各個人の感性を反映した認識システムRECOGNITRON

鈴木　昇一

Recognition System RECOGNITRON in Which Each Individual Kansei May Be Reflected

Shoichi Suzuki

あらまし

パターン認識の数学的理論（**SS理論**）では、入力パターンφに対応するパターンモデル$T\varphi$を求め、$T\varphi$から不動点パターンモデルを連想する形で、φの帰属するカテゴリを決定する多段階パターン変換連想形不動点認識法（**SS連想形不動点認識法**）が考えられている。本論文では、選ばれた個人の感性を反映するように、“axiom 1を満たすモデル構成作用素” T, “axiom 2を満たす類似度関数 SM”, “axiom 3を満たす BSC” の３構造を決める手法が研究されており、SS連想形不動点認識法が**感性的パターン情報処理**にも適用できることが明らかにされている。

キーワード

パターン認識の数学的理論(SS理論)　モデル構成作用素　類似度関数　大分類関数　カテゴリ選択関数　構造受精変換　カテゴリ帰属知識　連想形不動点認識法　感性情報処理　エージェント

Abstract

A muti-stage trnsformation of patterns has been presented in a mathematical theory(SS theory) of recognizing patterns suggested by S.Suzuki, which gets a corresponding pattern-model $T\varphi$ of an input pattern φ in question to be recognized, solves a fixed-point equation of associative reconition about $T\varphi$, and determines a category to which φ belongs so that a fixed-point pattern of a structural fertilization transformation may be recalled by a recognition system RECOGNITRON .

A model-construction operator T, a similarity-measure function SM and a rough classifier BSC which must respectively satisfy axiom 1, axiom 2 and axiom 3 are here constructed such that a kansei of a selected person can be reflected in their structures. It became certain that an associative recognition of fixed-point type suggested by S.Suzuki can be put to a so-called kansei information processing of patterns.

Key words : a mathematical theory of recognizing patterns(SS theory)　model-construction operator

similarity-measure function　rough classifier　category-selection function
structural-fertilization transformation　categorical-membership knowledge
associative recogition method of fixed-point type　kansei information processing　agent

1. まえがき

1999年末に「日本感性工学会」が設立され、感性(kansei) [A12], [A13] そのものを研究する気運が盛り上がっている。

人間がパターン認識、パターン想起を多数経験するにつれて、入力パターン、代表パターン(テンプレートパターン)間の類似性、相違性の程度を感性的に学習していると思われる。この種の学習による獲得した感性を基盤とし、パターン認識、パターン想起の両処理を行うために、axiom 1～3を満たすモデル構成作用素 T, 類似度関数 SM, 大分類関数 BSC を**個人感性を基に構成する手法**が本論文では研究され、他に類をみない。

任意に選ばれた個人のある種の感性を反映するように帰納的にカテゴリ学習された認識システム RECOGNITRONに感性的にパターン情報処理を実行させるためには、SS理論 [B1] ～ [B6] によれば、感性的モデル構成作用素 T, 感性的類似度関数 SM, 感性的大分類関数 BSC をその構成に取り入れればよい。

感性、論理性はいわゆる知能をもたらす計算を表層上、各々、必要としていない、必要としていると考えた場合、互いに異質な情報処理から得られていると、考えられよう。

論理的思考、感性的思考は簡単にいえば、各々、明示的知識、暗示的知識による脳内情報処理である。この両思考が知能の働きを特徴付けており、一方の思考のみが特徴付けているのではない。感性に導かれて思考の論理性が発揮されていると考えられる。

本論文が**感性に裏付けられた**(パターンモデル構成作用素 T, 類似度関数 SM, 大分類関数 BSC に基づいた)**認識知能論理**を研究したことがこれまでの他の諸研究と異なっている。

S.Suzukiは或るパターン認識システム RECOGNITRON を構成し [B3]、ありとあらゆるパターン認識の働きがこの認識システムによってシミュレートされることを証明した。本論文では、この RECOGNITRON に感性情報処理の機能を備えさせる研究がなされる。

2カテゴリ $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ として、例えば、「美しい, 醜い」, 「好き, 嫌い」, 「明るい, 暗い」, 「楽しい, 苦しい」などを設定した認識システムは明らかに感性情報処理を行うことになる。

認識システム RECOGNITRON の個人的感性化を研究したものであり、選んだ各個人の感性を反映した RECOGNITRON を構成している。このためには、**SS公理系**の3公理axiom 1～3を各々、満たすようにモデル構成作用素 T, 類似度関数SM, 大分類関数BSCを各個人の感性に応じ構成すればよい。

何故このような**個人感性を反映した認識システムRECOGNITRON**を構成するのかといえば、構成の結果得られた RECOGNITRON の認識挙動を調べることによって、その個人の感性をより詳細に推量することができ、RECOGNITRONへのこの反映が不十分であることが判明すれば、T, SM, BSC を更新することにより一層その反映を効果的に取り入れることが可能となるからである。

個人的感性認識の働きを analysis by synthesis 的手法により確保することが可能となろう。

パターン認識の数学的理論(SS理論) [B1] ～ [B6] を計算機による **"絵・曲などの感性の対象**

となるパターンの処理”に適用することを考えよう。

パターンモデル Tφをみたり聞いたりしたら 原パターンφのようにみえたり聞こえたりするためには、処理の対象とするパターンφの集合Φと、式(2.1)の写像 T との対［Φ, T］が付録1の axiom 1を満たす必要がある、というのが、**SS理論**［B1］～［B6］の主張である。

パターン認識の数学的理論(SS理論)では、入力パターンφに対応するパターンモデルTφを求め、Tφから不動点パターンモデルを連想する形で、φの帰属するカテゴリを決定する多段階パターン変換法が考えられている。SS理論は、このようなパターンモデル Tφを恰も、原パターンφ と錯覚し、構造受精変換を多段階適用し、カテゴリ帰属知識の不動点知識を**連想形認識方程式**を解くことにより求めるという“不動点探索形構造受精多段階変換に基づく認識の働き”を提案しており、この認識の働きがありとあらゆるパターン認識の働きをシミュレートできることが証明されている。

これまでの諸研究と異なり、T, SM, BSC の3構造に感性を反映させパターン認識に関するその構造を抽出する方法が提案される(新規性)。感性を反映させる方法が素直であることが特色である(有効性)。感性をあからさまに反映させないパターン連想形認識の働きにおいて、T, SM, BSC の設定法を変えただけで、**感性的パターン情報処理の技術**が確保されることが示されている(信頼性)。

尚、これまでの文献BでのS.Suzuki諸研究に関連して、付録A～Jが設けられている。

2. 感性を反映したモデル構成作用素 T の構成

本章では、処理の対象とする問題のパターンφの集合Φと、有界実数値パターン$\varphi \in \Phi$が入力されたとき、$\varphi \in \Phi$の代りとなるパターンモデル T$\varphi \in \Phi$を各個人の感性に応じて、axiom 1を満たすように構成する手法が説明される。

個人の感性を反映させないパターンモデルT$\varphi \in \Phi$をも構成し、両者の違いを浮き彫りにしよう。

2.1 処理の対象とするパターンφの集合Φとモデル構成作用素 T の対［Φ, T］の構成

Tφを見たり聞いたりしたならば、φと同じように見えたり聞こえたりするような“パターン$\varphi \in \Phi$に対応するパターンモデル(**同一知覚原理を満たすパターモデル**) T$\varphi \in \Phi$を出力する”モデル構成作用素”

$$T : \Phi \to \Phi \tag{2.1}$$

を考えよう。ここに、Φは処理の対象とする問題のパターンΦの集合であり、次の定理2.1の式(2.2)で与えられる。

実は、対［Φ, T］が次のaxiom 1を満たすように構成されるとき、式(2.1)の写像 T は**モデル構成作用素**(model-construction operator)と呼ばれる［B3］,［B4］：

<u>Axiom 1</u> **(パターン集合 Φ とモデル構成作用素 T との対【Φ, T】の満たすべき公理)**

(i)(零元のT-**不動点性**；fixed-point property of zero element under mapping T)》 $0 \in \Phi \wedge T0 = 0.$

(ii)(**錐性**, 正定数倍吸収性；cone property)

$\forall \varphi \in \Phi, a \cdot \varphi \in \Phi \wedge T(a \cdot \varphi) = T\varphi$

for any positive real number a.

(iii)(**ベキ等性**, 埋込性；idempotency, embeddedness)

$\forall\varphi\in\Phi, T\varphi\in\Phi \wedge T(T\varphi)=T\varphi.$

(iv)(写像Tの**非零写像性**；non-zero mapping property of T) $\exists\varphi\in\Phi, T\varphi\neq 0.$ □

上述のaxiom 1を満たす対［Φ, T］の構成が可能であることは、次の定理2.1［B3］,［B4］で指摘される。

［定理2.1］**(パターン集合Φとモデル構成作用素Tとの対【Φ, T】の基本構成定理)**

写像Tがaxiom 1の(i),(ii),(iii)の3後半，並びに、(iv)を満たすとしよう。そして、パターンと判明しているφの集合Φ_Bが与えられたとしよう。ならば、処理の対象とする問題のパターンφの集合Φを

$$\begin{aligned}\Phi &= R^{++}\cdot(\Phi_B \cup T\cdot\Phi_B)\\ &\equiv \{r^{++}\varphi \mid \varphi\in\Phi_B, r^{++}\in R^{++}\}\\ &\cup \{r^{++}T\varphi \mid \varphi\in\Phi_B, r_{++}\in R^{++}\}\\ &\text{where } R^{++} \text{ is a set of positive real numbers}\end{aligned} \tag{2.2}$$

の如く設定すれば、

$$\Phi\supset\{0\}\wedge[a\cdot\Phi=\Phi \text{ for any } a\in R^{++}]\wedge [T\cdot\Phi=T\cdot\Phi_B\subset\Phi] \tag{2.3}$$

が成立し、axiom 1の(i),(ii),(iii)の3前半をΦは満たし、結局、対［Φ, T］はaxiom 1を満たす。 □

SS理論［B1］～［B6］では、パターンφは可分な(separable)**一般抽象ヒルベルト空間**(Hilbert space)$\mathfrak{H}$の元とする。内積は(φ, η)と表され、ノルムは$\|\varphi\|\equiv\sqrt{(\varphi,\varphi)}$で表される。ここに、$\mathfrak{H}$が可分とは、稠密な(dense)可算部分集合が$\mathfrak{H}$に存在することを指す。$\varphi, \eta\in\mathfrak{H}$間のノルム距離$\|\varphi-\eta\|=\sqrt{(\varphi-\eta, \varphi-\eta)}$に注意しておこう。

理解のためには、例えば、特別な場合として、内積(φ, η)を、

$$(\varphi, \eta)=\int_M dm(x)\varphi(x)\cdot\overline{\eta}(x) \tag{2.4}$$

ここに、$\overline{\eta}$はηの複素共役(a complex conjugate of η)であり、

$$M：q次元ユークリッド空間R^q の可測部分集合 \tag{2.5}$$

$$dm(x)：正値Lebesgue\text{-}Stieltjes式測度 \tag{2.6}$$

$$x=\langle x_1, x_2, \cdots, x_q\rangle\in M(\subseteq R^q) \tag{2.7}$$

とする可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}=L_2(M；dm)$で考えておけばよい［B1］。

2.2 有界実数値パターンφの、個人感性による決定

式(2.1)の写像Tにその感性を反映したい或る一人を選ぶ。

座標点$x\in M$を選び固定する。

振幅零性

$$\begin{aligned}&\varphi(x)/\sup_{y\in M}|\varphi(y)|\\ &=0 \text{ if } \sup_{y\in M}|\varphi(y)|=0\end{aligned} \tag{2.8}$$

と約束する。

パターンφ_tの系列

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_t, \cdots, \varphi_{tmax-1}, \varphi_{tmax} \tag{2.9}$$

をその人に提示する。

処理の対象とする問題のパターン φ に対し、その人の持つ感性に応じ、式(2.9)のパターン系列内のパターンφ_tからφがどの程度の強さで想起されるかどうかに関し、その人の好みのパターンφ_tを1つ、選定してもらう。正数関数 $\varepsilon(x)$を選び固定する。座標点$x \in M$における規格化振幅

$$\varphi(x)/\sup_{y \in M} |\varphi(y)| \tag{2.10}$$

と、この選定されたφ_tの、座標点$x \in M$の**近傍**(neighborhood)における振幅の集合

$$Nb(x;\varepsilon;\varphi_t) \equiv \{\varphi_t(y) \mid |y-x| < \varepsilon(x)\} \tag{2.11}$$

とを比較して、座標点$x \in M$でのパターン振幅値 $\varphi(x)/\sup_{y \in M}|\varphi(y)|$ について

$$1, 2, \cdots, m \tag{2.12}$$

と、m段階の評価を行なってもらう。mについては、

$p=1, 2, 3, \cdots$ のいずれか1つの有限値を選定して、

$$m=3, 5, \cdots, (2 \cdot p+1) \tag{2.13}$$

と選ぶ。

このようにして得られた$\varphi(x)/\sup_{y \in M}|\varphi(y)|$, $\varphi_t(x)$間の**感性的な類似性のm段階評価**(印象度)を

$$\mathrm{eval}(\varphi/\sup|\varphi|, \varphi_t)(x) \in \{1, 2, \cdots, m\} \tag{2.14}$$

と表す。eval は evaluation の略である。

$\mathrm{eval}(\varphi/\sup|\varphi|, \varphi_t)(x)$を次の $(T\varphi)(x)$へと変換する：

$$
\begin{aligned}
&(T\varphi)(x)\\
&\equiv p^{-1} \cdot [\mathrm{eval}(\varphi/\sup|\varphi|, \varphi_t)(x)-(p+1)]=\\
&\begin{cases}
1 & \cdots \mathrm{eval}(\varphi/\sup|\varphi|, \varphi_t)(x)=2 \cdot p+1 \text{ のとき}\\
1-1/p & \cdots \mathrm{eval}(T\varphi/\sup|\varphi|, \varphi_t)(x)=2 \cdot p \text{ のとき}\\
\cdots & \\
1-[(2 \cdot p+1)-e]/p & \cdots \mathrm{eval}(\varphi/\sup|\varphi|, \varphi_t)(x)=e\,(2 \cdot p+1 \geqq e \geqq p+2) \text{ のとき}\\
\cdots & \\
1/p & \cdots \mathrm{eval}(\varphi/\sup|\varphi|, \varphi_t)(x)=p+2 \text{ のとき}\\
0 & \cdots \mathrm{eval}(\varphi/\sup|\varphi|, \varphi_t)(x)=p+1 \text{ のとき}\\
-1/p & \cdots \mathrm{eval}(\varphi/\sup|\varphi|, \varphi_t)(x)=p \text{ のとき}\\
\cdots & \\
-1+(e-1)/p & \cdots \mathrm{eval}(\varphi/\sup|\varphi|, \varphi_t)(x)=e\,(p \geqq e \geqq 1) \text{ のとき}\\
\cdots & \\
-1+1/p & \cdots \mathrm{eval}(\varphi/\sup|\varphi|, \varphi_t)(x)=2 \text{ のとき}\\
-1 & \cdots \mathrm{eval}(\varphi, \varphi_t)(x)=1 \text{ のとき}
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

□

以上をすべての座標点$x \in M$につき実行する。事実上、可測集合 Mを式(2.55)の如く、有限個の可測部分集合M_kの和に分割し、各M_kの代表点 $x \in M$ につき以上を実行できるに過ぎないが、この場合、M_kの代表点以外の座標点についての感性評価はM_kの代表点での感性評価を採用することになる。

