プロダクション・システムとしてのファジィ・マルチメディア・コンピータと、空間多重パターンファジィ推論系

鈴木　昇一

A Fuzzy Multimedia Computer as a Production System, and Spatially Multiple Inference-Systems about Patterns

Shoichi Suzuki

あらまし

S.Suzuki の研究については最近では、記号論理を改善することに、注意が向けられている。

SS理論と名付けられたパターン認識の数学的理論に登場する RECOGNITRON は、認識されるべき問題の入力パターン φ に対応し、"axiom 1を満たすパターンモデル" $T\varphi$ を求め、$T\varphi$ を恰も、φ かのように扱う。このとき、写像 T はパターンモデル構成作用素と呼ばれる。本論文では、原パターン φ から抽出される特徴量が各々、その絶対値が1より大きくない連続実数値、-1, 0, $+1$ の3値、0, 1 の2値である3つの場合に応じて、このような3種のパターンモデル構成作用素 T が提案されている。

2値論理はファジィ論理の特別な場合であり、解釈 I の下で論理式 S の真理値 TV(S) が 2^{-1} より小さくないとき、解釈 I は論理式 S を充足するという。論理式 F が与えられたとしよう。論理式 G が F の論理的帰結であるとは $F \wedge \neg G$ が充足不可能であることである。2値記号論理学では、**導出原理と呼ばれている極めて優秀な推論規則**がある。この推論規則は論理的帰結を演繹する場面で完全であることが知られている。すべての論理的帰結は導出原理を繰り返し適用することにより得られる。

3種の T を用いた導出原理に基づいて、空間多重ファジィ論理演算系を使ったパターンを用いた3種の推論系を構成する。この3種の推論系は従来のファジィ推論系をその特別な場合として含んでいる。

2値記号論理では、G が F の論理的帰結であるとき、TV(G) が TV(F) より小さくない。パターンモデル $T\eta$ が $T\varphi$ の論理的帰結であるとき、パターンモデルから抽出される特徴量についてのある半順序関係 $\leqq_u$ に関し、$T\eta$ が $T\varphi$ より小さくないという SS理論の1つの基本的諸性質がある。

1種の創造的思考を遂行するエキスパート・システムの仕事を行うことのできるプロダクション・システムを実装化する諸手段はこれまで、研究され続けている。公理論的手法を採用し、**FUZZITRON** と呼ばれる1つの問題解決システムを提案する。ファジィ・プロダクション・システムとして構成された FUZZITRON はファジィ論理における min-max 原理を使用し、以前に述べられた

前提から結論を推論するこのFUZZITRONを構成するために、上述のパターン命題論理系を利用する。2値記号命題論理推論系の従来のものはこのパターン命題論理系の特別なものである。本研究で提示されたFUZZITRONとこのパターン命題論理系は知識情報処理の方向にも使われてよい1つのファジィ・マルチメディア・コンピュータに導く。FUZZITRONは多くのパターンを想起できる連想器である。与えられた問題の曖昧性を解消する方向への収束が $\leqq_u$ の使用下で証明されている。

キーワード

パターン認識の数学的理論(SS理論)　モデル構成作用素　知識情報処理
空間多重ファジィ論理演算　パターン論理推論系　記号論理推論系
半順序関係　ファジィ・プロダクション・システム

Abstract

Recent work by S.Suzuki has been aimed at a further improvement to the symbolic logic. RECOGNITRON appearing in a mathematical theory of recognizing patterns named SS-theory seeks from an input original pattern φ in question to be recognized a corresponding pattern-model $T\varphi$ which must satisfy axiom 1 suggested by S.Suzuki, and treats $T\varphi$ as though $T\varphi$ would be φ. The mapping T is called a model-construction operator. Three kinds of such a model-construction operator T are presented here according as three kinds of features extracted from the original pattern φ are continus values (=real numbers whose absolute values are not than 1), three values (=-1, 0, +1) and two values (=0, 1).

Two-valued logic is a special case of fuzzy logic in which an interpretation I is said to satisfy a formula S if TV (S) (the truth-value of S) $\geqq 2^{-1}$ under I. Given a formula F, we shall define a formula G to be a logical consequence of F if and only if $F \wedge \neg G$ is unsatisfiable. In two-valued logic, there is a very good inference rule, called the resolution principle, which has been proved complete for deducing logical consequences. All the logical consequences can be obtained by repeatedly applying the resolution principle.

Based on the resolution principle using three kinds of T, we construct three pattern-oriented systems of fuzzy inference using spatially multiple fuzzy logical operations such that as a special case it may contain a standard system of traditional fuzzy inference.

In two-valued logic,if logical formila G is a logical consequence of F, then TV(G)≧TV(F). There is a fundamental property of SS-theory of that "if pattern-model $T\eta$ is a consequence of $T\varphi$, then $T\varphi \leqq_u T\eta$" concerning a partial ordering relation $\leqq_u$ about features extracted from pattern-models.

Means for implementing a production system which can do the work of an expert system which can carry out a kind of creative thinking have studied until now. Adopting an axiomatic approach, we shall propose a problem-solving system, that is to say, a fuzzy production system called FUZZITRON for inferring consequences from previously stated premises by making good use of "min-max" principle in fuzzy logic. We utilize the above-mentioned pattern propositional logic system to aim at constructing FUZZITRON. Conventional systems of two-valued symbolic propositional inference are obtain as special cases of this system. FUZZITRON and the system presented here can lead to a fuzzy multimedia computer which may be used to the possible advantage of knowledge information processing. FUZZITRON is an

associator which can remember many patterns. Its convergence to a direction vanishing ambiguity of a given problem is proved under use of $\leqq_u$.
Key words : a mathematical theory of recognizing patterns (SS theory)   model-construction operator
knowledge information processing   spatially multiple fuzzy logical operation
inference logical system using patterns   inference logical system using symbols
partial ordering relation   fuzzy production system

1. まえがき

ファジィ・マルチメディア・コンピュータの基本方式を構想するため、本研究はその前哨の役割を果たすように企画された。

周知のように、**プロダクション・システム**は知識情報処理の推論用途のために、現在**もっとも実用化されている**エキスパート**人工知能システムである。**

その基本方式として、パターンを入出力とするモデル構成作用素 T を用いた連想器(associator)として動作する**ファジィ・プロダクション・システムの採用がよい**だろうというのが本研究のひとまずの結論である。

ある人から受け取った伝言に関しその完全な意味を把握したと思っても、後で一意的に確定していなくて、曖昧性(fuzziness)が残っていたという経験を、我々はすることがある。著者も年齢を重ねるにつれて、特に人間関係については曖昧に処理する情報処理生活法が賢明かつ無難であるであることが次第にわかってきたという余論はともかくとして、一意的に判明しない“非決定性(nondeterministic)”の一種が曖昧性であり、一意的に決定することの効果があまり認められない場合情報処理しても残る曖昧性を持った情報が fuzzy information である。情報処理の最終結果はともかくとして、その途中の情報処理を意識的に曖昧に処理する情報システム(人工知能システム)の方がそう処理しない情報システムより、人間に近い知性的かつ感性的機能を備えさせるだろうという立場からは案外、役立つことが情報化社会・マルチメディア社会・知能情報メディア社会の進展に伴い、世の中に次第に受け入れられて来たといってよかろう。

情報が入力・出力となり、構築するであう**情報システム**に曖昧性，ファジィ性を導入することの必要性を説く諸研究はこれまでにも多い [A7]。ファジィ理論となるファジィ部分集合なる数学概念を確立したのは、カリフォルニア大学・バークレイ校のL.A.Zadeh(1965)の功績である [A9]。

2つのファジィ部分集合 A，Bの2つの帰属度関数 $\mu_A(x)$，$\mu_B(x)$について、共通集合 $A \cap B$，合併集合 $A \cup B$ の帰属度関数 $\mu_{A \cap B}(x)$，$\mu_{A \cup B}(x)$は通常、

$$\mu_{A \cap B}(x) \equiv \min\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\} \tag{1.1}$$

$$\mu_{A \cup B}(x) \equiv \max\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\} \tag{1.2}$$

と定義され、全体集合 X に関する A の差集合としての補集合 $A' \equiv X - A$ の帰属度関数 $\mu_{A'}(x)$は通常、

$$\mu_{A'}(x) \equiv 1 - \mu_A(x) \tag{1.3}$$

と定義される [A13]。

A，B がファジィ部分集合ではなくして、その特別な存在としてのクリスプ部分集合(crisp subset；通常の部分集合)の場合、$\mu_A(x)$，$\mu_B(x) \in \{0, 1\}$ であり、この場合、$\mu_{A \cap B}(x)\,\mu_{A \cup B}(x)$，

$\mu_{A}{}'(x)$は各々、$A \cap B$, $A \cup B$, A' の特性関数(characteristic fucntion)に一致し、ファジィ論理(有限・可算無限・連続無限の、真・偽・多数の中間値からなる多値に関する論理)、ファジィ推論(多値推論)はブール論理(真・偽の2値に関する論理)、記号推論(2値に関する推論)に帰着する。この**一致性・帰着性**がファジィ数学が位相空間論［A1］,［A2］,［A3］を含めた多種多様な集合論，記号的2値論理推論学［A5］,［A6］を拡張しているという根拠の1つである［A8］。

本研究論文の目的は、この2つの一致性・帰着性を利用して、手書き文字パターン［B22］～［B25］，音声パターン［B9］～［B11］，［B26］～［B28］、顔画像［B14］，［B15］の処理に関し計算機シミュレーション済の各種パターン(画像・音声など)φの、S.Suzukiの提案しているモデル［B5］ $T\varphi$を使って、ファジィ情報の知能的知識処理に関する推論理論を構築することである。具体的には、主として、空間多重論理演算系を提案し、また、パターン論理推論系によって記号論理推論系を実現し、更に記号列による知識推論システムとしてのプロダクションシステムをパターン列で実現し、その結果、画像・音声などの生のマルチメディア情報が入力・出力となる情報システムとしての**ファジィ・マルチメディア・コンピータ**を構築するのに必要とされる諸基礎を確保することが本研究の目的である。

1983年末に日本認知学会、ソフトウェア科学会が相次いで発足し、続いて1986年末には人工知能学会が発足し、遂には1999年末には日本感性工学会が発足し、**知の体系としての情報学**を「記号系・パターン系双方の観点からの“知覚・記憶・学習・連想・認識・理解・知能の理論”・計算機プログラム理論・明示的知的アルゴリズム論・暗示的非論理性知能論」の立場から研究する諸組織が日本において始動し、活動している。

情報と訳される information という語句についてこの際、考えておこう。そもそも、the intelligence service, the intelligence department は通常、情報部と訳されるし、この英語句は

a group of men whose duty is to collect and study information that will help the army and navy

のことである。

(一)the act of informing；the state of being informed

(二)knowledge, facts learnt, learning

(三)a complaint or charge in a law court

の3つの意味がある**information** の語句にはもともと、**知能（intelligence）の匂いがしている。**事実、intelligence の意味は2つあり、その2つは、

(1)the power of knowing and reasoning, understanding

(2)knowledge；news；information

であるとされている。情報学を知の体系と称するのは、このような側面を強調しているからであろう。

人工知能学は、問題を解決するのに“探索・論理・知識・推論”を学習の働きで適応的に使うことを主張する学問分科である。言い換えれば、問題の解を**探索**するのに、学習の働きを基盤として、記号系・パターン系に関する**論理**を使って**知識**を操作し、**推論**せよと主張する。この結果、数多くの知能的問題解決理論が誕生している。知能情報学［B4］が知能心理学と異なるのは、知能の働きによって、曖昧性がどのように減少していくかを常に意識していることに注意しておこう。

S.Suzukiは、表象化・知覚・連想・記憶・検索・認識・学習・理解に関するパターン情報処理の知能的問題解決理論を

"axiom 1～axiom 4の4公理からなるSS公理系から導かれる

パターン認識の数学的理論(SS理論) [B1] ～ [B6]" (1.4)

を拠り所として確立しようとしている。ここに、例えば、外界の状況を知識(長期記憶内容)を用いての、何らかの推論(連想)の働きで再構成しながら、知識に基づいて外界(の各対象と、それらの間の相互関係)を意味付けすることが、(外界)**理解**である。

本研究で最も基本的に重要なパターンモデル $T\varphi$ を説明しながら、提案されるファジィ情報処理の手法について簡単に言及しておこう。

モデル $T\varphi$ を見たり聞いたりしたならば、原パターン φ と同じように見えたり聞こえたりするという"**同一知覚原理**"が期待されるためには、少なくとも、"$T\varphi$"はS.Suzukiの提唱した4公理axiom 1～4の内、最初のaxiom 1を満たさなければならない。このようなモデル $T\varphi$ の構造形式の標準的なのは、既に文献 [B1], [B5] の研究で明らかにされている以下の式(1.8)で表されているものである。

パターン $\varphi\in\Phi$ から第 $\ell\in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi,\ell)$ のすべてからなる組 $u(\varphi,\ell)$, $\ell\in L$ が抽出される場合、パターンモデル $T\varphi$ に要求される性質は

$$\exists\ell\in L, u(\varphi,\ell)\neq u(\eta,\ell)\ (\text{抽出される特徴量の不一致性}) \tag{1.5}$$

$$\Rightarrow$$

$$\|T\varphi-T\eta\|>0、\text{つまり、}T\varphi\neq T\eta\ (\text{パターンモデルの不一致性}) \tag{1.6}$$

であって、

$$\|\varphi-\eta\|>0、\text{つまり、}\varphi\neq\eta\ (\text{パターンの不一致性}) \tag{1.7}$$

$$\Rightarrow\text{式}(1.5)$$

ではない。このよう特徴抽出写像uを用い、パターンモデル構成作用素

$$T\cdot=\sum_{\ell\in L}u(\cdot,\ell)\cdot\psi_\ell:\Phi\to\Phi \tag{1.8}$$

を用いたファジィ情報処理の手法を研究する。具体的には、このようなaxiom 1を満たす写像T内のuを1次独立なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の系 ψ_ℓ, $\ell\in L$ を用いて構成した後、従来の論理演算を多重に処理可能な空間多重論理演算を提案し、パターン論理推論系によって記号論理推論系を実現する手法が講じられ、マルチメディア情報(パターン)を入出力とする連想器としてのファジィ・プロダクションシステムを実現することが研究される。

プロダクション・システムをパターン論理推論系を採用しファジィの働きで構成した研究はこれまで、存在していない。本研究は、マルチメディア・コンピュータを構成する目的で、S.Suzukiにより提唱されたパターンモデル構成作用素Tを用い、正にこの研究方向に挑戦したものである。

パターン情報処理についてのS.Suzuki理論は広大な適用分野を開拓しつつあるが、本研究はその1つの適用分野を理論上、明らかにしたことになる。

2. SS理論のaxiom 1を満たし特徴抽出後定まるパターンモデル構成作用素Tと、問題解決システムとしてパターン推論をするファジィ・プロダクション・システム

もともと、処理の対象とする問題のパターン $\varphi\in\Phi$ に相応するパターンモデル $T\varphi$ は、pattern recognizer RECOGNITRON を構成するために、S.Suzukiによって考案されたものである [B1], [B5]。本章では、SS理論 [B3], [B4] が採用しているSS公理系(axiom 1～4)の内、最初の axiom

1を満たす“特徴抽出後定まるパターンモデル” $T\varphi$ の構造形式、意義が説明され、パターン系を用いて、与えられた問題を連想の働きで推論し解決するファジィ・プロダクション・システムを構成するとき生じて来る2つの問題が概観される。

2.1 SS理論の公理系と、6性質

SS理論［B3]，［B4］が数多くの情報処理場面にを適用され得るのは、an axiomatic approachを採り、公理系axiom 1～4に基づいて構築されているからである。

処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ と、Φ の任意の元を Φ 内に写像する作用素

$$T : \Phi \to \Phi \tag{2.1}$$

との対［Φ，T］はaxiom 1を満たすように構成されている。

一般に、公理系から導かれる理論(公理系と推論規則からから導きだされる論理的事柄、つまり定理の集合)について、要求される6性質(ⅰ)～(vi)とは、次のように説明される：

(ⅰ)無矛盾性(consistency)

その公理系からは互いに矛盾する定理は推論されない。

(ⅱ)健全性(soundness)

その公理系から推論される定理はすべて、正しい。つまり、定理を導く過程は真理保存的である。

(ⅲ)完全性(completeness)

正しい定理はすべて、この公理系から推論され得る。

(iv)極小性(minimality)

その公理系は最小限必要な公理の集まりである。つまり、その公理系から1つの公理を除くと導かれる定理の集合は減少し、また、その公理系に1つの公理をつけ加えても導かれる定理の集合は増加しない。

(ⅴ)最適性(optimality)

その公理系から推論される理論を適用し得られる情報処理機能は、他の理論を適用して得られる情報処理機能に比べ、劣らない。

(vi)万能性(universality)

その理論以外のすべての理論は、その理論の特別なものであり、その理論から導かれる例である。 □

現在のところ、SS理論に関しては、(ⅲ)の完全性は証明されていないけれども、この完全性を除く上述の5性質に矛盾する事実が見い出されていない。

2.2 特徴抽出後定まるパターンモデル $T\varphi$ の構造形式と、抽出される特徴量の組による“axiom 1と同値な表現”

特徴抽出しなくても定まり、axiom 1を満たす基本的に重要なパターンモデル $T\varphi$ も存在するけれども［B3]，［B4]、本節では、特徴抽出後定まるパターンモデル $T\varphi$ の構造形式が説明される。それは、式(1.8)で既に与えられている。

内積、ノルムを各々、$(\ ,\ )$，$\|\cdot\| \equiv \sqrt{(\cdot,\cdot)}$ と表現し、このとき得られる完備な複素ノルム空間(複素線形ベクトル空間)の内、可分な複素ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ を選ぶ。$\mathfrak{H}$ の元 ψ_ℓ からなる1次独立な系

ψ_{ℓ}, $\ell \in L$ (2.2)

を導入する。また、パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出される第 $\ell \in L$ 番目の実数値特徴量を $u(\varphi, \ell) \in R$(実数全体の集合)とすると、一般化して特徴抽出写像

$u: \Phi \times L \to Z$(複素数全体の集合) (2.3)

が定義される。Φ は $\mathfrak{H}$ の或る部分集合であり、零元0をその要素として持たねばならない。

このとき、特徴抽出後定まるパターンモデル $T\varphi$ の構造形式は式(1.8)で与えられる。このとき、式(2.1)の写像 T が定義されることになる。処理の対象とする問題のパターン φ の集合 $(0 \in)\Phi(\subset \mathfrak{H})$ を想定すれば、

写像 T がaxiom 1の(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)の3後半、並びに、(ⅵ)を満たすように構成され、しかも、
Φ が式(3.2)の如く与えられれば、この写像 T との対 $[\Phi, T]$ がaxiom 1を満たす

ことになる(定理3.1)。

式(2.2)の系 ψ_{ℓ}, $\ell \in L$ が1次独立であることを考慮すれば、写像 T がaxiom 1の(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)の3後半、並びに、(ⅵ)を満たすことと、式(2.3)の特徴抽出写像 u が次の4性質①～④を満たすことは同値であることがわかる：

①axiom 1の(ⅰ)の後半：
(零パターンモデルと零特徴量との間の同等性)
$\varphi = 0$ について、$T\varphi = 0$
$\Leftrightarrow$
$\forall \ell \in L, u(\varphi, \ell) = 0.$ (2.4)

②axiom 1の(ⅱ)の後半：a を正定数とする。
$\forall \varphi \in \Phi,$
$T(a \cdot \varphi) = T\varphi$
$\Leftrightarrow$
(特徴量の正定数倍不変性)
$\forall \ell \in L, u(a \cdot \varphi, \ell) = u(\varphi, \ell).$ (2.5)

③axiom 1の(ⅲ)の後半：
$\forall \varphi \in \Phi,$
$T(T\varphi) = T\varphi$
$\Leftrightarrow$
(モデル化場面における特徴量の保存性)
$\forall \ell \in L, u(T\varphi, \ell) = u(\varphi, \ell).$ (2.6)

④axiom 1の(ⅳ)：
$\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0$
$\Leftrightarrow$
(非零特徴量の存在)
$\exists \varphi \in \Phi, u(\varphi, \ell) \neq 0.$ (2.7)

□

2.3 同一形式の構造を備えたパターンモデル $T\varphi$ へ変換することの効果

式(2.1)の写像 T はaxiom 1を満たさなければならない。このとき、写像 T は**モデル構成作用素**と呼ばれ、$T\varphi \in \Phi$ は $\varphi \in \Phi$ の代りとなり得るという意味で、パターン $\varphi \in \Phi$ の**モデル**(model)と

呼ばれる。

認識システム RECOGNITRON は処理の対象とする問題のパターン$\varphi \in \Phi$を**同一形式の構造を備えたパターンモデル** $T\varphi \in \Phi$に変換することに注意しておく。パターンのこの同一形式への変換は、記号列処理において同一形式へ変換しておくと、構文解析、意味解析が容易になるのと同様な効果をもたらす。つまり、パターン同士にその類似性·相違性があるかどうかを決定することを容易にし、パターンを記憶することを容易にするし、また、パターンを知覚·認識·連想·理解するシステムの動作を容易に構成ならしめる。

それのみならず、パターン間に抽出される特徴量に関し如何なる論理関係構造が存在するかを発見しようとする推論を可能にすることが、本研究を介し、明らかになるだろう。また、この論理関係構造を利用して、記号論理における推論を多重・並列的に代行できることも示される。そして、代表的な知識処理形推論システムとして、実際に多用されているプロダクションシステムにファジィ情報処理の機能を素直に備えさせることも可能になることも示される。ファジィ知性的、ないしは、ファジィ感性的情報処理手法を確保するためにモデル $T\varphi$ が有意義に利用され得ることが明らかになるだろう。抽出された特徴量の組に関し、曖昧性を解消していくパターンモデル間の半順序関係 $\leqq_u$ を定義でき、この半順序関係 $\leqq_u$ は構成されるプロダクションシステムの、作業用記憶内での知識書き換え動作(パターン想起動作)が収束するかどうかの判定に利用できる。

尚、式(1.8)の構造形式を備えたパターンモデル構成作用素 T は既に2文献［B1]，[B5］で提案されており、手書き漢字パターン［B24]、日本語単独母音［B9]，[B26］に関し、計算機シミュレーション済である。

2.4 ファジィ·マルチメディア·コンピュータの基本方式として採用されたパターン連想器としてのファジィ·プロダクション·システム

通常のプロダクションシステムは次の**認識―行動サイクル**(recognition-act cycle)と呼ばれる**推論の3動作**(一)，(二)，(三)を反復することになっている：

(一)照合(matching)：蓄えてある各プロダクション·ルール

if 条件 then 行動 (2.8)

の条件部を作業記憶内の、現在の時点での各状況知識と照合し、条件部が満足されたルールを選出する。選びだされたこの複数のプロダクション·ルールのどれでも実行してよいのであり、この選出プロダクション·ルールの集合は**競合集合**(conflict set)と呼ばれる。

(二)競合解消(conflict resolution)：競合集合の中からなんらかの戦略を適用し、実際に実行すべきプロダクション·ルールを1つ、選択する。

(三)動作(action)：競合を解消することにより実際に選択されたプロダクション·ルールの行動部を実行することで、作業記憶内の、与えられた問題をやがて解決するであろう現在の状況知識を書き換える。 □

本論文では、マルチメディア情報を入出力とする連想器としてのファジィ·プロダクション·システム(fuzzy production system)を実現することが研究される。**マルチメディア情報**(multimedia information)とは文字列、音声信号、画像などであり、パターンで表されるとしても無理なことではない。何故ならば、文字列をパターンに符号化する手法が存在すると、SS理論は想定しているからである。

1つのパターンからこのパターンに関係する今1つのパターンを記憶から呼び起こす**連想器**として動作する**ファジィ・プロダクション・システム**は簡単には、次のように構成されるだろう。

n 個の**ファジィ・プロダクション・ルール**(fuzzy production rule)

$$R_j = \text{if } T\varphi_{j1} \text{ then } T\varphi_{j2},\ j=1\sim n \tag{2.9}$$

を**長期記憶**(long-term memory)としての**プロダクション・メモリ**(production memory)**PM** に予め、記憶しておき、**短期記憶**(short-term memory)としての**作業用記憶**(working memory)**WM** に、$T\varphi_{j1}$ の何れかとに似ている m 個のパターンモデル(ファジィ部分集合)

$$T\varphi_1, T\varphi_2, \cdots, T\varphi_m \tag{2.10}$$

を設定する。WM にルールの OR 結合(ルールの集合)

$$R = \bigcup_{j=1}^{n} \{R_j\} \tag{2.11}$$

を用いてファジィ推論して得られた結果 **WM∧R** を再び、 WM に書き込むと、WM′ が得られるが、この種の推論・書き込み動作を複数回繰り返し、最終的に、集合論的不動点方程式

$$WM' \wedge R \subseteq WM' \wedge WM' \wedge R \supseteq WM' \tag{2.12}$$

$$\text{つまり、} WM' \wedge R = WM' \tag{2.13}$$

が成立すれば、つまり、作業用記憶に推論によって新たに追加される知識(ファジィ集合)がなくなれば、ファジィプロダクションシステムのパターン想起動作が終了する。そして、この不動点方程式(2.13)の解 WM′ が $T\varphi i$, $i=1\sim m$ から連想される内容であるとする。マルチメディア処理に関する各種問題を連想の働きで解決する**問題解決システム**(problem-solving system)が構成されたことになる:

$$WM_t \mid_{t=0} = \{T\varphi_i \mid i=1\sim m\} \tag{2.14}$$

$$WM_{t+1} = WM_t \wedge R \text{(推論規則集合Rによる}W_t\text{からの推論結果)},\ t=0,1,2,\cdots \tag{2.15}$$

と求めていき、ある非負整数 t での不動点方程式

$$WM_t = WM_t \wedge R \tag{2.16}$$

の成立で推論・連想による問題解決動作が終了する。 □

生じてくる問題は2つあり、式(2.15)による WM_{t+1} の定義では、**第1番目の問題**は、作業用記憶集合の単調増大性

$$WM_t \subseteq WM_{t+1},\ t=0,1,2,\cdots \tag{2.17}$$

が通常、成立することであり、ある推論段階番号 t(1)が存在し、作業用記憶集合の単調非増大性

$$t > t(1) \text{であれば、} WM_{t(1)} \supseteq WM_t \tag{2.18}$$

が成立し、よって、ある推論段階番号 t が存在し、不動点方程式(2.16)が成立するようになんらかの工夫が必要ということである。この工夫は記号推論系のプロダクションシステムでは通常、必要とされていないようである。

更に考慮しなければならないことは、今1つ生じてくる**第2番目の問題**は、ある推論段階番号 t(2)が存在し、

t>t(2)であれば、WMt は前段階の WM_{t-1} より推論意味内容の曖昧性が
減少していなければならない (2.19)

ことである。

本研究では、(a)作業用記憶集合内の要素総数が単調非増加性を備えていること、並びに、(b)推論意味内容の曖昧性が単調的に増加しないことが成立するような**半順序関係** $\leq_u$ と**ある種の推論操作** S とを設定して、解決する。

尚、蓄えてあるすべてのルールと照合し、しかも、照合と行動とを同時に実行する形式のファジィ推論なので、式(2.15)のファジィ推論 $WM_{t+1} = WM_t \wedge R$ には、如何にして競合解消を実行するかの問題は生じなくて、その戦略を考える必要はない。

第3章　1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ を基底に採用した場合の、実数の連続値・3値・2値パターンモデル $T\varphi$, $T'\varphi$, $T''\varphi$ の3構成と、その不動点定理

S.Suzukiはヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ でのパターン論理推論系によって記号論理推論系を実現しようとしているが、その途中の研究成果の1部を説明する目的のため、本章では、1次独立な系 $\{\psi_k\}k\in L$ を基底に採用し、SS公理系の最初のaxiom 1を満たすように、実数の連続値・3値・2値パターンモデル $T\varphi$, $T'\varphi$, $T''\varphi$ を構成し、空間多重論理系を構成する上で基本的に有用な3写像 T, T′, T″ の不動点定理(定理3.7)を証明する。

3.1　axiom 1 とパターン集合Φ，モデル構成作用素 T(同一知覚原理)

認識システム RECOGNITRON がモデル $T\varphi$ を見たり聞いたりしたならば、原パターン φ と同じに見えたり、同じに聞こえたりすることだと、解釈可能な“**同一知覚原理を実現しているパターンモデル**” $T\varphi$ について説明しよう。

処理の対象とするパターン φ の集合Φはある可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の、零元 0 を含むある部分集合であり、このパターン集合Φ，並びに、式(2.1)のパターン変換写像 T は次のaxiom 1を満たさなければならない。このとき、写像 T は**モデル構成作用素**(model-construction operator)と呼ばれ、$T\varphi \in \Phi$ は $\varphi \in \Phi$ の代りとなり得るという意味で、パターン $\varphi \in \Phi$ の**モデル**(model)と呼ばれる。

Axiom 1 **(パターン集合Φとモデル構成作用素 Tとの対【Φ，T】の満たすべき公理)**

(i)(零元のT-**不動点性**；fixed-point property of zero element under mapping T)

$0 \in \Phi \wedge T0 = 0.$

(ii)(**錐性**，正定数倍吸収性；cone property)

$\forall \varphi \in \Phi,\ a\cdot\varphi \in \Phi \wedge T(a\cdot\varphi) = T\varphi$

for any positive real number a.

