風景画から知識を抽出し、解釈するシステムの、ファジィ推論ニューラルネットによる構成

鈴木　昇一

A Construction of a System That Can Extract Knowledges from Scenes and Can Interpret the General Appearance, Making Use of a Fuzzy-Inference Neural-Network

Shoichi Suzuki

あらまし

1枚の風景画中の各画素 x に第 $j(x) \in J$ 番目の**カテゴリラベル** $\mathfrak{C}_{j(x)}$ を適切に付与できれば、画像中に同一カテゴリラベルを持つ画素を集めることによりパターン φ が存在することが知識として抽出されることがわかる。その結果、画像中のすべてのパターンに関しこの知識の抽出が行われれば、この画像が解釈されることになる。

このように、各画素の各画素近傍を使い、風景画像内の各画素に、画像内の物体のカテゴリラベルを付ける方法で、風景画像から画素単位の知識を抽出し、画像のセグメンテーション機能を同時に備えている風景画の解釈システムを構築することに、パターン認識の数学的理論（SS理論）[B1]～[B6] を適用する方法が、本論文では研究されている。

パターン認識の数学的理論（SS理論）では、入力パターン φ に対応する“axiom 1を満たすパターンモデル” $T\varphi$ を求め、$T\varphi$ からカテゴリ帰属知識に関する連想形認識方程式の解として、不動点パターンモデルを連想する形で、“axiom 2を満たす類似度関数”SM,“axiom 3を満たす大分類関数”BSC,“axiom 4を満たすカテゴリ選択関数”CSF を使い、φ の帰属するカテゴリを決定する多段階パターン変換法が考えられている。本論文では、SM, BSC の構成に想起作用素を繰り込み、BSC の構造をファジイ推論規則を表すように決定し、BSC の構造内各成分を最急降下法による学習で決定している。

然しながら、T, SM, BSC を一層、適応的に決定する必要性などが痛感させられ、引き続いて研究しなければならないことになった。

キーワード

パターン認識の数学的理論(SS理論)　モデル構成作用素　類似度関数　大分類関数
カテゴリ選択関数　構造受精変換　カテゴリ帰属知識の不動点連想形認識
画素単位の認識処理　シーン画像からの知識の抽出　セグメンテーション
ファジィ推論ニューラルネット　最急降下法　風景画の解釈システム

Abstract

If recognition system RECOGNITRON attaches a appropriate category-label $\mathfrak{C}_{j(x)}$ to each pixel x with a gray level in a given scenery image making good use of a contextual information, and gathers the pixels having the same category-label, the existence of a pattern belonging to its category may be extracted as a knowledge contained in the scenery image in question. One scenery image is understood as a set of labeled objects. In this way RECOGNITRON can interpret the scenery image. An extraction-and-interpreatation problem of images can be solved by the setting of that each pixel x in a given scenery image is to be assigned to one of m possible categories and each pattern φ must belong to one of their categories.

The aim of this research is to apply SS theory [B1]～[B6] to obtaining a synthetic description from scenery images.

Pattern recognition is a well studied problem in which the identity of an unknown pattern is determined to be one of an finite classes spanning the pattern space.

At the start a corresponding model $T\varphi$ of an input pattern φ in question must be determinined. From that time on, as a solution of an equation of associative recognition concerning categorical-membership knowledges which contain $T\varphi$, a fixed-point pattern-model is associated with $T\varphi$ at the final stage of many stages which are generated by many selected structure-fertilization transformations $TA(\cdot)T$ that are constructed making use of a model-construction operator T, a similarity-measure function SM, a rough classifier BSC and a category-selection function CSF which respectively must satisfy axiom 1,2,3 and 4.A category to which φ belongs depends on the fixed-point pattern-model and can be determined without difficulty.

We propose a new approach which simultaneously provides a restored image, a segmented image and a map.

We construct them weaving an associative operator into the structure of SM and BSC.A structure of BSC is designed so that it may represent fuzzy inference rules which are realized with help of neural-networks. We determine constituent elements of BSC using method of steepest descent.

However in order to obtain the better performance it is necessary to more adaptively determine constituent elements of T,SM and BSC. We must study such a model-construction operator T in succession.

Key words : a mathematical theory of recognizing patterns(SS theory)
model-construction operator　similarity-measure function　rough classifier
category-selection function　structure-fertilization transformation
associative reconition of fixed-point type about categorical-membership knowledges
pixelwise recognition　extraction of knowledges from scenery images　segmentation
fuzzy-inference neural-network　method of steepest descent
system for explaining the meaning of scenes

1. まえがき

人間は形（form）、色（color）、動き（movement）、奥行き（depth）を別々の脳領域（separate channels）で処理していることを示すpsychophysical evidenceが存在する［A14］。

パターン（pattern）とは非言語的な情報であり、視覚的、聴覚的、触覚的、臭覚的、味覚的などに捕らえられる対象であり、例えば、形・大きさ・色などを備えているのが視覚的パターンである。本論文は、3次元物体が平面上に投影されて得られる“形・大きさを備えている灰色の2次元視覚的パターン（画像；a two-dimensional gray-scale image）”を取り扱う。

もの（パターン）を見てそれが何であるかを解釈するといったカテゴリ分類場面では、どのような特徴を興味の対象としているこの1つの分類に関係するかを学習しておく必要がある。然も、パターンと今1つのパターンとがどの程度似ているか、どの程度異なっているかを計量する類似度関数 SM を構成しておく必要がある。注意すべきは、いわゆるヒトにおける認識の誤びゅうが生じる1つの原因は崩れたパターンからその帰属するカテゴリを一意的に特性付ける特徴量を抽出できていないことにもある。にも拘わらず、人間並の認識性能を達成する場合、設定する特徴抽出の働きに完全性を備えさせることに固執してはならない。

もし抽出された特徴量がパターン φ を記述するために使われるならば（if a list of features is used to describe a pattern φ）、パターン φ を十分な精密さで再現するのに必要とされる十分な情報を一般には、抽出された特徴量は備えていないと考えなければならない。原パターン φ をパターンモデル $T\varphi$ として再現するには十分な場合が多いけれども。

パターンから有限個の特徴量さえ抽出できれば、SM が構成できることは既に、SS理論［B1］～［B4］で明らかになっている（文献［B4］の定理A2.2）。

似ていればいるほど近くに、異なっていればいるほど遠くに配置されているようなパターンを点として表示されている空間（類似性空間）を**認識空間**と名付けている研究［A10］があるが、この認識空間にはパターンの主成分軸と高い相関を持つ軸がある事実が指摘されている。S.Suzukiはこのような認識空間を一般化し、**カテゴリ帰属知識空間**〈Φ, 2^J〉という概念を確立しながら、〈Φ, 2^J〉の代数的·幾何学的·解析的な構造を明らかにし、**認識万能性**（recognitive universality）を備えたパターン認識システム **RECOGNITRON** を構成した。情報が入力され、情報が出力される計算機を中心とする情報機械系を情報システムというが、認識システムは典型的な情報システムである。

“4事項

(1) パターンの帰納的定義（SS定義）

(2) 連想形認識方程式（SS方程式）

(3) カテゴリ帰属知識の直交分解（SS展開）

(4) カテゴリ帰属知識のポテンシャルエネルギーの非増加定理（SS非増加定理）

などを解決したSS理論”以外の理論は、例えば、(1) に関しては、処理の対象とする問題のパターンの集合が構成的であることに気がつかなかった。また、(2) に関しては、文法エラーが存在しないからといって、その計算機プログラムにより正しい計算結果が得られることは保証されないことに対応して、多段階連想形認識過程により類似度が最大値 1 となるSS方程式の不動点カテゴリ帰属知識解が求まったとしても、そのパターンが正認識されることは保証されなくて、認識処理不能、認識不定の場合があることが明らかになったことである。

数式によるモデル化と数理的処理を主体とするオペレーションズリサーチ･数理計画法･システム最適化手法と異なり、古典的なAI（人工知能；artificial intelligence）は記号によるモデル化と記号操作を主体とする。狭い意味のAIとはヒューリスティックな知識を多く用いるルール形のシステム（エキスパートシステム）を指していよう。情報学は情報に関する“知の体系”であるが、**計算機情報学の最先端と位置付けられてよい人工知能論**（知能情報学；intelligent informatics）は人工知能で不可能なことの領域の拡大を常に目指している。人工知能は自ら不可能なことの、より多くの自覚を持っているシステムである。現代の人工知能学はオペレーションズリサーチ･数理計画法･システム最適化手法などで解決できる問題はファジィ理論、ニューラルネット理論［A15］、遺伝的アルゴリズム、人口生命論などですべて解決できる学問分科に進歩･発展しているけれども。

ハードウェア（神経回路網）としての脳の動作原理を解明することは、ソフトウェアとしての精神（心）の知的機能の役割を明確化することに直接結びつかない。結びつくためには、外界の情報が脳内でどのように符号化され、その符号系の下でどのように情報が処理され、情報処理された結果がどのように復号されるかなどの諸問題が解消されなければならない。外界の情報が脳細胞集団の活動とどのような意味的な反応を持っているかが明らかにされねばならない。

知能の程度というのは、効果（effect）としての外に表われたものを観察して測られるものであり、内部メカニズムに立ち入ってわかるものではないという考えがある。そして、知性のみに偏するのではなく、情報の持つ感性をも考慮した新しい価値観の下で、知能の働きを解明しなければならないという考えに発展している。

SS理論は、パターン認識（に必要な）**知能の一般原理をaxiom 1～axiom 4からなるSS公理系で明らかにしている：**

Although SS theory［B1］～［B6］ is universal, it is not closed.Anything can be described by it, but something must remain unanalyzed. □

Image interpretation is a two phase stages：

（i）The low-level vision task of image segmentation used to obtain a shape from a given gray-scale image.

（ii）The high-level vision task of image interpretation assigning a corresponding category to a pattern which exists in each segmented image. □

These two stages are not entirely independent：A good segmentation is a prerequisite for correct interpretation and on the other hand the knowledge of the scene（explicitly stated, the interpretation of the scene）is essential for good segmentation. This suggests that interaction should exist between the two stages. □

本研究では、segmentation, interpretation間の両機能に関するこの種の相互作用（interaction）をあらわにしない形式で、画像の領域分割･画像解釈を同時に達成する画像理解手法を提案する（新規性）。

1枚の画像を概観･解釈する知能情報メディアシステムを構築することを考えてみよう。

それには、1枚の風景画内の各画素に家、犬、木、山、川、海、土手、雲、人などの成分であることを明らかにするカテゴリラベルをその画素の近傍に関し持っている知識を利用して、付ければよいことに気づく。そうすれば、このシステムには、意味ある有限個の領域に画像を分割する**領域分割**（region segmentation）の機能を備えて来ることにも気づく。

本論文は、各画素に適切なカテゴリラベルを付けることにより、風景画から知識を抽出し、こ

の風景画を解釈する“**画像からの知識抽出・画像の解釈システム**”を構築するための手法を、画像の領域分割機能を含む形で**SS理論**を適用し、研究したものである。

1つの風景画内の各画素に、その近傍の画素集合について持つ知識を用いカテゴリラベルを付けることによって、風景画から風景画中にどんな名前のパターン（物体、雲、空、人、動物、木、家など）が存在するかについての知識を抽出し、その画像の概観を解釈するシステムを構成する手法が研究される。構成された**画像知識抽出解釈システム**は同時に、画像を意味ある複数の領域へと分割する“領域分割”の機能を備えて来ることになったこと（有効性）に注意しておこう。この有効性は文献［A3］の研究にもみられるけれども、SS方程式の不動点カテゴリ帰属知識として、安定な解として、セグメンテーションがなされることに違いがある。

> segmenting the image into regions and subsequently associating these regions（depending on their spatial relationships with other regions）with some objects in the scene

を行っている Markov random field based image interpretation scheme ではこの種の相互作用を直接、取り扱っているけれども。

本論文の構成は次の様になっている。

第2章では画素を単位とするパターン認識法が説明され、第3章では、原パターンφの代りとなるパターンモデル$T\varphi$の構成が説明され、第4～6章では入力パターンφと記憶している代表パターン ω 間の類似性を計る類似度関数 SM が構成される。第7～12章では1つの任意のカテゴリと残りのすべてのカテゴリを区別できる大分類関数 BSC が構成され、大分類関数 BSC 内の複数の助変数（代表パターン ω、閾値 b、重み W、標準偏差 σ）を学習する方法が説明されている。想起作用素 B を類似度関数 SM、大分類関数 BSC の構成に用いたことが本研究の1つの特色となっている。**大分類関数BSCの構造をfuzzy推論規則を表現するようにニューラルネットとして構成した**こと、並びに、その学習法を詳細に論じたことが本研究の今1つの特色となっている。

尚、12付録A～Lが設けられている。特に、付録Aではモデル構成作用素 T，類似度関数 SM，大分類関数 BSC，カテゴリ選択関数 CSF が各々満たすべき4公理であるaxiom 1～axiom 4が説明されており、また、付録Bでは、本研究で採用される“制約付き最適化問題の1つの解決法としての、S.Suzukiの提案したパターン認識の数学的理論（SS理論）［B1］～［B6］での多段階パターン認識法”、並びに、この認識法で使われる構造受精変換 $TA(\mu)T$ が説明されている。

第2章　パターンφの文脈から定まる画素 x のカテゴリ$\mathfrak{C}_{j(x)}$

画素 x に第 $j(x) \in J$ 番目のカテゴリラベル$\mathfrak{C}_{j(x)}$を適切に付与できれば、画像中に同一のカテゴリラベルを持つ画素の集まりとしてのパターンφが存在することが知識として抽出されることが判明し、よって、画像中のすべてのパターンに関し知識のこの種の抽出が行われれば、この画像が解釈されることになる。このことを勘案し、本章では、1つの画素 x に画像中のあるパターンφの帰属するカテゴリラベル$\mathfrak{C}_{j(x)}$を付与するという“画素 x 毎の知識抽出・画像中のあるパターンφの解釈”へ、パターン認識の数学的理論（SS理論）［B1］～［B6］を適用することが概観される。

2.1 計算機による風景画像処理としての風景画の解釈

image segmentation を含む画面内のパターン認知過程を研究しよう。いいかえれば、

前後の文脈を手がかりとして、(文脈中の) パターンの (カテゴリ帰属に関し) 意味上の多義性を解消し、文脈に適合した“そのパターンの帰属するカテゴリ”を確定させるという「segmentation (1枚の画面を有限個の意味ある区画に分割すること) を含む画面内のパターン認識過程」

に関し、SS理論を適用することを考えよう。

パターンモデル Tφをみたら 原パターンφのようにみえる (同一知覚原理)

ためには、処理の対象とするパターンφの集合 Φ と、この写像 T との対 [Φ, T] が付録Aの axiom 1を満たす必要がある、というのが、SS理論の最初の主張である。

SS理論では、入力パターンφに対応するパターンモデル Tφを求め、Tφから付録Bの、式 (B4.2) のある構造受精変換 TA(μ)T の不動点パターンモデルを連想する形で、φの帰属するカテゴリを決定する多段階パターン変換法が考えられている (付録BのB6章)。

SS理論は、このようなパターンモデル Tφを恰も、原パターンφと錯覚し、構造受精変換を多段階適用し、カテゴリ帰属知識の不動点知識を連想形認識方程式を解くことにより求めるという“不動点探索形構造受精多段階変換に基づく認識の働き”を提案しており、この種の認識の働きがありとあらゆるパターン認識の働きをシミュレートできることが証明されている [B3]。

1つの風景画内の各画素に、その近傍の画素集合について持つ知識を用いカテゴリラベルを付けることによって、風景画から知識を抽出し、その画像の概観を解釈するシステムを構成する手法が研究される。構成された**画像知識抽出解釈システム**は同時に、画像を意味ある複数の領域へと分割する“**領域分割** (region segmentation)”の機能を備えて来ることがあきらかになる。

外界から獲得した2次元投影像を脳内の記憶と照合する情報処理過程がパターン認識過程である。**風景画の理解・解釈へSS理論を適用する方法**を研究した本論文では、2次元の投影像のみからもとの3次元形状を復元するといった“逆問題”を取り扱っていないし、再現された3次元形状を脳内で操作し、新しい視点からの見えを作り上げるといった感覚運動的な知能処理も実現していない。知能の内、表象能力に基づいた概念的表象分類知能のみを取り扱っており、表象を操作するといった知覚運動的知能を実現していない。

2.2 画像中の画素を単位とするパターン認識

2次元**整数値座標** x = $\langle x_1, x_2 \rangle$ を持つ**画素** (pixel or picture element ; 単に画素 x ということがある) に、第 j(x) ∈ J 番目のカテゴリラベル (a label attached to a pattern φ to show what it is ; category-label)

$$\mathfrak{C}_{j(x)} \in \underline{\mathfrak{C}} = \{\mathfrak{C}_j \mid j \in J\} \tag{2.1}$$

を付ける方法が、本論文で研究される。このカテゴリラベル付けが1枚の画像内のすべての画素 x にわたって終了し、各 $\mathfrak{C}_{j(x)}$ が決定されたとすると、連結している同一のカテゴリラベルを集めることにより、未知の風景画像について**領域** (district ; 連結している画素のある集まり) 毎のカテゴリのラベル付けがなされ、未知の風景画像内に如何なる成分 (物体、雲、空、人、動物、木、家など) が存在するかに関する知識が抽出され、未知の風景画像の理解・解釈がなされることになる。

式 (2.1) のカテゴリラベル $\mathfrak{C}_{j(x)}$ を (2p+1) × (2q+1) 個の画素での濃淡値 $\varphi_{k\ell}$の集合として

のパターンφから決定することにしよう。

1枚の画面内に複数のパターンがあるものとし、その内の1つをφと表す。

2次元整数値座標 $x=\langle x_1+k, x_2+\ell\rangle$ を持つ
画素での、パターンφの濃淡値 (2.2)

を、x_1, x_2を固定した条件下で、

$$\varphi_{k\ell}\equiv\varphi(x_1+k, x_2+\ell) \tag{2.3}$$

と表す。座標 $x=\langle x_1, x_2\rangle$に注目し、これを固定し、更に、p, q を固定した正数値、例えば、1, 2などと選び、**実数値パターン** (real-valued pattern)

$$\varphi = \{\varphi_{k\ell} \mid k=0, \pm1, \pm2\cdots, \pm p,\ \ell=0, \pm1, \pm2\cdots, \pm q\} \tag{2.4}$$

を考えよう。このとき、

φ_{00}の**文脈** (circumstance or context) は、

$$\varphi-\{\varphi_{00}\} = \{\varphi_{k\ell} \mid k=1, 2\cdots, \pm p,\ \ell=1, 2\cdots, \pm q\} \tag{2.5}$$

であると考えられる。式 (2.1) のカテゴリラベル$\mathfrak{C}_{j(x)}$を式 (2.4) のパターンφから決定する手法を提案することが本研究での主要な内容であり、その計算機シミュレーションによる有効性・信頼性の検証は別の機会に譲られる。

処理の対象とする問題のパターンφの集合 Φ は第4章で説明されている可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の、(零元を含む) ある部分集合である [B3], [B4]。

第3章　モデル構成作用素 T の構成

画素中の各々の画素に、その画素を含む画素のある集まり (パターン) が表すカテゴリのラベルを付けるという画素単位の知識の抽出処理で、画像の領域分割を行う手法が、前章で簡単に説明された。本章では、

付録Iの定理I1を適用して、付録Aのaxiom 1を満たす**モデル構成作用素** T を構成しよう。

式 (2.4) の実数値パターンφについて、

$$\forall k\in\{0, 1, 2\cdots, \pm p\},\ \forall \ell\in\{0, 1, 2\cdots, \pm q\},$$
$$(S\varphi)_{k\ell}= \begin{cases} 0 \text{ if } \sup\limits_{k,\ell} |\varphi_{k\ell}|=0 \\ \varphi_{k\ell}/\sup\limits_{k,\ell}|\varphi_{k\ell}| \text{ if } \sup\limits_{k,\ell}|\varphi_{k\ell}|>0 \end{cases} \tag{3.1}$$

と定義される写像

$$S: \Phi\rightarrow\mathfrak{H} \tag{3.2}$$

を定義し、不等式

$$\forall k, \forall\ell,\quad -1<h^-_{k\ell}\leqq 0\leqq h^+_{k\ell}<+1 \tag{3.3}$$

を満たす2つの実数値閾値関数

$$h^-=\{h^-_{k\ell}\},\ h^+=\{h^+_{k\ell}\} \tag{3.4}$$

を導入する。集合$\mathfrak{H}$は第4章で説明されている。

式（2.4）を満たす実数値パターン$\varphi \in \Phi$について、式（3.1）の写像Sと、式（3.4）の2つの閾値関数h^-, h^+とを用いて、

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall k, \forall \ell, (T\varphi)_{k\ell}= \begin{cases} -1 & \text{if } (S\varphi)_{k\ell} < h^-_{k\ell} \\ 0 & \text{if } h^-_{k\ell} \leqq (S\varphi)_{k\ell} \leqq h^+_{k\ell} \\ +1 & \text{if } (S\varphi)_{k\ell} > h^+_{k\ell} \end{cases} \tag{3.5}$$

と定義される写像

$$T : \Phi \rightarrow \Phi \tag{3.6}$$

がaxiom 1を満たすモデル構成作用素であることは、付録Iの定理I1が保証している。

第4章　類似度関数 SM の構成

本論文では、1つの風景画内の各画素に、その近傍の画素集合について持つ知識を用いカテゴリラベルを付けることによって、風景画から知識を抽出し、その画像の概観を解釈するシステムを構成する手法が研究される。構成された**画像知識抽出解釈システム**は同時に、画像を意味ある複数の領域へと分割する“領域分割”の機能を備えて来ることになる。

画素を単位とした“各画素にカテゴリラベルを貼付る操作”という“画素を単位とした上述の認識処理”をSS理論を適用して実現するためには、

2つのパターン$\varphi=\{\varphi_{k\ell}\}$, $\eta=\{\eta_{k\ell}\}$の内積(φ, η)、ノルム$\| \varphi \|$を

$$(\varphi, \eta)=\sum_{k=-p}^{+p} \sum_{\ell=-q}^{+q} \varphi_{k\ell} \cdot \eta_{k\ell} \tag{4.1}$$

$$\| \varphi \| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)} \tag{4.2}$$

を導入しなければならない。式（2.5）の文脈情報（contextual information）$\varphi-\{\varphi_{00}\}$を考慮し、式（2.4）のパターンφの集まりΦに対し、式（4.1）の内積(φ, η)を定義していることに注意しておかねばならない。式（3.2）に登場している$\mathfrak{H}$はこの内積を採用している可分なヒルベルト空間[B3]であり、処理の対象とする問題のパターンφの集合Φは式（K6.9）の様に表される“この$\mathfrak{H}$の、零元を含む部分集合”である。

付録Aのaxiom 2を満たす**類似度関数**（similarity-measure function）SMを構成しよう。

規格化内積（normalized inner product）$\mathrm{nip}(\varphi, \eta)$を、

$$\mathrm{nip}(\varphi, \eta) \equiv \begin{cases} 0 & \text{if } \| \varphi \| \cdot \| \eta \| = 0 \\ (\varphi, \eta) / [\| \varphi \| \cdot \| \eta \|] & \text{if } \| \varphi \| \cdot \| \eta \| > 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

と定義すれば、Schwarzの不等式

$$-1 \leqq \mathrm{nip}(\varphi, \eta) \leqq +1 \tag{4.4}$$

が成り立っている。Schwarzの等式

$$\mathrm{nip}(\varphi, \eta)=\pm 1$$
$$\Leftrightarrow \varphi\,(\neq 0) \text{ が } \eta\,(\neq 0) \text{ の非零定数倍である} \tag{4.5}$$

に注意しよう。

式（2.1）で登場している全カテゴリ集合$\underline{\mathfrak{C}}$内の第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の持つ諸性質を典型的

に代表する代表パターンを $\omega[j]=\{\omega[j]_{k\ell}\}$ とし、2つのパターンモデル $T\varphi, T\omega[j]$ について、$T\varphi$ 内に $T\omega[j]$ が含まれる程度を情報量として計量する機能を持つその**相互情報量**（mutual information）

$$\mathrm{MI}(T\varphi, T\omega[j]) \equiv -(1/2)\cdot\log_e[1-|\mathrm{nip}(T\varphi, T\omega[j])|^2] \tag{4.6}$$

を定義し、

$$\mathrm{SM}(\varphi, \omega[j]) \equiv \begin{cases} 0 & \text{if } \sum_{i\in J} \mathrm{MI}(T\varphi, T\omega[i])=0 \\ \mathrm{MI}(T\varphi, T\omega[j]) / \sum_{i\in J} \mathrm{MI}(T\varphi, T\omega[i]) & \text{if } \sum_{i\in J} \mathrm{MI}(T\varphi, T\omega[i])>0 \end{cases} \tag{4.7}$$

と定義される写像

$$\mathrm{SM}: \Phi\times\Omega\to\{s\mid 0\leqq s\leqq 1\} \tag{4.8}$$

は、**axiom 2を満たす類似度関数である**ことが証明される（文献［B4］の付録2の定理A2.3)。ここに、登場している第$j\in J$番目の、式（2.1）内のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターン$\omega[j]$の系

$$\Omega\equiv\{\omega[j]\mid j\in J\} \tag{4.9}$$

は1次独立であると仮定する。

第5章　想起作用素 B の構成

第4章での式（4.7）の類似度関数 SM を改良したり、第7章で大分類関数 BSC の構成に使われる想起作用素（associative operator）B について、説明しよう。

式（2.1）内のカテゴリ集合$\underline{\mathfrak{C}}$を定義するカテゴリ番号の集合 J を

$$J=\{1, 2, \cdots, m\} \tag{5.1}$$

と選ぶ。

第$i\in J$行第$j\in J$列の要素として、

$$C_{ij}\equiv(T\omega[j],\ T\omega[i]) \tag{5.2}$$

を持つ行列 $C=(C_{ij})_{i,\,j\in J}$ を導入する。

代表パターンモデル $T\omega[j]$ の系

$$T\cdot\Omega\equiv\{T\omega[j]\mid j\in J\} \tag{5.3}$$

は1次独立な系である様に選ばれているものとすると、C の逆行列 $C^{-1}=(C^{-1}{}_{ij})_{i,\,j\in J}$ は存在する。

このとき、式（2.4）の任意のパターンφに対し、

$$BT\varphi = \sum_{i\in J} T\omega[i]\cdot\sum_{j\in J} C^{-1}{}_{ij}\cdot(T\varphi, T\omega[j]) \tag{5.4}$$

と定義される作用素

$$B: T\cdot\Phi\to T\cdot\Phi \tag{5.5}$$

を考えよう。ここに、$T\cdot\Phi$ は Φ の、式（2.4）で表される各元φを式（3.6）の T で変換して得られる集合であり、

$$T\cdot\Phi\equiv\{T\varphi\mid\varphi\in\Phi\} \tag{5.6}$$

と定義される。

クロネッカーのδ記号

$$\delta_{ij}=1 \text{ if } i=j, =0 \text{ if } i\neq j \tag{5.7}$$

を導入しておく。

式（5.4）の想起作用素 B の**不動点**（fixed-point）は各 $T\omega[j]$ であることを指摘するのが次の定理5.1である。

［定理5.1］**（不動点定理）**

$$\forall j\in J,\ BT\omega[j]=T\omega[j]. \tag{5.8}$$

（証明）　$\forall k\in J,\ BT\omega(k)$

$$=\sum_{i\in J} T\omega[i]\cdot\sum_{j\in J} C^{-1}{}_{ij}\cdot(T\omega[k],\ T\omega[j]) \quad \because \text{ 式（5.4）}$$

$$=\sum_{i\in J} T\omega[i]\cdot\sum_{j\in J} C^{-1}{}_{ij}\cdot C_{jk} \quad \because \text{ 式（5.2）}$$

$$=\sum_{i\in J} T\omega[i]\cdot\delta_{ik}$$

$$=T\omega[k]. \qquad \Box$$

式（5.3）の $T\cdot\Omega$ を記憶内容と想定した場合、式（5.4）のパターン $BT\varphi$ は、パターン φ のモデル $T\varphi$ を probe として、記憶内容 $T\cdot\Omega$ 内の、$T\varphi$ と最も相関の大なる1つの $T\omega[j]$ を呼び出す（想起する）ことを意図したものである。定理5.1は特に、$T\omega[j]$ から $T\omega[j]$ が誤差なしで正確に想起できることを指摘している。

第6章　式（4.7）の類似度関数 SM の改良

式（4.6）の相互情報量 $MI(T\varphi, T\omega[j])$ において、$T\varphi$ を $T\varphi$ から想起される内容 $BT\varphi$ に置き換えた非負量

$$MI(BT\varphi, T\omega[j])$$

$$\equiv-(1/2)\cdot\log_e[1-|\,nip(BT\varphi, T\omega[j])\,|^2] \tag{6.1}$$

の如く定義し直し、$MI(T\varphi, T\omega[j])$ を用いて定義された式（4.7）の SM を

$$SM(\varphi, \omega[j])\equiv$$

$$\begin{cases} 0 \text{ if } \sum_{i\in J} MI(BT\varphi, T\omega[i])=0 \\ MI(BT\varphi, T\omega[j])\,/\sum_{i\in J} MI(BT\varphi, T\omega[i]) \\ \quad \text{if } \sum_{i\in J} MI(BT\varphi, T\omega[i])>0 \end{cases} \tag{6.2}$$

の如く、式（6.1）の $MI(BT\varphi, T\omega[j])$ を使用する形に定義し直しても、**式（4.8）の写像 SM は、**依然として、**axiom 3 を満たす類似度関数である**ことは、axiom 2の（ｉ）（直交性）の成立が定理5.1（不動点定理）から保証されることから、わかる。axiom 2の（ii）（規格化性）、（iii）（T-不変性）は勿論、成立している。

第7章　fuzzy 推論規則を表現する大分類関数 BSC の構造形式の決定

付録Aのaxiom 3を満たす大分類関数（binary-state classifier）BSC を構成しよう。

BSC を知識抽出ネットワーク（knowledge-extraction network）として構成する。

変数

$$y^{\wedge} = \{y^{\wedge}_{k\ell}\} \tag{7.1}$$

を用意し、**重みベクトル** (weight vector)

$$W[j] = \{W[j]_{k\ell}\} \tag{7.2}$$

の各成分 $W[j]_{k\ell}$ を、

$$y^{\wedge}_{k\ell} = W[j]_{k\ell} \tag{7.3}$$

という具合に、理想出力とする様なfuzzy **推論規則**（fuzzy inference rule）は、**閾値**（threshold value）$b[j]$ をも導入すれば、

BTφ が Tω[j] であるとき、$y^{\wedge}_{k\ell}$ が

$W[j]_{k\ell} - b[j]$

である (7.4)

と表される。ここに、

$$W^{\wedge}[j] = \{W^{\wedge}[j]_{k\ell}\} \tag{7.5}$$

の近傍値が式（7.2）の W [j] である。つまり、

すべての $k = 0, 1, 2, \cdots, \pm p$, $\ell = 0, 1, 2, \cdots, \pm q$ について、

if BTφ is Tω[j] then $y^{\wedge}_{k\ell}$ is $W[j]_{k\ell}$

$- b[j]$ (7.6)

と表されるfuzzy 推論規則を想定しており（付録DのD2章を参照）、式（7.6）のfuzzy 推論規則を大分類関数 で表現するように、大分類関数

$$\mathrm{BSC} : \Phi \times J \rightarrow \{0, 1\} \tag{7.7}$$

を決めよう。そのため、BSC の構造を

$$\begin{aligned} &\mathrm{BSC}(\varphi, j) \\ &\equiv \mathrm{psn}\Big(\sum_{k=-p}^{+p} \sum_{\ell=-q}^{+q} W[j]_{k\ell} \\ &\cdot [q_{k\ell}(\varphi, j) / \sum_{i \in J} q_{k\ell}(\varphi, i)] - b[j]\Big) && (7.8) \\ &= \mathrm{psn}\Big(\sum_{k=-p}^{+p} \sum_{\ell=-q}^{+q} W[j]_{k\ell} \cdot p_{k\ell}(\varphi, j) \\ &\quad - b[j]\Big) && (7.9) \\ &= \mathrm{psn}(W_{mean}(\varphi, j) - b[j]) && (7.10) \\ &= \mathrm{psn}(y(\varphi, j)) && (7.11) \end{aligned}$$

と設定してみよう。ここに、登場した各記号は、

①$\mathrm{psn}(u) =$

$$\begin{cases} 0 & \text{if } u < 0 \\ 1 & \text{if } u \geqq 0 \end{cases} \tag{7.12}$$

②$q_{k\ell}(\varphi, j)$

$$\equiv \exp[-\{(\mathrm{BT}\varphi)_{k\ell} - (\mathrm{T}\omega[j])_{k\ell}\}^2 / \sigma_{k\ell}[j]^2] \tag{7.13}$$

③$p_{k\ell}(\varphi, j) \equiv q_{k\ell}(\varphi, j) / \sum_{i \in J} q_{k\ell}(\varphi, i)$ (7.14)

④$W_{mean}(\varphi, j)$

$$\equiv \sum_{k=-p}^{+p} \sum_{\ell=-q}^{+q} W[j]_{k\ell} \cdot p_{k\ell}(\varphi, j) \tag{7.15}$$

⑤$y(\varphi, j)$

$$\equiv W_{mean}(\varphi, j) - b[j] \tag{7.16}$$

と定義されている。

式（7.13）の $q_{k\ell}(\varphi, j)$ は、$(BT\varphi)_{k\ell}$ が、第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン $\omega[j]$ のモデル $T\omega[j]$ の座標値（$x_1+k, x_2+\ell$）での濃淡値（$(T\omega[j])_{k\ell}$ とどれ位一致するかに関する**曖昧さ** (fuzziness) を表しており、式（7.14）の $p_{k\ell}(\varphi, j)$ は、$(BT\varphi)_{k\ell}$ が $(T\omega[j])_{k\ell}$ と一致する**確率**であると考えられる。式（7.15）の $W_{mean}(\varphi, j)$ は、この確率の、座標値分布

$$p_{k\ell}(\varphi, j)$$
$$k=0, 1, 2, \cdots, \pm p,\ \ell=0, 1, 2, \cdots, \pm q \tag{7.17}$$