ここで、次の約束を設ける。

［個人感性についての**T-約束**］

(一)その人は、$\varphi=0$ に対しては、必ず、$T\varphi=0$ と選ぶものとする。

これは、$\varphi=0$ という無刺激については、$T\varphi=0$ という無刺激の感性(何も感じない感性)を想定したことになる。

(二)$T\varphi$ に対しては、φ について選定した φ_t と同じパターン φ_t を選ぶものとし、よって、

$$\forall x \in M, (T(T\varphi)(x)=(T\varphi)(x) \tag{2.16}$$

と、その人は評価を変えないものと約束する。

これは、振幅値の多値離散性

$$\begin{aligned}&\forall x \in M,\\ &\eta(x) \in \{1\} \cup \{1-k\cdot(1/p) \mid k=1,2,\cdots,p-1\}\\ &\cup \{0\} \cup \{-1+k\cdot(1/p) \mid k=1,2,\cdots,p-1\}\\ &\cup \{-1\}\end{aligned} \tag{2.17}$$

が満たされるパターン η については、写像 T の不動点性

$$T\eta=\eta \tag{2.18}$$

が満たされる感性を想定したことになる。 □

このとき、次の定理2.2が成り立ち、選ばれた1個人の感性に応じ、原パターン φ の代りとなるパターンモデル $T\varphi$ が得られたことがわかる。

[定理2.2] **(個人感性に応じたパターンモデル $T\varphi$ の構成定理)**

個人感性についてのT-約束(一), (二)の下で、式(2.15)のように定義された式(2.1)の写像 T は axiom 1, (i), (ii), (iii)の3後半、並びに、(iv)を満たす。

[定理2.2の系1] **(axiom 1を満たす対 [Φ, T] の構成)**

個人感性についてのT-約束(一), (二)の下で、式(2.15)のように定義された式(2.1)の写像 T と、式(2.2)で定義されたパターン集合 Φ との対 [Φ, T] はaxiom 1を満たし、式(2.3)も成り立つ。

(証明) axiom 1, (i)の後半の成立:個人感性についての約束(一)そのものである。

axiom 1, (ii)の後半の成立:

任意の正実数 a について、パターン $\eta=a\cdot\varphi$ を考えると、

$$\begin{aligned}&\forall x \in M,\\ &\mathrm{eval}(\eta/\sup|\eta|, \varphi_t)(x)\\ &=\mathrm{eval}(\varphi/\sup|\varphi|, \varphi_t)(x)\end{aligned} \tag{2.19}$$

が成立し、よって、

$$T\eta=T\varphi \tag{2.20}$$

を得、証明が終わる。

axiom 1, (iii)の後半の成立:個人感性についての約束(二)そのものである。

axiom 1, (iv)の成立:任意の φ について、等式 $T\varphi=\eta$ を満たす η が存在することが $T\varphi$ の定義式(2.15)よりわかる。ここに、η は振幅値の多値離散式(2.17)を満たすパターンである。よって、不動点式(2.18)が成立し、これは(iv)の成立を意味する。

系1は本定理に定理2.2を適用すれば、明らか。 □

個人感性を反映させている式(2.15)のモデル構成作用素 T を用い、処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ について、

$$\varphi'=T\varphi \tag{2.21}$$

を φ の代りに採用し、この φ を入力する(個人感性を反映させていない通常の)RECOGNITRON を構成しても、個人感性を反映した認識の働きが得られる。

2.3 個人感性を反映させないモデル構成作用素Tの構成

例えば、或るパターン変換機能

$$B : \Phi \to \Phi \tag{2.22}$$

を選定し、式(2.9)の訓練パターン系列から

$$t = \min_{s=1\sim tmax} \| B\varphi - B\varphi_s \| \tag{2.23}$$

なるパターン番号 $t \in \{1, 2, \cdots, tmax\}$ を持つパターン $\varphi_t \in \Phi$ を、処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ に対応し選定し、

$$\begin{aligned} &\mathrm{eval}(\varphi/\sup \varphi, \varphi_t)(x) \\ &= [\varphi_t(x)/\sup_{y \in M} \varphi_t(y)] \text{ の}(2\cdot p+1)\text{倍を越え} \\ &\text{ない最小の整数 for any } x \in M \end{aligned} \tag{2.24}$$

と設定すれば、個人感性についてのT-約束での(一), (二)をみたすことがわかる。よって、定理2.2、並びに、その系1から、個人感性が反映されていない対［Φ, T］がaxiom 1を満たすように得られる。

個人感性を反映させない式(2.1)のモデル構成作用素Tを構成するには、次の4定理2.3～2.6が参考になる。

［定理2.3］**(個人感性を反映させないモデル構成作用素Tの構成定理1)**

不等式

$$\begin{aligned} &\forall x \in M, \\ &-1 = e_{2p+1}^-(x) < e_{2p}^-(x) < \cdots < e_2^-(x) \\ &< e_1^-(x) < 0 < e_1^+(x) \\ &< e_2^+(x) < \cdots < e_{2p}^+(x) < e_{2p+1}^+(x) = +1 \end{aligned} \tag{2.25}$$

を満たす閾値関数 $e_k^\pm(x)$ の組

$$e_k^\pm(x),\ x \in M, k = 1, 2, \cdots, 2p+1 \tag{2.26}$$

を用意する。

$$(T\varphi)(x) = \begin{cases} e_k^+(x) \text{ if } e_{k-1}^+(x) < \varphi(x)/\sup_{y \in M} |\varphi(y)| \leqq e_k^+(x)\ (2 \leqq k \leqq 2p+1) \\ 0 \text{ if } e_1^-(x) \leqq \varphi(x)/\sup_{y \in M} |\varphi(y)| \leqq e_1^+(x) \\ e_k^-(x) \text{ if } e_k^-(x) \leqq \varphi(x)/\sup_{y \in M} |\varphi(y)| < e_{k-1}^-(x)\ (2 \leqq k \leqq 2p+1) \end{cases}$$
$$\text{for any } x \in M \tag{2.27}$$

のように定義された式(2.1)の写像Tはaxiom 1, (i), (ii), (iii)の3後半、並びに、(iv)を満たし、式(2.2)で定義されたパターン集合Φとの対［Φ, T］はaxiom 1を満たし、式(2.3)も成り立つ。

□

例えば、不等式(2.25)を満たす閾値関数 $e_k^\pm(x)$ の、式(2.26)の組を、簡単には、

$$\begin{aligned} &e_k^+(x) = k/(2p+1), e_k^+(x) = -k/(2p+1) \\ &(2 \leqq k \leqq 2p+1) \text{ for any } x \in M \end{aligned} \tag{2.28}$$

と選ぶことができるが、この場合、

p=1と選定しているとき、式(2.27)のパターンモデル $T\varphi$ は、

$$(T\varphi)(x) =$$

$$\begin{cases} 1 & \text{if } 2/3 < \varphi(x)/\sup_{y\in M}|\varphi(y)| \leqq 1 \\ 2/3 & \text{if } 1/3 < \varphi(x)/\sup_{y\in M}|\varphi(y)| \leqq 2/3 \\ 0 & \text{if } -1/3 < \varphi(x)/\sup_{y\in M}|\varphi(y)| < 1/3 \\ -2/3 & \text{if } -2/3 \leqq \varphi(x)/\sup_{y\in M}|\varphi(y)| < -1/3 \\ -1 & \text{if } -1 \leqq \varphi(x)/\sup_{y\in M}|\varphi(y)| < -2/3 \end{cases}$$

$$\text{for any } x\in M \tag{2.29}$$

である。

定理2.3を効率的に証明するために、次の2補助定理2.1, 2.2を設けよう。

［補助定理2.1］**（零パターンモデル定理）**

式(2.27)で定義されている式(2.1)の写像Tに対し、

$$\forall x\in M,$$

$$e_1^-(x) \leqq \varphi(x)/\sup_{y\in M}|\varphi(y)| \leqq e_1^+(x)$$

$$\Leftrightarrow T\varphi = 0. \tag{2.30}$$

（証明）　パターンモデル$T\varphi$の定義式(2.27)から明らかである。 □

［補助定理2.2］**（パターンモデルの$T\eta$不動点定理）**

式(2.27)で定義されている式(2.1)の写像Tに対し、

振幅の絶対値の上限の“0，1”規格化条件

$$\sup_{y\in M}|\eta(y)| \in \{0, 1\} \tag{2.31}$$

の下で、

$$[\forall x\in M, \exists k\in\{k \mid 2\leqq k\leqq 2p+1\},$$

$$\eta(x)\in\{e_k^{\pm}(x)],\ 0\}$$

$$\Rightarrow T\eta = \eta. \tag{2.32}$$

（証明）　パターンモデル$T\varphi$の定義式(2.27)から明らかである。 □

（定理2.3の証明）

axiom 1,（ｉ）の後半の成立：

振幅零性の条件式(2.8)を考慮する。$\varphi=0$とすれば、補助定理2.1を適用して、$T\varphi=0$を得る。

axiom 1,（ii）の後半の成立：　aを正定数とする。

$\varphi=0$とすれば、$a\cdot\varphi=0$であり、axiom 1,（ｉ）の後半を適用して、

$$T(a\cdot\varphi) = 0 = T\varphi \tag{2.33}$$

を得る。

$\varphi\neq 0$とする。

$$\forall x\in M, a\cdot\varphi(x)/\sup_{y\in M}|a\cdot\varphi(y)|$$

$$= \varphi(x)/\sup_{y\in M}|\varphi(y)| \tag{2.34}$$

が成り立ち、よって、パターンモデル$T\varphi$の定義式(2.27)から

$$T(a\cdot\varphi) = T\varphi \tag{2.35}$$

が成り立つ。

axiom 1,（iii）の後半の成立：

$$\eta \equiv T\varphi \tag{2.36}$$

とおく。

$\eta=0$ のとき、axiom 1, (i)の後半を適用して、$T\eta=0$ を得、

$$T\eta=0=\eta \tag{2.37}$$

が成り立つ。

$\eta\neq 0$ とする。補助定理2.2を適用して、式(2.32)が成り立つ。

axiom 1, (iv)の成立：

式(2.31)を特に、

$$\sup_{y\in M}|\eta(y)|=1 \tag{2.38}$$

と設定し、補助定理2.2を適用すれば、式(2.32)から、$T\eta(=\eta)\neq 0$ を満たす非零パターンが存在することがわかる。 □

さて、次の2定理2.4, 2.5を証明するために、次の補助定理2.3を指摘しておかねばならない。

[補助定理2.3] **(パターンモデル $T\varphi$ の正定数倍定理)**

式(2.1)の写像 T がaxiom 1, (i), (ii), (iii)の3後半、並びに、(iv)を満たすならば、$c\cdot T$ は axiom 1, (i), (ii), (iii)の3後半、並びに、(iv)を満たす。ここに、c は個々のパターン $\varphi\in\Phi$ に依存しない任意の正定数である。

(証明)　axiom 1, (i)の後半の成立：

$\varphi=0$ とすれば、$T\varphi=0$ を得、よって、$c\cdot T\varphi=0$ を得る。

axiom 1, (ii)の後半の成立：

a を正定数とする。

$\varphi=0$とすれば、$a\cdot\varphi=0$であり、axiom 1, (i)の後半を適用して、$c\cdot T(a\cdot\varphi)=0=c\cdot T\varphi$を得る。

$\varphi\neq 0$とする。T がaxiom 1, (ii)の後半を満たすから、$c\cdot T(a\cdot\varphi)=c\cdot T\varphi$ が成り立つ。

axiom 1, (iii)の後半の成立：

$$\eta\equiv c\cdot T\varphi \tag{2.39}$$

とおく。

$\eta=0$ のとき、axiom 1, (i)の後半を適用して、$T\eta=0$ を得、$c\cdot T\eta=0=\eta$ が成り立つ。

$\eta\neq 0$ とする。

$$\begin{aligned}
c\cdot T\eta &= c\cdot T(c\cdot T\varphi)\\
&= c\cdot T(T\varphi)\\
&\qquad \because\ \text{T がaxiom 1, (ii)の後半を満たす}\\
&= c\cdot T\varphi\\
&\qquad \because\ \text{T がaxiom 1, (iii)の後半を満たす}\\
&= \eta \quad \because\ \text{式(2.39)}.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

axiom 1, (iv)の成立：

T が axiom 1, (iv)を満たすから、

$T\varphi\neq 0$ とすれば、$c\cdot T\varphi\neq 0$. □

上述の補助定理2.3を適用すれば、2定理2.4, 2.5が成り立つ。

[定理2.4] **(個人感性を反映させないモデル構成作用素 T の構成定理2)**

実数値パターン $\varphi\in\Phi$ について、式(2.8)の零振幅性の約束の下で、

$$\begin{aligned}
&(T\varphi)(x)\\
&=\text{【}\varphi(x)/\sup_{y\in M}|\varphi(y)|\text{】の}\ (2\cdot q+1)\text{倍}\\
&\quad \text{for any } x\in M
\end{aligned} \tag{2.41}$$

のように定義された式(2.1)の写像 T はaxiom 1,（ i),（ii),（iii)の3後半、並びに、(iv)を満たし、式(2.2)で定義されたパターン集合Φとの対［Φ, T］はaxiom 1を満たし、式(2.3)も成り立つ。

（証明） 式(2.8)の零振幅性の約束の下で、

$$(T\varphi)(x) = \varphi(x)/\sup_{y \in M} |\varphi(y)| \tag{2.42}$$

について、論じよう。

axiom 1,（ i)の後半の成立： $\varphi=0$ とすれば、零振幅性の約束式(2.8)から、$T\varphi=0$ を得る。

axiom 1,（ii)の後半の成立： a を正定数とする。

$\varphi=0$ とすれば、$a\cdot\varphi=0$ であり、axiom 1,（ i)の後半を適用して、$T(a\cdot\varphi)=0=T\varphi$ を得る。

$\varphi\neq 0$ とする。式(2.34)が成立し、よって、$T(a\cdot\varphi)=T\varphi$ が成り立つ。

axiom 1,（iii)の後半の成立： 式(2.36)の $\eta\equiv T\varphi$ を考える。

$\eta=0$ のとき、axiom 1,（ i)の後半を適用して、$T\eta=0$ を得、$T\eta=0=\eta$ が成り立つ。

$\eta\neq 0$ とする。式(2.31)が成立し、よって、$T\eta=\eta$ が成立する。

axiom 1,（iv)の成立：

式(2.31)が成立する非零パターン $\eta(\neq 0)\in\Phi$ については、$T\eta=\eta\neq 0$ が成立する。

以上に補助定理2.3を適用した後、定理2.1を適用すればよい。 □

同様に、次の定理2.5も証明される。

［定理2.5］**（個人感性を反映させないモデル構成作用素 T の構成定理3）**

実数値パターン $\varphi\in\Phi$ について、零振幅性

$$[\varphi(x)-\inf_{y\in M}\varphi(y)]/[\sup_{y\in M}\varphi(y)-\inf_{y\in M}\varphi(y)] = 0 \text{ if } \sup_{y\in M}\varphi(y)=\inf_{y\in M}\varphi(y) \tag{2.43}$$

の約束の下で、

$$(T\varphi)(x) = 【[\varphi(x)-\inf_{y\in M}\varphi(y)]/[\sup_{y\in M}\varphi(y)-\inf_{y\in M}\varphi(y)]】\text{の}(2\cdot q+1)\text{倍 for any } x\in M \tag{2.44}$$

のように定義された式(2.1)の写像 T はaxiom 1,（ i),（ii),（iii)の3後半、並びに、(iv)を満たし、式(2.2)で定義されたパターン集合 Φ との対［Φ, T］はaxiom 1を満たし、式(2.3)も成り立つ。

（証明） 式(2.43)の零振幅性の約束の下で、

$$(T\varphi)(x) = [\varphi(x)-\inf_{y\in M}\varphi(y)] / [\sup_{y\in M}\varphi(y)-\inf_{y\in M}\varphi(y)] \tag{2.45}$$

について、論じよう。

axiom 1,（ i)の後半の成立： $\varphi=0$ とすれば、式(2.43)の約束から、$T\varphi=0$ を得る。

axiom 1,（ii)の後半の成立： a を正定数とする。

$\varphi=0$ とすれば、$a\cdot\varphi=0$ であり、axiom 1,（ i)の後半を適用して、$T(a\cdot\varphi)=0=T\varphi$ を得る。