(iii)(**ベキ等性**，埋込性；idempotency，embeddedness)

$\forall \varphi \in \Phi,\ T\varphi \in \Phi \wedge T(T\varphi) = T\varphi.$

(iv)(写像 T の**非零写像性**；non-zero mapping property of T) $\exists \varphi \in \Phi,\ T\varphi \neq 0.$ □

Axiom 1からわかるように、パターン集合 Φ は、埋込性

$$T\cdot\Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \subset \Phi \tag{3.1}$$

を満たし、原点(＝0)を始点とし、Φの任意の点を通る半直線を含むような集合、つまり、**錐**(cone)であらねばならない。

パターンと判明している φ の集合(**基本領域**；basic domain) Φ_B と、すべての正実定数の集合 R^{++} とを用意する。

次の定理3.1は、axiom 1を満たす対［Φ，T］を決定している。

［定理3.1］（**モデル構成作用素 T の基本構成定理**）

写像 T がaxiom 1の（ i ），（ii），（iii）の3後半，並びに、（iv）を満たすとしよう。ならば、処理の対象とする問題のパターンの集合(**誘導領域**) Φ を

$$\Phi = R^{++}\cdot(\Phi_B \cup T\cdot\Phi_B) \tag{3.2}$$

の如く設定すれば、

$$\Phi \supset \{0\} \wedge R^{++}\cdot\Phi = \Phi \wedge [T\cdot\Phi = T\cdot\Phi_B \subset \Phi] \tag{3.3}$$

が成立し、axiom 1の（ i ），（ii），（iii）の3前半をΦは満たし、結局、**対【Φ，T】**はaxiom 1を満たす。

（証明）文献［B4］，付録1の定理A 1.1である。 □

3.2 最小自乗法を適用しての、1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ によるパターンの1次展開

一般に、可分な一般抽象複素ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の元からなる系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ は、**1次独立**であるとしよう。

このとき、処理の対象とするパターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ が、

第k∈L番目のパターン形状素と呼ばれる ψ_k からなる系

（$\mathfrak{H}$ の基底の一部）ψ_k, k∈L の線形1次結合 $\sum_{k\in L} a_k\cdot\psi_k$ で

近似される場合の近似誤差

$$\| \varphi - \sum_{k\in L} a_k\cdot\psi_k \| \tag{3.4}$$

を最小ならしめる各複素係数 $a_k \equiv a_k(\varphi)$ については、最小自乗法(method of least squares)を適用して得られる連立1次方程式

$$\sum_{m\in L} a_m(\varphi)\cdot(\psi_m, \psi_k) = (\varphi, \psi_k),\ k\in L \tag{3.5}$$

を解いて求めることが出来る。この時、次の定理3.2が成立し、$\mathfrak{H}$ の任意の元としてのパターン $\varphi \in \Phi$ は1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ を使って、式(3.7)の如く1次展開されることがわかる。

［定理3.2］（**1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ を基底に採用した場合のパターン φ の1次展開定理**）

$\mathfrak{H}$ の任意の1次独立な、式(2.2)の系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ と、$\mathfrak{H}$ の任意の元 $\varphi \in \Phi$ とについて、

$$\forall k\in L,\ (\varphi_\perp, \psi_k) = 0 \tag{3.6}$$

を満たす $\varphi_\perp \in \mathfrak{H}$ が存在して、原パターン φ の1次展開表現(1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ を基底に採用した場合の φ の1次結合式)

$$\varphi = \sum_{k\in L} a_k(\varphi)\cdot\psi_k + \varphi_\perp \tag{3.7}$$

が成り立つ。

（証明） 割愛される。 □

3.3 特徴抽出後定まるパターンモデル Tφ の諸性質

本章では、SS理論［B1］～［B6］が採用しているSS公理系(axiom 1～4)の axiom 1を満たす“特徴抽出後定まるパターンモデル” Tφ の4性質が説明される。

3.3.1 同一形式の構造を備えたパターンモデル Tφ への変換

式(2.1)の写像 T はaxiom 1を満たさなければならない。このとき、写像 T は**モデル構成作用素**と呼ばれ、Tφ ∈ Φはφ ∈ Φの代りとなり得るという意味で、パターン φ ∈ Φの**モデル**(model)と呼ばれる。

認識システム RECOGNITRON は処理の対象とする問題のパターン $\varphi\in\Phi$ を**同一形式の構造を備えたパターンモデル** $T\varphi\in\Phi$ に変換することに注意しておく。

3.3.2　特徴抽出後定まるパターンモデル $T\varphi$ の構造形式

可分な一般抽象複素ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の元 ψ_ℓ からなる式(2.2)の1次独立な系 ψ_ℓ, $\ell\in L$ を導入する。また、パターン $\varphi\in\Phi$ から抽出される第 $\ell\in L$ 番目の複素数値特徴量を $u(\varphi,\ell)\in Z$(複素数全体の集合) とすると、式(2.3)の複素数値特徴抽出写像 u が定義される。このとき、特徴抽出後定まるパターンモデル $T\varphi$ の構造形式は式(1.8)でと与えられる。このとき、式(3.1)の写像 T が定義されることになる。処理の対象とする問題のパターン φ の集合 $(0\in)\,\Phi\,(\subset\mathfrak{H})$ を想定すれば、

写像 T がaxiom 1の(i), (ii), (iii)の後半、並びに、(iv)を満たすように構成され、しかも、Φ が式(3.2)の如く与えられれば、この写像 T との対 [Φ, T] がaxiom 1を満たすことになる(定理3.1)。

3.4　1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ を基底に採用した場合のパターンモデル $T\varphi$

パターン φ から抽出される第 $k\in L$ 番目の特徴量を $u(\varphi, k)$ とあらわすと、式(2.3)の特徴抽出写像 u の導入の下で、構造形式(1.8)を備えた $\mathfrak{H}$ の元 $T\varphi$ が、axiom 1の「3性質(i)～(iii)の3後半」, 並びに、(iv)を満たし、式(2.1)の写像 T がモデル構成作用素と呼ばれることになることは、次の定理3.3からわかる。

[定理3.3] **(1次独立なパターン形状素の系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ に基づくパターンモデル $T\varphi$ の構成定理)**

原パターン $\varphi\in\Phi$ の1次展開式(3.7)に注意して、パターン φ から抽出される第 $k\in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, k)$ として、4種類

①$u(\varphi,\ k)\equiv$

$$\begin{cases} 0 & \cdots\forall k\in L,\ a_k(\varphi)=0\text{ のとき} \\ a_k(\varphi)/\left[\sum_{k\in L}|a_k(\varphi)|^2\right]^{1/2} & \\ \qquad\cdots\exists k\in L,\ a_k(\varphi)\neq 0\text{ のとき} & \end{cases} \tag{3.8}$$

②$u(\varphi,\ k)\equiv$

$$\begin{cases} 0 & \cdots\forall k\in L,\ a_k(\varphi)=0\text{ のとき} \\ a_k(\varphi)/\left[\sup_{k\in L}|a_k(\varphi)|\right] & \\ \qquad\cdots\exists k\in L,\ a_k(\varphi)\neq 0\text{ のとき} & \end{cases} \tag{3.9}$$

③$u(\varphi,\ k)\equiv$

$$\begin{cases} 0 & \cdots\forall k\in L,\ a_k(\varphi)=0\text{ のとき} \\ a_k(\varphi)/\left[\sum_{k\in L}|a_k(\varphi)|\right] & \\ \qquad\cdots\exists k\in L,\ a_k(\varphi)\neq 0\text{ のとき} & \end{cases} \tag{3.10}$$

④各 $a_k(\varphi)\ (k\in L)$ が実数値である場合、

$$\begin{cases} u(\varphi,\ k)\equiv & \\ 0 & \cdots\sum_{k\in L}a_k(\varphi)=0\text{ のとき} \\ a_k(\varphi)/\left[\sum_{k\in L}a_k(\varphi)\right] & \\ \qquad\cdots\sum_{k\in L}a_k(\varphi)\neq 0\text{ のとき} & \end{cases} \tag{3.11}$$

の各々を採用して得られる式(2.3)の特徴抽出写像 u と、1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ とによって得られる構造形式(1.8)を備えた式(2.1)の写像 T は、axiom 1の「3性質(i)～(iii)の3後半」, 並びに、(iv)

を満たし、よって、この写像 T と、3.1節，式(3.2)のパターン集合 Φ とのなす対【Φ，T】は axiom 1を満たす。

（証明） 文献［B4］の付録11をみよ。 □

3.5 以後採用する3種類のパターンモデル $T\varphi$

以後、任意の複素定数 c_k の組 c_k，$k \in L$ について、零条件

$$c_k / [\sup_{k \in L} |c_k|] = 0 \text{ if and only if } \forall k \in L,\ c_k = 0 \tag{3.12}$$

と約束する。

以後、連立1次方程式(3.5)の解 $a_k(\varphi)$，$k \in L$ は実数値の組である場合を想定する。

Ⅰ. 連続値パターンモデル $T\varphi$

定理3.3の4種類のパターンモデルの内、②の連続実数値特徴量 $u(\varphi, \ell)$ を採用するパターンモデル $T\varphi$ を採用する。つまり、

$$u(\varphi, \ell) \equiv a_\ell(\varphi) / [\sup_{k \in L} |a_k(\varphi)|] \tag{3.13}$$

とし、以後、axiom 1の「3性質(i)～(iii)の3後半」，並びに、(iv)を満たす**パターンモデル**

$$T\varphi = \sum_{\ell \in L} u(\varphi, \ell) \cdot \psi_\ell = \sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi) / [\sup_{k \in L} |a_k(\varphi)|] \cdot \psi_\ell \tag{3.14}$$

を採用する。1次結合係数 $u(\varphi, \ell)$ が一般に、離散量ではなく、連続量となるので、式(3.14)の $T'\varphi$ はパターン $\varphi \in \Phi$ に対応する**連続値パターンモデル**と呼ばれる。この時、式(2.3)の u は実数値特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \to R(\text{実数値全体の集合}) \tag{3.15}$$

と書き換えられなければならない。

このとき、次の定理3.4が成り立つ。

［定理3.4］**(連続値パターンモデル $T\varphi$ の2性質)**

式(3.14)の連続値パターンモデル $T\varphi$ について、

(一)(**零モデル定理**) $\varphi = \varphi_\perp$ について、$T\varphi_\perp = 0.$

(二)(**不動点定理**) $\forall \ell \in L$，$T\psi_\ell = \psi_\ell.$

（証明） (一)の証明：$\varphi = \varphi\perp$ のとき、

$\forall \ell \in L,\ a_\ell(\varphi) = 0 \quad \because$ 連立1次方程式(3.5)

$\therefore\ u(\varphi, \ell) = 0 \quad \because$ 式(3.13)

$\therefore\ T\varphi = 0 \quad \because$ 式(3.14)

(二)の証明：$\varphi = \psi_k$ のとき、

$$a_\ell(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \ell = k \\ 0 & \text{if } \ell \neq k \end{cases} \tag{3.16}$$

を得、

$\forall \ell \in L,\ u(\varphi, \ell) = a_\ell(\varphi)$

$\therefore\ T\varphi = \varphi \neq 0.$ □

Ⅱ. 3値パターンモデル $T'\varphi$

$$-1 \leqq a'_{\ell}(\varphi) \equiv a_{\ell}(\varphi) / [\sup_{k \in L} |a_k(\varphi)|]$$
$$\leqq +1 \tag{3.17}$$

に注目し、不等式

$$-1 \leqq -\varepsilon'_{\ell}(0) < 0 < +\varepsilon_{\ell}(0) \leqq +1 \tag{3.18}$$

を満たす閾値 $\varepsilon'_{\ell}(0)$, $+\varepsilon_{\ell}(0)$ ($\ell \in L$) を導入する。

$$u'(\varphi, \ell) \equiv$$
$$\begin{cases} +1 & \text{if } +\varepsilon_{\ell}(0) < a'_{\ell}(\varphi) \leqq +1 \\ 0 & \text{if } -\varepsilon'_{\ell}(0) \leqq a'_{\ell}(\varphi) \leqq +\varepsilon_{\ell}(0) \\ -1 & \text{if } -1 \leqq a'_{\ell}(\varphi) < -\varepsilon'_{\ell}(0) \end{cases} \tag{3.19}$$

と定義される式(2.3)と同様な3値特徴抽出写像

$$u' : \Phi \times L \to \{-1, 0, +1\} \tag{3.20}$$

を導入する。

次の定理3.5の $T'\varphi$ は1次結合係数 $u'(\varphi, \ell)$ が3値化されているという意味で、パターン $\varphi \in \Phi$ に対応する**3値パターンモデル**と呼ばれる。

［定理3.5］**（3値パターンモデル定理）**

$$T'\varphi \equiv \sum_{\ell \in L} u'(\varphi, \ell) \cdot \psi_{\ell} \tag{3.21}$$

と定義される式(2.1)と同様な写像

$$T' : \Phi \to \Phi \tag{3.22}$$

は、axiom 1の「3性質(i)～(iii)の3後半」, 並びに、(iv)を満たし、よって、この写像 T と、3.1節, 式(3.2)のパターン集合 Φ とのなす対【Φ, T】はaxiom 1を満たす。定理3.4も成り立つ。

（証明） ①axiom 1, (i)の後半の成立：

$\varphi = \varphi_{\perp}$ 或いは、$\varphi = 0$ のとき、

$\forall \ell \in L,\ a_{\ell}(\varphi) = 0 \quad \because$ 連立1次方程式(3.5)

$\therefore\ a'_{\ell}(\varphi) = 0 \quad \therefore\ u'(\varphi, \ell) = 0$

$\therefore\ T'\varphi = 0 \quad \because$ 式(3.21)

を得、定理3.4の(一)、並びに、axiom 1, (i)の後半の証明が終わった。

②axiom 1, (ii)の後半の成立：

a を正実定数とする。

$$\forall \ell \in L,\ a_{\ell}(a \cdot \varphi) = a \cdot a_{\ell}(\varphi)$$
$$\because \text{ 連立1次方程式(3.5)} \tag{3.23}$$

が成立していることに注意しておく。

(イ) $\forall \ell \in L,\ a_{\ell}(\varphi) = 0$ のとき

$\forall \ell \in L,\ a_{\ell}(a \cdot \varphi) = 0 \quad \because$ 式(3.23)

を得、axiom 1, (i)の後半の成立を証明と同様にして、

$T'\varphi = 0 = T'(a \cdot \varphi)$.

(ロ) $\exists \ell \in L,\ a_{\ell}(\varphi) \neq 0$ のとき

$\forall \ell \in L,\ a'_{\ell}(a \cdot \varphi) = a'_{\ell}(\varphi)$

$\because$ 2式(3.17), (3.23)

$\therefore\ u'(a \cdot \varphi, \ell) = u'(\varphi, \ell)$

$\therefore\ T'(a \cdot \varphi) = T'\varphi$.

③axiom 1, (iii)の後半の成立：

$\eta \equiv T'\varphi$ とおく。

$\forall \ell \in L,\ a_\ell(\eta) = a_\ell(T'\varphi) = u'(\varphi, \ell)$

$\because$ 連立1次方程式(3.5), 式(3.21) (3.24)

が成立しており、よって、

$$\sup_{k \in L} |a_k(\eta)| = \sup_{k \in L} |a_k(T'\varphi)| \in \{0, 1\} \tag{3.25}$$

が成立していることに注意しておく。

(ハ) $\forall \ell \in L,\ a_\ell(\eta) = 0$ のとき

式(3.24)が成立しているから、式(3.21)から、

$\eta \equiv T'\varphi = 0$

である。よって、axiom 1, (i)の後半から、

$T'\eta = 0$

を得、

$$T'(T'\varphi) = T'\varphi \tag{3.26}$$

の成立が判明する。

(ニ) $\exists \ell \in L,\ a_\ell(\eta) \neq 0$ のとき

$\forall \ell \in L,\ a'_\ell(\eta) = a_\ell(\eta) / [\sup_{k \in L} |a_k(\eta)|]$

$= a_\ell(\eta)$ $\because$ 式(3.25)

$= u'(\varphi, \ell) \in \{-1, 0, +1\}$ $\because$ 式(3.24)

が成立しているから、

$u'(\eta, \ell) = u'(\varphi, \ell)$ $\because$ 式(3.19)

を得、$T'\eta = T'\varphi$、つまり、式(3.26)の成立が判明する。

④axiom 1, (iv)の成立：

$\varphi = \psi_k$ のとき、

$\forall \ell \in L,\ a'_\ell(\varphi) = a_\ell(\varphi)$

$\because$ 2式(3.16), (3.17)

$\therefore\ u'(\varphi, \ell) = a'_\ell(\varphi) = a_\ell(\varphi)$

$\therefore\ T'\varphi = \varphi \neq 0$

を得、定理3.4の(ニ)の証明が終わり、同時に、axiom 1, (iv)の成立を意味する。 □

Ⅲ. 2値パターンモデル $T''\varphi$

$$0 \leqq a''_\ell(\varphi) \equiv |a_\ell(\varphi)| / [\sup_{k \in L} |a_k(\varphi)|] \leqq +1 \tag{3.27}$$

に注目し、不等式

$$0 \leqq \varepsilon_\ell(0) < +1 \tag{3.28}$$

を満たす閾値 $\varepsilon_\ell(0)$ $(\ell \in L)$ を導入する。

$$u''(\varphi, \ell) \equiv \begin{cases} +1 & \text{if } \varepsilon_\ell(0) < a''_\ell(\varphi) \leqq +1 \\ 0 & \text{if } 0 \leqq a''_\ell(\varphi) \leqq +\varepsilon_\ell(0) \end{cases} \tag{3.29}$$

と定義される式(2.3)と同様な2値特徴抽出写像

$$u'' : \Phi \times L \to \{0, +1\} \tag{3.30}$$

を導入する。

次の定理3.6の $T'\varphi$ は1次結合係数 $u''(\varphi, \ell)$ が2値化されているという意味で、パターン $\varphi \in \Phi$ に対応する**2値パターンモデル**と呼ばれる。

[定理3.6] **(2値パターンモデル定理)**

$$T''\varphi \equiv \sum_{\ell \in L} u''(\varphi, \ell) \cdot \psi_\ell \tag{3.31}$$

と定義される式(2.1)と同様な写像

$$T'': \Phi \to \Phi \tag{3.32}$$

は、axiom 1の「3性質(ⅰ)～(ⅲ)の3後半」, 並びに、(ⅳ)を満たし、よって、この写像 T と、3.1節, 式(3.3)のパターン集合Φとのなす対【Φ, T】はaxiom 1を満たす。定理3.4も成り立つ。

(証明) ①axiom 1, (ⅰ)の後半の成立：

$\varphi = \varphi_\perp$ 或いは、$\varphi = 0$ のとき、

$\forall \ell \in L,\ a_\ell(\varphi) = 0$　$\because$　連立1次方程式(3.5)

$\therefore$　$a''_\ell(\varphi) = 0$　$\therefore$　$u''(\varphi, \ell) = 0$

$\therefore$　$T'\varphi = 0$　$\because$　式(3.31)

を得、定理3.4の(一)、並びに、axiom 1, (ⅰ)の後半の証明が終わった。

②axiom 1, (ⅱ)の後半の成立：

a を正実定数とする。

$$\forall \ell \in L,\ a_\ell(a \cdot \varphi) = a \cdot a_\ell(\varphi) \quad \because \ \text{連立1次方程式(3.5)} \tag{3.33}$$

が成立している。

(イ) $\forall \ell \in L,\ a_\ell(\varphi) = 0$ のとき

$\forall \ell \in L,\ a_\ell(a \cdot \varphi) = 0$　$\because$　式(3.33)

を得、axiom 1, (ⅰ)の後半の成立を証明と同様にして、

$T''\varphi = 0 = T''(a \cdot \varphi)$.

(ロ) $\exists\ \ell \in L,\ a\ell(\varphi) \neq 0$ のとき

$\forall \ell \in L,\ a''_\ell(a \cdot \varphi) = a''_\ell(\varphi)$

$\because$　式(3.33)

$\therefore$　$u''(a \cdot \varphi, \ell) = u''(\varphi, \ell)$

$\therefore$　$T''(a \cdot \varphi) = T''\varphi$.

③axiom 1, (ⅲ)の後半の成立：

$\eta \equiv T''\varphi$ とおく。

$$\forall \ell \in L,\ a_\ell(\eta) = a_\ell(T''\varphi) = u''(\varphi, \ell) \quad \because \ \text{連立1次方程式(3.5), 式(3.31)} \tag{3.34}$$

が成立しており、よって、

$$\sup_{k \in L} |a_k(\eta)| = \sup_{k \in L} |a_k(T'\varphi)| \in \{0, 1\} \tag{3.35}$$

が成立していることに注意しておく。

(ハ) $\forall \ell \in L,\ a_\ell(\eta) = 0$ のとき

式(3.34)が成立しているから、式(3.31)から、

$\eta \equiv T''\varphi = 0$

である。よって、axiom 1, (ⅰ)の後半から、

$$T''\eta = 0$$

を得、

$$T'(T'\varphi) = T'\varphi \tag{3.36}$$

の成立が判明する。

(ニ) $\exists \ell \in L,\ a_\ell(\eta) \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
&\forall \ell \in L,\ a''_\ell(\eta)\\
&= |\,a_\ell(\eta)\,| \,/\, [\sup_{k\in L} |\,a_k(\eta)\,|\,]\\
&= a_\ell(\eta) \quad \because \ \text{式}(3.35)\\
&= u''(\varphi, \ell) \in \{0, +1\} \quad \because \ \text{式}(3.34)
\end{aligned}$$

が成立しているから、

$$u'(\eta, \ell) \equiv \begin{cases} +1 & \text{if } \varepsilon_\ell(0) < a''_\ell(\eta) \leqq +1 \\ 0 & \text{if } 0 \leqq a''_\ell(\eta) \leqq +\varepsilon_\ell(0) \end{cases}$$

$$= u''(\varphi, \ell) \quad \because \ \text{式}(3.29)$$

を得、$T''\eta = T''\varphi$ 、つまり、式(3.36)の成立が判明する。

④axiom 1, (iv)の成立：

$\varphi = \psi_k$ のとき、

$$\forall \ell \in L,\ a''_\ell(\varphi) = a_\ell(\varphi) \ \because \ \text{式}(3.16)$$

$$\therefore \ u''(\varphi, \ell) = a''_\ell(\varphi) = a_\ell(\varphi)$$

$$\therefore \ T''\varphi = \varphi \neq 0$$

を得、定理3.4の(二)の証明が終わり、同時に、axiom 1, (iv)の成立を意味する。 □

3.6 パターンモデル形式の不動点性

次の定理3.7は、axiom 1, (ⅰ), (iii)の2後半、並びに、axiom 1, (iv)が成り立つ理由を説明でき、モデル構成作用素 T, T′, T″の不動点が式(3.37)のパターン $\eta \in \mathfrak{H}$ であることを指摘している。この定理3.7を適用することにより、3種のモデル構成作用素 T, T′, T″が実は、axiom 1, (iii)の後半を満たすことが証明される。よって、T, T′, T″について式(2.6)が成立することになるに注意しておく。

[定理3.7] **(3式(3.18), (3.22), (3.32)のモデル構成作用素 T, T′, T″の不動点定理)**

複素数値の組 b_k, $k \in L$ を1次結合係数に持つ $\mathfrak{H}$ の元

$$\eta \equiv \sum_{\ell \in L} b_\ell \cdot \psi_\ell \tag{3.37}$$

について、次の(イ), (ロ), (ハ)が成り立つ：

(イ)2式(3.13), (3.14)の連続値モデル $T\varphi$ について、上限条件

$$\sup_{k\in L} |\,b_k\,| \in \{0, 1\} \tag{3.38}$$

の下で、

$$T\eta = \eta. \tag{3.39}$$

(ロ)3式(3.17), (3.19), (3.21)の3値モデル $T'\varphi$ について、3値条件

$$\forall \ell \in L,\ b_\ell \in \{-1, 0, +1\} \tag{3.40}$$

の下で、

$T'\eta=\eta.$ (3.41)

(ハ)3式(3.27), (3.29), (3.31)の3値モデル $T'\varphi$ について、2値条件

$\forall \ell \in L,\ b_\ell \in \{0, 1\}$ (3.42)

の下で、

$T''\eta=\eta.$ (3.43)

(証明) 先ず、定理3.2での2式(3.6), (3.7)から、

$\forall \ell \in L,\ a_\ell(\eta)=b_\ell$ (3.44)

が成り立っていることに注意しておく。

(イ)の証明：

$\forall \ell \in L,\ u(\eta, \ell)$

$=a_\ell(\eta)/\sup_{k\in L}|a_k(\eta)|$ ∵ 式(3.13)

$=b_\ell/\sup_{k\in L}|b_k|$ ∵ 式(3.44)

$=b_\ell$ ∵ 2式(3.12), (3.38) (3.45)

を得、2式(3.14), (3.37)を考慮すれば、式(3.39)が成立する。

(ロ)の証明：

$\forall \ell \in L,\ a'_\ell(\eta)$

$=a_\ell(\eta)/\sup_{k\in L}|a_k(\eta)|$ ∵ 式(3.17)

$=b_\ell/_{k\in L}|b_k|$ ∵ 式(3.44)

$=b_\ell$ ∵ 2式(3.12), (3.40) (3.46)

$\therefore\ u'(\eta, \ell)=b_\ell$ ∵ 式(3.19) (3.47)

を得、2式(3.21), (3.37)を考慮すれば、式(3.41)が成立する。

(ハ)の証明： $\forall \ell \in L,\ a''_\ell(\eta)$

$=|a_\ell(\eta)|/\sup_{k\in L}|a_k(\eta)|$ ∵ 式(3.27)

$=b_\ell/\sup_{k\in L}|b_k|$ ∵ 式(3.44)

$=b_\ell$ ∵ 2式(3.12), (3.42) (3.48)

$\therefore\ u''(\eta, \ell)=b_\ell$ ∵ 式(3.29) (3.49)

を得、2式(3.41), (3.37)を考慮すれば、式(3.43)が成立する。 □

4. パターンモデルを用いたfuzzy空間多重論理の3演算系と、そのT−, T′−, T″ −不変性

本章では先ず、従来の2値論理演算、並びに、その拡張としての、fuzzy論理演算を説明する。その後、7章で構成された3種類のパターンモデル $T\varphi, T'\varphi, T''\varphi$ を用いれば、**fuzzy空間多重論理の3演算系**が得られることが示され、3モデル構成作用素 T, T′, T″の働きにこの3演算系が各々、不変であることが証明される。本章でも、零条件式(3.12)を仮定している。

4.1 従来の2値論理演算の拡張としての、fuzzy論理演算

形式論理(formal logic)とは、論証(argument)の正しさを意味が排除された形式で求める学問分科

である。記号形式論理(symbolic logic)は諸記号を用い、記号化された論証を扱う。命題(proposition)とは議論の対象とする世界について述べている文の内容であり、その意味は真(truth, 1)、偽(falsity, 0)で規定される。この場合の命題は第0階述語と呼ばれることがある。(第1階；first order)述語(predicate)とは、世界を形成する個体の値をとる個体変数(individual variable)を持つ命題のことである。述語により命題の内部構造を初めて捉えることができる。

命題、述語の、記号による表現を論理式(logical formula)という。形式が破綻していない表現を整式(well-formed formula)という。命題関数とは命題を変数に持ち、真偽の2値の内、いずれかの値をとることが確定する関数である。

命題論理系(system of propositional logic)とは命題関数の真偽を論じる体系であり、述語論理系(system of predicate logic)とは命題論理系を特別な場合として含み、個体変数を全称記号(universal quantifier) $\forall$, 存在記号(existential quantifier) $\exists$ で修飾することで、対象となる個体の範囲を明らかにしている述語論理式の真偽を論じる体系である。述語論理系では命題論理系とは異なり、無限の対象(個体)に関する命題を取り扱うことが可能なことである。

本章では、述語論理系は取り扱わない。

従来の2値命題論理学では 0, 1 を各々、偽、真と解釈して得られる記号命題論理での、真理値(truth-value)を表している。

$$0\wedge 0=1\wedge 0=0\wedge 1=0,\ 1\wedge 1=1 \tag{4.1}$$

$$0\vee 0=0,\ 1\vee 0=0\vee 1=1\vee 1=1 \tag{4.2}$$

$$\neg 0=1,\ \neg 1=0 \tag{4.3}$$

$$1\rightarrow 0=0,\ 0\rightarrow 0=0\rightarrow 1=1\rightarrow 1=1 \tag{4.4}$$

$$0\longleftrightarrow 0=1\longleftrightarrow 1=1,\ 0\longleftrightarrow 1=1\longleftrightarrow 0=1 \tag{4.5}$$

と約束して、5種の論理記号 $\wedge$(連言；conjunction；…かつ～), $\vee$(選言；disjunction；…または～), $\neg$(否定；negation；…でない), $\rightarrow$(含意；implication；…ならば～), $\longleftrightarrow$(同値；equivalence；…のときかつそのそのときのみ…) を含むという意味で複合命題(compound proposition) と呼ばれる論理表現 Q の真偽を論じている。

真偽の2値の他に真でもない偽でもない多数の中間値をとる複合命題を取り扱う標準的な**fuzzy命題論理学**では、2値命題論理学を拡張するため、

$x, y\in\{0, 1\}$ であれば成り立つ3等式

$$\min\{x,\ y\}\ (=x\cdot y)=x\wedge y \tag{4.6}$$

$$\max\{x,\ y\}\ (=x+y-x\cdot y)=x\vee y \tag{4.7}$$

$$1-x=\neg x \tag{4.8}$$

を考慮し、2つの**ファジイ集合**

$$A\equiv\{\langle x,\ \mu_A(x)\rangle \mid x\in X\}\equiv\sum_{x\in X}\mu_A(x)/x \tag{4.9}$$

$$B\equiv\sum_{x\in X}\mu_B(x)/x \tag{4.10}$$

について、

$$\text{共通集合 } A\cap B\equiv\sum_{x\in X}\min\{\mu_A(x),\ \ \mu_B(x)\}/x \tag{4.11}$$

$$\text{和集合 } A\cup B\equiv\sum_{x\in X}\max\{\mu_A(x),\ \ \mu_B(x)\}/x \tag{4.12}$$

$$\text{補集合 } \neg A\equiv\sum_{x\in X}(1-\mu_A(x))/x \tag{4.13}$$

を定義している。ここに、変数 x の、1 より大きくない非負実数値関数

$$(0 \leqq)\ \mu_A(x)\ (\leqq 1) \tag{4.14}$$

は、全体集合(universal set) X の要素 $x \in X$ が集合(ファジイ部分集合) $A(\subseteq X)$ に帰属する程度(degree, grade)を表しており、**帰属度関数**, メンバーシップ関数(membership function)と呼ばれるものである。

4.2 連続値モデル Tφ を用いたfuzzy空間多重論理演算系

本節では、3章で構成された式(3.14)の第1番目のパターンモデル $T\varphi$ を用いれば、**fuzzy空間多重論理演算系**が得られることが示される。

4.2.1 min演算による連言演算の構成

式(3.14)の形式を持つ2つのパターンモデル $T\varphi_1$, $T\varphi_2$ を用いて定義され、$T\varphi_1$, $T\varphi_2$ のfuzzy空間多重連言(spatially multiple fuzzy conjunction) $f(T\varphi_1, T\varphi_2)$ と称されるパターン

$$\begin{aligned}\eta &\equiv f(\varphi_1, \varphi_2) \equiv T\varphi_1 \wedge T\varphi_2 \\ &\equiv \sum_{\ell \in L} \left[\min\{u(\varphi_1, \ell),\ u(\varphi_2, \ell)\} \right. \\ &\quad \left. / \sup_{k \in L} |\min\{u(\varphi_1, k),\ u(\varphi_2, k)\}| \right] \cdot \psi_\ell \end{aligned} \tag{4.15}$$

については、

$$\begin{aligned} b_\ell &\equiv \min\{u(\varphi_1, \ell),\ u(\varphi_2, \ell)\} \\ &\quad / \sup_{k \in L} |\min\{u(\varphi_1, k),\ u(\varphi_2, k)\}|,\ \ell \in L \end{aligned} \tag{4.16}$$

は上限条件式(3.38)を満たし、定理3.7の(イ)より、式(3.39)の不動点方程式 $T\eta = \eta$ が成立する。よって、不動点方程式(3.39)を書き直すと、

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell \in L} u(\eta, \ell) \cdot \psi_\ell \\ &= \sum_{\ell \in L} \left[\min\{u(\varphi_1, \ell),\ u(\varphi_2, \ell)\} \right. \\ &\quad \left. / \sup_{k \in L} |\min\{u(\varphi_1, k),\ u(\varphi_2, k)\}| \right] \cdot \psi_\ell \end{aligned} \tag{4.17}$$

となり、$\{\psi_\ell\}\ \ell \in L$ が1次独立な系であることを考慮すれば、$\eta = T\varphi_1 \wedge T\varphi_2$ から抽出される第 $\ell \in L$ 番目の特徴量 $u(T\varphi_1 \wedge T\varphi_2, \ell)$ については、

$$\begin{aligned} &\forall \ell \in L, \\ &u(T\varphi_1 \wedge T\varphi_2, \ell)\ (= u(\eta, \ell)) \\ &= \min\{u(\varphi_1, \ell),\ u(\varphi_2, \ell)\} \\ &\quad / \sup_{k \in L} |\min\{u(\varphi_1, k),\ u(\varphi_2, k)\}| \end{aligned} \tag{4.18}$$

が成立する。結局、2式(4.17), (4.18)はfuzzy空間多重連言演算の不動点方程式

$$T(T\varphi_1 \wedge T\varphi_2) = T\varphi_1 \wedge T\varphi_2 \tag{4.19}$$

が成立することに要約される。。

4.2.2 max演算による選言演算の構成

前項と同様に考えて、2つのパターンモデル $T\varphi_1$, $T\varphi_2$ を用いて定義され、$T\varphi_1$, $T\varphi_2$ の**fuzzy空間多重選言**(spatially multiple fuzzy disjunction)と称されるパターン

$$\begin{aligned}\eta &\equiv T\varphi_1 \vee T\varphi_2 \\ &\equiv \sum_{\ell \in L} \left[\max\{u(\varphi_1, \ell),\ u(\varphi_2, \ell)\} \right. \\ &\quad \left. / \sup_{k \in L} |\max\{u(\varphi_1, k),\ u(\varphi_2, k)\}| \right] \cdot \psi_\ell \end{aligned} \tag{4.20}$$

を定義できる。

定理3.7の(イ)より、**fuzzy空間多重選言演算の不動点方程式**

$$T(T\varphi_1 \vee T\varphi_2) = T\varphi_1 \vee T\varphi_2 \qquad (4.21)$$

が成立する。

4.2.3 否定演算の構成

パターンモデル $T\varphi$ を用いて定義され、$T\varphi$ の**fuzzy空間多重否定**(spatially multiple fuzzy negation)と称されるパターン

$$\neg T\varphi \equiv \sum_{\ell \in L} \left[\{1-u(\varphi, \ell)\} / \sup_{k \in L} |1-u(\varphi, k)| \right] \cdot \psi_\ell \qquad (4.22)$$