に関する重み $W[j]$ の平均値（mean value）を表しており、式（7.16）の $y(\varphi, j)$ は中心値 $b[j]$ に関する正・零・負の偏差値を表している。正・零の偏差値ならば、式（7.11）の大分類関数 BSC (φ, j) の値が 1 になり、負の偏差値ならば 0 になることに注意しておく。

第8章　式 (7.13) 内の各代表パターン $\omega[j]=\{\omega[j]_{k\ell}\}$ の学習

第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属している訓練パターン（training pattern）

$$\varphi[j\,;\,t]$$
$$=\{\varphi[j\,;\,t]_{k\ell}\mid k=0, 1, 2\cdots, \pm p,\ \ell=0, 1, 2\cdots, \pm q\} \tag{8.1}$$

の系列

$$\varphi[j\,;\,0], \varphi[j\,;\,1], \cdots, \varphi[j\,;\,t], \cdots (j\in J) \tag{8.2}$$

を用意する。

以下の手法は、Kohonen の学習ベクトル量子化LVQ（Learning Vector Quantization）の手法（文献［B3］の付録 I を参照）を簡単化し、第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン $\omega[j]$ を適応的に決定できるように適用したものである：

第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン $\omega'[j]$ を仮に決定し、これを初期値

$$\omega[j\,;\,t]_{k\ell}\mid_{t=0}=\omega'[j]_{k\ell} \tag{8.3}$$

に選び、更に、不等式

$$0\leqq\alpha[j\,;\,t+1]_{k\ell}\leqq\alpha[j\,;\,t]_{k\ell}<1$$
$$\text{for any}\ \ t\in\{0, 1, 2, \cdots\} \tag{8.4}$$

を満たすような非負実数値関数

$$\alpha[j\,;\,t]$$
$$=\{\alpha[j\,;\,t]_{k\ell}\mid k=0, 1, 2\cdots, \pm p,\ \ell=0, 1, 2\cdots, \pm q\} \tag{8.5}$$

を選び、離散時刻 $t\,(=0, 1, 2, \cdots)$ に入力された式（8.1）の訓練パターン $\varphi[j\,;\,t]$ に適応して、$\omega[j\,;\,t]_{k\ell}$ の変更分 $\Delta\omega[j\,;\,t]_{k\ell}$ を

$$\Delta\omega[j\,;\,t]_{k\ell}$$
$$=\alpha[j\,;\,t]_{k\ell}\cdot[\varphi[j\,;\,t]_{k\ell}-\omega[j\,;\,t]_{k\ell}] \tag{8.6}$$

と採用し、$\omega[j\,;\,t]_{k\ell}$ を $\omega[j\,;\,t+1]_{k\ell}$ へと、

$$\omega[j\,;\,t+1]_{k\ell}=\omega[j\,;\,t]_{k\ell}+\Delta\omega[j\,;\,t]_{k\ell} \tag{8.7}$$

と修正してゆく。　□

ここに、式（8.6）の $\Delta\omega[j\,;\,t]_{k\ell}$ 内の $\alpha[j\,;\,t]_{k\ell}$ は、

$$\max_{k,\ell}\mid\varphi[j\,;\,t]_{k\ell}-\omega[j\,;\,t]_{k\ell}\mid^2$$

$$= | \varphi[j;t]_{k*\ell*} - \omega[j;t]_{k*\ell*} |^2 \tag{8.8}$$

を満たす2つの整数値 k*, ℓ* を選び、

$$\alpha[j;t]_{k\ell} = \exp[-\{(k^*-k)^2+(\ell^*-\ell)^2\} / (v[j;t]_{k\ell})^2] \tag{8.9}$$

のように選ぶ。また、登場した式（8.9）の $v[j;t]_{k\ell}$ は、$D_{k\ell}$ を正定数に選び、不等式（8.4）を満たすように、

$$1/(v[j;t]_{k\ell})^2 = [(2p)^2+(2q)^2]\cdot[D_{k\ell}^{-1}\cdot\log_e(1+t)]^2 \tag{8.10}$$

$$\therefore$$

$$v[j;t]_{k\ell} = D_{k\ell} / [\sqrt{(2p)^2+(2q)^2}\cdot\log_e(1+t)] \tag{8.11}$$

と選定する。

2式（8.6），（8.7）から

$\omega[j;t]$ が訓練パターン $\varphi[j;t]$ に近づく方向に $\omega[j;t+1]$ へと更新されてゆくことがわかり、この更新分 $\Delta\omega[j;t]$ は不等式（8.4）を満たす式（8.11）の $v[j;t]$ の選定法から、訓練時刻 t が増加するにつれて、小さくなっていることに注意しておこう。

あらかじめ、与えられている正数 δ_1 に対し、

$$\| \omega[j;t+1] - \omega[j;t] \|^2 < \delta_1 \tag{8.12}$$

が成立する時刻 t が得られたら、求める $\omega[j]$ は

$$\omega[j] = \omega[j;t] \tag{8.13}$$

と得られる。

9. 大分類関数 BSC 内の閾値 b[j] の決定

4式（7.8）～（7.11）大分類関数 BSC 内の各重み $W[j]_{k\ell}$ が決定されているとして、各閾値 b[j] を決定する方法を説明しておく。

各 $W[j]_{k\ell}$ の非負性

$$\forall j\in J, \forall k\in\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm p\}, \forall\ell\in\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm q\}, W[j]_{k\ell}\geqq 0 \tag{9.1}$$

が満たされるように、常に選ぶとしよう。

$$\forall j\in J, \mathrm{BSC}(\omega_j, j)=1\ (\because\ \text{axiom 3の}(\,\mathrm{i}\,)) \tag{9.2}$$

を満たさなければならないから、

$$y(\omega_j, j) = W_{mean}(\omega_j, j) - b[j] \quad \because\ \text{式 (7.16)} \tag{9.3}$$

$$= \sum_{k=-p}^{+p}\sum_{\ell=-q}^{+q} W[j]_{k\ell}\cdot p_{k\ell}(\varphi, j) - b[j] \quad \because\ \text{式 (7.15)} \tag{9.4}$$

$$= \sum_{k=-p}^{+p}\sum_{\ell=-q}^{+q} W[j]_{k\ell}\cdot [1/\{1+\sum_{i\in J-\{j\}} q_{k\ell}(\omega_j, i)\}] \tag{9.5}$$

$-b[j]$　　$\because$ 式（7.14）

$\geqq 0$ (9.6)

でなければならない。

ここで、2式（9.5），（9.6）に、不等式

$$(1-x)-1/(1+x)=-x^2/(1+x)\leqq 0 \text{ if } x\geqq 0$$
$$\therefore\quad (1-x)\leqq 1/(1+x) \text{ if } x\geqq 0$$
$$(1-x)=1/(1+x) \text{ if and only if } x=0 \quad (9.7)$$

を考慮すれば、

$$\forall j\in J,$$
$$b[j]$$
$$\leqq \sum_{k=-p}^{+p}\sum_{\ell=-q}^{+q} W[j]_{k\ell}$$
$$\cdot[1-\sum_{i\in J-\{j\}} q_{k\ell}(\omega_j, i)]$$
$$=\sum_{k=-p}^{+p}\sum_{\ell=-q}^{+q} W[j]_{k\ell}$$
$$-\sum_{k=-p}^{+p}\sum_{\ell=-q}^{+q} W[j]_{k\ell}$$
$$\cdot\sum_{i\in J-\{j\}} q_{k\ell}(\omega_j, i) \quad (9.8)$$
$$=\sum_{k=-p}^{+p}\sum_{\ell=-q}^{+q} W[j]_{k\ell}$$
$$-\sum_{i\in J-\{j\}}\sum_{k=-p}^{+p}\sum_{\ell=-q}^{+q} W[j]_{k\ell}\cdot$$
$$q_{k\ell}(\omega_j, i) \quad (9.9)$$

が満たされる各閾値 $b[j]$ を選べばよい。

10. 大分類関数 BSC 内の重み $W[j]_{k\ell}$ の、最急降下法による学習

最小にしたい“$u(t)$ を変数に持つ量” $E=E(u(t))$ の偏微分係数 $-\partial E/\partial u(t)$ に比例する量

$$\Delta u(t)=\varepsilon(t)\cdot[-\partial E/\partial u(t)]\ (\varepsilon(t)>0)$$

を，助変数として時刻 t を持つように考えた変数 $u(t)$ に加えることによって、時刻 t の変数 $u(t)$ を時刻 $t+1$ の変数 $u(t+1)$ へ

$$u(t+1)=u(t)+\Delta u(t)$$

と修正し、E の極小値の1つを与えるような変数 u の時刻 t（$\geqq 0$）の値 $u(t)$ が t の大きい値で求まることを可能にするのが、**最急降下法**(method of steepest descent) である。時刻 t の正値関数 $\varepsilon(t)$ は**学習係数**と呼ばれるものである。この最急降下法を適用し、4式（7.8）～（7.11）の大分類関数 BSC 内の各重み $W[j]_{k\ell}$ を決定しよう。

各 $W[j]_{k\ell}$ の非負条件式（9.1）を考慮しておく。

式（5.1）のカテゴリ番号集合 J の下で考えよう。

初期値

$$W[j,t]_{k\ell}|_{t=0}=W'[j]_{k\ell}\equiv 1,$$
$$k\in\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm p\},\ \ell\in\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm q\} \quad (10.1)$$

を設定し、

$$\varphi[j_t, t] = \{(\varphi[j_t, t])_{k\ell}\} \tag{10.2}$$

は時刻 t に入力される訓練パターンの系列

$$\varphi[j_t, t] = \{(\varphi[j_t, t])_{k\ell}\},$$
$$t = 0, 1, 2, \cdots \tag{10.3}$$

を用意する。ここで、

$y^{\wedge}(j)$: カテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に関する理想出力（desired output） (10.4)

$y(\varphi[j_t, t], j_t)$: カテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属するパターン $\varphi[j_t, t]$ を時刻 t に入力したとき、得られる現実出力（actual output） (10.5)

を導入し、適応に関する**誤差エネルギー**(error energy)

$$E(j_t, t)$$
$$\equiv 2^{-1} \cdot [y(\varphi[j_t, t], j_t) - y^{\wedge}(j_t)]^2$$
$$\because \text{ 式 (7.11)} \tag{10.6}$$
$$= 2^{-1} \cdot [\sum_{k=-p}^{+p} \sum_{\ell=-q}^{+q} W[j_t]_{k\ell}$$
$$\cdot [q_{k\ell}(\varphi[j_t, t], j) / \sum_{i \in J} q_{k\ell}(\varphi[j_t, t], i)] - b[j_t, t] - y^{\wedge}(\varphi[j_t, t], j)]^2$$
$$\because \text{ 式 (7.8)} \tag{10.7}$$

を最小にするように、各重み W[j] を逐次的に決定していこう。

最急降下法によれば、$W[j_t, t]$ の更新式（**学習方程式**）は、正値関数 $\varepsilon_2[j, t]_{k\ell} > 0$ を選定し時刻 t に、$\varphi[j_t, t]$ を入力するならば、$W[j, t]_{k\ell}$ の更新分 $\Delta W[j, t]_{k\ell}$ を

$$\Delta W[j, t]_{k\ell}$$
$$= \varepsilon_2[j, t]_{k\ell} \cdot [-\partial E(j_t, t) / \partial W[j, t]_{k\ell}] \tag{10.8}$$

と求めると、

$$W[j_{t+1}, t+1]_{k\ell} = W[j_t, t]_{k\ell} + \Delta W[j_t, t]_{k\ell} \tag{10.9}$$

と設定すればよい。ここで、

$$\partial E(j_t, t) / \partial W[j_t, t]_{k\ell}$$
$$= [y(\varphi[j_t, t], j_t) - y^{\wedge}(j_t)] \cdot$$
$$\partial y(\varphi[j_t, t], j_t) / \partial W[j_t, t]_{k\ell}$$
$$= [y(\varphi[j_t, t], j_t) - y^{\wedge}(j_t)] \cdot$$
$$p_{k\ell}(\varphi[j_t, t], j_t)$$
$$\because \text{ 2式 (7.16), (7.15)} \tag{10.10}$$

と計算されるから、式（10.10）を式（10.8）に代入して、結局、$W[j, t]_{k\ell}$ の更新分 $\Delta W[j, t]_{k\ell}$ は、

$$\Delta W[j, t]_{k\ell}$$
$$= -\varepsilon_2[j, t]_{k\ell} \cdot [y(\varphi[j_t, t], j_t) - y^{\wedge}(j_t)]$$
$$\cdot p_{k\ell}(\varphi[j_t, t], j_t) \tag{10.11}$$

と求められる。

あらかじめ、与えられている正数 δ_2 に対し、

$$\sum_{k=-p}^{+p} \sum_{\ell=-q}^{+q} | W[j_{t+1}, t+1]_{k\ell}$$
$$- W[j_t, t]_{k\ell} |^2 < \delta_2 \tag{10.12}$$

が成立する時刻 t が得られたら、求める $W[j_t]$ は

$$W[j_t]_{k\ell} = W[j_t, t]_{k\ell} \tag{10.13}$$

と得られる。

11. 大分類関数 BSC 内の閾値 b[j] の、最急降下法による学習

閾値 b[j] の学習を10章と同様に論じよう。

初期値

$$b[j_t, t] \mid_{t=0} = 0 \tag{11.1}$$

を設定する。正値関数 $\varepsilon'[j, t]_{k\ell} > 0$ を選定し、

$$\Delta b[j_t, t] = \varepsilon'[j_t, t] \cdot [-\partial E(j_t, t)/\partial b[j_t, t]] \tag{11.2}$$

を考えると、更新式は、

$$b[j_{t+1}, t+1] = b[j_t, t] + \Delta b[j_t, t] \tag{11.3}$$

ということになる。

$$\begin{aligned} &\partial E(j_t, t)/\partial b[j_t, t] \\ &= [y(\varphi[j_t, t],\ j_t) - y^{\wedge}(j_t)] \cdot \\ &\quad \partial y(\varphi[j_t, t],\ j_t)/\partial b[j_t, t] \\ &= [y(\varphi[j_t, t],\ j_t) - y^{\wedge}(j_t)] \cdot (-1) \\ &\qquad\qquad \because \ \text{式 (7.16), (7.15)} \end{aligned} \tag{11.4}$$

と計算されるから、結局、

$$\Delta b[j_t, t] = \varepsilon_3[j_t, t] \cdot [y(\varphi[j_t, t],\ j_t) - y^{\wedge}(j_t)] \tag{11.5}$$

と決定される。

あらかじめ、与えられている正数 δ_3 に対し、

$$| b[j_{t+1}, t+1] - b[j_t, t] | < \delta_3 \tag{11.6}$$

が成立する時刻 t が得られたら、仮に求める $b[j_t]$ は

$$b[j_t] = b[j_t ; t] \tag{11.7}$$

と得られる。

この仮の b [jt] が10章で得られた式（10.13）の各 $W[j_t]$ について、不等式（9.8），不等式（9.9）のいずれかを満たすように選び直す。

12. 大分類関数 BSC 内の標準偏差 $\sigma_{k\ell}[j]$ の、最急降下法による学習

式（7.13）内の $\sigma_{k\ell}[j]^2$, $\sigma_{k\ell}[j]$ は各々、分散（variance），**標準偏差**（standard deviation）といわれる。

閾値 $\sigma_{k\ell}[j]$ の学習を10章と同様に論じよう。

先ず、十分大きい正整数値 s を選定・固定し、初期値

$$\begin{aligned} &\sigma_{k\ell}[j_t, t]^2 \mid_{t=0} \\ &= 2^{-1} \cdot \max_{t \leqq s} \max_{k, \ell} | (B\varphi[j_t ; t])_{k\ell} \end{aligned}$$

$$-\omega[j_t]_{k\ell}\ |^2 \qquad (12.1)$$

を設定する。正値関数 $\varepsilon_4[j,t]_{k\ell}>0$ を選定し、

$$\Delta\sigma_{k\ell}[j_t,t]$$
$$=\varepsilon_4[j_t,t]\cdot[-\partial E(j_t,t)/\partial\sigma_{k\ell}[j_t,t]] \qquad (12.2)$$

を考えると、更新式は、

$$\sigma_{k\ell}[j_{t+1},t+1]=\sigma_{k\ell}[j_t,t]+\Delta\sigma_{k\ell}[j_t,t] \qquad (12.3)$$

ということになる。

$$\partial E(j_t,t)/\partial\sigma_{k\ell}[j_t,t]$$
$$=[y(\varphi[j_t,t],j_t)-y^{\wedge}(j_t)]\cdot$$
$$\partial y(\varphi[j_t,t],j_t)/\partial\sigma_{k\ell}[j_t,t]$$
$$=[y(\varphi[j_t,t],j_t)-y^{\wedge}(j_t)]\cdot$$
$$W[j_t]_{k\ell}\cdot\partial p(\varphi[j_t,t],j_t)/\partial\sigma_{k\ell}[j_t,t]$$
$$\because\ \text{式}\ (7.16),\ (7.15) \qquad (12.4)$$

と計算される。ここで、

$$①\ \partial p_{k\ell}(\varphi,j)/\partial\sigma_{k\ell}[j]$$
$$=(\partial/\partial\sigma_{k\ell}[j])\,q_{k\ell}(\varphi,j)/\sum_{i\in J}q_{k\ell}(\varphi,i)$$
$$=[(\partial/\partial\sigma_{k\ell}[j])\,q_{k\ell}(\varphi,j)]/\sum_{i\in J}q_{k\ell}(\varphi,i)+$$
$$q_{k\ell}(\varphi,j)\cdot[(\partial/\partial\sigma_{k\ell}[j])\cdot[\sum_{i\in J}q_{k\ell}(\varphi,i)]^{-1}$$
$$=[(\partial/\partial\sigma_{k\ell}[j])\,q_{k\ell}(\varphi,j)]/\sum_{i\in J}q_{k\ell}(\varphi,i)-q_{k\ell}(\varphi,j)\cdot$$
$$[\sum_{i\in J}q_{k\ell}(\varphi,i)]^{-2}\cdot[(\partial/\partial\sigma_{k\ell}[j])\,q_{k\ell}(\varphi,j)]$$
$$=[(\partial/\partial\sigma_{k\ell}[j])\,q_{k\ell}(\varphi,j)]\cdot[\sum_{i\in J}q_{k\ell}(\varphi,i)]^{-1}\cdot[1-q_{k\ell}(\varphi,j)/\sum_{i\in J}q_{k\ell}(\varphi,i)]$$
$$②\ \partial q_{k\ell}(\varphi,j)/\partial\sigma_{k\ell}[j]$$
$$=q_{k\ell}(\varphi,j)\cdot 2\cdot\{(BT\varphi)_{k\ell}-(T\omega[j])_{k\ell}\}^2$$
$$\cdot\sigma_{k\ell}[j]^3$$

であるから、②を①に代入して、

$$③\ \partial p_{k\ell}(\varphi,j)/\partial\sigma_{k\ell}[j]$$
$$=q_{k\ell}(\varphi,j)\cdot 2\cdot\{(BT\varphi)_{k\ell}-(T\omega[j])_{k\ell}\}^2$$
$$\cdot\sigma_{k\ell}[j]^3\cdot[\sum_{i\in J}q_{k\ell}(\varphi,i)]^{-1}$$
$$\cdot\ [1-q_{k\ell}(\varphi,j)/\sum_{i\in J}q_{k\ell}(\varphi,i)]$$

と計算される。よって、③を式（12.4）に考慮して、結局、式（12.2）から、

$$\Delta b[j_t,t]$$
$$=\varepsilon_3[j_t,t]\cdot(-1)\cdot[y(\varphi[j_t,t],j_t)-y^{\wedge}(j_t)]\cdot W[j_t]_{k\ell}\cdot$$
$$q_{k\ell}(\varphi[j_t,t],j_t)\cdot 2\cdot\{(BT\varphi[j_t,t])_{k\ell}$$
$$-(T\omega[j_t])_{k\ell}\}^2$$
$$\cdot\sigma_{k\ell}[j_t]^3\cdot[\sum_{i\in J}q_{k\ell}(\varphi[j_t,t],i)]^{-1}$$
$$\cdot[1-q_{k\ell}(\varphi[j_t,t],j_t)/\sum_{i\in J}q_{k\ell}(\varphi[j_t,t],i)] \qquad (12.5)$$

と決定される。

あらかじめ、与えられている正数 δ_4 に対し、

$$\sum_{k=-p}^{+p}\sum_{\ell=-q}^{+q}|\ \sigma_{k\ell}[j_{t+1},t+1]$$

$$-\sigma_{k\ell}[j_t, t]\,|^2 < \delta_4 \tag{12.6}$$

が成立する時刻 t が得られたら、仮に求める $\sigma_{k\ell}[j]$ は

$$\sigma_{k\ell}[j] = \sigma_{k\ell}[j\,;\,t] \tag{12.7}$$

と得られる。

第13章　むすび

image segmentation を含む画面内のパターン認識過程について、

前後の文脈を手がかりとして、(文脈中の) パターンの (カテゴリ帰属に関し) 意味上の多義性を解消し、文脈に適合した“そのパターンの帰属するカテゴリ”を確定させるという「**segmentation** (1枚の画面を有限個の意味ある区画に分割すること) を含む画面内のパターン認識過程」

が研究された。つまり、1つの風景画内の各画素に、その近傍の画素集合について持つ知識を用いカテゴリラベルを付けることによって、風景画から知識を抽出し、その画像の概観を解釈するシステムを構成する手法が研究された。構成された**画像知識抽出解釈システム**は同時に、画像を意味ある複数の領域へと分割する“領域分割”の機能を備えて来ることになったことに注意しておこう。

以上、SS理論の適用によって、風景画を理解･解釈するシステムを構築する技法が研究された。

4公理 axiom 1～axiom 4を出発点とするSS理論は知能情報学の新しい原理を明らかにしつつあるが [B7] ～ [B15]、本研究では、1枚の風景画像中の各画素に、想定されているカテゴリ集合内の適切なカテゴリラベルを貼付る手法で、同一カテゴリラベルを持つ画素の集まり (パターン) をこの画像内に存在している知識として抽出し、この画像内に複数のどんなパターンが存在しているか？についての質問に答えることの可能な“風景画の解釈システム”をSS理論を適用して、構築した。特に、axiom 3を満たす大分類関数 BSC をファジィ推論ニューラルネットとして構成し、最急降下法を適用し、BSC 内の各重み、閾値、標準偏差を学習の働きで決定したことに注意を払っておこう。

SS理論の出発点は、

パターンモデル Tφ をみたら原パターン φ のようにみえること (同一知覚原理)

を可能にするaxiom 1にある。処理の対象とするパターン φ の集合Φと、式 (2.1) の写像 T との対 [Φ, T] が付録Aのaxiom 1を満たす必要がある、というのが、SS理論 [B1] ～ [B4] の主張である。

パターン認識の数学的理論 (**SS理論**) では、入力パターン φ に対応するパターンモデル Tφ を求め、Tφ からカテゴリ帰属知識に関する連想形認識方程式 [B3] の解として、不動点パターンモデルを連想する形で、φ の帰属するカテゴリを決定する多段階パターン変換法が考えられている。

SS理論は、このようなパターンモデル Tφ を恰も、原パターン φ と錯覚し、構造受精変換を多段階適用し、カテゴリ帰属知識の不動点知識を**連想形認識方程式**を解くことにより求めるという“不動点探索形構造受精多段階変換に基づく認識の働き”を提案しており、この認識の働きがありとあらゆるパターン認識の働きをシミュレートできることが証明されている。

外界から獲得した2次元投影像を脳内の記憶と照合する情報処理過程がパターン認識過程であ

る。本研究では、２次元の投影像のみからもとの３次元形状を復元するといった“**逆問題**”を取り扱っていないし、再現された３次元形状を脳内で操作し、新しい視点からの見えを作り上げるといった**感覚運動的な知能処理**も実現していない。知能の内、表象能力に基づいた概念的表象分類知能のみを取り扱っており、表象を操作するといった**知覚運動的知能**を実現していない。

1つの物体がみる視点によって異なったようにみえるといった場面を想定していなくて、a constant relation without producing motion between the viewer and the scene の場合のシーン解釈を行うシステムを構成したが、この種の場面を取り扱うためには、類似度関数を工夫する必要がある。

SS理論を適用して、風景画像内の画素を単位とする知識の抽出、対象物の認識を、画像中の対象の領域について暗示的な知識が学習で決定された形で、処理の自動化を達成しながら行えることがわかった。計算機シミュレーションを繰り返し、普遍性の低い知識は無論のこと、高い知識までも抽出可能なことを示さなければならない。風景画像内の対象の認識は人間でも、難しいことが多いが、人間による知識抽出結果·認識結果とほど好く、一致することも示されるだろうとの予測も成り立つと考えている。

更に、マルチメディアで表現された知識を変換·処理·蓄積·検索するという機能を実現しなければならない“マルチメディア人工知能学”は、古典的な状態空間探索理論、並びに論理を使った非単調的記号推論理論などや、ファジィ·ニューラルネット·遺伝的アルゴリズム·人工生命の各理論と共に、進歩·発展しているけれども、感情·感性などの**非論理情報**（nonlogical information）を処理するようには成熟していない。パターン処理の場面でも、この種の非論理情報を捨ててパターン（例えば、会話音声）を処理したのでは、領域分割·解釈·認識の各性能に限界が生ずるという考えがあり［A13］、この種の考えを取り入れる方向に本研究に改良の余地がある。

文　献 A

[A 1] 青木利夫，高橋渉："集合·位相空間要論"，培風館，Sept.1979

[A 2] Angus E.Taylor, David C.Lay："Introduction to function analysis", John Wiley & Sons, Inc., 1980

[A 3] いや富仁，萩原将文："ファジー推論ニューラルネットワークを用いた風景画像からの知識抽出と認識"，電子情報通信学会論文誌D-Ⅱ, vol.J82-D-Ⅱ, no.4, pp.685-693, Apr.1999

[A 4] J.-S.Roger and C.-T.Sun："Functional equivalence between radial basis function networks and fuzzy inference Systems", IEEE Trans. on neural networks, vol.4, no.1, pp.156-159, Jan.1993

[A 5] Marcello Pelillo, Mario Refice："Learning compatibility coefficients for relaxation labeling processes", IEEE Trans. on pattern analysis and machine intelligence, vol.16, no.9, pp.933-945, Sept.1994

[A 6] Tapan Kr.Dinda, Kumar s.Ray, Mihi Kr.Chakraborty："Fuzzy relational calculus approach to multidimensional pattern classification", Pattern Recognition, vol.32, pp.973-995, 1999

[A 7] Sven Loncaric："A survey of shape analysis techniques", Pattern Recognition, vol.31, no.8, pp. 983-1001, 1998

[A 8] Shahriar Negahdaripour："Revised definition of optical flow：Integration of radiometric and geometric cues for dynamic scene analysis", IEEE Trans. on pattern analysis and machine

intelligence, vol.20, no.9, pp.961-979, Sept.1998
[A 9] K.Sunil Kumar, U.B.Desai："Joint segmentation and image interpretation", Pattern Recognition, vol.32, pp.577-589, 1999
[A10] 三崎将也，乾敏郎："カテゴリ知識の獲得による認識空間の変化", Cognitive Studies, vol.6, no.2, pp.226-241, June 1999
[A11] 徳久雅人，岡田直之："パターン理解的手法に基づく知能エージェントの情緒生起", 情報処理学会論文誌，vol.39, no.8, pp.2440-2451, Aug.1998
[A12] 横井俊夫："メディアを手掛かりとしたAI技術・研究の再構築", 人工知能学会誌，vol.13, no.5, Sept.1998
[A13] 中津良平："人間の非論理情報をAIはどう取り扱うか？", 人工知能学会誌，vol.14, no.2, Mar.1999
[A14] Margaret S.Livingstone and David H.Hubel："Psychophysical evidence for separate channels for the perception of form, color, movement, and depth", The Journal of Neuroscience, vol.7, no.11, pp.3416-3468, Nov.1987
[A15] Andrzej Cichocki, Rolf Unbehauen："Neural networks for optimization and signal processing", John Wiley & Sons, Mar.1994
[A16] 肖業貴，N.P.チャンドラシリ，田所嘉昭，尾田政臣："2-D DCTとニューラルネットワークを用いた顔画像の表情認識", 電子情報通信学会論文誌A，vol.J81-A, no.7, pp.1077-1086, July 1998
[A17] Hadar I.Avi-Itzhak, Jan A.Van Mieghem, Leonardo Rub："Multiple subclass pattern recognition：A maximin correlation approach", IEEE Trans. on pattern analysis and machine intelligence, vol.17, no.4, pp.418-431, Apr.1995
[A18] 田中啓治："下側頭葉と物体認識", 電子情報通信学会誌，vol.81, no.7, pp.758-767, July 1998
[A19] Jinhui Lin, A.K.Jain："Image-based from document retrieval", Pattern Recognition, vol.33, pp.503-513, 2000
[A20] 杉本重雄："ディジタル図書館［フォーラム］", コンピュータソフトウェア，vol.16, no.1, pp.57-63, Jan.1999
[A21] 長尾真他："マルチメディア情報学の基礎(岩波講座マルチメディア情報学1)", 岩波書店，Oct.1999
[A22] 秋藤俊介，辻洋："バージョン空間法を応用した類似事例の検索と索引の更新方式", 情報処理学会論文誌，vol.36, no.1, pp.41-50, Jan.1995
…半順序関係が定めるバージョン空間（version-space）に対して、問題の属性値が占める相対位置を類似度とし、類似度が高い順に"属性を表す述語の論理演算で表現される事例"を出力するような類似事例検索法
[A23] Sreeram V.B.Aiyer, Mahesan Niranjan, Frank Fallside："A theoretical investigation into the Performance of the Hopfield Model", IEEE Transactions on Neural Networks, vol.1, no.2, June 1990…CAM（content addressable memory）としてのHopfield modelはa projection of the input vector onto the subspace（spanned by the memory vectors）set up by the degenerate eigenvalues of the connection matrixの動作をする。
[A24] 池田成宏，萩原将文："新しい知識表現法（領域表現）の提案とニューラルネットワーク

による実現”，電子情報通信学会論文誌 D-Ⅱ, vol.J81-D-Ⅱ, no.6, pp.1328-1335, June 1998
…或る小領域の多数のニューロンの発火によって概念を表現する。局所表現と分散表現の中間的な知識表現法（領域表現）を提案。

［A25］別所克人，岩瀬成人，戸部美春，福村好美：“自然言語検索システムにおける分野推論方式”，電子情報通信学会論文誌 D-Ⅱ, vol.J81-D-Ⅱ, no.6, pp.1317-1327, June 1998
…データベースには店、企業、或いは番組などに関する情報が分野ごとに分類されており、検索者は商　品、住所などを含む質問文を入力することにより、適合する分野と該当する店、企業、番組などの情報を得る。検索者の入力した日本語質問文から、対応する分野を推論する分野推論方式を研究している。

［A26］宮原隆行，清木康，北川高嗣：“意味の数学モデルによる意味的連想検索の高速化アルゴリズムとその実現方式”，情報処理学会論文誌，vol.38, no.7, pp.1399-1411, July 1997
…データベース・システムにおけるデータ検索のための主要な基本操作は、連想検索である。ここで、連想検索とは、あるキーワードに関連する情報をそのキーワードが表すアドレスではなく、そのキーワードの内容に応じて検索することをいう。現行のデータベース・システムにおける連想検索は、パターン・マッチングによる検索であり、異なる表現形態であるが同一の意味を持つデータや近い意味を持つデータの検索を行うことができない。

［A27］太田学，高須淳宏，安達淳：“認識誤りを含む和文テキストにおける全文検索法”，情報処理学会論文誌，vol.39, no.3, pp.625-635, Mar.1998
…OCR（光学的文字読み取り装置）を用いて文書画像をテキストコードに変換するとき、認識誤りが存在することになる。3つの確率的な全文検索法
①confusion matrix retrieval method（CMR法）
②extended CMR法
③bigram matrix retrieval method
が、OCRによる認識誤りを含む和文テキストに対し、提案されている。全文検索を念頭においており、テキストは1つの長大な和文の文字列として記憶されている。認識結果のテキストにおいてユーザの入力した検索語で検索を行うことを考え、先ず、類似文字テーブルを参照し、この論文で提案する手順で複数の検索文字列を生成している。

［A28］Wei-Chung Lin, Chen-Kuo Tsao：“Document classification using associative memories”, Journal of neural network computing, vol.1, pp.33-41, Apr.1990
…the unidirectional linear associative memoryとして、the gradient projection method を提案している。

［A29］Jinxin Lin：“Integration of weighted knowledge bases”, Artificial Intelligence, vol.83, pp.363-378, 1996
…a formal semantics for merging multiple knowledge bases with weights を研究している。

［A30］植野真臣：“意志決定アプローチによるBayesian Networkの因果モデル構築”，人工知能学会誌, vol.11, no.5, pp.725-734, Sept.1996
…因果を構成することの本質は、いかに数少ないデータから未知の現象を予測できるかである、と考えて、因果モデルの構築を意志決定過程とみなし、統　計的意志決定アプローチにより、Bayesian Networkにおいて最適な推論を保証する因果モデルの構築法を提案している。

［A31］出村公成，梶浦正浩，安西祐一郎：“実数入力データを1回の提示により学習できる教師ありニューラルネットワーク学習則”，電子情報通信学会論文誌D-Ⅱ, vol.J77-D-Ⅱ, no.10, pp.2083-2092, Oct.1994

［A32］S.Geman and D.Geman：“Stochastic relaxation, Gibbs distribution, and the Bayesian restoration of images”，IEEE Trans.Pattern Anal. & Mach. Intell., vol.PAMI-6, no.6, PP.721-741, Nov.1984

［A33］Ingrid Daubechies：“Orthonormal bases of compactly supported wavelets”, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol.XLI, pp.909-996, 1988

［A34］Charles A. Micchelli：“Interpolation of scattered data：Distance matrices and conditionlly positive definite functions”, Constructive Approximation, vol.2, pp.11-22, 1986

［A35］Richard L.Dykstra：“An algorithm for restricted least squares regression”, Journal of the American Statistical Association, vol.78, no.384, pp.837-842, Dec.1983

文　献　B

［B 1］鈴木昇一：“認識工学”，柏書房，Feb.1975

［B 2］鈴木昇一：“ニューラルネットの新数理”，近代文芸社，Sept.1996

［B 3］鈴木昇一：“パターン認識問題の数理的一般解決”，近代文芸社，June 1997

［B 4］鈴木昇一：“認識知能情報論の新展開”，近代文芸社，Aug.1998

［B 5］鈴木昇一：“パターンのエントロピーモデル”，電子情報通信学会論文誌（D-Ⅱ），vol.J77-D-Ⅱ, no.10, pp.2220-2238, Nov.1994

［B 6］鈴木昇一：“パターン認識の数学的理論”，電子情報通信学会技術研究報告［パターン認識と学習，パターン認識と理解］，PRL84-6（第1部），PRL84-30, PRL84-38, PRL85-27, PRU86-8, PRU86-35, PRU86-69, PRU87-1, PRU87-28, PRU88-30, PRU89-1, PRU89-27, PRU89-40, PRU89-66, PRU89-77, PRU89-136, PRU90-5, PRU90-15, PRU90-29, PRU90-125, PRU91-1, PRU91-29, PRU91-42, PRU92-1, PRU92-18, PRU92-25, PRU92-89, PRU92-102（第28部），May 1984～Jan.1993

［B 7］鈴木昇一：“Rosenfeld 型の確率的弛緩ラベリング法の基本的諸性質”，情報研究(Information and Communication Studies；文教大学・情報学部)，vol.11, pp.163-181, Dec.1990

［B 8］鈴木昇一：“類似度関数を用いた確率的緩和法”，情報研究（文教大学・情報学部），no.20, pp.23-75, Dec.1998

［B 9］鈴木昇一：“構造受精法と日本語単独母音の認識”，情報研究（文教大学・情報学部），vol.18, pp.17-51, Dec.1998

［B10］鈴木昇一，前田英明：“有声破裂音の代表パターンの学習的決定と、その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.20, pp.77-95, Dec.1998

［B11］鈴木昇一，前田英明：“変動エントロピーによる有声破裂音の順序付けと、その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.21, pp.51-78, Mar.1999

［B12］鈴木昇一：“直交系によるパターンモデルの構成”，情報研究（文教大学・情報学部），no.21, pp.23-49, Mar.1999

［B13］鈴木昇一：“認識行為に向けての、効用最大化原理”，情報研究（文教大学・情報学部），

no.22, pp.151-210, Dec.1999
[B14] 鈴木昇一："平均顔を用いた顔画像の2値化、並びに、目・鼻・口の抽出と、その計算機シミュレーション", 情報研究（文教大学・情報学部）, no.22, pp.65 -150, Dec.1999
[B15] 鈴木昇一："界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の、顔画像処理に関する計算機シミュレーション", 情報研究（文教大学・情報学部）, no.23, pp.109-182, Mar.2000

付録A.SS理論での、4公理 axiom 1～4

本付録Aでは、SS理論［B1］～［B6］が採用しているSS公理系（axiom 1～4）が説明される。

A1. axiom 1 とパターン集合 Φ，モデル構成作用素 T

認識システム RECOGNITRON がモデル $T\varphi$ を見たり聞いたりしたならば、原パターン φ と同じに見えたり、同じに聞こえたりすることだと、解釈可能なパターンモデル $T\varphi$ について説明しよう。

処理の対象とするパターン φ の集合 Φ はある可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の、零元 0 を含むある部分集合であり、この Φ，並びに写像

$$T：\Phi \rightarrow \Phi \tag{A1.1}$$

は次のaxiom 1を満たさなければならない。このとき、写像 T は**モデル構成作用素**（model-construction operator）と呼ばれ、$T\varphi \in \Phi$ は $\varphi \in \Phi$ の代りとなり得るという意味で、パターン $\varphi \in \Phi$ の**モデル**(model) と呼ばれる。

Axiom 1 **(パターン集合 Φ とモデル構成作用素 T との対【Φ, T】の満たすべき公理)**

（i）（零元のT-**不動点性**；fixed-point property of zero element under mapping T）

$0 \in \Phi \wedge T0 = 0.$

（ii）（**錐性**，正定数倍吸収性；cone property）

$\forall \varphi \in \Phi, a\cdot\varphi \in \Phi \wedge T(a\cdot\varphi) = T\varphi$

for any positive real number a.