$\varphi\neq 0$ とする。

$$[a\cdot\varphi(x)-\inf_{y\in M}a\cdot\varphi(y)] / [\sup_{y\in M}a\cdot\varphi(y)-\inf_{y\in M}a\cdot\varphi(y)] = [\varphi(x)-\inf_{y\in M}\varphi(y)] / [\sup_{y\in M}\varphi(y)-\inf_{y\in M}\varphi(y)] \tag{2.46}$$

が成立し、よって、$T(a\cdot\varphi)=T\varphi$ が成り立つ。

axiom 1，(iii)の後半の成立：

式(2.36)の $\eta\equiv T\varphi$ を考える。

$\eta=0$ のとき、axiom 1，(i)の後半を適用して、$T\eta=0$ を得、$T\eta=0=\eta$ が成り立つ。

$\eta\neq 0$ とする。

$$\sup_{y\in M}\eta(y)=1\wedge\inf_{y\in M}\eta(y)=0 \tag{2.47}$$

が成立し、$T\eta=\eta$ が成立する。

axiom 1，(iv)の成立：

式(2.47)を満たす非零パターン $\eta\,(\neq 0)\in\Phi$ については、$T\eta=\eta\neq 0$ が成立する。

以上に補助定理2.3を適用した後、定理2.1を適用すればよい。 □

最後に、定理2.6を証明しよう。

一般に、可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の元からなる系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ は、**1次独立**であるとしよう。

このとき、処理の対象とするパターン $\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$ が、

第 $k\in L$ 番目の**パターン形状素**と呼ばれる ψ_k からなる系

($\mathfrak{H}$ の基底の一部) $\psi_k, k\in L$ の線形1次結合 $\sum_{k\in L} a_k\cdot\psi_k$ で

近似される場合の近似誤差

$$\|\varphi-\sum_{k\in L} a_k\cdot\psi_k\| \tag{2.48}$$

を最小ならしめる各複素係数 $a_k\equiv a_k(\varphi)$ については、**最小自乗法**(method of least squares)を適用して得られる連立1次方程式

$$\sum_{m\in L} a_m(\varphi)\cdot(\psi_m, \psi_k)=(\varphi, \psi_k), k\in L \tag{2.49}$$

を解いて求めることが出来る。この時、

$$\forall k\in L, (\varphi_\perp, \psi_k)=0 \tag{2.50}$$

を満たす $\varphi_\perp\in\mathfrak{H}$ が存在して、原パターン φ の表現

$$\varphi=\sum_{k\in L} a_k(\varphi)\cdot\psi_k+\varphi_\perp \tag{2.51}$$

が成り立つ。特に、直交性

$$(\psi_k, \psi_\ell)=0 \text{ if } k\neq\ell \tag{2.52}$$

を満たす1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ については、連立1次方程式(2.49)の解 $a_k(\varphi)$，$k\in L$ は、

$$a_k(\varphi)=(\varphi, \psi_k)/(\psi_k, \psi_k),\ k\in L \tag{2.53}$$

と求まる。特に、可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}=L_2(M;dm)$ の、零元を含む部分集合 Φ を選んでいる場合、非零条件

$$\forall k\in L, \int_{M_k} dm(x)\neq 0 \tag{2.54}$$

を満たす可測集合 M の分割

$$M=\cup_{k\in L} M_k \text{ such that } M_k\cap M_\ell=\phi\ (k\neq\ell) \tag{2.55}$$

を考え、各元 ψ_k が

$$\psi_k(x)=1 \text{ if } x\in M_k, =0 \text{ otherwise} \tag{2.56}$$

と定義される系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ は式(2.52)を満たす直交系であり、式(2.53)の各 $a_k(\varphi)$ は、

$$a_k(\varphi)=\int_{M_k} dm(x)\,\varphi(x)/\int_{M_k} dm(x) \tag{2.57}$$

と表されることになる。

以後、連立1次方程式(2.49)の解である各 $a_k(\varphi)$ が実数値であるようなパターン $\varphi\in\Phi$ を考える。

[定理2.6] **(個人感性を反映させないモデル構成作用素 T の構成定理4)**

不等式

$$-1 = e_{2p+1}^{-}(\ell) < e_{2p}^{-}(\ell) < \cdots < e_2^{-}(\ell)$$
$$< e_1^{-}(\ell) < 0 < e_1^{+}(\ell)$$
$$< e_2^{+}(\ell) < \cdots < e_{2p}^{+}(\ell) < e_{2p+1}^{+}(\ell) = +1$$
$$\text{for any } \ell \in L \tag{2.58}$$

を満たす閾値の組

$$e_k^{\pm}(\ell),\ k = 1, 2, \cdots, 2p+1,\ \ell \in L \tag{2.59}$$

を用意する。

ここで、特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \to R[-1, +1] \equiv \{y \mid -1 \leqq y \leqq +1\} \tag{2.60}$$

を導入し、パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出される第 $k \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi, k)$ として、

零条件

$$a_\ell(\varphi) / \sup_{k \in L} \mid a_k(\varphi) \mid$$
$$= 0 \text{ if } \sup_{k \in L} \mid a_k(\varphi) \mid = 0 \tag{2.61}$$

の下で、

$$u(\varphi, k) \equiv$$
$$\begin{cases} e_k^{+}(\ell) & \text{if } e_{k-1}^{+}(\ell) < a_\ell(\varphi)/\sup_{k \in L} \mid a_k(\varphi) \mid \leqq e_k^{+}(\ell)\ (2 \leqq k \leqq 2p+1) \\ 0 & \text{if } e_1^{-}(\ell) \leqq a_\ell(\varphi)/\sup_{k \in L} \mid a_k(\varphi) \mid \leqq e_1^{+}(\ell) \\ e_k^{-}(\ell) & \text{if } e_k^{-}(\ell) \leqq a_\ell(\varphi)/\sup_{k \in L} \mid a_k(\varphi) \mid < e_{k-1}^{-}(\ell)\ (2 \leqq k \leqq 2p+1) \end{cases}$$
$$\text{for any } \ell \in L \tag{2.62}$$

を採用してみよう。このとき、**1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ によるパターン**

$$T\varphi = \sum_{k \in L} u(\varphi, k) \cdot \psi_k \tag{2.63}$$

が導入でき、このように定義された式(2.1)の写像 T はaxiom 1,（i),（ii),（iii)の3後半、並びに、(iv)を満たし、式(2.2)で定義されたパターン集合Φとの対［Φ, T］はaxiom 1を満たし、式(2.3)も成り立つ。 □

定理2.6を効率的に証明するために、次の2補助定理2.4，2.5を用意する。

［補助定理2.4］（零パターンモデル定理）

2式(2.62)，(2.63)で定義されるパターン $T\varphi$ について、

$$\forall \ell \in L,$$
$$e_1^{-}(\ell) \leqq a_\ell(\varphi)/\sup_{k \in L} \mid a_k(\varphi) \mid \leqq e_1^{+}(\ell) \tag{2.64}$$
$$\Leftrightarrow T\varphi = 0. \tag{2.65}$$

（証明） $u(\varphi, \ell)$，パターン $T\varphi$ の2式(2.62)，(2.63)による定義を考慮すると、式(2.64)から

$$\forall \ell \in L,\ u(\varphi, \ell) = 0 \tag{2.66}$$

を得、式(2.65)が成り立つ。逆も、系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ が1次独立であることから明らかである。 □

［補助定理2.5］**（パターンモデル $T\varphi$ の不動点定理）**

2式(2.62)，(2.63)で定義されるパターン $T\varphi$ について、

$$\exists k \in L,\ \varphi = \psi_k$$
$$\Rightarrow T\varphi = \varphi. \tag{2.67}$$

（証明） 連立1次方程式(2.49)の解である各 $a_k(\varphi)$ は、$\varphi = \psi_k$ のとき、

$$a_\ell(\varphi) = 1 \text{ if } k = \ell,\ = 0 \text{ if } k \neq \ell \tag{2.68}$$

であり、よって、式(2.62)から、

$$u(\varphi,\ \ell)=1 \text{ if } k=\ell,\ =0 \text{ if } k\neq\ell \tag{2.69}$$

を得、式(2.63)で定義されるパターン $T\varphi$ は $T\varphi==\psi_k=\varphi$ である。 □

(定理2.6の証明)

axiom 1, (i)の後半の成立： 振幅零性の条件式(2.61)を考慮する。$\varphi=0$ とすれば、

$$\forall\ell\in L, a_\ell(\varphi)/\sup_{k\in L}|a_k(\varphi)|=0 \tag{2.70}$$

を得、補助定理2.4を適用して、$T\varphi=0$ を得る。

axiom 1, (ii)の後半の成立：

先ず、任意の複素定数bについて、

$$\forall\ell\in L, a_\ell(b\cdot\varphi)=b\cdot a_\ell(\varphi) \tag{2.71}$$

が、連立1次方程式(2.49)の性質からわかる。

aを正定数とする。

$\forall\ell\in L, a_\ell(\varphi)=0$ とすれば、式(2.71)より、

$\forall\ell\in L, a_\ell(a\cdot\varphi)=0$ であり、補助定理2.4を適用して、式(2.33)を得る。

$\exists\ell\in L, a_\ell(\varphi)\neq0$ とする。

式(2.71)より、

$$\forall\ell\in L, a_\ell(a\cdot\varphi)/\sup_{k\in L}|a\cdot a_k(\varphi)|$$

$$=a_\ell(\varphi)/\sup_{k\in L}|a_k(\varphi)| \tag{2.72}$$

$$\therefore\ u(a\cdot\varphi,\ \ell)=u(\varphi,\ \ell) \tag{2.73}$$

が成り立ち、よって、パターンモデル $T\varphi$ の定義式(2.27)から、式(2.35)が成り立つ。

axiom 1, (iii)の後半の成立： 式(2.36)の $\eta\equiv T\varphi$ と導入する。

$\forall\ell\in L, a_\ell(\eta)=0$ のとき、補助定理2.4を適用して、$T\eta=0$ を得、式(2.37)が成り立つ。

$\exists\ell\in L, a_\ell(\eta)\neq0$ とする。

$$\exists\ell\in L,\ |a_\ell(\eta)/\sup_{k\in L}|a_k(\varphi)||=1 \tag{2.74}$$

が成立し、よって、$u(\varphi,\ \ell)$ の定義式(2.62)から

$$\exists k\in L, u(\varphi,k)=1 \tag{2.74}$$

が成り立つ。また、系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ が1次独立であることから、

$$\forall\ell\in L, a_\ell(\eta)=u(\varphi,\ \ell) \tag{2.75}$$

が成り立っている。

$$\forall\ell\in L, a_\ell(\eta)/\sup_{k\in L}|a_k(\eta)|$$

$$=u(\varphi,\ \ell)/\sup_{k\in L}|u(\varphi,k)|$$

$$=u(\varphi,\ \ell)\quad\because\ \text{式}(2.74)$$

$$\in\{e_k^{\pm}(\ell)\ |\ 2\leqq k\leqq 2p+1\}\cup\{0\} \tag{2.76}$$

$$\therefore\ u(\eta,\ \ell)=u(\varphi,\ \ell) \tag{2.77}$$

$$\therefore\ T\eta=\eta \tag{2.78}$$

が成り立つ。

axiom 1, (iv)の成立：

$\varphi=\psi_k$ について、補助定理2.5を適用して、$T\varphi=\varphi\neq0$ がわかる。 □

3. 感性を反映した類似度関数 SM の構成

前章の定理2.2の系1によれば、処理の対象とする問題のパターンφの集合Φと、有界実数値パターン$\varphi\in\Phi$が入力されたとき、パターンモデル$T\varphi\in\Phi$を出力する式(2.1)のモデル構成作用素Tとの対［Φ, T］が、選ばれた1個人の感性を反映し、axiom 1を満たすように構成された。

同様に、本章では、パターン事例の、カテゴリ総数の系列からaxiom 2を満たす類似度関数 SMを各個人の感性に応じ、構成する方法が研究される。

尚、個人の感性を反映させない SMの構成法も研究される。

3.1 axiom 2と類似度関数 SM

"正常なパターン"(well-formed pattern)は、ある1つの**カテゴリ**$\mathfrak{C}_j$(第$j\in J$番目の類概念)のみに帰属しているものとし、このような$\mathfrak{C}_j$の集まり(有限集合)

$$\underline{\mathfrak{C}}\equiv\{\mathfrak{C}_j \mid j\in J\} \tag{3.1}$$

を想定する。$\mathfrak{C}_j$の備えている性質を典型的に備えている**代表パターン**(prototypical pattern) ω_j($\neq 0$)を1つ選定する。$\mathfrak{C}_j$は、典型(prototype)としての代表パターンω_jを中心とした緩やかなカテゴリであることを仮定したことに注意しておく。ここに、

$$\Omega\equiv\{\omega_j \mid j\in J\}\subset\Phi \tag{3.2}$$

が式(3.1)の全カテゴリ集合$\underline{\mathfrak{C}}$に対応する代表パターンの集合である。式(3.2)の系Ωは、

複素定数a_jの組$\{a_j \mid j\in J\}$について

$$\sum_{j\in J} a_j\cdot\omega_j=0 \Rightarrow \forall j\in J, a_j=0 \tag{3.3}$$

が成立しているという意味で、**1次独立**(linearly independent)でなければならない。

axiom 1を満たす式(2.1)のモデル構成作用素Tによって、式(3.2)の代表パターン集合Ωが変換されて得られる系

$$T\cdot\Omega\equiv\{T\omega \mid \omega\in\Omega\}=\{T\omega_j \mid j\in J\} \tag{3.4}$$

も1次独立であると要請する。このとき、**類似度関数**(similarity-measure function)

$$SM: \Phi\times\Omega\rightarrow\{s \mid 0\leqq s\leqq 1\} \tag{3.5}$$

を導入し、

SM(φ, ω_j)=1, 0に従って、パターン$\varphi\in\Phi$は
各々、ω_jと**確定的な類似関係、相違関係**にあり、
また、$0<$SM(φ, ω_j)<1の場合は、**曖昧な類似・
相違関係**にある (3.6)

と、SMを解釈しよう。関数SMは次のaxiom 2を満たすように構成されねばならない。

Kronecker(クロネッカー)のデルタ記号

$$\delta_{ij}=1 \text{ if } i=j, =0 \text{ if } i\neq j \tag{3.7}$$

を導入しておく。

<u>Axiom 2</u> **(類似度関数 SM の満たすべき公理)**

(i)(規格化**直交性**; orthonormality)

$\forall i, \forall j\in J, SM(\omega_i, \omega_j)=\delta_{ij}.$

(ii)(規格化条件, 正規性; probability condition, normality)

$\forall\varphi\in\Phi, \sum_{j\in J} SM(\varphi, \omega_j)=1.$

(iii)(写像Tの下での**不変性**；invariance under mapping T)

$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j)$. □

第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の出現確率$p(\mathfrak{C}_j)$を導入しておく。確率性質

$$[\forall j \in J, 0 < p(\mathfrak{C}_j) < 1] \wedge [\sum_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) = 1] \tag{3.8}$$

を満たしていなければならない。

3.2 パターン事例の、|J| 個の系列からaxiom 2を満たす類似度関数 SM を各個人の感性に応じ、構成する方法

カテゴリ番号$j \in J$を1つ任意に選定し、固定する。

パターン事例φ_tの系列

$$\varphi_{1,j}, \varphi_{2,j}, \cdots, \varphi_{t,j}, \cdots \varphi_{tmax(j)-1,j}, \varphi_{tmax(j),j} \tag{3.9}$$

を導入する。

或る一人を選び、その人によってパターンモデル$T\varphi$がパターンモデル$T\varphi_{t,j}$に感性的に似ている程度に応じて、

$$1, 2, \cdots, n \tag{3.10}$$

と、n段階の評価を行なってもらう。nについては、

$q = 1, 2, 3, \cdots$から有限のqを選定し、

$$n = 3, 5, \cdots, (2 \cdot q + 1) \tag{3.11}$$

と選ぶ。

このようにして得られた$T\varphi, T\varphi_{t,j}$間の**感性的な類似性のn段階評価**(印象度)を

$$eval(T\varphi, T\varphi_{t,j}) \in \{1, 2, \cdots, n\},$$
$$t \in \{1, 2, \cdots, tmax(j)\}, j \in J \tag{3.12}$$