定理3.7の(イ)より、**fuzzy空間多重否定演算の不動点方程式**

$$T(\neg T\varphi) = \neg T\varphi \qquad (4.23)$$

が成立する

4.2.4 含意演算の構成

2つのパターンモデル $T\varphi_1, T\varphi_2$ を用いて定義され、$T\varphi_1$, $T\varphi_2$の **fuzzy空間多重含意**(spatially multiple fuzzy implication)と称されるパターン

$$\begin{aligned}[T\varphi_1 \rightarrow T\varphi_2] &\equiv \neg T\varphi_1 \vee T\varphi_2 \\ &= \sum_{\ell \in L} \Big[\max\{(1-u(\varphi_1, \ell))/ \sup_{k \in L} |1-u(\varphi_1, k)|, u(\varphi_2, \ell)\} \\ &\quad / \sup_{m \in L} | \max\{(1-u(\varphi_1, m)) \\ &\qquad / \sup_{k \in L} |1-u(\varphi_1, k)|, u(\varphi_2, m)\} | \Big] \cdot \psi_\ell \end{aligned} \qquad (4.24)$$

を定義できる。

定理3.7の(イ)より、**fuzzy空間多重含意演算の不動点方程式**

$$T(T\varphi_1 \rightarrow T\varphi_2) = T\varphi_1 \rightarrow T\varphi_2 \qquad (4.25)$$

が成立する。

4.2.5 同値演算の構成

2つのパターンモデル $T\varphi_1, T\varphi_2$を用いて定義され、$T\varphi_1, T\varphi_2$の**fuzzy空間多重同値**(spatially multiple fuzzy equivalence)と称されるパターン

$$[T\varphi_1 \longleftrightarrow T\varphi_2] \equiv T\varphi_1 \rightarrow T\varphi_2 \wedge T\varphi_2 \rightarrow T\varphi_1 \qquad (4.26)$$

定理7.7の(イ)より、**fuzzy空間多重同値演算の不動点方程式**

$$T(T\varphi_1 \longleftrightarrow T\varphi_2) = T\varphi_1 \longleftrightarrow T\varphi_2 \qquad (4.27)$$

が成立する。

4.2.6 n変数の命題関数 f のT一不変性

n を正整数とし、n 個のパターンモデル $T\varphi_1, T\varphi_1, \cdots, T\varphi_n$ について5演算 $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\longleftrightarrow$ を有限回使用して得られたパターン

$$f(T\varphi_1, T\varphi_2, \cdots, T\varphi_n) \qquad (4.28)$$

を与える関数

$$f : T \cdot \Phi \times T \cdot \Phi \times \cdots \times T \cdot \Phi \rightarrow \Phi \qquad (4.29)$$

は、**nパターン変数のfuzzy空間多重命題関数**と呼ばれる。

例えば、3段論法を表す3変数の命題関数

$$f(T\varphi_1, T\varphi_2, T\varphi_3)) \equiv T\varphi_1 \wedge [T\varphi_2 \rightarrow T\varphi_3] \tag{4.30}$$

で得られたパターン $\eta \equiv f(T\varphi_1, T\varphi_2, T\varphi_3)$ は、$T\varphi_1$ と $\neg T\varphi_2$ との相関が少なければ少ないほど、$T\varphi 1$ と $T\varphi 3$ とが共通に備えている特徴を持つパターンを益々、より強く表すようになる。

次の定理4.1は、式(4.29)の f がモデル構成作用素 T の変換機能に関し、不変であることを指摘している。

［定理4.1］**(fuzzy空間多重命題関数のT-不変性)**

$$\forall \varphi_1, \forall \varphi_2, \cdots, \forall \varphi_n \in \Phi,$$

$$T(f(T\varphi_1, T\varphi_2, \cdots, T\varphi_n))$$

$$= f(T\varphi_1, T\varphi_2, \cdots, T\varphi_n). \tag{4.31}$$

（証明） 明らかに、min, max, 1− の3演算の性質から、上限条件式(3.38)を満たす各実定数 b_ℓ が存在して、式(4.29)の f を

$$f(T\varphi_1, T\varphi_2, \cdots, T\varphi_n) = \sum_{\ell \in L} b_\ell \cdot \psi_\ell \tag{4.32}$$

と書ける。定理3.7の(イ)を適用でき、不動点方程式(3.39)が成立し、本定理の証明が終わる。

□

4.3 3値モデル $T'\varphi$ を用いたfuzzy空間多重論理演算系

本節では、3章で構成された式(3.21)の第2番目のパターンモデル $T'\varphi$ を用いれば、**fuzzy空間多重論理演算系**が得られることが示される。

4.3.1 min演算による連言演算の構成

$$\eta \equiv f(T'\varphi_1, T'\varphi_2) \equiv T'\varphi_1 \wedge T'\varphi_2$$

$$\equiv \sum_{\ell \in L} \min\{u'(\varphi_1, \ell), u'(\varphi_2, \ell)\} \cdot \psi_\ell \tag{4.33}$$

4.3.2 max演算による選言演算の構成

$$T'\varphi_1 \vee T'\varphi_2$$

$$\equiv \sum_{\ell \in L} \max\{u'(\varphi_1, \ell), u'(\varphi_2, \ell)\} \cdot \psi_\ell \tag{4.34}$$

4.3.3 否定演算の構成

$$\neg T'\varphi$$

$$\equiv \sum_{\ell \in L} 【\{1 - u'(\varphi, \ell)\} / \sup_{k \in L} | 1 - u'(\varphi, k) | 】 \cdot \psi_\ell \tag{4.35}$$

4.3.4 含意演算の構成

$$[T'\varphi_1 \rightarrow T'\varphi_2]$$

$$\equiv \neg T'\varphi_1 \vee T'\varphi_2$$

$$= \sum_{\ell \in L} \max\{(1 - u'(\varphi_1, \ell)) / \sup_{k \in L} | 1 - u'(\varphi_1, k) |, u'(\varphi_2, \ell)\} \cdot \psi_\ell \tag{4.36}$$

4.3.5 同値演算の構成

$$[T'\varphi_1 \longleftrightarrow T'\varphi_2]$$

$$\equiv \{T'\varphi_1 \rightarrow T'\varphi_2\} \wedge \{T'\varphi_2 \rightarrow T'\varphi_1\}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{\ell\in L}\min\{\\
&\max\{(1-u'(\varphi_1,\ell))/\sup_{k\in L}|1-u'(\varphi_1,k)|,\\
&\qquad u'(\varphi_2,\ell)\}\\
&,\max\{u'(\varphi_1,\ell),(1-u'(\varphi_2,\ell))\\
&\qquad /\sup_{k\in L}|1-u'(\varphi_2,k)|\}\}\cdot\psi_\ell
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

4.3.6 n変数の命題関数 f の T´-不変性

n を正整数とし、n 個のパターンモデル $T'\varphi_1$, $T'\varphi_2$, …, $T'\varphi_n$ について5演算 ∧, ∨, ¬, →, ←→ を有限回使用して得られたパターン

$$f(T'\varphi_1, T'\varphi_2, \cdots, T'\varphi_n) \tag{4.38}$$

を与える関数

$$f: T'\cdot\Phi\times T'\cdot\Phi\times\cdots\times T'\cdot\Phi\to\Phi \tag{4.39}$$

は、n 変数の**fuzzy空間多重命題関数**と呼ばれる。

例えば、3段論法を表す3変数の命題関数

$$f(T'\varphi_1, T'\varphi_2, T'\varphi_3))\equiv T'\varphi_1\wedge[T'\varphi_2\to T'\varphi_3] \tag{4.40}$$

で得られたパターン $\eta\equiv f(T'\varphi_1, T'\varphi_2, T'\varphi_3))$ は、$T'\varphi_1$と $\neg T'\varphi_2$との相関が少なければ少ないほど、$T'\varphi_1$と $T'\varphi_3$ とが共通に備えている特徴を持つパターンを益々、より強く表すようになる。

次の定理4.2は、式(4.39)の f がモデル構成作用素 T´の変換機能に関し、不変であることを指摘している。

［定理4.2］**(fuzzy空間多重命題関数のT-不変性)**

$$
\begin{aligned}
&\forall\varphi_1, \forall\varphi_2, \cdots, \forall\varphi_n\in\Phi,\\
&T'(f(T'\varphi_1, T'\varphi_2, \cdots, T'\varphi_n))\\
&=f(T'\varphi_1, T'\varphi_2, \cdots, T'\varphi_n).
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

(証明)　明らかに、min, max, 1－ の3演算の性質から、3値条件式(3.40)を満たす各実定数 $b\ell$ が存在して、式(4.39)の f を

$$
\begin{aligned}
&f(T'\varphi_1, T'\varphi_2, \cdots, T'\varphi_n)\\
&=\sum_{\ell\in L} b_\ell\cdot\psi_\ell
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

と書ける。定理3.7の(ロ)を適用でき、不動点方程式(3.41)が成立し、本定理の証明が終わる。

□

4.4 2値モデル T″φ を用いた fuzzy 空間多重論理演算系

本節では、3章で構成された式(3.31)の第3番目のパターンモデル $T''\varphi$ を用いれば、**fuzzy空間多重論理演算系**が得られることが示される。3値の場合とまったく、同じである。念のため、省略しないで、定義しておこう。

4.4.1 min演算による連言演算の構成

$$
\begin{aligned}
&\eta\equiv f(T''\varphi_1, T''\varphi_2)\equiv T''\varphi_1\wedge T''\varphi_2\\
&\equiv\sum_{\ell\in L}\min\{u''(\varphi_1,\ell), u''(\varphi_2,\ell)\}\cdot\psi_\ell
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

4.4.2 max演算による選言演算の構成

$$
\begin{aligned}
&T''\varphi_1\vee T''\varphi_2\\
&\equiv\sum_{\ell\in L}\max\{u''(\varphi_1,\ell), u''(\varphi_2,\ell)\}\cdot\psi_\ell
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

4.4.3 否定演算の構成

$$\neg T''\varphi \equiv \sum_{\ell \in L} \{1-u''(\varphi, \ell)\} \cdot \psi_\ell \quad (4.45)$$

4.4.4 含意演算の構成

$$[T''\varphi_1 \to T''\varphi_2] \equiv \neg T''\varphi_1 \vee T''\varphi_2 = \sum_{\ell \in L} \max\{1-u''(\varphi_1, \ell), u''(\varphi_2, \ell)\} \cdot \psi_\ell \quad (4.46)$$

4.4.5 同値演算の構成

$$\begin{aligned}&[T''\varphi_1 \longleftrightarrow T''\varphi_2] \\ &\equiv \{T''\varphi_1 \to T''\varphi_2\} \wedge \{T''\varphi_2 \to T''\varphi_1\} \\ &= \sum_{\ell \in L} \min[\max\{1-u''(\varphi_1, \ell), u''(\varphi_2, \ell)\} \\ &\quad ,\max\{u''(\varphi_1, \ell), 1-u''(\varphi_2, \ell)\}] \cdot \psi_\ell\end{aligned} \quad (4.47)$$

4.4.6 n 変数の命題関数 f の T''-不変性

n を正整数とし、n 個のパターンモデル $T''\varphi_1, T''\varphi_2, \cdots, T''\varphi_n$ について5演算 $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\to$, $\longleftrightarrow$ を有限回使用して得られたパターン

$$f(T''\varphi_1, T''\varphi_2, \cdots, T''\varphi_n) \quad (4.48)$$

を与える関数

$$f : T''\cdot\Phi \times T''\cdot\Phi \times \cdots \times T''\cdot\Phi \to \Phi \quad (4.49)$$

は、n変数のfuzzy空間多重命題関数と呼ばれる。

例えば、3段論法を表す3変数の命題関数

$$f(T''\varphi_1, T''\varphi_2, T''\varphi_3)) \equiv T''\varphi_1 \wedge [T''\varphi_2 \to T''\varphi_3] \quad (4.50)$$

で得られたパターン $\eta \equiv f(T''\varphi_1, T''\varphi_2, T''\varphi_3))$ は、$T''\varphi_1$ と $\neg T''\varphi_2$ との相関が少なければ少ないほど、$T''\varphi_1$ と $T''\varphi_3$ とが共通に備えている特徴を持つパターンを益々、より強く表すようになる。

次の定理4.3は、式(4.49)の f がモデル構成作用素 T' の変換機能に関し、不変であることを指摘している。

[定理4.3] **(fuzzy空間多重命題関数のT-不変性)**

$$\begin{aligned}&\forall \varphi_1, \forall \varphi_2, \cdots, \forall \varphi_n \in \Phi, \\ &T''(f(T''\varphi_1, T''\varphi_2, \cdots, T''\varphi_n)) \\ &= f(T''\varphi_1, T''\varphi_2, \cdots, T''\varphi_n).\end{aligned} \quad (4.51)$$

(証明) 明らかに、min, max, 1− の3演算の性質から、2値条件式(3.42)を満たす各実定数 b_ℓ が存在して、式(4.49)の f を

$$f(T''\varphi_1, T''\varphi_2, \cdots, T''\varphi_n) = \sum_{\ell \in L} b_\ell \cdot \psi_\ell \quad (4.52)$$

と書ける。定理3.7の(ハ)を適用でき、不動点方程式(3.43)が成立し、本定理の証明が終わる。 □

5. ヒルベルト空間でのパターン命題論理推論の選言・連言の2標準形と、パターン命題論理推論系による記号命題2値論理推論系の実現

数学的な方法を用いて真な命題から別の真な命題を導くのに必要な思考形式としての(健全な)推論規則(sound inference rule)を一般的に研究するのが、**数理論理学**である。論証における論理的な関係を5種の論理記号 $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\longleftrightarrow$ をまったく含まない素命題(primitive proposition)を論理表現における最小単位として捉え、幾つかの命題が真であるという仮定から今1つの別の命題が真であることを主張するとき、これを**命題論理推論**という。

本章では、1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$を基底に採用して得られるパターンモデルの1種 $T\varphi$ を使えば、**形式記号論理**(formal symbolic logic)での命題2値論理推論系が多重・並列的に実現されることが研究される。

5.1 命題論理系の実現

次の定理5.1は、命題論理系と同様な論理が成立するパターン論理系が、axiom 1を満たす対［Φ, T］において、T を2値モデル構成作用素と設定することによって考案されたことを指摘している。

式(5.1)の特徴抽出写像 u を持つモデル構成作用素 T として、式(3.31)の写像 T''があることに注意しておく。

［定理5.1］**(パターン2値論理系の諸公式)**

2値特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \rightarrow \{0, 1\} \qquad (5.1)$$

を採用し、$T=T''$と考えて、式(3.43)の不動点方程式が成立している場合、式(3.2)で与えられるパターン集合 Φ と、構造式式(1.8)を持つモデル構成作用素 T との、axiom 1を満たす対［Φ, T］について、次の論理諸公式が成り立つ：

①$T\varphi \wedge [\sum_{\ell\in L} 1\cdot \psi_\ell] = T\varphi$,

$T\varphi \wedge [\sum_{\ell\in L} 0\cdot \psi_\ell] = \sum_{\ell\in L} 0\cdot \psi_\ell$.

②$T\varphi \vee [\sum_{\ell\in L} 1\cdot \psi_\ell] = \sum_{\ell\in L} 1\cdot \psi_\ell$,

$T\varphi \vee [\sum_{\ell\in L} 0\cdot \psi_\ell] = T\varphi$.

③(2重否定律) $\neg(\neg T\varphi) = T\varphi$.

④(べき等律) $T\varphi \wedge T\varphi = T\varphi$,

$T\varphi \vee T\varphi = T\varphi$.

⑤(補元律) $T\varphi \wedge \neg T\varphi = \sum_{\ell\in L} 0\cdot \psi_\ell$,

$T\varphi \vee \neg T\varphi = \sum_{\ell\in L} 1\cdot \psi_\ell$.

⑥(交換律) $T\varphi_1 \wedge T\varphi_2 = T\varphi_2 \wedge T\varphi_1$,

$T\varphi_1 \vee T\varphi_2 = T\varphi_2 \vee T\varphi_1$.

⑦(結合律)

$(T\varphi_1 \wedge T\varphi_2) \wedge T\varphi 3 = T\varphi_1 \wedge (T\varphi_2 \wedge T\varphi_3)$,

$(T\varphi_1 \vee T\varphi_2) \vee T\varphi 3 = T\varphi_1 \vee (T\varphi_2 \vee T\varphi_3)$.

⑧(分配律)

$T\varphi_1 \wedge (T\varphi_2 \vee T\varphi_3) = (T\varphi_1 \wedge T\varphi_2) \vee (T\varphi_1 \wedge T\varphi_3)$,

$T\varphi_1 \vee (T\varphi_2 \wedge T\varphi_3) = (T\varphi_1 \vee T\varphi_2) \wedge (T\varphi_1 \vee T\varphi_3)$.

⑨(De Morgan律)

$\neg (T\varphi_1 \wedge T\varphi_2) = \neg T\varphi_2 \vee \neg T\varphi_1$,

$\neg (T\varphi_1 \vee T\varphi_2) = \neg T\varphi_2 \wedge \neg T\varphi_1$.

(証明) $x, y \in \{0, 1\}$ であれば成り立つ3等式(4.6), (4.7), (4.8)から、容易に証明される。 □

5.2 パターン論理式の2種の標準形

標準的な2真理値 $\{0, 1\}$ についての標準的な命題記号論理系では、任意の記号命題関数が選言標準形, 連言標準形に展開されるが、本節では、任意のパターン命題関数が同様な2標準形に展開されることを証明する。

5.2.1 パターン2値論理式の選言標準形

第 $j(=1, 2, \cdots, n)$ 番目の論理変数を $x_j \in \{0, 1\}$ として、任意の n 変数論理関数 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は、

①$\vee(e_j=0, 1)\cdots$ は $\cdots$ の、$e_j=0, 1$ についての選言の意

②関数 $x_j(e_j)$ の定義

$$x_j(e_j) \equiv 1 - x_j \text{ if } e_j=0, \equiv x_j \text{ if } e_j=1 \tag{5.2}$$

を導入すれば、

$$\begin{aligned} &g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &= \vee(e_1=0, 1) \vee (e_2=0, 1) \cdots \vee (e_n=0, 1) \\ &[g(e_1, e_2, \cdots, e_n) \wedge x_1(e_1) \wedge x_2(e_2) \wedge \cdots \\ &\wedge x_n(e_n)] \end{aligned} \tag{5.3}$$

と、**選言標準形**(disjunctive canonical form)に展開されることに対応して、次の定理5.2が成立する。

$f(T\varphi_1, T\varphi_2, \cdots, T\varphi_n)$ をn変数のパターン論理関数(パターン論理式)という。

さて、3式(4.1), (4.2), (4.3)のように3論理記号 $\wedge, \vee, \neg$ を定義すれば、$e_j \in \{0, 1\}(j=1, 2)$ のとき、$f(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ は0, 1を各々、偽、真と解釈して得られる記号命題論理での、真理値を表していると、考えよう。

証明に先立って、次の補助定理5.1に注意しておく。

[補助定理5.1]

$x_j, e_j \in \{0, 1\}$ について、

$x_j(e_j) = 1$ if $x_j = e_j$, $=0$ if $x_j \neq e_j$.

(証明) x_j, e_j を簡単に、x_j, e_j と表す。

(i) $x=0, e=0$ のとき

$x(e) = 1 - x = 1$

(ii) $x=1, e=1$ のとき

$x(e) = x = 1$

(iii) $x=0, e=1$ のとき

$x(e) = x = 0$

(iv) $x=1, e=0$ のとき

$x(e) = 1 - x = 0$

がわかり、証明が終わった。 □

このとき、次の定理5.2が成り立つ。

［定理5.2］**（パターン論理関数 f の、選言標準形展開定理）**

式(5.1)の2値特徴抽出写像 u を採用し、$T=T''$ と考えて、式(3.43)の不動点方程式が成立している場合、n 変数のパターン論理関数 f は、

$$
\begin{aligned}
&f(T\varphi_1, T\varphi_2, \cdots, T\varphi_n)\\
&=\sum_{\ell\in L}【\vee(e_1(\ell)=0,1)\vee(e_2(\ell)=0,1)\vee\\
&\cdots\vee(e_n(\ell)=0,1)\\
&[f(u(\varphi_1,\ell),\ u(\varphi_2,\ell),\ \cdots, u(\varphi_n,\ell))\wedge\\
&[u(\varphi_1,\ell)](e_1(\ell))\wedge[u(\varphi_2,\ell)](e_2(\ell))\wedge\\
&\cdots\wedge[u(\varphi_n,\ell)](e_n(\ell))]】\cdot\psi_\ell
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

と、選言標準形に展開される。

（証明） 添字 $\ell\in L$ を任意であるが、固定する。更に、任意であるが、固定した各 $e_1'(\ell)$, $e_2'(\ell)$, $\cdots$, $e_n'(\ell)$ について、

$$
\begin{aligned}
&u(\varphi_1,\ell)=e_1'(\ell)\text{且つ}u(\varphi_2,\ell)=e_2'(\ell)\\
&\text{且つ}\cdots\text{且つ}\ u(\varphi_n,\ell)=e_n'(\ell)
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

のとき、

$$
\begin{aligned}
&b(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\ ;\ \ell)\equiv\\
&\vee(e_1(\ell)=0,1)\vee(e_2(\ell)=0,1)\vee\cdots\vee(e_n(\ell)=0,1)\\
&【f(u(\varphi_1,\ell),\ u(\varphi_2,\ell),\ \cdots,u(\varphi_n,\ell))\wedge\\
&[u(\varphi_1,\ell)]\ (e_1(\ell))\wedge[u(\varphi_2,\ell)]\ (e_2(\ell))\wedge\\
&\cdots\wedge[u(\varphi_n,\ell)](e_n(\ell))】
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&=【f(u(\varphi_1,\ell), u(\varphi_2,\ell),\ \cdots, u(\varphi_n,\ell))\wedge\\
&[e_1'(\ell)]\ (e_1'(\ell))\wedge[e_2'(\ell)]\ (e_2'(\ell))\wedge\cdots\\
&\wedge[e_n'(\ell)](e_n'(\ell))】\\
&\vee_{ej(\ell)\neq ej'(\ell)(j=1\sim n)}【f(u(\varphi_1,\ell),\ u(\varphi_2,\ell),\\
&\cdots,u(\varphi_n,\ell)))\wedge\\
&[u(\varphi_1,\ell)]\ \ (e_1(\ell))\wedge[u(\varphi_2,\ell)](e_2(\ell))\\
&\wedge\cdots\wedge[u(\varphi_n,\ell)]\ (e_n(\ell))】\\
&=f(u(\varphi_1,\ell),\ u(\varphi_2,\ell),\ \cdots,u(\varphi_n,\ell))\wedge\\
&[e_1'(\ell)](e_1'(\ell))\wedge[e_2'(\ell)](e_2'(\ell))\wedge\cdots\\
&\wedge\ [e_n'(\ell)](e_n'(\ell))]\\
&\quad\because\quad\text{補助定理5.1と、任意2値論理式 A に}\\
&\quad\quad\text{ついて成り立つ2等式}\ A\wedge0=0, A\vee0=A\\
&=f(u(\varphi_1,\ell),\ u(\varphi_2,\ell),\ \cdots,u(\varphi_n,\ell))\\
&\quad\because\ \text{補助定理5.1と、任意2値論理式 A に}\\
&\quad\quad\text{ついて成り立つ等式}\ A\wedge1=A
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

の両辺に $\sum_{\ell\in L}\cdots$ を作用させると、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\ell\in L}b(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\ ;\ \ell)\cdot\psi_\ell\\
&=\sum_{\ell\in L}f(u(\varphi_1,\ell), u(\varphi_2,\ell),\ \cdots, u(\varphi_n,\ell))\cdot\psi_\ell
\end{aligned}
$$

$$=h(T\varphi_1, T\varphi_2, \cdots, T\varphi_n) \tag{5.8}$$

が得られる。ここで、$f(T\varphi_1, T\varphi_2, \cdots, T\varphi_n)$において、$A \to B, A \longleftrightarrow B$を各々、

$$\neg A \vee B, A \to B \wedge B \to A = (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B) \tag{5.9}$$

で置き換え、$\min\{p, q\}$, $\max\{p, q\}$, $1-p$を各々、

$$p \wedge q, p \vee q, \neg p \tag{5.10}$$

で置き換えたものが

$$h(T\varphi_1, T\varphi_2, \cdots, T\varphi_n) \tag{5.11}$$

であり、このとき、

$$\begin{aligned} &h(T\varphi_1, T\varphi_2, \cdots, T\varphi_n) \\ &= f(T\varphi_1, T\varphi_2, \cdots, T\varphi_n) \end{aligned} \tag{5.12}$$

が成立し、よって、この等式(5.12)を式(5.8)に代入すれば、等式

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell \in L} b(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n ; \ell) \cdot \psi_\ell \\ &= h(T\varphi_1, T\varphi_2, \cdots, T\varphi_n) \\ &= f(T\varphi_1, T\varphi_2, \cdots, T\varphi_n) \end{aligned} \tag{5.13}$$

を得、証明が終わったことがわかる。 □

5.5.2 パターン2値論理式の連言標準形

第$j(=1, 2, \cdots, n)$番目の論理変数を$x_j \in \{0, 1\}$として、任意のn変数論理関数$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$は、

③$\wedge(e_j=0, 1) \cdots$ は $\cdots$ の、$e_j=0, 1$についての連言の意と約束して、

$$\begin{aligned} &g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &= \wedge(e_1=0, 1) \wedge (e_2=0, 1) \cdots \wedge (e_n=0, 1) \\ &[g(e_1, e_2, \cdots, e_n) \vee x_1(1-e_1) \\ &\vee x_2(1-e_2) \vee \cdots \vee x_n(1-e_n)] \end{aligned} \tag{5.14}$$

と、**連言標準形**(conjunctive canonical form)に展開されることに対応して、次の定理5.3が成立する。

[定理5.3] **(パターン論理関数fの、連言標準形展開定理)**

式(5.1)の2値特徴抽出写像uを採用し、$T=T''$と考えて、式(3.43)の不動点方程式が成立している場合、n変数のパターン論理関数fは、

$$\begin{aligned} &f(T\varphi_1, T\varphi_2, \cdots, T\varphi_n) \\ &= \sum_{\ell \in L} 【\wedge(e_1(\ell)=0, 1) \wedge (e_2(\ell)=0, 1) \cdots \\ &\wedge(e_n(\ell)=0, 1) \\ &[f(u(\varphi_1, \ell), u(\varphi_2, \ell), \cdots, u(\varphi_n, \ell)) \\ &\vee [u(\varphi_1, \ell)] (1-e_1(\ell)) \vee [u(\varphi_2, \ell)] (1-e_2(\ell)) \\ &\vee \cdots \vee [u(\varphi_n, \ell)] (1-e_n(\ell))]】 \cdot \psi_\ell \end{aligned} \tag{5.15}$$

と、連言標準形に展開される。

(証明) 添字$\ell \in L$を任意であるが、固定する。更に、任意であるが、固定した各$e_1'(\ell)$, $e_2'(\ell)$, $\cdots$, $e_n'(\ell)$について、式(5.5)を仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} &c(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n ; \ell) \equiv \\ &\wedge(e_1(\ell)=0, 1) \wedge (e_2(\ell)=0, 1) \wedge \cdots \wedge (e_n(\ell)=0, 1) \\ &f(u(\varphi_1, \ell), u(\varphi_2, \ell), \cdots, u(\varphi_n, \ell)) \vee \\ &[u(\varphi_1, \ell)] (1-e_1(\ell)) \vee [u(\varphi_2, \ell)] (1-e_2(\ell)) \vee \\ &\quad \cdots \vee [u(\varphi_n, \ell)] (1-e_n(\ell)) \end{aligned} \tag{5.16}$$

$=\{f(u(\varphi_1, \ell), u(\varphi_2, \ell), \cdots, u(\varphi_n, \ell)) \vee$
$[e_1'(\ell)](1-e_1'(\ell)) \vee [e_2'(\ell)](1-e_2'(\ell))$
$\vee \cdots \vee [e_n'(\ell)](1-e_n'(\ell))\}$
$\wedge_{ej(\ell) \neq ej'(\ell)(j=1\sim n)} \{f(u(\varphi_1, \ell), u(\varphi_2, \ell),$
$\cdots, u(\varphi_n, \ell))) \vee$
$[u(\varphi_1, \ell)](1-e_1(\ell)) \vee [u(\varphi_2, \ell)](1-e_2(\ell))$
$\vee \cdots \vee [u(\varphi_n, \ell)](1-e_n(\ell))\}$
$=f(u(\varphi_1, \ell), u(\varphi_2, \ell), \cdots, u(\varphi_n, \ell)) \vee$
$[e_1'(\ell)](1-e_1'(\ell)) \vee [e_2'(\ell)](1-e_2'(\ell))$
$\vee \cdots \vee [e_n'(\ell)](1-e_n'(\ell))]$

∵　補助定理5.1と、任意2値論理式Aについて成り立つ2等式 $A \vee 1=1$, $A \wedge 1=A$

$=f(u(\varphi_1, \ell), u(\varphi_2, \ell), \cdots, u(\varphi_n, \ell))$

∵　補助定理5.1と、任意2値論理式Aについて成り立つ等式 $A \vee 0=A$

$$=h(T\varphi_1, T\varphi_2, \cdots, T\varphi_n) \tag{5.17}$$

が得られる。ここで、$f(T\varphi_1, T\varphi_2, \cdots, T\varphi_n)$において、$A \rightarrow B$, $A \longleftrightarrow B$ を各々、式(5.9)で置き換え、$\min\{p, q\}$, $\max\{p, q\}$, $1-q$ を各々、式(5.10)で置き換えたものが式(5.11)のhであり、このとき、式(5.12)が成立し、よって、この等式(5.12)を式(5.17)に代入すれば、等式

$$\sum_{\ell \in L} c(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n ; \ell) \cdot \psi_\ell$$
$$=h(T\varphi_1, T\varphi_2, \cdots, T\varphi_n)$$
$$=f(T\varphi_1, T\varphi_2, \cdots, T\varphi_n) \tag{5.18}$$

を得、証明が終わったことがわかる。 □

5.3 パターン論理系による3種の2値命題推論

2値命題論理系に真理保存性を備えているという意味で健全といわれる推論規則をつけ加えて得られる体系が**2値命題論理推論系**である。本章では、3種の健全な推論規則が3定理5.4～5.5で指摘される。

先ず、次の定理5.4が成立し、

ある1つの $\ell \in L$ について
$u(\varphi_1, \ell)=1$ かつ $u([T\varphi_1 \rightarrow T\varphi_2], \ell)=1$
ならば、$u(T\varphi_2, \ell)=1$ である　(5.19)

という通常の3段論法（前向き推論法；真理保存則）が、式(5.1)の特徴抽出写像uに関し成立することがわかる。

[定理5.4]**（パターン命題推論1；肯定式(modus ponendo ponens)としての3段論法）**

式(5.1)の2値特徴抽出写像uを採用し、$T=T''$と考えて、式(3.43)の不動点方程式が成立している場合、よって、特に、axiom 1, (iii)の後半が成立し、式(2.6)の成立に注意して、

①$[T\varphi_1 \rightarrow T\varphi_2]$ と②$T\varphi_1$ とから
③$T\varphi_2 \wedge T\varphi_1$ を得る　(5.20)

ことができる。つまり、

$$[\mathrm{T}\varphi_1 \rightarrow \mathrm{T}\varphi_2] \wedge \mathrm{T}\varphi_1 = \mathrm{T}\varphi_2 \wedge \mathrm{T}\varphi_1 \tag{5.21}$$

が成立し、この式(5.21)は、等式

$$\forall \ell \in \mathrm{L}, \mathrm{u}([\mathrm{T}\varphi_1 \rightarrow \mathrm{T}\varphi_2] \wedge \mathrm{T}\varphi_1, \ell) = \min\{\mathrm{u}(\mathrm{T}\varphi_2, \ell), \mathrm{u}(\mathrm{T}\varphi_1, \ell)\} \tag{5.22}$$

と同等である。

(証明)　$[\mathrm{T}\varphi_1 \rightarrow \mathrm{T}\varphi_2] \wedge \mathrm{T}\varphi_1 =$

$$= \sum_{\ell \in \mathrm{L}} \mathrm{b}_\ell \cdot \psi_\ell \tag{5.23}$$

とおくと、

$$\mathrm{b}_\ell = \min\{\max\{1-\mathrm{u}(\varphi_1, \ell), \mathrm{u}(\varphi_2, \ell)\}, \mathrm{u}(\varphi_1, \ell)\} \tag{5.24}$$

