(t+1)$$

$$\begin{aligned} &= j(t) + a(i(t), j(t)) \cdot (-\sigma/b) \cdot \\ &\quad \sum_{k=-53}^{+53} \sum_{\ell=-39, k \neq i(t) \text{ or } \ell \neq j(t)}^{+40} a(k, \ell) \cdot [j(t) - \ell] \\ &\quad / [ |i(t) - k|^2 + |j(t) - \ell|^2 ]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

を求めてゆく。

$$\textcircled{5} r = i' - 53, q = 40 - j'$$

$$k = i - 53, i = 0 \sim 106$$

$$\ell = 40 - j, j = 0 \sim 79$$

$$(3.9)$$

とし、式 (2.26) の界面エネルギー  $V$  は、

$$\begin{aligned} &V(t) \\ &= (\sigma/2) \cdot \sum_{k(t)=-53}^{+53} \sum_{\ell(t)=-39}^{+40} [a(k(t), \ell(t)) - 128] \cdot \\ &\quad \sum_{r(t)=-53}^{+53} \sum_{q(t)=-39, k(t) \neq r(t) \text{ or } \ell(t) \neq q(t)}^{+40} [a(r(t), q(t)) - 128] \cdot \\ &\quad \sqrt{|k(t) - r(t)|^2 + |\ell(t) - q(t)|^2} \\ &= (\sigma/2) \cdot \sum_{i'(t)=0}^{106} \sum_{j'(t)=0}^{79} [a(i'(t), j'(t)) - 128] \cdot \\ &\quad \sum_{i(t)=0}^{106} \sum_{j(t)=0}^{79} [a(i(t), j(t)) - 128] \cdot \\ &\quad \sqrt{|i'(t) - i(t)|^2 + |j'(t) - j(t)|^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [a(i(t) - 53, 40 - j(t)) - 128] \cdot \\
& [a(i'(t) - 53, 40 - j'(t)) - 128] \cdot \\
& [|(i(t) - 53) - (i'(t) - 53)|^2 \\
& + |(40 - j(t)) - (40 - j'(t))|^2]^{1/2} \\
& = (\sigma/2) \cdot \sum_{i(t)=0}^{106} \sum_{j(t)=0}^{79} \\
& \sum_{i'(t)=0}^{106} \sum_{j'(t)=0, i(t) \neq i'(t) \text{ or } j(t) \neq j'(t)}^{79} \\
& [a(i(t) - 53, 40 - j(t)) - 128] \cdot \\
& [a(i'(t) - 53, 40 - j'(t)) - 128] \cdot \\
& [ |i(t) - i'(t)|^2 + |j(t) - j'(t)|^2 ]^{1/2} \tag{3.10}
\end{aligned}$$

において、 $t=0$  として得られる。

$$\textcircled{6} x_1 = i - 53 \in \{-53 \sim +53\}, \quad i = 0 \sim 106 \tag{3.11}$$

$$x_2 = 40 - j \in \{-39 \sim +40\}, \quad j = 0 \sim 79 \tag{3.12}$$

として、ガウス核関数

$$\begin{aligned}
& K(x_1, x_2) \\
& \equiv [2\pi\nu]^{-1} \cdot \exp[-\{x_1^2 + x_2^2\}/(2\nu)] \tag{3.13}
\end{aligned}$$

を導入すれば、

式 (2.24) の Dirac  $\delta$  超関数の近似式を適用したパターン  $\eta(i - 53, 40 - j)$  は、

$$\begin{aligned}
& \eta(i - 53, 40 - j) \\
& = \sum_{k=0}^{106} \sum_{\ell=0}^{79} K((i - 53) - (k - 53), \\
& (40 - j) - (40 - \ell)) \cdot \varphi(k - 53, 40 - \ell) \\
& = \sum_{k=0}^{106} \sum_{\ell=0}^{79} K(i - k, \ell - j) \cdot \\
& \quad \varphi(k - 53, 40 - \ell) \tag{3.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \sum_{k=0}^{106} \sum_{\ell=0}^{79} [2\pi\nu]^{-1} \cdot \exp[-\{(i - k)^2 \\
& + (j - \ell)^2\}/(2\nu)] \cdot \varphi(k - 53, 40 - \ell) \tag{3.15}
\end{aligned}$$

となる。

式 (2.66) での、 $\varphi(y(0))$  から  $\varphi(y(t^*))$  への収束の判定は、

与えられた正数  $\epsilon$  について

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=-53}^{+53} |i(t+1) - i(t)| \\
& + \sum_{j=-39}^{+40} |j(t+1) - j(t)| < \epsilon \tag{3.16}
\end{aligned}$$

ですればよいが (式 (2.67) を参照)、このとき、例えば、

$$\epsilon = 1, \quad \epsilon = 107 + 80 = 187 \tag{3.17}$$

と選ばばよい。しかしながら、本計算機シミュレーションでは、

与えられた2つの正数  $\epsilon_1, \epsilon_2$  について

$$\begin{aligned}
& |i(t+1) - i(t)| < \epsilon_1 \\
& \text{and } |j(t+1) - j(t)| < \epsilon_2 \tag{3.18}
\end{aligned}$$

が成立するときの時刻  $t=0, 1, 2, \dots$  を求め (式 (2.67) を参照)、

$$a^*(i, j) = \lim_{v \rightarrow +0} a(i(t), j(t)) \tag{3.19}$$

とするC言語プログラムを採用している。

### 3.3.3 得られたパターンモデル $T\varphi$ の離散表現

式 (3.13) のガウス形核関数  $K(x_1, x_2)$  を使用して、式 (2.38) の  $T\varphi$  近似式が

$$(T\varphi)(x_1, x_2) \equiv \begin{cases} 0 \cdots \forall i \in \{-53, -52, \dots, +53\}, \forall j \in \{-39, -38, \dots, +40\}, a^*(i, j) = 0 \text{ のとき} \\ \lim_{v \rightarrow +0} \sum_{i=-53}^{+53} \sum_{j=-39}^{+40} |a^*(i, j)| \\ \quad \cdot \left[ \max_{k=-53 \sim +53, \ell=-39 \sim +40} |a^*(k, \ell)| \right] \\ \quad \cdot K(x_1 - i, x_2 - j) \\ \cdots \exists i \in \{-53, -52, \dots, +53\}, \exists j \in \{-39, -38, \dots, +40\}, a^*(i, j) \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (3.20)$$

と求まる。

### 3.3.4 シミュレーション結果と、その考察

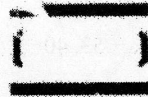
Fig.2~Fig.10に、2値化パターン  $\varphi = \varphi(y(t))|_{t=0}$  (Fig.2~Fig.6)、実際の顔画像パターン (original images)  $\varphi$  とその2値化パターンモデル  $T\varphi = \varphi(y(t))|_{t=0}$  (但し、 $T$  は文献 [C28] の式 (2.25) のモデル構成作用素である。文献 [C28] の3.2節を参照) (Fig.7~Fig.10) と、それらの変形  $\varphi(y(t))|_{t=9}$  が示されている。何れにおいても、式 (3.10) の界面エネルギー  $V(t)$  の減少列

$$V(0) > V(1) > V(2) > \cdots > V(9) \quad (3.21)$$

が本シミュレーションで確認された。



t=0



t=9

$$V(t)|_{t=0} \doteq 99.92 \times 10^{10}$$

$$V(t)|_{t=9} \doteq 58.06 \times 10^{10}$$

Fig.2 A transformation  $\varphi(y(t)) (t=9)$  of a rectangle  $\varphi(y(t)) (t=0)$ , where  $b = 11 \times 10^6$ ,  $\sigma = 20$



t=0



t=9

$$V(t)|_{t=0} \doteq 86.25 \times 10^{10}$$

$$V(t)|_{t=9} \doteq 17.14 \times 10^{10}$$

Fig.3 A transformation  $\varphi(y(t)) (t=9)$  of a circle  $\varphi(y(t)) (t=0)$ , where  $b = 12 \times 10^6$ ,  $\sigma = 20$



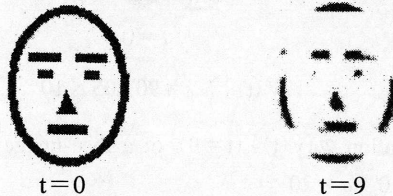
$$V(t) |_{t=0} \doteq 63.81 \times 10^{10} \quad V(t) |_{t=9} \doteq 20.74 \times 10^{10}$$

Fig.4 A transformation  $\varphi(y(t)) (t=9)$  of a triangle  $\varphi(y(t)) (t=0)$ , where  $b = 12 \times 10^6$ ,  $\sigma = 20$



$$V(t) |_{t=0} \doteq 72.88 \times 10^{10} \quad V(t) |_{t=9} \doteq 9.35 \times 10^{10}$$

Fig.5 A transformation  $\varphi(y(t)) (t=9)$  of a shape  $\varphi(y(t)) (t=0)$ , where  $b = 12 \times 10^6$ ,  $\sigma = 20$



$$V(t) |_{t=0} \doteq 68.07 \times 10^{10} \quad V(t) |_{t=9} \doteq 13.35 \times 10^{10}$$

Fig.6 A transformation  $\varphi(y(t)) (t=9)$  of a simplified face-image  $\varphi(y(t)) (t=0)$ , where  $b = 12 \times 10^6$ ,  $\sigma = 20$



an original image



t=0



t=9

$$V(t) |_{t=0} \doteq 976.13 \times 10^{10} \quad V(t) |_{t=9} \doteq 775.88 \times 10^{10}$$

Fig.7 A transformation  $\varphi(y(t)) (t=9)$  of a binarized face-image  $\varphi(y(t)) (t=0)$ , where  $b = 30 \times 10^6$ ,  $\sigma = 20$



an original image



t=0



t=9

$$V(t) |_{t=0} \doteq 11543.72 \times 10^{10} \quad V(t) |_{t=9} \doteq 965.07 \times 10^{10}$$

Fig.8 A transformation  $\varphi(y(t)) (t=9)$  of a face-image  $\varphi(y(t)) (t=0)$ , where  $b = 30 \times 10^6$ ,  $\sigma = 20$



an original image



t=0



t=9

$$V(t) |_{t=0} \doteq 907.05 \times 10^{10} \quad V(t) |_{t=9} \doteq 617.90 \times 10^{10}$$

Fig.9 A transformation  $\varphi(y(t)) (t=9)$  of a face-image  $\varphi(y(t)) (t=0)$ , where  $b = 30 \times 10^6$ ,  $\sigma = 20$



an original image



t=0



t=9

$$V(t) |_{t=0} \doteq 975.20 \times 10^{10} \quad V(t) |_{t=9} \doteq 852.27 \times 10^{10}$$

Fig.10 A transformation  $\varphi(y(t)) (t=9)$  of a face-image  $\varphi(y(t)) (t=0)$ , where  $b = 30 \times 10^6$ ,  $\sigma = 20$



Fig.2~Fig.10には、2つの界面エネルギー  $V(0)$ ,  $V(9)$  の値が示されている。

Fig.2~Fig.6には、長方形, 円, 3角形, 形状 X,  $\varphi = \varphi(y(t))|_{t=0}$  とそれらの途中の変形  $\varphi(y(t))|_{t=9}$  が示されている。底にある横棒より頂にある横棒が変形されやすいし (Fig.2)、画面の中心部分の方が変形されやすいし (Fig.5)、縦・斜め成分の方が横成分より変形されている (Fig.3~Fig.6)。

Fig.6には、2値化パターン  $\varphi$  として簡単な顔図形が選ばれ、目の大きさが小さくなるなどのその変形の様子が  $\varphi(y(t))|_{t=9}$  で示されている。

Fig.7~Fig.10には、an original face-image  $\varphi$ , the binalized pattern  $T\varphi (= \varphi(y(t))|_{t=0})$ , the transformed pattern  $\varphi(y(t))|_{t=9}$  at the 9-th stage が各々示されている。Fig.9の場合とはもかくとして、 $\varphi$  の持つ顔部品特徴が特定の表情を取り除く形式で  $\varphi(y(t))|_{t=9}$  に反映されていることが見受けられる。

#### 4. むすび

マルチメディア顔画像情報検索技術を確保するためには、顔画像から特定の表情を取り除く処理が必要とされる。このような処理の1つとして、顔画像の画素結合構造での不整合界面エネルギーを減少させて表情を安定させることを考えた。

顔画像を計算機処理する技術を確保する前段階として、顔部品 (目、鼻、口、耳、眉) の抽出は顔画像の個人判別にとって基本的に必要であるが、この抽出法の計算機シミュレーション [C28] に引き続いて、単純化された顔部品をもつ2値化人工顔画像、並びに実際の顔画像の界面エネルギーの減少を保証する各頂点 (画素) の運動方程式 (最急降下方程式) の時間的发展によって、

○平常心の顔画像に変形するなどの特定の表情を取り除く処理

○望ましい顔部品をもつ顔画像への変換処理

を行うことを考えた。SS公理系 [C3], [C4] は4つの公理 axiom 1~4から成り立っており、その最初の axiom 1を満たすモデル構成作用素 T の持つ意義を検証しようと、本研究はなされた。計算機シミュレーションはほぼ望ましい結果を得るであろうということを予想させる結果となっている。本計算機シミュレーションを介して、SS理論 [B1] ~ [B6] の axiom 1を満たす対  $[\Phi, T]$  の具体化効果を確認する片鱗が得られたと言えよう。

運動方程式の収束解を処理時間の関係上、求めていなくて、収束に至るその途中処理の変形画像を求めたのに過ぎないのであるが、収束解を得るためにはプログラムの高速化が望まれる。引き続き研究することの必要性が痛感させられることになった。

**謝辞** 本計算機シミュレーションはパソコン BREZZA (東芝製) を使い、C言語でなされた。1997・1998両年度卒業研究学生諸氏には、C言語シミュレーションプログラムの作成に協力して頂いた。謝意を表す。

## 文 献 A

- [A1] 高木隆司：“形の数理（シリーズ「現代人の数理」1）”，朝倉書店，Sept.1992
- [A2] 長井達三，川崎恭治，中村勝弘：“2次元セル・パターンの動力学”，日本物理学会誌，vol.43, no.6, pp.437-444, 1988
- [A3] 井上健，野村由司彦，藤井省三：“ポテンシャル場のマッチングによる一筆書き線図形の形状認識”，電子情報通信学会論文誌 D-II, vol.J78-D-II, no.1, pp.61-68, Jan.1995
- [A4] 坂野鋭，木田博巳：“Coulomb相互作用モデルによる識別関数の学習的構成法—文字認識への応用—”，電子情報通信学会論文誌 D-II, vol.J77-D-II, no.9, pp.1806-1816, Sept.1994
- [A5] 松野勝弘，李七雨，辻三郎：“ポテンシャルネットとKL展開を用いた顔表情の認識”，電子情報通信学会論文誌 D-II, vol.J77-D-II, no.8, pp.1591-1600, Aug.1994
- [A6] 辰巳昭治，永田良浩，真田英彦，手塚慶一：“擬似こう配を用いたノンパラメトリッククラスタリングの手法”，電子通信学会論文誌，vol.J61-D, no.1, pp.17-24, Jan.1978
- [A7] Gerardo Beni, Xiaomin Liu：“A least biased fuzzy clustering method”，IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.16, no.9, Sept.1994
- [A8] M.A.Aizerman, E.M.Braverman, L.I.Rozonoer：“The method of potential functions for the problem of restoring the characteristic of a function converter from randomly observed points”，Automation and Remote Control, vol.25, no.12, pp.1546-1556, 1964
- [A9] Zdeněk PROCHÁZKA, 伊藤崇之，岡本敏雄：“変形関数による画像間対応関係の決定とその応用”，電子情報通信学会論文誌 D-II, vol.J82-D-II, no.9, pp.1374-1382, Sept.1999
- [A10] 三好正純，下塩義文，古賀広昭，井手口健：“視覚の誘導場理論を用いた感性にもとづく文字配置の設計”，電子情報通信学会論文誌 D-II, vol.J82-D-II, no.9, pp.1465-1473, Sept.1999
- [A11] 酒井幸市：“デジタル画像処理入門”，コロナ社，Aug.1998
- [A12] Rafael C.Gonzalez, Paul Wintz：“Digital Image Processing”，Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1979 (second printing)
- [A13] Matthew Turk, Alex Pentland：“Eigenfaces for recognition”，Journal of Cognitive Neuroscience, vol.3, no.1, pp.71-86, 1991
- [A14] Srinivas Gutta, Harry Wechsler：“Face recognition using hybrid classifiers”，Pattern Recognition, vol.30, no.4, pp.539-553, 1997
- [A15] Bhabatosh Chanda, Malay K.Kundu, Y.Vani Padmaja：“A multiscale morphologic edge detector”，Pattern Recognition, vol.31, no.10, pp.1469-1478, 1998
- [A16] Jerzy Siuzdak：“A single filter for edge detection”，Pattern Recognition, vol.31, no.11, pp.1681-1686, 1998
- [A17] 赤松茂：“コンピュータによる顔の認識の研究動向”，電子情報通信学会誌，vol.80, no.3, pp.257-266, Mar.1997
- [A18] 童 衡青，辰巳昭治：“モルフォロジー画像処理に向けた高精度な分解型円形状構造要素の提案”，電子情報通信学会論文誌 D-II, vol.J81-D-II, no.12, pp.2738-2748, Dec.1998
- [A19] 奥村晃弘，濱口佳孝，岡野健治，宮崎敏彦：“顔画像情報と音声情報の統合による発話認識”，情報処理学会論文誌，vol.39, no.12, pp.3232-3241, Dec.1998
- [A20] Krishamoorthy Sivakumar, John Goutsias：“Morphologically constrained GRFs：Applications



to texture synthesis and analysis", IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.21, no.2, Feb.1999

- [A19] 長尾真, 安西祐一郎, 神岡太郎, 橋本周司: "マルチメディア情報学の基礎 (岩波講座マルチメディア情報学 1)", 岩波書店, Oct.1999

## 文 献 B

- [B 1] 青木利夫, 高橋渉: "集合・位相空間要論", 培風館, Sept.1979
- [B 2] Angus E.Taylor, David C.Lay: "Introduction to function analysis", John Wiley & Sons, Inc.,1980
- [B 3] 吉田耕作: "近代解析 (基礎数学講座20)", 共立出版, Dec.1963
- [B 4] Gerard Salton, Michael J.McGill: "Introduction to modern information retrieval (McGraw-Hill Advanced Computer Science Series)", McGraw-Hill International Book Company, 1983
- [B 5] 原島博: "顔学への招待", 岩波書店, June 1998
- [B 6] 赤松茂: "招待論文 コンピュータによる顔の認識—サーベイ—", 電子情報通信学会論文誌 A, vol.J80-A, no.8, pp.1215-1230, Aug.1997
- [B 7] 永田明德, 金子正秀, 原島博: "平均顔を用いた顔印象分析", 電子情報通信学会論文誌 A, vol.J80-A, no.8, pp.1266-1272, Aug.1997
- [B 8] 黒須康雄: "線分と疑似濃淡の保存を考慮した文書画像の縮小変換法", 情報処理学会論文誌, vol.39, no.4, Apr.1998
- [B 9] 村瀬洋: "解説 古くて新しい画像認識法—固有空間法による画像認識—", 情報処理 (情報処理学会誌), vol.38, no.1, pp.54-60, Jan.1997
- [B10] 長谷川修, 森島繁生, 金子正秀: "招待論文「顔」の情報処理", 電子情報通信学会論文誌 (D-II), vol.J80-D-II, no.8, pp.2047-2065, Aug.1997
- [B11] 向川康博, 中村裕一, 大田友一: "複数の顔画像の組合せによる任意方向・任意表情の顔画像の生成", 電子情報通信学会論文誌 (D-II), vol.J80-D-II, no.6, pp.1555-1562, June 1997
- [B12] 丸山稔, 寺岡照彦, 阿部茂: "学習ネットワークGRBFの変形する3次元物体の認識能力", 電子情報通信学会論文誌 (D-II), vol.J76-D-II, no.11, pp.2357-2364, Nov.1997
- [B13] 市村直幸: "ロバストクラスタリングに基づいた特徴空間と画像空間の併用による領域分割", 電子情報通信学会論文誌 (D-II), vol.J80-D-II, no.7, pp.1752-1763, July 1997
- [B14] Xinquan Shen, Michael Spann, Peter Nacken: "Segmentation of 2D and 3D images through a Hierarchical clustering based on region modelling", Pattern Recognition, vol.31, no.9, pp.1295-1309, 1998
- [B15] 肖業貴, N.P.チャンドラシリ, 田所嘉昭, 尾田政臣: "2-D DCTとニューラルネットワークを用いた顔画像の表情認識", 電子情報通信学会論文誌 A, vol.J81-A, no.7, pp.1077-1086, July 1998
- [B16] Peter N.Belhumeur, João P.Hespanha, and David J.Kriegman: "Eigenfaces vs. Fisherfaces: Recognition using class specific linear projection", IEEE Trans. on pattern analysis and machine intelligence, vol.19, no.7, pp.711-720, Jan.1997
- [B17] Wei-Chung Lin and Chen-Kuo Tsao: "Document classification using associative memories",

Journal of Neural Network Computing, pp.33-41, April 1990

- [B18] Kin-Man Lam, Hong Yan : "An analytic-to-holistic approach for face recognition based on a single frontal view", IEEE Trans. on pattern analysis and machine intelligence, vol.20, no.7, pp.673-686, July 1998
- [B19] Lin Hong, Anil Jain : "Integrating faces and fingerprints for personal identification", IEEE Trans. on pattern analysis and machine intelligence, vol.20, no.12, pp.1295-1307, Dec.1998
- [B20] Shimon Ullman, Ronen Basri : "Recognition by linear combinations of models", IEEE Trans. on pattern analysis and machine intelligence, vol.13, no.10, pp.992-1006, Oct.1991
- [B21] 瀧保夫 ; "通信方式 (電気通信講座19)", コロナ社, 電気通信学会編, June 1964
- [B22] 星子幸男 : "通信伝送工学", コロナ社, Dec.1978
- [B23] 太原育夫 : "人工知能の基礎知識 (コンピュータサイエンス大学講座20)", 近代科学社, Feb.1999
- [B24] C.K.Chow and S.S.M.Wang : "Sequential classification of patient recovery patterns after coronary artery bypass graft surgery", Computers and Biomedical Research, vol.12, pp.589-613, 1979

## 文 献 C

- [C 1] 鈴木昇一 : "認識工学 (上)", 柏書房, Feb.1975
- [C 2] 鈴木昇一 : "(マルチメディア情報処理のための一般化誤差逆伝播学習) ニューラルネットの新数理", 近代文芸社, Sept.1996
- [C 3] 鈴木昇一 : "(知能情報メディア情報処理のための) カテゴリ帰属知識を用いた) パターン認識問題の数理的一般解決", 近代文芸社, June 1997
- [C 4] 鈴木昇一 : "(カテゴリ帰属知識ポテンシャル論を含む) 認識知能情報論の新展開", 近代文芸社, Aug.1998
- [C 5] 鈴木昇一 : "パターンのエントロピーモデル", 電子情報通信学会論文誌 (D-II), vol.J77-D-II, no.10, pp.2220-2238, Nov.1994
- [C 6] 鈴木昇一 : "パターン認識の数学的理論", 電子情報通信学会技術研究報告 [パターン認識と学習, パターン認識と理解], PRL84-6 (第1部), PRL84-30, PRL84-38, PRL85-27, PRU86-8, PRU86-35, PRU86-69, PRU87-1, PRU87-28, PRU88-30, PRU89-1, PRU89-27, PRU89-40, PRU89-66, PRU89-77, PRU89-136, PRU90-5, PRU90-15, PRU90-29, PRU90-125, PRU91-1, PRU91-29, PRU91-42, PRU92-1, PRU92-18, PRU92-25, PRU92-89, PRU92-102 (第28部), May 1984~Jan.1993
- [C 7] 鈴木昇一 : "測度的不変量検出形認識系の構成理論", 電子通信学会論文誌 (D), vol.55-D, no.8, pp.513-538, Aug.1972
- [C 8] 鈴木昇一 : "手書き漢字の側抑制効果的分解とその計算機シミュレーション", 情報処理学会誌, vol.15, no.12, pp.927-934, Dec.1974
- [C 9] 鈴木昇一 : "測度的不変量検出形認識系に関する研究", 博士論文 (工学院大学博乙第1号), Mar.1975
- [C10] 鈴木昇一 : "画像情報量とその手書き漢字への応用", 画像電子学会誌, vol.4, no.1, pp.4-12, Apr.1975