と表す。evalはevaluationの略である。

$eval(T\varphi, T\varphi_{t,j})$を次の$v_{t,j}(\varphi)$へと変換する。$v_{t,j}(\varphi)$は印象度$eval(T\varphi, T\varphi_{t,j})$からその人の感性を取り出すために考えられたものである：

$$v_{t,j}(\varphi)$$
$$\equiv q^{-1} \cdot [eval(T\varphi, T\varphi_{t,j}) - (q+1)] =$$
$$\begin{cases} 1 \cdots eval(T\varphi, T\varphi_{t,j}) = 2 \cdot q + 1 \text{ のとき} \\ 1 - 1/q \cdots eval(T\varphi, T\varphi_{t,j}) = 2 \cdot q \text{ のとき} \\ \cdots \\ 1 - [(2 \cdot q + 1) - e] / q \cdots eval(T\varphi, T\varphi_{t,j}) = e \quad (2 \cdot q + 1 \geqq e \geqq q + 2) \text{ のとき} \\ \cdots \\ 1/q \cdots eval(T\varphi, T\varphi_{t,j}) = q + 2 \text{ のとき} \\ 0 \cdots eval(T\varphi, T\varphi_{t,j}) = q + 1 \text{ のとき} \\ -1/q \cdots eval(T\varphi, T\varphi_{t,j}) = q \text{ のとき} \\ \cdots \\ -1 + (e-1)/q \cdots eval(T\varphi, T\varphi_{t,j}) = e \quad (q \geqq e \geqq 1) \text{ のとき} \\ \cdots \\ -1 + 1/q \cdots eval(T\varphi, T\varphi_{t,j}) = 2 \text{ のとき} \\ -1 \cdots eval(T\varphi, T\varphi_{t,j}) = 1 \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.13}$$

□

その後、some wise adviser **SWA** に対〈$T\varphi, T\varphi_{t,j}$〉が感性的に容認できる、容認できないかを判定してもらい、すべての$j\in J$, すべての$t\in\{1,2,\cdots,tmax(j)\}$にわたり、感性的一致度

$$s_{\pm}(\varphi, \varphi_{t,j}) = \begin{cases} +v_{t,j}(\varphi) \cdots \text{対}\langle T\varphi, T\varphi_{t,j}\rangle \text{が容認されるとき} \\ 0 \qquad \cdots \text{対}\langle T\varphi, T\varphi_{t,j}\rangle \text{が容認されないとき} \end{cases} \tag{3.14}$$

を求める。、感性的に似ている、似ていないの2つの事例パターンに式(3.9)のパターン系列を2分割したことになる。これはパターン事例系列から第$j\in J$番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に関し、帰納的に $s_{\pm}(\varphi, \varphi_{t,j})$を決めたことになる。$s_{\pm}(\varphi, \varphi_{t,j})$が大きければ大きいほど、$T\varphi$ が $T\varphi_{t,j}$に感性的に似ていることになる。

SWA は、感性的一致度 $s_{\pm}(\varphi, \varphi_{t,j})$のカテゴリ番号 $j\in J$, パターン事例番号 $t\in\{1, 2, \cdots, tmax(j)\}$にわたる総和

$$\sum_{j\in J}\sum_{t=1}^{tmax(j)} s_{\pm}(\varphi, \varphi_{t,j}) \tag{3.15}$$

を最大化するような感性を持つ認識システム RECOGNITRON を構成しようとしていることに注意する。

更に、式(3.14)の感性的一致度$s_{\pm}(\varphi, \varphi_{t,j})$を不等式

$$\forall\varphi\in\Phi, \forall j\in J, 0\leqq s_{[0,1]}(\varphi, \omega_j)\leqq 1 \tag{3.16}$$

を満たすように、

$$s_{[0,1]}(\varphi, \omega_j) = 2^{-1}\cdot \left[\sum_{t=1}^{tmax(j)} s_{\pm}(\varphi, \varphi_{t,j}) \Big/ \sum_{t=1}^{tmax(j)} |\, s_{\pm}(\varphi, \varphi_{k,j})\,|\right] + 2^{-1} \tag{3.17}$$

と変換する。性質

$$(\text{i})\ \forall t\in\{1,2,\cdots,tmax(j)\}, s_{\pm}(\varphi, \varphi_{t,j})>0 \Rightarrow s_{[0,1]}(\varphi, \omega_j)=1 \tag{3.18}$$

に注目し、

(ii)パターン事例番号tの2つの集合

$$t_{+,0}(\varphi\ ; j) \equiv\{t\in\{1,2,\cdots,tmax(j)\} \mid s_{\pm}(\varphi, \varphi_{t,j})\geqq 0\} \tag{3.19}$$

$$t_{-}(\varphi\ ; j) \equiv\{t\in\{1,2,\cdots,tmax(j)\} \mid s_{\pm}(\varphi, \varphi_{t,j})< 0\} \tag{3.20}$$

を導入すると、

$$a\equiv \sum_{t\in t_{+,0}(\varphi ; j)} |\, s_{\pm}(\varphi, \varphi_{t,j})\,| \tag{3.21}$$

$$b\equiv \sum_{t\in t_{-}(\varphi ; j)} |\, s_{\pm}(\varphi, \varphi_{t,j})\,| \tag{3.22}$$

として、

$$s_{[0,1]}(\varphi, \omega_j) = 2^{-1}[(a-b)/(a+b)]+2^{-1} \tag{3.23}$$

$$(\text{iii})\ \forall t\in\{1,2,\cdots,tmax(j)\}, s_{\pm}(\varphi, \varphi_{t,j})<0 \Rightarrow s_{[0,1]}(\varphi, \omega_j)=0 \tag{3.24}$$

が成立している。

以上をすべてのカテゴリ番号$j\in J$につき行う。

最後に、式(3.5)の関数SMを

$$\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j)=$$

$$\begin{cases} s_{[0,1]}(\varphi,\ \omega_j)/\sum_{i\in J} s_{[0,1]}(\varphi,\ \omega_i) \\ \qquad \text{if } \sum_{k\in J} s_{[0,1]}(\varphi,\ \omega_k)>0 \\ p(\mathfrak{C}_j)\ \text{if } \sum_{k\in J} s_{[0,1]}(\varphi,\ \omega_k)=0 \end{cases} \tag{3.25}$$

定義する。

ここで、選ばれた個人についての感性について、次の4約束(三)~(六)を設けなければならない:

[個人感性についての**SM-約束**]

(三) $\forall j\in J,\ \forall t\in\{1,2,\cdots,\mathrm{tmax}(j)\}$,

$q+2\leqq \mathrm{eval}(T\omega_j, T\varphi_{t,j})\leqq 2q+1$

($T\omega_j$が$T\varphi_{t,j}$に似ている程度は$q+2$より小さくない) (3.26)

(四)SWAによって、すべての$j\in J$, すべての$t\in$ $\{1,2,\cdots,\mathrm{tmax}(j)\}$について対$\langle T\omega_j, T\varphi_{t,j}\rangle$が容認される.

(五) $\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\}$,

$\forall t\in\{1,2,\cdots,\mathrm{tmax}(j)\}$,

$1\leqq \mathrm{eval}(T\omega_i, T\varphi_{t,j})\leqq q$

($T\omega_i$が$T\varphi_{t,j}$に似ている程度はqより大きくない). (3.27)

(六)SWAによって、すべての$j\in J$, すべての$i\in J-\{j\}$,

すべての$t\in\{1,2,\cdots,\mathrm{tmax}(j)\}$につい対$\langle T\omega_i, T\varphi_{t,j}\rangle$が容認される. □

そうすると、次の定理3.1が成立し、選ばれた1人の個人の感性を反映した類似度関数SMが設定されたことがわかる。

[定理3.1] **(個人感性を反映した類似度関数SMの構成定理)**

式(3.25)で定義される式(3.5)の関数SMはaxiom 2を満たす。

(証明) 先ず、axiom 2, (ii)が成立することは、SMの定義式(3.25)から明らかである。

次に、axiom 2, (iii)が成立することは、

$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall j\in J,\ \forall t\in\{1,2,\cdots,\mathrm{tmax}(j)\}$,

$\mathrm{eval}(T(T\varphi), T\varphi_{t,j})=\mathrm{eval}(T\varphi, T\varphi_{t,j})$

$\because$ axiom 1, (iii)の後半 (3.28)

$\therefore\ v_{t,j}(T\varphi)=v_{t,j}(\varphi)$ (3.29)

$\therefore\ s_{\pm}(T\varphi,\ \varphi_{t,j}=s_{\pm}(\varphi,\ \varphi_{t,j})$ (3.30)

$\therefore\ s_{[0,1]}(T\varphi,\ \omega_j)=s_{[0,1]}(\varphi,\ \omega_j)$ (3.31)

$\therefore\ \mathrm{SM}(T\varphi,\ \omega_j)=\mathrm{SM}(\varphi,\ \omega_j)$ (3.32)

を得、示された。

最後に、axiom 2, (i)が成立することを示そう。

個人感性についてのSM-約束での(三), (四)から、

$\forall j\in J,\ \forall t\in\{1,2,\cdots,\mathrm{tmax}(j)\},\ s\pm(\omega_j,\ \varphi_{t,j})$

$=v_{t,j}(\omega_j)\geqq 1/q$ (3.33)

を得、よって、式(3.18)より、

$\forall j\in J,\ s_{[0,1]}(\varphi,\ \omega_j)=1$ (3.34)

が成立する。

また、個人感性についてのSM-約束での(五), (六)から、

$$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}, \forall t \in \{1, 2, \cdots, tmax(j)\},$$
$$s\pm(\omega_i, \varphi_{t,j}) = v_{t,j}(\omega_j) \leqq -(1/q) \tag{3.35}$$

を得、よって、式(3.24)より、

$$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}, s_{[0,1]}(\omega_i, \omega_j) = 0 \tag{3.36}$$

が成立する。よって、

$$\begin{aligned}&\forall j \in J, \sum_{k \in J} s_{[0,1]}(\omega_j, \omega_k)\\ &= s_{[0,1]}(\omega_j, \omega_k) + \sum_{k \in J-\{j\}} s_{[0,1]}(\omega_j, \omega_k)\\ &= 1 + 0 = 1\end{aligned} \tag{3.37}$$

がわかり、

$$\begin{aligned}&\forall j \in J, SM(\omega_j, \omega_j)\\ &= s_{[0,1]}(\omega_j, \omega_j) / \sum_{k \in J} s_{[0,1]}(\omega_j, \omega_k)\\ &= 1/1 = 1\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}&\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}, SM(\omega_i, \omega_j)\\ &= 0/1 = 1\end{aligned} \tag{3.39}$$

□

個人感性を反映させない式(3.5)の類似度関数 SM を構成するには、次の定理3.2が参考になる。その他の同様な“個人感性を反映させない式(3.5)の類似度関数SMの、今1つの構成"については、付録Aで研究されている。

式(3.44)で登場している係数 $a_{t,j}(T\varphi\ ;\ T\varphi_{s,j}, s=1, 2, \cdots, tmax(j))$ は

式(3.9)のパターン系 $\{\varphi_{t,j}\}_{t=1, 2, \cdots, tmax(j)}$ から得られるモデル系 $\{T\varphi_{t,j}\}_{t=1, 2, \cdots, tmax(j)}$ を1次独立な系と仮定して、近似誤差

$$T\varphi - \sum_{t=1}^{tmax(j)} a_{t,j} \cdot T\varphi_{t,j} \tag{3.40}$$

の自乗ノルム

$$\| T\varphi - \sum_{t=1}^{tmax(j)} a_{t,j} \cdot T\varphi_{t,j} \|^2 \tag{3.41}$$

を最小にする1次結合係数 $a_{t,j}$ のことである。

[定理3.2] **(個人感性を反映させない類似度関数 SM の構成定理)**

式(3.12)の印象度 $eval(T\varphi, T\varphi_{t,j})$ を、

$$\begin{aligned}&eval(T\varphi, T\varphi_{t,j})\\ &= |(T\varphi \| T\varphi \|, T\varphi_{t,j} \| T\varphi_{t,j} \|)|^2 \text{の}(2\cdot q+1)\\ &\quad\text{倍より小さくない最小の非負整数}\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}&eval(T\varphi, T\varphi_{t,j})\\ &= \exp(-b_{t,j}{}^{-1} \cdot \| T\varphi - T\varphi_{t,j} \|^2) \text{の}(2\cdot q+1)\\ &\quad\text{倍より小さくない最小の非負整数}\\ &\qquad\text{ここに、} b_{t,j} \text{は正定数}\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}&eval(T\varphi, T\varphi_{t,j})\\ &= |a_{t,j}(T\varphi;\ T\varphi_{s,j}, s=1, 2, \cdots, tmax(j))|^2 / \sum_{t=1}^{tmax(j)} a_{t,j}(T\varphi_{s,j}, s=1, 2, \cdots, tmax(j))|^2\\ &\text{の}(2\cdot q+1)\text{倍より小さくない最小の非負整数}\end{aligned} \tag{3.44}$$

などと設定でき、このとき、定理3.1が成り立つ。

（証明） 明らかである。 □

4. 感性を反映した大分類関数 BSC の構成

本章では、前章での式(3.14)の感性的一致度 $s\pm(\varphi, \varphi_{t,j})$ を使って、個人感性を反映し、axiom 3を満たす大分類関数 BSC をカテゴリ間の相互排除性を満たす形式で、2次ニューラルネットとして最急降下学習方程式の力学的発展を用い構成する。

更に、実数値特徴抽出写像 u を用い、個人感性を反映しないaxiom 3を満たす大分類関数 BSC をも構成する。

4.1 axiom 3と大分類関数 BSC

大分類関数(rough classifier, binary-state classifier)と呼ばれる**2値関数**

$$\mathrm{BSC}: \Phi \times J \to \{0, 1\} \tag{4.1}$$

を、次のaxiom 3を満たすものとして導入し、解釈

パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属するカテゴリ候補の1つが
第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ であるならば、
$\mathrm{BSC}(\varphi, j) = 1$ であることが望ましい (4.2)

を採用しょう。この際、注意すべきは、5.5節でのaxiom 4の CSF(φ, γ)の定義での(iii)の場合からわかるように、

$\mathrm{BSC}(\varphi, j) = 0$ であっても、パターン $\varphi \in \Phi$ の帰
属するカテゴリ候補の1つは、第 $j \in J$ 番目のカテ
ゴリ $\mathfrak{C}_j$ でないとは限らない (4.3)

としていることである。また、axiom 3 の(i)からわかるように、**カテゴリ間の相互排除性**(the mutual exclusion of the one category from the other categories)

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \mathrm{BSC}(\omega_i, j) = 0 \tag{4.4}$$

を公理として要請していない事実に注意しておこう。

<u>Axiom 3</u> **(大分類関数 BSC の満たすべき公理)**

(i)(カテゴリ抽出能力；category separability)

$\forall j \in J, \mathrm{BSC}(\omega_j, j) = 1.$

(ii)(写像 T の下での**不変性**；invariance under mapping T)

$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, \mathrm{BSC}(T\varphi, j) = \mathrm{BSC}(\varphi, j).$ □

BSC for the j-th category $\mathfrak{C}_j$ is trained to distinguish between patterns belonging to $\mathfrak{C}_j$ and its complement $\underline{\mathfrak{C}} - \{\mathfrak{C}_j\}$. In general, each category $\mathfrak{C}_j$ can have any number of exemplars. Even if there are roughly equal numbers of exemplars for each of the $|J|$ categories, $\underline{\mathfrak{C}} - \{\mathfrak{C}_j\}$ will have many more exemplars than category $\mathfrak{C}_j$.