であり、$\mathrm{u}(\varphi_1, \ell) \in \{0, 1\}$ の場合にわけて確かめれば、

$$\mathrm{b}_\ell = \min\{\mathrm{u}(\varphi_2, \ell), \mathrm{u}(\varphi_1, \ell)\} \tag{5.25}$$

を得、証明が終わった。 □

更に、次の定理5.5が成立し、

ある1つの $\ell \in \mathrm{L}$ について

$\mathrm{u}(\varphi_2, \ell) = 0$ かつ $\mathrm{u}(\mathrm{T}\varphi_1 \rightarrow \mathrm{T}\varphi_2, \ell) = 1$ ならば、

$\mathrm{u}(\mathrm{T}\varphi_1, \ell) = 0$ である (5.26)

という通常の背理法(後向き推論法；虚偽保存則)が、式(5.1)の特徴抽出写像 u に関し成立することがわかる。

[定理5.5] **(パターン命題推論2；否定式(modus tollend tollens)としての背理法)**

式(5.1)の2値特徴抽出写像 u を採用し、$\mathrm{T} = \mathrm{T}''$と考えて、式(3.43)の不動点方程式が成立している場合、よって、axiom 1, (iii)の後半が成立し、式(2.6)の成立に注意して、

① $[\mathrm{T}\varphi_1 \rightarrow \mathrm{T}\varphi_2]$ と ② $\neg \mathrm{T}\varphi_2$とから

③ $\neg(\mathrm{T}\varphi_1 \vee \mathrm{T}\varphi_2)$を得る (5.27)

ことができる。つまり、

$$[\mathrm{T}\varphi_1 \rightarrow \mathrm{T}\varphi_2] \wedge \neg \mathrm{T}\varphi_2$$

$$= \neg \mathrm{T}\varphi_1 \wedge \neg \mathrm{T}\varphi_2 \tag{5.28}$$

$$= \neg(\mathrm{T}\varphi_1 \vee \mathrm{T}\varphi_2) \tag{5.29}$$

が成立し、この2式(5.28), (5.29)は、等式

$$\forall \ell \in \mathrm{L},$$

$$\mathrm{u}([\mathrm{T}\varphi_1 \rightarrow \mathrm{T}\varphi_2] \wedge \neg \mathrm{T}\varphi_2, \ell)$$

$$= \mathrm{u}(\neg \mathrm{T}\varphi_1 \wedge \neg \mathrm{T}\varphi_2, \ell) \tag{5.30}$$

$$= 1 - \mathrm{u}(\mathrm{T}\varphi_1 \vee \mathrm{T}\varphi_2), \ell) \tag{5.31}$$

と同等である。

(証明)　$[\mathrm{T}\varphi_1 \rightarrow \mathrm{T}\varphi_2] \wedge \neg \mathrm{T}\varphi_2 =$

$$= \sum_{\ell \in \mathrm{L}} \mathrm{b}_\ell \cdot \psi_\ell \tag{5.32}$$

とおくと、

$$\mathrm{b}_\ell = \min\{\max\{1-\mathrm{u}(\varphi_1, \ell), \mathrm{u}(\varphi_2, \ell)\}, 1-\mathrm{u}(\varphi_2, \ell)\} \tag{5.33}$$

であり、$u(\varphi_2, \ell) \in \{0, 1\}$ の場合にわけて確かめれば、

$$b_\ell$$
$$= \min\{1-u(\varphi_1, \ell),\ 1-u(\varphi_2, \ell)\} \tag{5.34}$$
$$= 1-\max\{u(\varphi_1, \ell),\ u(\varphi_2, \ell)\} \tag{5.35}$$

を得、証明が終わった。 □

最後に、次の定理5.6が成立し、

ある1つの $\ell \in L$ について

$u([T\varphi_1 \to T\varphi_2], \ell) = 1$ かつ $u([T\varphi_2 \to T\varphi_3], \ell) = 1$ ならば、

$u([T\varphi_1 \to T\varphi_3], \ell) = 1$ である (5.36)

という通常の拡張3段論法(前向き推論法)が、式(5.1)の特徴抽出写像 u に関し成立することがわかる。

［定理5.6］**(パターン命題推論3；拡張3段論法 (extended syllogism))**

式(5.1)の2値特徴抽出写像 u を採用し、$T = T''$ と考えて、式(3.43)の不動点方程式が成立している場合、よって、axiom 1, (iii)の後半が成立し、式(2.6)の成立に注意して、

① $[T\varphi_1 \to T\varphi_2]$ と ② $[T\varphi_2 \to T\varphi_3]$ とから

③ $[T\varphi_1 \to T\varphi_2] \wedge [T\varphi_2 \to T\varphi_3] =$

$$\sum_{\ell \in L} b_\ell \cdot \psi_\ell \tag{5.37}$$

ここに、

$$b_\ell = \begin{cases} 1-u(\varphi_1, \ell) & \text{if } u(\varphi_2, \ell) = 0 \\ u(\varphi_3, \ell) & \text{if } u(\varphi_2, \ell) = 1 \end{cases} \tag{5.38}$$

を得る

ことができる。つまり、この式(5.38)は、等式

$$\forall \ell \in L,$$
$$u([T\varphi_1 \to T\varphi_2] \wedge [T\varphi_2 \to T\varphi_3], \ell) = b_\ell \tag{5.39}$$

と同等である。

(証明) b_ℓ

$$= \min\{\max\{1-u(\varphi_1, \ell), u(\varphi_2, \ell)\},$$
$$\max\{1-u(\varphi_2, \ell), u(\varphi_3, \ell)\}\} \tag{5.40}$$

であり、

(イ)$u(\varphi_2, \ell) = 0$ の場合、

$$b_\ell$$
$$= \min\{\max\ \{1-u(\varphi_1, \ell),\ 0\},\ \max\{1, u(\varphi_3, \ell)\}\}$$
$$= \min\{1-u(\varphi_1, \ell),\ 1\}$$
$$= 1-u(\varphi_1, \ell) \tag{5.41}$$

(ロ)$u(\varphi_2, \ell) = 1$ の場合

$$b_\ell$$
$$= \min\{\max\{1-u(\varphi_1, \ell),\ 1\},\ \max\{0, u(\varphi_3, \ell)\}\}$$
$$= \min\{1, u(\varphi_3, \ell)\}$$
$$= u(\varphi_3, \ell) \tag{5.42}$$

を得、式(5.38)が示された。 □

6. 曖昧さの基準としての半順序関係 $\leqq_u$ と、そのT-不変性、正定数倍不変性

本章では先ず、抽出される特徴量が 0，1 の場合に比べ、抽出された特徴量の曖昧さを反映しており、axiom 1を満たすモデル構成作用素 T の働きに不変な半順序関係 $\leqq_u$ を定義し、その後、$\leqq_u$ が特徴エントロピー Fenty の大→小関係で捕らえられることが明らかにされ、$\leqq_u$，Fenty がこの写像 T の働き、正定数倍の働きに不変であることが示される。

6.1 モデル構成作用素 T の働きについて特徴保存性を備えている半順序関係 $\leqq_u$

6.1.1 パターンモデル同値類〔φ〕$_T$

axiom 1を満たす対［Φ, T］を選び、固定する。

$$\varphi \in \Phi \sim_T \eta \in \Phi$$

$$\Leftrightarrow T\varphi = T\eta \in \Phi \tag{6.1}$$

と定義される2元関係 $\sim_T$ は

(ⅰ)(反射律；reflexive law)　$\varphi \sim_T \varphi$

(ⅱ)(対称律；symmetric law)

$\varphi \sim_T \eta$ ならば、$\eta \sim_T \varphi\eta$

(ⅲ)(推移律；transitive law)

$\varphi \sim_T \eta$ かつ $\eta \sim_T \psi$ ならば $\varphi \sim_T \psi$

を満たす意味で、同値関係(equivalence relation)である。

$\varphi \in \Phi$ を含む**パターンモデル同値類**(equivalence class containing $\varphi \in \Phi$)

$$[\varphi]_T \equiv \{\eta \in \Phi \mid \varphi \sim_T \eta\} \tag{6.2}$$

が導入される。

6.1.2 任意の複素数値特徴抽出写像 u´への、T-不変性の付与

式(2.3)の u と同様な任意の複素数値特徴抽出写像

$$u' : \Phi \times L \to Z \tag{6.3}$$

が与えられるたしょう。

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \ell \in L, u(\varphi, \ell) \equiv u'(T\varphi, \ell) \tag{6.4}$$

と定義される式(7.10)の写像 u について、

パターンモデル Tφ の備えている特徴量の組
u(Tφ, ℓ)，$\ell \in$ L が、原パターン φ から抽出
された特徴量の組 u(φ, ℓ), $\ell \in$ L と等しいこと、

つまり、式(2.3)の特徴抽出写像 u のT-不変性

$$\forall \varphi \in \Phi, u(T\varphi, \ell) = u(\varphi, \ell)$$

(**特徴保存性**；feature-preserving property)　(6.5)

と、式(2.6)の如く成立する。この式(6.5)の成立は axiom 1, (ⅲ)の後半 T·T＝T から明らかである。

よって、式(2.3)の特徴抽出写像 u は常に、T-不変式(6.5)を満たしていると仮定できる。

6.1.3 特徴同値類〔φ〕$_u$

式(2.3)の特徴抽出写像 u を使い、

$$\varphi \in \Phi \sim_u \eta \in \Phi \tag{6.6}$$

$$\Leftrightarrow \forall \ell \in L, u(\varphi, \ell) = u(\eta, \ell) \in Z \tag{6.7}$$

と定義される2元関係 $\sim_u$ は

(ⅰ)(反射律)　$\varphi \sim_u \varphi$

(ⅱ)(対称律)

$\varphi \sim_u \eta$ ならば、$\eta \sim_u \varphi$

(ⅲ)(推移律)

$\varphi \sim_u \eta$ かつ $\eta \sim_u \psi$ ならば $\varphi \sim_u \psi$

を満たす意味で、同値関係である。

φ を含む**特徴同値類**

$$[\varphi]_u \equiv \{\eta \in \Phi \mid \varphi \sim_u \eta\} \tag{6.8}$$

が導入される。

6.1.4　実数値特徴抽出写像 u と、抽出される特徴量の曖昧さを反映している半順序関係 $\leqq_u$

以後、この抽出される特徴量の保存式(6.5)が成立するような式(1.8)の構造形式を持つモデル構成作用素 T, 式(3.15)の実数値特徴抽出写像 u について論じよう。この u は式(2.3)の複素数値特徴抽出写像 u の値域 Z を実数値全体の集合 R に制限したものである。

不等式

$$\forall \ell \in L,$$

$$\inf_{\eta \in \Phi} u(\eta, k) \leqq v(\ell) \leqq \sup_{\eta \in \Phi} u(\eta, k) \tag{6.9}$$

を満たす閾値 $v(\ell)$ の組 $\{v(\ell)\}_{\ell \in L}$ を1つ固定し、

$$\forall \ell \in L,\ [u(\eta, \ell) \leqq u(\varphi, \ell) \leqq v(\ell)]$$

$$\vee [v(\ell) \leqq u(\varphi, \ell) \leqq u(\eta, \ell)] \tag{6.10}$$

が成り立っていることを、

$$\varphi \leqq_u \eta \tag{6.11}$$

と書くことにすると、2式(6.6), (6.7)の同値関係 $\sim$u と、

$$\varphi \in \Phi \sim_u \eta \in \Phi \tag{6.12}$$

$$\Leftrightarrow \varphi \leqq_u \eta \wedge \eta \leqq_u \varphi \tag{6.13}$$

という関係がある。ここで、

$$\eta \in [\varphi]_u \tag{6.14}$$

$$\Leftrightarrow \forall \ell \in L, u(\varphi, \ell) = u(\eta, \ell) \tag{6.15}$$

$$\Leftrightarrow T\varphi = T\eta \quad \because \ \{\psi_\ell\}_{\ell \in L} \text{は1次独立系} \tag{6.16}$$

$$\Leftrightarrow \eta \in [\varphi]_T \tag{6.17}$$

が成り立っていることに、注意しておく。

2つの元の間の関係 $\leqq_u$ は

(ⅰ)(反射律；reflexive law)　$\varphi \leqq_u \varphi$

(ⅱ)(反対称律；antisymmetric law)

$\varphi \leqq_u \eta$ かつ $\eta \leqq_u \varphi$ ならば、$\varphi \sim_u \eta$

(ⅲ)(推移律；transitive law)

$\varphi \leqq_u \eta$ かつ $\eta \leqq_u \psi$ ならば $\varphi \leqq_u \psi$

を満たす意味で、抽出される特徴量の曖昧さを反映している**半順序関係**(partial ordering)である。

解釈

$\varphi(\in \Phi) \leqq_u \eta(\in \Phi)$

$\Leftrightarrow$

パターン$\varphi \in \Phi$はパターン$\eta \in \Phi$より抽出される特徴量に関し、

より多くの不確定さを備えている (6.18)

を採用でき、更に、詳細化して、次の4解釈(一)～(四)を採用するものとしよう：

(一) $\varphi \in \Phi$は抽出される特徴量に関し、$\eta \in \Phi$の近似である。

(二) $\varphi \in \Phi$は抽出される特徴量に関し、$\eta \in \Phi$に要約される。

(三) $\eta \in \Phi$は抽出される特徴量に関し、$\varphi \in \Phi$の情報を含む。

(四) $\eta \in \Phi$は抽出される特徴量に関し、$\varphi \in \Phi$に変形されている。 (6.19)

□

6.2 半順序$\sqsubseteq$と同値な条件を与える特徴エントロピー Fenty の小･大関係

本節では、極限公式

$$\lim_{x\to 0} - x \cdot \log_e x = \lim_{x\to 1} - x \cdot \log_e x = 0 \tag{6.20}$$

が成立しているエントロピー関数

$$- x \cdot \log_e x \, (0 \leqq x \leqq 1) \tag{6.21}$$

を使い、抽出される特徴量の**特徴エントロピー**(feature-entropy)と称される非負量

$$\mathrm{Fenty}(\varphi) \equiv - \sum_{\ell \in L} p(\varphi, \ell) \cdot \log_e p(\varphi, \ell) \tag{6.22}$$

を導入する。ここに、

$$p(\varphi, \ell) \equiv |u(\varphi, \ell)|^2 / \sum_{k \in L} |u(\varphi, k)|^2 \tag{6.23}$$

は、確率条件

$$\forall \varphi \in \Phi, \ [\forall \ell \in L, 0 \leqq p(\varphi, \ell) \leqq 1] \tag{6.24}$$

$$\wedge [\sum_{k \in L} p(\varphi, k) \in \{0, 1\}] \tag{6.25}$$

を満たし、

パターン$\varphi \in \Phi$ 内に、第 $\ell \in L$番目の特徴量

$u(\varphi, k)$が存在する確率 (6.26)

を表していると考えられよう。

次の補助定理6.1に注目しよう。

[補助定理6.1]（エントロピーの減少定理）[B4]

確率条件

$$[\forall q \in K, 0 \leqq x_q \leqq 1] \wedge \sum_{q \in K} x_q = 1 \tag{6.27}$$

の下では、

相異なる $k, m \in K$ に対し、ある非負実数δが存在して、

$$0 \leqq x_k \leqq x_m \leqq 1 \wedge \tag{6.28}$$

$$0 \leqq x_k' \equiv x_k - \delta \leqq x_m' \equiv x_m + \delta \leqq 1 \tag{6.29}$$

$$\wedge [\forall q \in K - \{k, m\}, \ x_q' \equiv x_q] \tag{6.30}$$

であれば、不等式

$$- \sum_{q \in K} x_q' \cdot \log_e x_q' \leqq - \sum_{q \in K} x_q \cdot \log_e x_q \tag{6.31}$$

が成り立つ。等号が成り立つのは、$\delta = 0$ のときに限る。 □

上の補助定理6.1を適用すれば、次の定理6.1が成立し、抽出される特徴量に関する曖昧さに関する半順序関係 $\leqq$u は式(6.22)の特徴エントロピー Fenty(φ)の値の 大→小 で把握可能なことが

判明する。

[定理6.1]（**半順序 $\leqq_u$ と特徴エントロピーFenty の大→小関係定理**）

共分離条件

$$\forall \ell \in L, [u(\varphi, \ell) \leqq v(\ell) \wedge u(\eta, \ell) \leqq v(\ell)]$$

$$\vee [v(\ell) \leqq u(\varphi, \ell) \wedge v(\ell) \leqq u(\eta, \ell)] \tag{6.32}$$

の下で、

$$\varphi \leqq_u \eta \Leftrightarrow \mathrm{Fenty}(\varphi) \geqq \mathrm{Fenty}(\eta). \tag{6.33}$$

（証明） 補助定理6.1を複数回適用すれば、本定理6.1が証明されることがわかる。 □

更に、以上の4概念 $[\varphi]_T$, $[\varphi]_u$, $\leqq_u$, Fenty(φ)がaxiom 1を満たすモデル構成作用素 T の働きに不変であることを、次の定理6.2で明らかにしておく。

[定理6.2]（**2つの同値類 $[\varphi]_T$, $[\varphi]_u$ と、半順序関係 $\leqq_u$，特徴エントロピー Fenty(φ) の4者のT-不変性**）

(i) $\forall \varphi \in \Phi, T\varphi \in [\varphi]_T \wedge T\varphi \in [\varphi]_u$.

(ii) $[\varphi \leqq_u \eta \Leftrightarrow T\varphi \leqq_u \eta] \wedge [\varphi \leqq_u \eta \Leftrightarrow \varphi \leqq_u T\eta] \wedge$
$[\varphi \leqq_u \eta \Leftrightarrow T\varphi \leqq_u T\eta]$.

(iii) $\forall \varphi \in \Phi, \mathrm{Fenty}(T\varphi) = \mathrm{Fenty}(\varphi)$.

（証明） (i)の前半 $T\varphi \in [\varphi]_T$の成立はaxiom 1, (iii)の後半 $T \cdot T = T$ から明らかである。(i)の後半$T\varphi \in [\varphi]_u$の成立は式(6.5)から明らかである。(ii)の成立は式(6.5)から明らかである。(iii)の成立は式(6.5)から明らかである。 □

最後に、4概念$[\varphi]_T$, $[\varphi]_u$, $\leqq_u$, Fenty(φ)が正定数倍の働きに不変であることを、次の定理6.3で明らかにしておく。

[定理6.3]（**2つの同値類 $[\varphi]_T$, $[\varphi]_u$ と、半順序関係 $\leqq_u$，特徴エントロピー Fenty(φ) の4者の正定数倍不変性**）

2つの任意の正定数a, b について次の(i), (ii), (iii)が成り立つ：

(i) $\forall \varphi \in \Phi, a \cdot \varphi \in [\varphi]_T \wedge a \cdot \varphi \in [\varphi]_u$.

(ii) $[\varphi \leqq_u \eta \Leftrightarrow a \cdot \varphi \leqq_u \eta]$
$\wedge [\varphi \leqq_u \eta \Leftrightarrow \varphi \leqq_u a \cdot \eta]$
$\wedge [\varphi \leqq_u \eta \Leftrightarrow a \cdot \varphi \leqq_u b \cdot \eta]$.

(iii) $\forall \varphi \in \Phi, \mathrm{Fenty}(a \cdot \varphi) = \mathrm{Fenty}(\varphi)$.

（証明） (i)の前半$T\varphi \in [\varphi]_T$の成立はaxiom 1, (ii)の後半から明らかである。

式(3.7)から

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \ell \in L, a_\ell(a \cdot \varphi) = a_\ell(\varphi) \tag{6.34}$$

が成立していることに注意すれば、式(3.13)の各$u(\varphi, \ell)$について、

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \ell \in L, u(a \cdot \varphi, \ell) = u(\varphi, \ell) \tag{6.35}$$

が成り立つ。この式(6.35)を適用すると、2式(6.6), (6.7)から、(i)の後半の成立は示され、また、式(6.10)から、(ii)の成立が示され、最後に、2式(6.22), (6.23)から、(iii)の成立は明らかである。 □

7. 実数の単位区間 R[0, 1] での半順序関係$\sqsubseteq$を用いての、ファジィ導出原理の表現

推論には、大きくわけて、演繹的推論(deductive reasoning), 帰納的推論(inductive reasoning) [B18] ～ [B20], 類推(analogical reasoning)がある。

2値記号論理における**演繹的推論**(deductive reasoning)とは、記号論理式から成る出発点としてのある恒真式の集合としての公理系(axiom system)と3段論法などの推論規則(inference rules)とから、前提(premise)が真ならば論理的帰結(logical consequence)としての結論(conclusion)が必ず、真となる新たな論理式を作り出すことである。

現実世界においては、真か偽かというように明確に決まる命題だけではなく、「太郎には白髪が多い」などの中間的真理値を持つ命題も多い。この種の中間的真理値をも扱える**ファジィ推論**とは、中間真理値が 2^{-1} より大きい前提としてのファジィ論理式から、中間真理値が 2^{-1} より大きい結論としてのファジィ論理式を導きだすこと、つまり、**ほぼ真理保存的**に前提から結論を得る過程のことである。

2値記号論理での有用な推論規則であり、人工知能言語 Prolog の基本文法として採用されている導出原理を、空間多重論理推論系での、実数の単位区間 R[0, 1] 上のファジィ導出原理に推論規則として書き直すのが本章の目的である。

7.1 推論規則としてのファジィ導出原理

先ず、Richard C.T.Lee(1972)によって証明されているfuzzy resolutio principle に関する lemma 4 を下に記述する。

Lemma 4 [A10] .

Let

$C_1 = P \vee L_1$ and $C_2 = \neg P \vee L_2$

be two clauses. Let $R(C_1, C_2)$ denote any resolvent

$L_1 \vee L_2$ of C_1 and C_2.

Let

$TV(C_1 \vee C_2) \equiv \max\{TV(C_1),\ TV(C_2)\} = b$

and

$TV(C_1 \wedge C_2) \equiv \min\{TV(C_1),\ TV(C_2)\} = a > 2-1$, where $(0 \leqq) TV(S) (\leqq 1)$

denotes the truth-value of a formula S. Then

$a \leqq TV(R(C_1, C_2)) \leqq b$. □

次の補助定理7.1はファジィ推論規則として導出原理を採用した場合の上のLemma 4を書き直したものであり、その証明を詳細に簡略化すること無しに、証明し直しておこう。

[補助定理7.1] **(ファジィ導出形(resolvent)の真理値の下界・上界定理)** [A10]

$$0 \leqq p, q_1, q_2 \leqq 1 \tag{7.1}$$

とし、4非負量

$$r1 \equiv \max\{p, q_1\} \tag{7.2}$$

$$r2 \equiv \max\{1-p, q_2\} \tag{7.3}$$

$$a \equiv \min\{r_1, r_2\} \tag{7.4}$$

$$b \equiv \max\{r_1, r_2\} \tag{7.5}$$

を定義すれば、

$$2^{-1} < a \Rightarrow \tag{7.6}$$

$$a \leqq \max\{q_1, q_2\} \leqq b. \tag{7.7}$$

（証明）　式(7.4)の意味するところに従い、2つの場合(イ)，(ロ)にわけて証明しよう。

(イ)$r_1 = a$　∵　式(7.4)の場合

当然、

$$r_2 = b \geqq a \quad \because \quad 2\text{式}(7.4),\ (7.5) \tag{7.8}$$

であるが、

$$q_1 \leqq a \quad \because \quad 2\text{式}(7.2),\ r_1 = a \tag{7.9}$$

$$q_2 \leqq b \quad \because \quad 2\text{式}(7.3),\ (7.8) \tag{7.10}$$

が成立している。

(イ−1)$q_1 = a$　∵　式(7.9) の場合

$$\begin{aligned} &\max\{q_1, q_2\} \\ &= \max\{a, q_2\} \geqq a \quad \because \quad q_1 = a \end{aligned} \tag{7.11}$$

であり、また、

$$\begin{aligned} &\max\{q_1, q_2\} \\ &= \max\{a, q_2\} \quad \because \quad q_1 = a, \\ &\leqq \max\{a, b\} \quad \because \quad \text{式}(7.10) \\ &= b \quad \because \quad a \leqq b \end{aligned} \tag{7.12}$$

も得、不等式(7.7)が示された。

(イ−2)$q_1 < a$　∵　式(7.9)の場合

$$\begin{aligned} &a = r_1 \\ &= \max\{p, q_1\} \quad \because \quad \text{式}(7.2) \\ &= p \end{aligned} \tag{7.13}$$

であることがわかる。ところで、

$$\begin{aligned} &1 - p = 1 - a \quad \because \quad \text{式}(7.13) \\ &< 2^{-1} \quad \because \quad \text{式}(7.6) \\ &< a \quad \because \quad \text{式}(7.6) \end{aligned} \tag{7.14}$$

であるから、

$$\begin{aligned} &a \leqq b = r_2 \quad \because \quad \text{式}(7.8) \\ &= \max\{1 - p, q_2\} \quad \because \quad \text{式}(7.3) \\ &= q_2 \quad \because \quad \text{式}(7.14) \end{aligned} \tag{7.15}$$

である。よって、

$$\max\{q_1, q_2\}$$

$$= b \quad \because \quad q_1 < a, \text{式}(7.15) \tag{7.16}$$

$$\geqq a \quad \because \quad 2\text{式}(7.4),\ (7.5) \tag{7.17}$$

を得、不等式(7.7)が示された。

(ロ)$r_2 = a$　∵　式(7.4)の場合、

当然、

$$r_1 = b \geqq a \quad \because \quad 2\text{式}(7.4),\ (7.5) \tag{7.18}$$

であるが、

$q_1 \leqq b \quad \because \quad 2$式(7.2), (7.18) (7.19)

$q_2 \leqq a \quad \because \quad 2$式(7.3), $r_2 = a$ (7.20)

が成立している。

(ロ－1) $q_2 = a$ $\because$ 式(7.20) の場合

$\max\{q_1, q_2\}$

$= \max\{q_1, a\} \geqq a \quad \because \quad q_2 = a$ (7.21)

であり、また、

$\max\{q_1, q_2\}$

$= \max\{q_1, a\} \quad \because \quad q_2 = a,$

$\leqq \max\{b, a\} \quad \because$ 式(7.19)

$= b \quad \because \quad a \leqq b$ (7.22)

も得、不等式(7.7)が示された。

(ロ－2) $q_2 < a$ $\because$ 式(7.20) の場合

$a = r_2$

$= \max\{1-p, q_2\} \quad \because$ 式(7.3)

$= 1-p$ (7.23)

であることがわかる。ところで、

$p = 1-a \quad \because$ 式(7.23)

$< 2^{-1} \quad \because$ 式(7.6)

$< a \quad \because$ 式(7.6) (7.24)

であるから、

$a \leqq b = r_1 \quad \because$ 式(7.18)

$= \max\{p, q_1\} \quad \because$ 式(7.2)

$= q_1 \quad \because$ 式(7.24) (7.25)

である。よって、

$\max\{q_1, q_2\}$

$= b \quad \because \quad q_2 < a,$ 式(7.25) (7.26)

$\geqq a \quad \because \quad 2$式(7.4), (7.5) (7.27)

を得、不等式(7.7)が示された。 □

上の補助定理7.1を適用して、定理5.6を精密化した次の定理7.1を得、導出原理を空間多重推論系でのファジィ推論規則として採用することを可能にしている。

［定理7.1］**(パターン命題推論4；ファジィ空間多重導出原理 (spatially multiple fuzzy resolution principle))**

式(3.15)の実数値特徴抽出写像uの特別なものとして、非負単位区間値特徴抽出写像

$u : \Phi \times L \to R[0,1] \equiv \{r \mid 0 \leqq r \leqq 1\}$ (7.28)

を採用し、構造形式(1.8)を備えた式(3.14)のモデル構成作用素Tとパターン集合Φとの対$[\Phi, T]$を考える。式(3.14)のT内の特徴抽出写像uは、式(3.7)内の各1次展開実係数$a_\ell(\varphi)$の非負性

$\forall \ell \in L, 0 \leqq a_\ell(\varphi)$ (7.29)

が成立していれば、式(7.28)の非負単位区間値特徴抽出写像である。

式(3.39)の不動点方程式が成立している場合、よって、axiom 1, (iii)の後半が成立し、式(2.6)の成立に注意して、

①$[T\varphi_1 \vee T\varphi_2]$

$= \sum_{\ell \in L} [r_\ell(1) / \sup_{k \in L} |r_k(1)|] \cdot \psi_\ell$

と、

②$[\neg T\varphi_1 \vee T\varphi_3]$

$= \sum_{\ell \in L} [r_\ell(2) / \sup_{k \in L} |r_k(2)|] \cdot \psi_\ell$

とから

③$[T\varphi_2 \vee T\varphi_3]$

$= \sum_{\ell \in L} [c_\ell / \sup_{k \in L} |c_k|] \cdot \psi_\ell$

を得る (7.30)

ことができる。ここに、

$r_\ell(1) \equiv \max\{u(\varphi_1, \ell), u(\varphi_2, \ell)\}$ (7.31)

$r_\ell(2) \equiv \max\{1 - u(\varphi_1, \ell), u(\varphi_3, \ell)\}$ (7.32)

$a_\ell \equiv \min\{r_\ell(1), r_\ell(2)\}$ (7.33)

$b_\ell \equiv \max\{r_\ell(1), r_\ell(2)\}$ (7.34)

として、

$2^{-1} < a_\ell \Rightarrow$ (7.35)

$a_\ell \leqq c_\ell \equiv \max\{u(\varphi_2, \ell), u(\varphi_3, \ell)\}$

$\leqq b_\ell$ (7.36)

が成り立つ。

(証明) 補助定理7.1を適用したものである。 □

7.2 非負単位区間値R[0, 1]での半順序関係 ⊏ を用いての、ファジィ導出節の真理値評価

次の補助定理7.2も、以後の本研究において適用される重要な諸性質を明らかにしている。。

[補助定理7.2] **(半順序関係 ⊏ の満たす諸不等式)** [B16]

$x, y \in R[0, 1]$ (7.37)

を満たす2つの実数x, yについて、不等式

$0 \leqq h \leqq 1$ (7.38)

を満たす実数hを設け、2元関係 ⊏ を

$x \sqsubset y$

$\Leftrightarrow y \leqq x \leqq h \vee h \leqq x \leqq y$ (7.39)

と定義する。このとき、

①(最小元としてのh) $\forall x \in R[0, 1]$, $h \sqsubset x$.

②(反対称律) $x \sqsubset y \wedge y \sqsubset x \Leftrightarrow x = y$.

③2元関係 ⊏ は反射律、反対称律、推移律を満たし、R[0, 1] での半順序である。

④(min演算の、半順序 ⊏ の保存性1)

$x_1 \sqsubset x_2 \wedge y_1 \sqsubset y_2$

$\Rightarrow \min\{x_1, y_1\} \sqsubset \min\{x_2, y_2\}$.

⑤(max演算の、半順序 ⊏ の保存性1)

$x_1 \sqsubset x_2 \wedge y_1 \sqsubset y_2$

$\Rightarrow \max\{x_1, y_1\} \sqsubset \max\{x_2, y_2\}$.

⑥(min演算の、半順序 $\sqsubset$ の保存性2)

$x \sqsubset y \Rightarrow x \sqsubset \min\{x, y\}$.

⑦(max演算の、半順序 $\sqsubset$ の保存性2)

$x \sqsubset y \Rightarrow x \sqsubset \max\{x, y\}$.

⑧(not演算の、半順序 $\sqsubset$ の保存性)

$h=2^{-1}$ の下でのみ、$x \sqsubset y \Rightarrow 1-x \sqsubset 1-y$.