- [C11] 鈴木昇一：“パターン認識における構造化モデルの4性質とその応用”，電子通信学会論文誌 (D)，vol.J60-D，no.9，pp.710-717.Sept.1977
- [C12] 鈴木昇一：“抽出された特徴による手書き漢字構造の再生”，情報処理学会誌，vol.18，no.11，pp.1115-1122，Nov.1977
- [C13] 鈴木昇一，斉藤静昭，奥野治雄，太田芳雄：“画像の復元とその計算機シミュレーション” 工学院大学研究報告，no.39，pp.198-206.Jan.1976
- [C14] 鈴木昇一：“回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学情報学部），vol.4，pp.36-56，Dec.1983
- [C15] 鈴木昇一：“連想形記憶器 MEMOTRON と日本語母音系列の再生に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学情報学部），vol.7，pp.14-29，Dec.1986
- [C16] 鈴木昇一：“収縮画像の構成用空間回路とその計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），vol.9，pp.17-29，Dec.1988
- [C17] 鈴木昇一：“多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），vol.10，pp.35-49，Dec.1989
- [C18] 鈴木昇一：“帰属係数法に基づく類似度、帰属関係あいまい度、認識情報量の計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），vol.11，pp.51-68，Dec.1990
- [C19] 鈴木昇一，佐久間拓也，前田英明：“数理形態学における諸演算とモデル構成作用素”，情報研究（文教大学・情報学部），vol.17，pp.133-170，Dec.1996
- [C20] 鈴木昇一：“Radial-Basis Function Networks, Wavelet-Based Networks を用いたモデル構成作用素の構成法”，情報研究（文教大学・情報学部），vol.17，pp.71-132，Dec.1997
- [C21] 鈴木昇一：“構造受精法と日本語単独母音の認識”，情報研究（文教大学・情報学部），vol.18，pp.17-51，Dec.1998
- [C22] 鈴木昇一，佐久間拓也，釈氏孝浩，前田英明，下平 丕作士：“不動点探索形構造受精多段階認識の確率過程論的取り扱い”，情報研究（文教大学・情報学部），vol.18，pp.53-103，Dec.1998
- [C23] 鈴木昇一：“類似度関数を用いた確率的緩和法”，情報研究（文教大学・情報学部），no.20，pp.23-75，Dec.1998
- [C24] 鈴木昇一，前田英明：“有声破裂音の代表パターンの学習的決定と、その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.20，pp.77-95，Dec.1998
- [C25] 鈴木昇一，前田英明：“変動エントロピーによる有声破裂音の順序付けと、その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.21，pp.51-78，Mar.1999
- [C26] 鈴木昇一：“直交系によるパターンモデルの構成”，情報研究（文教大学・情報学部），no.21，pp.23-49，Mar.1999
- [C27] 鈴木昇一：“認識行為に向けての、効用最大化原理”，情報研究（文教大学・情報学部），no.22，pp.151-210，Dec.1999
- [C28] 鈴木昇一：“平均顔を用いた顔画像の2値化、並びに目・鼻・口の抽出と、その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.22，pp.65-150，Dec.1999
- [C29] 鈴木昇一：“風景画から知識を抽出し、解釈するシステムの、ファジィ推論ニューラルネットによる構成”，情報研究（文教大学・情報学部），no.23，pp.183-265，Mar.2000

## 付録1. axiom 2を満たす類似度関数 SM

本付録1では、パターン情報処理における類似度関数 SM が満たさなければならない axiom 2が説明される。

“正常なパターン” (well-formed pattern) は、ある1つのカテゴリ  $\mathcal{C}_j$  (第  $j \in J$  番目の類概念) のみに帰属しているものとし、このような  $\mathcal{C}_j$  の集まり (有限集合)

$$\underline{\mathcal{C}} \equiv \{\mathcal{C}_j \mid j \in J\} \quad (\text{A1.1})$$

を想定する。  $\mathcal{C}_j$  の備えている性質を典型的に備えている代表パターン (prototypical pattern)  $\omega_j$  ( $\neq 0$ ) を1つ選定する。  $\mathcal{C}_j$  は、典型 (prototype) としての代表パターン  $\omega_j$  を中心とした緩やかなカテゴリであることを仮定したことに注意しておく。ここに、

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} \subset \Phi \quad (\text{A1.2})$$

が式 (A1.1) の全カテゴリ集合  $\underline{\mathcal{C}}$  に対応する代表パターンの集合である。式 (A1.2) の系  $\Omega$  は、複素定数  $a_j$  の組  $\{a_j \mid j \in J\}$  について

$$\sum_{j \in J} a_j \cdot \omega_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J, a_j = 0 \quad (\text{A1.3})$$

が成立しているという意味で、1次独立 (linearly independent) でなければならない。

axiom 1を満たすモデル構成作用素  $T$  によって、式 (A1.2) の代表パターン集合  $\Omega$  が変換されて得られる系

$$T \cdot \Omega \equiv \{T\omega \mid \omega \in \Omega\} = \{T\omega_j \mid j \in J\} \quad (\text{A1.4})$$

も1次独立であると要請する。このとき、類似度関数 (similarity-measure function)

$$SM : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \quad (\text{A1.5})$$

を導入し、

$SM(\varphi, \omega_j) = 1, 0$  に従って、パターン  $\varphi \in \Phi$  は各々、  $\omega_j$  と

確定的な類似関係、相違関係にあり、また、  $0 < SM(\varphi, \omega_j) < 1$

の場合は、曖昧な類似・相違関係にある (A1.6)

と、SM を解釈しよう。

関数 SM は次の axiom 2を満たすように構成されねばならない。特に、 axiom 2の (i) なる直交性は、カテゴリ候補の分離・抽出が効果的に行われ、

カテゴリ候補の鋭利な削減 (a sharp reduction)

をもたらすために要請されていることに注意しておく。

### Axiom 2 (類似度関数 SM の満たすべき公理)

(i) (正規直交性; orthonormality)

$$\forall i, \forall j \in J, SM(\omega_i, \omega_j) = \delta_{ij} (= 1 \text{ if } i=j, = 0 \text{ if } i \neq j).$$

(ii) (規格化条件, 正規性; probability condition, normality)

$$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} SM(\varphi, \omega_j) = 1.$$

(iii) (写像  $T$  の下での不変性; invariance under mapping  $T$ )

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j). \quad \square$$

## 付録2. ラプラシアンによる顔画像の、エッジの抽出と、その計算機シミュレーション結果

本付録2では、濃淡画像から太さの変わらない線要素を抽出するために使われるラプラス演算子について説明され、その離散近似式を用い得られた計算機シミュレーション結果について報告される。

### A2.1 2次微分による線要素の抽出処理

顔画像  $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$  の濃淡変化が激しい座標値  $\langle x_1, x_2 \rangle$  の集まりは、 $\varphi$  の認識を容易にする情報の集まりであり、エッジ (the part that is farthest from the middle, the border of anything) の1部分を形成する。

画像をみた場合、エッジ部分の濃淡変化が強調されて知覚されるという“人間の眼球における濃淡知覚における1つの特性としてのマツハ現象”の存在が知られている。

一般に、 $q$ 次元直交座標系  $x = \langle x_1, x_2, \dots, x_q \rangle \in \mathbb{R}^q$  ( $q$ 次元実数値空間) における負の2次微分の総和 (半正值自己共役作用素)

$$\begin{aligned} H_q &\equiv \sum_{j=1}^q (\sqrt{-1} \cdot \partial / \partial x_j)^2 \\ &= - \sum_{j=1}^q \partial^2 / \partial x_j^2 \\ &\quad \text{on } L_2(\mathbb{R}^q; dx_1 dx_2 \cdots dx_q) \end{aligned} \quad (\text{A2.1})$$

の-1倍

$$-H_q \equiv \sum_{j=1}^q \partial^2 / \partial x_j^2 \quad (\text{A2.2})$$

は、ラプラス演算子 (ラプラシアン; Laplacian) と呼ばれ、数理物理学のポテンシャル論に頻繁に登場する線形演算子である。

2次元平面  $\mathbb{R}^2$  を導入し、画像  $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$  に2次微分

$$-H_2 \equiv \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2 \quad (\text{A2.3})$$

を作用させて得られる画像

$$\begin{aligned} \eta(x_1, x_2) \\ &\equiv (-H_2 \varphi)(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (\text{A2.4})$$

$$= [\partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2] \varphi(x_1, x_2) \quad (\text{A2.5})$$

$$= \partial^2 \varphi(x_1, x_2) / \partial x_1^2 + \partial^2 \varphi(x_1, x_2) / \partial x_2^2 \quad (\text{A2.6})$$

には、マツハ現象の効果が反映されていると考えられている。

画像  $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$  が可分なヒルベルト空間  $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^2; dx_1 dx_2)$  の元であるとする、

$$\begin{aligned} F(\lambda_1, \lambda_2; \varphi) \\ &\equiv (2\pi)^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dy_2 \exp(-\sqrt{-1} \lambda_1 y_1) \\ &\quad \cdot \exp(-\sqrt{-1} \lambda_2 y_2) \varphi(y_1, y_2) \end{aligned} \quad (\text{A2.7})$$

は、 $\varphi$  内に存在している、2次元空間角周波数  $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$  を持つ成分であり、角周波数成分  $F(\lambda_1, \lambda_2; \varphi)$  をすべての  $\lambda_1, \lambda_2$  にわたり、積分すれば、原画像  $\varphi(x_1, x_2)$  が復元されるという“フーリエ変換定理”

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_2 \exp(+\sqrt{-1} \lambda_1 x_1) \end{aligned}$$

$$\cdot \exp(+\sqrt{-1} \lambda_1 x_1) \cdot F(\lambda_1, \lambda_2; \varphi) \quad (\text{A2.8})$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned} & F(\lambda_1, \lambda_2; [\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2] \varphi(x_1, x_2)) \\ &= -[\lambda_1^2 + \lambda_2^2] \cdot F(\lambda_1, \lambda_2; \varphi) \end{aligned} \quad (\text{A2.9})$$

の成立が認められるから、式 (A2.6) の2次微分画像  $\eta(x_1, x_2)$  は原画像  $\varphi(x_1, x_2)$  の高域角周波数成分が自乗の形で強調されていることになる。

フーリエ変換定理を適用すれば、

$$\begin{aligned} & \eta(x_1, x_2) \\ &= [\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2] \varphi(x_1, x_2) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_2 \exp(+\sqrt{-1} \lambda_1 x_1) \\ & \quad \cdot \exp(+\sqrt{-1} \lambda_1 x_1) \cdot F(\lambda_1, \lambda_2; \eta) \end{aligned} \quad (\text{A2.10})$$

$$\begin{aligned} &= - \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_2 \exp(+\sqrt{-1} \lambda_1 x_1) \\ & \quad \cdot \exp(+\sqrt{-1} \lambda_1 x_1) \\ & \quad \cdot [\lambda_1^2 + \lambda_2^2] \cdot F(\lambda_1, \lambda_2; \varphi) \end{aligned} \quad (\text{A2.11})$$

が成立しており、式 (A2.7) の、原画像  $\varphi(x_1, x_2)$  の角周波数成分  $F(\lambda_1, \lambda_2; \varphi)$  が判明していると、式 (A2.6) の2次微分画像  $\eta(x_1, x_2)$  は復元されることに注意しておこう。

## A2.2 計算機シミュレーション

2次元直交整数値座標系  $x = \langle x_1, x_2 \rangle (x_1, x_2 \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\})$  においては、原画像  $\varphi(x_1, x_2)$  について、式 (A5.6) の2次微分画像  $\eta(x_1, x_2)$  を離散近似すると、その離散近似式は、

$$\begin{aligned} & \eta(x_1, x_2) \\ & \doteq \{ [\varphi(x_1+1, x_2) - \varphi(x_1, x_2)] \\ & \quad - [\varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1-1, x_2)] \} \\ & + \{ [\varphi(x_1, x_2+1) - \varphi(x_1, x_2)] \\ & \quad - [\varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2-1)] \} \end{aligned} \quad (\text{A2.12})$$

$$\begin{aligned} &= \varphi(x_1+1, x_2) + \varphi(x_1-1, x_2) \\ & \quad + \varphi(x_1, x_2+1) + \varphi(x_1, x_2-1) \\ & \quad - 4 \cdot \varphi(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (\text{A2.13})$$

where  $x_1, x_2 \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

と求められる。

式 (A2.13) の離散近似式を用いて、式 (3.11) の原画像  $\varphi_n(x, y) (n \in \{1, 2, \dots, 30\})$  に対しその2次微分画像

$$\begin{aligned} & \eta_n(x, y) \\ &= \partial^2 \varphi(x, y) / \partial x^2 + \partial^2 \varphi(x, y) / \partial y^2 \end{aligned} \quad (\text{A2.14})$$

を計算機シミュレーションで求めると、Fig.A2.1, Fig.A2.2のようになる。mono\*\*.bmp, m\_rapra\*\*.bmpは各々、 $\varphi^{**}$ ,  $\eta^{**}$  を表している。



Fig.A2.1 18 original face-images  $\varphi_n(x, y)$  and the corresponding images  $\eta_n(x, y)$   
 $= \partial^2 \varphi(x, y) / \partial x^2 + \partial^2 \varphi(x, y) / \partial y^2$  ( $n=1 \sim 18$ )  
 $(\varphi_{**} = \text{mono} ** .\text{bmp}, \eta_{**} = \text{m\_rapra} ** .\text{bmp}, x = x_1, y = x^2)$ .



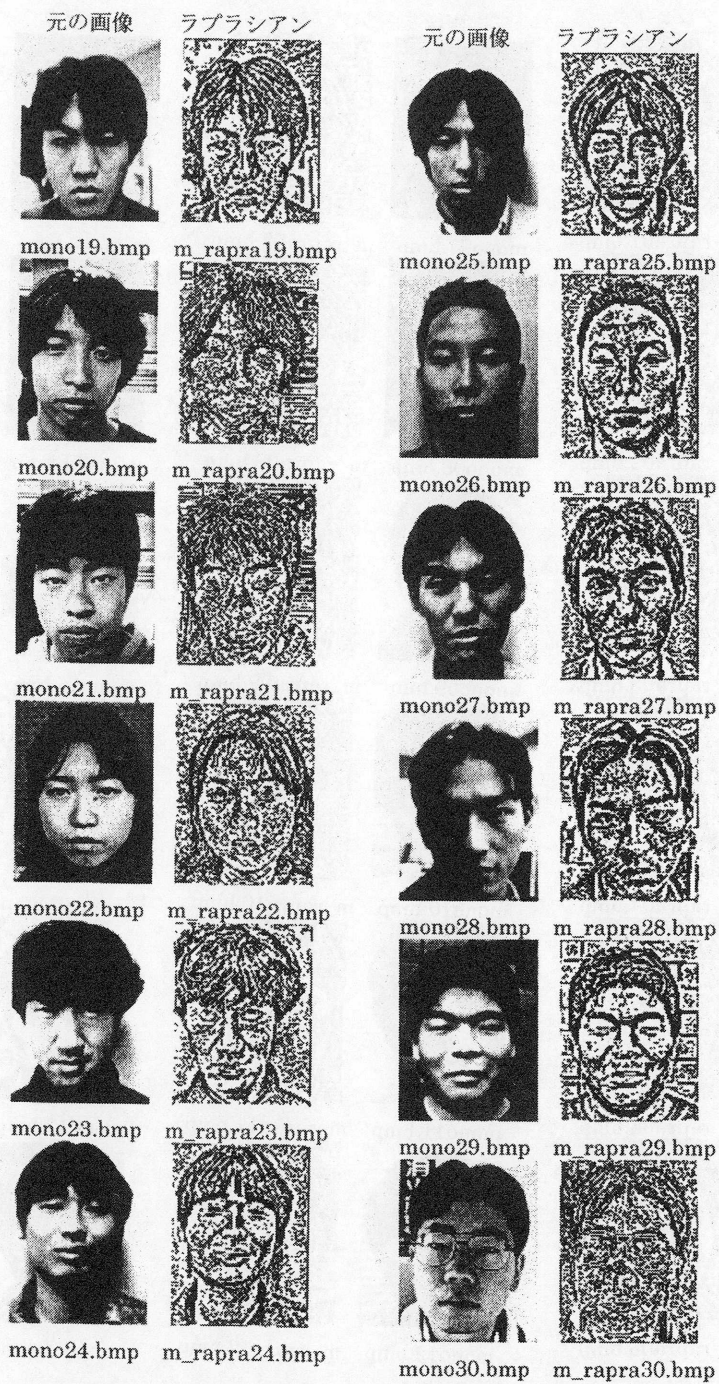


Fig.A2.2 12 original face-images  $\varphi_n(x, y)$  and the corresponding images  $\eta_n(x, y) = \partial^2 \varphi(x, y) / \partial x^2 + \partial^2 \varphi(x, y) / \partial y^2$  ( $n = 19 \sim 30$ ) ( $\varphi_{**} = \text{mono} ** . \text{bmp}$ ,  $\eta_{**} = \text{m\_rapra} ** . \text{bmp}$ ,  $x = x_1$ ,  $y = x^2$ ).



### 付録3. ガウス形核関数によるパターンの積分変換

本付録では、ガウス形関数を核関数に持つ積分作用素をパターンに適用し、積分変換後のパターンに備わっている諸性質を説明した後、顔画像に適用して得られる計算機シミュレーション結果が示される。

#### A3.1 正規確率分布と拡散方程式

2つの助変数

$$-\infty < m < +\infty, v \leq 0 \quad (\text{A3.1})$$

を持つ非負実数値関数

$$f(x) \equiv [2\pi v]^{-1/2} \cdot \exp[-(x-m)^2/(2v)] \\ , -\infty < m < +\infty \quad (\text{A3.2})$$

については、3つの等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx [2\pi v]^{-1/2} \cdot \exp[-(x-m)^2/(2v)] = 1 \quad (\text{A3.3})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x \cdot [2\pi v]^{-1/2} \cdot \exp[-(x-m)^2/(2v)] = m \quad (\text{A3.4})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx (x-m)^2 \cdot [2\pi v]^{-1/2} \cdot \exp[-(x-m)^2/(2v)] = v \quad (\text{A3.5})$$

が成り立ち、式 (A3.2) の関数  $f(x)$  は平均値  $m$ 、分散  $v$  の正規確率分布 (Gauss 確率分布) の確率密度関数であるといわれる。積分値の3つの近似

$$\int_{|x-m| \leq \sqrt{v}} dx [2\pi v]^{-1/2} \cdot \exp[-(x-m)^2/(2v)] \doteq 0.682 \quad (\text{A3.6})$$

$$\int_{|x-m| \leq 2\sqrt{v}} dx [2\pi v]^{-1/2} \cdot \exp[-(x-m)^2/(2v)] \doteq 0.955 \quad (\text{A3.7})$$

$$\int_{|x-m| \leq 3\sqrt{v}} dx [2\pi v]^{-1/2} \cdot \exp[-(x-m)^2/(2v)] \doteq 0.997 \quad (\text{A3.8})$$

にも留意しておく。

初期条件

$$\varphi(x; t) |_{t=0} = \eta(x) \quad (\text{A3.9})$$

の下で、拡散形偏微分方程式

$$\partial \varphi(x; t) / \partial t = 2^{-1} \cdot \partial^2 \varphi(x; t) / \partial^2 x \quad (\text{A3.10})$$

の解  $\varphi(x; t)$  は、平均値  $x$ 、分散  $t$  のガウス核を持つ積分変換像

$$\varphi(x; t) \\ = (\exp[t\{-2^{-1} \cdot (\sqrt{-1}^{-1} d/dx)^2\}] \eta)(x) \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} dy [2\pi t]^{-1/2} \cdot \exp[-(x-y)^2/(2t)] \cdot \eta(y) \quad (\text{A3.11})$$

である (文献 [B3] の19.2節, 例3, pp.181-182)。

微分作用素

$$H \equiv \sqrt{-1}^{-1} d/dx \quad (\text{A3.12})$$

は、内積

$$\begin{aligned}
 & (\varphi, \eta) \\
 & = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi(x) \cdot \overline{\eta}(x)
 \end{aligned} \tag{A3.13}$$

を持つ可分なヒルベルト空間  $L_2((-\infty, +\infty); dx)$  での自己共役作用素である。

### A3.2 2次元ガウス形関数を核に持つ積分作用素によるパターンの変換

前節の内容を2次元化しよう。

2次元平面  $R^2$  を導入し、画像  $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$  が可分なヒルベルト空間  $\mathfrak{H} = L_2(R^2; dx_1 dx_2)$  の元であるとしよう。各処理対象画像パターン(第  $n \in \{0, 1, 2, \dots, 30\}$  番目の顔画像 [C28])  $\varphi_n(x, y)$  は、

$$\begin{aligned}
 & \text{内積 } (\varphi, \eta) \\
 & = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \varphi(x_1, x_2) \cdot \overline{\eta}(x_1, x_2)
 \end{aligned} \tag{A3.14}$$

$$\text{ノルム } \|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \tag{A3.15}$$

where

$$x_1 \equiv x, x_2 \equiv y \tag{A3.16}$$

を採用する可分なヒルベルト空間  $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$  の元である。ここに、 $\overline{\eta}$  は  $\eta$  の複素共役であり、

$$M = R^2 = \{x = \langle x_1, x_2 \rangle \mid -\infty < x_1, x_2 < +\infty\} \tag{A3.17}$$

$$dm(x) = dx_1 dx_2, \text{ where } x = \langle x_1, x_2 \rangle \tag{A3.18}$$

と設定されている。

式 (A3.11) は

$$\begin{aligned}
 & \eta(x_1, x_2) = \\
 & (\exp[v\{-2^{-1} \cdot (\sqrt{-1}^{-1} \partial / \partial x_1)^2\}] \\
 & \cdot \exp[v\{-2^{-1} \cdot (\sqrt{-1}^{-1} \partial / \partial x_2)^2\}] \varphi)(x_1, x_2) \\
 & = \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 [2\pi v]^{-1/2} \cdot \exp[-(x_1 - y_1)^2 / (2v)] \\
 & \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dy_2 [2\pi v]^{-1/2} \cdot \exp[-(x_2 - y_2)^2 / (2v)] \cdot \varphi(y_1, y_2) \\
 & = [2\pi v] \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dy_2 \\
 & \exp[-\{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\} / (2v)] \cdot \\
 & \varphi(y_1, y_2)
 \end{aligned} \tag{A3.19}$$

と2次元化され、

$$= (\exp[v \cdot 2^{-1} \cdot G] \varphi)(x_1, x_2) \tag{A3.20}$$

とも再表現される。

ここに、

$$\begin{aligned}
 & G = -(\sqrt{-1}^{-1} \partial / \partial x_1)^2 - (\sqrt{-1}^{-1} \partial / \partial x_2)^2 \\
 & = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2
 \end{aligned} \tag{A3.21}$$