4.2 大分類関数 BSC の構造形式と、最急降下的学習

本節では、式(4.1)の大分類関数 BSC を2次ニューラルネットと設定し、最急降下の学習方程式

を解く形で、その重み、閾値をaxiom 3と式(4.3)とを満たすようにする手法が研究される。

4.2.1 2次ニューラルネットとしてのBSC

実数値変数uの2値関数

$$\mathrm{psn}(u)=0 \ \text{if} \ u<0, =1 \ \text{if} \ u\geqq 0 \tag{4.5}$$

を導入する。式(3.14)の各感性的一致度 $s_{\pm}(\varphi, \varphi_{t,j})$ を入力し、1次実数値各重み $W(t;j)$, 2次実数値各重み $W(t1, t2;j)$, 実数値各閾値 $h(j)$ を備えた**2次ニューラルネット**からの正負現実出力 (positive or negative actual output)

$$\begin{aligned}&\mathrm{Output}(\varphi;j)\\ &\equiv\sum_{t=1}^{tmax(j)} W(t,j)\cdot s_{\pm}(\varphi,\varphi_{t,j})\\ &+\sum_{t=1}^{tmax(j)}\sum_{t2=1}^{tmax(j)} W(t1,t2,j)\cdot s_{\pm}(\varphi,\varphi_{t1,j})\cdot s_{\pm}(\varphi,\varphi_{t2,j})-h(j)\end{aligned} \tag{4.6}$$

を1, 0に2値化して得られるような式(4.1)の関数BSCとして、

$$\begin{aligned}&\mathrm{BSC}(\varphi,j)\\ &=\mathrm{psn}(\mathrm{Output}(\varphi;j))\end{aligned} \tag{4.7}$$

を定義する。

次の定理4.1は、$\varphi=\omega_j$, $\varphi=\omega_i (i\neq j)$ とした式(3.14)の $s_{\pm}(\varphi, \varphi_{t,j})$ に個人感性についてのSM-約束(三)～(六)を考慮すると、

$$\forall j\in J, s_{\pm}(\omega_j, \varphi_{t,j})=v_{t,j}(\omega_j)\geqq 1/q>0 \tag{4.8}$$

$$\wedge[\forall i\in J-\{j\}, s\pm(\omega_i, \varphi_{t,j})=v_{t,j}(\omega_i)\leqq -1/q<0] \tag{4.9}$$

が成り立つことに注意すれば、式(4.7)で定義された式(4.1)の関数BSCをaxiom 3、並びに、カテゴリ間の相互排除式(4.4)を満たすようにできることを指摘している。

[定理4.1] **(個人感性を反映した大分類関数BSCの構成定理)**

式(4.7)で定義された式(4.1)の関数BSCは、非負条件

$$\begin{aligned}&\forall j\in J,\\ &\mathrm{Output}(\omega_j;j)\\ &=\sum_{t=1}^{tmax(j)} W(t,j)\cdot v_{t,j}(\omega_j)\\ &+\sum_{t1=1}^{tmax(j)}\sum_{t2=1}^{tmax(j)} W(t1,t2,j)\cdot v_{t1,j}(\omega_j)\cdot v_{t2,j}(\omega_j)-h(j)\geqq 0\end{aligned} \tag{4.10}$$

の下で、axiom 3を満たし、然も、負条件

$$\begin{aligned}&\forall j\in J, \forall i\in J-\{j\},\\ &\mathrm{Output}(\omega_i;j)\\ &=\sum_{t=1}^{tmax(j)} W(t,j)\cdot v_{t,j}(\omega_i)\\ &+\sum_{t=1}^{tmax(j)}\sum_{t2=1}^{tmax(j)} W(t1,t2,j)\cdot v_{t1,j}(\omega_i)\cdot v_{t2,j}(\omega_i)-h(j)<0\end{aligned} \tag{4.11}$$

の下で、式(4.4)のカテゴリ間の相互排除性をも満たす。

(証明) axiom 3, (ｉ)が成立することは、

$$\begin{aligned}&\forall j\in J, \mathrm{BSC}(\omega_j,j)\\ &=\mathrm{psn}(\mathrm{Output}(\omega_j;j)) \quad \because \ \text{式}(4.7)\\ &=1 \quad \because \ \text{式}(4.10)\end{aligned} \tag{4.12}$$

を得、明らかである。

次に、axiom 3, (ii)が成立することは、式(3.30)から明らかである。

最後に、式(4.4)が成立することは、

$\forall j \in J, \forall i \in J-\{j\}$,

$BSC(\omega_i, j)$

$= psn(Output(\omega_i\,;\,j))$　∵　式(4.7)

$=0$　∵　式(4.11)　(4.13)

を得、明らかである。□

4.2.2 重み W(t ; j), W(t, s ; j), 閾値 h(j) の最急降下的学習

先ず、式(2.9)の各訓練パターン $\varphi=\varphi_t$ について次の2性質(イ),(ロ)を満たす**理想出力**(desired output) $d(j)$ の系

$d(j),\ j \in J$　(4.14)

を導入する：

式(2.9)の各訓練パターン $\varphi=\varphi_t$ について

(イ)SWA により対 $\langle T\varphi, T\varphi_t, j\rangle$ が容認され、選ばれているその個人によって、

$eval(T\varphi, T\omega_j) \geqq q+2$　(4.15)

と評価され、$T\varphi$ が $T\omega_j$ に感性的に似ていると判断されるとき、

$Output(\varphi\,;\,j)=d(j)>0$　(4.16)

(ロ)SWA により対 $\langle T\varphi, T\varphi_{t,j}\rangle$ が容認され、選ばれているその個人によって、

$eval(T\varphi, T\omega_j) \leqq q$　(4.17)

と評価され、$T\varphi$ が $T\omega_j$ に感性的に似ていないと判断されるとき、

$Output(\varphi\,;\,j)=-d(j)<0$　(4.18)

□

ここで、式(4.6)の $Output(\varphi\,;\,i)$ に注意して、**適応誤差の自乗**

$E \equiv Error$

$\equiv Error(W(t,j),\ W(t1,t2,j),\ h(j)\ ;\ t1,t2=1\sim tmax(j),\ j\in J)$

$=2^{-1}\cdot\sum_{i\in J}[Output(\varphi\,;\,i)-d(i)]^2$　(4.19)

を極小とする $W(t,j)$, $W(t1,t2,j)$, $h(j)$ を再急降下法に従って、以下で決定してみよう。

Ⅰ. W(t ; j)の学習

式(2.9)の、パターン $\varphi_{t'}$ の系列を入力し、**逐次決定手法**(successive-decision method)によって、各重み $W(t,j)$ を決定してみよう。

各重み $W(t,j)$ を時刻 t' の関数と見て、$W(t'\,;\,t,j)$ と書こう。2変数 t', j の正実数値関数としての各時定数 $\tau_{1,j}(t')$ を適当に選定し、微分方程式系(**最急降下学習方程式系**)

$dW(t'\,;\,t,j)/dt'$

$=-\tau_{1,j}(t')\cdot\partial E/\partial W(t'\,;\,t,j)$

$t=1\sim tmax(j),\ j\in J$

$0\leqq t'<\infty$　(4.20)

を用意しよう。

各偏微分係数 $\partial E/\partial W(t'\,;\,t,j)$ は

$\partial E/\partial W(t'\,;\,t,j)$

$=Output(\varphi\,;\,j)\cdot s_{\pm}(\varphi, \varphi_{t,j})$

∵　式(4.6)　(4.21)

と計算される。

このとき、**誤差エネルギー** E の不等式

$$dE/dt' = \sum_{j\in J}\sum_{t=1}^{tmax}[\partial E/\partial W(t';t,j)] \cdot dW(t';t,j)/dt' = -\sum_{j\in J}\sum_{t=1}^{tmax}\tau_{1,j}(t')\cdot[\partial E/\partial W(t';t,j)]^2 \leqq 0 \tag{4.22}$$

を得て、誤差 E は微分方程式系(4.20)の解曲線の上で決して増加しないことが判明するから、この微分方程式系(4.20)を解くこと、つまり、十分時間時刻 t′ が経過したときの W(t′; t, j) を、

$$W(t';t,j)=\lim_{t'\to\infty}W(t';t,j),\quad t=1\sim tmax(j),\ j\in J \tag{4.23}$$

のごとく、求めればよいことになる。具体的には、式(2.9)の、パターン $\varphi_{t'}$ の系列を入力することを考え、時刻 t′ では、$\varphi=\varphi_{t'}$ とし、

初期条件

$$W(t';t,j)\,|_{t=0}=[tmax(j)+|J|+1]^{-1},\quad t=1\sim tmax(j),\ j\in J \tag{4.24}$$

の下で、微分方程式系(4.20)の**離散時刻近似表現**

$$W(t'+\triangle t';t,j)=W(t';t,j)+\triangle W(t';t,j) \tag{4.25}$$

を使えばよい。ここに、更新分 △W(t′; t, j) は

$$\triangle W(t';t,j) = -\triangle t\cdot\tau_{1,j}(t')\cdot\partial E/\partial W(t';t,j),\quad t=1\sim tmax(j),\ j\in J \tag{4.26}$$

と与えられ、式(4.23)のごとく、各 W(t′; t; j) を求めればよい。時刻変数 t の増分 △t>0 が十分小に選ばれており、各時定数 $\tau_{1,j}(t')>0$ が適切に選ばれておれば、この適応的決定手法は有効なものとなる。

以上が、**最急降下法**(method of steepest descent)**に基づく学習法**である。

Ⅱ. W(t1, t2, i) の学習

式(4.19)の E を重み W(t1, t2; j) で偏微分しよう。式(4.6)の Output(φ; j) に注意すれば、

$$\partial E/\partial W(t1,t2,j) = Output(\varphi;j)\cdot s_{\pm}(\varphi,\varphi_{t1,j})\cdot s_{\pm}(\varphi,\varphi_{t2,j}) \tag{4.27}$$

と求まる。

式(4.26)と同様に、時刻変数 t′ の正値関数 $\tau_{2,t1,t2,j}(t')>0$ を導入して、更新分 △W(t′; t1, t2, j) を

$$\triangle W(t';t1,t2,j) = -\triangle t\cdot\tau_{2,t1,t2,j}(t')\cdot\partial E/\partial W(t';t1,t2,j),\quad t1,t2=1\sim tmax(j),\ j\in J \tag{4.28}$$

と決定し、初期条件

$$W(t';t1,t2,j)\,|_{t=0}=[2\cdot tmax(j)+|J|+1]^{-1},\quad t1,t2=1\sim tmax(j),\ j\in J \tag{4.29}$$

の下で、微分方程式系

$$dW(t';t1,t2,j)/dt' = -\tau_{2,t1,t2,j}(t')\cdot\partial E/\partial W(t';t1,t2,j)$$

$$t1, t2 = 1 \sim tmax(j),\ j \in J,\quad 0 \leqq t' < \infty \tag{4.30}$$

の離散時刻近似表現

$$W(t'; t1, t2, j) = W(t'; t1, t2, j) + \triangle W(t'; t1, t2, j),\ t1, t2 = 1 \sim tmax(j),\ j \in J \tag{4.31}$$

に従って更新していけば、式(4.19)の適応誤差の自乗エネルギーEを極小化するようなW(t1, t2, j)が

$$W(t1, t2, j) = \lim_{t' \to \infty} W(t'; t1, t2, j) \tag{4.32}$$

と得られる。

Ⅲ. h(j)の学習

式(4.19)のEを閾値h(j)で偏微分しよう。式(4.6)のOutput(φ ; j)に注意すれば、

閾値h(j)

$$\partial E/\partial h(j) = \mathrm{Output}(\varphi; j) \cdot (-1) \tag{4.33}$$

と求まる。

式(4.26)と同様に、時刻変数t´の正値関数$\tau_{3,j}(t') > 0$を導入して、更新分$\triangle h(t'; j)$を

$$\triangle h(t'; j) = -\triangle t \cdot \tau_{3,j}(t') \cdot \partial E/\partial h(t'; j),\quad j \in J \tag{4.34}$$

と決定し、初期条件

$$h(t'; j)\,|_{t=0} = [\,|J| + 1]^{-1},\ j \in J \tag{4.35}$$

の下で、微分方程式系

$$dh(t'; j)/dt' = -\tau_{3,j}(t') \cdot \partial E/\partial h(t'; j),\ j \in J,\quad 0 \leqq t' < \infty \tag{4.36}$$

の離散時刻近似表現

$$h(t'; j) = h(t'; j) + \triangle h(t'; j),\quad j \in J \tag{4.37}$$

に従って更新していけば、式(4.19)の適応誤差の自乗エネルギーEを極小化するようなh(j)が

$$h(j) = \lim_{t' \to \infty} h(t'; j) \tag{4.38}$$

と得られる。

2式(4.16), (4.17)の意味するところにより、各々、2式(4.10), (4.11)が満たされるように、3式(4.23), (4.32), (4.38)の各W(t, j), 各W(t1, t2, j), 各h(j)が最終的に求まるためには、2式(4.8),(4.9)からわかるように、式(2.9)の訓練パターン$\varphi_{t'}$の系列内に生起確率$p(\mathfrak{C}_i)$, $p(\mathfrak{C}_j)$に各々、比例した各カテゴリ$\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_j$の代表パターンω_j, $\omega_i (i \neq j)$が含まれていることが必要であることがわかる。

axiom 3を満たす式(4.1)の大分類関数BSCを、2次ニューラルネットを用い、2式(4.6), (4.7)の形式で最急降下的学習方程式で上述のごとく決定する場面において、式(3.14)の感性的一致度$s_\pm(\varphi_{t'}, \varphi_{t,j})$を入力したことは、理想出力d(j)の系の設定(イ), (ロ)からわかるように、式(2.9)の

各訓練パターン $\varphi_{t'}$ (t＝1～tmax)について、

SWAが、感性的一致度 $s_{\pm}(C, Ct,)$のカテゴリ番号 j∈J, パターン事例番号 t∈{1, 2, …, tmax(j)}にわたる総和

$$\sum_{j\in J}\sum_{t=1}^{tmax(j)} s_{\pm}(\varphi_{t'}, \varphi_{t,j}) \tag{4.39}$$

を最大化するような感性を持つ認識システム RECOGNITRON を構成しようとしていることに符号する。

4.3 個人感性を反映させない大分類関数 BSC の構成

パターン $\varphi\in\Phi$から抽出された第 $\ell\in L$番目の特徴量を $u(\varphi, \ell)\in R$(実数全体の集合)としよう。そうすれば、特徴抽出写像

$$u : \Phi\times L\rightarrow R(\text{実数全体の集合}) \tag{4.40}$$

が導入される。

次の定理4.2は、式(4.40)の特徴抽出写像 u を使って、個人感性を反映させない式(4.1)の大分類関数 BSC がaxiom 3を満たすごとく、構成できることを明らかにしている。

［定理4.2］**(個人感性を反映させない大分類関数 BSC の構成定理)**

パターン　から抽出された実数値特徴量の系

$$\underline{u}(T\varphi)\equiv\{u(T\varphi, \ell)\mid \ell\in L\} \tag{4.41}$$

が入力された2次ニューラルネットからの出力

$$\begin{aligned}&FOutput(\underline{u}(T\varphi), j)\\ &\equiv\sum_{\ell\in L}W(t, \ell)\cdot u(T\varphi, \ell)\\ &+\sum_{\ell 1\in L}\sum_{\ell 2\in L}W(\ell 1, \ell 2, j)\cdot u(T\varphi, \ell 1)\cdot u(T\varphi, \ell 2))-h(j)\end{aligned} \tag{4.42}$$

の2値化として

$$BSC(\varphi, j)\equiv psn(FOutput(\underline{u}(T\varphi), j)) \tag{4.43}$$

と定義された式(4.1)の関数 BSC は、非負条件

$$\begin{aligned}&\forall j\in J,\\ &FOutput(\omega_j ; j)\\ &=\sum_{\ell\in L}W(t, \ell)\cdot u(T\omega_j, \ell)\\ &+\sum_{\ell 1\in L}\sum_{\ell 2\in L}W(\ell 1, \ell 2, j)\cdot u(T\omega_j, \ell 1)\cdot u(T\omega_j, \ell 2))-h(j)\\ &\geqq 0\end{aligned} \tag{4.44}$$