（iii）（**ベキ等性**，埋込性；idempotency, embeddedness）

$\forall \varphi \in \Phi, T\varphi \in \Phi \wedge T(T\varphi) = T\varphi.$

（iv）（写像 T の**非零写像性**；non-zero mapping property of T）

$\exists \varphi \in \varphi, T\varphi \neq 0.$ □

Axiom 1からわかるように、パターン集合 Φ は、埋込性

$$T\cdot\Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \subset \Phi \tag{A1.2}$$

を満たし、原点（=0）を始点とし、Φの任意の点を通る半直線を含むような集合、つまり、**錐**(cone) であらねばならない。

パターンと判明している φ の集合（基本領域；basic domain）Φ_B と、すべての正実定数の集合 R^{++} とを用意する。

次の定理A1.1は、axiom 1を満たす対［Φ, T］を決定している。

［定理A1.1］**(モデル構成作用素 T の基本構成定理)**

写像 T がaxiom 1の（i），（ii），（iii）の3後半，並びに、（iv）を満たすとしよう。ならば、処理の対象とする問題のパターンの集合 Φ を

$$\Phi = R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B) \tag{A1.3}$$

の如く設定すれば、

$$\Phi \supset \{0\} \wedge a \cdot \Phi = \Phi \wedge [T \cdot \Phi = T \cdot \Phi_B \subset \Phi] \tag{A1.4}$$

が成立し、axiom 1の（ i ），（ii），（iii）の3前半をΦは満たし、結局、**対【Φ, T】**はaxiom 1を満たす。

（証明）文献［B4］，付録1の定理A1.1である。 □

A2. axiom 2と類似度関数 SM

“正常なパターン”（well-formed pattern）は、ある1つの**カテゴリ** $\mathfrak{C}_j$（第j∈J番目の類概念）のみに帰属しているものとし、このような $\mathfrak{C}_j$ の集まり（有限集合）

$$\underline{\mathfrak{C}} \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid j \in J\} \tag{A2.1}$$

を想定する。$\mathfrak{C}_j$の備えている性質を典型的に備えている**代表パターン**（prototypical pattern）ω_j（$\neq 0$）を1つ選定する。$\mathfrak{C}_j$は、典型（prototype）としての代表パターン ω_jを中心とした緩やかなカテゴリであることを仮定したことに注意しておく。ここに、

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} \subset \Phi \tag{A2.2}$$

が式（A2.1）の全カテゴリ集合$\underline{\mathfrak{C}}$に対応する代表パターンの集合である。式（A2.2）の系 Ω は、複素定数 a_j の組 $\{a_j \mid j \in J\}$ について

$$\sum_{j \in J} a_j \cdot \omega_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J, a_j = 0 \tag{A2.3}$$

が成立しているという意味で、**1次独立**（linearly independent）でなければならない。

axiom 1を満たす式（A1.1）のモデル構成作用素 T によって、式（A2.2）の代表パターン集合 Ω が変換されて得られる系

$$T \cdot \Omega \equiv \{T\omega \mid \omega \in \Omega\} = \{T\omega_j \mid j \in J\} \tag{A2.4}$$

も1次独立であると要請する。このとき、**類似度関数**（similarity-measure function）

$$SM: \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \tag{A2.5}$$

を導入し、

SM$(\varphi, \omega_j) = 1$，0 に従って、パターン $\varphi \in \Phi$ は

各々、ω_jと**確定的な類似関係、相違関係**にあり、また、$0 < SM(\varphi, \omega_j) < 1$ の場合は、

曖昧な類似・相違関係にある （A2.6）

と、SM を解釈しよう。

関数 SM は次のaxiom 2を満たすように構成されねばならない。特に、axiom 2の（ i ）なる正規直交性は、カテゴリ候補の分離・抽出が効果的に行われ、カテゴリ候補の**鋭利な削減**（a sharp reduction）をもたらすために要請されていることに注意しておく。

Axiom 2 **（類似度関数 SM の満たすべき公理）**

（ i ）（**正規直交性**；orthonormality）

$$\forall i, \forall j \in J, SM(\omega_i, \omega_j) = \delta_{ij}.$$

（ii）（規格化条件，正規性；probability condition, normality）

$$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} SM(\varphi, \omega_j) = 1.$$

（iii）（写像 T の下での**不変性**；invariance under mapping T）

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j).$$

□

A3. axiom 3と大分類関数 BSC

大分類関数（rough classifier, binary-state classifier）と呼ばれる**2値関数**

$$\mathrm{BSC}: \Phi \times \mathrm{J} \to \{0, 1\} \tag{A3.1}$$

を、次のaxiom 3を満たすものとして導入し、解釈

パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属するカテゴリ候補の1つが

第$\mathrm{j} \in \mathrm{J}$番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_{\mathrm{j}}$であるならば、

$\mathrm{BSC}(\varphi, \mathrm{j}) = 1$ であることが望ましい (A3.2)

を採用しよう。この際、注意すべきは、次章のaxiom 4の CSF(φ, γ) の定義での（iii）の場合からわかるように、

$\mathrm{BSC}(\varphi, \mathrm{j}) = 0$ であっても、パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属するカテゴリ候補の1つは、

第$\mathrm{j} \in \mathrm{J}$番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_{\mathrm{j}}$でないとは限らない (A3.3)

としていることである。また、axiom 3 の（i）からわかるように、**カテゴリ間の相互排除性**（the mutual exclusion of the one category from the other categories）

$$\forall \mathrm{j} \in \mathrm{J}, \forall \mathrm{i} \in \mathrm{J} - \{\mathrm{j}\}, \mathrm{BSC}(\omega_{\mathrm{i}}, \mathrm{j}) = 0 \tag{A3.4}$$

を公理として要請していない事実に注意しておこう。

Axiom 3（**大分類関数 BSC の満たすべき公理**）

（i）（**カテゴリ抽出能力**；category separability）

$\forall \mathrm{j} \in \mathrm{J}, \mathrm{BSC}(\omega \mathrm{j}, \mathrm{j}) = 1.$

（ii）（写像 T の下での**不変性**；invariance under mapping T）

$\forall \varphi \in \Phi, \forall \mathrm{j} \in \mathrm{J}, \mathrm{BSC}(\mathrm{T}\varphi, \mathrm{j}) = \mathrm{BSC}(\varphi, \mathrm{j}).$ □

A4. カテゴリ選択関数 CSF の構造形式

「パターン $\varphi \in \Phi$がカテゴリ集団 $\underline{\mathfrak{C}}(\gamma) \equiv \{\mathfrak{C}_{\mathrm{j}} \mid \mathrm{j} \in \gamma\}$内の

ある1つの$\mathfrak{C}_{\mathrm{j}}$カテゴリに帰属している可能性がある」

という「認識システムRECOGNITRONがパターン $\varphi \in \Phi$ に対し持つカテゴリ帰属知識（categorical membership-knowledge）を $\langle \varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^{\mathrm{J}} \rangle$ と表す。ここに、2^{J}は全カテゴリ番号集合 J のすべての部分集合の成す集合（ベキ集合；power set）である。

カテゴリ選択関数（category-selection function）と呼ばれる写像

$$\mathrm{CSF}: \Phi \times 2^{\mathrm{J}} \to 2^{\mathrm{J}} \tag{A4.1}$$

は、**包含関係**（inclusion relation）

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \gamma \in 2^{\mathrm{J}}, \mathrm{CSF}(\varphi, \gamma) \subseteq \gamma \subseteq \mathrm{J} \in 2^{\mathrm{J}} \tag{A4.2}$$

を満たし、然も、次のaxiom 4を満たすものとして、設定されるとしよう。

Axiom 4（**カテゴリ選択関数 CSF の満たすべき公理**）

（i） $\varphi = 0 \vee \gamma = \phi$ の場合

如何なるカテゴリ番号 $\mathrm{k} \in \gamma$ も $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリ番号ではない。

（ii） $\mathrm{SM}(\varphi, \omega_{\mathrm{k}}) = 0 \wedge \mathrm{BSC}(\varphi, \mathrm{k}) = 0$ の場合

カテゴリ番号 $\mathrm{k} \in \gamma$ は $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリ番号ではない。

（iii） $\sum_{\mathrm{k} \in \gamma} \mathrm{BSC}(\varphi, \mathrm{k}) = 0$ の場合

$\mathrm{BSC}(\varphi, \mathrm{k}) = 0$ であっても、$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_{\mathrm{k}}) > 0$ であるような

カテゴリ番号 $\mathrm{k} \in \gamma$ は $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリ番号である。

(iv) $\sum_{k\in\gamma}$ BSC$(\varphi, k) > 0$ の場合

(iv −1) BSC$(\varphi, k) = 0$ なるカテゴリ番号 $k \in \gamma$ は、

SM$(\varphi, \omega_k) > 0$ であっても、$\langle \varphi, \gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリ番号ではない。

(iv −2) SM$(\varphi, \omega_k) = 0$ なるカテゴリ番号 $k \in \gamma$ は、

BSC$(\varphi, k) = 1$ であっても、$\langle \varphi, \gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリ番号ではない。 □

次の定理A4.1では、式（A4.1）の写像CSFは、式（A2.5）の類似度関数SM, 式（A3.1）の大分類関数BSCを使用する形式で、

その定義域が $\Phi \times 2^J$ であり、その値域が、パターン $\varphi \in \Phi$ の
カテゴリ帰属知識 $\langle \varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$ の **"有効な"** 候補カテゴリの
番号リスト (a list of effective category-numbers) CSF$(\varphi, \gamma) \in 2^J$ の
集合である (A4.3)

であるように、構成されている。

［定理A4.1］**（カテゴリ選択関数 CSF の構成定理）**

次のように定義される式（A4.1）の1つの写像CSFは式（A4.2）と上述のaxiom 4とを満たす：

(i) $\varphi = 0 \vee \gamma = \phi$ の場合

$$\mathrm{CSF}(\varphi, \gamma) = \phi. \tag{A4.4}$$

(ii) $\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ の場合

$$\mathrm{CSF}(\varphi, \gamma) = \begin{cases} \{k \in \gamma \mid \mathrm{SM}(\varphi, \omega_k) > 0\} \\ \qquad \text{if } \sum_{k\in\gamma} \mathrm{BSC}(\varphi, k) = 0 & \text{(A4.5)} \\ \{k \in \gamma \mid \mathrm{SM}(\varphi, \omega_k) > 0 \wedge \mathrm{BSC}(\varphi, k) = 1\} \\ \qquad \text{if } \sum_{k\in\gamma} \mathrm{BSC}(\varphi, k) > 0. & \text{(A4.6)} \end{cases}$$

（証明） 文献［B3］の定理E1である。 □

付録B. 構造受精変換 TA(μ)T と、不動点探索形想起認識の働き

本付録Bでは、SS理論［B1］～［B6］で登場し、カテゴリ帰属知識 $\langle \varphi, \gamma \rangle$ を変換する機能を備えている "構造受精変換 TA(μ)T" と、不動点探索形想起認識の働きに関連する事柄について、簡単に説明される。

B1. 構造受精作用素 A(μ) の、非負1次結合，凸結合からの意味付け

本章では、B2章で定義される構造受精作用素 A(μ)の構造形式がどういう観点から導入されたかが、ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の有限個の元の非負1次結合，凸結合を用いて説明される。

B1.1 カテゴリ帰属知識を用いたパターンモデル Tφ の改良方法

2つのベクトル $T\varphi, T\omega_j - T\varphi$の和からなる等式

$$T\omega_j = T\varphi + [T\omega_j - T\varphi] \tag{B1.1}$$

は、

現在のベクトル $T\varphi$に、始点 $T\varphi$から終点$T\omega_j$へ向かうベクトル$T\omega_j - T\varphi$を加えると、
第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$の代表パターンのモデル$T\omega_j$が得られる (B1.2)

ことを表している。

もし、$T\varphi$がカテゴリ集合$\mathfrak{C}_j$, $j\in\gamma$の内のいずれか1つに帰属していることが判明しており、その帰属の程度が

$$p_j, \text{ where } [\forall j\in J, 0\leqq p_j\leqq 1]\wedge, \sum_{j\in\gamma} p_j\leqq 1 \tag{B1.3}$$

としよう。認識システム RECOGNITRON がこの種のカテゴリ帰属知識を持っており、各終点$T\omega_j$へ向かうベクトル$T\omega_j-T\varphi$がp_jの程度で存在し、その平均ベクトル$\sum_{j\in\gamma} p_j\cdot[T\omega_j-T\varphi]$で現在のベクトル$T\varphi$を改良できると解釈してみよう。すると、現在のモデル$T\varphi$がこの意味で改良されたパターンηは、

$$\eta\equiv T\varphi+\sum_{j\in\gamma} p_j\cdot[T\omega_j-T\varphi] \tag{B1.4}$$

$$=[1-\sum_{j\in\gamma} p_j]\cdot T\varphi+\sum_{j\in\gamma} p_j\cdot T\omega_j \tag{B1.5}$$

である。

ここで、2つの概念“非負1次結合，凸結合”を説明しておかねばならない。

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\cdot\varphi_i, \text{ where } \forall i\in\{1,2,\cdots,n\},\ q_i\geqq 0 \tag{B1.6}$$

は、有限個のパターンφ_i, $i=1\sim n$の**非負1次結合**（non-negative linear combtnation）であるという。

また、

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\cdot\varphi_i, \text{ where } \forall i\in\{1,2,\cdots,n\},\ q_i\geqq 0$$
$$\wedge\sum_{i=1}^{n} q_i=1 \tag{B1.7}$$

は、有限個のパターンφ_i, $i=1\sim n$の**凸結合**（convex combination）であるという。

式（B1.5）のηは、$|\gamma|+1$個のヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元$T\varphi$, $T\omega_j-T\varphi$, $j\in\gamma$の非負1次結合であることになる。更に、この場合の$T\varphi$の存在確率$p(\varphi)$を

$$p(\varphi)\equiv 1-\sum_{j\in\gamma} p_j \tag{B1.8}$$

と考えると、2式（B1.4），（B1.5）のηは

$$\eta=p(\varphi)\cdot T\varphi+\sum_{j\in\gamma} p_j\cdot T\omega_j \tag{B1.9}$$

と表され、

$$p(\varphi)+\sum_{j\in\gamma} p_j=1 \tag{B1.10}$$

が成立しているから、2式（B1.4），（B1.5）のηは$|\gamma|+1$個のヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元$T\varphi$, $T\omega_j$, $j\in\gamma$の凸結合であることになる。

$$\sum_{j\in\gamma} p_j=1 \tag{B1.11}$$

ならば、式（B1.5）のηは$|\gamma|$個のヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元$T\omega_j$, $j\in\gamma$の凸結合であり、

$$\eta=\sum_{j\in\gamma} p_j\cdot T\omega_j \tag{B1.12}$$

と表されることに注意しよう。

B1.2　A(μ)の導出

前節で説明された“認識システム RECOGNITRON が処理の対象とする問題のパターンφに関し持っているカテゴリ帰属知識が反映されている形で、パターンモデル$T\varphi$を改良できる非負1次結合，凸結合”の観点から、次章の構造受精作用素$A(\mu)$を導出してみよう。以下では、3式（A1.1），（A2.5），（A3.1）の T, SM, BSC を使用する。

パターンモデル$T\varphi$に構造受精作用素$A(\mu)$を作用させて得られる$A(\mu)T\varphi$は以下のように意味付けられる：

パターンφがカテゴリ集合$\mathfrak{C}_j$, $j\in\gamma$の内の何れか1つに非規格化確率$SM(T\varphi,\omega_j)\cdot BSC(T\varphi, j)$、

或いは、SM($T\varphi$, ω_j) で帰属すると判明しているときに、$T\varphi$を改良したパターンモデルは、TA(μ)$T\varphi$である。 □

このような解釈を可能にする根拠を説明しておこう。

カテゴリ帰属知識を用いて、パターンモデル$T\varphi$を改良したものηは、B1.1節の論によれば、

$$\eta =$$

$$\begin{cases} T\varphi + \sum_{j\in\mu} SM(T\varphi, \omega_j)\cdot BSC(T\varphi, j)\cdot[T\omega_j - T\varphi] \\ \quad = [1 - \sum_{j\in\mu} SM(T\varphi, \omega_j)\cdot BSC(T\varphi, j)]\cdot T\varphi \\ \quad + \sum_{j\in\mu} SM(T\varphi, \omega_j)\cdot BSC(T\varphi, j)\cdot T\omega_j \\ \qquad \text{if } \sum_{j\in\mu} BSC(T\varphi, j) > 0 \qquad \text{(B1.13)} \\ T\varphi + \sum_{j\in\mu} SM(T\varphi, \omega_j)\cdot[T\omega_j - T\varphi] \\ \quad = [1 - \sum_{j\in\mu} SM(T\varphi, \omega_j)]\cdot T\varphi \\ \quad + \sum_{j\in\mu} SM(T\varphi, \omega_j)\cdot T\omega_j \\ \qquad \text{if } \sum_{j\in\mu} BSC(T\varphi, j) = 0 \qquad \text{(B1.14)} \end{cases}$$

であり、

$$\forall\varphi\in\Phi, \forall j\in\mu, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j)$$

$$\because \text{ axiom 2の(iii)} \qquad \text{(B1.15)}$$

$$\wedge BSC(T\varphi, j) = BSC(\varphi, j) \quad \because \text{ axiom 3の(ii)} \qquad \text{(B1.16)}$$

を考慮すれば、

$$\begin{cases} \sum_{j\in\mu} SM(T\varphi, \omega_j)\cdot BSC(T\varphi, j) = 1 \\ \quad \text{if } \sum_{j\in\mu} BSC(T\varphi, j) > 0 \qquad \text{(B1.17)} \\ \vee \sum_{j\in\mu} SM(T\varphi, \omega_j) = 1 \\ \quad \text{if } \sum_{j\in\mu} BSC(T\varphi, j) = 0 \qquad \text{(B1.18)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \eta = A(\mu)\, T\varphi \qquad \text{(B1.19)}$$

が成り立つからである。

B2. 構造受精作用素 A（μ）の形式

更新作用素（updating operator）、或いは、**構造受精作用素**（structural-fertilization operator）と呼ばれる写像

$$A(\mu): \Phi \to \Phi,\ \text{ここに、}\mu\in 2^J \qquad \text{(B2.1)}$$

の意味はB1.2節でも説明されており、このA(μ)は実は、付録Aで用意された3構成要素

①式（A1.1）のモデル構成作用素T

②式（A2.5）の類似度関数SM

③式（A3.1）の大分類関数BSC (B2.2)

を使用する形式で、次のように定義される：

（i） $\varphi = 0 \vee \mu = \phi$ の場合

$$A(\mu)\varphi \equiv 0 \qquad \text{(B2.3)}$$

（ii） $\varphi \neq 0 \wedge \mu \neq \phi$ の場合

$$A(\mu)\varphi \equiv$$

$$
\begin{cases}
\sum_{k\in\mu} \mathrm{SM}(\varphi, \omega_k)\cdot \mathrm{T}\omega_k \\
\qquad\qquad \text{if } \sum_{k\in\mu} \mathrm{BSC}(\varphi, k)=0 & \text{(B2.4)} \\
\sum_{k\in\mu} \mathrm{SM}(\varphi, \omega_k)\cdot \mathrm{BSC}(\varphi, k)\cdot \mathrm{T}\omega_k \\
\qquad\qquad \text{if } \sum_{k\in\mu} \mathrm{BSC}(\varphi, k)>0 & \text{(B2.5)}
\end{cases}
$$

□

先ず、$A(\mu)\varphi$は、次の定理B2.1に示す如く、式（A1.1）のモデル構成作用素 T の下で不変である。

［定理B2.1］**（構造受精作用素 A(μ) のT-不変定理）**

$$\forall\varphi\in\Phi, \forall\mu\in 2^{J}, A(\mu)\ T\varphi=A(\mu)\varphi.$$

（証明） 文献［B4］、付録5の定理A5.1である。 □

次に、$A(\mu)\varphi$は、定理A4.1のカテゴリ選択関数 CSF を使用すれば、次の定理B2.2のように簡単に表される。

［定理B2.2］**（構造受精作用素 A(μ) の表現定理）**

$$\forall\varphi\in\Phi, \forall\mu\in 2^{J},$$

$$A(\mu)\varphi=\sum_{k\in \mathrm{CSF}(\varphi,\mu)} \mathrm{SM}(\varphi, \omega_k)\cdot \mathrm{T}\omega_k.$$

（証明） 文献［B3］、付録Gの定理G1である。 □

B3. カテゴリ帰属知識空間 $\langle\Phi, 2^{J}\rangle$

式（A2.1）に登場するカテゴリ番号の集合 J について、そのすべての部分集合のなす集合（べき集合；power set）

$$2^{J}=\{\gamma \mid \gamma\subset J\} \qquad \text{(B3.1)}$$

を導入する。

パターン$\varphi\in\Phi$がカテゴリの集合$\mathfrak{C}_j$, $\gamma\in 2^{J}$のいずれかの1つに帰属する可能性があるという知識を認識システム RECOGNITRON がパターン$\varphi\in\Phi$ に関し持っているとき、この知識を$\langle\varphi, \gamma\rangle$で表す。

このようなカテゴリ帰属知識$\langle\varphi, \gamma\rangle$のすべてのなす集合

$$\langle\Phi, 2^{J}\rangle\equiv\{\langle\varphi, \gamma\rangle \mid \varphi\in\Phi, \gamma\in 2^{J}\} \qquad \text{(B3.2)}$$

を幾何学的考察の対象として扱い、**カテゴリ帰属知識空間**（categorical membership-knowledge space）という。

カテゴリ帰属知識空間$\langle\Phi, 2^{J}\rangle$の2元$\langle\varphi, \gamma\rangle$, $\langle\psi, \lambda\rangle$に各々、2つの等形式関係$=_{\Delta}$, 等構造関係 = を各々、次の定義3.1, 3.2 の様に導入する。

［定義B3.1］（カテゴリ帰属知識間の**等形式関係** $=_{\Delta}$ の定義）

$$\langle\varphi, \gamma\rangle =_{\Delta}\langle\psi, \lambda\rangle \Leftrightarrow \varphi=\psi\wedge\gamma=\lambda.$$

□

［定義B3.2］（カテゴリ帰属知識間の**等構造関係** = の定義）

$$\langle\varphi, \gamma\rangle=_{\Delta}\langle\psi, \lambda\rangle\Leftrightarrow$$
$$\mathrm{CSF}(\varphi, \gamma)=\mathrm{CSF}(\psi, \lambda)$$
$$\wedge[\forall j\in \mathrm{CSF}(\varphi, \gamma)\cap \mathrm{CSF}(\psi, \lambda),$$
$$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_j)=\mathrm{SM}(\psi, \omega_j)].$$

□

カテゴリ帰属知識$\langle\varphi, \gamma\rangle\in\langle\Phi, 2^{J}\rangle$を一意的に特徴付ける**表象**は、パターン$\varphi$を3式（B2.3), ～（B2.5）で定義される構造受精作用素 $A(\gamma)$ で変換して得られるパターン$A(\gamma)\varphi$であることを

指摘している定理B3.1に注目する。

［定理B3.1］**（カテゴリ帰属知識の表象定理）**

系 $T\omega_j, j\in J$ は1次独立である　(B3.3)

とする。

$$\mathrm{CSF}(\varphi,\gamma)\cap \mathrm{CSF}(\psi,\lambda)\neq\phi \qquad \text{(B3.4)}$$

ならば、

$$\langle\varphi,\gamma\rangle=\langle\psi,\lambda\rangle\Leftrightarrow A(\gamma)\varphi=A(\lambda)\psi. \qquad \text{(B3.5)}$$

（証明） 文献［B3］、付録Gの定理G2である。 □

B4. カテゴリ帰属知識空間 $\langle\Phi, 2^J\rangle$ 上の構造受精変換 $TA(\mu)T$ の定義

3式（B2.3）～（B2.5）の構造受精作用素 $A(\mu)$ の両側に付録Aのaxiom 1を満たすモデル構成作用素 T を配置して得られ、**構造受精変換**（structural-fertilization transformation）と呼ばれる写像

$$TA(\mu)T:\langle\Phi,2^J\rangle\rightarrow\langle\Phi,2^J\rangle,\ \text{where}\ \mu\in 2^J \qquad \text{(B4.1)}$$

は、その定義域、値域が Φ である場合の

$$TA(\mu)T:\Phi\rightarrow\Phi,\ \text{where}\ \mu\in 2^J \qquad \text{(B4.2)}$$

を拡張して、以下のように定義される。

カテゴリ帰属知識空間 $\langle\Phi, 2^J\rangle$ 上の2変数**状態遷移関数**

$$\text{after}:[\Phi\rightarrow\Phi]\times\langle\Phi,2^J\rangle\rightarrow\langle\Phi,2^J\rangle \qquad \text{(B4.3)}$$

を使って得られる表現

$$\langle\psi,\lambda\rangle=_{\triangle}\text{after}(A(\mu),\langle\varphi,\gamma\rangle) \qquad \text{(B4.4)}$$

は、次のように読まれる：

記憶状態 $\langle\psi,\lambda\rangle$ は、記憶状態 $\langle\varphi,\gamma\rangle$ において、operator $A(\mu)$ を
適用した後の記憶状態である。　(B4.5)

□

実は、式（B4.4）の $\langle\psi,\lambda\rangle$ は、具体的に、

$$\text{after}(A(\mu),\langle\varphi,\gamma\rangle)=_{\triangle}TA(\mu)T\langle\varphi,\gamma\rangle \qquad \text{(B4.6)}$$

と設定され、カテゴリ帰属知識 $\langle\varphi,\gamma\rangle\in\langle\Phi,2^J\rangle$ を、式（B4.1）の $TA(\mu)T$ で変換して得られるカテゴリ帰属知識 $\langle\psi,\lambda\rangle\in\langle\varphi,2^J\rangle$ は、

$$\begin{aligned}\langle\psi,\lambda\rangle&=_{\triangle}TA(\mu)T\langle\varphi,\gamma\rangle\\ &=_{\triangle}\langle TA(\mu\cap\gamma)T\varphi,\mathrm{CSF}(\varphi,\mu\cap\gamma)\rangle\in\langle\Phi,2^J\rangle\end{aligned} \qquad \text{(B4.7)}$$

where

$$\psi\equiv TA(\mu\cap\gamma)T\varphi \qquad \text{(B4.8)}$$

$$\lambda\equiv \mathrm{CSF}(\varphi,\mu\cap\gamma) \qquad \text{(B4.9)}$$

と定義される。

B5.カテゴリ帰属知識 $\langle\varphi,\gamma\rangle$ のポテンシャルエネルギー $E(\varphi,\gamma)$)

カテゴリ帰属知識 $\langle\varphi,\gamma\rangle\in\langle\Phi,2^J\rangle$ がどの程度複雑な構造を備えているかの1つの指標として、SSポテンシャルとも呼ばれるその**ポテンシャルエネルギー**（potential energy）$E(\varphi,\gamma)$ が、次の定義B5.1のように導入される。

［定義B5.1］**（カテゴリ帰属知識 $\langle\varphi,\gamma\rangle$ のポテンシャルエネルギー $E(\varphi,\gamma)$)**

カテゴリ帰属知識 $\langle \varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$ に付随する**ポテンシャルエネルギー $\mathbf{E}(\varphi, \gamma)$** は次の様に定義される：

（i） $\varphi = 0 \vee \gamma = \phi$ の場合

$$E(\varphi, \gamma) \equiv 0 \tag{B5.1}$$

（ii） $\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ の場合

$$E(\varphi, \gamma) \equiv |\gamma| - \sum_{j \in \gamma} SM(\varphi, \omega_j) \tag{B5.2}$$

ここに、$|\gamma|$ は γ 内の要素の総数の意であって、$|\gamma| \geqq 1$ (B5.3)

□

ポテンシャルエネルギー $E(\varphi, \gamma)$ と、パターン $\varphi \in \Phi$ の認識過程とのつながりについて次の意味がある：候補カテゴリの集合

$$\underline{\mathfrak{C}}(\gamma) \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid j \in \gamma \in 2^J\} \tag{B5.4}$$

にわたる類似度 $SM(\varphi, \omega_j)$ の総和

$$\sum_{j \in \gamma} SM(\varphi, \omega_j) \tag{B4.5}$$

が増加し、候補カテゴリ数 $|\gamma|$ が減少すれば、$E(\varphi, \gamma)$ が減少するから、**不動点探索形構造受精に関する多段階変換帰納推論を使った連想形パターン認識過程** [B3], [B4] がどの程度、収束しているかの指標が $E(\varphi, \gamma)$ である。 □

帰属知識 $\langle \varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$ の変換像である今1つの、3式（B4.7),（B4.8),（B4.9）のカテゴリ帰属知識 $\langle \psi, \lambda \rangle$ について、**エネルギー不等式**

$$E(\varphi, \gamma) \geqq E(\psi, \lambda) \tag{B4.6}$$

が通常、成立するという意味で [B3], [B4]、式 (B4.1) に登場する変換 $TA(\mu)T$ は、帰属知識 $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の**精密化作用素** (refinement operator) とも称されることがある。

B6. 不動点探索形構造受精に関する多段階変換帰納推論を使った連想形パターン認識のアルゴリズム

ちなみに、不動点探索形構造受精に関する多段階変換帰納推論を使った連想形パターン認識過程を記述するアルゴリズムは**制約付き最適化問題**（constrained optimization problem）の1つの解法であり、次のように、簡単に説明される。

[制約付き最適化として、定式化される問題としてのパターン認識問題]

処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ について、認識システム RECOGNITRON がカテゴリ帰属知識 $\langle T\varphi, \gamma \rangle$ を持っているとき、決定すべき変数 $\langle \psi, \lambda \rangle$ の**初期値** $\langle \psi_0, \lambda_0 \rangle$ として、

$$\langle \psi_0, \lambda_0 \rangle =_{\Delta} \langle T\varphi, \gamma \rangle \tag{B6.1}$$

を採用し、**制約付き最適化問題**

$$\min E(\psi, \lambda) \tag{B6.2}$$

$$\text{subject to} \langle \psi, \lambda \rangle \in \langle \Psi, \Lambda \rangle \subset \langle \Phi, 2^J \rangle \tag{B6.3}$$

を、式（B4.1）の構造受精変換 $TA(\mu)T$ を有限個用い、適用する形式で、解決せよ。ここに、$\langle \Psi, \Lambda \rangle$ は事前に想定される**許容解の集合**（a set of admissible solutions）である。 □