は

$$\forall \varphi \in L_2(R^2, dx_1 dx_2), \tag{A3.22}$$

$$\|\mathbf{G}\varphi\| \leq \|\varphi\| \text{ (有界性)} \tag{A3.22}$$

$$\wedge (\mathbf{G}\varphi, \varphi) \leq 0 \text{ (半負値性)} \tag{A3.23}$$

を満たし、可分なヒルベルト空間  $L_2(R^2, dx_1 dx_2)$  での有界な半負値自己共役作用素であり、式 (A2.14) のラプラシアン (Laplacian) である。

### A3.3 計算機シミュレーション

本計算機シミュレーションでは、前計算機シミュレーション [C28] と同様、式 (A3.14) の内積  $(\varphi, \eta)$  の近似式として、

$$\begin{aligned} & (\varphi, \eta) \\ & \doteq \sum_{x_1=-53}^{+53} \sum_{x_2=-39}^{+40} \varphi(x_1, x_2) \\ & \quad \cdot \eta(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{A3.24}$$

where

$$\Delta x_1 = 1, \Delta x_2 = 1 \tag{A3.25}$$

が採用された。

$$x_1 = i - 53 \in \{-53 \sim +53\}, i = 0 \sim 106 \tag{A3.26}$$

$$x_2 = 40 - j \in \{-39 \sim +40\}, j = 0 \sim 79 \tag{A3.27}$$

$$\begin{aligned} & K(x_1, x_2) \\ & \equiv [2\pi\nu] \cdot \exp[-\{x_1^2 + x_2^2\} / (2\nu)] \end{aligned} \tag{A3.28}$$

として、2式 (A3.19), (A3.20) の  $\eta$  は、

$$\begin{aligned} & \eta(i - 53, 40 - j) \\ & = \sum_{k=0}^{106} \sum_{\ell=0}^{79} K((i - 53) - (k - 53), \\ & (40 - j) - (40 - \ell)) \cdot \varphi(k - 53, 40 - \ell) \\ & = \sum_{k=0}^{106} \sum_{\ell=0}^{79} K(i - k, \ell - j) \cdot \\ & \quad \varphi(k - 53, 40 - \ell) \\ & = \sum_{k=0}^{106} \sum_{\ell=0}^{79} [2\pi\nu] \cdot \exp[-\{(i - k)^2 \\ & \quad + (j - \ell)^2\} / (2\nu)] \cdot \varphi(k - 53, 40 - \ell) \end{aligned} \tag{A3.29}$$

と近似された。

分散  $\nu$  が

$$\nu = 0.5, \nu = 1.0, \nu = 1.5, \nu = 2.0, \nu = 2.5, \nu = 3.0$$

と設定された場合、式 (A3.29) の変換画像  $\eta$  に式 (A3.8) を考慮し、求めた結果を Fig.A3 に示す。分散  $\nu$  が大になるにつれて、段々不鮮明になっていることがわかる。

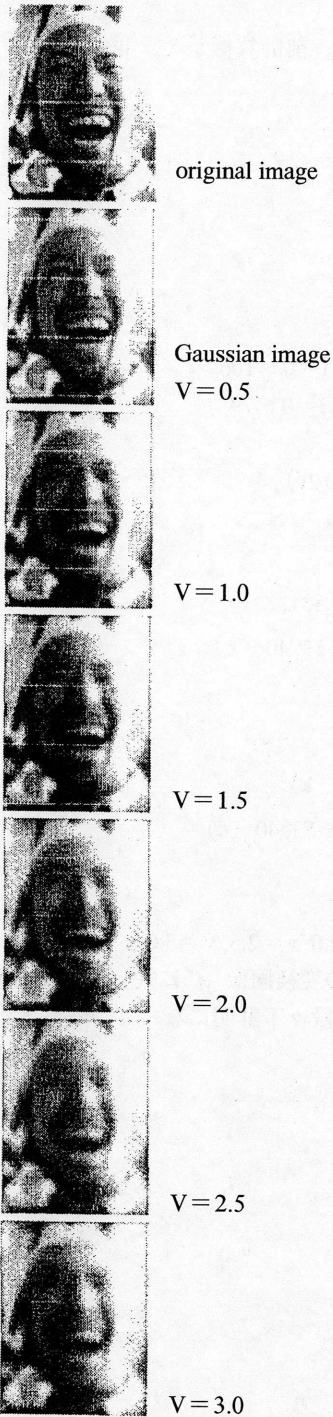


Fig.A3 An original image(variance  $v=0$ ) and the corresponding Gaussian images  
( $v=0.5, v=1.0, v=1.5, v=2.0, v=2.5, v=3.0$ )

## 付録4. 平面上のパターンと、そのパターンモデル

本付録4では、平面上のパターン $\varphi$ と平面上の“ $\varphi$ に対応する平面上の（第2章のaxiom 1を満たす）パターンモデル $T\varphi$ ”との2表現について研究される。

### A 4.1 平面上のパターンの表現

まず、任意の2点 $\psi_1, \psi_2$ を通るパターン $\varphi$ を次の補助定理A 4.1で表現しよう。

[補助定理A 4.1] (直線上のパターンの表現定理)

可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の任意の2点 $\psi_1, \psi_2$ を通る直線 $\varphi \in \mathfrak{H}$ は、

$$\varphi = a_1 \cdot \psi_1 + a_2 \cdot \psi_2 \quad (\text{A4.1})$$

と表される。但し、 $\{\psi_1, \psi_2\}$ は1次独立な系とする。ここに、この1次結合の2つの実数係数 $a_1, a_2$ は、 $b$ を任意の実数として、

$$a_1 = [\|\psi_2 - \psi_1\| - b] / \|\psi_2 - \psi_1\| \quad (\text{A4.2})$$

$$a_2 = b / \|\psi_2 - \psi_1\| \quad (\text{A4.3})$$

と与えられ、等式

$$a_1 + a_2 = 1 \quad (\text{A4.4})$$

を満たしている。

$$(\text{証明}) \quad (\psi_2 - \psi_1) / \|\psi_2 - \psi_1\| \in \mathfrak{H} \quad (\text{A4.5})$$

は $\psi_1$ から $\psi_2$ へと向かう線分上の単位ベクトルであるから、 $b$ を任意の実数として、2点 $\psi_1, \psi_2$ を通る直線上の任意の点 $\varphi \in \mathfrak{H}$ は、

$$\varphi = \psi_1 + b \cdot (\psi_2 - \psi_1) / \|\psi_2 - \psi_1\| \in \mathfrak{H} \quad (\text{A4.6})$$

と表される。この式(4.6)を変形すると、3式(A4.1) ~ (A4.3)が得られ、等式(A4.4)も成立していることもわかる。□

$$b=0, b=\|\psi_2 - \psi_1\| \quad (\text{A4.7})$$

と設定すれば、式(A4.1)の $\varphi$ は $\varphi = \psi_1, \varphi = \psi_2$ を得、式(A4.1)の直線 $\varphi$ は2点 $\psi_1, \psi_2$ を通ることがわかる。

上述の補助定理A 4.1を適用すれば、任意の有限個の点 $\psi_q, q \in Q$ を通る平面上の点 $\varphi$ の表現式を指摘する次の定理A 4.1が成り立つ。

[定理A 4.1] (パターンの平面化定理)

可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の元としての有限個のパターン $\psi_q \in \mathfrak{H}$ から成る集合

$$\psi_q \in \mathfrak{H}, q \in Q \quad (\text{A4.7})$$

は、 $\mathfrak{H}$ の1次独立な系としよう。各 $\psi_q$ を頂点とする多角形を含む平面上の任意の点 $\varphi \in \mathfrak{H}$ は、等式

$$\sum_{q \in Q} a_q = 1 \quad (\text{A4.8})$$

を満たす実数 $a_q$ を1次結合の実数係数とする1次結合

$$\varphi = \sum_{q \in Q} a_q \cdot \psi_q \in \mathfrak{H} \quad (\text{A4.9})$$

として、表される。

$$(\text{証明}) \quad a_q = 1 \wedge [\forall k \in Q - \{q\}, a_k = 0]$$

$$\Rightarrow \varphi = \psi_q \quad (\text{A4.10})$$

を得、式 (A4.9) の平面  $\varphi$  は、任意の  $\psi_q \in \mathfrak{F}$  を通ることがわかる。式 (A4.9) の  $\varphi$  は、任意の  $q \in Q$  についての点  $\psi_q \in \mathfrak{F}$  を各頂点とする多角形を含む平面上の任意の点であることがわかる。

さて、等式 (A4.8) を満たす式 (A4.7) のパターンの系  $\{\psi_q | q \in Q\}$  にパターン

$$\eta \left( \neq \sum_{q \in Q} a_q \cdot \psi_q \in \mathfrak{F} \right) \quad (\text{A4.11})$$

を付加して得られる系

$$\{\psi_q | q \in Q\} \cup \{\eta\} \quad (\text{A4.12})$$

は1次独立な系として、また、 $b$  を任意の実数として、パターン

$$\begin{aligned} \varphi' &= \sum_{q \in Q} a_q \cdot \psi_q + b \cdot \\ & \left[ \eta - \sum_{q \in Q} a_q \cdot \psi_q \right] / \left\| \eta - \sum_{q \in Q} a_q \cdot \psi_q \right\| \in \mathfrak{F} \end{aligned} \quad (\text{A4.13})$$

を考えよう。添字の集合  $Q$  を、

$$Q = \{1, 2, \dots, n\} \quad (\text{A4.14})$$

とし、各  $c_q, c_{n+1}$  を、

$$\begin{aligned} c_q &= a_q \cdot \left[ \left\| \eta - \sum_{q \in Q} a_q \cdot \psi_q \right\| - b \right] \\ & \quad / \left\| \eta - \sum_{q \in Q} a_q \cdot \psi_q \right\| \end{aligned} \quad (\text{A4.14})$$

$$c_{n+1} = b / \left\| \eta - \sum_{q \in Q} a_q \cdot \psi_q \right\| \quad (\text{A4.15})$$

とおくと、この式 (A4.13) の  $\varphi'$  は、

$$\varphi' = \sum_{q=1}^n c_q \cdot \psi_q + c_{n+1} \cdot \eta \quad (\text{A4.15})$$

と表される。ここで、

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^n c_q + c_{n+1} \\ &= \sum_{q=1}^n c_q + \sum_{q=1}^n a_q \cdot c_{n+1} \quad \because \text{式 (A4.8)} \\ &= \sum_{q=1}^n [c_q + a_q \cdot c] \\ &= \sum_{q=1}^n [a_q \cdot \{ \left\| \eta - \sum_{q \in Q} a_q \cdot \psi_q \right\| - b \} \\ & \quad + a_q \cdot b] / \left\| \eta - \sum_{q \in Q} a_q \cdot \psi_q \right\| \quad \because \text{2式 (A4.14), (A4.15)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{q \in Q} a_q \\ &= 1 \quad \because \text{式 (A4.8)} \end{aligned} \quad (\text{A4.16})$$

の成立に注意すると、式 (A4.13) の  $\varphi'$  は、任意の  $q \in Q$  についての点  $\psi_q$  と、 $\eta$  とを各頂点とする多角形を含む平面上の任意の点であることがわかった。□

## A4.2 平面上のパターンモデル $T\varphi$ の表現

本節では、前節の定理A4.1の応用として、モデル  $T\varphi$  が原パターン  $\varphi$  と同じに見えるようなモデル構成作用素

$$T: \Phi \rightarrow \Phi \quad (\text{A4.17})$$

を構成する。

#### A4.2.1 モデル構成原理

axiom 1 とパターン集合  $\Phi$ , モデル構成作用素  $T$  について、説明しよう。

処理の対象とするパターン  $\varphi$  の集合  $\Phi$  はある可分なヒルベルト空間  $\mathfrak{H}$  の、零元  $0$  を含むある部分集合であり、この  $\Phi$ , 並びに式 (A4.17) の写像  $T$  は2.2節のaxiom 1を満たさなければならない。このとき、写像  $T$  は**モデル構成作用素** (model-construction operator) と呼ばれ、 $T\varphi \in \Phi$  は  $\varphi \in \Phi$  の代りとなり得るという意味で、パターン  $\varphi \in \Phi$  のモデル (model) と呼ばれる。

現実のパターン  $\varphi$  から離れ過ぎても密着し過ぎても不適切というという意味で、よいパターンモデル  $T\varphi$  とは現実の実用的状況の、バランスのとれた抽象化を表現していなければならない。写像  $T$  は、パターン  $\varphi \in \Phi$  の**簡略化規則** (simplification rule) を与えていると考えられる。

axiom 1からわかるように、パターン集合  $\Phi$  は、埋込性

$$T \cdot \Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \subset \Phi \quad (\text{A4.18})$$

を満たし、原点 ( $=0$ ) を始点とし、 $\Phi$  の任意の点を通る半直線を含むような集合、つまり、**錐**であらねばならない。

$$\begin{aligned} & \mathbb{R}^{++} \cdot \Psi \\ & \equiv \{r^{++}\varphi \mid r^{++} \in \mathbb{R}^{++} (\text{正実数全体の集合}), \varphi \in \Psi\} \end{aligned} \quad (\text{A4.19})$$

$$T \cdot \Psi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Psi\} \quad (\text{A4.20})$$

として、零元  $0$  を含む “パターンと判明している  $\varphi \in \mathfrak{H}$  の基本集合 (基本領域; basic domain)”

$$(0 \in) \Phi_B (\subset \mathfrak{H}) \quad (\text{A4.21})$$

を導入し、処理の対象とする問題のパターン  $\varphi$  の集合を

$$\Phi = \mathbb{R}^{++} \cdot (\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B) \quad (\text{A4.22})$$

とおいてみよう。

このとき、axiom 1を実現する対 **【 $\Phi, T$ 】** を構成する方法を指摘する定理2.1が成り立つ。定理2.1は、

$$\begin{aligned} & \text{「写像 } T \text{ が axiom 1 の (i), (ii), (iii) の3後半, 並びに、} \\ & \text{(iv) を満たせば、対 } \mathbf{【\Phi, T】} \text{ が axiom 1 を満たす」} \end{aligned} \quad (\text{A4.23})$$

を明らかにしている。

#### A4.2.2 1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ を採用している場合

可分なヒルベルト空間  $\mathfrak{H}$  の元  $\psi_\ell$  から成る系  $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$  は1次独立な系とする。

複素数  $c_\ell$  の組  $\{c_\ell\}_{\ell \in L}$  を選び、 $\psi_\ell, \ell \in L$  の1次結合  $\sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \psi_\ell$  を用いて、問題とするパターン  $\varphi \in \mathfrak{H}$  を近似することを考えよう。

$$\| \varphi - \sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \psi_\ell \| \rightarrow \min \quad (\text{A4.24})$$

ならしめる複素係数  $c_\ell(\varphi) \equiv c_\ell$  の組

$$\underline{c}(\varphi) \equiv \{c_\ell(\varphi) \mid \ell \in L\} \quad (\text{A4.25})$$

を用意する。それには、連立1次方程式

$$\sum_{k \in L} (\psi_k, \psi_\ell) \cdot c_k(\varphi) = (\varphi, \psi_\ell), \ell \in L \quad (\text{A4.26})$$

を解けば良い。このとき、 $\varphi \in \mathfrak{H}$  は

$$\exists \varphi_\perp \in \mathfrak{H}, \varphi = \sum_{\ell \in L} c_\ell(\varphi) \cdot \psi_\ell + \varphi_\perp \quad (\text{A4.27})$$

$$\wedge [\forall \ell \in L, (\varphi_\perp, \psi_\ell) = 0] \quad (\text{A4.28})$$

と、1次展開される。

その後、パターン  $\varphi \in \Phi$  から抽出される第  $l \in L$  番目の特徴量  $u(\varphi, l) \in \mathbb{R}$  (実数全体の集合) を

$$u(\varphi, l) = \begin{cases} 0 \cdots \cdots \cdots \sum_{k \in L} c_k(\varphi) = 0 \text{ のとき} & \text{(A4.29)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_l(\varphi) / \sum_{k \in L} c_k(\varphi) \\ \cdots \cdots \cdots \sum_{k \in L} c_k(\varphi) \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad \text{(A4.30)}$$

と設定し、特徴抽出写像

$$u: \Phi \times L \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{(A4.31)}$$

を構成する。式 (A4.17) の写像  $T$  を、

$$T\varphi \equiv \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \psi_\ell) \cdot \psi_\ell \quad \text{(A4.32)}$$

と定義する。

$$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \psi_\ell) \in [0, 1] \quad \text{(A4.33)}$$

が成立しており、各  $c_\ell(\varphi)$  が実数値であるようパターン  $\varphi \in \Phi$  の場合、式 (A4.32) のパターンモデル  $T\varphi$  は各  $\psi_\ell$  ( $\ell \in L$ ) を頂点とする多角形を含む平面上のパターンであることが、定理 A.4.1 よりわかる。そうすれば、次の定理 A.4.2 が成り立つ。

[定理 A.4.2] (平面上のパターンモデル構成定理)

$\{\psi_k\}_{k \in L}$  は 1 次独立な系とする。 $c_\ell(\varphi)$  が任意の  $\ell \in L$  につき実数値であるようなパターン  $\varphi$  の集合  $\Phi$  を考える。

2 式 (A4.29), (A4.30) のごとく、定義される式 (A4.31) の特徴抽出写像  $u$  を用いて、式 (A4.32) のように定義される写像  $T$  は、axiom 1 の (i), (ii), (iii) の 3 後半、並びに、(iv) を満たす。□

定理 A.4.1 を定理 A.4.2 に適用すれば、次の定理 A.4.2 の系 1 が成立し、新しく、モデル構成写像  $T$  が得られた。

[定理 A.4.2 の系 1] (平面上の対  $[\Phi, T]$  の構成定理)

$\{\psi_k\}_{k \in L}$  は 1 次独立な系とする。定理 A.4.2 の写像  $T$  に対し、処理の対象とする問題のパターンの集合  $\Phi$  を式 (A4.22) の如く設定すれば、対  $[\Phi, T]$  が axiom 1 を満たす。□

定理 A.4.2 を証明するのに必要な 3 補助定理 A.4.2, A.4.3, A.4.4 を先ず、掲げる。

[補助定理 A.4.2] (1 次結合係数  $c_\ell(\varphi)$  の諸性質)

$\{\psi_k\}_{k \in L}$  は 1 次独立な系とする。

$\forall \varphi \in \Phi, \forall \ell \in L,$

(i)  $c_\ell(\sum_{k \in L} c_k(\varphi) \cdot \psi_k + \varphi_\perp)$

$= c_\ell(\sum_{k \in L} c_k(\varphi) \cdot \psi_k)$

(ii)  $c_\ell(a \cdot \varphi) = a \cdot c_\ell(\varphi)$

for any positive real number  $a$

(iii)  $c_\ell(\sum_{k \in L} c_k(\varphi) \cdot \psi_k) = c_\ell(\varphi)$

が成り立ち、

(iv)  $\forall k \in L, c_\ell(\psi_k) =$

$$\begin{cases} 1 & \text{if } \ell = k \\ 0 & \text{if } \ell \neq k. \end{cases}$$

(証明)  $\{\psi_k\}_{k \in L}$  は 1 次独立な系であり、各 1 次展開係数  $c_k(\varphi)$  は、連立 1 次方程式 (A4.26)



の解であるから、容易に (i) ~ (iv) の成立を確かめることができる。 □

補助定理 A 4.2 から、次の補助定理 A 4.3 が成り立つ。

[補助定理 A 4.3] (パターン  $\varphi \in \Phi$  から抽出される第  $\ell \in L$  番目の特徴量  $u(\varphi, \ell) \in \mathbb{R}$  の諸性質)  $\{\psi_k\}_{k \in L}$  は 1 次独立な系とする。2 式 (A4.29), (A4.30) で定義される式 (A4.31) の特徴抽出写像  $u$  に関し、次の (i) ~ (iv) が成り立つ：

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \ell \in L,$$

(i) (雑音  $\varphi_{\perp}$  の除去性)

$$\begin{aligned} u\left(\sum_{k \in L} c_k(\varphi) \cdot \psi_k + \varphi_{\perp}, \ell\right) \\ = u\left(\sum_{k \in L} c_k(\varphi) \cdot \psi_k, \ell\right) \end{aligned}$$

(ii)  $u(a \cdot \varphi, \ell) = u(\varphi, \ell)$

for any positive real number  $a$

(iii)  $u\left(\sum_{k \in L} c_k(\varphi) \cdot \psi_k, \ell\right) = u(\varphi, \ell)$

(iv)  $\forall k \in L, u(\psi_k, \ell) =$

$$\begin{cases} 1 & \text{if } \ell = k \\ 0 & \text{if } \ell \neq k. \end{cases}$$

(証明) (i) ~ (iv) は、補助定理 A 4.2 の (i) ~ (iv) を 2 式 (A4.29), (A4.30) に代入すると、各々、明らか。 □

補助定理 A 4.3 から、次の補助定理 A 4.4 が成り立つ。

[補助定理 A 4.4]

$\{\psi_k\}_{k \in L}$  は 1 次独立な系とする。2 式 (A4.29), (A4.30) で定義される式 (A4.31) の特徴抽出写像  $u$  を採用して得られる式 (A4.32) の写像  $T$  に関し、次の (i) ~ (iv) が成り立つ：

$$\forall \varphi \in \Phi,$$

(i) (雑音  $\varphi_{\perp}$  の除去性)

$$\begin{aligned} T\left(\sum_{k \in L} c_k(\varphi) \cdot \psi_k + \varphi_{\perp}\right) \\ = T\left(\sum_{k \in L} c_k(\varphi) \cdot \psi_k\right) \end{aligned}$$

(ii) (正定数倍についての不変性)

$$T(a \cdot \varphi) = T\varphi.$$

for any positive real number  $a$

(iii) (パターン  $\varphi$  の最小自乗近似式 (A4.27), (A4.28) での主成分  $\sum_{k \in L} c_k(\varphi) \cdot \psi_k$  のモデル性)

$$\begin{aligned} T\left(\sum_{k \in L} c_k(\varphi) \cdot \psi_k\right) \\ = T\varphi. \end{aligned}$$

(iv) (各パターン形状素  $\psi_k$  の  $T$ -不動点性)

$$\forall k \in L, T\psi_k = \psi_k.$$

(証明) (i) ~ (iv) は補助定理 A 4.3 の (i) ~ (iv) を式 (A4.32) に代入すると、各々、明らか。 □

(定理 A 4.2 の証明)

axiom 1 の (i), (ii), (iii) の 3 後半、並びに、(iv) の成立を確かめよう。

(i), 後半の証明：

$$\forall k \in K, c_k(\varphi_{\perp}) = 0 \quad \because \text{連立1次方程式 (A4.26)}$$

$$\therefore u(\varphi_{\perp}, k) = 0 \quad \because \text{2式 (A4.29), (A4.30)}$$

$$\therefore T\varphi_{\perp} = 0$$

を得る。特に、 $\varphi_{\perp} = 0$  と選ぶことができる。

(ii), 後半の証明：補助定理A.4.4の(ii) そのものである。

(iii), 後半の証明：補助定理A.4.3の(iii) より、

$$\text{(iii.1)} \quad \forall \ell \in L, c_{\ell}(\varphi) = 0 \text{ のとき}$$

$$\varphi = \varphi_{\perp} \text{ であるから、(i) の証明から、} T\varphi = 0$$

を得る。よって、 $\forall \ell \in L, c_{\ell}(T\varphi) = 0$  を得、同様にして、 $TT\varphi = 0$ 。つまり、 $TT\varphi = 0 = T\varphi$ 。

$$\text{(iii.1)} \quad \exists \ell \in L, c_{\ell}(\varphi) \neq 0 \text{ のとき}$$