の下で、axiom 3を満たし、然も、負条件

$$\begin{aligned}&\forall j\in J, \forall i\in J-\{j\},\\ &FOutput(\omega_i ; j)\\ &=\sum_{\ell\in L}W(t, \ell)\cdot u(T\omega_i, \ell)\\ &+\sum_{\ell 1\in L}\sum_{\ell 2\in L}W(\ell 1, \ell 2, j)\cdot u(T\omega_i, \ell 1)\\ &\cdot u(T\omega_i, \ell 2))-h(j)\\ &<0\end{aligned} \tag{4.45}$$

の下で、式(4.4)のカテゴリ間の相互排除性をも満たす。

(証明)　axiom 3, (i)が成立することは、

$\forall j\in J, BSC(\omega_j, j)$

$= \mathrm{psn}(\mathrm{FOutput}(\omega_j\ ;\ j))$ ∵ 式(4.43)

$= 1$ ∵ 式(4.44) (4.46)

を得、明らかである。

次に、axiom 3, (ii)が成立することは、axiom 1, (iii)の後半 $T \cdot T = T$ から明らかである。

最後に、式(4.4)が成立することは、

$\forall j \in J,\ \forall i \in J - \{j\},$

$\mathrm{BSC}(\omega_i, j)$

$= \mathrm{psn}(\mathrm{FOutput}(\omega_i\ ;\ j))$ ∵ 式(4.43)

$= 0$ ∵ 式(4.45) (4.47)

を得、明らかである。 □

2次ニューラルネットからの出力式(4.42)の重み $W(\ell t, j)$, $W(\ell 1, \ell 2, j)$、閾値 $h(j)$ の学習法は4.2.2項と同様に論じることができる。

5. 認識システム RECOGNITRON による感性情報処理

本章では、万能性認識システム RECOGNITRON [B3], [B4] に、注目している個人の感性を反映させ、パターン想起・パターン認識を実行させるのに必要な基本的設定が研究される。

5.1 axiom 1を満たすパターン集合 Φ と、モデル構成作用素 T との対 [Φ, T] の選定

定理2.2の系1の対 [Φ, T] を採用する。

5.2 axiom 2を満たす類似度関数 SM の選定

定理3.1での類似度関数 SM を採用する。

5.3 axiom 3を満たす大分類関数 BSC の選定

定理4.1での大分類関数 BSC を採用する。

5.4 カテゴリ帰属知識 ⟨φ, γ⟩ とカテゴリ帰属知識空間 ⟨Φ, 2^J⟩

2式(3.1), (3.2)での全カテゴリ番号集合(a set of category-numbers) J のすべての部分集合の成す集合(ベキ集合 ; power set)

$2^J \equiv \{K \mid K \subseteq J\}$ (5.1)

を導入する。

認識システム RECOGNITRON がパターン $\varphi \in \Phi$ に対し

「パターン $\varphi \in \Phi$ が、式(3.1)の全カテゴリ集合

$\underline{\mathfrak{C}}$ の部分集合式

$\underline{\mathfrak{C}}(\gamma) \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid j \in \gamma \in 2^J\}$ (5.2)

内の何れか1つのカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属する可能性がある」 (5.3)

という"パターン $\varphi \in \Phi$ の**カテゴリ帰属知識**(categorical membership-knowledge)"を、持っているとする。この知識を、

$$\langle \varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle \tag{5.4}$$

と表す。候補カテゴリの集合 $\mathfrak{C}(\gamma)$ のすべてのカテゴリ番号集合 $\gamma \in 2^J$ は、要素(カテゴリ番号)を並べて得られるリスト(list)として、取り扱われている。その一般例は、k 個の要素 $j_1, j_2, \cdots, j_k \in J$ からなるリストであり、

$$\gamma \equiv [j_1, j_2, \cdots, j_k] \in 2^J \tag{5.5}$$

と表され、式(5.5)のこのリスト γ は、非一致条件

$$p \neq q \Rightarrow j_p \neq j_q \tag{5.6}$$

が成り立っている場合の集合 $\{j_1, j_2, \cdots, j_k\}$ と同一視することがある。特に、要素を1つも持たないリスト [ ] を空集合 ϕ で表すことがある。

$$\langle \Phi, 2^J \rangle \equiv \{\langle \varphi, \gamma \rangle \mid \varphi \in \Phi, \gamma \in 2^J\} \tag{5.7}$$

は、カテゴリ帰属知識空間(categorical membership-knowledge space)と呼ばれ、すべてのパターン $\varphi \in \Phi$ と、すべてのカテゴリ番号集合 $\gamma \in 2^J$ との成す順序のついた**対リスト**(an ordered pair list) $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の集合である。

5.5 カテゴリ選択関数 CSF の構造形式

カテゴリ選択関数(category-selection function)と呼ばれる写像

$$\mathrm{CSF}: \Phi \times 2^J \to 2^J \tag{5.8}$$

は、**包含関係**(inclusion relation)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \gamma \in 2^J, \mathrm{CSF}(\varphi, \gamma) \subseteq \gamma \subseteq J \in 2^J \tag{5.9}$$

を満たし、然も、次のaxiom 4を満たすものとして、設定されるとしよう。

<u>Axiom 4</u>(カテゴリ選択関数 CSF の満たすべき公理)

(i) $\varphi = 0 \vee \gamma = \phi$ の場合

如何なるカテゴリ番号 $k \in \gamma$ も $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリ番号ではない。

(ii) $\mathrm{SM}(\varphi, \omega_k) = 0 \wedge \mathrm{BSC}(\varphi, k) = 0$ の場合

カテゴリ番号 $k \in \gamma$ は $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリ番号ではない。

(iii) $\sum_{k \in \gamma} \mathrm{BSC}(\varphi, k) = 0$ の場合

$\mathrm{BSC}(\varphi, k) = 0$ であっても、$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_k) > 0$ であるようなカテゴリ番号 $k \in \gamma$ は $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリ番号である。

(iv) $\sum_{k \in \gamma} \mathrm{BSC}(\varphi, k) > 0$ の場合

(iv-1) $\mathrm{BSC}(\varphi, k) = 0$ なるカテゴリ番号 $k \in \gamma$ は、$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_k) > 0$ であっても、$\langle \varphi, \gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリ番号ではない。

(iv-2) $\mathrm{SM}(\varphi, \omega_k) = 0$ なるカテゴリ番号 $k \in \gamma$ は、$\mathrm{BSC}(\varphi, k) = 1$ であっても、$\langle \varphi, \gamma \rangle$ の有効な候補カテゴリ番号ではない。 □

次の定理5.1では、式(5.8)の写像 CSF は、axiom 2を満たす式(3.5)の類似度関数 SM, axiom 3を満たす式(4.1)の大分類関数 BSC を使用する形式で、

その定義域が $\Phi \times 2^J$ であり、その値域が、パターン $\varphi \in \Phi$ の
カテゴリ帰属知識 $\langle \varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$ の "有効な" 候補カテゴリ
の番号リスト(a list of effective category-numbers) $\mathrm{CSF}(\varphi, \gamma) \in 2^J$
の集合である (5.10)

であるように、構成されている。

［定理5.1］**（カテゴリ選択関数 CSF の構成定理）**

次のように定義される式(5.8)の1つの写像 CSF は式(5.9)と上述のaxiom 4とを満たす：

（i）$\varphi=0 \vee \gamma=\phi$ の場合

$$\mathrm{CSF}(\varphi, \gamma)=\phi. \tag{5.11}$$

（ii）$\varphi\neq 0 \wedge \gamma\neq\phi$ の場合

$$\mathrm{CSF}(\varphi, \gamma)=$$

$$\begin{cases} \{k\in\gamma \mid \mathrm{SM}(\varphi, \omega_k)>0\} \\ \qquad \text{if } \sum_{k\in\gamma} \mathrm{BSC}(\varphi, k)=0 & (5.12) \\ \{k\in\gamma \mid \mathrm{SM}(\varphi, \omega_k)>0 \wedge \mathrm{BSC}(\varphi, k)=1\} \\ \qquad \text{if } \sum_{k\in\gamma} \mathrm{BSC}(\varphi, k)>0. & (5.13) \end{cases}$$

5.6　構造受精作用素 A(μ) の形式

更新作用素(updating operator)、或いは、**構造受精作用素**(structural-fertilization operator)と呼ばれる写像

$$\mathrm{A}(\mu): \Phi\rightarrow\Phi,\ \text{ここに、}\ \mu\in 2^J \tag{5.14}$$

は、3節5.1～5.3で用意された3構成要素

①式(2.1)のモデル構成作用素 T

② 式(3.5)の類似度関数 SM

③式(4.1)の大分類関数 BSC

を使用する形式で、次のように定義される：

（i）$\varphi=0 \vee \mu=\phi$ の場合

$$\mathrm{A}(\mu)\varphi\equiv 0 \tag{5.15}$$

（ii）$\varphi\neq 0 \wedge \mu\neq\phi$ の場合

$$\mathrm{A}(\mu)\varphi\equiv$$

$$\begin{cases} \sum_{k\in\mu} \mathrm{SM}(\varphi, \omega_k)\cdot \mathrm{T}\omega_k \\ \qquad \text{if } \sum_{k\in\mu} \mathrm{BSC}(\varphi, k)=0 & (5.16) \\ \sum_{k\in\mu} \mathrm{SM}(\varphi, \omega_k)\cdot\mathrm{BSC}(\varphi, k)\cdot \mathrm{T}\omega_k \\ \qquad \text{if } \sum_{k\in\mu} \mathrm{BSC}(\varphi, k)>0 & (5.17) \end{cases}$$

□

次に、パターン φ に作用素 $\mathrm{A}(\mu)$ をさせて得られる元 $\mathrm{A}(\mu)\varphi$ は、式(5.8)のカテゴリ選択関数 CSF を使用すれば、次の定理5.2のように簡単に表される。

［定理5.2］**（構造受精作用素 A(μ) の表現定理）**

$$\forall\varphi\in\Phi, \forall\mu\in 2^J,$$

$$\mathrm{A}(\mu)\varphi=\sum_{k\in \mathrm{CSF}(\varphi,\mu)} \mathrm{SM}(\varphi, \omega_k)\cdot \mathrm{T}\omega_k.$$

□

5.7　カテゴリ帰属知識間の等形式関係 $=_\triangle$ と等構造関係 =

カテゴリ帰属知識間の、1つの2元関係(a binary relation on $\langle \Phi, 2^J\rangle$)としての、等形式関係(equi-form relation) $=_\triangle$ を、次の定義5.1で導入しよう。

［定義5.1］**（カテゴリ帰属知識間の等形式関係）**

$\langle \varphi, \gamma \rangle =_{\triangle} \langle \psi, \lambda \rangle$（恒等的に等しい）

$\Leftrightarrow \varphi = \psi \wedge \gamma = \lambda .$ □

次に、今1つの2元関係としての等構造関係(an equi-structure relation) $=$ を次の定義5.2で導入する。

［定義5.2］**（カテゴリ帰属知識間の等構造関係）**

$$\langle \varphi, \gamma \rangle = \langle \psi, \lambda \rangle \tag{5.18}$$

$$\Leftrightarrow \text{【}[\mathrm{CSF}(\varphi, \gamma) = \mathrm{CSF}(\psi, \lambda)] \tag{5.19}$$

$$\wedge$$

$$[\forall \mathrm{j} \in \mathrm{CSF}(\varphi, \gamma) \cap \mathrm{CSF}(\psi, \lambda),$$

$$\mathrm{SM}(\varphi, \omega_{\mathrm{j}}) = \mathrm{SM}(\psi, \omega_{\mathrm{j}})]\text{】}. \tag{5.20}$$

□

注意すべきことは、

$$\langle \varphi, \gamma \rangle =_{\triangle} \langle \psi, \lambda \rangle \Rightarrow \langle \varphi, \gamma \rangle = \langle \psi, \lambda \rangle \tag{5.21}$$

が成り立つが、

逆命題「$\langle \varphi, \gamma \rangle = \langle \psi, \lambda \rangle \Rightarrow \langle \varphi, \gamma \rangle = \triangle \langle \psi, \lambda \rangle$」

は必ずしも成り立たない (5.22)

という意味で、定義5.2が、定義5.1の等形式関係 $=_{\triangle}$ より弱い等構造関係 $=$ を設定していることである。形式が同じであれば、構造も同じであるが、構造が同じだからいって、形式が同じとは限らないカテゴリ帰属知識 $\langle \varphi, \gamma \rangle$ が存在する事実は、文献 ｛B4］ の付録9, 3定理A 9.1～A 9.3から明らかである。

5.8 カテゴリ帰属知識 $\langle \varphi, \gamma \rangle$ のポテンシャルエネルギー $\mathrm{E}(\varphi, \gamma)$

カテゴリ帰属知識 $\langle \varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^{\mathrm{J}} \rangle$ がどの程度複雑な構造を備えているかの1つの指標として、そのSSポテンシャルエネルギー(potential energy) $\mathrm{E}(\varphi, \gamma)$ が、次の定義5.3の如く、定義される。

［定義5.3］**（カテゴリ帰属知識 $\langle \varphi, \gamma \rangle$ のポテンシャルエネルギー $\mathrm{E}(\varphi, \gamma)$）**

カテゴリ帰属知識 $\langle \varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^{\mathrm{J}} \rangle$ に付随する**ポテンシャルエネルギー $\mathrm{E}(\varphi, \gamma)$**）は次の様に定義される：

（i）$\varphi = 0 \vee \gamma = \phi$ の場合

$$\mathrm{E}(\varphi, \gamma) \equiv 0 \tag{5.23}$$

（ii）$\varphi \neq 0 \wedge \gamma \neq \phi$ の場合

$$\mathrm{E}(\varphi, \gamma) \equiv |\gamma| - \sum_{\mathrm{j} \in \gamma} \mathrm{SM}(\varphi, \omega_{\mathrm{j}}) \tag{5.24}$$

ここに、$|\gamma|$ は γ 内の要素の総数の意であって、$|\gamma| \geqq 1$ (5.25)

□

ポテンシャルエネルギー $\mathrm{E}(\varphi, \gamma)$ と、パターン $\varphi \in \Phi$ の認識過程とのつながりについて次の意味がある：候補カテゴリの、式(5.2)の集合 $\underline{\mathfrak{C}}(\gamma)$ にわたる類似度 $\mathrm{SM}(\varphi, \omega_{\mathrm{j}})$ の総和

$$\sum_{\mathrm{j} \in \gamma} \mathrm{SM}(\varphi, \omega_{\mathrm{j}}) \tag{5.26}$$

が増加し、候補カテゴリ数 $|\gamma|$ が減少すれば、$\mathrm{E}(\varphi, \gamma)$ が減少するから、**不動点探索形構造受精に関する多段階変換帰納推論を使った連想形パターン認識過程**がどの程度、収束しているかの指標が $\mathrm{E}(\langle \varphi, \gamma \rangle)$ である。 □

帰属知識 $\langle \varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^{\mathrm{J}} \rangle$ の変換像である今1つの、3式(5.29), (5.30), (5.31)のカテゴリ帰

属知識 $\langle \psi, \lambda \rangle$ について、エネルギー不等式

$$E(\varphi, \gamma) \geqq E(\psi, \lambda) \tag{5.27}$$

が通常、成立するという意味で、式(5.29)に登場する式(5.28)のカテゴリ帰属知識変換 $TA(\mu)T$ は、帰属知識 $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の精密化作用素(refinement operator)とも称されることがある。

5.9 カテゴリ帰属知識空間 $\langle \Phi, 2^J \rangle$ 上の構造受精変換 $TA(\mu)T$

3式(5.15)～(5.17)で定義される式(5.14)の構造受精作用素 $A(\mu)$ の両側にaxiom 1を満たすモデル構成作用素 T を配置して得られる写像 $TA(\mu)T$ の定義域、値域は共にパターン集合 Φ であるが、この定義域、値域 Φ をカテゴリ帰属知識空間 $\langle \Phi, 2^J \rangle$ に拡張する。式(5.4)のカテゴリ帰属知識 $\langle \varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$ を変換するために、写像 $TA(\mu)T$ を利用するためである。それは次のように述べられる。