⑨(min-not演算の、0への半順序 $\sqsubset$ の増大性)

$h=2^{-1}$ の下で、

$$0 \leqq \min\{x, 1-x\} \leqq h \tag{7.40}$$

$$\therefore \quad h \sqsubset \min\{x, 1-x\} \sqsubset 0. \tag{7.41}$$

⑩(max-not演算の、1への半順序 $\sqsubset$ の増大性)

$h=2^{-1}$ の下で、

$$h \leqq \max\{x, 1-x\} \leqq 1 \tag{7.42}$$

$$\therefore \quad h \sqsubset \max\{x, 1-x\} \sqsubset 1. \tag{7.43}$$

(証明)　文献［B16］で証明されている。 □

次の定理7.2は、非負単位区間値 R[0, 1]で、ファジィ論理推論系の導出原理を推論規則として、用いることができることを説明している。

［定理7.2］**(非負単位区間値 R[0, 1]でのファジィ論理推論系の導出原理)**

2つの親節(parent clause) C_1, C_2 は、

$$C_1 = P \vee L_1, C_2 = \neg P \vee L_2 \tag{7.44}$$

と表されるとしよう。このとき、ファジィ導出原理での導出節(resolution clause) $R(C_1, C_2)$ は

$$R(C_1, C_2) = L_1 \vee L_2 \tag{7.45}$$

である。

ファジィ推論

① C_1 と② C_2 とから③ $R(C_1, C_2)$ を得る (7.46)

において、

$$a \equiv \min\{TV(C_1), TV(C_2)\} = TV(C_1 \wedge C_2) > h \equiv 2^{-1} \tag{7.47}$$

の下で、

$$a \sqsubset TV(R(C_1, C_2)) \tag{7.48}$$

$$\sqsubset b \equiv \max\{TV(C_1),\ TV(C_2)\} = TV(C_1 \vee C_2) \tag{7.49}$$

が成り立つ。

(証明)　非負単位区間値 R［0, 1］での半順序関係 $\sqsubset$ を用いて、ファジィ論理推論系の導出原理についての文献［A10］のlemma 4を書き直したものである。 □

上述の定理7.2は次の定理7.3の如く、書き直しておく方が適用しやすいし、定理7.2より具体的になっている。

［定理7.2］**(半順序関係 $\sqsubset$ による、ファジィ導出形の真理値の上界・下界定理)**

不等式(7.1)を満たす3つの実数 p, q_1, q_2 について、

$$h = 2^{-1} < \min\{\max\{p, q_1\},\ \max\{1-p, q_2\}\} \tag{7.50}$$

$\Rightarrow$

$\min\{\max\{p, q_1\},\ \max\{1-p, q_2\}\}$

$\sqsubseteq \max\{q_1, q_2\}$ (7.51)

$\sqsubseteq \max\{\max\{p, q_1\},\ \max\{1-p, q_2\}\}.$ (7.52)

（証明） 非負単位区間値 R［0, 1］での半順序関係 $\sqsubseteq$ を用いて、補助定理7.1を書き直したものである。 □

尚、式(7.39)の半順序関係 $\sqsubseteq$ が抽出される各特徴量 $u(\varphi, \ell)$ について $u(\varphi, \ell)\sqsubseteq u(\eta, \ell)$ が成り立つことと、式(6.11)の半順序関係 $\varphi \leqq_u \eta$ が成り立つこととは同値であることは、式(6.10)よりわかる：

式(7.38)の h を式(6.9)の各 $v(\ell)$ にとり、式(7.29)を仮定すれば、式(3.13)の特徴抽出写像 u は式(7.28)を満たすから、

$[\forall \ell \in L, u(\varphi, \ell)\sqsubseteq u(\eta, \ell)] \Leftrightarrow \varphi \leqq_u \eta$ (7.53)

が成り立つ。 □

8. 連続値論理推論系と、最大特徴量を用いた含意によるパターンファジィ推論表現

本章では、これまでの論を根拠として、パターン論理系で、記号論理系を実現するための諸手法が研究される。

幾つかの命題が真であるという仮定から、今1つの別の命題が真であることを主張するとき、これを命題推論ということにする。複数の、**特徴量が1より大きくない非負の実数値を用いて構成されるパターンモデル**(定理7.1) $T\varphi$ を用いて、命題推論を同時並列的に多重に実行するために必要な連続値論理推論系での諸基本公式と、パターンモデル $T\varphi$ を用いた含意計算 $T\varphi_1 \rightarrow T\varphi_2$ などの簡単な応用として、2値記号命題推論に近い形式を備えた“最大特徴量を用いたパターンファジィ推論”を考えよう。

8.1 連続値記号論理系(fuzzy logic)と、2値記号論理系での導出原理の応用

先ず、次の2補助定理8.1，8.2を証明する。

[補助定理8.1]

任意の2実数 p，q について、

$\min\{1-p, 1-q\} = 1-\max\{p, q\}$ (8.1)

(証明) $p<, =, >q$ について両辺が等しいことを確かめることができる。 □

[補助定理8.2]

任意の3実数 a，b，c について、

$\min\{\max\{a, b\}, c\}$

$=\max\{\min\{a, c\},\ \min\{b, c\}\}.$ (8.2)

(証明)

(ⅰ) $\max\{a, b\} \geqq c$ の場合

$\min\{\max\{a, b\}, c\} = c$ であるし、

$\max\{\min\{a, c\},\ \min\{b, c\}\} = c$ であることが

$a \geqq c$, $a < c$ の2つの場合にわけて示される。

(ii) $\max\{a, b\} < c$ の場合

$\min\{\max\{a, b\}, c\} = \max\{a, b\}$ であるし、

$\max\{\min\{a, c\}, \min\{b, c\}\} = \max\{a, b\}$

であることが $a \geqq c$, $a < c$ の2つの場合にわけて

示される。 □

2命題P, Q, Rの真理値(truth-value)は1より大きくない非負の実数とする。

[命題8.1] (連続値論理におけるDe Morganの法則1)

$$[\neg P \wedge \neg Q] = \neg [P \vee Q] \ . \tag{8.3}$$

(証明) 補助定理8.1から明らか。 □

[命題8.2] (連続値論理における分配律)

$$[P \vee Q] \wedge R = [P \wedge R] \vee [Q \wedge R] .$$

(証明) 補助定理8.2から明らか。 □

含意の定義

$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q \tag{8.4}$$

に注意する。

[命題8.3] (連続値論理における前向き3段論法)

$$[P \rightarrow Q] \wedge P = [\neg P \vee Q] \wedge P$$

$$= [\neg P \wedge P] \vee [Q \wedge P] \tag{8.5}$$

(証明) 補助定理8.2から明らか。 □

[命題8.4] (連続値論理における背理法；後ろ向き3段論法)

$$[P \rightarrow Q] \wedge \neg Q = [\neg P \vee Q] \wedge \neg Q \tag{8.6}$$

$$= [\neg P \wedge \neg Q] \vee [Q \wedge \neg Q] \tag{8.7}$$

$$= \neg [P \vee Q] \vee [Q \wedge \neg Q] \tag{8.8}$$

(証明) $[\neg P \vee Q] \wedge \neg Q$

$$= [\neg P \wedge \neg Q] \vee [Q \wedge \neg Q] \tag{8.9}$$

の成立は補助定理8.2から明らかであるし、

$[\neg P \wedge \neg Q] \vee [Q \wedge \neg Q]$

$$= \neg [P \vee Q] \vee [Q \wedge \neg Q] \tag{8.10}$$

の成立は命題8.1から明らか。 □

[補助定理8.3]

任意の2実数 p, q について、

$\max\{1-p, 1-q\}$

$$= 1 - \min\{p, q\} \ . \tag{8.11}$$

(証明) $p <$, $=$, $> q$ について両辺が等しいことを確かめることができる。 □

[補助定理8.4]

任意の3実数 a, b, c について、

$\max\{\min\{a, b\}, c\}$

$$= \min\{\max\{a, c\}, \max\{b, c\}\} . \tag{8.12}$$

(証明) 2つの場合(i), (ii)にわけて証明しよう。

（i）$\min\{a, b\} \leqq c$ の場合

$\max\{\min\{a, b\}, c\} = c$ であるし、

$\min\{\max\{a, c\}, \max\{b, c\}\} = c$ であることが

$a < c$, $a \geqq c$ の2つの場合にわけて示される。

（ii）$\min\{a, b\} > c$ の場合

$\max\{\min\{a, b\}, c\} = \min\{a, b\}$ であるし、

$\min\{\max\{a, c\}, \max\{b, c\}\} = \min\{a, b\}$ であることが、

$a < c, a \geqq c$ の2つの場合にわけて示される。 □

［命題8.5］（連続値論理におけるDe Morganの法則2）

$$[\neg P \vee \neg Q] = \neg [P \wedge Q]. \quad (8.13)$$

（証明） 補助定理8.3から明らか。 □

［命題8.6］（連続値論理における分配律）

$$[P \vee Q] \wedge R = [P \wedge R] \vee [Q \wedge R].$$

（証明） 補助定理8.4から明らか。 □

8.2 2値記号命題論理系での導出原理の応用

2真理値系での命題計算の演繹定理(syllogism principle of propositional calculus)として、重要な導出原理(resolution principle)［B18］,［B19］,［B20］,［A22］がある。

［命題8.7］**（2値記号命題論理系での導出原理）**

3命題P，Q，Rの真理値は特に、0(falsity)，1(truth)の2値であるとする。

$P \vee Q$ が成り立ち、かつ $\neg P \vee R$ が成立すれば、$Q \vee R$ が成り立つ。

（証明）2つの場合(イ)，(ロ)にわけて証明する。

（イ）$P = 0$ の場合

$P \vee Q = Q$ を得、$Q \vee R$ が成り立つ。

（ロ）$P = 1$ の場合

$\neg P \vee R = R$ を得、$Q \vee R$ が成り立つ。 □

上の命題8.7において、$P \vee Q$ と $\neg P \vee R$ とから $Q \vee R$ を導くことを導出(resolution)といい、得られた $Q \vee R$ を導出形(resolvent)という。

［2値論理における導出原理の、パターン想起への応用1］

2値モデル $T\varphi$ について

$T\varphi \vee T\eta_1$ が成り立ち、かつ $\neg T\varphi \vee T\eta_2$ が成立すれば、$T\eta_1 \vee T\eta_2 = \neg T\eta_1 \rightarrow T\eta_2$ が成り立つ。

$T\varphi \vee T\eta_1$ が想起され、かつ $\neg T\varphi \vee T\eta_2$ が想起されるならば、$T\eta_1 \vee T\eta_2 = \neg T\eta_1 \rightarrow T\eta_2$ が想起されるような第9章でのファジィプロダクションシステムを考えることができよう。 □

［2値論理における導出原理の、、パターン想起への応用2］

2値モデル $T\varphi$ について

$T\varphi \vee \neg T\eta_1$ が成り立ち、かつ $\neg T\varphi \vee T\eta_2$ が成立すれば、$\neg T\eta_1 \vee T\eta_2 = T\eta_1 \rightarrow T\eta_2$ が成り立つ。

$T\varphi \vee \neg T\eta_1$ が想起され、かつ $\neg T\varphi \vee T\eta_2$ が想起されるならば、$\neg T\eta_1 \vee T\eta_2 = T\eta_1 \rightarrow T\eta_2$ が想起されるような第9章でのファジィプロダクションシステムを考えることができよう。 □

尚、J.A.Robinson(1965)の、推論規則としての導出原理(resolution principle)を推論に適用する1例を挙げておこう。例えば、人工知能言語 Prolog によって書かれた人工知能プログラムでは、結

論の否定をとり、そこから矛盾を導く過程(証明過程)がこの人工知能プログラムによる推論である。2値論理における命題8.7で説明すれば、

$$[P \vee Q] \wedge [\neg P \vee R] \wedge \neg [Q \vee R] \Rightarrow \text{falsity} \tag{8.14}$$

を導く過程が推論である。この過程が正しい推論結果を得ることは、つまり、2値命題論理における健全な推論であることは、次の定理8.1で保証される。

f, g を真(truth), 偽(falsity)の2つの値をとる2つの真理関数(truth-value function)とする。

$$f \equiv g \tag{8.15}$$

は f, g が恒等的に同一の意味を持っている(恒等的にf, g が等しい；f を g で定義する)ことの意としよう。これまでと同様に、

$$f \rightarrow g \equiv \neg f \vee g \tag{8.16}$$

と定義し、

$$f \rightarrow g = \text{truth} \tag{8.17}$$

を f⇒g と規約する。

［補助定理8.5］(2値論理における truth, falsity への推論)

(i)truth⇒f であるときのみ f≡truth である。

(ii)f⇒falsity であるときのみ f≡falsity である。

(証明)　(i)を示そう。

truth⇒f は truth＝truth→f のことであるが、

$$\text{truyh} \rightarrow f = \neg \text{truth} \vee f = \text{falsity} \vee f = f \tag{8.18}$$

$$\text{即ち、truth} = f \tag{8.19}$$

を得、(i)が示された。

(ii)を示そう。

f⇒falsity は truth＝¬f∨falsity のことであるが、

$$\neg f \vee \text{falsity} = \neg f \text{ 即ち、truth} = \neg f \tag{8.20}$$

$$\text{即ち、falsity} = f \tag{8.21}$$

を得、(ii)が示された。 □

［定理8.1］**(2値命題論理の推論としての背理法)** [A5]

f, g を2つの真理関数とする。

問題とする推論「f⇒g」が正しいことは、「f∧¬g⇒F」を導けることと同値である、つまり、結論 g を否定した場合に前提 f と矛盾することを導く過程の存在と同値である。

(証明)　f⇒g であるための必要十分条件は

$f \rightarrow g = \neg f \vee g = T$ 即ち、$\neg(\neg f \vee g) = \neg T$

$$\text{即ち、} f \wedge \neg g = F \tag{8.22}$$

である。そして、補助定理8.5の(ii)を適用して、f∧¬g＝F であるための必要十分条件は f∧¬g⇒F であることがわかる。 □

8.3　連続値・3値・2値パターンモデル T を用いたパターン命題推論系における含意の解釈と応用

定理7.1での連続値パターンファジィ推論規則としての導出原理を2値記号命題論理系での導出原理に近い形に書き直す。つまり、連続値・3値・2値空間多重論理系に共通に適用できる導出原理を研究する。

8.3.1　諸設定

これまでと同様に、定理7.1の設定で考えよう。

つまり、1より大きくない式(3.13)の非負実数値特徴量

$$\forall\varphi\in\Phi,\forall\ell\in L, 0\leqq u(\varphi,\ \ell)\leqq 1 \tag{8.23}$$

を抽出する式(3.14)のモデル構成作用素 $T:\Phi\to\Phi$ を以後採用する。但し、式(3.7)の如く展開される各1次結合係数 $a_\ell(\varphi)$ の非負性、つまり式(7.29)を仮定していることに注意しておく。

4.3，4.4両節での T'，T'' を用いた3値・2値空間多重論理系は4.2節での連続値空間多重論理系の特別なものであり、4.2節の連続値空間多重論理系(ファジィ空間多重論理系)を採用する本節は3値・2値の場合についても適用されるように論を構成する。

先ず、

$$\forall\varphi\in\Phi,\min_{\ell\in L} u(\varphi,\ \ell)=0 \tag{8.24}$$

$$\wedge\max_{\ell\in L} u(\varphi,\ \ell)=1 \tag{8.25}$$

であるようなパターン集合 Φ を想定しておく。

8.3.2　T-含意同値関係 $\sim_{ip}$

式(4.24)の含意 $[T\varphi_1\to T\varphi_2]$ の定義を使い、

①$u(\varphi_1,\ \ell)=0$ のとき、$u(\varphi_2,\ \ell)=0$

②$u(\varphi_1,\ \ell)=1$ のとき、$u(\varphi_2,\ \ell)=1$

の2つの場合に限り、

$$u(T\varphi_1\longleftrightarrow T\varphi_2,\ \ell)=1 \tag{8.26}$$

が満足され、

③$u(\varphi_1,\ \ell)=0$ のとき、$u(\varphi_2,\ \ell)=1$

④$u(\varphi_1,\ \ell)=1$ のとき、$u(\varphi_2,\ \ell)=0$

の場合に限り、

$$u(T\varphi_1\longleftrightarrow T\varphi_2,\ \ell)=0 \tag{8.27}$$

が満足されるとき、この事態を

$$\varphi_1\sim_{ip}\varphi_2 \tag{8.28}$$

と表現し、**T-含意同値式**が成り立つという。ip は含意(implication)の意である。

2元関係としてのT-含意同値式 $\longleftrightarrow_{ip}$ は、

(i)(反射律)　$\varphi\sim_{ip}\varphi$　(8.29)

(ii)(対称律)

$\varphi\sim_{ip}\eta$ ならば、$\eta\sim_{ip}\varphi\eta$　(8.30)

(iii)(推移律)

$\varphi\sim_{ip}\eta$ かつ $\eta\sim_{ip}\psi$ ならば $\varphi\sim_{ip}\psi$　(8.31)

を満たす意味で、Φ 上の**同値関係**である。

φ を含む**T-含意同値類**

$$[\varphi]_{ip}\equiv\{\eta\in\Phi\mid\varphi\sim_{ip}\eta\}\subseteq\Phi \tag{8.32}$$

が導入される。

8.3.3　T-含意関係 $\leqq_{ip}$

更に、式(4.24)の含意 $[T\varphi_1\to T\varphi_2]$ の定義を使い、

①$u(\varphi_1, \ell)=0$ のとき、$u(\varphi_2, \ell)\in\{0,1\}$

②$u(\varphi_1, \ell)=1$ のとき、$u(\varphi_2, \ell)=1$

の2つの場合に限り、

$$u(T\varphi_1 \to T\varphi_2, \ell)=1 \tag{8.33}$$

が満足され、

③$u(\varphi_1, \ell)=1$ のとき、$u(\varphi_2, \ell)=0$

の場合に限り、

$$u(T\varphi_1 \to T\varphi_2, \ell)=0 \tag{8.34}$$

が満足されるとき、この事態を

$$\varphi_1 \leqq_{ip} \varphi_2 \tag{8.35}$$

と表現し、φ_2 は φ_1 に**T-含意関係**される、或いは、φ_1 は φ_2 をT-含意関係すると読む。

①, ②, ③の解釈、T-含意関係の解釈は次の(一), (二)の様に述べられる：

(一) $\varphi_1\in\Phi$ が最大値特徴量を持っていれば、$\varphi_2\in\Phi$ はその最大値特徴量を必ず、持っている。

(二) $\varphi_1\in\Phi$ がある最大値特徴量を持っていなければ、$\varphi_2\in\Phi$ はその最大値特徴量を持っていることもあるし、持っていないこともある。 □

その理由は、次の通りである：

モデル構成作用素 T として、定理3.6での、式(3.32)の2値パターンモデル T'' を考えると、定理3.7の(ハ)などからわかるように、

$$\forall\varphi\in\Phi, \forall\ell\in L, u(\varphi, \ell)\in\{0,1\} \tag{8.36}$$

のとき、解釈

$u(\varphi, \ell)=1$ のとき、各々、パターン $\varphi\in\Phi$

に第 $\ell\in L$ 番目の特徴が存在する　(8.37)

が採用でき、

$u(\varphi_1, \ell)=1\wedge u(\varphi_2, \ell)=0$ のとき、かつこの

ときに限り、$u(T\varphi_1\to T\varphi_2, \ell)=0$ である　(8.38)

が成立している。 □

簡単にいえば、T-含意関係式(8.35)を

【$T\varphi_1$ に最大値特徴が存在するとき、$T\varphi_2$ にその

最大値特徴が存在しない】ことはない　(8.39)

と、解釈できる。

パターン集合 Φ 上の、式(8.35)のT-含意関係 $\leqq_{ip}$ は、

(i)(反射律)　$\varphi\leqq_{ip}\varphi$　(8.40)

(ii)(反対称律)

$\varphi\leqq_{ip}\eta$ かつ $\eta\leqq_{ip}\varphi$ ならば、$\varphi\longleftrightarrow_{ip}\eta$　(8.41)

(iii)(推移律)

$\varphi\leqq_{ip}\eta$ かつ $\eta\leqq_{ip}\psi$ ならば $\varphi\leqq_{ip}\psi$　(8.42)

を満たす意味で、抽出される特徴量の存在に関する包含関係を反映しているパターン集合 Φ 上の**半順序関係**である。

8.3.4 T-含意関係 $\leqq_{ip}$ による推論規則

式(8.42)の推移律は、2値パターンファジィ推論としての拡張3段論法(定理5.6)の拡張であり、

パターンファジィ情報処理論における1つの**連続値パターンファジィ推論推論規則を与えている。**

詳細に説明してみよう。式(8.42)の推移律により、パターンファジィ推論

$$【[\varphi_1 \leqq_{ip} \varphi_2] \wedge [\varphi_2 \leqq_{ip} \varphi_3]】\Rightarrow [\varphi_1 \leqq_{ip} \varphi_3] \tag{8.43}$$

が可能になったのであり、この式(8.43)の解釈は次の通りである：

【Tφ_1に最大値特徴が存在するとき、Tφ_2にその
最大値特徴が存在しない】ことはない (8.44)

が成立ち、且つ

【Tφ_2に最大値特徴が存在するとき、Tφ_3にその
最大値特徴が存在しない】ことはない (8.45)

であれば、

【Tφ_1に最大値特徴が存在するとき、Tφ_3にその
最大値特徴が存在しない】ことはない。 (8.46)

□

空間多重論理否定演算 ¬ のT-不変性

$$T\neg T\varphi_1 = \neg T\varphi_1 \quad \because \ \text{式}(4.23) \tag{8.47}$$

を満たすことに注意して、式(8.43)のパターンファジィ推論規則の特別な推論規則

$$[\neg T\varphi_1 \leqq_{ip} \varphi_2 \wedge \varphi_2 \leqq_{ip} \varphi_3] \Rightarrow [\neg T\varphi_1 \leqq_{ip} \varphi_3] \tag{8.48}$$

は、定理8.7の2値記号命題論理系での導出原理の拡張に相当し、連続値パターンファジィ推論で使用されてよい導出原理である。定理7.1での連続値パターンファジィ推論の導出原理を2値記号命題論理系での導出原理に近い形に直したものになっている。

9. ファジィプロダクションシステムの構成

本章では、2.4節の内容を省察し、従来のファジィ推論、知識による推論を行う従来のプロダクション・システムを説明しながら、第4章で研究されたファジィ・空間多重・論理演算系を使って、知識推論をも実行できるパターン推論形式のファジィ・空間多重・プロダクション・システムの動作を構築しよう。

9.1 従来のファジィ推論

9.1.1 ファジィ命題と、その包含関係

対象とする世界について述べている事柄、陳述、言明を**命題**(proposition)という。例えば、「人間ならば、理性を持っている」という言明は命題である。命題を導く操作過程を**推論**(reasoning)という。例えば、

「人間ならば、理性を持っている」 (9.1)

「太郎は理性をを持っていない」 (9.2)

という2命題から、

「太郎は人間でない」 (9.3)

という命題を導き出す操作過程は簡単な推論である。但し、第0階述語推論としての命題推論(propositional logic reasoning)ではなく、太郎などの個体(individual)について何が述べられている

かの第1階述語推論(first-order predicate logic reasoning)であるが。

ある変数 x の値を制限する一種の制約を

$$x \text{ is } A \tag{9.4}$$

という命題 P で表現し、述語 A をファジィ部分集合(fuzzy subset)で表現した場合、P を**ファジィ命題**(fuzzy proposition)という。例えば、命題

$$x \text{ is large} \tag{9.5}$$

において、

$$\text{large} = \sum_{x \in X} \mu_{\text{large}}(x)/x$$

$$\text{, where } X = \{1, 2, 3\},\ \mu_{\text{large}}(1) = 0.1,\ \mu_{\text{large}}(2) = 0.4 \text{ and } \mu_{\text{large}}(3) = 1.0 \tag{9.6}$$

と、large をファジィ集合に設定すれば、式(9.5)の x is large はファジィ命題である。

因みに、2つのファジィ部分集合 A, B の包含関係 A⊆B は、或いは、[x is A⊆x is B] は、

A⊆B(或いは、[x is A⊆x is B])

$$\Leftrightarrow \forall x \in X,\ \mu_A(x) \leqq \mu_B(x) \tag{9.7}$$

であると規約される。ファジィ命題間の包含関係は2値記号命題間の含意関係の一般化である。

9.1.2 ファジィ関係による推論

2つの全体集合を X, Y を導入すると、直積 (Cartesian product) X×Y におけるファジィ関係(fuzzy relation) R とはX×Y におけるファジィ集合であり、一般に

$$R = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} \mu_R(x, y)/(x, y) \tag{9.8}$$

と表される。

ファジィ推論

$$C = 【[\text{if } x \text{ is } A] \tag{9.9}$$

$$\wedge [\text{if } (x, y) \text{ is } R]】 \tag{9.10}$$

はまた、1つのファジィ集合 C であり、

$$C = \sum_{y \in Y} \mu_C(y)/y,$$

where

$$\mu_C(y) = \max_{x \in X} \min\{\mu_A(x),\ \mu_R(x, y)\} \tag{9.11}$$

と表される [A9], [A11], [A22]。

the "max-min" principle in fuzzy logic を使って得られる式(9.11)のファジィ集合 C は、

$$C = A \circ R \tag{9.12}$$

とも書かれ、A と R の合成(composition)と称される。

9.1.3 多数のファジィ推論規則を使っての推論結果の表現

各 A_i, B_i がファジィ集合で表現されている n 個の言語的制御規則(linguistic control-rule of if-then type)

$$R_i:\ \text{if } x \text{ is } A_i \text{ then } y \text{ is } B_i,\ i = 1 \sim n \tag{9.13}$$

の1例は

$$\text{if } x \text{ is more or less medium then } y \text{ is large} \tag{9.14}$$

である。このファジィ推論規則 Ri は、Mamdani, E.H.の考えでは、

$$R_i = A_i \times B_i \tag{9.15}$$

とも表現できる［A11］と考えると、

$$R_i = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} \mu_{Ri}(x, y)/(x, y), \qquad (9.16)$$

where

$$\mu_{Ri}(x, y) = \min\{\mu_{Ai}(x), \ \mu_{Bi}(y)\} \qquad (9.17)$$

と表現される。そこで、

ファジィ制御規則の全体

$$R = \bigcup_{i=1}^{n} \{R_i\} \qquad (9.18)$$

を記憶している推論システムは、式(9.4)の入力が与えられたとき、ファジィ推論の結果、式(9.12)のファジィ集合 $C = A_{\bigcirc}R$ を出力することになる。

ファジィ関係 R は、各 R_i がOR結合していると想定すると、式(9.8)の R の帰属度関数 $\mu_R(x, y)$ は、

$$\mu_R(x, y)$$

$$= \max_{i=1 \sim n} \ \mu_{Ri}(x, y) \qquad (9.19)$$

$$= \max_{i=1 \sim n} \ \min\{\mu_{Ai}(x), \ \mu_{Bi}(y)\} \qquad (9.20)$$

と表現されるから、結局、ファジィ推論結果としての、式(9.12)のファジィ集合 C の帰属度関数 $\mu_C(y)$ は

$$\mu_C(y)$$

$$= \max_{x \in X} \min\{\mu_A(x), \ \mu_R(x, y)\} \qquad (9.21)$$

$$= \max_{x \in X} \min\{\mu_A(x), \ \max_{i=1 \sim n} \mu_{Ri}(x, y)\} \qquad (9.22)$$

$$= \max_{x \in X} \min\{\mu_A(x), \ \max_{i=1 \sim n} \min\{\mu_{Ai}(x), \ \mu_{Bi}(y)\}\} \qquad (9.23)$$

と表される。

9.1.4 ファジィ推論結果の最終表現

近似推論(approximate reasoning)［A11］とも称されるファジィ推論(fuzzy inference)の最終出力 y_{output} は、平均値(mean value)、或いは重心

$$y_{output}$$

$$= \sum_{y \in Y} y \cdot p_C(y), \qquad (9.24)$$

$$\text{where } p_C(y) = \mu_C(y) / \sum_{y' \in Y} \mu_C(y') \qquad (9.25)$$

を採用するのが通常である。ここに、$y \in Y$ の存在確率と考えられる $p_C(y)$ は勿論、確率性質

$$[\forall y \in Y, 0 \leqq p_C(y) \leqq 1] \wedge \sum_{y \in Y} p_C(y) \in \{0, 1\} \qquad (9.26)$$

を満たしている。

9.2 従来のプロダクション・システム

9.2.1 宣言的知識を長期記憶に蓄え、短期記憶を書き換えることによって推論する従来のプロダクション・システム

if-then 形の知識表現単位

if (現在の作業用記憶の或る1部と一致するであろう)

条件 then (現在の作業用記憶を書き換える) 行動　　(9.27)

を**宣言的知識**(declarative knowledge)として持ち、その解釈手続きとから構成される問題解決システムが、人工知能システムとしてのプロダクション・システムといわれるものである。

現在の推論作業用記憶の内容と一致する条件を持つ唯1つの“if-then 形rule”をproduction memory(長期記憶)の中から選択し、選択された“if-then 形rule”の示す行動を実行することで次々と作業用記憶(短期記憶)の内容を書き換えていき、適用される“if-then 形rule”がなくなれば動作を終了し、解決すべきその問題が解かれたとするのが、プロダクション・システムである。選択されてよい“if-then 形rule”は一般に複数個あるから、この内のどれか1つを採用し、実際に適用するという“**競合の解消**”の動作の実現が基本的に重要となるが。

9.2.2 複数のファジィプロダクションルールによる前向き推論と、ファジィ・プロダクション・ルールの例

専門家の仕事を代行し、ファジィ推論を基盤として構築された“経験的知識・専門知識を利用した問題解決システム”(ファジィ・エキスパート・システム；fuzzy expert system)は診断の場面などにおいて実用化され多用されている。ファジィ関係を用いたファジィ推論においては、エキスパート・システムの持たねばならない知識はファジィ・プロダクション・ルールの集合で与えられる。

複数のファジィプロダクションルールによる前向き推論を説明しよう。if-then rule(通常のプロダクションルール)

if PREMISE then CONCLUSION (9.28)

において、前提条件 PREMISE と結論 CONCLUSION が fuzzy 複合命題で表現されるものをファジィプロダクションルールという。例えば、

「Q 点の圧力がきわめて高い」 (9.29)

「R 点の水位が十分低い」 (9.30)

「バルブ S をかなり閉める」 (9.31)

が共にファジィ命題として表された言明(statement)

Q 点の圧力がきわめて高く、且つR 点の水位が十分
低ければ、バルブ S をかなり閉めよ (9.32)

がその1例である。現在の入力としての、式(9.4)と同様なファジィ基本命題

x is A' (9.33)

を、各ファジィ・プロダクション・ルール

if x is A_i then y is B_i (9.34)

の前提条件 A_i と近似照合し、照合の程度に応じた出力

y is B_i' (9.35)

を得、すべてのルールからの出力を合成して、最終的なfuzzy 命題

y is B' (9.36)

を求め、この命題から平均値(重心)をとるなどの方法で具体的な応答をすることになる。

9.3 ファジィ・プロダクション・システムとしての連想器

これまで、パターン $\varphi \in \Phi$ が 0, 1 の特徴量を持っている場合、パターンモデル $T\varphi \in \Phi$ はファジィ集合ではないが、そうでない場合はパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ はファジィ集合と考えていることを思い起こし、**パターン**(モデルを用いて)**推論**を行うファジィ・プロダクション・システムを提案する。ファジィ・プロダクション・システム FSM に複数のパターンモデル集合(事実集合)

$$\mathrm{IN}(\Phi_m) \equiv \{T\varphi_i \in \Phi \mid i=1\sim m\} \tag{9.37}$$

を入力し、多段階推論する手法が説明され。

与えられた問題の解を推論としての“想起の働き”で解決しようとする連想器としてのファジィプロダクションシステム(fuzzy production system)FPS を以下で構成しよう。パターンモデル $T\varphi \in \Phi$ をファジィ集合とみなすため、式(3.15)の実数値特徴抽出写像 u の場合で論じ、式(3.14)で定義されている式(2.1)のモデル構成作用素 T を本章では、採用する。

9.3.1 前向き推論のための3段論法での半順序関係の成立

記号命題2値推論系での前向き推論(forward reasoning)とは次のように描写される：

事実 P が与えられる。P と規則 P→Q とから推論結果としての新しい事実 Q が成り立つことを導く。 (9.38)

□

パターン命題ファジィ·推論系での**前向き推論を行う FPS** を構成するため、記号命題2値論理系での3段論法

“P が真であり、P→Q が真であれば、つまり、

P∧[P→Q] が真であれば、Q は真である” (9.39)

をファジィ論理で考えれば、

P∧[P→Q] が真である程度より、

Q が真である程度の方が確からしい (9.40)

を指摘している次の定理9.1に注目しよう。この定理9.1は定理5.4のファジィ化である。この定理9.1は、定理7.1, 定理6.3の(ii), 不等式(7.36)を適用し、証明される。