上述の問題に対する1つの最も単純な解法としての、山登り法（hill-climbing method）を採用すれば、不動点探索形構造受精に関する多段階変換帰納推論を使った**連想形パターン認識過程**は、以下の探索アルゴリズムの様に説明される。

[探索アルゴリズム]

（i） カテゴリ帰属知識 $\langle \psi, \lambda \rangle$ の初期値 $\langle \psi_0, \lambda_0 \rangle$ を 式（B6.1）のように設定する。

（ii）3式 (B5.1)～(B5.3) の定義に従って、カテゴリ帰属知識 $\langle\psi,\lambda\rangle$ のSSポテンシャル

$$E(\psi,\lambda) \tag{B6.4}$$

を計算する。

（iii）不等式

$$0\leqq\delta<2^{-1} \tag{B6.5}$$

を満たす非負数 δ を用意し、**終了基準**（termination criterion）

$$\exists j\in\lambda, SM(\psi,\omega_j)\geqq 1-\delta \tag{B6.6}$$

が満たされていれば、求める解は $\langle\psi,\lambda\rangle$ である。このとき、一意的帰属に関するSM－δ 定理（文献［B3］，付録Bの定理B1）から、

$$\lambda=[j]\in 2^J \tag{B6.7}$$

が成立しており、よって、

Pattern φ is associated with a recalled pattern-model $T\omega_j$, and
gets classified into the j-th category $\mathfrak{C}_j$. (B6. 8)

と、問題のパターン φ は**想起形的認識**される。

（iv）不等式（B6.6）が満たされていなければ、式(B4.7) の定義に従って、現在得られている解 $\langle\psi,\lambda\rangle$ がより良い方向（SSポテンシャル E が減少する方向）へ向かうように、適切に $\mu\in 2^J$ を選定し、式（B4.7）の定義に従って、構造受精変換 $TA(\mu)T$ を用いて、この $\langle\psi,\lambda\rangle$ を

$$TA(\mu)T\langle\psi,\lambda\rangle \tag{B6.9}$$

と変換し、得られた $TA(\mu)T\langle\psi,\lambda\rangle$ を次の探索段階の新しいカテゴリ帰属知識 $\langle\psi,\lambda\rangle$ として採用し、（ii）に戻る。 □

尚、式（B6.6）に代わる終了基準として、文献［B4］の定理8.5を考慮して、

$$E(\psi,\lambda)=0 \text{(SSポテンシャル E の最小性)} \tag{B6.10}$$

を採用することができ、或いは、文献［B4］、付録14の定理A14.4を考慮して、

$$TA(\mu)T\langle\psi,\lambda\rangle=_\triangle\langle\psi,\lambda\rangle \text{（不動点方程式の成立）} \tag{B6.11}$$

を採用することができ、この終了規準を採用している場合、2式（B6.2）（B6.3）の制約付き最適化問題の解 であるカテゴリ帰属知識 $\langle\psi,\lambda\rangle$ は、類似度関数 SM がある2条件（直交条件･ミックスチュア条件）を満たしていれば、固定したカテゴリ番号リスト $\mu\subset\gamma\in 2^J$ を用いる場合、カテゴリ帰属知識に関する**連想形認識方程式**

$$MK=_\triangle\langle T\varphi,\gamma\rangle\sqcup TA(\mu)T\cdot MK \tag{B6.12}$$

の解 MK になる場合がある［B3］，［B4］。ここに、$\sqcup$ は文献［B4］の定義3.2での半順序関係 $\leqq_\triangle^*$ に関する上限記号である。尚、文献［B4］、付録9の定理A9.1（モデル構成作用素 T の下でのカテゴリ帰属知識の不変性）より、

$$\langle T\psi,\lambda\rangle=\langle\psi,\lambda\rangle \tag{B6.13}$$

が成立していることに注意しておこう。

以上の探索アルゴリズムを内蔵しており、このアルゴリズムを使い、処理の対象とする問題のパターン $\varphi\in\Phi$ について認識動作を実行するのが、S.Suzukiの提案した認識システム**RECOGNITRON** である。

付録C. マルチメディア、データ、情報、知識、感性情報、知識データベースにおける3つの知識表現と、文字列の連想記憶

感覚器上の刺激物は少なくとも、**データ**と称されてよい。データが知覚の働きで一般化·抽象化されたものが**情報**である。情報が知能の働きで概念化され、記憶され、検索の対象となり得るものが**知識**である。

本付録Cでは、マルチメディア情報の内、パターン情報、感性情報以外の、代表的な文字列で表される言語情報についての、情報検索·連想形記憶に使われるこれまでの3つの知識表現について簡単に解説する。

C1. マルチメディア化された集まりとしての、データ、情報、知識、感性情報

検索の対象となるのは、オープンコンピュータネットワーク上、インターネット上、ディジタル電子図書館［A20］内にあるデータ（data）、情報（information）、知識（knowledge）である。それらには、文字列、言語音声、会話音声、音楽、図面、絵、写真、映像などの混在した**マルチメディア**［A21］**化された集まり**が電子ディジタル化されて貯蔵されている。

新聞記事から外国旅行に行って見た数々の風景、印象、人々、建物、動物などを思い出すことがある。このように、通常、ヒトはデータ、情報、知識を検索可能なように連想的に記憶している。

データをヒトが主観的解釈したもの、“**データ**とその主観的個人解釈との連合物”が**情報**といわれるものである。多くのヒトに共有化され、一般化·客観化·抽象化·概念化されており、よって、それを用いて推論·検索できるような「構造化された情報」が知識である。

データ、情報、知識はこの順に一般化·客観化·抽象化·概念化されている度合いが強まっている傾向がある。

データは知識を用いての解釈で情報になる。

複数の情報が概念化されると知識になる。

基本的には、推論とは、既知知識を用いての未知知識の導出である。

顔の表情のもたらす喜怒哀楽情報、美しいななどという“暗示的な情報”が**感性情報**である。感性情報処理についての研究気運が盛り上がっており、知能工学の新しい研究分野となっている。

C2. 知識の獲得、知識の表現、知識による推論としての情報検索

貯えられている知識の集合体、知識ベースから情報検索するとは、知識を用いて推論（inference）することである。そのためには、知識を学習の働きなどで獲得し（acquisition）、採用している推論に便利なように知識を構造化·表現し（representation）、その表現結果を記憶しなければならない。この際、知識を構造化·表現化が拙劣であれば、採用可能な推論法は限られてくる事実に注意しておこう。その採用した推論法に適した“知識の構造化·表現化”がある。

S.Suzukiは、知識が構造化されていないような場合の検索では、最も適切な推論方式とは、何か？をSS理論を発展させ、研究しようとしている［B4］。

C3. 知識データベースにおける3知識表現

専門家の知識を計算機上に貯え、この蓄積した知識の集合体（知識データベース；knowledge data base）を駆使し専門家と同様な判断処理を行う**エキスパートシステム**（expert system）では、知識を表現するのに、次の3つの方法①，②，③が用いられる。

①**関係データ**（relational data）

各データを多数の項目からなるタップルとして表し、このタップルの集まり（知識の集合体）を表として表す。例えば、著者の表は著者・タイトル・内容の3項目のタップルの集まりであり、1つのタップルの例として、手塚治虫・鉄腕アトム・マンガが挙げられる。

表の集合体が知識データベースである。

②**フレーム**（frame）

属性の種類とその属性値の対（スロット；slot）の集合体を階層構造で表したものが1つのフレームである。（taro（is-a（value man））（year-of-birth（value 1950））（age（value 40）））が1つのフレームであり、太郎は人であり、その生まれた年が1950であり、年齢は40である知識を表している。

フレームの集合体が知識データベースである。

③**意味ネットワーク**（semantic network）

“カナリヤは鳥である”という知識を3つ組〈概念 関係 概念〉の1例〈カナリヤ IS-A 鳥〉と考え、カナリヤ$\xrightarrow{}_{\text{is-a}}$鳥 とネットワーク表現する。概念を節点（node）に対応付け、2つの概念間の関係を枝（branch）に対応付けることで、3つ組〈概念 関係 概念〉の集合体をネットワーク（意味ネットワーク）として、表したものである。A is a B という関係以外のものとして、例えば、“部分集合/集合の関係”としての is a subset of 、“部分/全体の関係”としての A is a part of B，“要素/集合の関係”としての A is an instance of B、“一般化/特殊化の関係”としての A implies B、“種類の関係”としての A is a kind of B、“概念の定義の関係”としての A is defined as B、“属性/値の関係”としての A has a value of Bなども考えられる。

C4. 文字列から文字列への連想記憶

計算機では、ハードウェア的にはアドレスを指定すれば、その記憶内容が得られる“**番地指定方式**”であり、ソフトウェア的には、例えば、〈名前 住所 電話番号〉という3つ組データの集合体を記憶していれば、利用者名を文字列で指定すると、電話番号が文字列で得られる“文字列から文字列への、1種の連想記憶（associative memory）方式”である。この場合、利用者名が見出し（key）であり、情報検索されるデータ項目は電話番号である。以上のように、データがキーと内容項目の1対1の対応表の形で表現されている場合、キー値を指定して内容項目の値を読みだす“**内容アドレスメモリ**（content-address memory）”がソフトウェアで実現されている。この内容アドレスメモリでは、データのキー値 k から、ハッシュ関数 f を使って、そのデータのアドレス a（＝f（k））を直接に計算する方法（ハッシュ法）が使われる。

より複雑な連想記憶方式では、データが必ずしも、表の形式で記憶されているとは限らない場合の検索方式があり、例えば、“リンゴ”という文字列に対して、“赤い”とか、“甘い”，“丸い”といった文字列を検索するような方式がある。検索される文字列が1個とは限らず、複数個存在するような場合では、1つの文字列に対し、連想の“近い関係にある内容を表現している文字列”を思い出している。

付録D．人工知能的状態空間探索手法，fuzzy推論，SS理論でのパターン認識手法

本付録Dでは、人工知能的探索手法，fuzzy推論手法とが簡単に説明された後、SS理論でのパターン認識手法がこれらの2つの手法を適用した形式であることが指摘される。

D1．人工知能的探索

人工知能学的にある問題 P を解決するとは、非ヒューリスティック形（横形・縦形・分岐限定形），ヒューリスティック形（山登り形·最良優先探索形·A形·A*形）等の探索手法を採用する古典論的探索論では、解決しようとする“状態空間内の元としての問題 P の探索途中の表現”を節点に持ち、これらの各節点から次の節点へと変換する手段を表す枝とを持つ探索木を生成してゆくことであり、その結果、出発節点（与えられた問題 P の暗示的表現）と目標節点（P の解を明示的に含む表現）とを結ぶ“**順路**”を見つけ出すことであり、2種類の処理

（i）（親節点をその子節点へ**展開**すること；親節点とその子節点とを結ぶ各枝を決定すること）
　探索途中の現在の節点（親節点）から次に直接、推論され得る可能性を備えた節点（子節点）をすべて求める

（ii）（展開された子節点の内、1つの子節点を**選定**すること；現在の親節点から次に進むべき枝を仮決定すること）
　上述の（i）で得られた子節点の内から、それらのどの1つを現在の親節点に代り、次の新しい親節点とするかを仮に決定する

を、**後戻り**（backtrack）を含む形式で状態空間内で繰り返すことで達成られる。

D2．fuzzy推論

ファジィ論理（fuzzy logic）とは、「言語表現の中に現われる“推論・思考”の形式としての論理」における多義性（polymeanings），不確実性（uncertainty），不完全性（incompleteness）を表現する典型的な1つの手段である。

文献［A4］でのファジィ推論システム（fuzzy inference system）を以下に、要約して説明しよう。以下の内容は、多少異なった形で第7章において、パターン表現の中での推論形式として大分類関数 BSC を構成するのに取り入れられている。

実関数値

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \left[\prod_{i=1}^{n} \exp[-(x_i - c_i(k))^2/\sigma(k)^2] \Big/ \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \exp[-(x_i - c_i(\ell))^2/\sigma(\ell)^2]\right] \cdot f_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad \text{(D2.1)}$$

, where

$$f_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell(k)\cdot x_\ell + b(k) \qquad \text{(D2.2)}$$

は、**ファジィ推論 if-then rule 規則**の、n 個の集合体

$$\text{if } x_1 \text{ is } A_1(k) \text{ and } x_2 \text{ is } A_2(k) \text{ and} \cdots \text{and } x_n \text{ is } A_n(k) \text{ then } f_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)\ (k=1\sim n) \qquad \text{(D2.3)}$$

を使って、事実入力

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \in R \text{(実数全体の集合)} \tag{D2.4}$$

から推論される出力を表している。ここに、第k(=1～n) 番目の**ファジィ命題**

$$x_i \text{ is } A_i(k) \tag{D2.5}$$

が成立している程度は、

$$\exp[-(x_i - c_i(k))^2/\sigma(k)^2] \tag{D2.6}$$

であるとしている。

式 (D2.6) は、第k (=1～n) 番目のファジィ命題式 (D2.5) の数値的**真理値** (numerical truth value) であり、**ファジィ集合 $A_i(k)$ の帰属度** (メンバーシップ) **関数** $\mu_{A_i(k)}(x_i)$ のことである。$\mu_{A_i(k)}(x_i)$ は、元 x_i がファジィ集合 $A_i(k)$ に帰属する程度 (degree, grade) である。

D3. SS理論でのパターン認識手法

A commonly used approach, known as a maximum similarity-measure recognition assigns the input pattern to the category whose template pattern is most "similar" to it.

上記の最大類似度認識法を多段階の認識における各stage で実現するのが本章で説明される "**RECOGNITRONに内蔵されている不動点探索形構造受精多段階帰納認識法**" である。

簡単には、入力パターンと記憶されているテンプレートパターン (或るカテゴリを代表しているパターン) との単なるマッチングによって、入力パターンの認識を行うことがしばしば、採用されるけれども、**照明条件、視点角度、物体自身の姿勢変化**などにより、入力パターンが見かけ上、変動したり異なって見えても、以前と同様な認識結果が得られる "不変性" の具備のみならず、学習などで得られつつある知識に基づいて高度なパターン認識をすることが必要とされる。初めて見るパターンに対しても過去に見たことのある似た物体に関する知識に基づいて、一般化・抽象化の能力が備わった形式で認識するシステムを構築することが望まれる。

指摘するまでもなく、われわれが見えている物体像は、外界像に相応して脳内に確保された**心像**である。心内に確保された物体像 (再現像、或いは復元像) は過去に見たことのある複数の物体像に共通に含まれているような**パターン形状素** (primitive shape-component) の組み合わせで表現されているらしい [A18]。$\{\psi_\ell \mid \ell \in L\}$ を記憶されているパターン形状素の組とし、$u(\varphi, \ell) \in Z$ (複素数全体の集合), $\in R$ (実数全体の集合) を再現しようとするパターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ (a Hilbert space) から抽出された複素数値或いは実数値の第 $\ell \in L$ 番目の特徴量とすれば、再現像 (パターン φ のモデル) $T\varphi$ の**構造形式**は、各 $u(\varphi, \ell)$ を1次結合係数として持つ1次結合式として、

$$T\varphi = \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell) \cdot \psi_\ell \tag{D3.1}$$

と表されなければならないというのが、パターン認識の数学的理論 (SS理論) [B5], [B6] の axiom 1から導出される基本的に重要な結論である (文献 [B3] の付録H, 文献 [B4] の2付録11, 16)。

途方もなく多数のパターン形状素が存在しているが、脳がどういう方法でパターン再現場面での、パターン形状素の組み合わせ多様性を圧縮しているかは現在のところ、不明であり、その上、外界の物体像を表現するときの精密さが脳内でどういうメカニズムで達成されているかも、よく判明していない。

パターンモデル $T\varphi$ は、原パターン φ を見たり聞いたりしたならば、φ と同じように見えたり、聞こえたりするような "認識システム**RECOGNITRON**の内部に φ と相応して確保された表現" である。

実は、前章でのファジィ集合Sは

$$S=\sum_{i=1}^{n}\mu_S(x_i)/x_i \tag{D3.2}$$

と表され、この表現式（D3.2）は、全体集合

$$X\equiv\{x_i \mid i=1\sim n\} \tag{D3.3}$$

の各元 xi と、この各 x_i がSに帰属する程度を表すメンバーシップ値（$0\leqq$）$\mu_S(x_i)$（$\leqq 1$）との順序対〈x_i, $\mu_S(x_i)$〉の集合

$$\{\langle x_i, \mu_S(x_i)\rangle \mid i=1\sim n\} \tag{D3.4}$$

の別表現である。パターン φ，その対応するパターンモデル $T\varphi$ は共に、このようなファジィ集合であることは、カテゴリ帰属知識の直交直和分解（**SS直交展開**）［B3］で示されている。

ファジイ集合（カテゴリ帰属知識）を今1つのファジィ集合（カテゴリ帰属知識）へと変換するファジイ推論手法で、RECOGNITRONでの多段階認識過程が形成される。

D1章の各種探索手法での探索木内各枝として、構造受精変換 $TA(\mu)T$ を用い、また、探索木内の各節点として、カテゴリ帰属知識（探索途中のパターンモデル ψ と、このパターンモデル ψ が帰属する可能性のあるカテゴリ候補 $\mathfrak{C}_j$ の番号 j のリスト λ との順序対〈ψ, λ〉）を用い、特に、カテゴリ帰属知識的不動点方程式の成立を終了規準とし、処理の対象とする問題の入力パターン φ が帰属するカテゴリ（類概念）を式（D2.1）と同様なファジィ推論する形式で探索する手法が、**不動点探索形構造受精多段階帰納ファジィ推論を採用した認識システムRECOGNITRONでのパターン連想形認識手法**である。

付録E. 相違度関数の逆数によるaxiom 2を満たす類似度関数SMの構成

本付録Eでは、ある2条件（零･有限値条件）を満たす相違度関数 gj の、カテゴリ番号 $j\in J$ にわたる系さえ考案できれば、axiom 2を満たす類似度関数SMが構成可能なこと、並びに、SMの構成諸例が研究される。

E1. 類似度関数SMの構成基本

E1.1　パターン集合Φ，代表パターン集合Ωと、モデル構成作用素T

内積、ノルムが各々、$(\cdot, \cdot\cdot)$, $\|\cdot\|\equiv\sqrt{(\cdot,\cdot)}$ と表される可分なあるヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の、零元を含むある部分集合 Φ を想定する。処理の対象とする問題のパターン φ の集合が Φ である。

代表パターン ω_j の系

$$\begin{aligned}&\Omega\,(\text{a library of pre-classified patterns which are known as template patterns})\\ &\equiv\{\omega_j \mid j\in J\}\subset\Phi,\ \text{where } J\equiv\{1,2,\cdots,m\}\end{aligned} \tag{E1.1}$$

を導入し、2つのパターンモデルの集合

$$T\cdot\Phi\equiv\{T\varphi \mid \varphi\in\Phi\} \tag{E1.2}$$

$$T\cdot\Omega\equiv\{T\omega \mid \omega\in\Omega\}\subset T\cdot\Phi \tag{E1.3}$$

を考える。ここに、順序対［Φ, T］はaxiom 1を満たすものであり、作用素

$$T:\Phi\to\Phi \tag{E1.4}$$

は**モデル構成作用素**と呼ばれるものであり、$T\varphi\in\Phi$ は $\varphi\in\Phi$ に相応して、確保されるパターンモデルである。

E1.2　パターン空間 Φ での、類似度関数 SM の構成基本

非一致条件

$$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}, \ \| T\omega_i - T\omega_j \| > 0 \qquad \text{(E1.5)}$$

を設ける。不等式

$$g_j(T\varphi_1, T\omega_j) \leqq g_j(T\varphi_2, T\omega_j) \qquad \text{(E1.6)}$$

が成り立っていれば、

パターン $\varphi_2 \in \Phi$ はパターン $\varphi_1 \in \Phi$ に比べ、

第j∈J番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に関し、相違している　(E1.7)

と解釈できる式（E1.12）の**相違度関数 g_j の系**を考案出来たとしよう。

次の定理E1は、不等式

$$SM(\varphi_1, \omega_j) \leqq SM(\varphi_2, \omega_j) \qquad \text{(E1.8)}$$

が成り立っていれば、

パターン $\varphi_2 \in \Phi$ はパターン $\varphi_1 \in \Phi$ に比べ、

第j∈J番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に関し、相似している　(E1.9)

と解釈でき、然も、axiom 2を満たす式（E1.13）の類似度関数 SM を構成出来ることを指摘している。

［定理E1］**（相違度関数 g_j の逆数による類似度関数 SM の構成定理）**

零条件

$$\forall j \in J, \ g_j(T\varphi, T\omega_j) = 0 \quad \text{if and only if } T\varphi = T\omega_j \qquad \text{(E1.10)}$$

と、**有限値条件**

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, 0 \leqq g_j(T\varphi, T\omega_j) < +\infty \qquad \text{(E1.11)}$$

を満たす非負実数値の値をとる2変数関数

$$g_j : T\cdot\Phi \times T\cdot\Omega \rightarrow R^+ \text{(非負実数値全体の集合)} \qquad \text{(E1.12)}$$

によって、

$$SM(\varphi, \omega_j) \equiv g_j(T\varphi, T\omega_j)^{-1} / \sum_{k\in J} g_k(T\varphi, T\omega_k)^{-1} \qquad \text{(E1.13)}$$

と定義される関数

$$SM : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \qquad \text{(E1.14)}$$

はaxiom 2を満たす。

（証明）　axiom 2,（ i ）（正規直交性）の成立：

$\varphi = \omega_j$ のとき

$$\begin{aligned} & SM(\varphi, \omega_j) \\ & = 1/ [1 + \sum_{k\in J-\{j\}} g_k(T\varphi, T\omega_k)^{-1} / g_j(T\varphi, T\omega_j)^{-1}] \\ & \quad \because \text{ 式 (E1.13)} \qquad \text{(E1.15)} \\ & = 1/[1 + \sum_{k\in J-\{j\}} \text{有限値}/\infty] \\ & \quad \because \text{ 2式 (E1.10), (E1.11)} \\ & = 1/[1+0] = 1 \end{aligned}$$

が示され、また、

$\varphi=\omega_i\ (i\neq j)$ のとき

$$\begin{aligned}
&SM(\varphi,\ \omega_j)\\
&=g_j(T\varphi, T\omega_i)^{-1}\\
&/[g_j(T\varphi,\ T\omega_i)^{-1}+\sum_{k\in J-\{j\}} g_k(T\varphi, T\omega_k)^{-1}]\\
&\quad\because\ \text{式 (E1.13)} \qquad \text{(E1.16)}\\
&=\text{有限値}/[\infty+\sum_{k\in J-\{j\}}\text{有限値}]\\
&\quad\because\ \text{2式 (E1.10), (E1.11)}\\
&=\text{有限値}/\infty=0
\end{aligned}$$

が示された。

axiom 2,（ii）(規格化条件) の成立：有限値条件式（E1.11）より

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall j\in J,\ 0<g_j(T\varphi,\ T\omega_j)^{-1}\leqq+\infty \tag{E1.17}$$

が成り立ち、

$$\forall\ \varphi\in\Phi,\ 0<\sum_{j\in J} g_j(T\varphi, T\omega_j)^{-1}\leqq+\infty \tag{E1.18}$$

を得、この式（E1.18）と SM の定義式（E1.13）より明らかである。

axiom 2,（iii）(T-不変性）の成立：　axiom 1,（iii）の後半 T·T＝T より明らかである。　□

次に、定理E1を適用して、axiom 2を満たす式（E1.13）の類似度関数 SM を構成しよう。

[構成例E.1]

正条件

$$\forall j\in J,\ 0<a_j \tag{E1.19}$$

を満たす定数 a_j の組を用いて、

$$\begin{aligned}
&g_j(T\varphi, T\omega_j)\\
&=\|T\varphi-T\omega_j\|^2\\
&\quad/\{[a_j+\|T\varphi\|^2]\cdot[a_j+\|T\omega_j\|^2]\}
\end{aligned} \tag{E1.20}$$

は、2条件（零·有限値条件）式（E1.10),（E1.11）を満たす。　□

[構成例E.2]

正条件式（E1.19）を満たす定数 a_j の組を用いて、

$$\begin{aligned}
&g_j(T\varphi,\ T\omega_j)\\
&=\|T\varphi-T\omega_j\|^2/a_j
\end{aligned} \tag{E1.21}$$

は、2条件（零·有限値条件）式（E1.10),（E1.11）を満たす。　□

[構成例E.3]

正条件式（E1.19）を満たす定数 a_j の組を用いて、

$$\begin{aligned}
&g_j(T\varphi, T\omega_j)\\
&=1-\exp[-\|T\varphi-T\omega_j\|^2/a_j]
\end{aligned} \tag{E1.22}$$

は、2条件（零·有限値条件）式（E1.10),（E1.11）を満たす。　□

E1.3　抽出される特徴量の組を用いての、類似度関数 SM の構成基本

パターン $\varphi\in\Phi$ から抽出された第 $\ell\in L$ 番目の複素数値特徴量を $\underline{u}(\varphi,\ell)$ と表し、特徴量の組

$$\underline{u}(\varphi)=\mathrm{col}\,(u(\varphi,1)\ \underline{u}(\varphi,2)\cdots\ \underline{u}(\varphi,n)) \tag{E1.23}$$

を導入する。ここに、特徴軸の番号の集合 L を

$$L=\{1,2,\cdots,n\} \tag{E1.24}$$

としている。特徴量のなす空間を考え、その内積、ノルムを各々、

$$[\underline{u}(\varphi),\ \underline{u}(\eta)]$$
$$\equiv \sum_{\ell\in L} w_\ell \cdot \underline{u}(\varphi,\ell)\cdot \overline{\underline{u}(\eta,\ell)}$$
$$\text{ここに、}\forall \ell \in L,\ 0 < w_\ell \quad \text{(E1.25)}$$
$$|\underline{u}(\varphi)| \equiv [\underline{u}(\varphi),\underline{u}(\eta)]^{1/2} \quad \text{(E1.26)}$$

としよう。

非一致条件

$$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},\ |\underline{u}(T\omega_i)-\underline{u}(T\omega_j)|>0 \quad \text{(E1.27)}$$

を設ける。不等式（E1.6）が成り立っていれば、式（E1.7）の解釈が成り立つ式（E1.12）の相違度関数 g_j の系を考案出来たとしよう。

次の定理E2は、不等式（E1.8）が成り立っていれば、式（E1.9）の解釈が成り立ち、然も、axiom 2を満たす式（E1.13）の類似度関数 SM を構成出来ることを指摘している。

［定理E2］**（特徴量の組を用いての、相違度関数 g_j の逆数による類似度関数 SM の構成定理）**

零条件

$$\forall j\in J,\ g_j(\underline{u}(T\varphi),\ \underline{u}(T\omega_j))=0$$
$$\text{if and only if } \underline{u}(T\varphi)=\underline{u}(T\omega_j) \quad \text{(E1.28)}$$

と、**有限値条件**

$$\forall \varphi\in\Phi,\ \forall j\in J,$$
$$0\leqq g_j(\underline{u}(T\varphi),\ \underline{u}(T\omega_j))<+\infty \quad \text{(E1.29)}$$

を満たす非負実数値の値をとる2変数関数

$$g_j : \underline{u}(T\cdot\Phi)\times\underline{u}(T\cdot\Omega)\rightarrow R^+ \quad \text{(E1.30)}$$

によって、

$$SM(\varphi,\ \omega_j)$$
$$\equiv g_j(\underline{u}(T\varphi),\ \underline{u}(T\omega_j))^{-1}$$
$$/\sum_{k\in J} g_k(\underline{u}(T\varphi),\ \underline{u}(T\omega_k))^{-1} \quad \text{(E1.31)}$$

と定義される式（E1.14）の関数 SM はaxiom 2を満たす。

（証明）　定理E1の証明法とほぼ同様に証明される。 □

［構成例E.4］

正条件式（E1.19）を満たす定数 a_j の組を用いて、

$$g_j(\underline{u}(T\varphi),\ \underline{u}(T\omega_j))$$
$$=|\underline{u}(T\varphi)-\underline{u}(T\omega_j)|^2$$
$$/\{[a_j+|\underline{u}(T\varphi)|^2]\cdot[a_j+|\underline{u}(T\omega_j)|^2]\} \quad \text{(E1.32)}$$

は、2条件（零·有限値条件）式（E1.28），（E1.29）を満たす。 □

［構成例E.5］

正条件式（E1.19）を満たす定数 a_j の組を用いて、

$$g_j(\underline{u}(T\varphi),\ \underline{u}(T\omega_j))$$
$$=|\underline{u}(T\varphi)-\underline{u}(T\omega_j)|^2/a_j \quad \text{(E1.33)}$$

は、2条件（零·有限値条件）式（E1.28），（E1.29）を満たす。 □

［構成例E.6］

正条件式（E1.19）を満たす定数 a_j の組を用いて、

$g_j(\underline{u}(T\varphi),\ \underline{u}(T\omega_j))$
$= 1 - \exp[-|\underline{u}(T\varphi) - \underline{u}(T\omega_j)|^2/a_j]$ (E1.34)

は、2条件（零·有限値条件）式（E1.28），（E1.29）を満たす。 □

E2. 各カテゴリに複数個の代表パターンを想定する場合への、転換法

式（E1.1）の各代表パターン ω_j については

For each category, we choose a representative template ω_j which insures a minimal worst case risk (E2.1)

と考えているのであるが、この想定を否定し、

All of the vcategories are represented by more than one template (E2.2)

と拡張した場合を考えよう。

E2.1 各カテゴリに複数個の代表パターンを想定する場合の、包含·非交差の2条件

非一致条件式（E1.5）を設定し、2条件

①（$T\omega_j$ の包含条件）

$\forall j \in J, T\omega_j \in T\cdot\Psi_j \subset T\cdot\Phi$ (E2.3)

②（$T\omega_i, T\omega_j$ の非交差条件）

$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\},$
$T\cdot\Psi_i \cap T\cdot\Psi_j \neq \phi$ (the empty set) (E2.4)

を満たすパターンモデル集合

$T\cdot\Psi \equiv \{T\cdot\Psi_j \mid j \in J\}$ (E2.5)

を導入する。そうすると、Ψ_j は the optimal aggregate template と考えられる。

③$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, T\omega_i \in T\cdot\Psi_j$ (E2.6)

が成立していることに注意しておく。

E2.2 パターン空間 Φ での、各カテゴリに複数個の代表パターンを想定する場合への、転換法

次の定理E3は、2条件（零·有限値条件）式（E1.10），（E1.11）を満たす相違度関数 g_j を用いて、2条件（零·有限値条件）式（E1.9），（E1.10）を満たす式（E2.8）の相違度関数 f_j が構成する方法が式（E2.7）で与えられることを指摘している。

［定理E3］**（各カテゴリに複数個の代表パターンを想定する場合への転換定理）**

式（E1.12）の非負実数値関数 g_j が2条件（零条件·有限値条件）式（E1.10），（E1.11）を満たすならば、

$f_j(T\varphi, T\Psi_j)$
$\equiv \min_{\eta \in \Psi_j} g_j(T\varphi, T\eta)$ (E2.7)

と定義される非負実数値関数

$f_j : T\cdot\Phi \times T\cdot\Omega \to R^+$ (E2.8)

は、**零条件**

$\forall j \in J, f_j(T\varphi, T\Psi_j) = 0$
if and only if $T\varphi = T\omega_j$ (E2.9)

と、有限値条件

$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, 0 \leqq f_j(T\varphi, T\Psi_j) < +\infty$ (E2.10)

を満たす。

（証明）　$\forall j \in J, g_j(T\varphi, T\omega_j) = 0$

if and only if $T\varphi = T\omega_j$　$\because$　式（E1.10）

$\Rightarrow \forall j \in J, \exists \eta \in \Psi_j, g_j(T\varphi, T\eta) = 0$

if and only if $T\varphi = T\omega_j$　$\because$　式（E2.3）

$\Rightarrow \forall j \in J, f_j(T\varphi, T\Psi_j) = 0$

if and only if $T\varphi = T\omega_j$　$\because$　式（E2.7）

を得て、零条件式（E2.9）が示された。また、

$\forall \varphi \in \Phi, \forall \in J, 0 \leqq g_j(T\varphi, T\omega_j) < +\infty$

$\because$　式(E1.11)

$\Rightarrow \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \exists \eta \in \Psi_j,$

$0 \leqq g_j(T\varphi, T\eta) < +\infty$　$\because$　式（E2.3）

$\Rightarrow \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, 0 \leqq f_j(T\varphi, T\Psi_j) < +\infty$

$\because$　式(E2.7)

を得て、有限値条件式（E2.10）が示された。　□

E2.3　抽出される特徴量の組を用いての、各カテゴリに複数個の代表パターンを想定する場合への、転換法

次の定理E4は、2条件（零・有限値条件）式（E1.28），（E1.29）を満たす相違度関数 g_j を用いて、2条件（零・有限値条件）式（E1.13），（E1.14）を満たす式（E2.8）の相違度関数 f_j が構成する方法が式（E2.12）で与えられることを指摘している。

［定理E4］**（特徴量の組を用いての、各カテゴリに複数個の代表パターンを想定する場合への転換定理）**

式（E1.30）の非負実数値関数 g_j が2条件（零条件・有限値条件）式（E1.28），（E1.29）を満たすならば、

$$f_j(\underline{u}(T\varphi), \underline{u}(T\Psi_j)) \equiv \min_{\eta \in \Psi_j} g_j(\underline{u}(T\varphi), \underline{u}(T\eta)) \tag{E2.11}$$

と定義される非負実数値関数

$$f_j : \underline{u}(T \cdot \Phi) \times \underline{u}(T \cdot \Psi) \to R^+ \tag{E2.12}$$

は、零条件

$$\forall j \in J, f_j(\underline{u}(T\varphi), \underline{u}(T\Psi_j)) = 0 \quad \text{if and only if } \underline{u}(T\varphi) = \underline{u}(T\omega_j) \tag{E2.13}$$

と、**有限値条件**

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \quad 0 \leqq f_j(\underline{u}(T\varphi), \underline{u}(T\Psi_j)) < +\infty \tag{E2.14}$$

を満たす。

（証明）　$\forall j \in J, g_j(\underline{u}(T\varphi), \underline{u}(T\omega_j)) = 0$

if and only if $\underline{u}(T\varphi) = \underline{u}(T\omega_j)$

$\because$　式（E1.28）

$\Rightarrow \forall j \in J, \exists \underline{u}(\eta) \in \underline{u}(\Psi_j),$