連立1次方程式 (A4.26) の右辺の  $\varphi$  として、 $T\varphi$  を代入すればわかるように、

$$\forall \ell \in L, c_{\ell}(T\varphi) = u(\varphi, \ell) \tag{A4.34}$$

ここに、 $\exists \ell \in L, c_{\ell}(\varphi) \neq 0$  より、

$$\exists \ell \in L, u(\varphi, \ell) \neq 0 \tag{A4.35}$$

を得る。 $u(T\varphi, \ell)$  を求めよう。

式 (A4.34), (A4.35) より、

$$\exists \ell \in L, c_{\ell}(T\varphi) \neq 0 \tag{A4.36}$$

を得て、

$$\begin{aligned} & u(T\varphi, \ell) \\ &= c_{\ell}(T\varphi) / \left[ \sum_{\ell \in L} c_{\ell}(T\varphi) \right] \\ &\quad \because \text{3式 (A4.29), (A4.30), (A4.36)} \\ &= u(\varphi, \ell) / \left[ \sum_{\ell \in L} c_{\ell}(T\varphi) \right] \\ &\quad \because \text{2式 (A4.35), (A4.30) より、} \\ &\quad \sum_{k \in L} u(\varphi, k) = 1 \\ &= u(\varphi, \ell) \end{aligned}$$

がいえ、よって、 $T$  の定義式 (A4.32) より、

$$T(T\varphi) = T\varphi.$$

(iv) の証明： $\psi_k \neq 0$  を考慮すると、補助定理A.4.4の(iv) から、明らか。 □

#### A4.2.3 正規直交系 $\{\psi_{\ell}\}_{\ell \in L}$ を採用している場合

正規直交関係

$$(\psi_k, \psi_{\ell}) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = \ell \\ 0 & \text{if } k \neq \ell \end{cases} \tag{A4.37}$$

を満たすという意味で、 $\{\psi_{\ell}\}_{\ell \in L}$  が正規直交系の場合、 $\{\psi_k\}_{k \in L}$  は1次独立である。

本項では、1次独立な系  $\{\psi_{\ell}\}_{\ell \in L}$  が正規直交系の場合を考えよう。

この場合、連立1次方程式 (A4.26) の解  $c_{\ell}(\varphi)$ ,  $\ell \in L$  は、

$$c_{\ell}(\varphi) = (\varphi, \psi_{\ell}), \quad \ell \in L \tag{A4.38}$$

で与えられることがわかる。このとき、 $\varphi \in \mathfrak{H}$  は

$$\exists \varphi_{\perp} \in \mathfrak{H}, \varphi = \sum_{\ell \in L} (\varphi, \psi_{\ell}) \cdot \psi_{\ell} + \varphi_{\perp} \tag{A4.39}$$

$$\wedge [\forall l \in L, (\varphi_l, \psi_l) = 0] \quad (\text{A4.40})$$

と、1次展開され、これ、即ち、フーリエ式展開である。

パターン  $\varphi \in \Phi$  から抽出される第  $l \in L$  番目の特徴量  $u(\varphi, l) \in \mathbb{R}$  (実数全体の集合) は

$$u(\varphi, l) = \begin{cases} 0 \cdots \cdots \sum_{k \in L} (\varphi, \psi_k) = 0 \text{ のとき} & (\text{A4.41}) \\ (\varphi, \psi_l) / \sum_{k \in L} c_k(\varphi) & \\ \cdots \cdots \sum_{k \in L} c_k(\varphi) \neq 0 \text{ のとき} & (\text{A4.42}) \end{cases}$$

と設定し、特徴抽出写像

$$u: \Phi \times L \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A4.43})$$

を構成する。式 (A4.17) の写像 T を、

$$T\varphi \equiv \sum_{k \in L} u(\varphi, \psi_k) \cdot \psi_l \quad (\text{A4.44})$$

と定義する。

$$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{k \in L} u(\varphi, \psi_k) \in [0, 1] \quad (\text{A4.45})$$

が成立しており、各  $c_l(\varphi)$  が実数値であるようなパターン  $\varphi \in \Phi$  の場合、式 (A4.44) のパターンモデル  $T\varphi$  は各  $\psi_l (l \in L)$  を頂点とする多角形を含む平面上のパターンであることが、定理 A.4.1 よりわかる。そうすれば、次の定理 A.4.3 が成り立つ。

[定理 A.4.3] (平面上のパターンモデル構成定理2)

$\{\psi_k\}_{k \in L}$  は正規直交系とする。 $c_l(\varphi) = (\varphi, \psi_l)$  が任意の  $l \in L$  につき実数値であるようなパターン  $\varphi$  の集合  $\Phi$  を考える。

2式 (A4.41), (A4.42) のごとく、定義される式 (A4.43) の特徴抽出写像  $u$  を用いて、式 (A4.44) のように定義される写像 T は、axiom 1 の (i), (ii), (iii) の3後半、並びに、(iv) を満たす。□

定理 A.4.2 を定理 A.4.3 に適用すれば、次の定理 A.4.3 の系1が成立し、今1つのモデル構成写像 T が得られた。

[定理 A.4.3 の系1] (平面上の対  $[\Phi, T]$  の構成定理)

$\{\psi_k\}_{k \in L}$  は正規直交系とする。定理 A.4.3 の写像 T に対し、処理の対象とする問題のパターンの集合  $\Phi$  を式 (A4.22) の如く設定すれば、対  $[\Phi, T]$  が axiom 1 を満たす。□

## 付録5. 2カテゴリ、多カテゴリの場合の、線分上・多角形上の類似度関数 SM について

本付録5では、処理の対象とする問題のパターン集合  $\Phi$  に制限を加え、補助定理 A.4.1 の意味するところに従い、カテゴリが2つある場合の類似度関数 SM を構成し、更に、定理 A.4.1 の意味するところに従い、多カテゴリの場合の類似度関数 SM を構成する。また、上述に hint を得た類似度関数 SM の構成を論じる。

### A5.1 線分上、多角形上のパターンモデル $T\varphi$ についての類似度関数 SM の構成

処理の対象とする問題のパターン  $\varphi$  の集合  $\Phi$  はある可分な Hilbert 空間  $\Phi$  の部分集合であり、式 (2.16) で与えられているものである。この  $\Phi$  は零元  $0 \in \Phi$  を含んでいなければならない。

代表パターンの集合

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} \subset \Phi \subset \mathcal{P} \quad (\text{A5.1})$$

は、全カテゴリ集合

$$\mathcal{C} \equiv \{\mathcal{C}_j \mid j \in J\} \quad (\text{A5.2})$$

に1対1に対応するパターンの集合である。

式 (A5.1) の系  $\Omega$  は、

複素定数  $a_j$  の組  $\{a_j \mid j \in J\}$  について

$$\sum_{j \in J} a_j \cdot \omega_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J, a_j = 0 \quad (\text{A5.3})$$

が成立しているという意味で、**1次独立** (linearly independent) でなければならない。

更に、2.2節の axiom 1 を満たす式 (2.15) のモデル構成作用素  $T$  によって、式 (A5.1) の代表パターン集合  $\Omega$  が変換されて得られる系

$$T \cdot \Omega \equiv \{T\omega \mid \omega \in \Omega\} = \{T\omega_j \mid j \in J\} \quad (\text{A5.4})$$

も1次独立であると要請する。このとき、付録1の axiom 2 を満たす**類似度関数**

$$SM : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \quad (\text{A5.5})$$

を構成してみよう。

#### A5.1.1 $J = \{1\}$ の場合

$$\forall \varphi \in \Phi_1 \equiv \Phi, SM(\varphi, \omega_1) = 1 \quad (\text{A5.6})$$

とおけばよい。このとき、

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \Phi_1, T\varphi &= SM(\varphi, \omega_1) \cdot T\omega_1 \\ &= T\omega_1 \end{aligned} \quad (\text{A5.7})$$

と見做していること、つまり、任意のパターン  $\varphi \in \Phi_1$  に対応するパターンモデル  $T\varphi$  は  $\omega_1$  と同じに見えることになる。

#### A5.1.2 $J = \{1, 2\}$ の場合

2カテゴリの場合、補助定理A4.1の意味するところにより、パターン  $\varphi \in \Phi$  と同じに見えるパターンモデル  $T\varphi$  を2点  $T\omega_1, T\omega_2$  を通る線分上のパターンとして、

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \Phi_2, \\ T\varphi &= SM(\varphi, \omega_1) \cdot T\omega_1 + SM(\varphi, \omega_2) \cdot T\omega_2 \end{aligned} \quad (\text{A5.8})$$

と見做している際の、式 (A5.5) の類似度関数  $SM$  は次の定理A5.1で与えられる。 $\Phi_2$  は定理A5.1の系1で決定されている。

[定理A5.1] (線分上のパターンモデル  $T\varphi$  の類似度定理)

$J = \{1, 2\}$  の場合、不等式

$$0 \leq b \leq \|T\omega_2 - T\omega_1\| \quad (\text{A5.9})$$

を満たす実数  $b$  を選定して、3式 (A5.1), (A5.14), (A5.16) の如く、 $b$  を設定すれば、 $\Phi$  のある部分集合  $\Phi_2$  に属するパターン  $\varphi$  については、

$$\forall \varphi \in \Phi_2 \subset \Phi \quad (\text{A5.10})$$

$$\begin{aligned} SM(\varphi, \omega_1) \\ &= [\|T\omega_2 - T\omega_1\| - b] / \|T\omega_2 - T\omega_1\| \end{aligned} \quad (\text{A5.11})$$

$$SM(\varphi, \omega_2) = b / \|T\omega_2 - T\omega_1\| \quad (\text{A5.12})$$

とおけば、axiom 2 を式 (A5.5) の  $SM$  は満たす。 $\Phi_2$  は定理A5.1の系1で決定されている。  $\square$

(証明) 式 (A5.4) の  $T \cdot \Omega$  が1次独立であるとの仮定に留意すると、axiom 2の (i) (直交性) の成立は3式 (A5.13), (A5.14), (A5.16) から明らかである。

axiom 2の (ii) (規格化条件) の成立は2式 (A5.11), (A5.12) から明らかである。

axiom 2の (iii) (T-不変性) の成立は式 (A5.16) の設定を考慮して、axiom 1の (iii) (Tのべき等性) の後半  $T \cdot T = T$  から明らかである。 □

実数  $b$  の選定について説明しよう。

2条件

$$f(T\omega_1) = 0 \tag{A5.13}$$

$$f(T\omega_2) = \|T\omega_2 - T\omega_1\| \tag{A5.14}$$

を満たす関数

$$f: \Phi \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ (非負実数全体の集合)} \tag{A5.15}$$

を選び、

$$b \equiv f(T\varphi) \tag{A5.16}$$

とおけばよい。例えば、

$$\forall \varphi \in \Phi_2 \subset \Phi,$$

$$f(T\varphi)$$

$$= [ | \|T\varphi\| - \|T\omega_1\| | / | \|T\omega_2\| - \|T\omega_1\| | ] \cdot \|T\omega_2 - T\omega_1\| \tag{A5.17}$$

がそうである。

以上での  $\Phi_2$  は、3式 (A5.9), (A5.16), (A5.17) を考慮して、次の定理A5.1の系1の如く、設定しなければならない。

[定理A5.1の系1]

$J = \{1, 2\}$  の場合、3式 (A5.10) ~ (A5.12) での、処理可能な問題のパターン集合  $\Phi_2$  は、

$$\Phi_2 \equiv \{ \varphi \in \Phi \mid | \|T\varphi\| - \|T\omega_1\| | \leq | \|T\omega_2\| - \|T\omega_1\| | \} \tag{A5.18}$$

と与えられなければならない。 □

### A5.1.3 $J = \{1, 2, \dots, m\}$ ( $m \geq 2$ ) の場合

$m = 2$  の場合、②と一致する SM の一般的構成法が以下で説明される。

定理A4.1の意味するところにより、パターン  $\varphi \in \Phi$  と同じに見えるパターンモデル  $T\varphi$  は、点  $T\omega_j$  を各頂点とする多角形上のパターンとして、

$$\forall \varphi \in \Phi_m,$$

$$T\varphi$$

$$= \sum_{j \in J_m} SM(\varphi, \omega_j) \cdot T\omega_j + SM(\varphi, \omega_m) \cdot T\omega_m$$

$$= \sum_{j=1}^m SM(\varphi, \omega_j) \cdot T\omega_j \tag{A5.19}$$

と見做している際の、式 (A5.5) の類似度関数 SM は次の定理A5.2で与えられる。 $\Phi_m$  は定理A5.2の系1で決定されている (集合  $J_m$  については式 (A5.20) を参照)。

[定理A5.2] (多角形上のパターンモデル  $T\varphi$  の類似度定理)

$J = \{1, 2, \dots, m\}$  ( $m \geq 2$ ) の場合を考え、

$$J_m = \{1, 2, \dots, m-1\} \tag{A5.20}$$

とする。等式

$$\sum_{j \in J_m} a_j = 1 \quad (\text{A5.21})$$

を満たす各非負実数  $a_j$  を選ぶ。例えば、

$$a_j = p(\mathcal{C}_j) / \sum_{j \in J_m} p(\mathcal{C}_j), \quad j \in J_m \quad (\text{A5.22})$$

$$a_j = SM^-(\varphi, \omega_j) \quad (\text{A5.23})$$

などがそうである (式 (A5.23) については、式 (A5.24) を参照)。

$$\sum_{j \in J_m} SM^-(\varphi, \omega_j) = 1 \quad (\text{A5.24})$$

を満たし、axiom 2 を満たす類似度関数

$$SM^- : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \quad (\text{A5.25})$$

が存在するとして、不等式

$$0 \leq b \leq \|T\omega_m - \sum_{j \in J_m} a_j \cdot T\omega_j\| \quad (\text{A5.26})$$

を満たす実数  $b$  を選定して、3式 (A5.30), (A5.31), (A5.33) の如く、 $b$  を設定すれば、 $\Phi$  のある部分集合  $\Phi_m$  に属するパターン  $\varphi$  については、

$$\forall \varphi \in \Phi_m \subset \Phi \quad (\text{A5.27})$$

$$SM(\varphi, \omega_j)$$

$$= [\|T\omega_m - \sum_{j \in J_m} a_j \cdot T\omega_j\| - b]$$

$$/ \|T\omega_m - \sum_{j \in J_m} a_j \cdot T\omega_j\| \cdot SM^-(\varphi, \omega_j)$$

$$\text{for any } j \in J_m \quad (\text{A5.28})$$

$$SM(\varphi, \omega_m)$$

$$= b / \|T\omega_m - \sum_{j \in J_m} a_j \cdot T\omega_j\| \quad (\text{A5.29})$$

とおけば、axiom 2 を式 (A5.5) の  $SM$  は満たす。 $\Phi_m$  は定理 A5.1 の系 1 で決定されている。

(証明) 式 (A5.4) の  $T \cdot \Omega$  が 1 次独立であるとの仮定に留意し、且つ、式 (A5.25) の類似度関数  $SM^-$  は axiom 2 をみたすことを考慮して、axiom 2 の (i) (直交性) の成立は、3式 (A5.30), (A5.31), (A5.33) から明らかである。

axiom 2 の (ii) (規格化条件) の成立は 2式 (A5.24), (A5.28), (A5.29) から明らかである。

axiom 2 の (iii) (T-不変性) の成立は式 (A5.33) の設定を考慮して ( $a_j$  として、式 (A5.23) を採用している場合を含めて)、axiom 1 の (iii) (T のべき等性) の後半  $T \cdot T = T$  から明らかである。□

実数  $b$  の選定について説明しよう。

2条件

$$\forall j \in J_m, f(T\omega_j) = 0 \quad (\text{A5.30})$$

$$f(T\omega_m) = \|T\omega_m - \sum_{j \in J_m} a_j \cdot T\omega_j\| \quad (\text{A5.31})$$

を満たす関数

$$f : \Phi \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ (非負実数全体の集合)} \quad (\text{A5.32})$$

を選び、

$$b \equiv f(T\varphi) \quad (\text{A5.33})$$

とおけばよい。例えば、

$$\forall \varphi \in \Phi_m \subset \Phi,$$

$$f(T\varphi)$$

$$= \left[ \prod_{j \in J_m^-} | \|T\varphi\| - \|T\omega_j\| | \right. \\ \left. / \prod_{k \in J_m^-} | \|T\omega_m\| - \|T\omega_k\| | \right] \\ \cdot \|T\omega_m - \sum_{j \in J_m^-} a_j \cdot T\omega_j\| \quad (\text{A5.34})$$

がそうである。

以上での  $\Phi_m$  は、3式 (A5.26), (A5.33), (A5.34) を考慮して、次の定理A5.2の系1の如く、設定されなければならない。

[定理A5.2の系1]

$J = \{1, 2, \dots, m\}$  ( $m \geq 2$ ) の場合、3式 (A5.27) ~ (A5.29) での、処理可能な問題のパターン集合  $\Phi_m$  は、

$$\Phi_m \equiv \left\{ \varphi \in \Phi \mid \prod_{j \in J_m^-} | \|T\varphi\| - \|T\omega_j\| | \right. \\ \left. \leq \prod_{k \in J_m^-} | \|T\omega_m\| - \|T\omega_k\| | \right\} \quad (\text{A5.35})$$

と与えられなければならない。  $\square$

## A5.2 補間による類似度関数 SM の構成

2定理A5.1, A5.2と異なり、処理の対象とする問題のパターン集合  $\Phi$  に制限を加えないで、式 (A5.5) の類似度関数 SM を、次の定理A5.3で構成してみよう。

$$g_i(\varphi) \equiv | \|T\varphi\| - \|T\omega_i\| |, \quad i \in J \quad (\text{A5.36})$$

と定義される関数

$$g_i : \Phi \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (\text{A5.37})$$

の系を導入する。そして、関数

$$f_i : \Phi \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (\text{A5.38})$$

を、

$$f_i(\varphi) \\ \equiv \prod_{k \in J - \{i\}} g_k(\varphi) / \prod_{\ell \in J - \{i\}} g_\ell(\omega_i) \\ = \prod_{k \in J - \{i\}} | \|T\varphi\| - \|T\omega_k\| | \\ / \prod_{\ell \in J - \{i\}} | \|T\omega_i\| - \|T\omega_\ell\| | \quad (\text{A5.39})$$

と定義する。

[定理A5.3] (補間による類似度関数 SM の構成定理)

条件

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \|T\omega_i\| \neq \|T\omega_j\| \quad (\text{A5.40})$$

の下で、

$$\text{SM}(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} f_j(\varphi) / \sum_{i \in J} f_i(\varphi) \\ \quad \dots \sum_{i \in J} f_i(\varphi) > 0 \text{ の場合} \\ p(\mathcal{G}_j) \dots \sum_{i \in J} f_i(\varphi) = 0 \text{ の場合} \end{cases} \quad (\text{A5.41})$$

$$p(\mathcal{G}_j) \dots \sum_{i \in J} f_i(\varphi) = 0 \text{ の場合} \quad (\text{A5.42})$$

と定義される式 (A5.5) の関数 SM は axiom 2 を満たす。

(証明) 式 (A5.39) の  $f_i(\varphi)$  について、明らかに、

$$\forall j \in J, f_j(\omega_j) = 1 \quad (\text{A5.43})$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, f_j(\omega_i) = 0 \quad (\text{A5.44})$$

が成り立つとがわかり、よって、axiom 2の (i) (直交性) の成立は、2式 (A5.41), (A5.42) から明らかである。

axiom 2の (ii) (規格化条件) の成立は、SMの2定義式 (A5.41), (A5.42) から明らかである。

式 (A5.39) の設定を考慮して、axiom 1の (iii) (Tのべき等性) の後半  $T \cdot T = T$  を適用すると、

$$\forall j \in J, f_j(T\varphi) = f_j(\varphi) \quad (\text{A5.45})$$

を得、SMの2定義式 (A5.41), (A5.42) に式 (A5.45) を適用すると、axiom 2の (iii) (T-不変性) の成立は明らかである。□

axiom 2を満たす類似度関数  $SM'$  から axiom 2を満たす類似度関数  $SM$  を構成できることは、次の定理A5.4で指摘される。

[定理A5.4] (類似度関数  $SM$  の再帰的構成定理)

axiom 2を満たす類似度関数

$$SM' : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \quad (\text{A5.46})$$

と、式 (A5.39) の関数  $f_i(\varphi)$  とを用いて、

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} f_j(\varphi) \cdot SM'(\varphi, \omega_j) / \sum_{i \in J} f_i(\varphi) \cdot SM'(\varphi, \omega_i) \\ \dots \sum_{i \in J} f_i(\varphi) \cdot SM'(\varphi, \omega_i) > 0 \text{ の場合} \\ p(\mathcal{C}_j) \\ \dots \sum_{i \in J} f_i(\varphi) \cdot SM'(\varphi, \omega_i) = 0 \text{ の場合} \end{cases} \quad (\text{A5.47})$$

と定義される式 (A5.5) の関数  $SM$  は axiom 2を満たす。

(証明) 式 (A5.39) の  $f_i(\varphi)$  について成り立つ2式 (A5.43), (A5.44) と、式 (A5.46) の  $SM'$  が axiom 2の (i) (直交性) を満たすことから、明らかに、2式 (A5.47), (A5.48) で定義される関数  $SM$  は、axiom 2の (i) (直交性) を満たすことがわかる。

axiom 2の (ii) (規格化条件) の成立は2式 (A5.47), (A5.48) から明らかである。

axiom 2の (i) (T-不変性) の成立は式 (A5.45) と、式 (A5.46) の  $SM'$  が axiom 2の (iii) (T-不変性) を満たすことから、明らかである。□

### A5.3 2カテゴリの場合の、制限無し類似度関数の構成

補助定理A4.1を参考にして、定理A5.1を以下の定理A5.5の形式に、式 (A5.18) の  $\Phi_2$  でなしに  $\Phi$  の場合に拡張できる。

[定理A5.5] (2カテゴリ・類似度関数  $SM$  の構成定理)

$J = \{1, 2\}$  の場合、条件

$$\|T\omega_1\| \neq \|T\omega_2\| \quad (\text{A5.49})$$

の下で、

$$s_1(\varphi) = \left| \left[ \frac{\|T\omega_2 - T\omega_1\| - \{(\|T\varphi\| - \|T\omega_1\|) / (\|T\omega_2\| - \|T\omega_1\|)\} \cdot \|T\omega_2 - T\omega_1\|}{\|T\omega_2 - T\omega_1\|} \right] \right| \quad (\text{A5.50})$$

$$s_2(\varphi) = \left| \left[ \frac{\{(\|T\varphi\| - \|T\omega_1\|) / (\|T\omega_2\| - \|T\omega_1\|)\} \cdot \|T\omega_2 - T\omega_1\|}{\|T\omega_2 - T\omega_1\|} \right] \right|$$



$$\|T\omega_2 - T\omega_1\| / \|T\omega_2 - T\omega_1\| \quad (\text{A5.51})$$

として、

$$\text{SM}(\varphi, \omega_1) = s_1(\varphi) / [s_1(\varphi) + s_2(\varphi)] \quad (\text{A5.52})$$

$$\text{SM}(\varphi, \omega_2) = s_2(\varphi) / [s_1(\varphi) + s_2(\varphi)] \quad (\text{A5.53})$$

と定義される式 (A5.5) の関数 SM は axiom 2 を満たす。

(証明) 先ず、

$$s_1(\omega_1) = 1, s_1(\omega_2) = 0 \quad (\text{A5.54})$$

$$s_2(\omega_1) = 0, s_2(\omega_2) = 1 \quad (\text{A5.55})$$

であることがわかり、明らかに、2式 (A5.52), (A5.53) で定義される関数 SM は、axiom 2 の (i) (直交性) を満たすことがわかる。

axiom 2 の (ii) (規格化条件) の成立は2式 (A5.52), (A5.53) から明らかである。

axiom 2 の (i) (T-不変性) の成立は、axiom 1 の (iii) (T のべき等性) の後半  $T \cdot T = T$  から、明らかである。□