[定理9.1] **(3段論法の半順序関係定理)**

構造形式(1.8)を備えた式(3.14)のモデル構成作用素 T とパターン集合Φとの対 [Φ, T] を考え、式(7.29)が成立しているものとする。

2式(6.9), (6.10)における各 v(ℓ)の設定

$$\forall \ell \in L, v(\ell) = 2^{-1} \tag{9.41}$$

の下で、

$$\begin{aligned}&\forall \varphi_1 \in \Phi, \forall \varphi_3 \in \Phi,\\&\forall \ell \in L, 2^{-1}\\&< \min\{u(\varphi_1, \ell), \max\{1-u(\varphi_1, \ell), u(\varphi_3, \ell)\}\}\end{aligned} \tag{9.42}$$

であれば、

$$【T\varphi_1 \wedge [T\varphi_1 \rightarrow T\varphi_3]】 \leqq_u 【T\varphi_3】 \tag{9.43}$$

$$\leqq_u 【T\varphi_1 \vee [T\varphi_1 \rightarrow T\varphi_3]】. \tag{9.44}$$

(証明) 定理7.1を適用するため、$T\varphi_2=0$ と設定する。すると、式(2.4)から、

$$\forall \ell \in L, u(\varphi_2, \ell) = 0 \tag{9.45}$$

が成立する。ここで、定理7.1を適用する。4式(7.31)～(7.34)は

$$r_\ell(1) \equiv u(\varphi_1, \ell) \tag{9.46}$$

$$r_\ell(2) \equiv \max\{1-u(\varphi_1, \ell), u(\varphi_3, \ell)\} \tag{9.47}$$

$$a_\ell \equiv \min\{r_\ell(1), r_\ell(2)\} \tag{9.48}$$

$$b_\ell \equiv \max\{r_\ell(1), r_\ell(2)\} \tag{9.49}$$

となり、

$$c_\ell = u(\varphi_3, \ell) \tag{9.50}$$

であり、半順序関係 $\leqq_u$ の定義式(6.10)を使い、不等式(7.36)を適用して、

$$[\forall \ell \in L, 2^{-1} < a_\ell] \tag{9.51}$$

$$\Rightarrow$$

$$[\sup_{k\in L} | a_k |] \cdot 【T\varphi_1 \wedge [T\varphi_1 \rightarrow T\varphi_3]】$$

$$\leqq_u [\sup_{k\in L} c_k] \cdot T\varphi_3 \tag{9.52}$$

$$\leqq_u [\sup_{k\in L} | b_k |] \cdot 【T\varphi_1 \vee [T\varphi_1 \rightarrow T\varphi_3]】 \tag{9.53}$$

が成り立つ。ここで、定理6.3の(ii)の1部

$$[\varphi \leqq_u \eta \Leftrightarrow a\cdot\varphi \leqq_u b\cdot\eta]$$

$$\text{for any two positive numbers a and b} \tag{9.54}$$

を2式(9.52), (9.53)に考慮すれば、2式(9.43), (9.44)の成立が示されたことがわかる。 □

9.3.2 写像 S の設定

さて、パターン $\varphi \in \Phi$ のある集まり(部分集合) Ψ に作用し、

$$S\cdot\Psi \equiv \{S\varphi \mid \varphi \in \Psi\} \tag{9.55}$$

と定義される写像 S の機能は次の(イ), (ロ), (ハ), (ニ)で描写される：

等式(9.41)の設定を常に仮定する。

短期記憶 Ψ にあるパターンモデル $T\varphi_1' \in \Psi$, 長期記憶 R にあるファジィルール $[T\varphi_1'' \rightarrow T\varphi_3] \in R$ の代りに各々、

$$\text{パターンモデル } T\varphi_1' \wedge T\varphi_1'' \tag{9.56}$$

$$\text{ファジィルール } 【[T\varphi_1' \wedge T\varphi_1''] \rightarrow T\varphi_3]】 \tag{9.57}$$

を採用し、改めて、各々を

$$T\varphi_1 \equiv [T\varphi_1' \wedge T\varphi_1''] \tag{9.59}$$

$$[T\varphi_1 \rightarrow T\varphi_3] \equiv 【[T\varphi_1' \wedge T\varphi_1''] \rightarrow T\varphi_3]】 \tag{9.60}$$

と書き、定理9.1を適用することを考えよう。

(イ)固定した $T\varphi_1$ について、任意の $[T\varphi_1 \rightarrow T\varphi_3]$ について式(9.42)が満たされていない場合、真に近い推論結果は得られなかったと考え、$【T\varphi_1 \wedge [T\varphi_1 \rightarrow T\varphi_3]】$ を $T\varphi_1' \in \Psi$ の代りに、Ψ に記憶しない。

(ロ)固定した $T\varphi_1 \in \Psi$ について、任意の $[T\varphi_1 \rightarrow T\varphi_3] \in R$ について式(9.42)が満たされている場合、半順序関係

$$T\varphi_1' \leqq_u 【T\varphi_1 \wedge [T\varphi_1 \rightarrow T\varphi_3]】 \tag{9.61}$$

$$T\varphi_1 \leqq_u 【T\varphi_1 \wedge [T\varphi_1 \rightarrow T\varphi_3]】 \tag{9.62}$$

が共に満たされていなければ、真に近い推論結果は得られなかったと考え、$【T\varphi_1 \wedge [T\varphi_1 \rightarrow T\varphi_3]】$ を $T\varphi_1' \in \Psi$ の代りに、Ψ に記憶しない。

(ハ)3式(9.42), (9.61) (9.62)が満たされる場合、不等式(9.61)を満たす $【T\varphi_1 \wedge [T\varphi_1 \rightarrow T\varphi_3]】$ の内、長期記憶 R にあるファジィルール $[T\varphi_1'' \rightarrow T\varphi_3] \in R$ を動かして得られる最も大きいもの

$$\bigsqcup_{[T\varphi_1'' \rightarrow T\varphi_3] \in R} 【T\varphi_1 \wedge [T\varphi_1 \rightarrow T\varphi_3]】 \tag{9.63}$$

を推論結果として採用する。つまり、$T\varphi_1' \in \Psi$ を Ψ から取り除き、式(9.63)の推論結果を $T\varphi_1' \in \Psi \in \Psi$ の代りに、Ψ に記憶する。

(ニ) $T\varphi_1' \in \Psi$ を Ψ にわたり動かし、上述の(イ), (ロ), (ハ)を実行する。 □

明らかに、次の命題9.1が成立することがわかり、定義域 Ψ の要素総数 $|\Psi|$ は値域 $S\cdot\Psi$ に受け継がれることがわかる。

［命題9.1］（写像Sの定義域，値域の要素総数の保存性）

式(9.53)の $S\cdot\Psi$ について、

$$|S\cdot\Psi| = |\Psi|. \tag{9.64}$$

□

9.3.3 FPSの稼働方法

ファジィ・プロダクション・システム FPS のファジィ推論全動作(多段階不動点連想の働き)を、言い換えれば、式(9.37)の $IN(\Phi_m)$ をkey として、式(9.18)のメモリ(長期記憶) $R=\bigcup_{j=1}^{n}\{R_j\}$ から前向きに多段階適に不動点連想される内容とは何かを説明しよう。

$T\varphi_{j1}$ $(j=1\sim n)$ の何れかに似ているパターンモデルの集合 $IN(\Phi_m)$ を

$$WM=IN(\Phi_m)\ (m\geqq 1) \tag{9.65}$$

と、作業用記憶 WM に入力して、$WM\wedge R$ を初期短期記憶としたファジィ多段階推論を行う。

その構造が時間的に変化する系は一般に力学系(dynamical system)と称されるが、力学系としてのファジィ・プロダクション・システム FSM の時間的発展

$$WM_0, WM_1, WM_2, \cdots, WM_t \tag{9.66}$$

に関する記述は、以下のように描写される：

$R=\bigcup_{j=1}^{n}\{R_j\}$ は式(9.18)で与えられるものであり、個々の R_j $(j=1\sim n)$ は、

$$R_j\equiv T\varphi_{j1}\rightarrow T\varphi_{j2}\equiv \text{if } T\varphi_{j1} \text{ then } T\varphi_{j2} \tag{9.67}$$

$$\equiv \neg T\varphi_{j1}\vee T\varphi_{j} \tag{9.68}$$

であるとしょう。ここに、

①(入力集合についての真条件1)

$$\forall i\in\{1, 2, \cdots, m\}$$
$$\exists \ell\in L, u(T\varphi_i, \ell)>2^{-1} \tag{9.69}$$

②(ルール集合についての真条件2)

$$\forall j\in\{1, 2, \cdots, n\}$$
$$\exists \ell\in L, u(\neg T\varphi_{j1}\vee T\varphi_{j2}, \ell)>2^{-1} \tag{9.70}$$

を満たしておく必要がある。

(i)(連想動作の初期化；initialization)

プロダクション・メモリ(長期記憶)に、式(9.70)を満たす式(9.67)の $R_j\in R$ $(j=1\sim n)$ のみを記憶する。この結果、得られた長期記憶を改めて、式(9.18)の R で表す。

作業用記憶(短期記憶)WM に式(9.69)を満たす $T\varphi_i\in IN(\Phi_m)$ $(i=1\sim m)$ のみを記憶する。この結果、得られた短期記憶を改めて、式(9.65)の $WM=IN(\Phi_m)$ で表す。

作業用記憶 WM の時刻 $t=0$ での内容 $WM_t|_{t=0}$ を

$$WM_t|_{t=0}=S\cdot WM \tag{9.71}$$

と設定する。

(ii)(連想動作の反復的帰納；recursion)

第t段階のファジィ推論結果 WM_t から、第t＋1段階のファジィ推論結果

$$WM_{t+1}=S\cdot WM_t, t=0, 1, 2, \cdots \tag{9.72}$$

を求める。

(iii)(連想動作の終了；termination)

ある推論段階番号 $t \in \{0,1,2,\cdots\}$ が存在して、終了基準(termination criterion)としての不動点方程式

$$WM_{t+1} = WM_t \text{(集合としての同等)} \tag{9.73}$$

が成立したならば、このファジィ・プロダクション・システム FPS の連想動作は終了する。 □

不動点方程式(9.73)の成立は、式(9.18)のプロダクション・ルールの集合 R を用いてこれ以上書き換えることが出来なくなったことを意味する。

9.3.4 想起される作業記憶内容についての検討

命題9.1から作業記憶集合内の要素総数の保存性

$$|S \cdot WM_t| = |WM_t|,\ t = 0, 1, 2, \cdots \tag{9.74}$$

が成立しているが、不動点方程式(9.73)が成立するということは、得られている WM_t は、推論

$$S \cdot \Psi : \Psi (\subseteq \Phi) \rightarrow \Phi \tag{9.75}$$

の働きでこれ以上、変容しない想起内容であることを意味しており、安定な推論結果が獲得されたことになる。

連想動作が終了した後、FPS が外部に示す最終出力は、不動点作業記憶 WM_t の中から最も特徴曖昧さが少ないパターンモデル $T\varphi \in WM_t$ である、つまり、半順序関係 $\leqq_u$ に関する不等式

$$\forall T\eta \in WM_t - \{T\omega\},\ T\eta \leqq_u T\omega \tag{9.76}$$

を満たすパターンモデル $T\omega \in WM_t$ であると規約する。

$WM_t = \phi$ ならば、ファジィ推論結果無しということになる。

想起される作業記憶内容について検討すれば、次の2定理9.2.9.3が証明され、上述の FPS が曖昧性を減少させてゆく推論をしていることがわかった。

[定理9.2] **(作業記憶 WM の意味内容に関する曖昧性の減少性定理)**

$$\forall \psi' \in WM_t, \exists \psi \in WM_{t+1}, \psi' \leqq_u \psi. \tag{9.77}$$

(証明) 写像 S の定義である(イ), (ロ), (ハ), (ニ)の記述から

$$\psi' \neq_u \psi \text{ の場合、} \psi' \leqq_u \psi \text{ である} \tag{9.78}$$

が成立し、本定理の成立は明らかである。 □

次の定理9.3も、上述の FPS が曖昧性を減少させてゆく推論をしていることを、式(6.22)で定義されるパターン $\varphi \in \Phi$ の特徴エントロピー Fenty(φ)の観点から指摘したものである。

[定理9.3] **(作業記憶 WM の意味内容に関する特徴エントロピーの減少性定理)**

任意の $\psi' \in WM_t$ と任意の $\psi \in WM_{t+1}$ について、

共分離条件

$$\forall \ell \in L,\ [u(\psi', \ell) \leqq v(\ell) \wedge u(\psi, \ell) \leqq v(\ell)]$$
$$\vee [v(\ell) \leqq u(\psi', \ell) \wedge v(\ell) \leqq u(\psi, \ell)] \tag{9.79}$$

が成立していれば、WM_t の元の特徴エントロピーの総和より WM_{t+1} の元の特徴エントロピーの総和は小さいか、等しい。

(証明) 式(9.79)の成立は式(6.32)の成立を意味し、式(9.78)を考慮すれば、2定理9.2, 6.1から明らかである。 □

9.3.5 推論としてのパターン想起における半順序関係 $\leqq_u$ の保存

先ず、次の定理9.4は、4.2節の空間多重パターン論理の3種演算 $\wedge$, $\vee$, $\neg$ が、式(6.10)で定義される半順序関係 $\leqq_u$ を保存することを指摘したものである。

［定理9.4］**(半順序関係 $\leqq_u$ の、空間多重パターン論理演算の保存定理)**

構造形式(1.8)を備えた式(3.14)のモデル構成作用素Tとパターン集合Φとの対［Φ, T］を考え、式(7.29)が成立しているものとする。

(一)2式(6.9)，(6.10)における各 $v(\ell)$ について、

$\forall \ell \in L, u(\eta, \ell)=v(\ell)$ (9.80)

であるようなパターン $\eta_v \in \Phi$ について、

$\forall \varphi \in \Phi, \eta_v \leqq_u \varphi.$

(二) $\varphi_1 \leqq_u \varphi_2 \wedge \eta_1 \leqq_u \eta_2$

$\Rightarrow T\varphi_1 \wedge T\eta_1 \leqq_u T\varphi_2 \wedge T\eta_2.$

(三) $\varphi_1 \leqq_u \varphi_2 \wedge \eta_1 \leqq_u \eta_2$

$\Rightarrow T\varphi_1 \vee T\eta_1 \leqq_u T\varphi_2 \vee T\eta_2.$

(四) $\varphi \leqq_u \eta$

$\Rightarrow T\varphi \leqq_u T\varphi \wedge T\eta.$

(五) $\varphi \leqq_u \eta$

$\Rightarrow T\varphi \leqq_u T\varphi \vee T\eta.$

(六)2式(6.9)，(6.10)における各 $v(\ell)$ の設定式(9.41)の下でのみ、

$\varphi \leqq_u \eta$

$\Rightarrow \neg T\varphi \leqq_u \neg T\eta.$

(七)条件式(9.41)の下で、

$\eta_v \leqq_u T\varphi \wedge \neg T\varphi \leqq_u \Sigma_{\ell \in L}\ 0 \cdot \psi_\ell.$

(八)条件式(9.41)の下で、

$\eta_v \leqq_u T\varphi \vee \neg T\varphi \leqq_u \Sigma_{\ell \in L}\ 1 \cdot \psi_\ell.$

(証明)　式(6.11)の半順序関係 $\leqq_u$ の定義式(6.9)，(6.10)を使って、半順序関係 $\sqsubseteq_u$ の定義式(7.38)，(7.39)についての補助定理7.2が、定理6.2の(ii)、並びに、式(9.54)を考慮し、書き直されたものである。 □

上述の定理9.4を適用し、2式(9.59)～(9.60)について検討しよう。

先ず、長期記憶Rにあるファジィルール $[T\varphi_1'' \to T\varphi 3] \in R$ の前提 $T\varphi_1''$ が短期記憶 Ψ にあるパターンモデル $T\varphi_1'$ の情報を含んでいる(6.1.4項の解釈(三))という式(9.81)が成立していれば、

$T\varphi_1' \leqq_u T\varphi_1''$ (9.81)

$\Rightarrow$

$T\varphi_1' \leqq_u T\varphi_1 \equiv [T\varphi_1' \wedge T\varphi_1'']$

∵ 定理9.4の(四)，定理6.2の(ii) (9.82)

がいえ、$T\varphi_1' \in \Psi$ の代りに、式(9.59)の $T\varphi_1 \in \Psi$ を採用することは、6.1.4項の解釈(三)によれば、$T\varphi_1$ は $T\varphi_1'$ の情報を含む。

同様に、

$\neg T\varphi_1 \leqq_u T\varphi_3$ (9.83)

$\Rightarrow$

$\neg T\varphi_1 \leqq_u T\varphi_1 \to T\varphi_3 (= \neg T\varphi_1 \vee T\varphi_3)$ (9.84)

∵ 定理9.4の(四)，定理6.2の(ii)

であり、2式(9.67)，(9.68)のプロダクション・ルール R_j の意味付けが得られた。

更に、式(9.62)については、

$$\mathrm{T}\varphi_1 \leqq_{\mathrm{u}} [\mathrm{T}\varphi_1 \to \mathrm{T}\varphi_3] \tag{9.85}$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathrm{T}\varphi_1 \leqq_{\mathrm{u}} 【\mathrm{T}\varphi_1 \wedge [\mathrm{T}\varphi_1 \to \mathrm{T}\varphi_3]】$$

∵定理9.4の(四)，定理6.2の(ii) (9.86)

がいえ、6.1.4項の解釈(二)によれば、$\mathrm{T}\varphi_1$は$\mathrm{T}\varphi_1 \wedge [\mathrm{T}\varphi_1 \to \mathrm{T}\varphi_3]$に要約されている。

最後に、式(9.61)については、

$$\mathrm{T}\varphi_1' \leqq_{\mathrm{u}} \mathrm{T}\varphi_1 \leqq_{\mathrm{u}} 【\mathrm{T}\varphi_1 \wedge [\mathrm{T}\varphi_1 \to \mathrm{T}\varphi_3]】$$

∵ 2式(9.82)，(9.86) (9.87)

がいえ、6.1.4項の解釈(二)によれば、$\mathrm{T}\varphi_1'$は$\mathrm{T}\varphi_1 \wedge [\mathrm{T}\varphi_1 \to \mathrm{T}\varphi_3]$に要約されている。

このようにして、9.3.2項の**写像 S が有効に機能するためには、2式(9.81)，(9.85)の成立が要求される**ことになった。

9.3.6 推論としてのパターン想起における半順序関係 $\leqq_{\mathrm{u}}$ の上限と、情報処理における半順序原理

式(9.63)に登場する記号 $\sqcup_{\mathrm{u}}$ は実は、式(6.10)で定義される式(6.11)の半順序関係 $\leqq_{\mathrm{u}}$ の上限記号である。

上限記号 $\sqcup_{\mathrm{u}}$ について説明しておこう。

この半順序関係 $\leqq_{\mathrm{u}}$ の下での、集合 $\Psi(\subseteq\Phi)$ の**上限**(supremum)、即ち、**最小上界**(least upper bound) $\sqcup_{\mathrm{u}}\Psi$ を次のように定義する。

[定義9.1] **($\Psi(\subseteq\Phi)$の最小上界 $\sqcup_{\mathrm{u}}\Psi$ の定義)**

Φ を半順序関係 $\leqq_{\mathrm{u}}$ の定義された半順序集合(partially ordered set)とするとき、Φ の部分集合 Ψ の**上限** ψ とは、次の2条件(i)，(ii)を満たす Φ の要素であり(Ψ の要素とは限らない)、

$$\psi \equiv \sqcup_{\mathrm{u}}\Psi \in \Phi \tag{9.88}$$

と書く：

(i)(上界性；$\Psi \leqq_{\mathrm{u}} \psi$)

$\forall \eta \in \Psi,\ \eta \leqq_{\mathrm{u}} \psi.$

(ii)(最小性；$\Psi \sqsubseteq \psi'$ならば、$\psi \sqsubseteq \psi'$)

$\exists \varphi \in \Phi,\ \forall \eta \in \Psi,$

$\eta \leqq_{\mathrm{u}} \varphi$ ならば、$\psi \leqq_{\mathrm{u}} \varphi.$ □

特に、$\sqcup_{\mathrm{u}}\{\varphi_1, \varphi_2\}$を、

$$\varphi_1 \sqcup_{\mathrm{u}} \varphi_2 \tag{9.89}$$

と表すことがある。式(9.89)の $\varphi_1 \sqcup_{\mathrm{u}} \varphi_2$ はφ_1とφ_2とを併合して得られたパターン(**φ_1，φ_2双方に共通な情報を備えているパターン**)であるという。

次の命題9.2の成立は、$\varphi \sqsubseteq \eta$が2つの元からなる有限集合$\{\varphi, \eta\}$に関する半順序関係 $\sqsubseteq$ の上限であることから、明らかである。

[命題9.2] (上限の性質)

$\varphi \leqq_{\mathrm{u}} \eta \Leftrightarrow \varphi \sqcup_{\mathrm{u}} \eta = \eta.$ □

情報処理における半順序原理 [B16] とは、6.1.4項の4解釈(一)～(四)が付与できるような半順序関係 $\leqq_{\mathrm{u}}$ の上限を、情報処理における終了基準として採用した不動点方程式の解として求めることを指す。

よって、9.3節のファジィ・プロダクション・システムは情報処理における半順序原理に従って、

解を求めていることは、2式(9.63), (9.76)が示していることになる。

10. むすび

本研究は1991年に発表した前研究［B16］の続編である。S.Suzukiの唱えた**情報処理における半順序原理**は本情報システム FPS の構築において結実となって現われたと思っている。

本研究の発端となったのは、7.1節のlemma 4で説明されている C.T.Lee(1972)［A10］の、記号命題論理系でのファジィ導出原理である。この導出原理はパターン命題論理での導出原理を指摘している定理7.1に空間多重的に一般化されている。

これまで、S.Suzukiは、可分な一般抽象ヒルベルト空間［A1］～［A4］$\mathfrak{H}$上で稼働する2つの**情報システム**(万能性連想形パターン認識システム**RECOGNITRON**［B3], ［B4]、パターンの系列を記憶し、それを想起的再生をする連想形記憶システム**MEMOTRON**［B2], ［B26］)を提案し、その簡単な計算機シミュレーション［B9］～［B11], ［B14], ［B15], ［B26］を介し、その性能を確かめている。本論文では、この2つの情報システム RECOGNITRON, MEMOTRON に加えて、**FUZZITRON**と称されてよい**マルチメディア処理用ファジィ・プロダクション・システム** FPS が、4.2節で提案された空間多重パターン命題ファジィ論理系と、この論理系でのファジィ導出原理の特別な場合の3段論法を推論規則として用い、9.3節で情報システムとして“S.Suzukiの唱える情報処理における半順序原理［B16]”に従って構築された。その基本的な一般機能が6.1.4項で導入され4解釈(一)～(四)を付与可能な式(6.18)の半順序関係 $\leqq_u$ に関し、研究された(9.3.6項を参照)。定理6.1で証明されているように、半順序関係 $\leqq_u$ と等価な評価を与えることのできる式(6.22)の**特徴エントロピー** Fenty は式(2.2)の1次独立な系 ψ_k, $k\in L$ が特に、直交系の場合は文献［B12］の式(E1)のエントロピー ETPY(φ ; $\{\psi_k\}_{k\in L}$)に一致し、“粒子の位置、運動量の微分エントロピーの和が常に正となるという量子力学の不確定性原理と等価な表現”と同様な表示が成り立つこと(文献［B12］の定理E1)である。

空間多重パターン命題ファジィ論理系を構築するために基礎となったのは、定理3.4での②の、式(3.15)の特徴抽出写像 u を使った構造形式(1.8)を備え、SS理論でのaxiom 1を満たす式(2.1)のモデル構成作用素 T が定理3.7の(イ)で証明されているように、不動点方程式(3.39)を満たしたことであり、定理4.1で指摘されているように、この**ファジィ・パターン論理系**が T の働きに不変であったことである。

5.2節の2定理5.2, 5.3での多変数パターン命題関数の2選言・連言標準展開定理5.2, 5.3は次のように一般化されることが期待される：

1つのパターン変数 Tφ、及び、その否定 $\neg$Tφ を1つの文字(literal)と呼ぶ。1つの文字を L_j で表し、文字 L_1, L_2, …, L_p の選言 $L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_p$ を節と呼び、連言 $L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_p$ を句と呼ぶ。

パターンファジィ論理式Fが、Φ^iを句として、

$$F = \Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \cdots \vee \Phi_q (q \geqq 1) \tag{10.1}$$

と表されるとき、この右辺を F のパターンファジィ選言標準形という。また、C_iを節として、

$$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_q (q \geqq 1) \tag{10.2}$$

と表されるとき、この右辺を F のパターンファジィ連言標準形という。 □

構築された情報システム FUZZITRON に関し、2.4節で提起しておいた2問題(作業記憶集合の単

調増大性の阻止、推論意味内容に関する曖昧性の減少の確保)が9.3.2項での写像Sを導入し、命題9.1、定理9.2、定理9.3で解決されたのは、空間多重パターン命題ファジィ論理系の諸演算が半順序関係 $\leqq_u$ を保存するという定理9.4の存在である。定理9.4は、半順序関係 $\leqq_u$ がモデル構成作用素T、並びに、正定数倍の働きに不変であるを指摘している2定理6.2, 6.3の(ii)によって支えられている事実に注意しておかねばならない。

さて、正数aの導入の下に、2元関係(relation between two elements)を表す関数

$$0 \leqq R_1(\varphi, \eta) \equiv 1 - \exp[-a \cdot \| T\varphi - T\eta \|^2] \leqq 1 \tag{10.3}$$

が十分大であれば、

2つのパターン $\varphi \in \Phi'$, $\eta \in \Psi$ は相違している

という解釈が成り立つ。

また、関数

$$0 \leqq R_2(\varphi, \eta) \equiv \exp[-a \cdot \| T\varphi - T\eta \|^2] \leqq 1 \tag{10.4}$$

が十分大であれば、

2つのパターン $\varphi \in \Phi'$, $\eta \in \Psi$ は類似している

という解釈が成り立つ。$R_1(\varphi, \eta)$, $R_2(\varphi, \eta)$ は直積 $\Phi' \times \Psi$ でのファジィ関係の帰属度関数 $\mu_{R1}(\varphi, \eta)$, $\mu_{R2}(\varphi, \eta)$ の2例である。

然し乍ら、ファジィ推論

$$\begin{aligned} &\varphi \bigcirc R_2 \\ &= \sum_{\eta \in \Psi} \mu_{\varphi \bigcirc R2}(\eta) / \eta \\ &= \sum_{\eta \in \Psi} \max_{\varphi \in \Phi} \min\{\mu(\varphi),\ \mu_{R2}(\varphi, \eta)\} / \eta \end{aligned} \tag{10.5}$$

でのファジィ集合

$$\begin{aligned} &\varphi \text{ is } \Phi' \\ &= \sum_{\varphi \in \Phi'} \mu(\varphi) / \varphi \end{aligned} \tag{10.6}$$

の与え方は通常、困難である。

本論文はこのようなファジィ情報処理を取り扱ったのではない。

式(3.15)の実数値特徴抽出写像uを使用し、

$$\begin{aligned} &0 \leqq R_2(\varphi, \eta ; \ell) \\ &\equiv \exp[-a \cdot |u(T\varphi, \ell) - u(T\eta, \ell)|^2] \leqq 1 \end{aligned} \tag{10.7}$$

として、ファジィ推論

$$\begin{aligned} &\Phi' \bigcirc R_2 \\ &= \sum_{\ell \in L} \mu\varphi \bigcirc R_2(\eta ; \ell) / \ell \\ &= \sum_{\ell \in L} \max_{\varphi \in \Phi'} \min\{\mu(\varphi ; \ell),\ \mu_{R2}(\varphi, \eta ; \ell)\} / \ell \end{aligned} \tag{10.8}$$

でのファジィ集合

$$\begin{aligned} &\varphi \text{ is } \Phi' \\ &= \sum_{\ell \in L} \mu(\varphi ; \ell) / \ell \\ &= \sum_{\ell \in L} [\,|u(T\varphi, \ell)|^2 / \sum_{k \in L} |u(T\varphi, k)|^2] / \ell \end{aligned} \tag{10.9}$$

の場合も扱ったわけではない。この種の場合も、前述の場合と同様、従来のファジィ理論を素直に再現しただけであり、そんなに深い理論上の進展が期待されるわけではない。

本研究の特異性は以下のように説明される。

パターン$\varphi \in \Phi$のモデル化場面"$\varphi \to T\varphi$"において、"パターン$\varphi \in \Phi$から抽出された特徴量の組がパターンモデル$T\varphi \in \Phi$へ受け継がれる"ことを示している式(2.3)の特徴抽出写像uのT-不変性、つまり、式(2.1)のパターンモデル構成作用素Tの構造形式(1.8)について、

$$\forall \varphi \in \Phi,$$
$$\forall \ell \in L,\ u\left(\sum_{k \in L} u(\varphi, k) \cdot \psi_k, \ell\right) = u(\varphi, \ell) \qquad (10.10)$$

という"式(2.6)の成立を可能ならしめる式(2.3)の特徴抽出写像uの存在"が、本パターン命題推論系が構築でき、上述のようなファジィ情報処理よりもより深遠な手法が研究可能な根拠であることに、気付く。

この構築根拠は兎も角として、**パターン論理系の採用の下で、ファジィの働きを取り入れ、記号論理系のプロダクション・システムを多重・並列的に構成した研究はこれまで存在していない。**本研究は正に、マルチメディア・コンピュータを構成する目的で、正に、この研究方向に挑戦し、プロダクション・システム構成理論的にはほぼ、完全な形で解決がもたらされた。

本研究の推進力となったのは、S.Suzukiパターンモデル構成作用素Tであり、このTを用い、通常の記号論理系での導出原理を多重・並列的に包含可能なパターン命題推論系を構成できた。**人工知能言語 Prolog の文法構造は導出原理そのものである**ことに注意しておかねばならないだろう。人工知能言語 Prolog を用い表現化される計算機プログラム［B18］～［B20］によって、マルチメディア情報を処理するプロダクション・システムを実現するよりも遥かに柔軟な実現が期待されることになったといえよう。

本研究は、6文献［B16］～［B20］,［B29］の研究に続くものである。情報処理とは、記号列処理系でも、時間信号処理系でも、パターン(時空信号)処理系でも、エントロピーの減少を伴った［B17］ある半順序関係の上限を求める推論過程であるというのが、S.Suzukiの唱える情報処理半順序原理［B16］であり、ありとあらゆる認識の働きがその解として得られるS.Suzukiの連想形認識方程式の求解過程も正にこの半順序原理に従って導かれている［B3］,［B4］。本研究においても、従来の標準的なファジィ処理を多重・並列化として得られているファジイ空間多重情報処理もこの**SS半順序原理**に従って定式化された。

各種記号列・各種パターンを入出力とする情報システムとしてのファジィマルチメディアコンピュータは記号推論機構も備えていなければならないが、この機構をパターン論理推論系で実現するとすれば、記号推論系は必要でなくなり、1つの推論系(パターン論理推論系)さえ備えておけばよい。この考えで、ファジィマルチメディアコンピュータを構築するのに必要な
数理的基礎の1部が研究された。

本研究では、あるものの組合わせによる内部記述として、パターンモデル$T\varphi$全体として、φが再構成され得るとき、このあるものがもとのパターンφの特徴量の組であるという立場を採用して、3種類のパターンモデル$T\varphi$が提案された。

観察者に座標系を設定する**観察者中心座標系**の下では、パターンモデル$T\varphi$は座標変換に対し不変的であることが望ましいが、対象に座標系を設定する**対象中心座標系**の下では、パターンモデル$T\varphi$は座標変換に対し共変的でありさえすればよい。本研究での3種類のパターンモデルは座標変換に対し共変的であることに注意しておこう。

視覚系のもつ認知機能は、刺激としてのパターンに意味を見い出し、見える世界の事柄表現を知識として創出することだと、推測される。

パターンから抽出された特徴はパターンを見るときの決定物としてではなく、むしろ、制約と

して作用することだと想定し、**空間多重論理推論系**を構成した。この制約を短期記憶に置くことで、長期記憶と照らしあわせて、ファジィプロダクションシステムは対象をそれまでに学習し獲得した諸知識で意味付け、対象を再構成し理解すると考えた。

パターンが見えるためには、システムにはそれについての長期記憶が必要であり、力学系の時間的発展によって対象について新たな知識を作り出し、この知識に基づいて対象を再構成し意味付けることこそ、ファジィプロダクションシステムによる対象の理解であろう。