$g_j(\underline{u}(T\varphi), \underline{u}(T\omega_j)) = 0$

if and only if $\underline{u}(T\varphi) = \underline{u}(T\omega_j)$

$\because$ 式（E2.3）

$\Rightarrow \forall j \in J, f_j(\underline{u}(T\varphi), \underline{u}(T\Psi_j))=0$

if and only if $\underline{u}(T\varphi)=\underline{u}(T\omega_j)$

$\because$ 式（E2.11）

を得て、零条件式（E2.13）が示された。また、

$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J,$

$0 \leqq g_j(\underline{u}(T\varphi), \underline{u}(T\omega_j))<+\infty$

$\because$ 式(E1.29)

$\Rightarrow \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \exists \underline{u}(\eta) \in \underline{u}(\Psi_j),$

$0 \leqq g_j(\underline{u}(T\varphi), \underline{u}(T\omega_j))<+\infty$

$\because$ 式（E2.3）

$\Rightarrow \forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J,$

$0 \leqq f_j(\underline{u}(T\varphi), \underline{u}(T\Psi_j))<+\infty$

$\because$ 式（E2.11）

を得て、有限値条件式（E2.14）が示された。 □

E3. 各カテゴリに複数個の代表パターンを想定する場合の、類似度関数 SM の構成

前章の2定理E3, E4を適用し、各カテゴリに複数個の代表パターンを想定する場合、axiom 2を満たす類似度関数 SM を構成しよう。

E3.1 パターン空間 Φ での、各カテゴリに複数個の代表パターンを想定する場合の、類似度関数 SM の構成

次の定理E5は、各カテゴリに複数個の代表パターンを想定する場合への、定理E1の拡張である。

［定理E5］**（各カテゴリに複数個の代表パターンを想定する場合の、相違度関数 f_j の逆数による類似度関数 SM の構成定理）**

零条件式（E2.9）と、有限値条件式（E2.10）を満たし、式（E2.7）のように定義される非負実数値の値をとる式（E2.8）の2変数関数 f_j によって、

$$SM(\varphi, \omega_j) \equiv f_j(T\varphi, T\Psi_j)^{-1} / \sum_{k \in J} f_k(T\varphi, T\Psi_k)^{-1} \qquad \text{(E3.1)}$$

と定義される式（E1.14）の関数 SM はaxiom 2を満たす。

（証明） 定理E3を適用すれば、定理E1とほぼ同様に証明される。 □

［構成例E.7～E.9］

式（E2.7）のように定義される非負実数値の値をとる式（E2.8）の2変数関数 f_j 内の、式（E1.12）の非負実数値関数 g_j として、構成例E.1～E.3の3式（E1.20）～（E1.22）のように定義されるものを採用することができる。 □

E3.2 抽出される特徴量の組を用いての、各カテゴリに複数個の代表パターンを想定する場合の、類似度関数 SM の構成

次の定理E6は、各カテゴリに複数個の代表パターンを想定する場合への、定理E2の拡張である。

［定理E6］**（特徴量の組を用いての、各カテゴリに複数個の代表パターンを想定する場合の、相違度関数 g_j の逆数による類似度関数 SM の構成定理）**

零条件式（E2.13）と、**有限値条件**式（E2.14）を満たし、式（E2.11）のように定義される非負

実数値の値をとる式（E2.12）の2変数関数 f_j によって、

$$SM(\varphi,\ \omega_j) \equiv f_j(\underline{u}(T\varphi),\ \underline{u}(T\Psi j))^{-1} / \sum_{k\in J} f_k(\underline{u}(T\varphi),\ \underline{u}(T\Psi_k))^{-1} \qquad \text{(E3.2)}$$

と定義される式（E1.14）の関数 SM はaxiom 2を満たす。

（証明）　定理E4を適用すれば、定理E2とほぼ同様に証明される。 □

［構成例E.10～E.12］

式（E2.11）のように定義される非負実数値の値をとる式（E2.12）の2変数関数 f_j 内の、式（E1.30）の非負実数値関数 g_j として、構成例E.4～E.6の3式（E1.32）～（E1.34）のように定義されるものを採用することができる。 □

付録F．3値指数値類似性関数によるaxiom 2を満たす類似度関数 SM の構成

本付録Fでは、カテゴリ内変動が大きい場合のパターン情報処理に対処できるようなaxiom 2を満たす3種類の類似度関数 SM を、3値指数値類似性関数 es により3定理F2，F4，F6で構成する。

F1．ノルム距離 $\|T\varphi - T\omega_j\|$ に基づく構成

内積、ノルムが各々、$(\cdot,\ \cdot\cdot)$，$\|\cdot\| \equiv\sqrt{(\cdot,\ \cdot)}$ と表される可分なあるヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ 上で、φ，$\psi\in\mathfrak{H}$ について

$$\mathrm{dis}(\varphi,\ \psi) \equiv \|\varphi - \psi\| \in R^+ \ （非負実数全体の集合） \qquad \text{(F1.1)}$$

と定義される2変数関数

$$\mathrm{dis}：\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}\rightarrow R^+ \qquad \text{(F1.2)}$$

は所謂、距離（distance）の公理を満足し、$\mathrm{dis}(\varphi,\ \psi)$ は φ，$\psi\in\mathfrak{H}$ 間のノルム距離といわれるものである。

3角不等式（3角形の1辺の長さは残りの2辺の長さの和より大きくないということの抽象化）

$$\forall\varphi, \forall\eta, \forall\psi\in\mathfrak{H},$$
$$\|\varphi - \psi\| \leqq \|\varphi - \eta\| + \|\eta - \psi\| \qquad \text{(F1.3)}$$

と、同値関係を意味する等式

$$\|\varphi - \psi\| \Leftrightarrow \varphi = \psi \qquad \text{(F1.4)}$$

とに注意し、類似性についての解釈

$$\|\varphi_1 - \psi\| \leqq \|\varphi_2 - \psi\|$$
$$\Leftrightarrow \varphi_1 \text{は}\ \varphi_2 \text{よりも}\ \psi\ \text{に似ている} \qquad \text{(F1.5)}$$

を採用することにしよう。

ノルム距離 $\|T\varphi - T\omega_j\|$ に基づいて、付録Aのaxiom 2を満たす**類似度関数**（similarity-measure function）

$$SM：\Phi\times\Omega\rightarrow\{s\,|\,0\leqq s\leqq 1\} \qquad \text{(F1.6)}$$

を構成しよう。

先ず、次の補助定理F1に注目する。

［補助定理F1］**（soft fuzzy clustering method）**

汎関数（**最小自乗規準**）

$$F(s_j(\varphi),\ j\in J,\ \varphi\in\Phi_B)$$

$$\equiv\sum_{\varphi\in\Phi_B}\sum_{j\in J}s_j(\varphi)^2\cdot\|T\varphi-T\omega_j\|^2 \tag{F1.7}$$

$$\text{on condition that }\forall\varphi\in\Phi_B,\ \sum_{j\in J}s_j(\varphi)=1 \tag{F1.8}$$

を最小にする各非負実数値係数 $s_j(\varphi)$ は、

$$s_j(\varphi)$$

$$=\|T\varphi-T\omega_j\|^{-2}/\sum_{i\in J}\|T\varphi-T\omega_i\|^{-2} \tag{F1.9}$$

と与えられ、Fの最小値 min F は、

$$\min_{s_j(\varphi),\ j\in J}F(s_j(\varphi),\ j\in J,\ \varphi\in\Phi_B)$$

$$=\sum_{\varphi\in\Phi_B}\left[\sum_{i\in J}\|T\varphi-T\omega_i\|^{-2}\right]^{-1} \tag{F1.10}$$

と与えられる。

（証明）　条件つき最大·最小問題に関する**変分学**を適用する。即ち、$\lambda_j(\varphi)(j\in J,\varphi\in\Phi_B)$ をラグランジュの未定乗数として、汎関数

$$G\equiv G(s_j(\varphi),\ j\in J,\ \varphi\in\Phi_B)$$

$$\equiv\sum_{\varphi\in\Phi_B}\sum_{j\in J}s_j(\varphi)^2\cdot\|T\varphi-T\omega_j\|^2$$

$$+\sum_{\varphi\in\Phi_B}\lambda_j(\varphi)\cdot\left[\sum_{j\in J}s_j(\varphi)-1\right] \tag{F1.11}$$

を設け、Gが極値をとるための必要条件

$$\partial G/\partial s_j(\varphi)=0,\ j\in J,\ \varphi\in\Phi_B \tag{F1.12}$$

を変形していけば、式（F1.9）の $s_j(\varphi)$ が得られる。

以下に、この導出を示そう。

$$\forall j\in J,\ \forall\varphi\in\Phi_B,$$

$$0=\partial G/\partial s_j(\varphi)$$

$$=2\cdot s_j(\varphi)\cdot\|T\varphi-T\omega_j\|^2+\lambda_j(\varphi)$$

$$\Rightarrow$$

$$s_j(\varphi)=[-\lambda_j(\varphi)/2]\cdot\|T\varphi-T\omega_j\|^{-2} \tag{F1.13}$$

$$\Rightarrow 1=\sum_{j\in J}s_j(\varphi)=[-\lambda_j(\varphi)/2]\cdot$$

$$\sum_{j\in J}\|T\varphi-T\omega_j\|^{-2}\quad\because\ \text{式 (F1.8)}$$

$$\therefore$$

$$-\lambda_j(\varphi)/2=\left[\sum_{i\in J}\|T\varphi-T\omega_i\|^{-2}\right]^{-1} \tag{F1.14}$$

が得られる。よって、式（F1.14）を式（F1.13）に代入すれば、式（F1.9）が得られる。

最後に、

$$\min_{s_j(\varphi),\ j\in J}F(s_j(\varphi),\ j\in J,\ \varphi\in\Phi_B)$$

$$=\sum_{\varphi\in\Phi_B}\sum_{j\in J}\left[\|T\varphi-T\omega_j\|^{-2}\right.$$

$$\left./\sum_{i\in J}\|T\varphi-T\omega_i\|^{-2}\right]^2\cdot\|T\varphi-T\omega_j\|^2$$

$$\because\ \text{2式 (F1.7), (F1.9)}$$

$$=\sum_{\varphi\in\Phi_B}\left[\sum_{i\in J}\|T\varphi-T\omega_i\|^{-2}\right]^{-1}\cdot\sum_{j\in J}$$

$$\|T\varphi-T\omega_j\|^{-2}/\sum_{i\in J}\|T\varphi-T\omega_i\|^{-2}$$

$$=\sum_{\varphi\in\Phi_B}\left[\sum_{i\in J}\|T\varphi-T\omega_i\|^{-2}\right]^{-1} \tag{F1.15}$$

を得、式（F1.10）が示された。 □

分類というのは、幾つもの属性について測定した沢山の対象があるとき、その対象をグループに割付け、グループにカテゴリ名を与えることである。**クラスター分析**（clustering analysis）というのは、個体間の類似性という観点から多変量データ（多数の個体に対し、多種類の観測について多数の観測値が存在するようなデータ）の構造を解析するための一群の分析手法であり、カテゴリ（1つのグループ）の構造について何も判明していないが、分析に先立って得られるようなものは観察されたデータだけの場合、観察結果に合致するようなカテゴリの構造を発見することである。

上述で簡単に説明された**クラスタリング**（clustering）、**分類操作**（classification）は、人間のあらゆる知覚・判断・行動にとって最も基本的な機能の1つである。

上述の補助定理F1により、$T\varphi$をパターンモデルに持つパターン$\varphi \in \Phi_B$にグループ番号

$$j = \underset{k \in J}{\operatorname{argmax}}\, s_k(\varphi) \in J \tag{F1.16}$$

を持つグループ名を付与可能になる。

次の定理F1は、上述の補助定理F1からhintを得、指数関数 exp により、axiom 2を満たす類似度関数SMを構成したものである。

［定理F1］**（ノルム距離に基づいての、指数関数 exp による類似度関数 SM の構成定理）**

定理F2での非一致条件式（F1.25）を設ける。

正値条件

$$\forall j \in J, a_j > 0 \tag{F1.17}$$

を満たす定数a_jの組を導入して、式（F1.9）を用い、

$$\begin{aligned} &SM(\varphi, \omega_j) \\ &= \exp[a_j \cdot \| T\varphi - T\omega_j \|^{-2}] \\ &/ \sum_{k \in J} \exp[a_k \cdot \| T\varphi - T\omega_k \|^{-2}] \end{aligned} \tag{F1.18}$$

と定義される式（F1.6）の関数SMはaxiom 2を満たす。

（証明）　先ず、

$$s_j(\varphi) \equiv \exp[a_j \cdot \| T\varphi - T\omega_j \|^{-2}],\ j \in J \tag{F1.19}$$

とおけば、式（F1.18）のSMは、

$$SM(\varphi, \omega_j) = s_j(\varphi) / \sum_{k \in J} s_k(\varphi) \tag{F1.20}$$

と表されることに、以下で注意しておく。

axiom 2,（i）（正規直交性）の成立：

$\varphi = \omega_j$のとき

$$\begin{aligned} &SM(\varphi, \omega_j) \\ &= 1/[1 \\ &\quad + \sum_{k \in J-\{j\}} s_k(\varphi)/s_j(\varphi)] \\ &\quad \because \text{ 式（F1.20）} \\ &= 1/[1 + \sum_{k \in J-\{j\}} \text{有限値}/\infty] \\ &\qquad\qquad \because \text{ 式（F1.19）} \\ &= 1/[1+0] = 1 \end{aligned} \tag{F1.21}$$

が示され、また、

$\varphi=\omega_i\,(i\neq j)$ のとき

$$
\begin{aligned}
&SM(\varphi,\ \omega_j)\\
&=s_j(\varphi)\\
&/[s_i(\varphi)+\sum_{k\in J-\{i\}} s_k(\varphi)]\\
&\quad\because\ \text{式 (F1.20)}\\
&=\text{有限値}/\ [\infty+\sum_{k\in J-\{i\}}\text{有限値}]\\
&\qquad\qquad\qquad\because\ \text{式 (F1.19)}\\
&=\text{有限値}/\infty=0
\end{aligned}
\tag{F1.22}
$$

が示された。

axiom 2, (ii)(規格化条件)の成立：

$$\forall\varphi\in\Phi,\ 0<\sum_{k\in J} s_k(\varphi)\leqq+\infty \tag{F1.23}$$

を得、この式 (F1.23) と SM の定義式 (F1.20) より明らかである。

axiom 2, (iii)(T-不変性)の成立：axiom 1, (iii) の後半 $T\cdot T=T$ より

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall j\in J,\ s_j(T\varphi)=s_j(\varphi) \tag{F1.24}$$

を得、この式 (F1.24) から明らかである。 □

次の定理F2は、式 (F1.27) のように2つのパターンモデル $T\varphi$, $T\omega_j$ 間のノルム距離 $\|T\varphi-T\omega_j\|$ の自乗の逆数を規格化した後、更に、3値 +1, 0, −1 の値をとる $s_j(\varphi)$ の指数関数 $es(\varphi, j)$ を規格化すれば、axiom 2を満たす類似度関数 SM が構成できることを示している。

[定理F2] **(ノルム距離に基づいての、3値指数値類似性関数esによる類似度関数SMの構成定理)**

非一致条件

$$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},\ \|T\omega_i-T\omega_j\|>0 \tag{F1.25}$$

を設ける。不等式

$$\forall j\in J,\ 0\leqq e_{j0}<e_{j1}\leqq 1 \tag{F1.26}$$

を満たす閾値 e_{j0}, e_{j1} の系 $(j\in J)$ を導入する。その後、式 (F1.9) を用い、

$$
\begin{aligned}
&q_j(\varphi)=\|T\varphi-T\omega_j\|^{-2}\\
&/\sum_{k\in J}\|T\varphi-T\omega_k\|^{-2}
\end{aligned}
\tag{F1.27}
$$

と定義される非負量を3値離散化して、実数値関数

$$
\begin{aligned}
&s_j(\varphi)=\\
&\begin{cases}
+1 & \text{if } e_{j1}\leqq q_j(\varphi)\leqq 1\\
\ \ 0 & \text{if } e_{j0}<q_j(\varphi)<e_{j1}\\
-1 & \text{if } 0\leqq q_j(\varphi)\leqq e_{j0}
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{F1.28}
$$

を導入する。ここで、正値条件式 (F1.17) を満たす定数 a_j の組を導入して、

$$es(\varphi,\ j)=\exp[a_j\cdot\{|1-s_j(\varphi)|^{-2}-1\}] \tag{F1.29}$$

と定義される正の量を規格化した形式で、

$$
\begin{aligned}
&SM(\varphi,\ \omega_j)\\
&=es(\varphi, j)/\sum_{k\in J} es(\varphi, k)
\end{aligned}
\tag{F1.30}
$$

と定義される式 (F1.6) の関数 SM はaxiom 2を満たす。

(証明)　定理F1の証明とほぼ同様であるが、念のため、以下で、証明しておこう。

先ず、式 (F1.29) の $es(\varphi, j)$ について、

① $\varphi=\omega_j$ のとき、

$q_j(\varphi)=1 \quad \therefore \quad s_j(\varphi)=+1$

$$\therefore \quad es(\varphi, j)=+\infty \tag{F1.31}$$

②$\varphi=\omega_i (i \neq j)$ のとき、

$\therefore \quad q_j(\varphi)=0 \quad \therefore \quad s_j(\varphi)=-1$

$$0<es(\varphi, j)=\exp[-a_j \cdot 3/4]<\infty \tag{F1.32}$$

であることに注意する。よって、

③$\varphi=\omega_j$のとき

$$\begin{aligned} &SM(\varphi, \omega_j) \\ &=1/[1+\sum_{k\in J-\{j\}} es(\varphi, k)/es(\varphi, j)] \\ &\qquad \because \text{ 式 (F1.30)} \\ &=1/[1+\sum_{k\in J-\{j\}} \text{有限値}/\infty] \\ &\qquad\qquad \because \text{ 2式 (F1.31), (F1.32)} \\ &=1/[1+0]=1 \end{aligned} \tag{F1.33}$$

④$\varphi=\omega_i (i \neq j)$ のとき

$$\begin{aligned} &SM(\varphi, \omega_j) \\ &=es(\varphi, \omega_j) \\ &/[es(\varphi, \omega_i)+\sum_{k\in J-\{i\}} es(\varphi, k)] \\ &\qquad \because \text{ 式 (F1.30)} \\ &=\text{有限値}/[\infty+\sum_{k\in J-\{j\}} \text{有限値}] \\ &\qquad\qquad \because \text{ 2式 (F1.31), (F1.32)} \\ &=\text{有限値}/\infty=0 \end{aligned} \tag{F1.34}$$

を得、証明が終わる。

axiom 2,（ii）（規格化条件）の成立：

$$\forall \varphi \in \Phi, 0<\sum_{k\in J} es(\varphi, k) \leqq +\infty \tag{F1.35}$$

であるから、SM の定義式（F1.30）より明らかである。

axiom 2,（iii）（T-不変性）の成立：　axiom 1,（iii）の後半 $T \cdot T=T$ より

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, q_j(T\varphi)=q_j(\varphi) \tag{F1.36}$$

$$\therefore \quad s_j(T\varphi)=s_j(\varphi) \tag{F1.37}$$

$$\therefore \quad es(T\varphi, j)=es(\varphi, j) \tag{F1.38}$$

$$\therefore \quad SM(T\varphi, \omega_j)=SM(\varphi, \omega_j) \tag{F1.39}$$

を得、示された。 □

上述の定理F2においては、

$$0 \leqq q_j(\varphi) \leqq e_{j0} \tag{F1.40}$$

$$\Rightarrow SM(\varphi, \omega_j) \fallingdotseq 0 \tag{F1.41}$$

であることが次のようにしてわかる。

式（F1.29）の $es(\varphi, j)$ は、

$$es(\varphi, j)= \begin{cases} +\infty & \text{if } s_j(\varphi)=+1 \\ 1 & \text{if } s_j(\varphi)=0 \\ \exp[-a_j \cdot 3/4] & \text{if } s_j(\varphi)=-1 \end{cases} \tag{F1.42}$$

であり、ここで、

$$a_j = 20/3 \tag{F1.43}$$

ととれば、

$$\exp[-a_j \cdot 3/4] = \exp[-5] < 0,01 \tag{F1.44}$$

であり、

式（F1.40）の成立$\Rightarrow s_j(\varphi) = -1$　∵ 式（F1.28）

$$\Rightarrow es(\varphi, j) \fallingdotseq 0 \tag{F1.45}$$

$$\therefore \quad SM(\varphi, \omega_j) \fallingdotseq 0 \tag{F1.46}$$

であることに注意しておく。

F2. 規格化内積 $(T\varphi, T\omega_j)$ / $[\|T\varphi\| \cdot \|T\omega_j\|]$ に基づく構成

ノルムが規格化された$\mathfrak{H}$の元 $\varphi \cdot \|\varphi\|^{-1}$ について、

$$\varphi \cdot \|\varphi\|^{-1} = 0 \text{ if } \|\varphi\| = 0 \tag{F2.1}$$

と約束する。

$\varphi \cdot \|\varphi\|^{-1} \in \mathfrak{H}$ の $\eta(\neq 0)$, $\psi \in \mathfrak{H}$ への直交分解

$$\varphi \cdot \|\varphi\|^{-1} = a \cdot \eta \cdot \|\eta\|^{-1} + \psi \wedge (\eta, \psi) = 0 \tag{F2.2}$$

における複素係数 a は、φ, $\eta \in \mathfrak{H}$ 間の**規格化内積**

$$a = (\varphi\|\varphi\|^{-1}, \eta\|\eta\|^{-1}) \tag{F2.3}$$

である。複素係数 a は、$\varphi \cdot \|\varphi\|^{-1} \in \mathfrak{H}$ の、$\eta \cdot \|\eta\|^{-1}$ への射影の大きさ（**射影係数**）を表している。**量子力学における確率論的物理解釈**によれば、$|a|^2$ は $\varphi \cdot \|\varphi\|^{-1}$ が部分的に $\eta \cdot \|\eta\|^{-1}$ の状態にあることの非規格化確率（$\eta \cdot \|\eta\|^{-1}$ が $\varphi \cdot \|\varphi\|^{-1}$ に含まれる非規格化確率）である。

Schwarzの不等式より成り立つ不等式

$$\forall\varphi, \forall\eta \in \mathfrak{H}\; 0 \leqq |(\varphi\|\varphi\|^{-1}, \eta\|\eta\|^{-1})| \leqq 1 \tag{F2.4}$$

と、規格化内積の絶対値が最大値 1 と同値な条件式

$$|(\varphi\|\varphi\|^{-1}, \eta\|\eta\|^{-1})| = 1 \tag{F2.5}$$

$$\Leftrightarrow \exists c(\neq 0) \in Z \text{（複素数全体の集合）}, \; \varphi = c \cdot \eta(\neq 0) \tag{F2.6}$$

とに注意し、解釈

$$|(\varphi_1\|\varphi_1\|^{-1}, \eta\|\eta\|^{-1})|^2 \tag{F2.7}$$

$$\geqq |(\varphi_2\|\varphi_2\|^{-1}, \eta\|\eta\|^{-1})|^2$$

$$\Leftrightarrow \varphi_1 \text{ は } \varphi_2 \text{ よりも } \eta \text{ に似ている} \tag{F2.8}$$

を採用することにしよう。

$$\mathrm{diff}(\varphi, \eta) \equiv 1 - |(\varphi\|\varphi\|^{-1}, \eta\|\eta\|^{-1})|^2 \tag{F2.9}$$

と定義される2変数関数

$$\mathrm{diff}: \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \to R^+ \tag{F2.10}$$

は所謂、φ, $\eta \in \mathfrak{H}$ 間の**相違**（difference）の程度を表しており、$1 - \mathrm{diff}(\varphi, \eta)$ は φ, $\eta \in \mathfrak{H}$ 間の相関強度（自乗相関）といわれるものである。

パターンモデル $T\varphi$ の、$T\omega_j$ への相関の程度（$T\varphi$ 内に、$T\omega_j$ が含まれている程度）を表す規格化内積

$$(T\varphi, T\omega_j) / [\|T\varphi\| \cdot \|T\omega_j\|] \tag{F2.11}$$

に基づいて、式（F1.6）の類似度関数SMを構成しよう。

尚、ノルム距離と規格化内積の間に、等式

$$\begin{aligned}&\|T\varphi\|>0\wedge\|T\omega_j\|>0\Rightarrow\\&\|\,\|T\varphi\|^{-1}\cdot T\varphi-\|T\omega_j\|^{-1}\cdot T\omega_j\,\|\\&=2-(T\varphi,T\omega_j)/[\,\|T\varphi\|\cdot\|T\omega_j\|\,]\\&\quad-(T\omega_j,T\varphi)/[\,\|T\omega_j\|\cdot\|T\varphi\|\,]\end{aligned}\tag{F2.12}$$

が成立していることに注意しておく。

2つのパターンモデル $T\varphi, T\omega_j$ 間の規格化内積（normalized inner product）

$$\mathrm{NIP}\,(T\varphi,T\omega_j)\equiv\begin{cases}(\|T\varphi\|^{-1}\cdot T\varphi,\ \|T\omega_j\|^{-1}\cdot T\omega_j)\\ \quad\text{if }\|T\varphi\|>0\wedge\|T\omega_j\|>0\\ 0\ \text{if }\|T\varphi\|=0\vee\|T\omega_j\|=0\end{cases}\tag{F2.13}$$

を定義しておくと、次の定理F3は、規格化内積 $\mathrm{NIP}\,(T\varphi,T\omega_j)$ を変数とする指数関数expにより、axiom 2を満たす類似度関数SMを構成したものである。

［定理F3］**（規格化内積に基づいての、指数関数expによる類似度関数SMの構成定理）**

定理F2での非一致条件式（F1.25）を設ける。

正値条件式（F1.17）を満たす定数 a_j の組を導入して、式（F2.13）を用い、

$$\begin{aligned}&\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j)\\&=\exp[a_j\cdot\{1-|\mathrm{NIP}(T\varphi,\ T\omega_j)|^2\}^{-1}]\\&/\sum_{k\in J}\exp[a_k\cdot\{1-|\mathrm{NIP}(T\varphi,T\omega_j)|^2\}^{-1}]\end{aligned}\tag{F2.14}$$

と定義される式（F1.6）の関数SMはaxiom 2を満たす。

（証明）　定理F1の証明法とほぼ、同様である。　□

次の定理F4は、定理F2と同様に、式（F2.13）の規格化内積 $\mathrm{NIP}\,(T\varphi,T\omega_j)$ を用いて、3値 $+1$, 0, -1 の値をとる $s_j(\varphi)$ の指数関数 $es(\varphi,j)$ の規格化によって、axiom 2を満たす類似度関数SMが構成できることを示している。

［定理F4］**（規格化内積に基づいての、3値指数値類似性関数esによる類似度関数SMの構成定理）**

定理F2での非一致条件式（F1.25）を設ける。

不等式

$$\forall j\in J,\ -1\leqq e_j^-<0\leqq e_j^+\leqq+1\tag{F2.15}$$

を満たす閾値 e_j^-, e_j^+ の系 $(j\in J)$ を導入する。

その後、式（F2.13）の規格化内積 $\mathrm{NIP}\,(T\varphi,T\omega_j)$ を実数値の場合3値離散化して、実数値関数

$$s_j(\varphi)=\begin{cases}+1\ \text{if }e_j^+<\mathrm{NIP}(T\varphi,T\omega_j)\leqq+1\\ \ \ 0\ \text{if }e_j^-\leqq\mathrm{NIP}(T\varphi,\ T\omega_j)\leqq e_j^+\\ -1\ \text{if }-1\leqq\mathrm{NIP}(T\varphi,T\omega_j)<e_j^-\end{cases}\tag{F2.16}$$

へ変換する。ここで、ここで、最大値への非一致条件

$$\begin{aligned}&\forall j\in J,\forall i\in J-\{j\},\ \mathrm{NIP}(T\omega_i,T\omega_j)\leqq e_j^+\\&\therefore\ s_j(\omega_i)\neq1\end{aligned}\tag{F2.17}$$

の下で、正値条件式（F1.17）を満たす定数 a_j の組を導入して、式（F1.29）の $es(\varphi,j)$ と定義される正の量を規格化した形式で、式（F1.30）の如く定義される式（F1.6）の関数SMはaxiom 2を満

たす。

（証明）　定理F1の証明とほぼ同様である。 □

F3.1　次従属係数 $d_j(\varphi)$ に基づく構成

1次独立な $\psi_k \in \mathfrak{H}$ の元からなる系

$$\psi_k, k \in K \tag{F3.1}$$

を導入する。$\varphi \in \mathfrak{H}$ の各 $\psi_k (k \in K)$ による1次結合式

$$\exists \eta \in \mathfrak{H},$$
$$\varphi = \sum_{k \in K} a_k \cdot \psi_k + \eta \tag{F3.2}$$
$$\wedge [\forall k \in K, (\psi_k, \eta) = 0] \tag{F3.3}$$

は、

$$\exists \eta \in \mathfrak{H},$$
$$\varphi = \psi + \eta \wedge (\psi, \eta) = 0 \tag{F3.4}$$
$$\text{where}$$
$$\psi \equiv \sum_{k \in K} a_k \cdot \psi_k \tag{F3.5}$$

とかける。ピタゴラスの定理（3平方の定理）

$$\|\varphi\|^2 = \|\psi\|^2 + \|\eta\|^2 \tag{F3.6}$$

が成立しているから、

$$\|\varphi\| > 0 \tag{F3.7}$$
$$\Rightarrow \|\varphi - \psi\|^2 / \|\varphi\|^2 \tag{F3.8}$$
$$= \|\eta\|^2 / \|\varphi\|^2 \tag{F3.9}$$
$$= [\|\varphi\|^2 - \|\psi\|^2] / \|\varphi\|^2$$
$$= 1 - \|\psi\|^2 / \|\varphi\|^2 \tag{F3.10}$$

は、**φ が ψ を含んでいない程度**を表している。

この非包含程度 $\|\eta\|^2 / \|\varphi\|^2$ を最小にするように、各1次結合係数 a_k を求めよう。それには、最小自乗法を適用すれば、連立1次方程式

$$\sum_{\ell \in K} a_\ell(\varphi) \cdot (\psi_\ell, \psi_k) = (\varphi, \psi_k), \quad k \in K \tag{F3.11}$$

を解けばよいことがわかる。ここに、求められる各係数 a_k を $a_k(\varphi)$ と表現していることに注意する。

3つの K, φ, ψ_k の代りに各々、$J, T\varphi, T\omega_k$ 採用すれば、連立1次方程式（F3.11）は

$$\sum_{k \in K} d_k(\varphi) \cdot (T\omega_k, T\omega_j) = (T\varphi, T\omega_j), \quad j \in J \tag{F3.12}$$

と書き換えられ、また、2式（F3.2），（F3.3）は

$\varphi \in \mathfrak{H}$ の各 $T\omega_j (j \in J)$ による1次結合式

$$\exists (T\varphi)_\perp \in \mathfrak{H},$$
$$T\varphi = \sum_{j \in J} d_j(\varphi) \cdot T\omega_j + (T\varphi)_\perp \tag{F3.13}$$
$$\wedge [\forall j \in J, (T\omega_j, (T\varphi)_\perp) = 0] \tag{F3.14}$$

と書き換えられる。ここで、剰余項と称されるヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の元（$(T\varphi)_\perp$）は各パターンモデル $T\omega_j$ に直交していること、並びに、各パターンモデル間に、直交性

$$(T\omega_i, T\omega_j) = 0 \text{ if } i \neq j \tag{F3.15}$$

が成立すれば、パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ の第 $j \in J$ 番目のパターンモデル $T\omega_j$ への1次従属の程度を表

し、第$j \in J$番目の**1次従属係数**と呼ばれる各係数$d_j(\varphi)$は、連立1次方程式（F3.12）を解いて、

$$d_j(\varphi)=(T\varphi,\ T\omega_j)/(T\omega_j, T\omega_j),\quad j \in J \tag{F3.16}$$

と決定されることに注意しておこう。

次の補助定理F2が証明される。

［補助定理F2］**（各1次従属係数 $d_j(\varphi)$ の T-不変性・正規直交性）**

①（T-不変性）$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall j \in J,\ d_j(T\varphi)=d_j(\varphi).$

②（零剰余項）$\forall i \in J,\ \varphi=\omega_i \Rightarrow (T\varphi)_{\perp}=0.$

③（正規直交性）$d_j(\omega_i)=$

$$\begin{cases} 1 \text{ if}, i=j \\ 0 \text{ if } i \neq j. \end{cases}$$

（証明）　①は、連立1次方程式（F3.12）において、axiom 1,（iii）の後半$T \cdot T=T$を考慮すれば明らかであるし、また、②, ③は1次結合式（F3.13),（F3.14）において、$\varphi=\omega_i$とおけば、明らかである。 □

次の定理F5は、1次従属係数$d_j(\varphi)$を変数とする指数関数expにより、axiom 2を満たす類似度関数SMを構成したものである。

［定理F5］**（1次従属係数に基づいての、指数関数 exp による類似度関数 SM の構成定理）**

定理F2での非一致条件式（F1.25）を設ける。

正値条件式（F1.17）を満たす定数a_jの組を導入して、連立1次方程式（F3.12）の解$d_j(\varphi)$の組を用い、

$$\begin{aligned} &SM(\varphi,\ \omega_j) \\ &=\exp[a_j \cdot \{1-|d_j(\varphi)|^2/\sum_{k \in J}|d_k(\varphi)|^2\}^{-1}] \\ &/\sum_{k \in J}\exp[a_k \cdot \{1- \\ &\qquad |d_j(\varphi)|^2/\sum_{\ell \in J}|d_\ell(\varphi)|^2\}^{-1}] \end{aligned} \tag{F3.17}$$

と定義される式（F1.6）の関数SMはaxiom 2を満たす。

（証明）　定理F1の証明法とほぼ、同様である。 □

次の定理F6は、定理F2と同様に、連立1次方程式（F3.12）の解$d_j(\varphi)$の組 を用いて、3値 +1, 0, −1 の値をとる$s_j(\varphi)$の指数関数$es(\varphi, j)$の規格化によって、axiom 2を満たす類似度関数SMが構成できることを示している。