同様に、次の定理 A5.6 も成り立つ。

[定理 A5.6] (2カテゴリ・類似度関数 SM の構成定理)

$J = \{1, 2\}$  の場合、条件

$$\|T\omega_1 - T\omega_2\| > 0 \quad (\text{A5.56})$$

の下で、

$$\begin{aligned} s_1(\varphi) &= \|T\varphi - T\omega_2\| / \|T\omega_1 - T\omega_2\| \end{aligned} \quad (\text{A5.57})$$

$$\begin{aligned} s_2(\varphi) &= \|T\varphi - T\omega_1\| / \|T\omega_2 - T\omega_1\| \end{aligned} \quad (\text{A5.58})$$

として、2式 (A5.52), (A5.53) の如く、定義される式 (A5.5) の関数 SM は axiom 2 を満たす。

(証明) 先ず、2式 (A5.54), (A5.55) の成立がわかり、明らかに、2式 (A5.52), (A5.53) で定義される関数 SM は、axiom 2 の (i) (直交性) を満たすことがわかる。

axiom 2 の (ii) (規格化条件) の成立は2式 (A5.52), (A5.53) から明らかである。

axiom 2 の (i) (T-不変性) の成立は、axiom 1 の (iii) (T のべき等性) の後半  $T \cdot T = T$  から、明らかである。□

#### A5.4 多カテゴリの場合の、制限無しの類似度関数 SM の構成

定理 A4.1 を参考にして、定理 A5.2 を以下の定理 A5.7 の形式に、式 (A5.35) の  $\Phi_m$  でなしに一般の  $\Phi$  の場合に拡張できる。

[定理 A5.7] (多カテゴリ・類似度関数 SM の構成定理)

$J = \{1, 2, \dots, m\}$  ( $m \geq 2$ ) の場合を考え、

$$J_m^- = \{1, 2, \dots, m-1\} \quad (\text{A5.59})$$

とする。等式

$$\sum_{j \in J_m^-} a_j = 1 \quad (\text{A5.60})$$

を満たす各非負実数  $a_j$  を選ぶ。例えば、

$$a_j = p(\mathbb{C}_j) / \sum_{j \in J_m^-} p(\mathbb{C}_j), \quad j \in J_m^- \quad (\text{A5.61})$$

とか、或いは、

$$\sum_{j \in J_m^-} SM^-(\varphi, \omega_j) = 1 \quad (A5.62)$$

を満たし、axiom 2を満たす類似度関数

$$SM^- : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \quad (A5.63)$$

が存在するとして、

$$a_j = SM^-(\varphi, \omega_j) \quad (A5.64)$$

などがそうである。

$$\begin{aligned} s_j(\varphi) &= \left| \left[ \left\| T\omega_m - \sum_{j \in J_m^-} a_j \cdot T\omega_j \right\| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left\| T\omega_m - \sum_{j \in J_m^-} a_j \cdot T\omega_j \right\| \right. \right. \\ &\quad \cdot \prod_{i \in J_m^-} \{ \|T\varphi\| - \|T\omega_i\| \} \\ &\quad \left. \left. / \prod_{j \in J_m^-} \{ \|T\omega_m\| - \|T\omega_j\| \} \right] \right| \\ &\quad / \left\| T\omega_m - \sum_{j \in J_m^-} a_j \cdot T\omega_j \right\|, j \in J_m^- \end{aligned} \quad (A5.65)$$

$$\begin{aligned} s_m(\varphi) &= \left| \left[ \left\| T\omega_m - \sum_{j \in J_m^-} a_j \cdot T\omega_j \right\| \right. \right. \\ &\quad \cdot \prod_{i \in J_m^-} \{ \|T\varphi\| - \|T\omega_i\| \} \\ &\quad \left. \left. / \prod_{j \in J_m^-} \{ \|T\omega_m\| - \|T\omega_j\| \} \right] \right| \\ &\quad / \left\| T\omega_m - \sum_{j \in J_m^-} a_j \cdot T\omega_j \right\| \end{aligned} \quad (A5.66)$$

と置き、

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} s_j(\varphi) / \sum_{i \in J} s_i(\varphi) \\ \quad \dots \sum_{i \in J} s_i(\varphi) > 0 \text{ のとき} \\ p(\mathbb{C}^j) \quad \dots \sum_{i \in J} s_i(\varphi) = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (A5.67)$$

$$p(\mathbb{C}^j) \quad \dots \sum_{i \in J} s_i(\varphi) = 0 \text{ のとき} \quad (A5.68)$$

と定義される式 (A5.5) のSMはaxiom 2を満たす。

(証明)  $j \in J_m^-$  のとき、

$$s_j(\omega_j) = 1 \wedge s_j(\omega_m) = 0 \quad (A5.69)$$

$$s_m(\omega_j) = 0 \wedge s_m(\omega_m) = 1 \quad (A5.70)$$

の成立がわかり、axiom 2の (i) (直交性) の成立は、式 (A5.67) から明らかである。

axiom 2の (ii) (規格化条件) の成立は2式 (A5.67), (A5.68) から明らかである。

axiom 2の (iii) (T-不変性) の成立は式 (A5.65) の設定を考慮して ( $a_j$ として、式 (A5.64) を採用している場合を含めて)、axiom 1の (iii) (Tのべき等性) の後半  $T \cdot T = T$  から明らかである。

□

同様に、次の定理A5.8も成り立つ。

[定理A5.8] (多カテゴリ・類似度関数 SM の構成定理)

$J = \{1, 2, \dots, m\}$  ( $m \geq 2$ ) の場合を考える。条件

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \|T\omega_i - T\omega_j\| > 0 \quad (A5.71)$$

の下で、 $s_j(\varphi)$  を、

$$s_j(\varphi) = \min \{1, |(T\varphi, T\omega_j)| / |(T\omega_j, T\omega_j)|\} \quad (A5.72)$$

と定義し、不等式

$$0 \leq \max_{i \in J - \{j\}} s_j(\omega_i) \leq \varepsilon_0(j) < \varepsilon_1(j) \leq 1 \quad (\text{A5.73})$$

を満たす2つの実数  $\varepsilon_0(j)$ ,  $\varepsilon_1(j)$  を選び、固定する。

$$sm_j(\varphi) = \begin{cases} 0 & \cdots s_j(\varphi) \leq \varepsilon_0(j) \text{ のとき} \\ s_j(\varphi) & \cdots \varepsilon_0(j) < s_j(\varphi) < \varepsilon_1(j) \text{ のとき} \\ 1 & \cdots \varepsilon_1(j) \leq s_j(\varphi) \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{A5.74})$$

として、

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} sm_j(\varphi) / \sum_{i \in J} sm_i(\varphi) & \cdots \sum_{i \in J} sm_i(\varphi) > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{A5.75})$$

$$p(\mathcal{G}_j) \cdots \sum_{i \in J} sm_i(\varphi) > 0 \text{ のとき} \quad (\text{A5.76})$$

と定義される式 (A5.5) の関数 SM は axiom 2 を満たす。

(証明) 先ず、3式 (A5.72) ~ (A5.74) から、

$$\forall j \in J, sm_j(\omega_j) = 1 \quad (\text{A5.77})$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, sm_j(\omega_i) = 0 \quad (\text{A5.78})$$

の成立がわかり、明らかに、2式 (A5.75), (A5.76) で定義される関数 SM は、axiom 2 の (i) (直交性) を満たすことがわかる。

axiom 2 の (ii) (規格化条件) の成立は2式 (A5.75), (A5.76) から明らかである。

axiom 2 の (i) (T-不変性) の成立は、axiom 1 の (iii) (Tのべき等性) の後半  $T \cdot T = T$  から、明らかである。  $\square$

同様に、次の定理A5.9も成り立つ。

先ず、Schwarzの不等式

$$\forall \varphi, \forall \eta \in \mathfrak{F}, |(\varphi, \eta)| \leq \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \quad (\text{A5.79})$$

に注意する。

$$\begin{aligned} |(\varphi, \eta)| &= \|\varphi\| \cdot \|\eta\| \\ \Leftrightarrow [\|\varphi\| \cdot \|\eta\| = 0] \vee [\varphi \text{ が } \eta \text{ の非零定数倍}] \end{aligned} \quad (\text{A5.80})$$

にも注意しておく。

[定理A5.9] (多カテゴリ・類似度関数 SM の構成定理)

$J = \{1, 2, \dots, m\}$  ( $m \geq 2$ ) の場合を考える。2条件

$$\forall j \in J, \|T\omega_j\| > 0 \quad (\text{A5.81})$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \|T\omega_i - T\omega_j\| > 0 \quad (\text{A5.82})$$

の下で、 $s_j(\varphi)$  を、

$$s_j(\varphi) = \begin{cases} 0 & \cdots \|T\varphi\| = 0 \text{ の場合} \\ |(\varphi, T\omega_j) \cdot (T\varphi, T\omega_j)^{-1}| & \cdots \|T\varphi\| > 0 \text{ の場合} \end{cases} \quad (\text{A5.83})$$

と定義し、不等式

$$0 \leq \max_{i \in J - \{j\}} s_j(\omega_i) \leq \varepsilon_0(j) < \varepsilon_1(j) \leq 1 \quad (\text{A5.84})$$

を満たす2つの実数  $\varepsilon_0(j)$ ,  $\varepsilon_1(j)$  を選び、固定する。

$$sm_j(\varphi) = \begin{cases} 0 & \cdots s_j(\varphi) \leq \varepsilon_0(j) \text{ のとき} \\ s_j(\varphi) & \cdots \varepsilon_0(j) < s_j(\varphi) < \varepsilon_1(j) \text{ のとき} \\ 1 & \cdots \varepsilon_1(j) \leq s_j(\varphi) \text{ のとき} \end{cases} \quad (A5.85)$$

として、

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} sm_j(\varphi) / \sum_{i \in J} sm_i(\varphi) & \cdots \sum_{i \in J} sm_i(\varphi) > 0 \text{ のとき} \\ p(\mathcal{C}_j) & \cdots \sum_{i \in J} sm_i(\varphi) > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (A5.86)$$

$$p(\mathcal{C}_j) \quad \cdots \sum_{i \in J} sm_i(\varphi) > 0 \text{ のとき} \quad (A5.87)$$

と定義される式 (A5.5) の関数 SM は axiom 2 を満たす。

(証明) 先ず、3式 (A5.83) ~ (A5.85) から、

$$\forall j \in J, sm_j(\omega_j) = 1 \quad (A5.88)$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, sm_j(\omega_i) = 0 \quad (A5.89)$$

の成立がわかり、明らかに、2式 (A5.86), (A5.87) で定義される関数 SM は、axiom 2 の (i) (直交性) を満たすことがわかる。

axiom 2 の (ii) (規格化条件) の成立は2式 (A5.86), (A5.87) から明らかである。

axiom 2 の (i) (T-不変性) の成立は、axiom 1 の (iii) (T のべき等性) の後半  $T \cdot T = T$  から、明らかである。  $\square$

同様に、次の定理 A5.10 も成り立つ。

[定理 A5.10] (多カテゴリ・類似度関数 SM の構成定理)

$J = \{1, 2, \dots, m\}$  ( $m \geq 2$ ) の場合を考える。2条件

$$\forall j \in J, \|T\omega_j\| > 0 \quad (A5.90)$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \|T\omega_i - T\omega_j\| > 0 \quad (A5.91)$$

の下で、正定数  $a_j$  を選定・固定し、 $s_j(\varphi)$  を、

$$s_j(\varphi) = \exp(-\|T\varphi - T\omega_j\|/a_j) \quad (A5.92)$$

と定義し、不等式

$$0 \leq \max_{i \in J - \{j\}} s_j(\omega_i) \leq \varepsilon_0(j) < \varepsilon_1(j) \leq 1 \quad (A5.93)$$

を満たす2つの実数  $\varepsilon_0(j)$ ,  $\varepsilon_1(j)$  を選び、固定する。

$$sm_j(\varphi) = \begin{cases} 0 & \cdots s_j(\varphi) \leq \varepsilon_0(j) \text{ のとき} \\ s_j(\varphi) & \cdots \varepsilon_0(j) < s_j(\varphi) < \varepsilon_1(j) \text{ のとき} \\ 1 & \cdots \varepsilon_1(j) \leq s_j(\varphi) \text{ のとき} \end{cases} \quad (A5.94)$$

として、

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} sm_j(\varphi) / \sum_{i \in J} sm_i(\varphi) & \cdots \sum_{i \in J} sm_i(\varphi) > 0 \text{ のとき} \\ p(\mathcal{C}_j) & \cdots \sum_{i \in J} sm_i(\varphi) > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (A5.95)$$

$$p(\mathcal{C}_j) \quad \cdots \sum_{i \in J} sm_i(\varphi) > 0 \text{ のとき} \quad (A5.96)$$

と定義される式 (A5.5) の関数 SM は axiom 2 を満たす。

(証明) 先ず、3式 (A5.92) ~ (A5.94) から、

$$\forall j \in J, sm_j(\omega_j) = 1 \quad (A5.97)$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, sm_j(\omega_i) = 0 \quad (A5.98)$$

の成立がわかり、明らかに、2式 (A5.95), (A5.96) で定義される関数 SM は、axiom 2の (i) (直交性) を満たすことがわかる。

axiom 2の (ii) (規格化条件) の成立は2式 (A5.95), (A5.96) から明らかである。

axiom 2の (i) (T-不変性) の成立は、axiom 1の (iii) (T のべき等性) の後半  $T \cdot T = T$  から、明らかである。  $\square$

同様に、次の定理A5.11も成り立つ。

不等式

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J,$$

$$\|T\varphi - T\omega_j\| \leq \|T\varphi\| + \|T\omega_j\| \quad (A5.99)$$

の成立に目を向ければ、式 (A5.101) の  $s_j(\varphi)$  は非負実数であることに注意しておく。

[定理A5.11] (多カテゴリ・類似度関数 SM の構成定理)

$J = \{1, 2, \dots, m\}$  ( $m \geq 2$ ) の場合を考える。2条件

$$\forall j \in J, \|T\omega_j\| > 0 \quad (A5.100)$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \|T\omega_i - T\omega_j\| > 0 \quad (A5.101)$$

の下で、 $s_j(\varphi)$  を、

$$s_j(\varphi) = 1 - [\|T\varphi - T\omega_j\| / (\|T\varphi\| + \|T\omega_j\|)] \quad (A5.102)$$

と定義し、不等式

$$0 \leq \max_{i \in J - \{j\}} s_j(\omega_i) \leq \epsilon_0(j) < \epsilon_1(j) \leq 1 \quad (A5.103)$$

を満たす2つの実数  $\epsilon_0(j)$ ,  $\epsilon_1(j)$  を選び、固定する。

$$sm_j(\varphi) =$$

$$\begin{cases} 0 & \dots s_j(\varphi) \leq \epsilon_0(j) \text{ のとき} \\ s_j(\varphi) & \dots \epsilon_0(j) < s_j(\varphi) < \epsilon_1(j) \text{ のとき} \\ 1 & \dots \epsilon_1(j) \leq s_j(\varphi) \text{ のとき} \end{cases} \quad (A5.104)$$

として、

$$SM(\varphi, \omega_j) =$$

$$\begin{cases} sm_j(\varphi) / \sum_{i \in J} sm_i(\varphi) & \dots \sum_{i \in J} sm_i(\varphi) > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (A5.105)$$

$$\begin{cases} p(\mathbb{C}_j) & \dots \sum_{i \in J} sm_i(\varphi) > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (A5.106)$$

と定義される式 (A5.5) の関数 SM は axiom 2 を満たす。

(証明) 先ず、3式 (A5.102) ~ (A5.104) から、

$$\forall j \in J, sm_j(\omega_j) = 1 \quad (A5.107)$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, sm_j(\omega_i) = 0 \quad (A5.108)$$

の成立がわかり、明らかに、2式 (A5.105), (A5.106) で定義される関数 SM は、axiom 2の (i) (直交性) を満たすことがわかる。

axiom 2の (ii) (規格化条件) の成立は2式 (A5.105), (A5.106) から明らかである。

axiom 2の (i) (T-不変性) の成立は、axiom 1の (iii) (T のべき等性) の後半  $T \cdot T = T$  から、明らかである。  $\square$

同様に、次の定理A5.12も成り立つ。

[定理A5.12] (多カテゴリ・類似度関数 SM の構成定理)

$J = \{1, 2, \dots, m\}$  ( $m \geq 2$ ) の場合を考える。2条件

$$\forall j \in J, \|T\omega_j\| > 0 \quad (\text{A5.109})$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \|T\omega_i - T\omega_j\| > 0 \quad (\text{A5.110})$$

の下で、

$$s_j(\varphi) = \min_{i \in J - \{j\}} [\|T\varphi - T\omega_i\| / \min_{i \in J - \{j\}} \|T\omega_j - T\omega_i\|] \quad (\text{A5.111})$$

と定義される  $s_j(\varphi)$  を用い、

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} s_j(\varphi) / \sum_{i \in J} s_i(\varphi) \\ \dots \sum_{i \in J} s_i(\varphi) > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{A5.112})$$

$$\begin{cases} p(\mathcal{C}_j) \dots \sum_{i \in J} s_i(\varphi) > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{A5.113})$$

と定義される式 (A5.5) の関数 SM は axiom 2 を満たす。

(証明) 先ず、3式 (A5.109) ~ (A5.111) から、

$$\forall j \in J, s_j(\omega_j) = 1 \quad (\text{A5.114})$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, s_j(\omega_i) = 0 \quad (\text{A5.115})$$

の成立がわかり、明らかに、2式 (A5.112), (A5.113) で定義される関数 SM は、axiom 2 の (i) (直交性) を満たすことがわかる。

axiom 2 の (ii) (規格化条件) の成立は2式 (A5.112), (A5.113) から明らかである。

axiom 2 の (i) (T-不変性) の成立は、axiom 1 の (iii) (T のべき等性) の後半  $T \cdot T = T$  から、明らかである。□

同様に、特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \rightarrow Z \text{ (複素数全体の集合)} \quad (\text{A5.116})$$

を用いて定義される2つのパターン  $\varphi, \eta \in \Phi$  間の特徴間距離

$$Fdis(\varphi, \eta) \equiv \left[ \sum_{\ell \in L} w_\ell \cdot |u(\varphi, \ell) - u(\eta, \ell)|^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A5.117})$$

where

$$[\forall \ell \in L, 0 < w_\ell < \infty] \wedge \sum_{\ell \in L} w_\ell < \infty \quad (\text{A5.118})$$

の適用の下で、次の定理A5.13も成り立つ。

[定理A5.13] (多カテゴリ・類似度関数 SM の構成定理)

$J = \{1, 2, \dots, m\}$  ( $m \geq 2$ ) の場合を考える。2条件

$$\forall j \in J, \exists \ell \in L, u(T\omega_j, \ell) \neq 0 \quad (\text{A5.119})$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, Fdis(T\omega_i, T\omega_j) > 0 \quad (\text{A5.120})$$

の下で、 $s_j(\varphi)$  を、

$$s_j(\varphi) = \min_{i \in J - \{j\}} [Fdis(T\varphi, T\omega_i) / \max_{i \in J - \{j\}} Fdis(T\omega_j, T\omega_i)] \quad (\text{A5.121})$$

と定義し、

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} s_j(\varphi) / \sum_{i \in J} s_i(\varphi) \\ \dots \sum_{i \in J} s_i(\varphi) > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{A5.122})$$

$$\begin{cases} p(\mathcal{C}_j) \dots \sum_{i \in J} s_i(\varphi) > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{A5.123})$$

と定義される式 (A5.5) の関数 SM は axiom 2 を満たす。

(証明) 先ず、3式 (A5.119) ~ (A5.121) から、

$$\forall j \in J, s_j(\omega_j) = 1 \quad (\text{A5.124})$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, s_j(\omega_i) = 0 \quad (\text{A5.125})$$

の成立がわかり、明らかに、2式 (A5.122), (A5.123) で定義される関数 SM は、axiom 2 の (i) (直交性) を満たすことがわかる。

axiom 2 の (ii) (規格化条件) の成立は2式 (A5.122), (A5.123) から明らかである。

axiom 2 の (i) (T-不変性) の成立は、axiom 1 の (iii) (T のべき等性) の後半  $T \cdot T = T$  から、明らかである。□

同様に、次の定理 A5.14 も成り立つ。

[定理 A5.14] (多カテゴリ・類似度関数 SM の構成定理)

$J = \{1, 2, \dots, m\}$  ( $m \geq 2$ ) の場合を考える。2条件

$$\forall j \in J, \|T\omega_j\| > 0 \quad (\text{A5.126})$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \|T\omega_i - T\omega_j\| > 0 \quad (\text{A5.127})$$

の下で、 $s_j(\varphi)$  を、

$$s_j(\varphi) = \frac{\min_{i \in J - \{j\}} \|T\varphi - T\omega_i\|}{\max_{i \in J - \{j\}} \|T\omega_j - T\omega_i\|} \quad (\text{A5.128})$$

と定義し、不等式

$$0 \leq \max_{k \in J - \{j\}} s_j(\omega_k) \leq \varepsilon_0(j)$$

$$< \varepsilon_1(j) \leq \min_{i \in J - \{j\}} [\|T\omega_j - T\omega_i\| / \max_{i \in J - \{j\}} \|T\omega_j - T\omega_i\|] \leq 1 \quad (\text{A5.129})$$

を満たす2つの実数  $\varepsilon_0(j)$ ,  $\varepsilon_1(j)$  を選び、固定する。

$$sm_j(\varphi) = \begin{cases} 0 & \dots s_j(\varphi) \leq \varepsilon_0(j) \text{ のとき} \\ s_j(\varphi) & \dots \varepsilon_0(j) < s_j(\varphi) < \varepsilon_1(j) \text{ のとき} \\ 1 & \dots \varepsilon_1(j) \leq s_j(\varphi) \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{A5.130})$$

として、

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} sm_j(\varphi) / \sum_{i \in J} sm_i(\varphi) \\ \dots \sum_{i \in J} sm_i(\varphi) > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{A5.131})$$

$$\begin{cases} p(\mathcal{C}_j) \dots \sum_{i \in J} sm_i(\varphi) > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{A5.132})$$

と定義される式 (A5.5) の関数 SM は axiom 2 を満たす。

(証明) 先ず、5式 (A5.126) ~ (A5.130) から、

$$\forall j \in J, sm_j(\omega_j) = 1 \quad (A5.133)$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, sm_j(\omega_i) = 0 \quad (A5.134)$$

の成立がわかり、明らかに、2式 (A5.131), (A5.132) で定義される関数 SM は、axiom 2の (i) (直交性) を満たすことがわかる。

axiom 2の (ii) (規格化条件) の成立は2式 (A5.131), (A5.132) から明らかである。

axiom 2の (i) (T-不変性) の成立は、axiom 1の (iii) (T のべき等性) の後半  $T \cdot T = T$  から、明らかである。  $\square$

同様に、次の定理A5.15も成り立つ。

[定理A5.15] (多カテゴリ・類似度関数 SM の構成定理)

$J = \{1, 2, \dots, m\} (m \geq 2)$  の場合を考える。2条件

$$\forall j \in J, \exists \ell \in L, u(T\omega_j, \ell) \neq 0 \quad (A5.135)$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, Fdis(T\omega_i, T\omega_j) > 0 \quad (A5.136)$$

の下で、 $s_j(\varphi)$  を、

$$s_j(\varphi) = \frac{\min_{i \in J - \{j\}} Fdis(T\varphi, T\omega_i)}{\max_{i \in J - \{j\}} Fdis(T\omega_j, T\omega_i)} \quad (A5.137)$$