構造受精変換(structural-fertilization transformation)と呼ばれる写像

$$TA(\mu)T: \langle \Phi, 2^J \rangle \rightarrow \langle \Phi, 2^J \rangle, \text{ where } \mu \in 2^J \tag{5.28}$$

を用いて、カテゴリ帰属知識 $\langle \varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2_J \rangle$ を変換して得られるカテゴリ帰属知識 $\langle \psi, \lambda \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$ は、

$$\begin{aligned} \langle \psi, \lambda \rangle &=_{\triangle} TA(\mu)T\langle \varphi, \gamma \rangle \\ &=_{\triangle} \langle TA(\mu \cap \gamma)T\varphi, CSF(\varphi, \mu \cap \gamma) \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle \end{aligned} \tag{5.29}$$

where

$$\psi \equiv TA(\mu \cap \gamma)T\varphi \tag{5.30}$$

$$\lambda \equiv CSF(\varphi, \mu \cap \gamma) \tag{5.31}$$

と定義される。このとき、

記憶状態 $\langle \psi, \lambda \rangle$ は、記憶状態 $\langle \varphi, \gamma \rangle$ において、
operator $A(\mu)$ を適用した後の記憶状態である　(5.32)

と、解釈する。

5.10 2元関係 $\leqq_{\triangle}$ と、直交条件を満たす類似度関数 SM の採用条件下での半順序関係 $\leqq_{\triangle}{}^*$, 同値関係 $\sim_{\triangle}{}^*$

次の定義5.4は、知識 $\langle \varphi, \gamma \rangle$ が知識 $\langle \psi, \lambda \rangle$ として、上手な知覚と記憶の働きで再生された状況を表していると、考えられる。

[定義5.4] **(2元関係 $\leqq_{\triangle}$ の定義)**

$$\begin{aligned} &\langle \varphi, \gamma \rangle \leqq_{\triangle} \langle \psi, \lambda \rangle \\ &\Leftrightarrow 【E(\varphi, \gamma) \geqq E(\psi, \lambda) \\ &\quad \wedge [\{\langle \varphi, \gamma \rangle =_{\triangle} \langle \psi, \lambda \rangle\} \\ &\qquad \vee \{\exists \mu \in 2^J, TA(\mu)T\langle \varphi, \gamma \rangle =_{\triangle} \langle \psi, \lambda \rangle\} \\ &\quad] \\ &】 \end{aligned}$$

□

3定義式(5.23))～(5.25)に、axiom 1, (i)の後半とaxiom 2, (iii)とを考慮すると、

任意の $\langle \varphi, \gamma \rangle$ について、$E(\varphi, \gamma) = E(T\varphi, \gamma)$ は成立する　(5.33)

けれども、定義5.1からわかるように、

$\langle \varphi, \gamma \rangle =_{\triangle} \langle T\varphi, \gamma \rangle$ は一般には成立しない　(5.34)

し、然も、

$\exists \mu \in 2^J, \mathrm{TA}(\mu)\, \mathrm{T}\langle \varphi, \gamma \rangle =_{\triangle} \langle \mathrm{T}\varphi, \gamma \rangle$ は一般には成立しない (5.35)

ので、

$\langle \varphi, \gamma \rangle \leqq_{\triangle} \langle \mathrm{T}\varphi, \gamma \rangle$ は一般には成立しない (5.36)

ことに、注意しておかねばならない。

この2元関係 $\langle \varphi, \gamma \rangle \leqq_{\triangle} \langle \psi, \lambda \rangle$ に対し、次の4解釈(一)～(四)が可能であるとしよう：

(一) $\langle \varphi, \gamma \rangle$ は $\langle \psi, \lambda \rangle$ の近似である。

(二) $\langle \varphi, \gamma \rangle$ は $\langle \psi, \lambda \rangle$ に要約される。

(三) $\langle \psi, \lambda \rangle$ は $\langle \varphi, \gamma \rangle$ の情報を凝縮したものである。

(四) $\langle \psi, \lambda \rangle$ は $\langle \varphi, \gamma \rangle$ に変形されていたものである。 □

2元関係 $\leqq_{\triangle}$ の有限な、式(3.15)の**鎖**(chain)を用い、次の定義3.2のように、定義3.1の2元関係 $\leqq_{\triangle}$ の拡張として、2元関係 $\leqq_{\triangle}{}^*$ を定義する。

[定義5.5] **(2元関係 $\leqq_{\triangle}{}^*$)**

$\langle \varphi, \gamma \rangle \leqq_{\triangle}{}^* \langle \psi, \lambda \rangle$ (5.37)

$\Leftrightarrow$【$\langle \varphi, \gamma \rangle \leqq_{\triangle} \langle \psi, \lambda \rangle$ (5.38)

$\vee [\ \exists \mathrm{n} \in \{0, 1, 2, \cdots\},$

$\exists \langle \varphi_1, \gamma_1 \rangle, \exists \langle \varphi_2, \gamma_2 \rangle, \cdots, \exists \langle \varphi_{n-1}, \gamma_{n-1} \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle,$

$\langle \varphi_0, \gamma_0 \rangle$

$\leqq_{\triangle} \langle \varphi_1, \gamma_1 \rangle \leqq_{\triangle} \langle \varphi_2, \gamma_2 \rangle \leqq_{\triangle} \cdots \leqq_{\triangle} \langle \varphi_{n-1}, \gamma_{n-1} \rangle$

$\leqq_{\triangle} \langle \varphi_n, \gamma_n \rangle$ (5.39)

where $\langle \varphi_0, \gamma_0 \rangle =_{\triangle} \langle \varphi, \gamma \rangle \wedge \langle \varphi_n, \gamma_n \rangle =_{\triangle} \langle \psi, \lambda \rangle$

]

】 (5.40)

□

ここで、axiom 2を満たす式(3.5)の類似度関数SMの直交条件を導入しておかねばならない。

【類似度関数SMに関するSM-直交条件】

任意の $\mu \in 2^J$ についての、実定数 a_i の組 $\{a_i \mid i \in \mu\}$ が、正条件

$\forall k \in \mu, a_k > 0$ (5.41)

を満たすとしよう。このとき、

$\forall j \in J - \mu, \mathrm{SM}(\sum_{i \in \mu} a_i \cdot \mathrm{T}\omega_i, \omega_j) = 0$ (5.42)

が成立しているような式(3.5)の類似度関数SMは直交性類似度関数(直交条件を満たす類似度関数)であるという。 □

以下の定理5.3によれば、定義5.4の2元関係 $\leqq_{\triangle}$ は半順序関係(partial ordering)ではないが、定義5.5の2元関係 $\leqq_{\triangle}{}^*$ は実は、半順序関係である。つまり、次の定理5.3が成り立つ。この事実が $\leqq_{\triangle}{}^*$ を導入する理由である。

[定理5.3] **(2元関係 $\leqq_{\triangle}{}^*$ の半順序定理)**

上述の直交条件を満たしている類似度関数SMを採用していれば(SM直交仮定)、カテゴリ知識空間 $\langle \Phi, 2^J \rangle$ 上の2元関係 $\leqq_{\triangle}{}^*$ は、次の**3性質**(i), (ii), (iii)を満たし、**半順序関係である：**

(i)(反射律；reflexive law) $\langle \varphi, \gamma \rangle \leqq_{\triangle}{}^* \langle \varphi, \gamma \rangle$.

(ii)(反対称律；antisymmetric law)

$\langle \varphi, \gamma \rangle \leqq_{\triangle}{}^{*} \langle \psi, \lambda \rangle$ かつ $\langle \psi, \lambda \rangle \leqq_{\triangle}{}^{*} \langle \varphi, \gamma \rangle$

ならば、$E(\varphi, \gamma) = E(\psi, \lambda) \wedge \langle \varphi, \gamma \rangle =_{\triangle} \langle \psi, \lambda \rangle$.

(iii)(推移律；transitive law)

$\langle \varphi, \gamma \rangle \leqq_{\triangle}{}^{*} \langle \eta, \mu \rangle$ かつ $\langle \eta, \mu \rangle \leqq_{\triangle}{}^{*} \langle \psi, \lambda \rangle$

ならば、$\langle \varphi, \gamma \rangle \leqq_{\triangle}{}^{*} \langle \psi, \lambda \rangle$. □

次に、定義5.5の半順序関係 $\leqq_{\triangle}{}^{*}$ を含む最小の同値関係として、2元関係 $\sim_{\triangle}{}^{*}$ がカテゴリ帰属知識空間 $\langle \Phi, 2^{J} \rangle$ 上に導入できることが指摘される。

先ず、次の定義5.6で、構造受精変換による多段階変換先が同一のカテゴリ帰属知識になることで定義される2元関係 $\sim_{\triangle}{}^{*}$ を定義する。

［定義5.6］**(2元関係 $\sim_{\triangle}{}^{*}$ の定義)**

2つの知識 $\langle \varphi, \gamma \rangle, \langle \psi, \lambda \rangle \in \langle \Phi, 2^{J} \rangle$ について、2元関係 $\langle \varphi, \gamma \rangle \sim_{\triangle}{}^{*} \langle \psi, \lambda \rangle$ が成り立つとは、次の(i)，(ii)の何れかが成立することである：

(i) $\langle \varphi, \gamma \rangle \leqq_{\triangle}{}^{*} \langle \psi, \lambda \rangle$.

(ii) $\exists \langle \eta, \mu \rangle \in \langle \Phi, 2^{J} \rangle, \langle \varphi, \gamma \rangle \sim_{\triangle}{}^{*} \langle \eta, \mu \rangle$

$\wedge \langle \psi, \lambda \rangle \sim_{\triangle}{}^{*} \langle \eta, \mu \rangle$. □

このとき、2元関係 $\sim_{\triangle}{}^{*}$ が半順序関係 $\leqq_{\triangle}{}^{*}$ を含む最小の同値関係であることを指摘する次の定理5.4が成り立つ。

［定理5.4］**(2元関係 $\sim_{\triangle}{}^{*}$ の最小同値関係定理)**

上述の直交条件を満たしている類似度関数 SM を採用していれば **(SM直交仮定)**、カテゴリ知識空間 $\langle \Phi, 2^{J} \rangle$ 上の2元関係 $\sim_{\triangle}{}^{*}$ は、次の$(1^{\#})$，$(2^{\#})$，$(3^{\#})$を満たし、**同値関係**(equivalence relation)であり、然も、

$$\langle \varphi, \gamma \rangle \leqq_{\triangle}{}^{*} \langle \psi, \lambda \rangle \tag{5.43}$$

$$\Rightarrow \langle \varphi, \gamma \rangle \mid\!\rightarrow \langle \psi, \lambda \rangle \tag{5.44}$$

$$\Rightarrow \langle \varphi, \gamma \rangle \sim_{\triangle}{}^{*} \langle \psi, \lambda \rangle \tag{5.45}$$

を満たす“半順序関係 $\mid\!\rightarrow$”が1つも存在しないという意味で、$\leqq_{\triangle}{}^{*}$ を含む“最小の”同値関係である：

$(1^{\#})$(反射律；reflexive law) $\langle \varphi, \gamma \rangle \sim_{\triangle}{}^{*} \langle \varphi, \gamma \rangle$.

$(2^{\#})$(対称律；symmetric law) $\langle \varphi, \gamma \rangle \sim_{\triangle}{}^{*} \langle \eta, \mu \rangle$

ならば、$\langle \eta, \mu \rangle \sim_{\triangle}{}^{*} \langle \varphi, \gamma \rangle$.

$(3^{\#})$(推移律；transitive law) $\langle \varphi, \gamma \rangle \sim_{\triangle}{}^{*} \langle \eta, \mu \rangle$

かつ $\langle \eta, \mu \rangle \sim_{\triangle}{}^{*} \langle \psi, \lambda \rangle$ ならば、

$\langle \varphi, \gamma \rangle \sim_{\triangle}{}^{*} \langle \psi, \lambda \rangle$. □

5.11 不動点認識の働きと、それから得られる知覚的記憶表象の列

本節では、連想形不動点認識過程と呼ばれる「認識システム RECOGNITRON による不動点認識計算を行うパターン認識過程」を説明しよう。処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ に関し、認識システム RECOGNITRON が行う4式(5.57)～(5.60)でいう不動点認識計算が、

「カテゴリ帰属知識 $\langle T\varphi, J \rangle \in \langle \Phi, 2^{J} \rangle$ から出発し

て、ある定まった操作(構造受精変換)$TA(\mu)T$ を繰り

返して、目標とする対象としての
代表パターン $\omega_j \in \Omega$ のカテゴリ帰属知識集合
$\langle \Omega, J \rangle \equiv \{\langle \omega_j, j \rangle \mid j \in J\}$ (5.46)
の内の元の1つ $\langle \omega_j, j \rangle (= \langle T\omega_j, j \rangle)$
に近づく過程である」 (5.47)

という事実などに関連したことが説明される。

処理の対象とする問題のパターン(入力パターン) $\varphi \in \langle \Phi, 2^J \rangle$ に関する多段階認識過程(不動点認識計算)とは以下の4式(5.57)～式(5.60)のことである。

このような連想形パターン認識の働きを備えている認識システム RECOGNITRON は、モデル構成作用素 T, 類似度関数 SM, 大分類関数 BSC などで含意されるその持っている知識の範囲で、処理の対象とする問題のパターン(入力パターン) φ について、事前にカテゴリ帰属知識 $\langle \varphi, \gamma \rangle$ を持っているならば、文献 [B4] の定理A 9.1が成立しているという意味でそのカテゴリ帰属知識が保存されている今1つのカテゴリ帰属知識 $\langle T\varphi, \gamma \rangle (= \langle \varphi, \gamma \rangle)$ へとこの $\langle \varphi, \gamma \rangle$ を変換し、変換後の $\langle T\varphi, \gamma \rangle$ を多段階認識過程の初期条件として採用し、

各カテゴリ番号リスト $\mu \subseteq J$ を各認識段階でその
都度適切に選んで得られる各構造受精変換 $TA(\mu)T$
による変換 (5.48)

を、**不動点方程式**(fixed-point equation)

$TA(\mu)T\langle \psi, \lambda \rangle =_{\triangle} \langle \psi, \lambda \rangle$
(**終了規準**；termination criterion) (5.49)

が成立するまで繰り返すことが、**不動点探索形構造受精多段階帰納推論に基づくパターン認識過程**である。

不動点方程式(5.49)における ψ, λ とは、実は、以下の不動点方程式(5.59)での $\psi_t \in \Phi, \lambda_t \in 2^J$ のことであり、パターン φ の帰属するカテゴリ候補に関する絞り込み性質

$J \supset \lambda_{s-1} \supset \lambda_s (s = 1, 2, \cdots, t)$ (5.50)

を備えたカテゴリ番号リストの列

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{t-2}, \lambda_{t-1}, \lambda_t \in 2^J$ (5.51)

を発見することである。そのためには、

$J \supset \mu_{s-1} \supset \mu_s (s = 1, 2, \cdots, t)$ (5.52)

を備えたカテゴリ番号リストの列

$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{t-2}, \mu_{t-1}, \mu_t \in 2^J$ (5.53)

を、包含性質

$\mu_s \subseteq \lambda_s (s = 0, 1, 2, \cdots, t)$ (5.54)

が満たされるように、その都度、探索しなければならない。

特に、

$\mu_s = J (s = 0, 1, 2, \cdots, t)$ (**線形探索法**) (5.55)

$\mu_s = \lambda_s - \{\mathrm{argmin}_{j \in CSF(\psi_s, \lambda_s)} SM(\psi_s, \omega_j)\}$
$(s = 0, 1, 2, \cdots, t)$ (**修正探索法**) (5.56)

と選ぶことができる：

処理の対象とする問題の入力パターン $\varphi \in \Phi$ に対し、初期条件

$$\langle \psi_0,\ \lambda_0 \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$$
$$\text{, where } \psi_0 \equiv T\varphi,\ \lambda_0 \equiv J \tag{5.57}$$