［定理F6］**（1次従属係数に基づいての、3値指数値類似性関数 es による類似度関数 SM の構成定理）**

定理F2での非一致条件式（F1.25）を設ける。

不等式（F1.26）を満たす閾値e_{j0}, e_{j1}の系（$j \in J$）を導入する。その後、連立1次方程式（F3.12）の解$d_j(\varphi)$の組 を用い、

$$q_j(\varphi)=|d_j(\varphi)|^2/\sum_{k \in J}|d_k(\varphi)|^2 \tag{F3.18}$$

と定義される非負量を3値離散化して、式（F1.28）の如く定義される実数値関数$s_j(\varphi)$を導入する。ここで、正値条件式（F1.17）を満たす定数a_jの組を導入して、式（F1.29）の如く定義される正の量$es(\varphi, j)$を規格化した形式で、式（F1.30）の如く定義される式（F1.6）の関数SMはaxiom 2を満たす。

（証明）　定理F1の証明とほぼ同様である。 □

付録G. 大分類関数 BSC の構成諸例

本付録Gでは、2定理G1, G2において、**線形識別関数**として、axiom 3を満たす大分類関数 BSC を構成する。更に、4定理G3～G6において、axiom 3を満たす有限個の大分類関数 BSC_k $(1 \leqq k \leqq n)$ を各出力の関数をとる形式で統合して、今1つのaxiom 3を満たす大分類関数 BSC を構成する4つの手法を指摘する。

G1. パターン $\varphi \in \Phi$ が各々、Φ_j^+, Φ_j^- に似ている程大きい値を取る $G_j^+(\varphi)$, $G_j^-(\varphi)$ による大分類関数 BSC の構成

特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \to \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \tag{G1.1}$$

を導入する。u は、$u(\varphi, \ell)$ を、

$$u(\varphi, \ell) : \text{パターン}\ \varphi \in \Phi\ \text{から抽出される第}\ \ell \in L\ \text{番目の特徴量} \tag{G1.2}$$

と解釈できる写像である。

例えば、平坦パワー性

$$\forall \ell \in L,\ \| \psi_\ell \|^2 = C(\ell \in L\ \text{に無関係な正実定数}) > 0 \tag{G1.3}$$

を満たす直交系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ を用意し、

$$u(\varphi, \ell) \equiv \begin{cases} [\,|(\varphi, \psi_\ell)|^2 / \sum_{k \in L} |(\varphi, \psi_k)|^2]^{1/2} \\ \qquad \cdots \exists k \in L, (\varphi, \psi_k) \neq 0\ \text{のとき} \\ 0 \qquad \cdots \forall k \in L, (\varphi, \psi_k) = 0\ \text{のとき} \end{cases} \tag{G1.4}$$

と採用しておけばよい。このとき、

$$T\varphi = \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell) \cdot \psi_\ell$$

と定義される"axiom 1を満たすモデル構成作用素"

$$T : \Phi \to \Phi \tag{G1.5}$$

を導入できる（[B3] の付録H, [B12]）。

条件

$$\forall j \in J, [\omega_j \in \Phi_j^+ \subset \Phi \subset \mathfrak{H}] \wedge \tag{G1.6}$$

$$[\forall i \in J - \{j\},\ \omega_i \in \Phi_j^- \subset \Phi \subset \mathfrak{H}] \tag{G1.7}$$

を満たすように、パターンの2つの有限集合 Φ_j^+, Φ_j^- を選定する。Φ_j^+ は、第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属すると判明している事例パターン ψ の有限集合であり、また、Φ_j^- は、第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ 以外のカテゴリ $\mathfrak{C}_i$ $(i \in J - \{j\})$ に帰属すると判明している事例パターン ψ の有限集合である。

ここで、実数値 w_ℓ から成る組 $\underline{w} \equiv \{w_\ell \mid \ell \in L\}$ を用意すると、2つのパターン $\varphi, \eta \in \Phi$ 間の**特徴間の距離**（distance between two features of two patterns φ and η）

$$\mathrm{Fdis}(T\varphi, T\eta) \equiv [\sum_{\ell \in L} w_\ell \cdot |u(\varphi, \ell) - u(\eta, \ell)|^2]^{1/2} \tag{G1.8}$$

を定義できることに注意し、2つのパターンモデル $T\varphi$, $T\eta$ 間の**類似性度合い**を

$$g(\varphi, \eta)$$
$$\equiv \sum_{\ell \in L} w_\ell - \mathrm{Fdis}(T\varphi, T\eta)^2$$
$$= \sum_{\ell \in L} w_\ell \cdot [1 - |u(T\varphi, \ell) - u(T\eta, \ell)|^2] \qquad (G1.9)$$

と定義してみよう。その後、2つの量

$$G_j^+(\varphi) \equiv \sum_{\eta \in \Phi_j^+} g(\varphi, \eta) \qquad (G1.10)$$
$$G_j^-(\varphi) \equiv \sum_{\eta \in \Phi_j^-} g(\varphi, \eta) \qquad (G1.11)$$

を用意する。$G_j^+(\varphi)$, $G_j^-(\varphi)$ は、パターン $\varphi \in \Phi$ が各々、Φ_j^+, Φ_j^- に似ている程大きい値を取る。

3つの実パラメータ a_j, b_j, c_j を使って、

$$Q_j(\varphi) \equiv a_j \cdot G_j^+(\varphi) - b_j \cdot G_j^-(\varphi) + c_j \qquad (G1.12)$$

と定義される量を考えよう。

(イ) $\varphi \in \Phi_j^+$ のとき、$Q_j(\varphi) > 0$ (G1.13)

(ロ) $\varphi \in \Phi_j^-$ のとき、$Q_j(\varphi) < 0$ (G1.14)

を満たすように決める。$3 \cdot |J|$ 個の未知パラメータ a_j, b_j, c_j を、2式 (G1.13), (G1.14) で示される $|\Phi_j^+| + |\Phi_j^-|$ 個の不等式を満たすように決定する訳であるから、

$$3 \cdot |J| \leqq |\Phi_j^+| + |\Phi_j^-| \qquad (G1.15)$$

であれば、可能であるが、次の2事実 (ハ), (ニ) を満たすように、Φ_j^+, Φ_j^- を選定しておけば、容易に可能であることが理解できるであろう：

(ハ) $\varphi \in \Phi_j^+$ のとき、$G_j^+(\varphi)$, $G_j^-(\varphi)$ は各々、大なる正の量、小なる正の量である。

(ニ) $\varphi \in \Phi_j^-$ のとき、$G_j^+(\varphi)$, $G_j^-(\varphi)$ は各々、小なる正の量、大なる正の量である。

□

以上の設定により、次の定理G1が成り立ち、大分類関数 BSC の1つが設計されたことになる。

1実変数 u の2値関数

$$\mathrm{psn}(u) \equiv 1 \text{ if } u \geqq 0, \equiv 0 \text{ if } u < 0 \qquad (G1.16)$$

を導入しておく。

[定理G1] **(大分類関数 BSC の構成定理)**

$$\mathrm{BSC}(\varphi, j)$$
$$\equiv \mathrm{psn}(Q_j(\varphi)) \qquad (G1.17)$$

と定義される**2値関数**

$$\mathrm{BSC}: \Phi \times J \to \{0, 1\} \qquad (G1.18)$$

は、axiom 3 を満たし、**大分類関数**である。然も、**カテゴリ間の相互排除性**

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \mathrm{BSC}(\omega_i, j) = 0 \qquad (G1.19)$$

も成立している。

(証明)　axiom 3の (ii) (写像 T の下での**不変性**；invariance under mapping T)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \mathrm{BSC}(T\varphi, j) = \mathrm{BSC}(\varphi, j) \qquad (G1.20)$$

の成立は、axiom 1の (iii) $TT = T$ から成り立つ

$$\forall \varphi, \forall \eta \in \Phi, g(T\varphi, T\eta) = g(\varphi, \eta) \qquad (G1,21)$$
$$\therefore \quad G_j^+(T\varphi) = G_j^+(\varphi), \ G_j^-(T\varphi) = G_j^-(\varphi) \qquad (G1.22)$$

から、明らかである。

axiom 3の（i）**（カテゴリ抽出能力）**

$$\forall j \in J, \mathrm{BSC}(\omega_j, j) = 1 \tag{G1.23}$$

の成立は、式（G1.6）の$\omega_j \in \Phi_j^+$から、不等式（G1.13）の特別な場合

$$\forall j \in J, Q_j(\omega_j) > 0 \tag{G1.24}$$

の成立から、明らかである。

式（G1.19）の成立は、式（1.7）の$\omega_i \in \Phi_j^-$から、不等式（G1.14）の特別な場合

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\},\ Q_j(\omega_i) < 0 \tag{G1.25}$$

の成立から、明らかである。 □

次の定理G2が成り立ち、得られている式（G1.17）の大分類関数 BSC は**線形識別関数**（linear discriminant function）であることがわかる。

［定理G2］**（大分類関数 BSC の線形識別関数性）**

$$\begin{aligned} & y_{\ell j} \\ & \equiv a_j \cdot \sum_{\eta \in \Phi_j^+} - b_j \cdot \sum_{\eta \in \Phi_j^-} \\ & = a_j \cdot |\Phi_j^+| - b_j \cdot |\Phi_j^-| \end{aligned} \tag{G1.26}$$

$$\begin{aligned} d_j \equiv & - a_j \cdot \sum_{\eta \in \Phi_j^+} \mathrm{Fdis}(T\varphi, T\eta)^2 \\ & + b_j \cdot \sum_{\eta \in \Phi_j^-} \mathrm{Fdis}(T\varphi, T\eta)^2 + c_j \end{aligned} \tag{G1.27}$$

とおくと、表現

$$\mathrm{BSC}(\varphi, j) = \mathrm{psn}\left(\sum_{\ell \in L} w_\ell \cdot y_{\ell j} + d_j\right) \tag{G1.26}$$

を得て、式（G1.17）の大分類関数 BSC は**2値線形識別関数**である。

（証明）　式（G1.12）の$Q_j(\varphi)$を変形していくと、

$$\begin{aligned} & Q_j(\varphi) \\ & = a_j \cdot G_j^+(\varphi) - b_j \cdot G_j^-(\varphi) + c_j \\ & = a_j \cdot \sum_{\eta \in \Phi_j^+} g(\varphi, \eta) - b_j \cdot \sum_{\eta \in \Phi_j^-} g(\varphi, \eta) \\ & \quad + c_j \qquad \because\ \text{2式（G1.10），（G1.11）} \\ & = a_j \cdot \sum_{\eta \in \Phi_j^+} \left[\sum_{\ell \in L} w_\ell - \mathrm{Fdis}(T\varphi, T\eta)^2\right] \\ & \quad - b_j \cdot \sum_{\eta \in \Phi_j^-} \left[\sum_{\ell \in L} w_\ell - \right. \\ & \quad \left. \mathrm{Fdis}(T\varphi, T\eta)^2\right] + c_j \\ & \qquad\qquad \because\ \text{式（G1.9）} \\ & = \sum_{\ell \in L} w_\ell \cdot \left[a_j \cdot \sum_{\eta \in \Phi_j^+} - b_j \cdot \sum_{\eta \in \Phi_j^-}\right] \\ & \qquad\qquad + \left[- a_j \cdot \sum_{\eta \in \Phi_j^+} \mathrm{Fdis}(T\varphi, T\eta)^2\right. \\ & \quad \left. + b_j \cdot \sum_{\eta \in \Phi_j^-} \mathrm{Fdis}(T\varphi, T\eta)^2 + c_j\right] \\ & = \sum_{\ell \in L} w_\ell \cdot y_{\ell j} + d_j \\ & \qquad\qquad \because\ \text{式（G1.26），（G1.27）} \end{aligned}$$

を得、証明が終わった。 □

以上の2定理G1, G2による大分類関数 BSC の構成法は、文献［A31］の、ユークリッド空間でのニューラルネット研究から事実上hintを得ている。

G2. min, max演算による大分類関数の構成

次の定理G3は、axiom 3を満たす有限個の大分類関数 $BSC_k\ (1 \leqq k \leqq n)$ を各出力の最小値をとる形式で統合して、今1つのaxiom 3を満たす大分類関数BSC を構成する1つの手法を指摘したものである。

［定理G3］**（大分類関数のmin- 再帰的構成定理）**

各関数 $BSC_k\ (1 \leqq k \leqq n)$ がaxiom 3を満たすならば、

$$BSC(\varphi, j) \equiv \min_{1 \leqq k \leqq n} BSC_k(\varphi, j)$$

と定義される関数

$$BSC : \Phi \times J \to \{0, 1\}$$

はaxiom 3を満たす。更に、n 個の関数 $BSC_k\ (1 \leqq k \leqq n)$ の内、少なくとも1つの BSC_q がカテゴリ間の相互排除性

$$\exists q \in \{1, 2, \cdots, n\},\ \forall j \in J,\ \forall i \in J - \{j\},$$
$$BSC_q(\omega_i, j) = 0 \qquad \text{(G2.1)}$$

を満たせば、BSC が式（G1.19）のカテゴリ間の相互排除性を満たす。

（証明）　先ず、axiom 3の（ i ），（ii）の成立を示す。

axiom 3の（ i ）の成立：

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\},\ \forall j \in J, BSC_k(\omega_j, j) = 1$$

であれば、

$$\forall j \in J, BSC(\omega_j, j) = \min_{1 \leqq k \leqq n} BSC_k(\omega_j, j)$$
$$= 1.$$

axiom 3の（ii）の成立：

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, BSC(T\varphi, j)$$
$$\equiv \min_{1 \leqq k \leqq n} BSC_k(T\varphi, j)$$
$$= \min_{1 \leqq k \leqq n} BSC_k(\varphi, j) \quad \because \ \text{axiom 3の（ii）}$$
$$= BSC(\varphi, j).$$

次に、式（G2.1）が成立していれば、カテゴリ間の相互排除性

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, BSC(\omega_i, j)$$
$$= \min_{1 \leqq k \leqq n} BSC_k(\omega_i, j)$$
$$= \min\{\min_{1 \leqq k \leqq n, k \neq q} BSC_k(\omega_i, j),\ BSC_q(\omega_i, j)\}$$
$$= \min\{\min_{1 \leqq k \leqq n, k \neq q} BSC_k(\omega_i, j),\ 0\}$$
$$= 0$$

を得て、証明が終わった。□

次の定理G4は、axiom 3を満たす有限個の大分類関数 $BSC_k\ (1 \leqq k \leqq n)$ を各出力の最大値をとる形式で統合して、今1つのaxiom 3を満たす大分類関数 BSC を構成する1つの手法を指摘したものである。

［定理G4］**（大分類関数のmax-再帰的構成定理）**

各関数 $BSC_k\ (1 \leqq k \leqq n)$ がaxiom 3を満たすならば、

$$BSC(\varphi, j) \equiv \max_{1 \leqq k \leqq n} BSC_k(\varphi, j)$$

と定義される関数

$\mathrm{BSC}: \Phi \times J \to \{0, 1\}$
はaxiom 3を満たす。更に、n 個の関数 $\mathrm{BSC}_k (1 \leqq k \leqq n)$ がすべて、カテゴリ間の相互排除性

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\},\ \forall j \in J, \forall i \in J - \{j\},\quad \mathrm{BSC}_k(\omega_i, j) = 0 \tag{G2.2}$$

を満たせば、BSC が式（G1.19）のカテゴリ間の相互排除性を満たす。

（証明）　先ず、axiom 3の（ i ），（ii）の成立を示す。

axiom 3の（ i ）の成立：

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\},\ \forall j \in J, \mathrm{BSC}_k(\omega_j, j) = 1$$

であれば、

$$\forall j \in J, \mathrm{BSC}(\omega_j, j) = \max_{1 \leqq k \leqq n} \mathrm{BSC}_k(\omega_j, j)$$
$$= 1.$$

axiom 3の（ii）の成立：

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \mathrm{BSC}(T\varphi, j)$$
$$\equiv \max_{1 \leqq k \leqq n} \mathrm{BSC}_k(T\varphi, j)$$
$$= \max_{1 \leqq k \leqq n} \mathrm{BSC}_k(\varphi, j) \qquad \because \text{ axiom 3の（ii）}$$
$$= \mathrm{BSC}(\varphi, j)\ .$$

次に、式（G2.2）が成立していれば、カテゴリ間の相互排除性

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \mathrm{BSC}(\omega_i, j)$$
$$= \max_{1 \leqq k \leqq n} \mathrm{BSC}_k(\omega_i, j)$$
$$= 0$$

を得て、証明が終わった。　□

次の定理G5は、axiom 3を満たす有限個の大分類関数 $\mathrm{BSC}_k (1 \leqq k \leqq n)$ を各出力の凸結合の正値をとる形式で統合して、今1つのaxiom 3を満たす大分類関数 BSC を構成する1つの手法を指摘したものである。

［定理G5］**（大分類関数 BSC の凸構成定理）**

各関数 $\mathrm{BSC}_k (1 \leqq k \leqq n)$ が axiom 3 を満たすならば、確率条件式

$$[\forall k \in [1, 2, \cdots, n], 0 < w_k \leqq 1] \wedge \sum_{k=1}^{n} w_k = 1$$

を満たす重み w_k の組 $\{w_k\}_{1 \leqq k \leqq n}$ を用意し、

$$\mathrm{BSC}(\varphi, j)$$
$$\equiv \mathrm{psn}^+\left(\sum_{k=1}^{n} w_k \cdot \mathrm{BSC}_k(\varphi, j)\right)$$

と定義される関数 BSC は axiom 3 を満たす。ここに、2値関数 $\mathrm{psn}^+(u)$ は、

$$\mathrm{psn}^+(u) \equiv \begin{cases} 0 \text{ if } u \leqq 0 \\ 1 \text{ if } u > 0 \end{cases}$$

と定義されている。

更に、n 個の関数 $\mathrm{BSC}_k (1 \leqq k \leqq n)$ がすべて、カテゴリ間の相互排除性

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\},\ \forall j \in J, \forall i \in J - \{j\},\quad \mathrm{BSC}_k(\omega_i, j) = 0 \tag{G2.3}$$

を満たせば、BSC が式（G1.19）のカテゴリ間の相互排除性を満たす。

（証明）　先ず、axiom 3の（i），（ii）の成立を示す。

axiom 3の（i）の成立：

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\},\ \forall j \in J, BSC_k(\omega_j, j) = 1$$

であれば、

$$\forall j \in J, BSC(\omega_j, j)$$
$$= psn^+(\sum_{k=1}^{n} w_k \cdot BSC_k(\omega_j, j))$$
$$= psn^+(\sum_{k=1}^{n} w_k)$$
$$= psn^+(1) = 1.$$

axiom 3の（ii）の成立：

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, BSC(T\varphi, j)$$
$$\equiv psn^+(\sum_{k=1}^{n} w_k \cdot BSC_k(T\varphi, j))$$
$$= psn^+(\sum_{k=1}^{n} w_k \cdot BSC_k(\varphi, j))$$

$\because$ axiom 3の（ii）

$$= BSC(\varphi, j).$$

次に、式（G2.3）が成立していれば、カテゴリ間の相互排除性

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\},\ BSC(\omega_i, j)$$
$$= psn^+(\sum_{k=1}^{n} w_k \cdot BSC(\omega_i, j))$$
$$= psn^+(0)$$
$$= 0$$

を得て、証明が終わった。 □

次の定理G6は、axiom 3を満たす有限個の大分類関数 $BSC_k(1 \leqq k \leqq n)$ を各出力の1次式の正値をとる形式で統合して、今1つのaxiom 3を満たす大分類関数 BSC を構成する1つの手法を指摘したものである。

［定理G6］**（大分類関数 BSC の改良再帰定理）**

関数 BSC が axiom 3 を満たすならば、条件

$$\forall j \in J, w_{jj} + \sum_{k \in J - \{j\}} w_{jk} \cdot BSC(\omega_j, k) \geqq b_j \qquad (G2.4)$$

を満たす実数値の重み w_{jk} の組 $\{w_{jk}\}$ $k \in J$, 実数値の閾値 b_j を用い、

$$BSC'(\varphi, j)$$
$$\equiv psn(\sum_{k \in J} w_{jk} \cdot BSC(\varphi, k) - b_j)$$

と定義される関数 BSC は axiom 3 を満たす。ここに、2値関数 psn (u) は、

$$psn(u) \equiv \begin{cases} 0 \text{ if } u \leqq 0 \\ 1 \text{ if } u > 0 \end{cases}$$

と定義されている。

更に、関数 BSC が、カテゴリ間の相互排除性

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\},$$
$$BSC(\omega_i, j) = 0 \qquad (G2.5)$$

を満たせば、条件

$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}, \ w_{ji} < b_j$ (G2.6)

の下で、BSC′ は式（G1.19）のカテゴリ間の相互排除性を満たす。

（証明） 先ず、axiom 3の（ i ），（ ii ）の成立を示す。

axiom 3の（ i ）の成立：

$\forall j \in J, BSC(\omega_j, j) = 1$

$\because$ axiom 3の（ i ） (G2.7)

であれば、

$\forall j \in J, BSC'(\omega_j, j)$

$= psn(\sum_{k \in J} w_{jk} \cdot BSC(\omega_j, k) - b_j)$

$= psn(w_{jj} \cdot BSC(\omega_j, j)$

$+ \sum_{k \in J-\{j\}} w_{jk} \cdot BSC(\omega_j, k) - b_j)$

$= psn(w_{jj}$

$+ \sum_{k \in J-\{j\}} w_{jk} \cdot BSC(\omega_j, k) - b_j)$

$= 1. \quad \because$ 式（G2.4）

axiom 3の（ ii ）の成立：

$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, BSC'(T\varphi, j)$

$\equiv psn(\sum_{k \in J} w_{jk} \cdot BSC(T\varphi, k) - b_j)$

$= psn(\sum_{k \in J} w_{jk} \cdot BSC(\varphi, k) - b_j)$

$\because$ axiom 3の（ ii ）

$= BSC(\varphi, j).$

次に、BSC′のカテゴリ間の相互排除性を示す前に、式（G2.5）を満たせば、式（G2.4）は、

$\forall j \in J, w_{jj} \geqq b_j$

となることに、式（G2.6）と対比して注意しておこう。

次に、式（G2.5）が成立していれば、カテゴリ間の相互排除性

$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}, BSC(\omega_i, j)$

$= psn(\sum_{k \in J} w_{jk} \cdot BSC(\omega_i, k) - b_j)$

$= psn(w_{ji} + \sum_{k \in J-\{i\}} w_{jk} \cdot BSC(\omega_i, k) - b_j)$

$\because$ 式（G2.7）

$= psn(w_{ji} - b_j)$

$\because$ 式（G2.5）

$= 0 \quad \because$ 式（G2.6）

を得て、証明が終わった。 □

付録H. 一般化大分類関数 BSC

本付録Gでは、その定義域を縮小すれば、axiom 3を満たす類似度関数 BSC となる一般化大分類関数を構成する。

カテゴリ間の相互排除性

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J-\{j\},\ BSC_2(\omega_i, j)=0 \qquad (H.1)$$

を満たす第2番目の大分類関数（rough classifier, binary-state classifier）

$$BSC_2: \Phi \times J \to \{0, 1\} \qquad (H.2)$$

を用い、拡張性質

$$\forall \varphi \in \Phi_1,\ \forall j \in J,$$
$$GBSC_{12}(\varphi, \omega_j) = BSC_1(\varphi, j) \qquad (H.3)$$

ここに、$\forall j \in J,\ \omega_j \in \Phi_2$

を満たす写像

$$GBSC_{12}: \Phi_1 \times \Phi_2 \to \{0, 1\} \qquad (H.4)$$

は、第1番目の大分類関数

$$BSC_1: \Phi \times J \to \{0, 1\} \qquad (H.5)$$

の**一般化大分類関数**（generalized binary-state classifier）であるという。

［定理H1；拡張定理］**（一般化大分類関数 GBSC の構成定理）**

axiom 3を満たす2式（H.5），（H.2）の2つの大分類関数BSC1，BSC2を用い、

$$GBSC_{12}(\varphi, \eta)$$
$$\equiv \max_{j \in J} \min\{BSC_1(\varphi, j),\ BSC_2(\eta, j)\}$$
$$\text{for any } \varphi \in \Phi_1 \text{ and } \eta \in \Phi_2 \qquad (H.6)$$

と定義された式（H.4）の写像GBSC12は、第2番目の式（H.2）の大分類関数BSC2が

カテゴリ間の相互排除性を示す式（H.1）を満たしている

ならば、等式（H.3）を満たす。

（証明）　式（H.3）の成立が、

$$GBSC_{12}(\varphi, \omega_j)$$
$$= \max_{j \in J} \min\{BSC_1(\varphi, i),\ BSC_2(\omega_j, i)\}$$
$$\because \text{ 式（H.6）}$$
$$= \max\{\min\{BSC_1(\varphi, j), BSC_2(\omega_j, j)\},$$
$$\max_{i \in J-\{j\}} \min\{BSC_1(\varphi, i), BSC_2(\omega_j, i)\}\}$$
$$= \max\{\min\{BSC_1(\varphi, j), 1\},$$
$$\max_{i \in J-\{j\}} \min\{BSC_1(\varphi, i), BSC_2(\omega_j, i)\}\}$$
$$\because \text{ axiom 3の（i）}$$
$$= \max\{BSC_1(\varphi, j),$$
$$\max_{i \in J-\{j\}} \min\{BSC_1(\varphi, i),\ BSC_2(\omega_j, i)\}\} \qquad (H.7)$$

を得、

式（H.1）が成立していれば、式（H, .7）の第2項について

$$\max_{i \in J-\{j\}} \min\{BSC_1(\varphi, i),\ BSC_2(\omega_j, i)\}$$
$$= \max_{i \in J-\{j\}} \min\{BSC_1(\varphi, i),\ 0\}$$
$$= \max_{i \in J-\{j\}} 0$$
$$= 0 \qquad (H.8)$$

が成立しているから、この式（H.8）を式（H.7）に考慮すれば、式（H.3）の成立が、

$$\forall \varphi \in \Phi_1,\ \forall j \in J,$$

$$
\begin{aligned}
&GBSC_{12}(\varphi,\ \omega_j)\\
&=\max\{BSC_1(\varphi, j),\ 0\}\\
&=BSC_1(\varphi, j)\ \text{for any}\ \omega_j\in\Phi_2
\end{aligned}
\tag{H.9}
$$

と示された。 □

[拡張定理の系1]

式（H.7）は、更に、

$$
\begin{aligned}
&GBSC_{12}(\varphi,\ \omega_j)\\
&=\\
&\begin{cases}
1(=BSC_1(\varphi, j))\cdots BSC_1(\varphi, j)=1\ \text{のとき}\\
0(=BSC_1(\varphi, j))\\
\qquad\qquad\cdots BSC_1(\varphi, j)=0\wedge\text{式（H.1）のとき}
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{H.10}
$$

と変形される。

（証明）

$$
\begin{aligned}
&GBSC_{12}(\varphi,\ \omega_j)\\
&=\\
&\begin{cases}
1\ (=BSC_1(\varphi, j))\cdots BSC_1(\varphi, j)=1\ \text{のとき}\\
\max\limits_{i\in J-\{j\}}\ \min\{BSC_1(\varphi, i),\ BSC_2(\omega_j, i)\}\\
\qquad\qquad\qquad\cdots BSC_1(\varphi, j)=0\ \text{のとき}\\
\qquad\qquad\because\ \text{式（H.7）}
\end{cases}\\
&=\\
&\begin{cases}
1\ (=BSC_1(\varphi, j))\cdots BSC_1(\varphi, j)=1\ \text{のとき}\\
\max\limits_{i\in J-\{j\}}\ \min\{BSC_1(\varphi, i),\ 0)\}\\
\qquad\qquad\cdots BSC_1(\varphi, j)=0\wedge\text{式（H.1）のとき}
\end{cases}\\
&=\\
&\begin{cases}
1\ (=BSC_1(\varphi, j))\cdots BSC_1(\varphi, j)=1\ \text{のとき}\\
\max\limits_{i\in J-\{j\}}\ 0\\
\qquad\qquad\cdots BSC_1(\varphi, j)=0\wedge\text{式（H.1）のとき}
\end{cases}\\
&=\\
&\begin{cases}
1\ (=BSC_1(\varphi, j))\cdots BSC_1(\varphi, j)=1\ \text{のとき}\\
0\ (=BSC_1(\varphi, j))\\
\qquad\qquad\cdots BSC_1(\varphi, j)\ =0\wedge\text{式（H.1）のとき}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

と変形される。 □

[拡張定理の系2]

本拡張定理の式（H.6）で定義される $GBSC_{12}$ は、axiom 3を満たす、言い替えれば、

①（**カテゴリ抽出能力**）

$\forall j\in J, GBSC_{12}(\omega_j,\ \omega_j)=1,$

ここに、$\omega_j\in\Phi_1\cap\Phi_2$

②（写像 $T_1:\Phi_1\rightarrow\Phi_1$ の下での**不変性**）

axiom 1を満たす写像 $T_1:\Phi_1\rightarrow\Phi_1$ について、

$\forall\varphi\in\Phi, \forall j\in J, GBSC_{12}(T_1\varphi, j)=GBSC_{12}(\varphi, j)$

が成り立つ。

（証明）　①の成立は、

$\forall j \in J$,

$GBSC_{12}(\omega_j, \omega_j)$

$= BSC_1(\omega_j, j)$　　∵　式（H.3）

$= 1$　∵　axiom 3の（ⅰ）

を得、示された。次に、②の成立は、

$\forall \varphi \in \Phi_1, \forall j \in J$,

$GBSC_{12}(T_1\varphi, \omega_j)$

$= BSC_1(T_1\varphi, j)$　　∵　式（H.3）

$= BSC_1(\varphi, j)$　　∵　axiom 2の（ⅰ）

を得、示された。　□

付録I．基本的な3種類のパターンモデル$T\varphi$

本付録Iでは、パターンモデルを簡単に基本的に分類し、3種類のパターンモデル$T\varphi$を構築しよう。

I1．画素系$\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$を利用した場合のパターンモデル$T\varphi$

R^n(n次元実数値空間)の(可測部分集合）M を互いに素な空でない部分集合$M_k(k \in K)$に分割する：

添字の集合Kは有限集合、或いは、可算集合、非可算集合とし、

$$M = \bigcup_{k \in K} M_k \wedge [\forall k \in K, M_k \neq \phi]$$
$$\wedge [\forall k \in K, \forall q \in K - \{k\}, \ M_k \cap M_q = \phi \text{ (empty set)}. \qquad (I1.1)$$

□

集合Kを高々可算集合と選んでいる場合、上の条件式（I1.1）を満たす系$\{M_k\}_{k \in K}$は**画素系**と考えられ、M_kは第$k \in K$番目の画素である。下の条件式（1.2）の 実定数d_kはパターン$\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$（可分なヒルベルト空間）の、$M_k$での濃淡値を表している。

条件

$$\forall k \in K, \forall x \in M_k, \varphi(x) = d_k \in R \text{（実数全体の集合）} \qquad (I1.2)$$

を満たす実数値パターン$\varphi \in \Phi$について、

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall k \in K, \forall x \in M_k, (S\varphi)(x) = \begin{cases} 0 \text{ if } \sup_{k \in K} |d_k| = 0 \\ d_k / \sup_{k \in K} |d_k| \text{ if } \sup_{k \in K} |d_k| > 0 \end{cases} \qquad (I1.3)$$

と定義される写像

$$S : \Phi \to \mathfrak{H} \qquad (I1.4)$$

を定義し、不等式

$$\forall k \in K, \forall x \in M_k, \exists a_k \in R, \exists c_k \in R,$$
$$-1 < h^-(x) = a_k \leqq 0 \leqq h^+(x) = c_k < +1 \qquad (I1.5)$$

を満たす2つの実数値閾値関数

$$h^-, h^+: M \to R \tag{I1.6}$$

を導入する。条件式（I1.2）を満たす実数値パターン$\varphi \in \Phi$について、式（I1.4）の写像Sと、式（I1.6）の2つの閾値関数h^-, h^+とを用いて、

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall k \in K, \forall x \in M_k, (T\varphi)(x) = \begin{cases} -1 \text{ if } (S\varphi)(x) = b_k < h^-(x) = a_k \\ 0 \\ \text{if } h^-(x) = a_k \leqq (S\varphi)(x) = b_k \leqq h^+(x) = c_k \\ +1 \text{ if } (S\varphi)(x) = b_k > h^+(x) = c_k \end{cases} \tag{I1.7}$$

where

$$b_k \in \{0, d_k / \sup_{k \in K} |d_k|\} \text{ for any } k \in K \tag{I1.8}$$

と定義される写像

$$T: \Phi \to \Phi \tag{I1.9}$$

がモデル構成作用素であることは、次の定理I1が指摘している。その前に、補助定理I1を証明しておこう。

［補助定理I1］**（3値不動点定理）**

3値条件

$$\forall k \in K, \forall x \in M_k, \varphi(x) = d_k \in \{0, -1, +1\} \tag{I1.10}$$

を満たすパターン$\varphi \in \Phi$に対し、式（I1.3）で定義される式（I1.4）の写像Sと、式（I1.7）で定義される式（I1.9）の写像Tにつき、不動点方程式

$$S\varphi = T\varphi = \varphi \tag{I1.11}$$

が成り立つ。

（証明）　3値条件式（I1.10）を満たすφについては、

$$\varphi = 0 \Leftrightarrow S\varphi = 0 \Leftrightarrow T\varphi = 0 \tag{I1.12}$$

が成立することは、φの条件式（I1.2），h^-, h^+の不等式（1.5），2写像S, Tの定義式（I1.3），（I1.7）から明らかである。

よって、3値条件式（I1.9）を満たし、且つ、$\varphi \neq 0$なるパターンφの場合を考えよう。この場合、

$$\begin{aligned} &\forall k \in K, \forall x \in M_k, \varphi(x) = 0, \pm 1 \\ &\Rightarrow \forall k \in K, \forall x \in M_k (S\varphi)(x) = 0, \pm 1 \text{（複号同順）} \\ &\Rightarrow \forall k \in K, \forall x \in M_k (T\varphi)(x) = 0, \pm 1 \text{（複号同順）} \end{aligned} \tag{I1.13}$$