と定義し、不等式

$$\begin{aligned} 0 &\leq \max_{k \in J - \{j\}} s_j(\omega_k) \leq \epsilon_0(j) \\ &< \epsilon_1(j) \leq \min_{i \in J - \{j\}} Fdis(T\omega_j, T\omega_i) \\ &\quad / \max_{i \in J - \{j\}} \|T\omega_j - T\omega_i\| \leq 1 \end{aligned} \quad (A5.138)$$

を満たす2つの実数  $\epsilon_0(j)$ ,  $\epsilon_1(j)$  を選び、固定する。

$$sm_j(\varphi) = \begin{cases} 0 & \dots s_j(\varphi) \leq \epsilon_0(j) \text{ のとき} \\ s_1(\varphi) \dots \epsilon_0(j) < s_j(\varphi) < \epsilon_1(j) \text{ のとき} \\ 1 & \dots \epsilon_1(j) \leq s_j(\varphi) \text{ のとき} \end{cases} \quad (A5.139)$$

として、

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} sm_j(\varphi) / \sum_{i \in J} sm_i(\varphi) \\ \dots \sum_{i \in J} sm_i(\varphi) > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (A5.140)$$

$$\begin{cases} p(\mathcal{C}_j) \dots \sum_{i \in J} sm_i(\varphi) > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (A5.141)$$

と定義される式 (A5.5) の関数 SM は axiom 2 を満たす。

(証明) 先ず、5式 (A5.135) ~ (A5.139) から、

$$\forall j \in J, sm_j(\omega_j) = 1 \quad (A5.142)$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, sm_j(\omega_i) = 0 \quad (A5.143)$$

の成立がわかり、明らかに、2式 (A5.140), (A5.141) で定義される関数 SM は、axiom 2の (i) (直交性) を満たすことがわかる。

axiom 2の (ii) (規格化条件) の成立は2式 (A5.140), (A5.141) から明らかである。



axiom 2の (i) (T-不変性) の成立は、axiom 1の (iii) (T のべき等性) の後半  $T \cdot T = T$  から、明らかである。 □

**付録6. 数理形態学 (mathematical morphology) における侵食作用素  $\ominus$ , 膨張作用素  $\oplus$ , 開化作用素  $\circ$ , 閉示作用素  $\bullet$ , opening operator  $\circ$  に対応するモデル構成作用素  $T\circ$ , closing operator  $\bullet$  に対応するモデル構成作用素  $T\bullet$  と、その計算機シミュレーション**

本付録6では、処理の対象とする問題のパターン  $\varphi$  の集合  $\Phi$  と、有界実数値パターン  $\varphi \in \Phi$  が入力されたとき、2値 0, 1 の何れかをとるパターン  $T\varphi \in \Phi$  を出力する式 (2.15) のモデル構成作用素  $T$  との対  $[\Phi, T]$  が数理形態学を適用し、axiom 1 を満たすように構成され、計算機シミュレーション結果が示される。

**A6.1 axiom 1 を満たす対  $[\Phi, T]$  の構成**

対  $[\Phi, T]$  の構成については、2.2節で説明されている。axiom 1, 定理2.1に注意しておく。SS理論 [C1] ~ [C6] では、パターン  $\varphi$  は少なくとも、可分な一般抽象ヒルベルト空間  $\Phi$  の元である (2.4節を参照)。

**A6.2 binary pattern  $\varphi = \varphi(x)$**

まず、2つの集合

$$I \equiv \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \text{ (a set of integers)} \tag{A6.1}$$

$$I^n \subset n\text{-dimensional Euclidean space } R^n :$$

$$\begin{aligned} &\text{the set of } n\text{-tuples of integers (the Euclidean grid,} \\ &\text{the rectangular discrete grid)} \end{aligned} \tag{A6.2}$$

を導入すると、集合  $B \subset I^n$  は、

$$\varphi(x) = 1 \text{ if } x \in B, = 0 \text{ if } x \in \overline{B} \tag{A6.3}$$

と定義される binary pattern  $\varphi$  と等価であることに注意する。

侵食作用素, 膨張作用素, 開化作用素, 閉示作用素を定義するときは、パターン  $\varphi = \varphi(x)$  は 0, 1 のいずれかの値をとる binary pattern であり、

$$\varphi(x) \in \{0, 1\} \text{ for any } x \in I^n \tag{A6.4}$$

としよう。

2値化パターン  $\varphi = \varphi(x) \in \{0, 1\}$  の台 (support)  $\text{supp}(\varphi)$  とは、

$$\text{supp}(\varphi) \equiv \{x \in I^n \mid \varphi(x) = 1\} \tag{A6.5}$$

と定義されるものである。

**A6.3 侵食作用素  $\ominus$**

侵食作用素 (erosio operator)  $\ominus$  は、

$$\begin{aligned} (\varphi \ominus \psi)(x) &\equiv \inf_{b \in \text{supp}(\psi)} \varphi(x+b) \\ &\text{, where } \text{supp}(\psi) \neq \emptyset \end{aligned} \tag{A6.6}$$

と定義される。  $\varphi \ominus \psi$  は

erosion of pattern  $\varphi$  by structuring  $\psi$

と呼ばれる。 $\psi$  は discrete structuring element と呼ばれる。

次の定理A6.1は、演算 $\ominus$ が2値化パターン $\varphi$ の台を縮小させることを指摘している。

[定理A6.1] ( $\varphi \ominus \psi$  の縮小性定理) [C19]

$0 \in \text{supp}(\psi)$  ならば、 $\text{supp}(\varphi \ominus \psi) \subseteq \text{supp}(\varphi)$ . □

#### A6.4 膨張作用素 $\oplus$

膨張作用素 (dilation operator)  $\oplus$  とは、

$$(\varphi \oplus \psi)(x) \equiv \sup_{b \in \text{supp}(\psi)} \varphi(x-b), \text{ where } \text{supp}(\psi) \neq \emptyset \quad (\text{A6.7})$$

と定義される。 $\varphi \oplus \psi$  は

dilation of pattern  $\varphi$  by structuring  $\psi$

と呼ばれる。 $\psi$  は discrete structuring element と呼ばれる。

次の定理A6.2は、演算 $\oplus$ が2値化パターン $\varphi$ の台を拡張させることを指摘している。

[定理A6.2] ( $\varphi \oplus \psi$  の拡張性定理) [C19]

$0 \in \text{supp}(\psi)$  ならば、 $\text{supp}(\varphi) \subseteq \text{supp}(\varphi \oplus \psi)$ . □

#### A6.5 開化作用素 $\circ$

開化作用素 (opening operator)  $\circ$  とは、

$$(\varphi \circ \psi)(x) \equiv [(\varphi \ominus \psi) \oplus \psi](x) \quad (\text{A6.8})$$

と定義される。 $\varphi \circ \psi$  は

opening of pattern  $\varphi$  by structuring  $\psi$

と呼ばれる。 $\psi$  は discrete structuring element と呼ばれる。

次の定理A6.3は、2値化パターン $\varphi$ の多段階変換過程

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \varphi \circ \psi \rightarrow (\varphi \circ \psi) \circ \psi \\ &\rightarrow ((\varphi \circ \psi) \circ \psi) \circ \psi \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (\text{A6.9})$$

が第1段階で終了すること (単一段階で終了すること) を指摘している。

[定理A6.3] (開化作用素  $\circ$  のベキ等定理) [C19]

$\forall \varphi, [(\varphi \circ \psi) \circ \psi](x) = (\varphi \circ \psi)(x)$ . □

#### A6.6 閉示作用素 $\bullet$

閉示作用素 (closing operator)  $\bullet$  とは、

$$(\varphi \bullet \psi)(x) \equiv [(\varphi \oplus \psi) \ominus \psi](x) \quad (\text{A6.10})$$

と定義される。 $\varphi \bullet \psi$  は

closing of pattern  $\varphi$  by structuring  $\psi$

と呼ばれる。 $\psi$  は discrete structuring element と呼ばれる。

次の定理A6.4は、2値化パターン $\varphi$ の多段階変換過程

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \varphi \bullet \psi \rightarrow (\varphi \bullet \psi) \bullet \psi \\ &\rightarrow ((\varphi \bullet \psi) \bullet \psi) \bullet \psi \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (\text{A6.11})$$

が第1段階で終了すること (単一段階で終了すること) を指摘している。

[定理A6.4] (閉作用素 ● のベキ等定理) [C19]

$$\forall \varphi, [(\varphi \bullet \psi) \bullet \psi](x) = (\varphi \bullet \psi)(x).$$

□

### A6.7 モデル構成作用素 $T_\circ$

以上の数理形態学の4演算  $\ominus, \oplus, \circ, \bullet$  を考慮し、axiom 1を満たすパターンモデル  $T_\circ \varphi$  を構成し、axiom 2を満たす対  $[T_\circ, \Phi]$  を構成しよう。

opening operator  $\circ$  に対応するモデル構成作用素  $T_\circ$  とは、

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{I}^n, \varphi(x) \in \{0, 1\} \Rightarrow \\ (T_\circ \varphi)(x) = (\varphi \circ \psi)(x) \text{ for any } x \in \mathbb{I}^n \end{aligned} \quad (\text{A6.12})$$

が成立する如きものである。

整数値格子集合  $\mathbb{I}^n$  の上で定義された実数値パターン

$$\begin{aligned} \varphi(x) \in \mathbb{R} \text{ (実数体; real number field)} \\ \text{for any } x \in \mathbb{I}^n \end{aligned} \quad (\text{A6.13})$$

に対し、振幅の絶対値が1より大きくないパターン

$$\varphi^\#(x) \equiv \begin{cases} \varphi(x) / \sup_{x \in \mathbb{I}^n} |\varphi(x)| \\ \dots \sup_{x \in \mathbb{I}^n} |\varphi(x)| > 0 \text{ の時} \\ 0 \quad \dots \sup_{x \in \mathbb{I}^n} |\varphi(x)| = 0 \text{ の時} \end{cases} \quad (\text{A6.14})$$

を定義する。

1実変数  $u$  の2値関数

$$\text{psn}(u) \equiv 0 \text{ if } u < 0, \equiv 1 \text{ if } u \geq 0 \quad (\text{A6.15})$$

と、不等式

$$0 < h(x) \leq 1 \text{ for any } x \in \mathbb{I}^n \quad (\text{A6.16})$$

を満たす閾値関数 (threshold function)  $h(x)$  とを用意する。その後、2値化関数

$$\varphi^\star(x) \equiv \text{psn}(\varphi^\#(x) - h(x)) \in \{0, 1\} \quad (\text{A6.17})$$

を定義する。

このとき、

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{I}^n, \varphi(x) \in \{0, 1\} \text{ のとき、} \\ \varphi^\star(x) = \varphi(x) \text{ for any } x \in \mathbb{I}^n \end{aligned} \quad (\text{A6.18})$$

が成り立つことに、注意しておく。

式 (A6.13) の実数値パターン  $\varphi$  に対し、2式 (A6.14), (A6.17) を計算した後、

$$(T_\circ \varphi)(x) \equiv (\varphi^\star \circ \psi)(x) \quad (\text{A6.19})$$

と定義される非線形作用素

$$T_\circ : \Phi \rightarrow \Phi \quad (\text{A6.20})$$

がモデル構成作用素であることが、次の定理A6.5からわかる。

演算  $\circ$  の定義を再び、説明しておこう。: 式 (A6.14) の  $\varphi^\#$  と、式 (A6.17) の  $\varphi^\star$  との2定義に引き続いて、

$$\begin{aligned} \varphi^\diamond(x) &\equiv (\varphi^\star \ominus \psi)(x) \\ &\equiv \inf_{b \in \text{supp}(\psi)} \varphi^\star(x+b) \end{aligned} \quad (\text{A6.21})$$

$$\begin{aligned}
& \varphi^{\square}(x) \\
& \equiv \{(\varphi^{\star} \ominus \psi) \oplus \psi\}(x) \equiv (\varphi^{\diamond} \oplus \psi)(x) \\
& \equiv \sup_{c \in \text{supp}(\psi)} \varphi^{\diamond}(x-c)
\end{aligned} \tag{A6.22}$$

という2定義を用意しておく。ここに、binary pattern

$$\varphi(x) \in \{0, 1\} \text{ for any } x \in \Gamma^n \tag{A6.23}$$

に対し、定義される整数値格子集合  $\Gamma^n$  の部分集合

$$\text{supp}(\varphi) \equiv \{x \in \Gamma^n \mid \varphi(x) = 1\} \subseteq \Gamma^n \tag{A6.24}$$

は、2値化パターン  $\varphi$  の台 (support) といわれるものである。

このとき、 $\varphi^{\star} \circ \psi$  を、

$$(\varphi^{\star} \circ \psi)(x) \equiv \varphi^{\square}(x) \equiv \{(\varphi^{\star} \ominus \psi) \oplus \psi\}(x) \tag{A6.25}$$

と定義する。 □

パターン列

$$\varphi, \varphi^{\#}, \varphi^{\star}, \varphi^{\diamond}, \varphi^{\square} \tag{A6.26}$$

は、式 (A6.13) の  $\varphi$  から、式 (A6.22) の  $\varphi^{\square} \equiv T_{\circ} \varphi$  を計算する順序を与えている。

[定理A6.5] (モデル構成作用素  $T_{\circ}$  の構成定理) [C19]

式 (A6.19) で定義される式 (A6.20) の写像  $T_{\circ}$  について、式 (A6.12) が成立し、作用素  $T_{\circ}$  は、axiom 1の3性質 (i) ~ (iii) の3後半、並びに、(iv) を満たし、よって、定理2.1によれば、対  $[\Phi, T]$ 、つまり、式 (2.16) の  $\Phi$  と式 (A6.19) で定義される写像  $T_{\circ} : \Phi \rightarrow \Phi$  とは、axiom 1を満たす。

(証明) 式 (A6.18) から、式 (A6.12) の成立は明らかであり、残りは文献 [C3] の定理2.3である。 □

式 (A6.19) の写像  $T_{\circ}$  は、数理形態学でいう **opening operator** に対応するものであり、structuring pattern と称されてよい固定した  $\psi$  によって決まるある種の情報を原パターン  $\varphi$  から取り除く機能を備えていることが判明している。

## A6.8 モデル構成作用素 $T_{\bullet}$

数理形態学の4演算  $\ominus, \oplus, \circ, \bullet$  を考慮し、axiom 1を満たすパターンモデル  $T_{\bullet} \varphi$  を構成し、axiom 2を満たす対  $[T_{\bullet}, \Phi]$  を構成しよう。

closing operator  $\bullet$  に対応するモデル構成作用素  $T_{\bullet}$  は、

$$\begin{aligned}
& \forall x \in \Gamma^n, \varphi(x) \in \{0, 1\} \Rightarrow \\
& (T_{\bullet} \varphi)(x) = (\varphi \bullet \psi)(x) \text{ for any } x \in \Gamma^n
\end{aligned} \tag{A6.27}$$

が成立する如きものである。

式 (A6.14) の  $\varphi^{\#}$  と、式 (A6.17) の  $\varphi^{\star}$  に引き続いて、2定義

$$\begin{aligned}
& \varphi^{\blacklozenge}(x) \equiv (\varphi^{\star} \oplus \psi)(x) \\
& = \sup_{b \in \text{supp}(\psi)} \varphi^{\star}(x-b)
\end{aligned} \tag{A6.28}$$

$$\begin{aligned}
& \varphi^{\blacksquare}(x) \equiv (\varphi^{\star} \bullet \psi)(x) \\
& \equiv \{(\varphi^{\star} \oplus \psi) \ominus \psi\}(x) = (\varphi^{\blacklozenge} \ominus \psi)(x) \\
& \equiv \inf_{c \in \text{supp}(\psi)} \varphi^{\blacklozenge}(x+c)
\end{aligned} \tag{A6.29}$$

を用意しておく。パターン列

$$\varphi, \varphi^\#, \varphi^\star, \varphi^\blacklozenge, \varphi^\blacksquare \quad (\text{A6.30})$$

は、式 (A6.13) の  $\varphi \in \Phi$  から、 $\varphi^\blacksquare = T_\bullet \varphi \in \Phi$  を計算する手順を与えている。

式 (A6.13) の実数値パターン  $\varphi = \varphi(x)$  に対し、式 (A6.17) の  $\varphi^\star$  を使って、

$$(T_\bullet \varphi)(x) \equiv \varphi^\blacksquare(x) \equiv (\varphi^\star \bullet \psi)(x) \quad (\text{A6.31})$$

と定義される非線形作用素

$$T_\bullet : \Phi \rightarrow \Phi \quad (\text{A6.32})$$

がモデル構成作用素であることが、次の定理A6.6からわかる。

[定理A6.6] (モデル構成作用素  $T_\bullet$  の構成定理) [C19]

式 (A6.31) で定義される式 (A6.32) の写像  $T_\bullet$  について、式 (A6.27) が成立し、作用素  $T_\bullet$  は、axiom 1の3性質 (i) ~ (iii) の3後半、並びに、(iv) を満たし、よって、定理2.1によれば、対  $[\Phi, T]$ 、つまり、式 (2.16) の  $\Phi$  と式 (A6.31) で定義される写像  $T_\bullet : \Phi \rightarrow \Phi$  とは、axiom 1を満たす。

(証明) 式 (A6.18) から、式 (A6.27) の成立は明らかであり、残りは文献 [C3] の定理2.4である。□

式 (A6.31) の写像  $T_\bullet$  は、数理形態学という **closing operator** に対応するものであり、structuring pattern と称されてよい固定した  $\psi$  によって決まるある種の情報を原パターン  $\varphi$  に付加する機能を備えていることが判明している。

### A6.9 計算機シミュレーション

式 (3.11) の各処理対象画像パターン(第  $n \in \{0, 1, 2, \dots, 30\}$  番目の顔画像)  $\varphi_n(x, y) = \varphi(x_1, x_2)$  は、可分なヒルベルト空間  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2; dx_1 dx_2)$  の元である (4式 (A3.14) ~ (A3.18) を参照)。

計算機シミュレーションでは、内積  $(\varphi, \eta)$  の近似式として、式 (A3.24) が採用されている。

以下の計算機シミュレーションでは、パターン(顔画像)  $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$  は、濃淡値が256レベルの、式 (3.11) の各

$$\begin{aligned} \varphi_n(x, y) &\in \{0, 1, 2, \dots, 255\} \\ x &= x''' - 53 \in \{-53, -52, \dots, -1, 0, +1, \dots, -52, +53\} \\ y &= 40 - y''' \in \{-39, -38, \dots, -1, 0, +1, \dots, -39, +40\} \\ (x''' = 0 \sim 106, y''' = 0 \sim 79) \end{aligned} \quad (\text{A6.33})$$

である。 $\varphi_n$  は第  $n (= 1 \sim 30)$  番目の処理の対象とするパターン(顔画像)である。得られた30枚の顔画像  $\varphi_1 \sim \varphi_{30}$  に Fig. A2 に示されている。

採用した6個の structuring elements  $\psi_1 \sim \psi_6$  は次の通りである。

(通常2倍幅)

$$\begin{aligned} \text{①一重・2倍円 (circle)} \quad \psi_1(x_1, x_2) &\equiv \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdots \langle x_1, x_2 \rangle \in \{ \langle \pm 1, \pm 2 \rangle, \langle \pm 2, \pm 1 \rangle, \langle 0, \pm 2 \rangle, \langle \pm 2, 0 \rangle \} \text{ の場合} \\ 0 \cdots \text{その他の場合} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (\text{A6.34})$$

$$\begin{aligned} \text{②一重・2倍正方形 (square)} \quad \psi_2(x_1, x_2) &\equiv \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdots \langle x_1, x_2 \rangle \in \{ \langle \pm 2, 0 \rangle, \langle 0, \pm 2 \rangle, \langle \pm 2, \pm 2 \rangle \} \text{ の場合} \\ 0 \cdots \text{その他の場合} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (\text{A6.35})$$

$$\begin{aligned} \text{③一重・2倍菱形 (rhombus)} \quad \psi_3(x_1, x_2) &\equiv \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdots \langle x_1, x_2 \rangle \in \{ \langle \pm 2, 0 \rangle, \langle 0, \pm 2 \rangle \} \text{ の場合} \\ 0 \cdots \text{その他の場合} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (\text{A6.36})$$

$$\textcircled{4} \text{二重円 (circle)} \quad \psi_4(x_1, x_2) \equiv \begin{cases} 1 \cdots \langle x_1, x_2 \rangle \in \{ \langle \pm 1, \pm 2 \rangle, \langle \pm 2, \pm 1 \rangle, \langle 0, \pm 2 \rangle, \langle \pm 2, 0 \rangle, \\ \langle \pm 1, \pm 1 \rangle, \langle 0, \pm 1 \rangle, \langle \pm 1, 0 \rangle \} \text{ の場合} \\ 0 \cdots \text{その他の場合} \end{cases} \quad (\text{A6.37})$$

$$\textcircled{5} \text{二重正方形 (square)} \quad \psi_5(x_1, x_2) \equiv \begin{cases} 1 \cdots \langle x_1, x_2 \rangle \in \{ \langle \pm 1, 0 \rangle, \langle 0, \pm 1 \rangle, \langle \pm 1, \pm 1 \rangle, \\ \langle \pm 2, 0 \rangle, \langle 0, \pm 2 \rangle, \langle \pm 2, \pm 2 \rangle \} \text{ の場合} \\ 0 \cdots \text{その他の場合} \end{cases} \quad (\text{A6.38})$$

$$\textcircled{6} \text{二重菱形 (rhombus)} \quad \psi_7(x_1, x_2) \equiv \begin{cases} 1 \cdots \langle x_1, x_2 \rangle \in \{ \langle \pm 1, 0 \rangle, \langle 0, \pm 1 \rangle, \\ \langle \pm 2, 0 \rangle, \langle 0, \pm 2 \rangle \} \text{ の場合} \\ 0 \cdots \text{その他の場合} \end{cases} \quad (\text{A6.39})$$

□

式 (A6.34) の  $\psi_1$  を structuring element として採用した場合、6種類の演算  $\ominus$ ,  $\oplus$ ,  $\circ$ ,  $\bullet$ ,  $T_\circ$ ,  $T_\bullet$  についての計算機シミュレーション結果が Fig.A8.1 の (b) ~ (g) に示されている。Fig.A8.1 の (a) は入力画像  $\varphi_1$  である。Fig.A8.2 ~ Fig.A8.4 には、画像  $\varphi_1$  が入力された場合、演算  $\ominus$  について、各々、 $\psi_1$ ,  $\psi_4$  を structuring element として採用した場合、 $\psi_2$ ,  $\psi_5$  を structuring element として採用した場合、 $\psi_3$ ,  $\psi_6$  を structuring element として採用した場合が示されている。得られた事例が少ないし、structuring element の、整数値座標での表現が粗略であるので、精密な評価を差し控えるが、Fig.A8.1 の (g) に示されているように、演算  $T_\bullet$  のパターン再現能力については、採用する余地があると思える。



(a) an original face-image  $\varphi_1$



(b) erosion  $\varphi_1 \ominus \psi_1$



(c) dilation  $\varphi_1 \oplus \psi_1$



(d) opening  $\varphi_1 \circ \psi_1$



(e) closing  $\varphi_1 \bullet \psi_1$



(f) opening model-construction  $T_{\circ} \varphi_1$



(g) closing model-construction  $T_{\bullet} \varphi_1$

Fig.A8.1 Six application-results of six morphological operations to an original face-image  $\varphi_1$