4公理 axiom 1～axiom 4を出発点とするSS理論は知能情報学の新しい原理を明らかにしつつあるが［B7］～［B15］、SS理論の出発点は、

パターンモデル $T\varphi$ をみたら原パターン φ のようにみえる

こと($T\varphi$, φ についての同一知覚原理)を可能にするaxiom 1にある。処理の対象とするパターン φ の集合 Φ と、式(2.1)の写像 T との対［Φ, T］が3.1節のaxiom 1を満たす必要がある、というのが、SS理論［B1］～［B4］の主張である。

外界から獲得した2次元投影像を脳内の記憶と照合する情報処理過程がパターン認識過程である。パターン認識の数学的理論(SS理論)では、入力パターン φ に対応するパターンモデル $T\varphi$ を求め、$T\varphi$ からカテゴリ帰属知識に関する連想形認識方程式［B3］の解として、不動点パターンモデルを連想する形で、φ の帰属するカテゴリを決定する多段階パターン変換法が考えられている。

SS理論は、このようなパターンモデル $T\varphi$ を恰も、原パターン φ と錯覚し、構造受精変換を多段階適用し、カテゴリ帰属知識の不動点知識を連想形認識方程式を解くことにより求めるという“不動点探索形構造受精多段階変換に基づく認識の働き”を提案しており、この認識の働きがありとあらゆるパターン認識の働きをシミュレートできることが証明されている。

本研究では、表象能力に基づいた概念的表象分類知能のみを取り扱うこれまでの諸研究［B3］，［B4］に引き続いて、表象を論理的に操作するといった知覚運動的知能を実現しようとしている。

更に、メディアで表現された知識を変換･処理･蓄積･検索するという機能を実現しなければならない“人工知能学”は、古典的な状態空間探索理論、並びに論理を使った非単調的記号推論理論などや、ファジィ･ニューラルネット･遺伝的アルゴリズム･人口生命の各理論と共に、進歩･発展しているけれども、**感情･感性などの非論理情報**(nonlogical information)を処理するようには成熟していない。パターン処理の場面でも、この種の非論理情報を捨ててパターン(例えば、会話音声)を処理したのでは、領域分割･解釈･認識の各性能に限界が生ずるという考えがあり［A17］、この種の考え、非論理情報(感性情報)を取り入れた処理方向に本研究を改良しなければならない。

例えば、3段論法の推論過程を複数のパターンモデルで表現できた。

長期記憶に蓄えている知識を容易に追加･削除･修正できたりするためには、モジュール性(modularity)に優れた知識表現法を採用する必要がある。そのためには、手続き的表現(procedual representation)よりも宣言的表現(declarative representation)を採用する方がよいことが知られている。

ファジイ･プロダクション･システムの長期記憶に蓄えられる式(9.18)の知識集合 $R=\bigcup_{j=1}^{n}\{R_j\}$ 内の各ルール R_j の、式(9.56)の手続的表現の、式(9.57)のファジィ空間多重論理表現 $\neg T\varphi_{j1}\vee T\varphi_{j2}$ は正に、知識の宣言的表現形式を採用していることになるかも知れない。

本マルチメディア･コンピュータがマルチメディア情報の取り扱いに関し、知識の獲得(acquistion)、検索(retrieval)、推論(reasoning)の3基本場面で、その能力をどの程度発揮するかは、実用に耐えられるかを検討可能な実装的研究に待たねばならない。

漠然性(vagueness)，多義性(polymeanings)，不確実性(uncertainty)，不完全性(incompleteness)な

どがある知識を扱うのに、ファジィ推論が適している場合がある。

ファジィ・マルチメディア・コンピュータの基本方式として、プロダクション・システムに現在多用されているファジィ制御を組み込んだファジィ・プロダクション・システムを、S.Suzukiのモデル構成作用素 T を使用し採用したが、その他に命題論理，第1階述語論理，意味ネットワーク，フレームなどを組み込む基本方式があり、残された研究が多数あることに、指摘おかねばならない。

また、矛盾した知識を蓄えたため生じる推論の混乱を避けるために、真理管理システム TMS (truth maintenance system)，仮定に基づく真理管理システム ATMS (assumption-based TMS)，節管理システム CMS (clause management system) などが研究されているが［A22］、本空間多重推論系を適用すれば、少なくとも、これらを多重・並列的に素直に構成することも可能であるが、本空間多重推論系の持つ利点を生かした構成法を研究することが望まれる。

更に、パターンモデル $T\varphi$ の構成に必要な1次独立な系 ψ_ℓ，$\ell \in L$、その特別なものとしての直交系 φ_ℓ，$\ell \in L$ については、文献Bの諸文献で多数指摘済みである。処理の対象とする問題のパターン集合 Φ に応じ、適切なものを選定する実用化選定手法の一般論については、将来の研究として残された。

文　献　A

［A 1］青木利夫, 高橋渉：“集合･位相空間要論”，培風館, Sept.1979

［A 2］Angus E.Taylor, David C.Lay：“Introduction to function analysis”, John Wiley & Sons, Inc., 1980

［A 3］吉田耕作, 河田敬義, 岩村つらね：“位相解析の基礎”，岩波書店, May 1963

［A 4］Gilbert G.Walter：“Wavelets and other orthogonal systems with applications”，CRC Press, Inc., 1994,

［A 5］入江盛一：“数理論理学入門”，培風館, 1974

［A 6］松本和夫：“数理論理学（共立講座 現代の数学1）”，, 共立出版, 1971

［A 7］浅居喜代治他：“あいまいシステム理論入門”，オーム社, 1978

［A 8］水本雅晴：“ファジィ理論とその応用”，サイエンス社, 1989

［A 9］J.A.Goguen：“L-fuzzy sets”，Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol.18,, pp.145-174, 1967

［A10］Richard C.T.Lee：“Fuzzy logic and the resolution principle”，Journal of the Association for Computing Machinery, vol.19, no.1, pp.109-119, Jan.1972

［A11］Ebrahim H.Mamdani：“Application of fuzzy logic to apploximate reasoning using linguistic synthesis”，IEEE Transactions on Computers, vol.C-26, no.12, Dec.1977,

［A12］Shokri Z.Selim, M.A.Ismail：“K-means-type algorithms：A generalized convergence theorem and characterization of local optimality”，IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence, vol.PAMI-6, no.1, pp.81-87, Jan.1984

［A13］廣田薫：“ファジィ推論エキスパートシステムの現状と動向”，情報処理（情報処理学会誌），vol.28, no.8, pp.1065-1074, Aug.1987

［A14］Michael J.Sabin：“Convergence and consistency of fuzzy c-means/ISODATA algorithms”，IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence, vol.PAMI-9, no.5, pp.661-668, Sept.1987

[A15] 長尾真他："マルチメディア情報学の基礎(岩波講座マルチメディア情報学1)"，岩波書店, Oct.1999
[A16] 横井俊夫："メディアを手掛かりとしたAI技術・研究の再構築"，人工知能学会誌, vol.13, no.5, Sept.1998
[A17] 中津良平："人間の非論理情報をAIはどう取り扱うか？"，人工知能学会誌, vol.14, no.2, Mar.1999
[A18] いや富仁, 萩原将文："ファジー推論ニューラルネットワークを用いた風景画像からの知識抽出と認識"，電子情報通信学会論文誌D-Ⅱ, vol.J82-D-Ⅱ, no.4, pp.685-693, Apr.1999
[A19] Tapan Kr.Dinda, Kumar s.Ray, Mihi Kr.Chakraborty："Fuzzy relational calculus approach to multidimensional pattern classification"，Pattern Recognition, vol.32, pp.973-995, 1999
[A20] Andrzej Cichocki, Rolf Unbehauen："Neural networks for optimization and signal processing"，John Wiley & Sons, Mar.1994
[A21] Richard L.Dykstra："An algorithm for restricted least squares regression"，Journal of the American Statistical Association , vol.78, no.384, pp.837-842, Dec.1983
[A22] 太原育夫："認知情報処理（ニューロサイエンス&テクノロジーシリーズ)"，オーム社, Mar.1991
[A23] R.S.Michalski他編："概念と規則の学習－例からの学習（知識獲得と学習シリーズ5)"，共立出版, 電総研人工知能研究グループ他訳, May 1988

文　献　B

[B 1] 鈴木昇一："認識工学"，柏書房, Feb.1975
[B 2] 鈴木昇一："ニューラルネットの新数理"，近代文芸社, Sept.1996
[B 3] 鈴木昇一："パターン認識問題の数理的一般解決"，近代文芸社, June 1997
[B 4] 鈴木昇一："認識知能情報論の新展開"，近代文芸社, Aug.1998
[B 5] 鈴木昇一："パターンのエントロピーモデル"，電子情報通信学会論文誌（D-Ⅱ)，vol.J77-D-Ⅱ, no.10, pp.2220-2238, Nov.1994
[B 6] 鈴木昇一："パターン認識の数学的理論"，電子情報通信学会技術研究報告［パターン認識と学習, パターン認識と理解］, PRL84-6（第1部)，PRL84-30, PRL84-38, PRL85-27, PRU86-8, PRU86-35, PRU86-69, PRU87-1, PRU87-28, PRU88-30, PRU89-1, PRU89-27, PRU89-40, PRU89-66, PRU89-77, PRU89-136, PRU90-5, PRU90-15, PRU90-29, PRU90-125, PRU91-1, PRU91-29, PRU91-42, PRU92-1, PRU92-18, PRU92-25, PRU92-89, PRU92-102（第28部）, May 1984～Jan.1993
[B 7] 鈴木昇一："Rosenfeld 型の確率的弛緩ラベリング法の基本的諸性質"，情報研究(Information and Communication Studies；文教大学・情報学部)，vol.11, pp.163-181, Dec.1990
[B 8] 鈴木昇一："類似度関数を用いた確率的緩和法"，情報研究（文教大学・情報学部)，no.20, pp.23-75, Dec.1998
[B 9] 鈴木昇一："構造受精法と日本語単独母音の認識"，情報研究（文教大学・情報学部)，vol.18, pp.17-51, Dec.1998

[B10] 鈴木昇一, 前田英明："有声破裂音の代表パターンの学習的決定と、その計算機シミュレーション"，情報研究（文教大学·情報学部），no.20, pp.77-95, Dec.1998
[B11] 鈴木昇一, 前田英明："変動エントロピーによる有声破裂音の順序付けと、その計算機シミュレーション"，情報研究（文教大学·情報学部），no.21, pp.51-78, Mar.1999
[B12] 鈴木昇一："直交系によるパターンモデルの構成"，情報研究（文教大学·情報学部），no.21, pp.23-49, Mar.1999
[B13] 鈴木昇一："認識行為に向けての、効用最大化原理"，情報研究（文教大学·情報学部），no.22, pp.151-210, Dec.1999
[B14] 鈴木昇一："平均顔を用いた顔画像の2値化、並びに、目·鼻·口の抽出と、その計算機シミュレーション"，情報研究（文教大学·情報学部），no.22, pp.65-150, Dec.1999
[B15] 鈴木昇一："界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の、顔画像処理に関する計算機シミュレーション"，情報研究（文教大学·情報学部），no.23, pp.109-182, Mar.2000
[B16] 鈴木昇一："半順序と情報処理"，情報研究（文教大学·情報学部），no.12, pp.121-174, .Dec.1991
[B17] 鈴木昇一："新しい情報の測度とパターン情報処理"，情報研究（文教大学·情報学部），no.13, pp.273-358, Dec.1992
[B18] 鈴木昇一, 中村三郎："知識情報処理における帰納的推論"，情報研究（文教大学·情報学部），no.9, pp.173-196, Dec.1988
[B19] 鈴木昇一, 中村三郎："最汎アトムを用いない精密化方法によるPrologプログラムの帰納的自動合成システムの、C言語による実現"，情報研究（文教大学·情報学部），no.10, pp.151-167, Dec.1989
[B20] 中村三郎，田代達也，鈴木昇一："ソフトウェアをコンピュータに作らせる夢—1つの提案「MIS」について-"，コンピュータアクセス, pp.54-62, Jan.1990
[B21] 鈴木昇一："風景画から知識を抽出し、解釈するシステムの、ファジィ推論ニューラルネットによる構成"，情報研究（文教大学·情報学部），no.23, pp.183-265, Mar.2000
[B22] 鈴木昇一："手書き漢字の側抑制効果的分解とその計算機シミュレーション"，情報処理学会誌, vol.15, no.12, pp.927-934, Dec.1974
[B23] 鈴木昇一："画像情報量とその手書き漢字への応用"，画像電子学会誌, vol.4, no.1, pp.4-12, Apr.1975
[B24] 鈴木昇一："抽出された特徴による手書き漢字構造の再生"，情報処理学会誌, vol.18, no.11, pp.1115-1122, Nov.1977
[B25] 鈴木昇一："回転群と画像の分解·強調·構造化再構成に関する計算機シミュレーション"，情報研究（文教大学·情報学部），vol.4, pp.36-56, Dec.1983
[B26] 鈴木昇一："連想形記憶器MEMOTRONと日本語単 独母音系列の再生に関する計算機シミュレーション"，情報研究（文教大学·情報学部），vol.7, pp.14-29, Dec.1986
[B27] 鈴木昇一："多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション"，情報研究（文教大学·情報学部），vol.10, pp.35-49, Dec.1989
[B28] 鈴木昇一："帰属係数法に基づく類似度、帰属関係あいまい度、認識情報量の計算機シミュレーション"，情報研究（文教大学·情報学部），vol.11, pp.51-68, Dec.1990
[B29] 鈴木昇一："高次認知機能における論理表現の要素"，情報研究（文教大学·情報学部），

vol.19, pp.29-82, Dec.1998
[B30] 鈴木昇一："新論理演算方式とStochastic Computer-空間多重論理演算の提唱—（"スペクトル情報" 抽出系の理論の応用：記憶の量子論）"，電子通信学会電子計算機研究会資料，EC70-11, July 1970
[B31] 鈴木昇一："アナログ情報パターンの線形分離可能性について—空間多重論理演算の応用—，電子通信学会電子計算機研究会資料，EC70-17, Sept.1970
[B32] 鈴木昇一："アナログ線形演算と相関畳込み演算と多重空間論理演算との対応性に就いて，電子通信学会電子計算機研究会資料，EC70-32, Jan.1971

付録A．パターンモデル間の相関検出写像を用いた類似度関数SMの再帰的構成

本付録Aでの定理A1において研究されるaxiom 2を満たすSMの再帰的構成法は、

A learning rule that performs gradient ascent in the average mutual information between input and output signals is derived for a system having feedforward and lateral interactions

がその内容の一部として、研究されている文献

Ralph Linsker："How to generate ordered maps by maximizing the mutual information between input and output signals", Neural Computation, vol.1, pp.402-411, 1989

に刺激されて、得られたものである。

A1．類似度関数SMの満たすべきaxiom 2

2つのパターンφ, ω_jが似ているか？ 相違しているか？の程度を与える類似度関数

$$SM : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \tag{A1.1}$$

は、次のaxiom 2を満たさなければならない。

The symbol δ_{ij} denotes the number 1 if $i=j$ and the number 0 if $i \neq j$. Here i and j are positive integers：

$$\delta_{ij}=1 \text{ if } i=j, =0 \text{ if } i \neq j. \tag{A1.2}$$

Axiom 2 **（類似度関数SMの満たすべき公理）**

(i)（**直交性**；orthogonality）

$\forall i, \forall j \in J, SM(\omega_i, \omega_j)=\delta_{ij}.$

(ii)（**正規性**；normality）

$\forall \varphi \in \Phi, \sum_{j \in J} SM(\varphi, \omega_j)=1.$

(iii)（写像Tの下での**不変性**；invariance under mapping T）

$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j)=SM(\varphi, \omega_j).$ □

A2．相関写像COR_jの満たすべき3条件

部分空間的特徴抽出・識別法［B3］では、

（イ）各"カテゴリに対応する部分空間"同士の共通部分を除去すること（このため、原パターンφを忠実に表現できなくなる）、

（ロ）斜交座標系（oblique coordinates）を使用すること

などの方法を用いて、その識別性能の劣化を克服することがある。今1つ、この種の克服法として、各カテゴリに複数個の代表パターンを設定することが考えられる。

A4章の"類似度関数SMの再帰的構成定理"によれば、式(A4.10)での$q_j(\varphi)$の、式(A2.4)の$COR_j(T\varphi, T\eta)$を係数に持つ類似度関数$SM'(\varphi, \omega_j)$の1次結合表現からわかるように、

各カテゴリに1個の代表パターンを設定する方法でも、良好な識別性能が確保可能である。

先ず、内積，ノルムを各々、$(\ ,\ )$，$\|\cdot\| \equiv \sqrt{(\cdot,\cdot)}$とする可分なHilbert空間$\mathfrak{H}$の3つの部分集合$\Omega$，$\Psi$，$\Phi$を、包含関係

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} \tag{A2.1}$$

$$\subset \Psi \subset \Phi (\ni 0) \subset \mathfrak{H} \tag{A2.2}$$

を満たすように決めるものとしよう。ここに、$\mathfrak{H}$の、零元0をその要素とする部分集合Φは処理の対象とする問題のパターンφの集合であり、有限集合Ωは、個々のパターンが帰属しているかも知れない類概念(categoty) $\mathfrak{C}_j$のすべての集合(全カテゴリ集合)

$$\underline{\mathfrak{C}} \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid j \in J\} \tag{A2.3}$$

と1対1の対応を持つ代表パターン ω_jの集合である。パターンω_jは第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の諸性質を典型的に代表しているものを$\mathfrak{H}$の元で表現して得られる。$\mathfrak{H}$の最後の部分集合Ψについては、以下の式(A2.8)で登場して来る。

通信理論における相関検出器(correlation detector)の役割を担う2パターンモデル間$T\varphi \in$, $T\psi \in T\cdot\Psi_j$の**相関写像**(correlation mapping)COR_jの族

$$COR_j : T\cdot\Phi \times T\cdot\Psi \to R^+ \text{(非負実数全体の集合)},\ j \in J \tag{A2.4}$$

を考えよう。axiom 1を満たす対［Φ, T］を考え、2つの部分集合Φ, Ψ_jをモデル構成作用素

$$T : \Phi \to \Phi \tag{A2.5}$$

で変換して得られる2つのパターン部分集合

$$T\cdot\Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \tag{A2.6}$$

$$T\cdot\Psi_j \equiv \{T\psi \mid \psi \in \Psi_j\} \tag{A2.7}$$

を導入しておく。

$j \in J$と異なるすべてのカテゴリ番号$i \in J$を持つ如何なる$T\omega_i$との相関よりも$T\omega_j$との相関が大となるパターンモデル$T\psi$を考え、このようなパターン$\psi \in \Psi$の集合

$$\begin{aligned}&\Psi_j \\ &\equiv \{\psi \in \Psi \mid \forall i \in J - \{j\}, \\ &\quad COR_j(T\omega_j, T\psi) > COR_j(T\omega_i, T\psi)\} \subset \Psi,\ j \in J\end{aligned} \tag{A2.8}$$

を導入する。

次の3構成条件1〜3を設定する：

[COR_jの構成条件1]

$\forall j \in J, COR_j(T\omega_j, T\omega_j) > 0.$

[COR_jの構成条件2]

$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\},$

$$COR_j(T\omega_j, T\omega_j) > COR_j(T\omega_i, T\omega_j).$$

[COR_jの構成条件3]

$\forall j \in J, \exists i \in J - \{j\}, \exists k \in J - \{j\},$

$$COR_j(T\omega_i, T\omega_k) \geqq COR_j(T\omega_j, T\omega_k).$$

□

ここで、条件

『〔$\forall\varphi\in\Phi, \forall\psi\in\Psi_j$,

$COR_j(T\psi, T\psi)\geqq COR_j(T\varphi, T\psi)\geqq 0$〕

$\wedge$〔$COR_j(T\psi, T\psi)=COR_j(T\varphi, T\psi)$が満たされる

のは、$T\varphi=T\psi$のときに限る〕』 (A2.9)

は必要でないことに注意しておく。

A3.相関写像 COR_j の構成7例

式(A2.1)の代表パターン集合 Ω についての条件

①(非零条件1) $\forall j\in J, \| T\omega_j \| >0$

②[分離条件2] $\forall j\in J, \forall i\in J-\{j\}, \| T\omega_j - T\omega_i \| >0$

$\vee [1> | (T\omega_i, T\omega_j)|^2/[\| T\omega_i \|^2\cdot \| T\omega_j \|^2]]$

の下で、A2章の3構成条件1～3を満たす

$$COR_j : T\cdot\Phi\times T\cdot\Psi_j\rightarrow R^+ \quad (A3.1)$$

の7例をあげよう。

[例1]

$$COR_j(T\varphi, T\psi) = \sigma_j^2\cdot | (T\varphi, T\psi)/[\| T\varphi \|\cdot\| T\psi \|] |, \ \sigma_j>0 \quad (A3.2)$$

□

[例2]

$$COR_j(T\varphi, T\psi) = (1/\sqrt{2\pi\sigma_j^2})\cdot\exp[-\| T\varphi - T\psi \|^2/〔2\sigma_j^2〕], \ \sigma_j>0 \quad (A3.3)$$

□

[例3]

$$COR_j(T\varphi, T\psi) = \sigma_j^2\cdot\| T\varphi - T\psi \|^{-2}/\sum_{\eta\in\Psi}\| T\varphi - T\eta \|^{-2}, \ \sigma_j>0 \quad (A3.4)$$

□

[例4]

$$COR_j(T\varphi, T\psi) = (1/\pi)\cdot\sigma_j^2/[\sigma_j^2+\| T\varphi - T\psi \|^2], \ \sigma_j>0 \quad (A3.5)$$

□

[例5]

$$COR_j(T\varphi, T\psi) = \sigma_j^2\cdot \log_e\sqrt{[1-| (T\varphi, T\psi)/〔\| T\varphi \|\cdot\| T\psi \|〕|^2]^{-1}} \Big/ \sum_{\eta\in\Psi}\log_e\sqrt{[1-| (T\varphi, T\eta)/〔\| T\varphi \|\cdot\| T\eta \|〕|^2]^{-1}}, \ \sigma_j>0 \quad (A3.6)$$

□

［例6］

$$\mathrm{cor}(T\varphi, T\psi)$$
$$\equiv [2\pi\,\sigma(\varphi,\ \psi)^2]^{-1/2}\cdot \exp[f(T\varphi,\ T\psi)] \geqq 0 \qquad (A3.7)$$

と定義する。ここに、

$$f(T\varphi,\ T\psi)$$
$$\equiv -[2\,\sigma(\varphi,\ \psi)^2]^{-1}$$
$$\cdot \| (T\psi - \|T\psi\|)$$
$$- |\rho(\varphi, \psi)| \cdot 〔 \|T\psi\| / \|T\varphi\| 〕$$
$$\cdot (T\varphi - \|T\varphi\|) \|^2 \qquad (A3.8)$$

$$\sigma(\varphi,\ \psi)^2 \equiv \|T\psi\|^2 \cdot [1 - |\rho(\varphi, \psi)|^2] \qquad (A3.9)$$

$$\rho(\varphi,\ \psi) \equiv (T\varphi, T\psi) / [\|T\varphi\| \cdot \|T\psi\|] \qquad (A3.10)$$

である。その後、

$$\mathrm{COR}_j(T\varphi,\ T\psi)$$
$$\equiv \sigma_j^2 \cdot \mathrm{cor}(T\varphi,\ T\psi) / \sum_{\eta\in\Psi} \mathrm{cor}(T\varphi, T\eta) \qquad (A3.11)$$

と定義する。 □

［例7］

$$\mathrm{cor}(T\varphi,\ T\psi)$$
$$\equiv [2\pi\,\|T\varphi\|^2]^{-1/2} \cdot [2\pi\,\|T\psi\|^2]^{-1/2}$$
$$\cdot [1 - |\rho(\varphi, \psi)|^2]^{-1/2} \cdot \exp[g(T\varphi,\ T\psi)] \geqq 0 \qquad (A3.12)$$

と定義する。ここに、

$$g(T\varphi,\ T\psi)$$
$$\equiv -[2\cdot[1 - |\rho(\varphi,\ \psi)|]^2]^{-1}$$
$$\cdot [\, \|T\varphi - \|T\varphi\|\,\|^2 / \|T\varphi\|^2$$
$$- 2 \cdot |\rho(\varphi, \psi)| \cdot 〔 \|T\varphi - \|T\varphi\|\,\| / \|T\varphi\| 〕 \cdot$$
$$〔 \|T\psi - \|T\psi\|\,\| / \|T\psi\| 〕$$
$$+ \|T\psi - \|T\psi\|\,\|^2 / \|T\psi\|^2] \qquad (A3.13)$$

$$\rho(\varphi,\ \psi) \equiv (T\varphi, T\psi) / [\|T\varphi\| \cdot \|T\psi\|] \qquad (A3.14)$$

である。その後、

$$\mathrm{COR}_j(T\varphi,\ T\psi)$$
$$\equiv \sigma_j^2 \cdot \mathrm{cor}(T\varphi,\ T\psi) / \sum_{\eta\in\Psi} \mathrm{cor}(T\varphi,\ T\eta) \qquad (A3.15)$$

と定義する。 □

A4. 1つのカテゴリに複数個の代表パターンを設定したのと同様な効果を有する類似度関数 SM の構成

先ず、2章の2構成条件2, 3より、次の命題A1が知れる。

［命題A1］

$$\forall j \in J,\ \forall k \in J - \{j\},\ \omega_j \in \Psi_j \subset \Psi \qquad (A4.1)$$
$$\wedge\ \omega_k \overline{\in} \Psi_j. \qquad (A4.2)$$

（証明） 構成条件2を考慮すると、式(A2.8)のΨ_jの定義から、

$$\omega_j \in \Psi_j \subset \Psi \qquad (A4.3)$$

が成立する。

$$\forall i \in J-\{j\},\quad \forall k \in J-\{j\},$$
$$COR_j(T\omega_j, T\omega_k) > COR_j(T\omega_i, T\omega_k) \tag{A4.4}$$

は構成 条件3に矛盾するから、$\omega_k \overline{\in} \Psi_j$が成立する。 □

axiom 2 を満たす類似度関数

$$SM':\ \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \tag{A4.5}$$

を用意する。

先ず、次の補助定理A1を証明しよう。

[補助定理A1]

(i) $\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J,$

$$\sum_{\eta \in \Psi_j} COR_j(T\varphi, T\eta) \cdot SM'(\eta, \omega_j)$$
$$\geqq COR_j(T\varphi, T\omega_j). \tag{A4.6}$$

(ii) 特に、$\varphi = \omega_j$と選べば、

$$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\},$$
$$\sum_{\eta \in \Psi_j} COR_j(T\omega_j, T\eta) \cdot SM'(\eta, \omega_j) \tag{A4.7}$$
$$\geqq COR_j(T\omega_j, T\omega_j)\ (>0\ \because\ 2\text{章の構成条件}1) \tag{A4.8}$$
$$> COR_j(T\omega_i, T\omega_j). \tag{A4.9}$$

(証明) 命題A1の $\omega_j \in \Psi_j$ とaxiom 2の(i)とにより、

$$\sum_{\eta \in \Psi_j} COR_j(T\varphi, T\eta) \cdot SM'(\eta, \omega_j)$$
$$\geqq COR_j(T\varphi, T\omega_j) \cdot SM'(\omega_j, \omega_j)$$
$$\geqq COR_j(T\varphi, T\omega_j)$$

を得、(i)の成立が示された。

2式(A4.7), (A4.8)の成立は、(i)より明らかである。2式(A4.8), (A4.9)の成立は、A2章の構成条件2より明らかである。 □

補助定理A1の(i)に注目し、非負量 $q_j(\varphi)$を、

$$q_j(\varphi)$$
$$\equiv \sum_{\eta \in \Psi_j} COR_j(T\varphi, T\eta) \cdot SM'(\eta, \omega_j) \tag{A4.10}$$

と定義し、その後、$\eta \in \Psi_j$は、$T\eta$が$T\varphi$と相関が大であればあるほど、かつ、ηがω_jと似ていれば似ているほど大きい値を$q_j(\varphi)$に与えるが、このような$\eta \in \Psi_j$を、通常含んでいるように選ばれるパターン集合 Ψ_jから定まる非負量 $q_j(\varphi)$を、

$$q_j'(\varphi)$$
$$\equiv q_j(\varphi) - \max_{i \in J-\{j\}} q_j(\omega_i) \tag{A4.11}$$

と変換する。

次の補助定理A2の成立が示される。

[補助定理A2]

(i) $\forall j \in J, \forall k \in J-\{j\},\ q_j'(\omega_k) \leqq 0.$

(ii) $\forall j \in J, q_j'(\omega_j) > 0.$

(証明) (i)の成立は、$q_j'(\varphi)$の定義式(A4.11)より明らかである。

(ii)の成立を示そう。

$\varphi = \omega_j$のとき、2式(A4.7)，(A4.8)より、

$\forall j \in J, q_j(\omega_j) > 0$

がいえる。

さて、

$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\},$

$q_j(\omega_j)$

$= \sum_{\eta \in \Psi_j} COR_j(T\omega_j, T\eta) \cdot SM'(\eta, \omega_j)$

$= COR_j(T\omega_j, T\omega_j) \cdot SM'(\omega_j, \omega_j)$

$\quad + \sum_{\eta \in \Psi_j - \{\omega j\}} COR_j(T\omega_j, T\eta) \cdot SM'(\eta, \omega_j)$

$= COR_j(T\omega_j, T\omega_j)$

$\quad + \sum_{\eta \in \Psi_j - \{\omega j\}} COR_j(T\omega_j, T\eta) \cdot SM'(\eta, \omega_j)$

$\because$ 命題A1の $\omega_j \in \Psi_j$ とaxiom 2の(ｉ)

$> COR_j(T\omega_i, T\omega_j)$

$\quad + \sum_{\eta \in \Psi_j - \{\omega j\}} COR_j(T\omega_j, T\eta) \cdot SM'(\eta, \omega_j)$

$\because$ 2章の構成条件2

$> COR_j(T\omega_i, T\omega_j)$

$\quad + \sum_{\eta \in \Psi_j - \{\omega j\}} COR_j(T\omega_i, T\eta) \cdot SM'(\eta, \omega_j)$

$\because$ Ψ_jの定義式(A2.8)

$= COR_j(T\omega_i, T\omega_j) \cdot SM'(\omega_j, \omega_j)$

$\quad + \sum_{\eta \in \Psi_j - \{\omega j\}} COR_j(T\omega_i, T\eta) \cdot SM'(\eta, \omega_j)$

$\because$ axiom 2の(ｉ)

$= q_j(\omega_i)$ $\because$ $q_j(\varphi)$の定義式(A4.10)

を得て、

$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \; q_j(\omega_j) > q_j(\omega_i)$

が成立する。よって、$q_j'(\varphi)$の定義式(A4.11)を考慮すれば、(ii)の成立がわかる。 □

ここで、非負量$p_j(\varphi)$を、式(A4.11)の$q_j'(\varphi)$から

$$p_j(\varphi) \equiv \begin{cases} q_j'(\varphi) & \text{if } q_j'(\varphi) > 0 \\ 0 & \text{if } q_j'(\varphi) \leqq 0 \end{cases} \tag{A4.12}$$

と求める。その後、

$$\forall j \in J, s_j > 0 \tag{A4.13}$$

を満たすs_jの組 $\underline{s} = \{s_j \mid j \in J\}$ を用意して、

$SM(\varphi, \omega_j)$ を、

$$SM(\varphi, \omega_j) \equiv \begin{cases} s_j \cdot p_j(\varphi) / \sum_{k \in J} s_k \cdot p_k(\varphi) \\ \quad \cdots \sum_{k \in J} s_k \cdot p_k(\varphi) > 0 \text{ の場合} \\ s_j / \sum_{k \in J} s_k \\ \quad \cdots \sum_{k \in J} s_k \cdot p_k(\varphi) = 0 \text{ の場合} \end{cases} \tag{A4.14}$$

と、定義する。

このとき、次の定理A1が成立し、axiom 2を満たす式(A4.5)の類似度関数 SM′ を用いて、axiom 2を満たす1つの類似度関数SMが構成されることがわかった。

[定理A1] **(相関検出写像を用いた類似度関数 SM の再帰的構成定理)**

式(A4.14)ように定義された式(A1.1)の関数SMは、axiom 2を満たす。

(証明) 先ず、

$$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}, p_j(\omega_j)>0 \wedge p_j(\omega_i)=0$$