の成立がφの条件式（I1.2），h^-, h_+の不等式（I1.5），2写像S, Tの定義式（I1.3），（I1.7）から明らかである。　□

［定理I1］**（3値パターンモデル定理）**

式（I1.7）で定義される式（I1.9）の写像Tは、axiom 1の（i），（ii），（iii）の3後半，並びに、（iv）を満たす。

［定理I1の系1］**（2値パターンモデル定理）**

特に、$\varphi \in \Phi$の条件式（I1.2）において、

$$\forall k \in K, d_k \geqq 0 \tag{I1.14}$$

であれば、

$$\forall k \in K, \forall x \in M_k, (S\varphi)(x) \geqq 0 \tag{I1.15}$$

が成り立ち、よって、

$$\forall k \in K, \forall x \in M_k, (T\varphi)(x) = b_k \in \{0, +1\} \tag{I1.16}$$

が成り立ち、パターンモデル $T\varphi$ は2値パターンである。

（証明）　axiom 1の（i）の後半：

$$\varphi = 0 \Rightarrow T\varphi = 0 \tag{I1.17}$$

の成立が補助定理I1からわかる。

axiom 1の（ii）の後半：aを任意の正実定数とする。

$\varphi = 0$ の場合は、$a \cdot \varphi = 0$ を得、よって、補助定理I1を適用して、

$$T(a \cdot \varphi) = 0 = T\varphi \tag{I1.18}$$

が得られる。また、$\varphi \neq 0$ の場合は、2写像S, Tの定義式（I1.3），（I1.7）から

$$S(a \cdot \varphi) = (a \cdot d_k) / \sup_{k \in K} | a \cdot d_k |$$

$$= d_k / \sup_{k \in K} | d_k | = S\varphi \tag{I1.19}$$

$$\therefore \quad T(a \cdot \varphi) = T\varphi \tag{I1.20}$$

が得られる。

axiom 1の（iii）の後半：$T\varphi = 0$ の場合は、補助定理1.1を適用して、

$$(\varphi = 0 \Rightarrow)\ T\varphi = 0 \Rightarrow T(T\varphi) = 0 = T\varphi \tag{I1.21}$$

が得られる。

また、$\eta \equiv T\varphi \neq 0$ の場合は、

$$\forall k \in K, \forall x \in M_k, \eta(x) \in \{0, \pm 1\} \tag{I1.22}$$

であるから、補助定理I1を適用して、

$$T\eta = \eta \quad \therefore \quad T(T\varphi) = T\varphi \tag{I1.23}$$

が得られる。

axiom 1の（iv）：3値条件式（I1.10）を満たし、且つ、$\varphi \neq 0$ なるパターン φ の場合を考えれば、補助定理1.1から明らかである。

（定理I1の系1の証明）

2写像S, Tの定義式（I1.3），（I1.7）から明らかである。　□

第 $k \in K$ 番目の、式（I1.2）の実定数 d_k の正成分 d_k^+、負成分 d_k^- は、

$$d_k^+ \equiv [d_k + | d_k |]/2$$

$$= d_k \text{ if } d_k \geqq 0, = 0 \text{ if } d_k < 0 \tag{I1.24}$$

$$d_k^- \equiv [d_k - | d_k |]/2$$

$$= 0 \text{ if } d_k \geqq 0, = d_k \text{ if } b_k < 0 \tag{I1.25}$$

と定義され、

$$\forall k \in K, d_k = d_k^+ + d_k^- \tag{I1.26}$$

が成り立つ。定理I1の系1において、式（I1.14）の d_k は実は、d_k^+ のことであると考えればよい。

I2.　1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ を利用した場合のパターンモデル $T\varphi$

集合Lは高々可算集合とする。$\mathfrak{H}$ での内積、ノルムを各々、$(\ ,\ )$，$\| \ \| \equiv \sqrt{(\ ,\ )}$ と表す。定数 d_ℓ の組 $\{d_\ell\}_{\ell \in L}$ について、

$$\sum_{\ell \in L} d_\ell \cdot \psi_\ell = 0 \Rightarrow \forall \ell \in L, d_\ell = 0 \tag{I2.1}$$

が成り立つという意味で、$\mathfrak{H}$の元ψ_ℓからなる系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$は**1次独立**であるとしよう。

パターン$\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$に対し、

$$\| \varphi-\sum_{\ell\in L} d_\ell\cdot\psi_\ell \|^2 \tag{I2.2}$$

を最小ならしめる各1次結合係数$d_\ell(\ell\in L)$は、連立1次方程式

$$\sum_{\ell\in L}(\psi_\ell, \psi_k)\cdot d_\ell=(\varphi, \psi_k),\ k\in L \tag{I2.3}$$

を解いて求まる。連立1次方程式（I2.3）の解$\{d_\ell\}_{\ell\in L}$を$\{d_\ell(\varphi)\}_{\ell\in L}$と表す。このとき、パターン$\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$は、各$\psi_\ell(\ell\in L)$による1次結合表現

$$\exists\varphi_\perp\in\mathfrak{H}\ \text{such that}\ \forall\ell\in L, (\varphi_\perp, \psi_\ell)=0,$$

$$\varphi=\sum_{\ell\in L} d_\ell(\varphi)\cdot\psi_\ell+\varphi_\perp \tag{I2.4}$$

と表される。

$$(\psi_k, \psi_\ell)=0\ \text{if}\ k\neq\ell, >0\ \text{if}\ k=\ell \tag{I2.5}$$

を満たす系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$は**直交系**であるといわれる。直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$は1次独立である。

直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$については、連立1次方程式（I2.3）の解$\{d_\ell(\varphi)\}_{\ell\in L}$は、

$$d_\ell(\varphi)=(\varphi, \psi_\ell)/(\psi_\ell, \psi_\ell),\ \ell\in L \tag{I2.6}$$

と与えられる。

特に、

$$(\psi_\ell, \psi_\ell)=1\ \text{for any}\ \ell\in L \tag{I2.7}$$

であるような直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$を**正規直交系**という。

特に、$\mathfrak{H}=L_2$（M, dm）と選び、

$$L=K\,(\text{高々可算集合}), \tag{I2.8}$$

$$\psi_\ell(x)=\begin{cases}1/\int_{M_\ell} dm(x)>0 & \text{if}\ x\in M_\ell\\ 0\ \text{if}\ x\in M_k\ \text{for any}\ k\in L-\{\ell\} & \end{cases} \tag{I2.9}$$

の場合、$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$は正規直交系であることがわかり、

$$\begin{aligned}d_\ell(\varphi)&=(\varphi, \psi_\ell)\\ &=\int_{M_\ell} dm(x)\ \varphi(x)/\int_{M_\ell} dm(x)\end{aligned} \tag{I2.10}$$

を得、L＝K（高々可算集合）と考えると、各$d_\ell(\varphi)$は条件式（I1.2）のd_ℓに一致し、定理I1の拡張が次の定理I2であることになる。

条件式

$$\forall\ell\in L, d_\ell(\varphi)\in R\ (\text{実数全体の集合}) \tag{I2.11}$$

の下で、

$$u(\varphi, \ell)=\begin{cases}0 & \text{if}\ \sup_{\ell\in L}|d_\ell(\varphi)|=0\\ d_\ell(\varphi)/\sup_{\ell\in L}|d_\ell(\varphi)| & \\ & \text{if}\ \sup_{\ell\in L}|d_\ell(\varphi)|>0\end{cases} \tag{I2.11}$$

がパターン$\varphi\in\Phi$から抽出される第$\ell\in L$番目の特徴量であるような特徴抽出写像

$$u:\Phi\times L\to R \tag{I2.12}$$

を定義し、不等式

$$\forall \ell \in L,$$
$$-1 < h^-(\ell) \leqq 0 \leqq h^+(\ell) < +1 \tag{I2.13}$$
を満たす2つの実数値閾値 $h^-(\ell)$, $h^+(\ell)$ の組
$$h^-(\ell),\ h^+(\ell),\ \ell \in L \tag{I2.14}$$
を導入する。

3値特徴量 $u'(\varphi, \ell)$ を
$$u'(\varphi, \ell) = \begin{cases} -1 & \text{if } u(\varphi, \ell) < h^-(\ell) \\ 0 & \text{if } h^-(\ell) \leqq u(\varphi, \ell) \leqq h^+(\ell) \\ +1 & \text{if } u(\varphi, \ell) > h^+(\ell) \end{cases} \tag{I2.15}$$
と定義する。

条件式（I2.11）を満たす実数値パターン $\varphi \in \Phi$ について、式（I2.15）で定義される3値特徴抽出写像
$$u' : \Phi \times L \to \{0, \pm 1\} \tag{I2.16}$$
を用いて、
$$\forall \varphi \in \Phi, T\varphi = \sum_{\ell \in L} u'(\varphi, \ell) \cdot \psi_\ell \tag{I2.17}$$
と定義される式（I1.9）の写像 T がモデル構成作用素であることは、次の定理I2が指摘している。その前に、ある場合、補助定理I1の拡張になっている補助定理I2を証明しておこう。

尚、式（I2.17）の $T\varphi$ は、式（I2.4）のパターン φ から雑音 $\varphi_\perp$ を取り除いた表現
$$\varphi - \varphi_\perp = \sum_{\ell \in L} d_\ell(\varphi) \cdot \psi_\ell \tag{I2.18}$$
の近似であることに注意しておく。

［補助定理I2］**（1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ を用いた不動点定理）**

3値条件
$$\forall \ell \in L,\ q_\ell \in \{0, \pm 1\} \tag{I2.19}$$
を満たすパターン
$$\varphi = \sum_{\ell \in L} q_\ell \cdot \psi_\ell \tag{I2.20}$$
については、式（I2.17）で定義される写像 T について、不動点方程式
$$T\varphi = \varphi \tag{I2.21}$$
が成り立つ。

（証明）　連立1次方程式（I2.3）の右辺に、式（I2.20）を代入するとわかるように、$\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ が1次独立であるから、
$$d_\ell(\varphi) = q_\ell,\ \ell \in L \tag{I2.22}$$
がいえる。よって、
$$\sup_{\ell \in L} |\, d_\ell(\varphi) \,| \in \{0, 1\} \tag{I2.23}$$
であり、u の定義式（I2.11）から、
$$\forall \ell \in L,\ u(\varphi, \ell) = q_\ell \tag{I2.24}$$
が成り立つ。従って、不等式（I2.13）と、u′ の定義式（I2.15）とから、
$$\forall \ell \in L,\ u'(\varphi, \ell) = u(\varphi, \ell) = q_\ell \tag{I2.25}$$
が成り立つ。結局、T の定義式（I2.17）から、

$$T\varphi=\sum_{\ell\in L} u'(\varphi,\ell)\cdot\psi_\ell$$
$$=\sum_{\ell\in L} q_\ell\cdot\psi_\ell$$
$$=\varphi \tag{I2.26}$$

が得られ、証明が終わった。 □

［定理I2］**（1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$ を用いたパターンモデル定理）**

式（I2.17）で定義される式（I1.7）の写像Tは、axiom 1の（ i ），（ii），（iii）の3後半，並びに、（iv）を満たす。

［定理I2の系1］**（1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$ を用いた2値パターンモデル定理）**

特に、連立1次方程式（I2.3）の解 $\{d_\ell(\varphi)\}_{\ell\in L}$ において、

$$\forall\ell\in L, d_\ell(\varphi)\geqq 0 \tag{I2.27}$$

であれば、

$$\forall\ell\in L, u(\varphi,\ell)\geqq 0 \tag{I2.28}$$

が成り立ち、よって、

$$\forall\ell\in L, u'(\varphi,\ell)\in\{0,+1\} \tag{I2.29}$$

が成り立ち、パターンモデル $T\varphi$ は2値の1次結合係数 $u'(\varphi,\ell)$ を備えることになる。

（証明）　axiom 1の（ i ）の後半：　式（I1.17）の成立が補助定理I2からわかる。

axiom 1の（ii）の後半：aを任意の正実定数とする。

$\varphi=0$ の場合は、$a\cdot\varphi=0$ を得、よって、補助定理I2を適用して、

$$T(a\cdot\varphi)=\varphi=0=T\varphi \tag{I2.30}$$

が得られる。また、$\varphi\neq0$ の場合は、連立1次方程式(I2.3)の両辺にaをかけると、$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$ が1次独立であるから、

$$\forall\ell\in L, d_\ell(a\cdot\varphi)=a\cdot d_\ell(\varphi) \tag{I2.31}$$

が得られる。よって、写像uの定義式（I2.11）から

$$\forall\ell\in L, u(a\cdot\varphi,\ell)=u(\varphi,\ell) \tag{I2.32}$$

を得、写像u′の定義式（I2.15）から、

$$\forall\ell\in L, u'(a\cdot\varphi,\ell)=u'(\varphi,\ell) \tag{I2.33}$$

も得、写像Tの定義式（I2.17）から、

$$T(a\cdot\varphi)=T\varphi \tag{I2.34}$$

が得られる。

axiom 1の（iii）の後半：$T\varphi=0$ の場合は、補助定理I1を適用して、式（I1.21）が得られる。

また、$\eta\equiv T\varphi\neq0$ の場合は、連立1次方程式（I2.3）の右辺に写像Tの定義式（I2.17）から定まる η を代入すると、$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$ が1次独立であるから、

$$\forall\ell\in L, d_\ell(\eta)=u'(\varphi,\ell)\in\{0,\pm1\} \tag{I2.35}$$

の成立がわかる。よって、補助定理I2を適用して、

$$T\eta=\eta \quad \therefore \quad T(T\varphi)=T\varphi \tag{I2.36}$$

が得られる。

axiom 1の（iv）：3値条件式（I2.19）を満たし、且つ、$\varphi\neq0$ なるパターン φ の場合を考えれば、補助定理I2から明らかである。

（定理I2の系1の証明）

3写像 u, u', T の定義式（I2.11），（I2.15），（I2.17）から明らかである。 □

I3. 次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$ を利用した場合の1次結合係数の絶対値 $|d_\ell(\ell)|$ の2値化によるパターンモデル $T\varphi$

系 $\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$ が1次独立である場合で、連立1次方程式（I2.3）の解 $\{d_\ell(\varphi)\}_{\ell\in L}$ の絶対値(absolute value) をとり、$\sup_{\ell\in L} |d_\ell(\varphi)|$ で規格化して、式（I2.11）の $u(\varphi, \ell)$ の代りに、

$$u(\varphi, \ell) = \begin{cases} 0 \text{ if } \sup_{\ell\in L} |d_\ell(\varphi)| = 0 \\ |d_\ell(\varphi)| / \sup_{\ell\in L} |d_\ell(\varphi)| \\ \quad \text{if } \sup_{\ell\in L} |d_\ell(\varphi)| > 0 \end{cases} \tag{I3.1}$$

を考えてみよう。

不等式

$$\forall \ell\in L, 0 \leqq h(\ell) < +1 \tag{I3.2}$$

を満たす実数値閾値 $h(\ell)$ の組

$$h(\ell),\ \ell\in L \tag{I3.3}$$

を導入する。

2値特徴量 $u'(\varphi, \ell)$ を

$$u'(\varphi, \ell) = \begin{cases} 0 \text{ if } 0 \leqq u(\varphi, \ell) \leqq h(\ell) \\ +1 \text{ if } u(\varphi, \ell) > h(\ell) \end{cases} \tag{I3.4}$$

と定義する。

複素数値であっても構わないパターン $\varphi\in\Phi$ について、式（I3.4）のように定義される式（I2.16）の特徴抽出写像 u' を用いて、式（I2.17）で定義される写像 T がモデル構成作用素であることは、次の定理I3が指摘している。その前に、補助定理I3を証明しておこう。

［補助定理I3］**（1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$ を利用した場合の1次結合係数の絶対値 $|d_\ell(\ell)|$ の2値化によるパターンモデル不動点定理）**

2値条件式

$$\forall \ell\in L, q_\ell \in \{0, 1\} \tag{I3.5}$$

を満たす式（I2.20）のパターン φ については、式（I3.4）のように定義される式（I2.16）の特徴抽出写像 u' を用いて、式（I2.17）で定義される写像 T について、不動点方程式（I2.21）が成り立つ。

（証明）　連立1次方程式（1.29）の右辺に、式（I2.17）を代入するとわかるように、$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$ が1次独立であるから、式（I2.22）がいえる。よって、式（I2.23）が成立し、u の 定義式（I3.1）から、式（I2.24）が成り立つ。従って、不等式（I3.2）と、u の 定義式（I3.4）とから、式（I2.25）が成り立つ。結局、T の定義式（I2.17）から、式（I2.26）が得られ、証明が終わった。　□

［定理I3］**（1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$ を利用した場合の1次結合係数の絶対値 $|d_\ell(\ell)|$ の2値化によるパターンモデル定理）**

式（I3.4）のように定義される式（I2.16）の特徴抽出写像 u' を用いて、式（I2.17）で定義される式（I1.7）の写像 T は、axiom 1の（i），（ii），（iii）の3後半，並びに、（iv）を満たす。

［定理I2の系1］**（1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$ を用いた2値パターンモデル定理）**

特に、連立1次方程式（I2.3）の解 $\{d_\ell(\varphi)\}_{\ell\in L}$ において、

$$\forall \ell \in L, d_\ell(\varphi) \leqq 0 \tag{I3.6}$$

であっても、式（I2.28）が成り立ち、よって、式（I2.29）が成り立ち、パターンモデル $T\varphi$ は2値の1次結合係数 $u'(\varphi, \ell)$ を備えることになる。

（証明）　axiom 1の（ i ）の後半：式（I1.17）の成立が補助定理I3からわかる。

axiom 1の（ii）の後半：a を任意の正実定数とする。

$\varphi=0$ の場合は、$a\cdot\varphi=0$ を得、よって、補助定理I3を適用して、式（I2.30）が得られる。また、$\varphi\neq 0$ の場合は、連立1次方程式（I2.3）の両辺に a をかけると、$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$ が1次独立であるから、式（I2.31）が得られる。よって、写像 u の定義式（I3.1）から式（I2.33）を得、写像 u′の定義式（I3.4）から、式（I2.33）も得、写像 T の定義式（I2.17）から、式（I2.34）が得られる。

axiom 1の（iii）の後半：$T\varphi=0$ の場合は、補助定理I3を適用して、式（I1.21）が得られる。

また、$\eta\equiv T\varphi\neq 0$ の場合は、連立1次方程式（I2.3）の右辺に写像 T の定義式（I2.17）から定まる η を代入すると、$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$ が1次独立であるから、

$$\forall \ell \in L, d_\ell(\eta)=u'(\varphi, \ell)\in\{0, 1\} \tag{I3.7}$$

の成立がわかる。よって、補助定理I3を適用して、式（I2.36）が得られる。

axiom 1の（iv）：2値条件式（I3.5）を満たし、且つ、$\varphi\neq 0$ なるパターン φ の場合を考えれば、補助定理I3から明らかである。

（定理I3の系1の証明）

3写像 u, u′, T の定義式（I3.1），（I3.4），（I2.17）から明らかである。　□

付録J．最急降下法に基づくパターンモデル $T\varphi$ の自己組織化構成

パターン $\varphi\in\Phi$ を、各1次独立な元（パターン形状素）ψ_k の一次結合式 $\sum_{k\in L} c_k\cdot\psi_k$ で近似するときの自乗ノルム誤差の関数を極小とする各1次結合係数（複素定数）$c_k(\varphi)$ を使用して、axiom 1を満たすパターンモデル $T\varphi$ が2種類（連続値1次展開パターンモデル，3値化1次展開パターンモデル）、2定理J1，J2で構成される。このように、本付録Jでは、ヒルベルト空間 $L_2(M\,;dm)$ における最小自乗近似法の、可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ での一般化が研究される。その後、**各1次展開係数 $c_k(\varphi)$ が実数値である場合**、最急降下法を適用して、逐次的に決定する手法（パターンモデル $T\varphi$ の、自己組織化学習的決定法）が研究される。

J1．最小自乗近似法の一般化

1実変数 u の関数 f(u) が、2条件

（条件C1）　$f(u)=0$ if $u<0$

（条件C2）　$0=f(0)<f(u)$ for any $u>0$

を満たすものとする。

可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ ($L_2(M\,;dm)$ とは限らない）の元 ψ_k の、式（L3.13）の組 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ は、1次独立であるとする。パターン $\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$ を、各 ψ_k の一次結合式

$$\sum_{k\in L} c_k\cdot\psi_k \tag{J1.1}$$

で近似するときの自乗ノルム誤差

$$e(\varphi\,;c_k, k\in L)\equiv\|\varphi-\sum_{k\in L} c_k\cdot\psi_k\|^2 \tag{J1.2}$$

の関数

$$\begin{aligned}E &\equiv E(c_k, k \in L)\\ &\equiv f(\|\varphi - \sum_{k \in L} c_k \cdot \psi_k \|^2)\\ &= f(e(\varphi; c_k, k \in L))\end{aligned} \tag{J1.3}$$

を極小とする各1次結合係数（複素定数）c_kは、パターンφに依存する故、$c_k(\varphi)$と書こう。例えば、通常の最小自乗近似法では、2条件C1，C2を満たす関数$f(u)$は、

$$f(u) = 0 \text{ if } u < 0, = u \text{ if } u \geqq 0 \tag{J1.4}$$

と設定されることになる。

J2. 正規化1次展開係数 $c_k'(\varphi)$ と2つのパターンモデル $T\varphi$

処理の対象とする問題のパターンφの集合 Φ を可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の、零元を含む或る部分集合とする。

前章で求められた各$c_k(\varphi)$の正規化

$$c_k'(\varphi) \equiv \begin{cases} c_k(\varphi) / \sup_{k \in L} |c_k(\varphi)| & \cdots \exists \ell \in L, c_\ell(\varphi) \neq 0 \text{ の場合} \\ 0 & \cdots \forall \ell \in L, c_\ell(\varphi) = 0 \text{ の場合} \end{cases} \tag{J2.1}$$

を用意すると、次の2定理J1，J2の成立が容易に確かめられる。

［定理J1］**（正定数倍規格化連続値1次展開パターンモデル $T\varphi$ の構成定理）**

$$T\varphi \equiv \sum_{k \in L} c_k'(\varphi) \cdot \psi_k \tag{J2.2}$$

と定義される写像 $T : \Phi \to \Phi$ は、axiom 1の（ i ），（ii），（iii）の3後半、並びに、（iv）の4性質（つまり、付録K，K3章の4性質①～④）を満たす。 □

［定理J2］**（3値化1次展開パターンモデル $T\varphi$ の構成定理）**

各3値化1次展開係数$d_k(\varphi)$を、不等式

$$-1 < \varepsilon_k^- < 0 < \varepsilon_k^+ < +1 \tag{J2.3}$$

を満たす各閾値$\varepsilon_k^\pm$が選定･固定の下で、

$$d_k(\varphi) \equiv \begin{cases} -1 & \cdots -1 \leqq c_k'(\varphi) < \varepsilon_k^- \text{ のとき} \\ 0 & \cdots \varepsilon_k^- \leqq c_k'(\varphi) \leqq \varepsilon_k^+ \text{ のとき} \\ +1 & \cdots \varepsilon_k^+ < c_k'(\varphi) \leqq +1 \text{ のとき} \end{cases} \tag{J2.4}$$

と用意して、

$$T\varphi \equiv \sum_{k \in L} d_k(\varphi) \cdot \psi_k \tag{J2.5}$$

と定義される写像 $T : \Phi \to \Phi$ は、axiom 1の（ i ），（ii），（iii）の3後半、並びに、（iv）の4性質を満たす。 □

J3. パターンモデル$T\varphi$の、自己組織化学習的決定（最急降下法を適用しての、各実数値係数 $c_k(\varphi)$ の決定）

本章では、パターンモデル $T\varphi$を、自己組織化学習の働きで決定する手法を研究しよう。それには、添字集合 L が有限集合であり、各1次展開係数 $c_k(\varphi)$ が実数値である場合、ニューラルネットにおける誤差逆伝播学習［B2］で適用されている**最急降下法**を適用して、逐次的に決定する

手法が説明されればよい。定理J1には、各1次展開係数 $c_k(\varphi)$ を使って、パターンモデル $T\varphi$ を構成する手法が述べられているからである。

$|K|$ は、集合Kに含まれる要素の総数

$Re[\cdots]$ は、…の実部

として、任意の $k \in L$ について、初期条件

$$c_k(\varphi\,;\,t)\,|_{t=0} = 1/|K| \tag{J3.1}$$

の下で、

$$c_k(\varphi\,;\,t+\triangle t) = c_k(\varphi\,;\,t) + \triangle c_k(\varphi\,;\,t) \tag{J3.2}$$

ここに、

$\triangle t > 0$ は十分小と選ばれており、

$$\triangle c_k(\varphi\,;\,t) = (\triangle t)\cdot\tau_k(t)\cdot 2 \cdot df(u)/d_u\,|_{u=e(\varphi\,;\,c_\ell(\varphi\,;\,t),\ \ell \in L)}\cdot Re[(\varphi - \sum_{\ell \in L} c_\ell(\varphi\,;\,t)\cdot\psi_\ell,\ \psi_k)] \tag{J3.3}$$

を求めてゆくと、各 $\tau_k(t) > 0$ が適切に選ばれていれば、

$$c_k(\varphi) = \lim_{t\to\infty} c_k(\varphi\,;\,t) \tag{J3.4}$$

が成立する。以上が、最急降下法に基づく各1次展開係数 $c_k(\varphi)$ の求め方である。

以下に、その証明を行う。

以後、$c_k(\varphi;t)$ を簡単に、$c_k\langle t\rangle$、或いは、c_k と書くことがある。

式（J1.3）の誤差Eに注意し、微分方程式系（**最急降下的学習方程式系**）

$$(dc_k/dt) = -\tau_k(t)\cdot\partial E/\partial c_k\,,\ k \in L \tag{J3.5}$$

を用意しよう。このとき、不等式

$$dE/dt = \sum_{\ell \in L} \partial E/\partial c_k \cdot dc_k/dt = -\sum_{\ell \in L} \tau_k(t)\cdot[\partial E/\partial c_k]^2 \leqq 0 \tag{J3.6}$$

を得て、式（J1.3）の誤差Eは微分方程式系（J3.5）の解曲線の上で決して増加しないことが判明するから、この**微分方程式系（J3.5）を解く**こと、つまり、十分時間 t が経過したときの c_k を、式（J3.4）のごとく、求めればよいことになる。

結局、初期条件式（J3.1）の下で、微分方程式系（J3.5）の**離散近似表現**

$$c_k\langle t+\triangle t\rangle = c_k\langle t\rangle + (\triangle t)\cdot[-\tau_k(t)]\cdot\partial E/\partial c_k \tag{J3.7}$$

を解けばよい。

$$\triangle c_k\langle t\rangle \equiv (\triangle t)\cdot[-\tau_k(t)]\cdot\partial E/\partial c_k \tag{J3.8}$$

と置いたものが、式（J3.2）であり、式（J3.8）内に登場している偏微分係数 $\partial E/\partial c_k$ の具体的表現として、

$$\partial E/\partial c_k = (-2)\cdot df(u)/du\,|_{u=e(\varphi\,;\,c_\ell,\ \ell \in L)} \cdot Re[(\varphi - \sum_{\ell \in L} c_\ell\cdot\psi_\ell,\ \psi_k)] \tag{J3.9}$$

が以下の2式（J3.10），（J3.11）で示され、式（J3.9）を式（J3.8）に代入すると、式（J3.3）が得られる。

式（J3.9）を求めよう。

$$\partial E/\partial c_k$$
$$= df(u)/du \mid_{u=e(\varphi;\, c_\ell,\, \ell\in L)}$$
$$\cdot \partial \| \varphi - \sum_{\ell\in L} c_\ell\cdot\psi_\ell \|^2/\partial c_k$$
$$\because \text{式 (J1.3)} \tag{J3.10}$$

であるが、$\overline{c_k}$ は c_k の複素共役であるが、仮定より、$\overline{c_k}=c_k$ が成立していることに注意すると、

$$\partial \| \varphi - \sum_{\ell\in L} c_\ell\cdot\psi_\ell \|^2/\partial c_k$$
$$=(\partial/\partial c_k)(\varphi - \sum_{\ell\in L} c_\ell\cdot\psi_\ell,$$
$$\varphi - \sum_{m\in L} c_m\cdot\psi_m)$$
$$=(\partial/\partial c_k[\varphi - \sum_{\ell\in L} c_\ell\cdot\psi_\ell],\ \varphi - \sum_{m\in L} c_m\cdot\psi_m)$$
$$+(\varphi - \sum_{\ell\in L} c_\ell\cdot\psi_\ell,$$
$$\partial/\partial \overline{c_k}[\varphi - \sum_{m\in L} c_m\cdot\psi_m])$$
$$=(-\psi_k,\ \varphi - \sum_{m\in L} c_m\cdot\psi_m)$$
$$+(\varphi - \sum_{\ell\in L} c_\ell\cdot\psi_\ell,\ -\psi_k)$$
$$=-2\cdot[(\varphi - \sum_{\ell\in L} c_\ell\cdot\psi_\ell,\ \psi_k)] \tag{J3.11}$$

である。

J4. 2式（L2.4），（L2.6）の成立について

パターン φ から抽出される第 $k\in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi,k)$ を、

$$u(\varphi,k)$$
$$\equiv \text{式 (J2.1) の } C_k'(\varphi) \text{ 或いは、式 (J2.4) の } d_k(\varphi) \tag{J4.1}$$

と定義すると、2定理L1，L2より、式（L3.19）のパターンモデル $T\varphi$ が定義されるが、このとき、式（L3.22）のように定義されるパターン集合 Φ 上の2項関係 $\propto$ は半順序関係である。

同値関係 $\varphi\sim\eta$ は、

$$\varphi\sim\eta \Leftrightarrow \forall\ell\in L, u(\varphi,\ell)=u(\eta,\ell) \tag{J4.2}$$
$$\Leftrightarrow T\varphi = T\eta \tag{J4.3}$$

と表され、$\varphi\sim\eta$ なる2つのパターン φ, η は同一の特徴量の組を備えており（式（J4.2））、2つのパターンモデル $T\varphi, T\eta$ は、一致すること（式（J4.3））がわかる。

次の命題L1が成立ち、パターン $\varphi\in\Phi$ から抽出される式（L3.4）の各特徴量 $u(\varphi,k)$ を採用したとき、各 $c_k(\varphi)$ が±1であるようなパターン ψ は、式（L3.22）の半順序関係 $\propto$ の**極大要素**であることを指摘している。

［命題L1］（**半順序関係 $\propto$ に関する極大要素の存在**）

$$\forall k\in L, c_k(\psi)\in\{-1,+1\}$$

であるような $\psi\in\Phi$ について、

$$\forall\varphi\in\Phi, \varphi\propto\psi. \qquad \square$$

このとき、付録K，K3章の性質③より、式（L3.26）が成り立っていることは、式（L3.13）のパターン形状素 ψ_k の組 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ の1次独立性より直ちに確かめられる。

付録K，K3章の性質③の成立に注意すると、式（J4.3）から、2式（L2.4），（L2.6）の成立がわかる。

付録K. モデル構成作用素 T，類似度関数 SM と、最大類似度認識法

本付録Kでは、モデル構成作用素 T, 類似度関数 SM の満たすべき諸性質、SM の各々の1構成例を指摘し、簡単な認識法としての最大類似度（認識）法［B3］,［B4］が説明される。

K 1. 処理の対象とするパターン φ の集合 Φ

本研究では、これまでの設定通り［B1］～［B6］、パターン φ はある可分な（separable）ヒルベルト（Hilbert）空間 $\mathfrak{H}$ の元としょう。例えば、内積 (φ, η), $\| \varphi \|$ が、

$$(\varphi, \eta)=\int_M dm(x)\ \varphi(x)\cdot\overline{\eta}(x)$$

$$\| \varphi \| \equiv\sqrt{(\varphi, \varphi)}$$

ここに、$\overline{\eta}$ は η の複素共役であり、

M：n 次元ユークリッド空間 R^n の可測部分集合

dm(x)：正値Lebesgue-Stieltjes式測度 (K1.1)

とするヒルベルト空間 $\mathfrak{H}=L_2(M; dm)$ を考えておけば良い。

処理するパターン φ の集合 Φ は、可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の（零元を含む）ある部分集合（部分空間とは限らない）である：

$$\Phi(\ni 0)\subseteq \mathfrak{H}. \tag{K1.2}$$

例えば、簡単な可分な実ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ を挙げておこう。

$$M\equiv\{1, 2, \cdots, n\},\ \ dm(x)=1 \text{ if } x\in M \tag{K1.3}$$

とすると、内積 (φ, η) は、

$$(\varphi, \eta)=\sum_{k=1}^{n} a_k\cdot b_k \tag{K1.4}$$

ここに、

$\varphi=\mathrm{col}(a_1\ a_2\cdots a_n)$（実数列としての列ベクトル）

$\eta=\mathrm{col}(b_1\ b_2\cdots b_n)$ (K1.5)

と表わされ、この内積 (φ, η) を採用する n 次元ユークリッド空間 R^n は可分な実ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ であることに注意しておく。

K 2. 代表パターン集合 Ω

Φ の任意の元であるパターン φ はカテゴリ集合

$$\underline{\mathfrak{C}}\equiv\{\mathfrak{C}_j \mid j\in J\} \tag{K2.1}$$

のいずれか1つに帰属しているとし、第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン ω_j の集合

$$\Omega\equiv\{\omega_j \mid j\in J\} \tag{K2.2}$$

を導入する。式（K2.1）のカテゴリ集合 $\underline{\mathfrak{C}}$ は以後常に、2つ以上の要素を持つと仮定する。また、確率条件式

$$\forall j\in J, 0<p(\mathfrak{C}_j)\wedge\sum_{j\in J} p(\mathfrak{C}_j)=1 \tag{K2.3}$$

を満たす各カテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の生起確率 $p(\mathfrak{C}_j)$ をも導入しておく。

初めて目にする事物にそれに相応しいラベルを与えると言った場面に含まれる認知機能を、心理学ではカテゴリ作用（categorization）と呼ぶが、本研究では**パターン認識**（pattern recognition）と呼ぶ。本研究では、典型（prototype）を中心として事例パターン集合が序列づけられたカテゴ

リ構造を持つと想定して、以後、論を進めるとすれば、式（K2.2）の代表パターン集合 Ω が、このような典型の集合である。

尚、各代表パターン ω_j の適応的決定法は、文献［B6］の第21部，付録1、或いは、文献［B3］の付録Iにある。

K 3. パターンモデル $T\varphi$ の満たすべき4性質

入力 $\varphi \in \Phi$ に対するその出力がそのパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ であるような写像

$$T: \Phi \to \Phi \tag{K3.1}$$

は、次の4性質①～④（axiom 1の（i）、（ii）、（iii）の3後半、並びに、（iv））を満たさなければならないとしてみよう。

性質②，④は各々、正定数倍、T作用というパターン変形の下で、パターンという意味概念が保存されることを要請している。

①**(零元不動点性)** $\varphi = 0$ について $T\varphi = \varphi \in \Phi$.