(a) erosion  $\varphi_1 \ominus \psi_1$



(b) erosion  $\varphi_1 \ominus \psi_4$

Fig.A8.2 The two applications of erosion to  $\varphi_1$



(a) erosion  $\varphi_1 \ominus \psi_2$



(b) erosion  $\varphi_1 \ominus \psi_5$

Fig.A8.3 The two applications of erosion to  $\varphi_1$



(a) erosion  $\varphi_1 \ominus \psi_3$



(b) erosion  $\varphi_1 \ominus \psi_6$

Fig.A8.4 The two applications of erosion to  $\varphi_1$



## 付録7. 代表パターン $\omega_j, j \in J$ の1次結合による顔画像 $\varphi_n(x_1, x_2)$ のモデル $(T\varphi_n)(x_1, x_2)$ の構成と、その計算機シミュレーション

本付録7では、パターン  $T\varphi$  の、代表パターン  $T\omega_j$  の集合  $\Omega$  への1次従属性を表現できる“2.2節の axiom 1 を満たすパターン集合  $\Phi$  とモデル構成作用素  $T$  との対  $[\Phi, T]$ ”が説明され、 $T$  の持つ諸性質が指摘される。更に、付録1の axiom 2 を満たす類似度関数  $SM$  のミックスチュア条件と、 $T$  のミックスチュア条件とが相対立する概念であることを明らかにし、この  $T$  の表現能力に関し、計算機シミュレーションで解析する。つまり、代表パターン  $\omega_j, j \in J$  の1次結合によって、式 (A6.33) の顔画像  $\varphi_n = \varphi_n(x_1, x_2)$  ( $n \in \{1, 2, \dots, 30\}$ ) のモデル  $(T\varphi_n)(x_1, x_2)$  を計算機シミュレーションで求め、考察する。

### A7.1 カテゴリの表象としての代表パターン

“正常なパターン”は、ある1つのカテゴリ  $\mathcal{C}_j$  (第  $j \in J$  番目の類概念) のみに帰属しているものとし、このような  $\mathcal{C}_j$  の、式 (A5.1) の集まり (有限集合)  $\mathcal{C}$  を想定する。 $\mathcal{C}_j$  の備えている性質を典型的に備えている代表パターン (prototypical pattern)  $\omega_j (\neq 0)$  を1つ選定する。 $\mathcal{C}_j$  は、典型 (prototype) としての代表パターン  $\omega_j$  を中心とした緩やかなカテゴリであることを仮定したことに注意しておく。ここに、式 (A5.1) の  $\Omega$  が式 (A5.2) の全カテゴリ集合  $\mathcal{C}$  に対応する代表パターンの集合である。式 (A5.1) の系  $\Omega$  は、式 (A5.3) が成立しているという意味で、1次独立でなければならない。

2.2節の axiom 1 を満たす式 (2.15) のモデル構成作用素  $T$  によって、式 (A5.1) の代表パターン集合  $\Omega$  が変換されて得られる系

$$T \cdot \Omega \equiv \{T\omega_j \mid \omega_j \in \Omega\} = \{T\omega_j \mid j \in J\} \quad (A7.1)$$

も、 $\Omega$  と同様に1次独立であると要請する (付録1)。

### A7.2 axiom 1 とパターン集合 $\Phi$ , モデル構成作用素 $T$ の対 $[\Phi, T]$

処理の対象とするパターン  $\varphi$  の集合  $\Phi$  はある可分なヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  の、零元  $0$  を含むある部分集合であり、この  $\Phi$  と、式 (2.15) のモデル構成作用素  $T$  は2.2節の axiom 1 を満たすとしよう。 $T\varphi \in \Phi$  は  $\varphi \in \Phi$  の代りとなり得るという意味で、パターン  $\varphi \in \Phi$  のモデル (model) と呼ばれる。

パターンと判明している集合 (基本領域; basic domain)  $\Phi_B(\subset \mathcal{H})$  が与えられると、認識システム RECOGNITRON の動作領域の極小 (minimal operating reasion)  $\Phi$  を、誘導領域 (derived domain) として、対  $[\Phi, T]$  の前半  $\Phi$  は式 (2.16) で表示され、式 (2.17) を満たしている (定理 2.1)。

### A7.3 抽出された特徴量を展開係数に持つ1次独立な系 $\{\varphi_\ell\}_{\ell \in L}$ の1次結合によるモデル構成作用素 $T: \Phi \rightarrow \Phi$ の構成

2.4節の可分なヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  の1次独立な系として、 $\{\varphi_\ell\}_{\ell \in L}$  を選定する。

定理2.1の適用例として、構造形式

$$T \cdot = \sum_{\ell \in L} u(\cdot, \ell) \cdot \varphi_\ell \quad (A7.2)$$

を備えており、axiom 1 を満たす式 (2.15) のモデル構成作用素  $T$  がある。その構成諸例については、定理2.2、並びに、文献 [C4] の付録11にある。ここに、

$$u : \Phi \times L \rightarrow Z \quad (\text{複素数全体の集合}) \quad (A7.3)$$

は特徴抽出写像であり、1次独立な系  $\{\psi_{\ell}\}_{\ell \in L}$  による1次結合式 (A7.2) での1次展開係数  $u(\varphi, \ell) \in Z$  はパターン  $\varphi \in \Phi$  から抽出された第  $\ell \in L$  番目の特徴量である。

#### A7.4 代表パターン $\omega_j$ の系に基づくモデル構成作用素 $T : \Phi \rightarrow \Phi$ の構成

1次独立な系  $\{\psi_{\ell}\}_{\ell \in L}$  として、各代表パターン  $\omega_j$  の、式 (A1.2) の系  $\Omega$  を選んでみよう。

パターン  $\varphi \in \Phi$  が入力されたとき、axiom 1 を満たす式 (2.15) のモデル構成作用素  $T$  からの出力としての、式 (A7.2) のパターンモデル  $T\varphi \in \Phi$  を構成しておこう。代表パターンモデル  $T\omega_j \in \Phi$  の、式 (A7.1) の系  $T \cdot \Omega$  も、 $\Omega$  と同様に1次独立であると要請されていることに注意しておく。(A7.1節)

このとき、

$$\| \varphi - \sum_{k \in J} c_k \cdot \omega_k \| \rightarrow \min \quad (A7.4)$$

ならしめる複素係数  $c_j(\varphi) \equiv c_j$  の組

$$\underline{c}(\varphi) \equiv \{c_j(\varphi) \mid j \in J\} \quad (A7.5)$$

を用意する。それには、連立1次方程式

$$\sum_{k \in J} (\omega_k, \omega_j) \cdot c_k(\varphi) = (\varphi, \omega_j), \quad j \in J \quad (A7.6)$$

を解けば良い。

その後、式 (A7.5) の写像  $T$  を、

$$T\varphi \equiv \begin{cases} 0 \cdots \cdots \forall k \in J, c_k(\varphi) = 0 \text{ のとき} \\ \sum_{j \in J} [c_j(\varphi) / \sum_{k \in J} |c_k(\varphi)|] \cdot \omega_j \\ \cdots \cdots \exists k \in J, c_k(\varphi) \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (A7.7)$$

$$(A7.8)$$

と定義する。

そうすれば、次の定理A7.1が成り立つ。

**[定理A7.1] (代表パターン集合  $\Omega$  によるパターンモデル定理)**

2式 (A7.7), (A7.8) のごとく、定義される式 (A7.5) の写像  $T$  は、axiom 1 の (i), (ii), (iii) の3後半、並びに、(iv) を満たす。

**[定理A7.1の系1] (代表パターン集合  $\Omega$  によるモデル構成作用素  $T : \Phi \rightarrow \Phi$  の構成定理)**

2式 (A7.7), (A7.8) のごとく、定義される式 (2.15) の写像  $T$  に対し、処理の対象とする問題のパターン  $\varphi$  の集合  $\Phi$  を式 (2.16) の如く設定すれば、対  $[\Phi, T]$  が axiom 1 を満たす。

(証明) 文献 [C4] の定理A1.2、並びに、その系1である。 □

#### A7.5 代表パターン $\omega_j$ の系に基づくモデル構成作用素 $T : \Phi \rightarrow \Phi$ の諸性質

2式 (A7.7), (A7.8) のモデル構成作用素  $T$  が原パターン  $\varphi$  を忠実に再現するかどうかについては、

○文献 [C4] の補助定理7.1 (代表パターンの系

$\omega_j, j \in J$  による、パターン  $\varphi \in \Phi$  の1次結合定理)

○文献 [C4] の補助定理7.2 (零モデル定理)

○文献 [C4] の補助定理7.3 (モデル不動点定理) と、その系1 (代表パターンの不動点定理)

○文献 [C4] の定理7.1 (原パターン  $\varphi \in \Phi$  と、パターンモデル  $T\varphi \in \Phi$  の関係定理)

○文献 [C4] の定理7.2 (代表パターンモデル定理)

などを適用して、明らかにすることができる。

最も基本的に重要なことは、

$$\forall \varphi \in \mathfrak{F}, \exists \varphi_{\perp} \in \mathfrak{F},$$

$$\varphi = \sum_{k \in J} c_k(\varphi) \cdot \omega_k + \varphi_{\perp} \quad (\text{A7.9})$$

$$\wedge [\forall k \in J, (\varphi_{\perp}, \omega_k) = 0] \quad (\text{A7.10})$$

と、パターン  $\varphi \in \mathfrak{F}$  が代表パターンの系  $\omega_j, j \in J$  によって、1次展開されることに対応する（文献 [C4] の補助定理7.1）パターンモデルが2式 (A7.7), (A7.8) で定義されているの  $T\varphi$  であることである。

#### A7.6 ミックスチュア条件を満たすモデル構成作用素 $T: \Phi \rightarrow \Phi$

2.2節の axiom 1 を満たすモデル構成作用素  $T$  のミックスチュア条件を定義すると、付録1の axiom 2 を満たす類似度関数  $SM$  のミックスチュア条件と対立する概念であることが証明されており、2式 (A7.7), (A7.8) で定義されるモデル構成作用素  $T$  がミックスチュア条件を満足することが証明されていることである（文献 [C4] の定理7.6, その系1, 文献 [C4] の定理7.3）。

#### A7.7 ミックスチュア条件を満たす類似度関数 $SM$ を使用すれば、認識システム RECOGNITRON の認識の働きの挙動に如何なる長所が得られるか？

付録1の axiom 2 を満たす類似度関数  $SM$  がミックスチュア条件を満たすかどうかを問題にするのは、次に述べる理由があるからである：

ミックスチュア条件を満たす類似度関数  $SM$  に対しては、カテゴリ帰属知識の不動点方程式が成立し、認識の働きが終了する場合の、或る代表パターン  $\omega_j$  のモデル  $T\omega_j$  のカテゴリ帰属知識  $\langle T\omega_j, [j] \rangle$  への収束性（連想形認識不動点解の分類定理（文献 [C4] の定理2.2）での認識処理可能という（i）の場合）が保証されること（文献 [C4] の定理6.6）。

□

#### A7.8 計算機シミュレーション

パターン  $T\varphi$  の、代表パターン  $T\omega_j$  の集合  $\Omega$  への1次従属性を計算機シミュレーションで解析する。つまり、内積  $(\varphi, \eta)$  が式 (A3.14) で与えられた場合、そのシミュレーション式として式 (A3.24) を採用し、代表パターン  $\omega_j, j \in J$  の1次結合によって、式 (A6.33) の、 $n \in \{1, 2, \dots, 30\}$  番目の顔画像  $\varphi_n = \varphi_n(x_1, x_2)$  の、2式 (A7.7), (A7.8) で定義されたモデル  $(T\varphi_n)(x_1, x_2)$  を計算機シミュレーションで求め、考察する。

全カテゴリ番号集合  $J$  として、

$$J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

とし、各代表パターン  $\omega_j$  として、

$$\omega_j = \varphi_j, j = 1 \sim 5$$

が採用された。各代表パターン  $\omega_j$  の、誤差無し再生能力を示す等式

$$T\omega_j = \omega_j, j = 1 \sim 5$$

が、文献 [C4] の補助定理7.3の系1（代表パターンの不動点定理）の通り成立していることが本計算機シミュレーションでわかった。

Fig. A7に求められた  $T\varphi_n, n \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$  が示されている。saisei\*.bmp は  $T\varphi_*$  のことである。 $\varphi_*, * \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$  については、Fig.A2.1に mono\*.bmp として示されている。 $\varphi_j(\omega_j), j = 1 \sim 5$  の持つ諸性質が多少、 $T\varphi_n, n = 6 \sim 10$  に反映されて得られていることが読み取れるかもしれない。

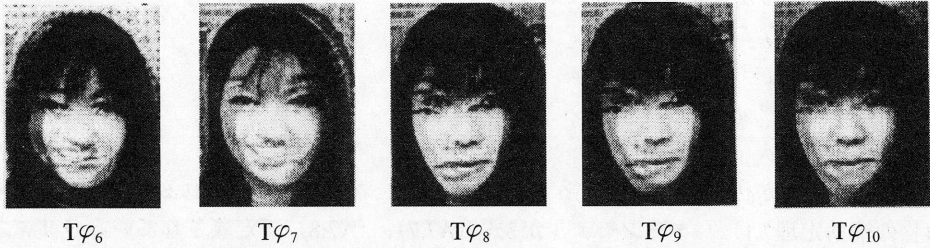


Fig.A7 corresponding models  $T\varphi_n$  of the  $n$ -th face-pattern  $\varphi_n$ ,  $n \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$

### 付録8. 射影作用素 P とモデル構成作用素 T との関係

本付録8では、先ず定理2.1を適用して、可分なヒルベルト空間  $\mathfrak{H}$  での射影作用素 P により T が構成する手法が提案され、その後、T の構成1例が挙げられる。

#### A8.1 射影作用素 P

任意の2つの複素定数  $a, b$  について、

$$\varphi, \eta \in \mathfrak{H} \Rightarrow P(a \cdot \varphi + b \cdot \eta) = a \cdot P\varphi + b \cdot P\eta \in \mathfrak{H} \quad (\text{A8.1})$$

が成立するような写像

$$P : \text{Domain}(P) \rightarrow \text{Range}(P) \quad (\text{A8.2})$$

は線形作用素 (linear operator) であるといわれる。ここに、

$$\text{Domain}(P) \equiv \{\varphi \in \mathfrak{H} \mid \|P\varphi\| < \infty\} \subseteq \mathfrak{H} \quad (\text{A8.3})$$

$$\text{Range}(P) \equiv \{\psi \mid \exists \varphi \in \text{Domain}(P), \psi = P\varphi\} \subseteq \mathfrak{H} \quad (\text{A8.4})$$

は各々、P の定義域、値域と呼ばれる。P は  $\text{Domain}(P)$  の任意の元に対し、 $\text{Range}(P)$  の唯一つの元を対応させる写像である。

不等式

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H}, \|P\varphi\| \leq N \cdot \|\varphi\| \quad (\text{A8.5})$$

が成り立つような非負実数  $N$  が存在するとき、条件

$$\|\varphi\| \leq 1 \quad (\text{A8.6})$$

の下で、不等式 (A8.5) を満たす  $\|P\varphi\|$  の集まりの最小上界 (上限)

$$N(P) \equiv \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|P\varphi\| \quad (\text{A8.7})$$

は作用素 P のノルムと呼ばれる。

$$N(P) < \infty \quad (\text{A8.8})$$

を満たす線形作用素 P は有界 (線形) 作用素 (bounded linear operator) と呼ばれる。

Hilbert空間  $\mathfrak{H}$  の部分集合  $\mathfrak{D}$  が、

$$\varphi, \eta \in \mathfrak{D} \text{ ならば、 } a \cdot \varphi + b \cdot \eta \in \mathfrak{D}$$

$$\text{ここに、 } a, b \in \mathbb{C} \text{ (複素数体)} \quad (\text{A8.9})$$

を満足するとき、 $\mathfrak{D}$  を  $\mathfrak{H}$  の部分空間 (linear sub-space) という。  $\varphi, \eta \in \mathfrak{H}$  間のノルム距離

$$\text{dis}(\varphi, \eta) \equiv \|\varphi - \eta\| \quad (\text{A8.10})$$

による収束の意味で、 $\mathfrak{H}$  の閉集合 (closed set) になっているような部分空間  $\mathfrak{D}$  を閉部分空間という。 $\mathfrak{H}$  の部分集合  $\mathfrak{D}$  に対し、

$$\mathfrak{D}^\perp \equiv \{\psi \in \mathfrak{H} \mid (\varphi, \psi) = 0 \text{ for any } \varphi \in \mathfrak{D}\} \quad (\text{A8.11})$$

とおけば、 $\mathfrak{D}^\perp$  は閉部分空間である (直交補空間の閉部分空間定理)。 $\mathfrak{D}^\perp$  は直交補空間 (orthocomplement) といわれる。

$\mathfrak{D}$  を  $\mathfrak{H}$  の任意の閉部分空間とする。

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H}, \exists \varphi_1 \in \mathfrak{D}, \exists \varphi_2 \in \mathfrak{D}^\perp, \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (\text{A8.12})$$

と、任意の  $\varphi \in \mathfrak{H}$  は一意的に直交直和分解される (直交直和分解定理)。□

式 (A8.12) の直交分解において、 $\varphi \in \mathfrak{H}$  から得られた  $\varphi_1 \in \mathfrak{D}$  を、

$$P(\mathfrak{D})\varphi = \varphi_1 \quad (\text{A8.13})$$

と表現する。 $\varphi_1$  を  $\varphi$  の  $\mathfrak{D}$  への射影 (projection) といい、 $P \equiv P(\mathfrak{D})$  を  $\mathfrak{D}$  への射影作用素 (projector) と呼ぶ。

まず、線形作用素  $P$  が射影作用素であるための十分条件を次の定理 A8.1 の (i) で与えよう。

[定理 A8.1] (射影作用素定理)

(i) 2性質

$$P \cdot P = P \text{ (ベキ等性)} \quad (\text{A8.14})$$

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H}, \forall \eta \in \mathfrak{H}, (P\varphi, \eta) = (\varphi, P\eta) \text{ (対称性)} \quad (\text{A8.15})$$

を満たす有界作用素  $P$  は射影作用素である。

(ii) 逆に、射影作用素  $P$  は有界作用素であり、かつ、2式 (A8.14), (A8.15) を満たす。

(証明) 文献 [B3] の定理 2.5 である。□

## A8.2 射影作用素 $P$ によるモデル構成作用素 $T$ の構成

$$\|\eta\|^{-1} \cdot \eta \equiv 0 \text{ if } \|\eta\| = 0 \quad (\text{A8.16})$$

を約束する。

次の定理 A8.2 が成立し、射影作用素  $P$  によって、パターンモデル  $T\varphi$  を構成することができることになる。つまり、axiom 1 を満たす対  $[\Phi, T]$  が構成可能事実を指摘している次の定理 A8.3 の基礎が本定理 A8.2 である。

[定理 A8.2] (射影作用素  $P$  によるモデル構成定理)

可分なヒルベルト空間  $\mathfrak{H}$  での射影作用素  $P$  を用いて

$$T\varphi \equiv \begin{cases} \|P\varphi\|^{-1} \cdot P\varphi & \cdots \|P\varphi\| > 0 \text{ のとき} \\ 0 & \cdots \|P\varphi\| = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{A8.17})$$

$$0 \quad \cdots \|P\varphi\| = 0 \text{ のとき} \quad (\text{A8.18})$$

と定義される式 (2.15) の写像  $T$  は、不動点性

$$P\varphi = \varphi \quad (\text{A8.19})$$

$$\Rightarrow T\varphi = \|\varphi\|^{-1} \cdot \varphi \quad (\text{A8.20})$$

を満たし、axiom 1 の (i), (ii), (iii) の3後半と (iv) を満たす。

(証明) まず、式 (A8.19)  $\Rightarrow$  式 (A8.20) の成立は、

(イ)  $\|P\varphi\| = 0$  のとき

$$T\varphi = 0 \quad \because \|P\varphi\| = 0 \wedge \text{式 (A8.18)}$$

$$= \|P\varphi\|^{-1} \cdot P\varphi \quad \because \|P\varphi\| = 0 \wedge \text{式 (A8.16)}$$

$$= \|\varphi\|^{-1} \cdot \varphi \quad \because \text{式 (A8.19)}$$

(ロ)  $\|P\varphi\| > 0$  のとき

$T\varphi$

$$= \|P\varphi\|^{-1} \cdot P\varphi \quad \because \|P\varphi\| > 0 \wedge \text{式 (A8.17)}$$

$$= \|\varphi\|^{-1} \cdot \varphi \quad \because \text{式 (A8.19)}$$

と、示された。

axiom 1 の (i) の後半：

$P\varphi = \varphi \wedge \|P\varphi\| = 0$  の場合を考えれば、 $\|\varphi\| = 0$  を得るから、式 (A8.16) を考慮し、式 (A8.19)  $\Rightarrow$  式 (A8.20) を適用すれば、式 (A8.18) より  $T\varphi = 0$  を得る。

axiom 1 の (ii) の後半：

任意の正実数  $a$  を選ぶ。

(ハ)  $\|P\varphi\| = 0$  のとき

$$T\varphi = 0 \quad \because \text{式 (A8.18)}$$

であるが、

$$\|P(a \cdot \varphi)\| = \|a \cdot P\varphi\|$$

$$= |a| \cdot \|P\varphi\|$$

$$= a \cdot \|P\varphi\| \quad \because a > 0$$

$$= 0 \quad \because \|P\varphi\| = 0$$

を考慮すれば、

$$T(a \cdot \varphi) = 0 \quad \because \text{式 (A8.18)}$$

を得、

$$T(a \cdot \varphi) = 0 = T\varphi.$$

(ニ)  $\|P\varphi\| > 0$  のとき

$$T\varphi = \|P\varphi\|^{-1} \cdot P\varphi \quad \because \text{式 (A8.17)} \tag{A8.21}$$

であるが、

$$\|P(a \cdot \varphi)\| = \|a \cdot P\varphi\|$$

$$= |a| \cdot \|P\varphi\|$$

$$= a \cdot \|P\varphi\| \quad \because a > 0$$

$$> 0 \quad \because a > 0 \wedge \|P\varphi\| > 0$$

を考慮すれば、

$T(a \cdot \varphi)$

$$= \|P(a \cdot \varphi)\|^{-1} \cdot P(a \cdot \varphi) \quad \because \text{式 (A8.17)}$$

$$= a^{-1} \cdot \|P\varphi\|^{-1} \cdot a \cdot P\varphi$$

$$= \|P\varphi\|^{-1} \cdot P\varphi$$

$$= T\varphi. \quad \because \text{式 (A8.21)}$$

axiom 1 の (iii) の後半：

$\eta$  を  $\eta \equiv T\varphi$  とおく。

(ホ)  $\|\eta\| = 0$  のとき

$$\|P\eta\| = \|P0\|$$

$$= \|0\|$$

$$= 0$$

を考慮すれば、

$$T\eta = 0 \quad \because P\eta = 0 \wedge \text{式 (A8.18)}$$

$$= \eta \cdot \quad \because \|\eta\| = 0$$

(へ)  $\|\eta\| > 0$  のとき

$$\eta \equiv T\varphi = \|P\varphi\|^{-1} \cdot P\varphi \quad \because \text{式 (A8.17)} \tag{A8.22}$$

$$\therefore \|\eta\| = 1 \tag{A8.23}$$

であるが、

$$P\eta$$

$$= PT\varphi$$

$$= \|P\varphi\|^{-1} \cdot P(P\varphi) \quad \because \|P\varphi\| > 0$$

$$= \|P\varphi\|^{-1} \cdot P\varphi \quad \because P \cdot P = P$$

$$= T\varphi \quad \because \text{式 (A8.22)}$$

$$= \eta$$

$$\tag{A8.24}$$

$$\therefore \|P\eta\| > 0$$

$$\tag{A8.25}$$

を得、

$$T\eta = \|P\eta\|^{-1} \cdot P\eta \quad \because \text{2式 (A8.17), (A8.25)}$$

$$= \|\eta\|^{-1} \cdot \eta \quad \because \text{式 (A8.24)}$$

$$= \eta \quad \because \text{式 (A8.23)}$$

axiom 1 の (iv) :