∵ 補助定理A2の(i), (ii)、並びに、

$p_j(\varphi)$の定義式(A4.12) (A4.15)

を得て、

$$\sum_{k \in J} s_k \cdot p_k(\omega_j)$$
$$= s_j \cdot p_j(\omega_j) + \sum_{k \in J-\{j\}} s_k \cdot p_k(\omega_j)$$
$$= s_j \cdot p_j(\omega_j) > 0 \quad \because \text{2式(A4.13), (A4.15)} \tag{A4.16}$$

が成立する。よって、SMの定義式(A4.14)から、

$$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\},$$
$$SM(\omega_j, \omega_j) = s_j \cdot p_j(\omega_j)/s_j \cdot p_j(\omega_j) = 1 \tag{A4.17}$$
$$SM(\omega_i, \omega_j) = s_j \cdot p_j(\omega_i)/s_i \cdot pi(\omega_i) = 0 \tag{A4.18}$$

を得て、axiom 2の(i)の成立がわかった。

axiom 2の(ii)の成立は、SMの定義式(A4.14)から明らかである。

axiom 2の(iii)の成立については、

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, q_j(T\varphi) = q_j(\varphi)$$

∵ axiom 1の(iii) (A4.19)

を得、

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, q_j'(T\varphi) = q_j'(\varphi) \tag{A4.20}$$
$$\therefore \quad p_j(T\varphi) = p_j(\varphi) \tag{A4.21}$$

から、わかる。 □

付録B. 任意のパターンへの多段階パターン変換

本章では、特徴曖昧さを解消していく多段階パターン変換の前段階として、任意のパターンφからその抽出される特徴量が0, 1の2値の値をとるパターンηへの多段階変換法が3種類(直接法, 最急降下法, 1次結合係数法)、研究される。

B1. 多段階パターン変換における不一致エネルギーが減少するための、増分$\Delta\varphi_t$の十分条件

パターン$\eta' \in \Phi$が与えられたとしよう。収束先(変換の最終段階)のパターン$\eta \in \Phi$を

$$\eta \equiv T'' \eta' = \sum_{\ell \in L} u''(\eta', \ell) \cdot \psi_\ell \tag{B1.1}$$

と設定すれば、2式(3.29), (3.30)からわかるように、

$$u''(\eta, \ell)$$
$$= u''(\eta', \ell) \in \{0, 1\} \quad \because \text{定理3.6} \tag{B1.2}$$

である。

初期条件(変換の第0段階)

$$\varphi_t |_{t=0} = \varphi \in \Phi \tag{B1.3}$$

を設定する。時刻 t (変換の第t段階)でのパターン φ_t に増分 $\Delta\varphi_t$ を加え、時刻 t+1 でのパターン φ_{t+1} を

$$\varphi_{t+1} = \varphi_t + \Delta\varphi_t, t=0, 1, 2, \cdots, \tag{B1.4}$$

と、更新していくことにしよう。φ から η への多段階変換

$$\varphi \to \varphi_1 \to \varphi_2 \to \cdots \to \varphi_t \to \cdots \to \eta \tag{B1.5}$$

を可能にする手段をこれから、考えよう。つまり、

$$\varphi_t \to \eta \ (t \to \infty) \tag{B1.6}$$

というパターン多段階変換を評価するため、2つのパターン $\varphi, \eta \in \Phi$ 間の**不一致**の程度を表す(大域的な)**エネルギー**(energy)

$$E(\varphi, \eta) \equiv 2^{-1} \cdot \| \varphi - \eta \|^2 \tag{B1.7}$$

を導入する。ここに、可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の内積 $(,)$, ノルム $\| \cdot \| \equiv \sqrt{(\cdot, \cdot)}$ が導入されている。

[補助定理B.1] **(不一致エネルギー E の減少列定理)**

初期条件式(B1.3)の下で、式(B1.7)の不一致エネルギー E の減少列

$$E(\varphi, \eta) \geqq E(\varphi_1, \eta) \geqq E(\varphi_2, \eta) \geqq \cdots \geqq E(\varphi_t, \eta)$$
$$\geqq \cdots \geqq E(\eta, \eta) = 0 \tag{B1.8}$$

が成り立てば、

$$\lim_{t \to \infty} \varphi_t = \eta. \tag{B1.9}$$

(証明)　明らか。 □

次の定理B.1が成立し、$\Delta\varphi_t$ を $\varphi_t - \eta$ に直交するように設定していけば、不一致エネルギー $E(\varphi_t)$ が減少していくことがわかる。

[定理B.1] **(不一致エネルギー E の減少をもたらす $\varphi_t - \eta$, $\Delta\varphi_t$ 間の直交性定理)**

$$(\varphi_t - \eta, \Delta\varphi_t) = 0 \text{(直交性)} \tag{B1.10}$$

⇒(不一致エネルギー E の減少性)

$$E(\varphi_{t+1}, \eta) = E(\varphi_t, \eta) + 2^{-1} \cdot \| \Delta\varphi_t \|^2$$
$$\geqq E(\varphi_t, \eta). \tag{B1.11}$$

(証明)　Re[…] は…の実部の意とする。

$$E(\varphi_{t+1}, \eta)$$
$$= 2^{-1} \cdot \| \varphi_t + \Delta\varphi_t - \eta \|^2$$

$\because$　2式(B1.4), (B1.7)

$$= 2^{-1} \cdot (\varphi_t - \eta + \Delta\varphi_t, \varphi_t - \eta + \Delta\varphi_t)$$
$$= 2^{-1} \cdot \| \varphi_t - \eta \|^2 + 2^{-1} \cdot \| \Delta\varphi_t \|^2$$
$$+ \mathrm{Re}[(\varphi_t - \eta, \Delta\varphi_t)] \tag{B1.12}$$
$$= E(\varphi_t, \eta) + 2^{-1} \cdot \| \Delta\varphi_t \|^2 \quad \because \text{式(B1.10)}$$
$$\geqq E(\varphi_t, \eta).$$

□

収束先のパターン $\eta \in \Phi$ は、式(B1.2)からわかるように2値特徴量を備えており、特徴不確定さがないと考えられよう。しかしながら、式(6.11)の半順序関係 $\leqq_u$ を

$$\varphi \leqq_u \varphi_1 \leqq_u \varphi_2 \leqq_u \cdots_u \leqq_u \varphi_t \leqq_u \cdots \leqq \eta \tag{B1.13}$$

と保存している保証はない。

B2. 多段階パターン変換の具体化(直接法)

半順序関係 $\leqq_u$ の、式(B1.13)の増大列を保証していないが、2式(10.5), (10.6)の意味する収束を保証する更新式(10.4)での増分 $\Delta\varphi_t$ を具体的に決定してみよう。それは、次の定理10.2で示されている。

但し、座標点の集合Mから有限個の代表点の集合

$$M' \equiv \{x(1),\ x(2),\ x(3),\ \cdots,\ x(n)\} \subset M \tag{B2.1}$$

を選んで、更新式(B1.4)を次々と実行できるだけであることに注意しておく。

［定理B.2］**(多段階パターン変換の各点収束定理)**

更新式(B1.4)での増分$\Delta\varphi_t$を

$$\Delta\varphi_t(x) = \alpha(t\,;\,x)\cdot[\eta_t(x) - \varphi_t(x)]$$
$$,x \in M \tag{B2.2}$$

と設定すれば、

$$\forall x \in M,\ \forall t \in \{0, 1, 2, \cdots\},\ \ 0 \leqq \alpha(t\,;\,x) < 1 \tag{B2.3}$$
$$\Rightarrow$$
$$|\eta_t(x) - \varphi_{t+1}(x)| \leqq |\eta_t(x) - \varphi_t(x)|. \tag{B2.4}$$

(証明)　先ず、不等式

$$\forall x \in M,\ \forall t \in \{0, 1, 2, \cdots\},\ 0 < \alpha(t\,;\,x) \leqq 1$$
$$\because \ \text{式(B2.3)} \tag{B2.5}$$

が成立していることに注意しておけば、

$$|\eta_t - \varphi_{t+1}|$$
$$= |\eta_t - \varphi_t - \Delta\varphi_t| \quad \because \ \text{式(B1.4)}$$
$$= |\eta_t - \varphi_t|\cdot|1 - \alpha(t\,;\,x)| \leqq |\eta_t - \varphi_t|. \quad \because \ \text{式(B2.2)} \tag{B2.6}$$

を得、証明が終わる。 □

非増加性

$$\forall x \in M,\ \alpha(t\,;x) \geqq \alpha(t+1\,;\,x),\ \ t = 0, 1, 2, \cdots \tag{B2.7}$$

が望ましい。

例えば、不等式(B2.6)からわかるように、$|\eta_t(x) - \varphi_t(x)|$ が大きい値をとる座標値 $x \in M$ ほど、$\alpha(t\,;\,x)$を1に近い値を取ればよいから、

$$\forall x \in M,\ \alpha(t\,;\,x) =$$
$$\begin{cases} \exp(-t^2)\cdot[1 - \exp(-|\eta_t(x) - \varphi_t(x)|^2)] & \\ \qquad\qquad \text{if } t < t_{max} & \\ 0 \qquad\qquad \text{if } t \geqq t_{max} \end{cases} \tag{B2.8}$$

と選べばよい。

その他に、

$$\forall x \in M,\ \alpha(t\,;\,x) =$$
$$\begin{cases} \exp(-t^2/\sigma^2(x)) & \text{if } t < t_{max} \\ 0 & \text{if } t \geqq t_{max} \end{cases} \tag{B2.9}$$

と選ぶことも考えられる。

ここに、$|\eta_t(x)-\varphi_t(x)|$ が大きい値をとる座標値 $x\in M$ ほど、$\alpha(t;x)$を 1 に近い値を取ればよいから、分散 $\sigma_2(x)$を大きくとって、

$$\begin{aligned}&\forall x\in M,\\&0<\sigma^2(x)\equiv a\cdot[1-\exp(-|\eta_t(x)-\varphi_t(x)|^2)],\\&a>0\end{aligned}\qquad\text{(B2.10)}$$

と、選べばよい。

特に、式(B1.5)のパターン収束列を得るためには、式(B2.2)の増分 $\Delta\varphi_t$ において、

$$\eta_t=\eta \text{ for any } t\in\{0,1,2,\cdots\}\qquad\text{(B2.11)}$$

と設定すればよい。

B3. 最急降下法に基づく多段階パターン変換

最急降下法(method of steepest descent)を適用して、前章と同様に、半順序関係 $\leqq_u$ の、式(B1.13)の増大列を保証していないが、2式(B1.5), (B1.6)の意味する収束を保証する更新式(B1.4)での増分 $\Delta\varphi_t$ を具体的に決定してみよう。

座標点 $x\in M$ での、2つの実数値パターン φ, η の(局所的な)**不一致エネルギー**

$$e(\varphi(x),\eta(x))\equiv 2^{-1}\cdot[\varphi(x)-\eta(x)]^2\qquad\text{(B3.1)}$$

と、正値条件

$$\forall x\in M, \forall t\in\{0,1,2,\cdots\},\ 0<\beta(t;x)\qquad\text{(B3.2)}$$

を満たす任意の正値関数 $\beta(t;x)$を用い、微分方程式系(**最急降下方程式系**)

$$\begin{aligned}&d\varphi_t(x)/d_t\\&=-\beta(t;x)\cdot\partial e(\varphi_t(x),\eta_t(x))/\partial\varphi_t(x)\\&x\in M,\ t\geqq 0\end{aligned}\qquad\text{(B3.3)}$$

を考えよう。

ここで、$x\in M$ を固定すれば、

$$\begin{aligned}&de(\varphi_t(x),\eta_t(x))/dt\\&=[\partial e(\varphi_t(x),\eta_t(x))/\partial\varphi_t(x)]\cdot\\&\quad[d\varphi_t(x)/dt]\\&=-\beta(t;x)\cdot\\&\quad[\partial e(\varphi_t(x),\eta_t(x))/\partial\varphi_t(x)]^2\\&\qquad\qquad\because\ \text{式(B3.3)}\\&\leqq 0\end{aligned}\qquad\text{(B3.4)}$$

を得、誤差 $e(\varphi_t(x),\eta_t(x))$は微分方程式系(B3.3)の解曲線の上で決して増加しないから、この微分方程式系(B3.3)を解けばよい。つまり、十分時刻 t が経過したときの $\varphi_t(x)$を

$$\varphi_\infty(x)\equiv\lim_{t\to\infty}\varphi_t(x)\qquad\text{(B3.5)}$$

の如く、求めればよいことになる。

具体的には、

ここで、$x\in M$ を固定すれば、

$$\begin{aligned}&\partial e(\varphi_t(x),\eta_t(x))/\partial\varphi_t(x)\\&=[\varphi_t(x)-\eta_t(x)]\end{aligned}\qquad\text{(B3.6)}$$

と計算されるから、

$$\begin{aligned}&d\varphi_t(x)/dt\\&=-\beta(t;x)\cdot[\varphi_t(x)-\eta_t(x)]\\&=\beta(t;x)\cdot[\eta_t(x)-\varphi_t(x)],\ x\in M,\ t\geqq 0\\&\qquad\because\ \text{式(B3.6)}\end{aligned}\tag{B3.7}$$

と計算される微分方程式系(B3.3)の離散近似方程式を式(B1.4)と考えよう。

$$\begin{aligned}&\Delta\varphi_t(x)\\&=\beta(t;x)\cdot[\eta_t(x)-\varphi_t(x)]\\&\qquad\because\ \text{式(B3.7)}\end{aligned}\tag{B3.8}$$

を使って、各 φ_tを式(B1.4)の如く、変形していけばよい。式(B3.8)は式(B2.2)そのものであるが、

$$\beta(t;x)=\alpha(t;x),\ x\in M, t=0,1,2,\cdots\tag{B3.9}$$

と設定して得られる2式(B2.2),(B2.3)の意味する収束に関する評価が得られるのみならず、式(B3.1)の不一致エネルギー e の、式(B3.11)の非増加列が式(B1.4)の更新式

$$\varphi_t(x)\rightarrow\varphi_{t+1}(x),\ x\in M, t=0,1,2,\cdots\tag{B3.10}$$

に随伴して得られており、不一致エネルギー e の非増加による収束に関し、定理B.2の精密化が達成られている次の定理B.3が得られたことになる。

[定理B.3] **(不一致エネルギー e の減少定理)**

増分$\Delta\varphi_t$を式(B3.8)の如くと設定すれば、式(B3.1)の不一致エネルギー e の減少列

$$\begin{aligned}&e(\varphi_t(x),\ \eta_t(x))\geqq e(\varphi_{t+1}(x),\ \eta_{t+1}(x)),\\&x\in M,\ t=0,1,2,\cdots\end{aligned}\tag{B3.11}$$

が得られる。

(証明) $e(\varphi_t(x),\ \eta_t(x))$の、変数tに関する微分係数の非正を示す不等式(B3.4)から、$e(\varphi_t(x),\ \eta_t(x))$は非増加である。 □

特に、式(B1.5)のパターン収束列を得るためには、式(B2.2)の増分$\Delta\varphi_t$において、式(B2.11)の如く設定すればよい。

B4. 各1次結合係数 $a_\ell(\varphi)$の最急降下的学習による多段階パターン変換

処理の対象とする問題のパターンφの集合 Φ はある可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の、零元 0 を含む部分集合であり、式(3.2)のように表されるものであるが、$\mathfrak{H}$として特に、

$$\mathfrak{H}=L_2(M;dm)\tag{B4.1}$$

をとろう。内積 $(\ ,\ )$, ノルム $\|\cdot\|\equiv\sqrt{(\cdot,\cdot)}$は

$$\begin{aligned}&(\varphi,\eta)=\int_M dm(x)\,\varphi(x)\cdot\overline{\eta}(x)\\&\|\varphi\|\equiv\sqrt{(\varphi,\varphi)}=\int_M dm(x)\,|\varphi(x)|^2\end{aligned}\tag{B4.2}$$

である。但し、これまでと同様に、対象とするパターンはすべて、実数値であると仮定しておく。

不一致エネルギーとして、式(B3.1)の e ではなく、

$$\begin{aligned}E(\varphi,\eta)&=\int_M dm(x)e(\varphi(x),\eta(x))\\&=2^{-1}\cdot\int_M dm(x)[\varphi(x)-\eta(x)]^2 &\text{(B4.3)}\\&=2^{-1}\cdot\|\varphi-\eta\|^2 &\text{(B4.4)}\end{aligned}$$

と積分して得られる式(B1.7)の E を採用して、前章と同様な最急降下法を適用して、式(B1.5)のパターン収束列を得る手法を確立してみよう。

式(3.14)の写像 T からわかるように、1次結合展開式(3.7)において等式(3.6)を満たすという意

味で直交雑音 $\varphi_\perp$ が0である展開式

$$\varphi = \sum_{\ell \in L} a_\ell(\varphi) \cdot \psi_\ell \tag{B4.5}$$

を仮定する。$\varphi - \varphi_\perp$ を改めて、φ と考える仮定である。或いは、式(3.15)の実数値特徴抽出写像 u を採用した構造形式(1.8)を備えたパターンモデル $T\varphi$ を式(B4.5)の φ と考えれば、

$$\forall \ell \in L, a_\ell(\varphi) = u(\varphi, \ell) \tag{B4.6}$$

が成立していることに注意しておく。

さて、式(B1.5)の多段階パターン収束列を得るため、各1次結合係数 $a_k(\varphi_t)$ の最急降下方程式

$$da_k(\varphi_t)/dt = -b_k(t) \cdot \partial E(\varphi_t, \eta_t)/\partial a_k(\varphi_t), \quad k \in L, t \geqq 0 \tag{B4.7}$$

を考えてみよう。ここに、係数 $b_k(t)$ は、正値条件

$$\forall t \geqq 0, \ 0 < b_k(t) \tag{B4.8}$$

を満たす時刻変数 t の任意の正値関数である。

$$\begin{aligned} & dE(\varphi_t, \eta_t)/dt \\ & = \sum_{\ell \in L} [\partial E(\varphi_t, \eta_t)/\partial a_\ell(\varphi_t)] \cdot \\ & \quad [da_\ell(\varphi_t)/dt] \\ & = -\sum_{\ell \in L} b_\ell(t) \cdot [\partial E(\varphi_t, \eta_t)/\partial a_\ell(\varphi_t)]^2 \\ & \qquad \because \text{ 式(B4.7)} \\ & \leqq 0 \end{aligned} \tag{B4.9}$$

を得、誤差 $E(\varphi_t, \eta_t)$ は微分方程式系(B4.7)の解曲線の上で決して増加しないから、この微分方程式系(B4.7)を解けばよい。つまり、十分時刻 t が経過したときの $\varphi_t(x)$ を式(B3.5)の如く、求めればよいことになる。

最急降下法を適用して、前章と同様に、半順序関係 $\leqq_u$ の、式(B1.13)の増大列を保証していないが、2式(B1.5), (B1.6)の意味する収束を保証する更新式

$$\begin{aligned} & a_k(\varphi_{t+1}) = a_k(\varphi_t) + \Delta a_k(\varphi_t), \quad k \in L \\ & \text{for any } t \in \{0, 1, 2, \cdots\} \end{aligned} \tag{B4.10}$$

での増分 $\Delta a_k(\varphi_t)$ を具体的に決定してみよう。

先ず、微分係数 $\partial E/\partial a_k$ を決定した補助定理B.2を証明しよう。

[補助定理B.2] (微分係数$\partial E/\partial a_k$ の決定)

$$\begin{aligned} & \partial E(\varphi_t, \eta_t)/\partial a_k(\varphi_t) = (\varphi_t, \psi_k) - (\eta_t, \psi_k) \\ & , k \in L, \ t \geqq 0 \end{aligned} \tag{B4.11}$$

(証明) $\partial E(\varphi_t, \eta_t) \partial a_k(\varphi_t)$

$$\begin{aligned} & = 2^{-1} \cdot [\partial / a_k(\varphi_t)] \\ & \quad \int_M dm(x) [\varphi_t(x) - \eta_t(x)]^2 \\ & \qquad \because \text{式(B4.3)} \\ & = \int_M dm(x) [\varphi_t(x) - \eta_t(x)] \cdot \\ & \quad [\partial \varphi_t(x)/a_k(\varphi_t)] \\ & = \int_M dm(x) [\varphi_t(x) - \eta_t(x)] \cdot \psi_k \\ & \qquad \because \text{ 式(B4.5)} \\ & = (\varphi_t, \psi_k) - (\eta_t, \psi_k) \end{aligned} \tag{B4.12}$$

□

具体的には、補助定理B.2を使って、

$da_k(\varphi_t)/dt$

$=-b_k(t)\cdot[(\varphi_t,\ \psi_k)-(\eta_t,\ \psi_k)]$
$=b_k(t)\cdot[(\eta_t,\ \psi_k)-(\varphi_t,\ \psi_k)],\ t\geqq 0$
$\because$ 式(B4.7) (B4.13)

と計算される微分方程式系(B4.7)の離散近似方程式を 式(B4.10)と考えよう。

$\Delta a_k(\varphi_t)$
$=b_k(t)\cdot[(\eta_t,\ \psi_k)-(\varphi_t,\ \psi_k)]$
$\because$ 式(B4.13) (B4.14)

を使って、各 $a_k(\varphi_t)$ を式(B4.10)の如く、変形していけばよい。

式(B4.4)の不一致エネルギー E の、式(B4.16)の非増加列が式(B4.10)の更新式

$\varphi_t(x)\to\varphi_{t+1}(x),\ x\in M,\ t=0,1,2,\cdots$ (B4.15)

に随伴して得られており、不一致エネルギー E の非増加による収束に関し、補助定理B.1の精密化が達成られている次の定理B.4が得られたことになる。

[定理B.4] **(不一致エネルギー E の減少定理)**

各増分 $\Delta a_k(\varphi_t)$ を式(B4.14)の如くと設定すれば、式(B4.4)の不一致エネルギー E の減少列

$E(\varphi_t,\ \eta_t)\geqq E(\varphi_{t+1},\ \eta_{t+1}),\ t=0,1,2,\cdots$ (B4.16)

が得られる。

(証明) $E(\varphi_t,\ \eta_t)$の、変数 t に関する微分係数の非正を示す不等式(B4.9)から、$E(\varphi_t,\ \eta_t)$は非増加である。 □

特に、式(B1.5)のパターン収束列を得るためには、式(B4.14)の各増分 $\Delta a_k(\varphi_t)$ において、式(B2.11)の如く設定すればよい。

付録C. カテゴリ化分類規則の集合を使った“ファジィプロダクションシステム”としての、認識システム RECOGNITRON は fuzzy 空間多重命題推論系であることの説明

本付録では、第9章で研究されている“ファジィプロダクションシステム”の推論動作がパターンを知識情報処理しており、認識システム RECOGNITON の多段階認識動作をこのファジィプロダクションシステムの、作業用記憶の書き替え動作として、把握できるために必要なカテゴリ化分類規則について、考究してみよう。

言い換えれば、知識は個々の記号の列によって表現される必要はなく、意味ネットワーク(semantic network)構造の各枝、各節の中に分散した形で表現できるけれども、カテゴリ化分類規則(categorized classification rule)

$CATR(\varphi, C_k, \mathfrak{C}_j)$
$\equiv$[if φ satisfies condition C_k then
φ belongs to the j-th category $\mathfrak{C}_j$]

を、$k=1\sim n_j,\ j=1\sim m$ にわたり集めて得られる集合 (C.1)

を用意すれば、この規則を使い多段階推論する手法が認識システム RECOGNITRON の備えている認識の働きになるようなシステムが第9章で提案されているファジィプロダクションシステムであることを説明してみよう。

C1. カテゴリ化分類規則

認識システムというのは処理の対象とする問題のパターン$\varphi \in \Phi$ を、内蔵している知識としてのカテゴリ化分類規則を適用しあるカテゴリ(類概念)に帰属すると分類するシステムであるが、その分類に先立って、パターン間の類似性・相違性を反映しているカテゴリというものを学習しておかねばならない。カテゴリ学習を行う目的は、カテゴリを記述するパターン分類規則(パターンのカテゴリ化分類規則)を推論し、蓄えておくことである。学習の結果、パターンのカテゴリ化分類規則は認識システムの長期記憶構造の中に埋め込まれることになる。

○知識は推論によって学習されるが [A23]、データを情報として感知し、得られた情報を知識として蓄えられ獲得される迄の"情報処理過程の複雑さ"は兎も角として、短期的には、認識システム RECOGNITRON は、処理の対象とする問題のパターン$\varphi \in \Phi$の代りに、そのパターンモデル $T\varphi \in \Phi$を記憶して、φの認識処理を行うことになる。長期記憶には、各カテゴリ$\mathfrak{C}_j$の備えている性質を典型的に備えている代表パターン(prototypical pattern) ω_j ($\neq 0$)のモデル $T\omega_j$が存在していなければならない。

○2つのパターンモデル間に、式(6.1)の等式 $T\varphi = T\eta \in \Phi$が成り立つとき、2つのパターン$\varphi$, $\eta \in \Phi$は構造的に一致するという。SS理論 [B1] ~ [B4] を適用して構築された認識システム RECOGNITRON では、入力パターンφの構造(を表現したパターンモデル) $T\varphi$と、あるカテゴリ$\mathfrak{C}_j$を典型的に代表する"代表パターンω_jの構造 $T\omega_j$"との構造的一致(structural matching)を多段階帰納推論で行い、入力パターン φ の帰属するカテゴリを決定している。

つまり、処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ についての認識結果

$$\varphi \text{ belongs to the j-th category } \mathfrak{C}_j \tag{C.2}$$

を得るというパターン認識の働きは、

〈φ, [j]〉を処理結果とする様な"この構造的一致
を処理目的とする多段階帰納推論"で得られる
カテゴリ帰属知識(事象)の列　(C.3)

として、記述される。ここに、

パターン$\varphi \in \Phi$とカテゴリ番号のリスト$\gamma \subseteq J$との対〈φ, γ〉は、認識システムRECOGNITRONがパターン$\varphi \in \Phi$について持っているカテゴリ帰属知識といわれるものであり [B3], [B4]、パターン$\varphi \in \Phi$がカテゴリ集合 $\mathfrak{C}_j$, $j \in \gamma$ の何れか1つに帰属している可能性があるの意である。

○外延とは、ある概念が適用される最大の範囲であり、内包とは1つの概念に含まれる属性のことである。

カテゴリ(類概念;category)とは、外延的に言えば、ある適切な条件を満たすパターンφの集合である。

○式(2.3)の特徴抽出写像 $u: \Phi \times L \rightarrow Z$ を設ける立場からすれば、各**カテゴリを内包的にみる**ことであり、処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ から特徴量の組

$$\underline{u}(\varphi) \equiv \mathrm{col}(u(\varphi, 1) u(\varphi, 2) \cdots u(\varphi, n)) \tag{C.4}$$

が抽出されたとき、初めてパターン認識の対象となり、u を使って、3つのaxiom 1~3 [B3], [B4] を各々、満たすモデル構成作用素 T, 類似度関数 SM, 大分類関数 BSC を構成することになる。

○式(C.2)の認識結果については、カテゴリ化分類規則

$$\mathrm{CATR}(\varphi, C_k, \mathfrak{C}_j),\ k = 1 \sim n_j \tag{C.5}$$

の、$k = 1 \sim n_j$にわたる集合として、

式(C.2)

$$\longleftrightarrow \{\mathrm{CATR}(\varphi, C_k, \mathfrak{C}_j) \mid k=1\sim n_j\} \qquad \text{(C.6)}$$

として記述される。

○このとき、あるパターンの集まりとして考えられたあるカテゴリ(外延としてのカテゴリ)は、このようなカテゴリ化分類規則のある集合として

$$\mathfrak{C}_j \longleftrightarrow \{\{\mathrm{CATR}(\varphi, C, \mathfrak{C}_j) \mid k=1\sim n_j\} \mid \varphi \in \Phi\} \qquad \text{(C.7)}$$

という具合に記述される。第j＝J≡ {1, 2, …, m} 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ を式(C.7)で記述されると想定したとき、第j∈J番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の学習が可能になることに注意する。モデル構成作用素 T, 類似度関数SM, 大分類関数 BSC 内の助変数、制約条件の定数化、特殊化、例化(instantiation)とは、それらに、ある定数を代入することでも、この種の学習が行われる。

○このようにして、3段論法

$$\bigvee_{k=1}^{nj} [\mathrm{CATR}(\varphi, C_k, \mathfrak{C}_j) \wedge \varphi \text{ satisfies condition } C_k] \qquad \text{(C.8)}$$

$$\Rightarrow \text{式(C.2)} \qquad \text{(C.9)}$$

により、処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ が認識されよう。

C2. 何故、ファジィ処理を RECOGNITRON はするのか？

2つのパターン φ_1, φ_2 による表現が異なっていても、その帰属するカテゴリが同一ならば(例えば、同一の第j∈J番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ ならば)同一の意味表現が存在すると想定すると、同一の表層意味表現 $T\varphi_1 = T\varphi_2$ が存在する場合がある。φ_1, φ_2 が第j∈J番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の持つ諸性質を代表しているパターン ω_j から変形があまり大きくない場合がそうである。この変形が大きい場合には、$T\varphi_1$, $T\varphi_2$ が共に同一の深層意味表現 $T\omega_j$ に多段階変換される筈である。

A pattern recognition machine computes the correlation of $T\varphi$ with each pattern prototype $T\omega_j$. In the pattern recognition machine which we have been constructing, the similarity-measure function SM would tell what the maximum correlation with a stored prototype $T\omega_j$ was, and to some extent would measure the effectiveness of the decision scheme which assigned $T\varphi$ to the category with a representative of which it was maximally correlated.

式(6.10)で定義されている“抽出される特徴量のあいまいさを反映している”式(6.11)の半順序関係 $\varphi \leqq_u \eta$ は、簡単にいえば、

$$\eta \text{ は } \varphi \text{ より特徴不確定さが大きくない} \qquad \text{(C.10)}$$

という意味で、

$$\text{“}\varphi \leqq_u \eta\text{” means } \eta \text{ is better than } \varphi \qquad \text{(C.11)}$$

と考えられるものである。6.1.4項で説明されているように、次の4解釈(一)～(四)が可能である：

(一) φ は η の近似である。

(二) φ は η に要約される。

(三) η は φ の情報を含む。

(四) η は φ に変形されている。 □

何故、認識システム RECOGNITRON [B1] ～ [B4] は上述のファジィ半順序関係 $\leqq_u$ の上限を求めようと、多段階認識をするのかといえば、次の様に説明される： パターン認識の働きを実現するのに、**ファジィ理論を適用するのは、統計的変動以上の曖昧さを備えているであろうパ**

ターンを処理するのに好都合であるからである：The kind of uncertainty that appears in pattern recognition seems to be more of an ambiguity that a statistical variation. □

抽象的認識機械 RECOGNITRON の備えているカテゴリ化分類規則(認識動作に必要な知識)をプロダクション・ルールとして、節形式(clausal form)、連言標準形

$$
\begin{aligned}
&T\omega_j \\
&\leftarrow [QT\ \varphi_{1,1} \vee QT\ \varphi_{1,2} \vee \cdots \vee QT\ \varphi_{1,n(1)}] \\
&\quad \wedge [QT\ \varphi_{2,1} \vee QT\ \varphi_{2,2} \vee \cdots \vee QT\ \varphi_{2,n(2)}] \\
&\quad \wedge \cdots \wedge [QT\ \varphi_{m,1} \vee QT\ \varphi_{m,2} \vee \cdots \vee QT\ \varphi_{m,n(m)}]
\end{aligned}
\tag{C.12}
$$

の形にあからさまに書くことができれば、人工知能学・知識工学の成果として現在、広く実用化されているプロダクション・システムとして、認識動作を把握できることになる。

ここに、

(1) $Q_{i,j} \in \{\phi$(空集合), $\neg\}$,
$i=1\sim m, j=1\sim n(m)$

(2) $T\varphi_{ij}$：素式(atomic formula)

(3) $Q_{i,j}\,T\varphi_{ij}$：リテラル(literal)

(4) $Q_{i,j}\,T\varphi_{i,1} \vee Q_{i,j}\,T\varphi_{i,2} \vee \cdots \vee Q_{i,j}\,T\varphi_{i,n(2)}$
：節(clause)

である。これが、空間多重命題論理推論系によってカテゴリ分類化規則を表現したものである。

(著者　すずき　しょういち　文教大学情報学部　受付 平成12年9月13日)