②**(正定数倍不変性)** $\forall \varphi \in \Phi$, $T(a \cdot \varphi) = T\varphi \in \Phi$

for any positive real number a.

③**(ベキ等性)** $\forall \varphi \in \Phi$, $T(T\varphi) = T\varphi$.

④**(非零写像性)** $\exists \varphi \in \Phi$, $T\varphi \neq 0$. □

4性質①～④を満たすという意味でモデル構成作用素と呼ばれる式（K3.1）の写像 T を導入することの1つの意義は、実際に処理の対象とするパターン φ というものの帰納的定義が可能になり、パターン認識システムの自己組織化が精密に論じられることである［B3］。直接的には、パターンモデル $T\varphi$ を、変形前に戻された処理対象とする問題のパターン φ の近似としての正規化パターンと想定すると、パターン認識分野におけるいわゆる式（K3.1）の正規化写像 T が最小限満たさなければならない4性質①～④を指摘していることである。

上述の4性質①～④を満たす式（K3.1）の写像 T はこれまで、文献Bで多数指摘されている。

K 4. 類似度関数 SM の満たすべき3性質

本章では、K 3章の4性質①～④を満たしているパターンモデル $T\varphi$ を生成する式（K3.1）のモデル構成作用素 T の下で不変な類似度関数

$$SM: \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \tag{K4.1}$$

について考察する。

式（K4.1）の写像 SM が少なくとも、次の**3性質（直交性，確率性，T-不変性）**を満たすとしてみよう。1 より大きくない非負量 $SM(\eta, \omega_j)$ は、パターン $\eta \in \Phi$ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン $\omega_j \in \Omega \subset \Phi$ と似ている程度を表しているとしょう。最大値 1 に近い値を持つほど、似ていると考える訳である：

（イ）（直交性）　$SM(\omega_i, \omega_j)$

$= 1$ if $i = j$, $= 0$ if $i \neq j$.

（ロ）（確率性；総和規格性）　$\forall \eta \in \Phi$,

$\sum_{j \in J} SM(\eta, \omega_j) = 1$.

（ハ）（T-不変性）　$\forall \eta \in \Phi$, $\forall j \in J$,

$SM(T\eta, \omega_j) = SM(\eta, \omega_j)$. □

上述の（イ），（ロ），（ハ）（axiom 2）の効用について解説しておこう。

（イ）は、式（A7）での各代表パターンω_i，$\omega_j(i \neq j)$が、**カテゴリ帰属情報を全く共有しない**ことを要請している。

次に、（ロ）は、$SM(\eta, \omega_j)$は処理の対象としている問題のパターンηが**代表パターンω_jを表している確率**と解釈できることを要求している。

パターン変換機能を持つモデル構成作用素Tが各カテゴリ$\mathfrak{C}_j$について、類似度SMの値を保存することを要請している（ハ）は、パターンモデル$T\eta \in \Phi$とその原パターン$\eta \in \Phi$とが各カテゴリ$\mathfrak{C}_j \in \underline{\mathfrak{C}}$の代表パターン$\omega_j \in \Omega \subset \Phi$に対し、**同一の類似度SMの値を備えている**ことを要求している。

以上で（イ），（ロ），（ハ）について解説が終わった。上記の3性質（直交性，確率性，T-不変性）を満たす類似度関数SMはこれまで文献Bで多数指摘されているが、次節では、このようなSMを1つ構成しよう。

K 5. 類似度関数SMの1構成

A4章の3性質（イ），（ロ），（ハ）を満たす式（K4.1）の写像SMはこれまで多数構成されている。本章では、新たに、1例だけを構成しよう。

［例K1］**（パターンモデル間ノルム距離に基づいたSMの構成）**

容易に満たされる条件

$$\| T\omega_i - T\omega_j \| > 0 \, (i \neq j) \wedge [\forall j \in J, \| T\omega_j \| > 0] \qquad \text{(K5.1)}$$

の下で考えよう。各正数ε_jを、不等式

$$\forall j \in J, 0 < \varepsilon_j < \min_{k \in J - \{j\}} \| T\omega_k - T\omega_j \| / [\| T\omega_k \| + \| T\omega_j \|] \leqq \| T\omega_i - T\omega_j \| / [\| T\omega_i \| + \| T\omega_j \|] \quad \text{if } i \neq j \qquad \text{(K5.2)}$$

を満たすように選び、固定しておく。その後、各$s_j(\varphi)$を、

（一）$\| T\varphi - T\omega_j \| < \varepsilon_j \cdot [\| T\varphi \| + \| T\omega_j \|]$のとき

$$s_j(\varphi) \equiv \varepsilon_j - \| T\varphi - T\omega_j \| / [\| T\varphi \| + \| T\omega_j \|]$$

（二）$\| T\varphi - T\omega_j \| \geqq \varepsilon_j \cdot [\| T\varphi \| + \| T\omega_j \|]$のとき

$$s_j(\varphi) \equiv 0 \qquad \text{(K5.3)}$$

と定義すると、この式（K5.3）の類似性尺度$s_j(\varphi)$を用いて、K4章の3性質（直交性，確率性，T-不変性）を満たす式（K4.1）の類似度関数SMの1つは、

$$SM(\varphi, \omega_j) \equiv \begin{cases} s_j(\varphi) / \sum_{k \in J} s_k(\varphi) \\ \quad \cdots \exists k \in J, \| T\varphi - T\omega_k \| / [\| T\varphi \| + \| T\omega_k \|] < \varepsilon_j \text{のとき} \\ p(\mathfrak{C}_j) \\ \quad \cdots \forall k \in J, \| T\varphi - T\omega_k \| / [\| T\varphi \| + \| T\omega_k \|] \geqq \varepsilon_j \text{のとき} \end{cases} \qquad \text{(K5.4)}$$

と定義されるものであることがわかる。 □

K 6. 最大類似度（認識）法

パターン集合 Φ から式 (K2.1) のカテゴリ集合 $\underline{\mathfrak{C}}$ への多対1の写像としての**認識写像**（recognizer）

$$\mathrm{RG}:\Phi\to\underline{\mathfrak{C}} \qquad \text{(K6.1)}$$

を設定するには、簡単には、**最大類似度（認識）法** [B3], [B4]、つまり、A4章の類似度関数 SM の3性質（直交性，確率性，T-不変性）に注目して、

"パターン $\varphi\in\Phi$" について、

The pattern φ is then determined to belong to the same category to which the nearest ω_j belongs such that

$$\max_{k\in J}\mathrm{SM}(T\varphi,\omega_k)=\mathrm{SM}(T\varphi,\omega_j) \qquad \text{(K6.2)}$$

という認識推断を行う機能を考えれば良い。

このとき、同値関係 $_s\sim$ が、

$$\varphi\,{}_s\!\sim\eta \Leftrightarrow$$

$$\underset{k\in J}{\operatorname{argmax}}\,\mathrm{SM}(\varphi,\omega_j)=\underset{k\in J}{\operatorname{argmax}}\,\mathrm{SM}(\eta,\omega_j) \qquad \text{(K6.3)}$$

と定義され、$\eta\in\Phi$ を含む**認識同値類**と称されて良い $\{\eta\}$ は、

$$\{\eta\}\equiv\{\varphi\in\Phi\mid\varphi\,{}_s\!\sim\eta\}\subset\Phi \qquad \text{(K6.4)}$$

と表されることに注意する。認識同値類 $\{\eta\}$ は、パターン η と同一のカテゴリに帰属すると認識推断されるパターン $\varphi\in\Phi$ の集合である。A2章の、SM のT-不変性より、写像 T による同値関係 $_s\sim$ の保存則

$$\forall\eta\in\Phi,\ T\eta\in\{\eta\} \qquad \text{(K6.5)}$$

が成立しており、パターン $\eta\in\Phi$ のモデル $T\eta\in\Phi$ に対し、T により正規化がなされた形で、最大類似度法という認識の働きが達成されている。

尚、K3章の3性質①, ②, ③より、処理の対象とするパターン φ の集合 Φ は、

$$R^{++}\cdot\Phi\equiv\{a\varphi\mid\varphi\in\Phi\}$$

, ここに、R^{++}は正実数の集合 (K6.6)

$$T\cdot\Phi\equiv\{T\varphi\mid\varphi\in\Phi\} \qquad \text{(K6.7)}$$

として、埋込性質

$$\{0\}\cup R^{++}\cdot\Phi\cup T\cdot\Phi\subset\Phi \qquad \text{(K6.8)}$$

を備えていなければならないが（**パターンの帰納的定義**）、この埋込性質を表わす式（K6.8）を満たす Φ の逐次的構成法は、文献［B6］の第24部にあり、錐として、

$$\Phi=R^{++}\cdot(\Phi_B\cup T\cdot\Phi_B) \qquad \text{(K6.9)}$$

と求められる［B3］。ここに、Φ_B は $\mathfrak{H}$ の零元を含んでいるような"パターンと事前に判明している $\mathfrak{H}$ の部分集合"であり、**基本領域**（basic domain）と呼ばれるものである。基本領域 Φ_B に対し、式（K6.9）のパターン集合 Φ は誘導領域（derived domain）と呼ばれる。

付録L. パターン集合 Φ 上の半順序関係 ∝ , 同値関係～ とパターンの整形化

本付録Lでは、付録Aの解説を前提とし、半順序関係 ∝ を導入し、∝ に基づくパターンの整形化変換の意味、パターン集合 Φ の商集合 Φ/～ とパターンモデル集合 T・Φ との同一視可能性（定理L1）、並びに、付録Aのモデル構成作用素 T の4構成例が説明される。

L1. 半順序関係 $\propto$ によるパターンの変形

L1.1　半順序関係 $\propto$ とその上限

処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ についての、2条件式（K6.8），（K6.9）に注意し、パターン $\varphi \in \Phi$ はパターン $\eta \in \Phi$ に**整形化変換**（structure-preserving reduction）可能であることを、

$$\varphi \propto \eta \tag{L1.1}$$

と表記する。

例えば、線処理過程（line process）を導入し、事後ポテンシャルエネルギー関数を最小にする物体表面を記述する画像を求めるという“マルコフ確率場での画像復元手法［A32］”では、画像 η のエネルギーの方が画像 φ のエネルギーより大きくなければ、半順序関係式（L1.1）が成立していると考えられよう。

この曖昧さ（fuzziness, ambiguity）に関する2元関係 $\varphi \propto \eta$ に対し、次の4解釈（一）～（四）が可能であるとする：

（一） φ は η の近似である。

（二） φ は η に要約される。

（三） η は φ の情報を含む。

（四） η は φ に変形されている。 □

上手な知覚と記憶の働きというのは、原パターン φ のあらゆる部分を等しく重要視して再生するのではなく、φ の持つ構造全体の判断が容易に得られるように、刺激としてのパターン φ の持つ多くの情報から、重要ないくつかの部分情報のみを再生すると考えられる。2項関係 $\propto$ が適切に用意されていれば、式 (L1.1) は、パターン η がパターン φ の精密化として、上手な知覚と記憶の働きで再生された状況を表していると、考えられる。

$\propto$ は、処理の対象とするパターン φ の集合 Φ $(\subset \mathfrak{H})$ 上での、反射律（reflexive law；$\varphi \propto \varphi$），**反対称律**（antisymmetric law；以下の式（L1.4）であり、$\varphi \propto \eta$ かつ $\eta \propto \varphi$ ならば $\varphi \sim \eta$），**推移律**（transitive law；$\varphi \propto \eta$ かつ $\eta \propto \psi$ ならば $\varphi \propto \psi$）（**半順序の公理**［B3］）を満たす（曖昧さに関する）**半順序関係**（partial ordering）とし、この半順序関係 $\propto$ の下での、パターン集合 Ψ $(\subseteq \Phi)$ の上限（supremum）、即ち、**最小上界**（least upper bound）$\triangle\Psi$ を次のように定義する。

［Ψ $(\subseteq \Phi)$ の最小上界 $\triangle\Psi$ の定義］

Φ を半順序関係 $\propto$ の定義された半順序集合（partially ordered set）とするとき、Φ の部分集合 Ψ の上限 ψ とは、次の2条件（ｉ），（ii）を満たす Φ の要素であり（Ψ の要素とは限らない）、

$$\psi \equiv \triangle\Psi \in \Phi \tag{L1.2}$$

と書く：

（ｉ）（上界性；$\Psi \propto \psi$） $\forall \eta \in \Psi, \eta \propto \psi$.

（ii）（最小性；$\Psi \propto \psi'$ ならば、$\psi \propto \psi'$）

$\exists \varphi \in \Phi, \forall \eta \in \Psi, \eta \propto \varphi$ ならば、$\psi \propto \varphi$. □

特に、$\triangle\{\varphi_1, \varphi_2\}$ を、

$$\varphi_1 \triangle \varphi_2 \tag{L1.3}$$

と表すことがある。式（L1.3）の $\varphi_1 \triangle \varphi_2$ は φ_1 と φ_2 とを併合して得られたパターン（**φ_1, φ_2 双方に共通な情報を備えているパターン**）であるという。

次の命題L1の成立は、$\varphi \triangle \eta$ が有限集合 $\{\varphi, \eta\}$ に関する半順序関係 $\propto$ の上限であることから、明らかである。

［命題L1］（上限の性質）

$$\varphi \propto \eta \Leftrightarrow \varphi \triangle \eta = \eta. \qquad \Box$$

L1.2　同値関係 ～

2つのパターンφ, $\eta \in \Phi$がある2項関係 ～ を持っていること（同等な情報を持っている事態）$\varphi \sim \eta$を、

$$\varphi \sim \eta \Leftrightarrow \varphi \propto \eta \wedge \eta \propto \varphi \quad \text{（反対称律）} \tag{L1.4}$$

と定義してみよう。

2項関係 ～ は、**反射律**（reflexive law；$\varphi \sim \varphi$），**対称律**（symmetric law；$\varphi \sim \eta$ならば$\eta \sim \varphi$），**推移律**（transitive law；$\varphi \sim \eta$かつ$\eta \sim \psi$ならば$\varphi \sim \psi$）（**同値関係の公理**［B3］）を満たすことが直ちにわかる。パターン集合Φの任意の2元φ, ηの間に、2項関係 ～ が成立するかしないかを必ず決めることができ、この意味で、$\varphi \sim \eta$を、**φがηと同値である**と読む。

φと同値なΦの元全体をφを含むΦの**同値類**（the equivalence class containing φ）といい、

$$[\varphi] \equiv \{\eta \in \Phi \mid \varphi \sim \eta\} \, (\subset \Phi \subset \mathfrak{H}) \tag{L1.5}$$

と表す。任意にとった2つの同値類は、全く一致するか、または共通の元を1つも持たない。同値類［φ］の1つの要素を［φ］の代表元（representative）という。同値関係（equivalence relation）～ による Φ の**商集合**（quotient set）$\Phi/\sim$とは、Φの同値類全体の集合

$$\Phi/\sim \equiv \{[\varphi] \mid \varphi \in \Phi\} \tag{L1.6}$$

のことである。

L2.2　商集合 Φ/～ の、パターンモデル集合 T・Φ による意味付け

パターン集合 Φ からその商集合 $\Phi/\sim$ の上への写像

$$q : \Phi \to \Phi/\sim \tag{L2.1}$$

を、Φ の**商変換**（quotient transformation）という。

式（K6.7）のパターンモデル集合 $T \cdot \Phi$ を用意すると、同値類［φ］$\subset \Phi$ と、パターンモデル$T\varphi \in T \cdot \Phi$とは同一視でき、［$\varphi$］の意味とは$T\varphi$であること、つまり、商集合 $\Phi/\sim$ の意味標識集合とはパターンモデル集合 $T \cdot \Phi$ であることを、次の定理L1は指摘している。

［定理L1］**（商集合，パターンモデル集合間の対応定理）**

L2.3節の例L1～L4の式（A1.1）でいうモデル構成作用素 T については、式（L2.1）の商変換 q と異なり、写像

$$F : \Phi/\sim \to T \cdot \Phi \tag{L2.2}$$

は次の（i），（ii）を満たし、1対1（injection）かつ上への写像（surjection）である：

（i）$\varphi \sim \eta$ が成立しないのなら、常に$T\varphi \neq T\eta$.

（ii）$T \cdot \Phi$の任意の元$T\varphi$に対し、$F([\varphi]) = T\varphi$を満たす$\Phi/\sim$の元［φ］が常に存在する.

（証明）同値関係の定義式（L1.4）より、

$$T\varphi \sim T\eta \Rightarrow T\varphi = T\eta \tag{L2.3}$$

は明らかに成り立つ。ところが、L2.3節の例L1～L4のモデル構成作用素 T では、逆の関係

$$T\varphi = T\eta \Rightarrow T\varphi \sim T\eta \tag{L2.4}$$

もいえ、よって、

$$T\varphi = T\eta \Rightarrow T\varphi \sim T\eta \tag{L2.5}$$

が成り立つ。

ところが、L2.3節の例L1～L4のモデル構成作用素 T では、

$$\varphi \sim \eta \Leftrightarrow \mathrm{T}\varphi \sim \mathrm{T}\eta \tag{L2.6}$$

も成り立っており、式（L1.5）の同値類$[\varphi]$の定義を勘案して、2式（L2.5），（L2.6）より、

$$[\varphi]=[\eta] \Leftrightarrow \varphi \sim \eta \Leftrightarrow \mathrm{T}\varphi = \mathrm{T}\eta \tag{L2.7}$$

を得、これは（ⅰ），（ⅱ）の成立を意味する。 □

L2.3 モデル構成作用素 T の4例

本節では、付録K, K3章の4性質①～④を満たす式（A1.1）のモデル構成作用素 T の4構成例L1～L4が示される。2式（L2.4），（L2.6）が満たされる4例である。

例L1, L2では、

$\forall x \in M,\ \varphi(x)=0$ のとき、

$$\varphi(x)/\sup_{x\in M}|\varphi(x)|=0 \tag{L3.1}$$

と、約束する。

［例L1］**（正定数倍規格化パターンモデル Tφ）**

パターン$\varphi=\varphi(x)$を有界な実数値関数とする。

条件式（L3.1）の約束に注意し、

$$(\mathrm{T}\varphi)(x) \equiv \varphi(x)/\sup_{x\in M}|\varphi(x)| \tag{L3.2}$$

と定義される式（A1.1）の写像 T は、正定数倍規格化性

$\exists C \in R^{+}$(正実数の集合)，$\forall x \in M,\ \varphi(x)=C\cdot\eta(x)$

$$\Leftrightarrow \forall x \in M,\ (\mathrm{T}\varphi)(x)=(\mathrm{T}\eta)(x) \tag{L3.3}$$

を満たし、写像 T は、付録K，K3章の4性質①～④を満たすモデル構成作用素であることが確かめられる。

不等式

$$\forall x \in M,\ -1<h(x)<+1 \tag{L3.4}$$

を満たす実数値関数$h(x)$を用意し、**閾値関数**として使用しよう。式（L1.1）の2項関係$\varphi \propto \eta$を、

$\varphi \propto \eta$

$\Leftrightarrow \forall x \in M,\ -1 \leqq (\mathrm{T}\eta)(x) \leqq (\mathrm{T}\varphi)(x) < h(x)$

$$\vee\ h(x) \leqq (\mathrm{T}\varphi)(x) \leqq (\mathrm{T}\eta)(x) \leqq +1 \tag{L3.5}$$

と定義してみると、Φ 上の半順序関係である。

式（L1.4）の同値関係$\varphi \sim \eta$は、

$$\varphi \sim \eta \Leftrightarrow \forall x \in M,\ (\mathrm{T}\varphi)(x)=(\mathrm{T}\eta)(x) \tag{L3.6}$$

と表され、式（L3.3）から、$\varphi \sim \eta$なる2つのパターンφ，ηは、正実定数倍の関係にあることがわかる。

次の命題L2が成立ち、2値化パターン$\psi=\psi(x)\in\{-\sup_{x\in M}|\psi(x)|,\ +\sup_{x\in M}|\psi(x)|\}\neq 0$ for any $x \in M$は、この例L1では、式（L3.5）の半順序関係 $\propto$ の**極大要素**（maximal element）であることがわかる。

［命題L2］（半順序関係 $\propto$ に関する極大要素の存在）

$\forall x \in M,\ (\mathrm{T}\psi)(x)\in\{-1,\ +1\}$であれば、$\psi \propto \varphi$を満たす$\varphi \in \Phi$ は同値関係～に関し、ψと等しいものを除くと存在しない。つまり、$\psi \in \Phi$より大きい$\varphi \in \Phi$は存在しない。 □

付録K, K3章の性質③の成立に注意すると、式（L3.6）から、2式（L2.4），（L2.6）の成立がわかる。 □

[例L2]（**3値パターンモデル Tφ**）

パターン $\varphi=\varphi(x)$ を有界な実数値関数とする。

不等式

$$\forall x\in M, -1<\psi^-(x)\leqq 0\leqq \psi^+(x)<+1 \tag{L3.7}$$

を満たす実数閾値パターン関数 $\psi^0(x)$ を用意し、閾値関数として使用しよう。

条件式（L3.1）の約束に注意し、式（A1.1）の写像Tを、次のように定義する：

（i） $-1\leqq \varphi(x)/\sup_{x\in M}|\varphi(x)|<\psi^-(x)$

のとき、$(T\varphi)(x)\equiv -1.$

（ii） $\psi^-(x)\leqq \varphi(x)/\sup_{x\in M}|\varphi(x)|$

$\leqq \psi^+(x)$のとき、$(T\varphi)(x)\equiv 0.$

（iii） $\psi^+(x)<\varphi(x)/\sup_{x\in M}|\varphi(x)|\leqq +1$

のとき、$(T\varphi)(x)\equiv +1.$ (L3.8)

□

このとき、3値への規格化性

$\forall x\in M, \varphi(x)\in\{-1,0,+1\}$ であれば、$T\varphi=\varphi$ (L3.9)

が成立しており、写像 T：$\Phi\to\Phi$ は、付録K, K3章の4性質①～④を満たすモデル構成作用素であることが確かめられる。

不等式（L3.4）を満たす閾値関数 h(x) を用意し、式（L1.1）の $\varphi\propto\eta$ を、式（L3.5）で定義すると、Φ 上の半順序関係である。

式（L1.4）の同値関係 $\varphi\sim\eta$ は、式（L3.6）のように表される。

この例L2においても、命題L2はそのまま成り立つことがわかる。

付録K, K3章の性質③の成立に注意すると、式（L3.6）から、2式（L2.4），（L2.6）の成立がわかる。 □

以下の例L3において必要とされる次の補助定理L1は容易に証明される。

[補助定理L1]（**規格化実数値不動点定理**）

規格化条件

$$\sum_{k\in L} c_k^2\in\{0,1\} \tag{L3.10}$$

を満たす与えられた実数値係数 $c_k\in R$（実数の集合）の組 $\{c_k\}_{k\in L}$ の1次結合

$$\eta\equiv\sum_{k\in L} c_k\cdot\psi_k \tag{L3.11}$$

は、式（L3.18）の各 $u(\varphi,k)$ を用いて式（L3.19）で定義される写像Tの不動点である：

$$T\eta=\eta. \tag{L3.12}$$

□

[例L3]（**規格化1次展開パターンモデル Tφ**）

可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}=L_2(M\,;\,dm)$ の元 ψ_k の組

$$\{\psi_k\}_{k\in L} \tag{L3.13}$$

は、1次独立であるとする。このような1次独立な各 ψ_k は、wavelet理論［A33］，正則化理論（regularization theory）［A34］に登場している。各 ψ_k は式（L3.19）で定義される写像Tにより、式（L3.21）に示されるごとく、そのまま誤差なく忠実に復元可能であり、この各 ψ_k は、すべてのパターン φ の構造はそこまで分解できるという意味で極小のパターンであり、**パターン形状素**［B5］と呼ばれる。

このとき、

$$\| \varphi - \sum_{k \in L} a_k \cdot \psi_k \|^2 \rightarrow \min \qquad \text{(L3.14)}$$

を満たす最小自乗近似複素係数 a_k の組 $a_k, k \in L$ を求める。それには、連立1次方程式

$$\sum_{k \in L} a_k \cdot (\psi_k, \psi_\ell) = (\varphi, \psi_\ell), \ \ell \in L \qquad \text{(L3.15)}$$

を解けばよい［A35］。この解 $a_k(\varphi) \equiv a_k, k \in L$ が得られたならば、パターン $\varphi \in \mathfrak{H}$ は、直交条件

$$\forall k \in L, (\varphi_\perp, \psi_k,) = 0 \qquad \text{(L3.16)}$$

を満たす残差パターン $\varphi_\perp \in \mathfrak{H}$ が存在して、

$$\varphi = \sum_{k \in L} a_k(\varphi) \cdot \psi_k + \varphi_\perp \qquad \text{(L3.17)}$$

と、1次展開の形式に表現される。

パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出される第 $k \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, k)$ として、

$$u(\varphi, k) \equiv \begin{cases} a_k(\varphi) / [\sum_{k \in L} |a_k(\varphi)|^2]^{1/2} & \cdots \exists \ \ell \in L, a_\ell(\varphi) \neq 0 \text{ の場合} \\ 0 & \cdots \forall \ \ell \in L, a_\ell(\varphi) = 0 \text{ の場合} \end{cases} \qquad \text{(L3.18)}$$

を用意し、2式（L3.2),（L3.8）での写像 T は異なり、式（L3.17）の、パターン $\varphi \in \Phi$ の1次展開に対応して、

$$T\varphi \equiv \sum_{k \in L} u(\varphi, k) \cdot \psi_k \qquad \text{(L3.19)}$$

と定義される式（A1.1）の写像 T を導入する。文献［B5］においては、式（LL3.19）のパターンモデル形式について解説されている。

加法的雑音 $\varphi_\perp \in \mathfrak{H}$ の除去性

$$\forall \varphi \in \mathfrak{H}, T(\sum_{k \in L} a_k(\varphi) \cdot \psi_k + \varphi_\perp) = T(\sum_{k \in L} a_k(\varphi) \cdot \psi_k) \qquad \text{(L3.20)}$$

が成立し、上述の補助定理L1を考慮すると、式（L3.19）で定義される式（A1.1）の写像 T は、付録K, K3章の性質③を満たすことがわかる。特に、各 ψ_k の変形不能性を示す不動点写像性

$$\forall k \in L, \ T(\pm\psi_k) = \pm\psi_k \text{（複号同順）} \qquad \text{(L3.21)}$$

が成り立つことに注意しておく。

式（L3.19）の写像 T は、付録K, K3章の4性質①～④を満たすモデル構成作用素であることが容易に確かめられる。

以後、各 $a_k(\varphi)$ ($k \in L$) が実数値であるようなパターン $\varphi = \varphi(x)$ を処理の対象とする。

閾値 $th(k)$ の組 $\{th(k)\}_{k \in L}$ を用意・固定し、

2つのパターン $\varphi, \ \eta \in \Phi \subseteq \mathfrak{H}$ について、

$$\varphi \propto \eta \Leftrightarrow \forall k \in L, \ u(\eta, k) \leqq u(\varphi, k) < th(k) \vee th(k) \leqq u(\varphi, k) \leqq u(\eta, k). \qquad \text{(L3.22)}$$

と定義されるパターン集合 Φ 上の2項関係 $\propto$ は半順序関係である。

同値関係 $\varphi \sim \eta$ は、

$$\varphi \sim \eta \Leftrightarrow \forall \ell \in L, u(\varphi, \ell) = u(\eta, \ell) \qquad \text{(L3.23)}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in M, \ (T\varphi)(x) = (T\eta)(x) \qquad \text{(L3.24)}$$

と表され、$\varphi \sim \eta$ なる2つのパターンφ, η は同一の特徴量の組を備えており（式（L3.23））、2つのパターンモデル $T\varphi, T\eta$ は、一致すること（式（L3.24））がわかる。

次の命題L3は、この例L3においては、各パターン形状素 ψ_k が式（L3.22）の半順序関係 $\propto$ の極大要素であることを指摘している。

［命題L3］（半順序関係 $\propto$ に関する極大要素の存在）

$$\forall k \in L, \forall \varphi \in \Phi, \varphi \propto c_k \cdot \psi_k + \eta_\perp \text{ such that } \forall \ell \in L, (\eta_\perp, \psi_\ell) = 0.$$

（証明）　$\exists k \in L, a_k(\eta) \in \{-1, +1\}$

$\wedge [\forall \ell \in L - \{k\}, a_k(\eta) = 0]$

であれば、$\varphi \propto \eta$ が成立することがわかるが、このとき、$\forall k \in L, \eta = c_k \cdot \psi_k + \eta_\perp$ such that $\forall \ell \in L, (\eta_\perp, \psi_\ell) = 0$. □

このとき、付録K, K3章の性質③より、モデル $T\varphi$ が原パターンφから抽出された式（L3.18）でいう特徴量の組

$$\underline{u}(\varphi) \equiv \{u(\varphi, \ell) \mid \ell \in L\} \tag{L3.25}$$

を保存している事実、つまり、

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall k \in L, u(T\varphi, k) = u(\varphi, k) \tag{L3.26}$$

が成り立っていることは、式（L3.13）のパターン形状素ψ_kの組$\{\psi_k\}_{k \in L}$の1次独立性より直ちに確かめられる。

付録K, K3章の性質③の成立に注意すると、式（L3.24）から、2式（L2.4),（L2.6）の成立がわかる。□

以下の例L4において必要とされる次の補助定理L2は容易に証明される。

［補助定理L2］**（3値不動点定理）**

与えられた3値係数 $c_k \in \{-1, 0, +1\}$ の組 $\{c_k\}_{k \in L}$ の、式（L3.11）の1次結合ηは、不動点方程式（L3.12）を満たし、式（L3.28）の各$u(\varphi, \ell)$を用いて式（L3.19）で定義される写像 T の不動点である。□

［例L4］**（展開係数の3値規格化1次展開パターンモデル $T\varphi$）**

上述の例L3と同様な設定の下で、パターンφの1次展開式（L3.14）での各**実数値**展開係数$a_k(\varphi)$を用いて、

$$b_k(\varphi) \equiv \begin{cases} a_k(\varphi) / \sup\limits_{k \in L} |a_k(\varphi)| & \cdots \exists\, \ell \in L, a_\ell(\varphi) \neq 0 \text{ の場合} \\ 0 & \cdots \forall\, \ell \in L, a_\ell(\varphi) = 0 \text{ の場合} \end{cases} \tag{L3.27}$$

を用意し、パターン$\varphi \in \Phi$から抽出される第 $\ell \in L$番目の特徴量 $u(\varphi, \ell)$ として、式（L3.18）の定義と異なり、

$$u(\varphi, \ell) \equiv \begin{cases} -1 \cdots -1 \leqq b_\ell(\varphi) < e_\ell^- \text{ の場合} \\ 0 \cdots e_\ell^- \leqq b_\ell(\varphi) \leqq e_\ell^+ \text{ の場合} \\ +1 \cdots e_\ell^+ < b_\ell(\varphi) \leqq +1 \text{ の場合} \end{cases} \tag{L3.28}$$

$$\text{ここに、} -1 < e_\ell^- \leqq 0 \leqq e_\ell^+ < +1 \tag{L3.29}$$

を用意し、2式（L3.2),（L3.8）での写像 T は異なり、式（L3.17）の、パターン$\varphi \in \Phi$ の1次展開に対応して、式（L3.19）で定義される式（A1.1）の写像 T を導入する。

加法的雑音$\varphi_{\perp} \in \mathfrak{H}$の除去性を示す式（L3.20）も成立している。

上述の補助定理L2を考慮すると、式（L3.19）で定義される式（A1.1）の写像 T は、付録K, K3章の性質③を満たすことがわかる。特に、不動点方程式（L3.21）も成り立つことに注意しておく。

式（L3.19）で定義される写像 T は、付録K, K3章の4性質①～④を満たすモデル構成作用素であることが容易に確かめられる。

閾値 th(k) の組 $\{th(k)\}_{k \in L}$ を用意・固定し、2つのパターン φ, $\eta \in \Phi \subseteq \mathfrak{H}$ について、パターン集合 Φ 上の2項関係 $\varphi \propto \eta$ を式（L3.22）で定義すれば、例L3と同様、2項関係 $\propto$ は半順序関係である。

同値関係$\varphi \sim \eta$ は2式（L3.23),（L3.24）のごとく、表され、$\varphi \sim \eta$ なる2つのパターンφ, η は同一の特徴量の組を備えており（式（L3.23))、2つのパターンモデル $T\varphi$, $T\eta$ は、一致すること（式（L3.24)）がわかる。

次の命題L4は、この例L4においては、抽出される各特徴量 $u(\psi, k)$ が ± 1 であるようなパターン ψは式（L3.22）の半順序関係 $\propto$ の極大要素であることを指摘している。

[命題L4]（半順序関係 $\propto$ に関する極大要素の存在）

$$\forall k \in L, \forall u(\psi, k) \in \{-1, +1\}$$

であれば、$\forall \varphi \in \Phi, \varphi \propto \psi$. □

このとき、付録L, K3章の性質③より、モデル $T\varphi$が原パターンφから抽出された式（L3.18）でいう特徴量の、式（L3.25）の組を保存している事実、つまり、式（L3.26）が成り立っていることは、式（L3.13）のパターン形状素ψ_kの組$\{\psi_k\}_{k \in L}$の1次独立性より直ちに確かめられる。付録K, K3章の性質③の成立に注意すると、式（L3.24）から、2式（L2.4),（L2.6）の成立がわかる。

尚、パターン$\varphi \in \Phi$が与えられたとき、式（L1.1）の$\varphi \propto \eta$を満たす“パターンφの整形化パターン$\eta \in \Phi$を求める方法については紙面の都合上割愛されたことを付記する。

（著者 鈴木昇一，勤務先・所属 文教大学・情報学部・情報システム学科，“文教大学・情報学部・情報研究 no.23”への投稿論文，論文題目 風景画から知識を抽出し、解釈するシステムの、ファジィ推論ニューラルネットによる構成，投稿年月日　2000年1月12日）