$P\varphi = \varphi \wedge \|\varphi\| > 0$  の場合を考え、式 (A8.19)  $\Rightarrow$  式 (A8.20) を適用すれば、 $T\varphi = \|\varphi\|^{-1} \cdot \varphi \neq 0$  を得る。  $\square$

定理A8.2に定理2.1を適用して、次の定理A8.3が得られる。本定理A8.3は、射影作用素  $P$  によって、2.2節のaxiom 1を満たす対  $[\Phi, T]$  が構成されたことになる。

**[定理A8.3] (射影作用素  $P$  による対  $[\Phi, T]$  の構成定理)**

パターンと判明している集合  $\Phi_B$  が与えられたとしよう。式 (2.15) の写像  $T$  について、処理の対象とする問題のパターンの集合  $\Phi$  を式 (2.162) の如く設定すれば、式 (2.17) が成立し、axiom 1 の (i), (ii), (ii) の3前半を  $\Phi$  は満たし、結局、対  $[\Phi, T]$  はaxiom 1を満たす。  $\square$

次の定理A8.4の成立にも注意しておこう。

**[定理A8.4] (ベキ等写像  $P$  による対  $[\Phi, T]$  の構成定理)**

3性質

(一) (零点不動点性)  $P\varphi = \varphi$  if  $\varphi = 0$

(二) (正定数倍吸収性)  $\forall \varphi, P(a \cdot \varphi) = P\varphi$

for any positive real numbers  $a$

(三) (ベキ等性)  $\forall \varphi, P(P\varphi) = P\varphi$

を満たす (線形とは限らない) 式 (A8.1) の写像  $P$  についても、2定理A8.2, A8.3が成り立つ。

(証明) 定理A8.2の証明を追えば、定理A8.2と同様なことが成立することがわかり、更に、定理2.1の内容を勘案すれば、定理A8.3の成立もわかる。  $\square$

### A8.3 Tの構成1例

本節では、2定理A8.3, A8.4を適用して、対  $[\Phi, T]$  を具体的に構成できる1例が指摘される。

[構成例A8.1] (直交系  $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$  を用いた構成例)

直交性

$$\forall k \in L, \forall \ell \in L - \{k\}, (\psi_k, \psi_\ell) = 0 \quad (\text{A8.26})$$

を満たす系  $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$  を用いて、

$$\forall \varphi \in \mathfrak{F}, P\varphi = \sum_{\ell \in L} (\varphi, \psi_\ell \cdot \|\psi_\ell\|^{-1}) \cdot \psi_\ell \cdot \|\psi_\ell\|^{-1} \quad (\text{A8.27})$$

と定義される線形作用素 P は射影作用素であり、2定理A8.3, A8.4が適用できる。 □

直交系  $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$  を具体的に選定すれば様々な応用例が得られる上述の構成例A8.1以外に、構成諸例を挙げるができるが、紙面の都合上割愛される。

## 付録9. パターンの多段階変換を実現するパターン認識

本付録9では、先ず、任意の2つのパターン  $\varphi, \psi$  が与えられたとき、 $\varphi$  から  $\psi$  への多段階変換が存在することを示す。その後、パターン  $\varphi$  からパターン  $\psi$  への多段階変換途中のパターン  $\eta_t$  から  $\varphi$  或いは、 $\psi$  を自己想起できるような不動点多段階認識法の存在が指摘される。式 (A6.33) の形式の怒り顔から式 (A6.33) の形式の笑い顔へと多段階変換したときの計算機シミュレーション結果について報告される。

### A9.1 任意の2つのパターン間の多段階変換

2つの複素定数  $c, d$  について、

$$c \cdot \varphi + d \cdot \psi = 0 \quad (\varphi \neq 0 \wedge \psi \neq 0) \Rightarrow c = d = 0 \quad (\text{A9.1})$$

を満たすとき、系  $\{\varphi, \psi\}$  は1次独立であるという。

1次独立な系  $\{\varphi, \psi\}$  に対し、**N** を正の偶数に選ぶ。

$$\begin{aligned} \eta_t & \equiv \cos\{(\pi/2) \cdot (t/N)\} \cdot \varphi + \sin\{(\pi/2) \cdot (t/N)\} \cdot \psi \\ & \text{for any } t \in \{0, 1, 2, \dots, N/2, \dots, N\} \end{aligned} \quad (\text{A9.2})$$

を定義すると、

$$\eta_t |_{t=0} = \varphi \quad (\text{A9.3})$$

...

$$\eta_t |_{t=N/2} = (\sqrt{2}/2) \cdot \varphi + (\sqrt{2}/2) \cdot \psi \quad (\text{A9.4})$$

...

$$\eta_t |_{t=N} = \psi \quad (\text{A9.5})$$

が成り立ち、

$$\eta_0 \rightarrow \eta_1 \rightarrow \eta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \eta_{N/2} \rightarrow \dots \rightarrow \eta_N \quad (\text{A9.6})$$

によって、

$\varphi$  から  $\psi$  へと結ぶ多段階変換が得られた。



この式 (A9.6) の多段階変換は、次の①自己想起、②他想起の働きを実現する方式の性能を評価するのに役立つ：

①不等式

$$\cos\{(\pi/2)\cdot(t/N)\} > \sin\{(\pi/2)\cdot(t/N)\} \quad (\text{A9.7})$$

を満たす第

$$t \in \{0, 1, 2, \dots, N/2-1\} \quad (\text{A9.8})$$

変換段階のパターン  $\eta_t$  について、

$\eta_t$  から  $\varphi$  が変換される“想起の働き”

が存在するとき、**自己想起** (同種想起; autoassociation) が可能であるという。

②不等式

$$\cos\{(\pi/2)\cdot(t/N)\} < \sin\{(\pi/2)\cdot(t/N)\} \quad (\text{A9.9})$$

を満たす第

$$t \in \{N/2+1, N/2+2, \dots, N\} \quad (\text{A9.10})$$

変換段階のパターン  $\eta_t$  について、

$\eta_t$  から  $\varphi$  が変換される“想起の働き”

が存在するとき、**他想起** (異種想起; heteroassociation) が可能であるという。

## A9.2 自己想起の働きの実現方法としての不動点連想形多段階認識法

本節では、以下のノルム規格化条件式 (A9.13) の下で、任意の2つのパターン  $\varphi, \psi$  が与えられた場合、 $\varphi$  から  $\psi$  へと結ぶA9.1節の多段階変換途中のパターン  $\eta_t$  から  $\varphi$  或いは、 $\psi$  を自己想起できるような不動点連想形多段階認識法の存在を指摘するための基礎としての T, SM, BSC, CSF, A ( $\mu$ ) の構成論と、不動点連想形多段階認識法の働きなどが説明される。

### A9.2.1 2つのカテゴリ $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ と、2つの代表パターン $\omega_1, \omega_2$ との設定

2つのカテゴリ  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  を想定し、式 (A1.1) の全カテゴリ集合

$$\mathcal{C} \equiv \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\} = \{\mathcal{C}_j \mid j \in J\} \quad (\text{A9.11})$$

を設ける。全カテゴリ番号集合 J は、

$$J \equiv \{1, 2\} \quad (\text{A9.12})$$

である。第  $j \in J$  番目の  $\mathcal{C}_j$  の備えている性質を典型的に備えている**代表パターン**  $\omega_j (\neq 0)$  を1つ選定する。 $\mathcal{C}_j$  は、典型としての代表パターン  $\omega_j$  を中心とした緩やかなカテゴリであることを仮定している。

ノルム規格化条件

$$\|\varphi\| = 1 \wedge \|\psi\| = 1 \quad (\text{A9.13})$$

の下で、

$$\omega_1 \equiv \varphi, \omega_2 \equiv \psi \quad (\text{A9.14})$$

とおく。式 (A4.14) の系

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{\omega_j \mid j \in J\} \quad (\text{A9.15})$$

は1次独立でなければならない。

### A9.2.2 不動点連想形多段階認識法を設定するための5認識システム要素

不動点連想形多段階認識システムを構成するためには、以下の①～⑤での5システム要素 T, SM, BSC, CSF, A ( $\mu$ ) が必要である。

①2.2節の axiom 1 を満たすモデル構成作用素 T の設定

文献 [C3] の6.2節の式 (6.7) で与えられる T を採用すればよい。

このとき、

$$T \omega_1 = T \varphi = \varphi = \omega_1$$

$$T \omega_2 = T \psi = \psi = \omega_2$$

∴ 2式 (A9.13), (A9.14)

(A9.16)

が成立していることに、注意しておく。

②付録1の axiom 2 を満たす類似度関数 SM の設定

例えば、定理A5.5, A5.6での SM を採用すればよい。

③文献 [C3] の付録Cの axiom 3 を満たす大分類関数 BSC の構成

文献 [C4] の付録3の定理A3.2での BSC

文献 [C3] の式 (2.139) での BSC

などを採用すればよい。

④文献 [C3] の付録Eの axiom 3 を満たすカテゴリ選択関数 CSF の設定

文献 [C3] の付録Eの定理E1で与えられている。

⑤構造受精作用素 A の設定

文献 [C3] の6.5節での  $A(\mu)$  で与えられている。

### A9.2.3 不動点連想形多段階認識法の設定

パターンの連想とパターンの認識との双方を達成するカテゴリ帰属知識の多段階想起を説明しよう。

認識システム RECOGNITRON は、処理の対象とする問題のパターン  $\varphi' \in \Phi$  を認識したいとしよう。具体的に、“不動点探索形構造受精多段階帰納推論に基づくパターン認識過程 [C3], [C4]”からは、どんな情報処理結果が得られるかを考えてみよう。

#### 【多段階連想形認識の結果】

処理の対象とする問題のパターン  $\varphi' \in \Phi$  は、

③ (不動点パターン連想の働き) 不動点方程式

$$TA(\mu_i \cap \lambda_i) T\psi_i = \psi_i \quad (\text{A9.17})$$

を満たす不動点パターン  $\psi_i$  として再現され、

④ (不動点カテゴリ認識の働き) 不動点方程式式

$$\text{CSF}(\psi_i, \mu_i \cap \lambda_i) = \lambda_i \quad (\text{A9.18})$$

を満たす不動点カテゴリ番号リストとして絞られた  $\lambda_i \in 2^J$  内のいずれかの

カテゴリ番号  $j \in \lambda_i$  を持つ任意のカテゴリに帰属する

(A9.19)

と、設定してみよう。2つの不動点方程式 (A9.17), (A9.18) を統合的に定義しているカテゴリ帰属知識の不動点方程式は、文献 [C4] の式 (2.62) で与えられている。

文献 [C4] の定理2.2、つまり、**連想形認識不動点解の分類定理**によれば、上述の認識の働きを認識処理可能、認識処理不能、認識処理不定の3場合に分類出来る。認識処理結果をこのような3場合に分類できるパターン認識の理論は、SS理論 [C1] ~ [C7] を除いて、これまで存在していない。認識処理可能といっても、パターンが正認識されることを意味しているのではなくて、誤認識される場合を含んでいる。このような事態に関連して、axiom 1 ~ axiom 4 を採用する公理論的手法によって初めて獲得された“認識システム RECOGNITRON の認識の万能性”に注意しておく。

#### A9.2.4 類似度関数 SM の直交性、ミックスチュア性

採用された類似度関数式 (A1.5) の類似度関数 SM はミックスチュア条件, 直交条件 [C4] を満たすことが望ましい。それは次の (イ), (ロ) が理論的に解明されているからである。

- (イ) ミックスチュア条件を満たす類似度関数 SM に対しては、不動点探索形構造受精多段階パターン認識過程の終了規準としての2つの不動点方程式 (A9.17), (A9.18) が成立したとき、或るカテゴリの代表パターンのモデルが得られること (認識結果の正常性; 文献 [C4] の第6章)
- (ロ) 直交条件を満たす類似度関数 SM に対しては、不動点探索形構造受精多段階パターン認識過程の進展につれて、そのポテンシャルエネルギー E が減少すること (収束性; 文献 [C4] の第8章)

を考慮すれば、不動点探索形構造受精多段階パターン認識過程の収束性、認識結果の正常性を各々、保証する直交条件、ミックスチュア条件を満たすように、任意の類似度関数 SM を変換すること (文献 [C4] の第6章) が通常、必要とされることがわかる。

#### A9.2.5 パターン $\eta_i$ から2つのパターン $\varphi, \psi$ のいずれかを自己想起できる不動点認識法

不動点探索形構造受精多段階帰納推論に基づくパターン認識過程 [C3], [C4] が A9.2.3項での認識システム RECOGNITRON の、カテゴリ帰属知識に関するポテンシャル減少を伴う力学過程である。

ここに、一般に、

パターン  $\varphi \in \Phi$  が式 (A1.1) の全カテゴリ集合  $\mathcal{C}$  の部分集合

$$\mathcal{C}(\varphi) \equiv \{\mathcal{C}_j \mid j \in \gamma\} \quad (\text{A9.20})$$

の何れか1つのカテゴリに帰属する可能性がある

ことを

$$\langle \varphi, \gamma \rangle \quad (\text{A9.21})$$

と表し、この式 (A9.21) の  $\langle \varphi, \gamma \rangle$  を認識システム RECOGNITRON がパターン  $\varphi$  に対し事前にもっているカテゴリ帰属知識といい、カテゴリ帰属知識  $\langle \varphi, \gamma \rangle$  のポテンシャル  $E(\varphi, \gamma)$  は文献 [C4] の付録8で定義されている。

パターン  $\eta_0 = \varphi$  からパターン  $\eta_N = \psi$  への、式 (A9.6) でいう多段階変換と、この力学過程 (文献 [C4] の14式 (2.50) ~ (2.63) で記述される認識過程) でのカテゴリ帰属知識の多段階変換との関係について、論じよう。

文献 [C4] の6.1節, 1, 6.2両節で説明されている再帰的構成手法を用いて、A9.2.2項の SM を直交条件, ミックスチュア条件を満たすように変換しておく。

式 (A9.2) のパターン  $\eta_i \in \Phi$  が与えられたとしよう。文献 [C4] の式 (2.50) ~ (2.63) で記述される認識過程において、文献 [C4] の初期条件式 (2.50) を、

$$\langle \eta_i, J \rangle \quad (\text{A9.22})$$

と設定し得られた文献 [C4] の不動点方程式 (2.62) の解  $\langle \psi_i, \lambda_i \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$  が次の①, ②のいずれかになることが保証される場合があることが、A4.3.9項の説明からわかる。つまり、式 (A9.22) でのパターン  $\eta_i$  が認識処理可能なように、類似度関数 SM, 大分類関数 BSC が設定されていれば、次の①, ②のいずれかが成立する:  $\equiv_{\Delta}$  はカテゴリ帰属知識間の恒等性を表す二元関係とする (文献 [C6] の付録6)。

$$\textcircled{1} \langle \psi_i, \lambda_i \rangle$$

$$\begin{aligned}
&=_{\Delta} \langle T\omega_1, [1] \rangle \\
&=_{\Delta} \langle \varphi, [1] \rangle \quad \because \text{式 (A9.16) (A4.25)} \tag{A9.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\textcircled{2} \langle \psi_t, \lambda_t \rangle \\
&=_{\Delta} \langle T\omega_2, [2] \rangle \\
&=_{\Delta} \langle \psi, [1] \rangle \quad \because \text{式 (A9.16)} \tag{A9.24}
\end{aligned}$$

□

式 (A9.16) を考慮すれば、式 (A9.2) の  $\eta_t$  が

$$\begin{aligned}
&\eta_t \\
&\equiv \cos\{(\pi/2) \cdot (t/N)\} \cdot T\omega_1 \\
&\quad + \sin\{(\pi/2) \cdot (t/N)\} \cdot T\omega_2 \\
&\text{for any } t \in \{0, 1, 2, \dots, N/2, \dots, N\} \tag{A9.25}
\end{aligned}$$

と表され、この  $\eta_t$  と、文献 [C4] の付録5で定義されている構造受精作用素  $A(\mu)$  の形式との対応を勘案すると、以上から、A9.1節の①の自己想起が次のように実現されるといってよい：

(イ)  $\eta_t$  から式 (A9.3) の  $\varphi$  が実現される場合

$$\begin{aligned}
&SM(\eta_t, \omega_1) \\
&\equiv \cos\{(\pi/2) \cdot (t/N)\} \quad \because \text{式 (A9.7)} \\
&> SM(\eta_t, \omega_2) \tag{A9.26} \\
&\equiv \sin\{(\pi/2) \cdot (t/N)\} \quad \because \text{式 (A9.7)}
\end{aligned}$$

が成り立つ段階番号  $t$  については、 $\eta_t$  から  $T\omega_1 = \varphi$  ( $\because$  式 (A9.16)) が自己想起されるだろう。

(ロ)  $\eta_t$  から式 (A9.5) の  $\psi$  が実現される場合

$$\begin{aligned}
&SM(\eta_t, \omega_1) \\
&\equiv \cos\{(\pi/2) \cdot (t/N)\} \quad \because \text{式 (A9.7)} \\
&< SM(\eta_t, \omega_2) \\
&\equiv \sin\{(\pi/2) \cdot (t/N)\} \quad \because \text{式 (A9.7)} \tag{A9.27}
\end{aligned}$$

が成り立つ段階番号  $t$  については、 $\eta_t$  から  $T\omega_2 = \psi$  ( $\because$  式 (A9.16)) が自己想起されるだろう。

□

### A9.3 計算機シミュレーション

式 (A6.33) の形式の怒り顔  $\eta_t |_{t=0} = \varphi$  から式 (A6.33) の形式の笑い顔  $\eta_t |_{t=N} = \psi$  へと多段階変換して得られる、式 (A9.2) の各画像  $\eta_t$  を計算機シミュレーションで求めたが、その結果を報告しよう。

多段階変換に関する5式 (A9.2) ~ (A9.6) において、 $N=10$  と選び、

式 (A9.3) の  $\varphi$  を怒り顔画像

式 (A9.5) の  $\psi$  を笑い顔画像

(A9.28)

としている。多段階変換画像を表す式 (A9.6) が Fig.A9に示されている。

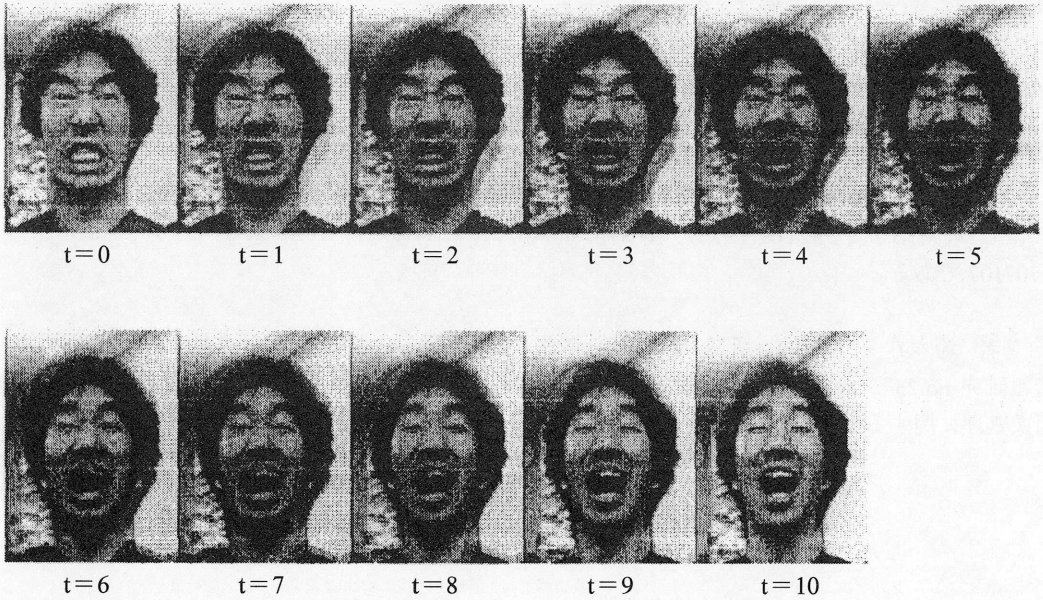


Fig.A9 A multi-stage transformation  $\eta_t$  ( $t=0, 1, 2, \dots, N$ ) from an angry face  $\eta_t |_{t=0} = \varphi$  to a laughing face  $\eta_t |_{t=N} = \psi$ , where  $N=10$

正規化画像 (normalized image)  $(T\varphi)(x_1, x_2)$  を出力するモデル構成作用素  $T$  として、

$$(T\varphi)(x_1, x_2) \equiv \begin{cases} 0 \cdots d(\varphi) = 0 \text{ のとき} \\ [\varphi(x_1, x_2) - m(\varphi)] / d(\varphi) \\ \cdots d(\varphi) > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{A9.29})$$

where

$$d(\varphi) \equiv M(\varphi) - m(\varphi) \quad (\text{A9.31})$$

$$M(\varphi) \equiv \max_{x_1 = -53 \sim +53, x_2 = -39 \sim +40} \varphi(x_1, x_2) \quad (\text{A9.32})$$

$$m(\varphi) \equiv \min_{x_1 = -53 \sim +53, x_2 = -39 \sim +40} \varphi(x_1, x_2) \quad (\text{A9.33})$$

と、文献 [C4] の式 (A10.20) で定義されているものを選定し、定理A5.6に従って、類似度を計算したが、

式 (A9.2) で与えられている  $\eta_t$  と  $\eta_t |_{t=0} = \varphi$  との間の、

$$\begin{aligned} & \text{式 (A5.52) の類似度 } SM(\eta_t, \varphi) \\ & \equiv s_\varphi(\eta_t) / [s_\varphi(\eta_t) + s_\varphi(\varphi)] \end{aligned} \quad (\text{A9.33})$$

$$= \|T\eta_t - T\varphi\| / [\|T\eta_t - T\varphi\| + \|T\eta_t - T\varphi\|] \quad (\text{A9.34})$$

の、例えば、 $t=5$  の時の値は、0.494562 であり

式 (A9.2) で与えられている  $\eta_t$  と  $\eta_t |_{t=N} = \psi$  との間の、

$$\begin{aligned} & \text{式 (A5.53) の類似度 } SM(\eta_t, \psi) \\ & \equiv s_\psi(\eta_t) / [s_\psi(\eta_t) + s_\psi(\psi)] \end{aligned} \quad (\text{A9.35})$$

$$= \|T\eta_t - T\psi\| / [\|T\eta_t - T\psi\| + \|T\eta_t - T\psi\|] \quad (\text{A9.36})$$

の、例えば、 $t=5$ の時の値は、0.55438である。

ここに、 $s_\psi(\eta_t)$  は

$$s_\psi(\eta_t) \equiv \|T\eta_t - T\psi\| / \|T\varphi - T\psi\| \quad (\text{A9.37})$$

$$s_\varphi(\eta_t) \equiv \|T\eta_t - T\varphi\| / \|T\varphi - T\psi\| \quad (\text{A9.38})$$

と定義されている。

因みに、式 (A9.16) での設定を考慮した場合、式 (A9.25) の  $\eta_t$  の、類似度  $SM(\eta_t, \varphi)$ 、 $SM(\eta_t, \psi)$  に対応する2量  $\cos\{(\pi/2) \cdot (t/N)\}$ 、 $\sin\{(\pi/2) \cdot (t/N)\}$  ( $N=10$ ) の、 $t=5$ の時の値は共に、0.707107である。

(著者 鈴木昇一、勤務先・所属 文教大学・情報学部・情報システム学科、“文教大学・情報学部・情報研究 no.23”への投稿論文、論文題目 界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の、顔画像処理に関する計算機シミュレーション、投稿年月日 2000年1月12日)