を設け、カテゴリ帰属知識の変換

$$TA(\mu_{s-1})\ T\langle \psi_{s-1}, \lambda_{s-1} \rangle$$
$$=_{\triangle} \langle \psi_s,\ \lambda_s \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$$
$$\text{, where } \mu_{s-1} \in 2^J$$
$$s = 1, 2, \cdots, t \tag{5.58}$$

を、不動点方程式（**fixed-point equation**）

$$TA(\mu_t)\ T\langle \psi_t,\ \lambda_t \rangle$$
$$(=_{\triangle} \langle \psi_{t+1},\ \lambda_{t+1} \rangle) =_{\triangle} \langle \psi_t,\ \lambda_t \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle \tag{5.59}$$
$$\text{, where } \mu_t \in 2^J \tag{5.60}$$

が成立するまで、繰り返す。 □

パターン φ の帰属するカテゴリ候補に関する式(5.50)の絞り込み性質を備えた4式(5.57)～式(5.60)のパターン認識過程では、パターン φ を作業処理してから得られた短期記憶系(a system of short-term memory)内での、次々と書き換えらたパターン系列

$$\psi_0,\ \psi_1,\ \psi_2, \cdots,\ \psi_{t-2},\ \psi_{t-1},\ \psi_t \tag{5.61}$$

も得られており、この式（5.62）が多段帰納推論での**知覚的記憶表象**（perceptual and memorial representative） $\psi_s(0 \leqq s \leqq 1)$ の列である。入力パターン φ は、不動点方程式(5.59)の解 $\langle \psi_t,\ \lambda_t \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$ の前半 $\psi_t \in \Phi$ として再現(連想形自己想起)され、入力パターン φ の帰属するカテゴリは、後半 $\lambda_t \in 2^J$ に注目して、

$$\varphi \text{ belongs to one of the obtained set } \underline{\mathfrak{C}}(\lambda_t)$$
$$= \{\mathfrak{C}_j \mid j \in \lambda_t\} \tag{5.62}$$

と、断定(認識)される。

以上が多段階連想形不動点認識の働きである。

5.12 認識結果の分類

本節では、4式(5.57)～(5.60)の不動点認識計算が如何なる認識結果をもたらすかが説明される。

先ず、SMのミックスチュア(mixture)条件は、次のように述べられる。

【類似度関数 SM に関するSM-ミックスチュア 条件】

$$[\forall k \in \mu, 0 < b_k < 1] \wedge 0 < \sum_{k \in \mu} b_k \leqq 1 \tag{5.63}$$

を満たす実定数 b_k の組 $\{b_k \mid k \in \mu\}$ について、

$$\mu \supseteq \{\ell, m\}\ (\ell \neq m) \tag{5.64}$$

が成り立つような $\ell, m \in J$ が少なくとも存在する任意の $\mu \in 2^J$ に対し、

$$\exists j \in \mu, SM(\sum_{k \in \mu} b_k \cdot T\omega_k,\ \omega_j) \neq b_j. \tag{5.65}$$

□

カテゴリ帰属知識の不動点方程式が成立するための必要かつ十分条件に、ミックスチュア条件の付加が必要なことは、次の定理5.5で説明される。

[定理5.5]**（不動点存在の必要且つ十分条件）**

類似度関数SMに関するミックスチュア条件が成立していれば、

$$\exists\,\mu\in 2^{J},\ \mathrm{TA}(\mu)\ \mathrm{T}\langle \mathrm{T}\varphi,\gamma\rangle =_{\triangle} \langle \mathrm{T}\varphi,\gamma\rangle \tag{5.66}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$【[\exists j\in J,\ \langle \mathrm{T}\varphi,\gamma\rangle =_{\triangle} \langle \mathrm{T}\,\omega_{j},\ [j]\rangle] \tag{5.67}$$

$$\vee\ \langle \mathrm{T}\varphi,\gamma\rangle =_{\triangle} \langle 0,\ \phi\rangle \tag{5.68}$$

$$】.$$

□

次の定理5.6は、直交性類似度関数 SM を採用すれば、不等式(5.27)がなりたつことを指摘している。

［定理5.6］**(直交性類似度関数 SM の下でのSSポテンシャルエネルギーの非増加定理)**

式(3.5)の**類似度関数 SM が**5.10節の**直交条件を満たせば**、$\varphi\neq 0\wedge\gamma\neq\phi\wedge\psi\neq 0\wedge\lambda\neq\phi$であるような3式(5.29)～(5.31)で規定されるカテゴリ帰属知識の$\langle\varphi,\gamma\rangle$から$\langle\psi,\lambda\rangle$への変換式においては、2式(5.23), (5.24)で定義されるポテンシャルエネルギー E の、非増加性をあらわしている**不等式**(5.27)が成立する。

エネルギー不等式(5.27)**で等号が成り立つ**のは、以下の3条件①, ②, ③が共に成り立つ場合に限る：

①$\mu\supseteq\gamma$ $(\therefore\ \ \mu\cap\gamma=\gamma)$.

②$\mu\cap\gamma-\mathrm{CSF}(\varphi,\mu\cap\gamma)=\phi$

$(\therefore\ \ \gamma=\mathrm{CSF}(\varphi,\gamma)\ \ \because$ ①).

③$\Sigma_{j\in \mathrm{CSF}(\varphi,\mu\cap\gamma)}\mathrm{SM}(\psi,\omega_j)=\sum_{j\in\gamma}\mathrm{SM}(\varphi,\omega_j)$

$(\therefore\ \ \sum_{j\in\gamma}\mathrm{SM}(\psi,\omega_j)=\sum_{j\in\gamma}\mathrm{SM}(\varphi,\omega_j)$

$\because$ ①∧②).

□

直交性条件、ミックスチュア条件を共にを満たすように任意の類似度関数を変換する手法は文献［B4］で研究されている。

4式(5.57)～(5.60)の不動点認識計算において、

(一)直交条件を満たす類似度関数SMに対しては、

4式(5.57)～(5.60)の不動点探索形構造受精多段階パターン認識過程の各カテゴリ帰属知識間に半順序関係$\leqq_{\triangle}{*}$が成立していること(定理5.3)

(二)直交条件を満たす類似度関数SMに対しては、

4式(5.57)～(5.60)の不動点探索形構造受精多段階パターン認識過程の進展につれて、そのポテンシャルエネルギー E が減少すること(定理5.6)

(三)ミックスチュア条件を満たす類似度関数SMに

対しては、4式(5.57)～(5.60)の不動点探索形構造受精多段階パターン認識過程の終了規準としてのカテゴリ帰属知識の不動点方程式が成立したとき、或るカテゴリの代表パターンのモデルが得られること(定理5.5)

が明らかになった。

次の定理5.7、その系1は、半順序関係$\leqq_{\triangle}{*}$, 同値関係$\sim_{\triangle}{*}$を使って、不動点探索形構造受精多段階帰納推論に基づくパターン認識の働きを特徴付けている。

［定理5.7］**(不動点多段階認識の働きの特徴付け定理)**

処理の対象とする問題のパターン$\varphi\in\Phi$についての、4式(5.57)～(5.60)で表される"不動点探索形構造受精多段階帰納推論に基づくパターン認識過程(認識計算)"について、考えよう。

(ⅰ)**(不動点性と零ポテンシャルエネルギー性との同値定理)**

ミックスチュア条件を満たす類似度関数SMを採用していれば、

(ⅰ-1)

不動点方程式(5.59)が成立する

$\Rightarrow$

$[\exists j \in CSF(\psi_t, \mu_t \cap \lambda_t),\ \psi_t = T\omega_j \wedge \lambda_t = [j]]$ (5.69)

$\vee [\psi_t = 0 \wedge \lambda_t = \phi]$ (5.70)

$\Rightarrow E(\psi_t, \lambda_t) = 0$ (5.71)

(ⅰ-2)

$E(\psi_{t-1}, \lambda_{t-1}) = 0 \wedge |\lambda_{t-1}| \geqq 1$ (5.72)

$\Rightarrow$

$j \in \mu_{t-1} \cap \lambda_{t-1} \wedge j \in \mu_t$ (5.73)

が存在するならば、

不動点方程式(5.59)が成立し、

$\langle \psi_t, \lambda_t \rangle =_{\triangle} \langle T\omega_j, [j] \rangle$ (5.74)

が成立する。

(ⅱ)**(SM－ミックスチュア条件の下での不動点認識結果の分類定理)**

不動点方程式(5.59)を満たす結果$\langle \psi_t, \lambda_t \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$について、

$\forall \langle \varphi, J \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$,

(ⅱ-1)(認識確定；認識処理可能)$\exists j \in J$,

$\langle \varphi, J \rangle \sim_{\triangle}^{*} \langle \omega_j, [j] \rangle\ (=_{\triangle} \langle \psi_t, \lambda_t \rangle)$ (5.75)

(ⅱ-2)(認識処理不能)$\exists \langle 0, \phi \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$,

$\langle \varphi, J \rangle \sim_{\triangle}^{*} \langle 0, \phi \rangle\ (=_{\triangle} \langle \psi_t, \lambda_t \rangle)$ (5.76)

(ⅱ-3)(認識処理不定)$\exists \langle \psi_t, \lambda_t \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$,

$\langle \varphi, J \rangle \sim_{\triangle}^{*} \langle \psi_t, \lambda_t \rangle$

such that $\psi \neq 0$ and $|\lambda| \geqq 2$ (5.77)

のいずれかが成り立つと分類表現されるが、ミックスチュア条件を満たす類似度関数SMを採用していれば、最後の(ⅱ-3)の場合は排除される。

(ⅲ)**(SM－ミックスチュア・直交条件の下での不動点認識の有限停止認識定理)**

ミックスチュア条件,直交条件を共に満たす類似度関数SMを採用しているとしよう。(ⅱ-2)が生じないような4式(5.57)～(5.60)で表される認識過程では、式(5.72)が成立するような有限の認識段階番号 t－1 が存在し、よって、不動点方程式(5.59)が成立する有限の認識段階番号 t が存在する。つまり、認識計算の有限停止性は保証され、然も、

$E(\psi_0, \lambda_0) > E(\langle \psi_1, \lambda_1 \rangle) > \cdots > E(\psi_t, \lambda_t)$

$= 0 = \inf_{\langle \psi, \lambda \rangle \in \langle \Phi, 2J \rangle} E(\psi, \lambda)$

(エネルギー不等式) (5.78)

$\wedge TA(\mu_{t+s})\, T\langle \psi_{t+s}, \lambda_{t+s} \rangle =_{\triangle} \langle \psi_{t+s}, \lambda_{t+s} \rangle)$

, selecting μ_{t+s} according to $\mu_{t+s} = \lambda_t$

for any $s \in \{1, 2, \cdots\}$ (不動点方程式) (5.79)

が成立している。

［定理5.7の系1］**（SMミックスチュアの下での不動認識の、候補カテゴリ数の減少に伴う有限停止認識定理）**

ミックスチュア条件を満たす類似度関数 SM を採用しているとき、式(5.51)の如く得た候補カテゴリ番号リストの列に関し、その候補カテゴリ数の減少性

$$|\lambda_0| > |\lambda_1| > \cdots > |\lambda_t| \tag{5.80}$$

が成立していれば、(iii)が成立する。 □

認識の働きを認識処理可能、認識処理不能、認識処理不定の3場合に分類出来るパターン認識の理論は、本**不動点認識計算理論**を除いて、これまで存在していない。認識処理可能といっても、パターンが正認識されることを意味しているのではない。誤認識される場合を含んでいる。そもそも、現実の人間に備わっている認識の働きには各種制約があって、そのためその認識能力に厳然として限界が存在するにもかかわらず、認識処理不能、認識処理不定の場合を誤認識として処理するパターン処理技術しか、これまで研究されてこなかったといってよい。本不動点認識計算の、他の認識計算に対し持つ1つの特異性からもたらされる優位性が定理5.7で明らかになっている。この優位性は、axiom 1～axiom 4を採用する公理論的手法によって初めて獲得されたものである。

6. むすび

パターン認識の働きはもともと、多数のパターン事例を知覚したという経験から獲得された感受性、感性が反映された“処理の対象とする問題のパターンφ関し、その帰属するカテゴリを探索することを伴う**帰納的推論**(inductive reasoning)”でなされている。

2カテゴリ認識問題として、男顔か、女顔かを判別したり、男声か、女声かを判別したりすることが考えられるが、このような2カテゴリ認識の発現には感性が大きく影響している。美人か、不美人かの判別も、主観に裏付けられた感性によって正になされている。好みの顔か、そうでないかの判別なども特にそうである。文字認識、物体認識、対面していない状況下での特別な音声認識などの場合を除いて、多くの場合個人主観を基盤とし、感性的にパターン情報処理されている。マルチメディア社会の到来に伴い、**感性的パターン情報処理技術**の確保が急務となりつつあることに留意しておかねばならない。

上述の2カテゴリ認識問題などにおける感性的パターン情報処理に役立つ諸技術を本論文は研究したが、各個人の感性を抽出しそれを備えさせた**擬人化エージェント**(代理者)［A16］、並びに、SWAの擬人化エージェントを計算機内部に構築しておかないと、確保された諸技術を実現することは困難であろう。擬人化エージェントを例えば、**JAVA言語**で表現することが残された研究となっている。

感性はもともと、主観的であり、客観に一致することは通常、期待されないが、帰納的推論を特性付けるこの認識主観的感性を、構成された認識システムRECOGNITRON の力学的挙動を基盤として把握することが可能になろう。本手法は音声(speech sound)，楽曲(melody)などに対しても、全く同様に処理可能である。

SS公理系［B3]，[B4］は4つの公理axiom 1～4から成り立っており、axiom 1～3を各々、満たすモデル構成作用素 T，類似度関数 SM，大分類関数 BSC が選ばれた個人の感性を反映しているように構成する手法が確立された。定理2.2の系1， 定理3.1，定理4.1で各々、T，SM，BSC の3構

造に個人感性を反映させることを可能にすることが示されている式(3.12)のevalを非感性的に設定することが可能であることは定理3.2でその1例が示されたが、このような SM の非感性的構成法は多数存在し、本研究によりSMの構成が処理の対象とする問題のパターンφの集合Φに応じ、適切且つ柔軟に多様になされることになった。式(2.11)の近傍 Nb を変えることによっても、式(2.14)の eval は多様に変化し、T の構成も集合 Φ に応じ、適切且つ柔軟に多様になされることになった。

特に、類似度 SM の計算には、人間の下した印象度 eval の多段階評価法(**感性の反映法**)が大きく影響する。特に、印象度評価が一人の人間によってなされた場合、構成された認識システム RECOGNITRON はその個人の持つ感性に応じた主観的認識の働きを備えることになる。このように、各個人の感性を反映した RECOGNITRON が獲得されれば、RECOGNITRON のこのような集合によって、パターン認識の働きに関する人間集団の感性を総合的に捕らえることができる。

感性情報処理［A12］,［A13］には**ファジィ推論技術**［B24］を適用することも十分考えられるが、このようなファジィ推論技術を見かけ上使用していない帰納推論技術を駆使して、感性を反映しないよりも反映したパターン認識技術の方を確保することが重要であることを、認識システム RECOGNITRON の構成を介して、浮き彫りにしたことが本研究を特徴付けていると言えよう。

文　献　A

［A 1］青木利夫，高橋渉："集合·位相空間要論"，培風館, Sept.1979

［A 2］Angus E.Taylor, David C.Lay："Introduction to function analysis"，John Wiley & Sons, Inc.，1980

［A 3］Gilbert G.Walter："Wavelets and other orthogonal systems with applications"，CRC Press, Inc., 1994

［A 4］太原育夫："人工知能の基礎知識(コンピュータサイエンス大学講座20)"，近代科学社，Feb.1999

［A 5］E.Y.Shapirov "知識の帰納的推論"，有川節夫訳，共立出版，July 1986

［A 6］R.S.Michalski他編："概念と規則の学習ー例からの学習(知識獲得と学習シリーズ5)"，共立出版，電総研人工知能研究グループ他訳, May 1988

［A 7］国藤進："仮説推論"，人工知能学会誌，vol.2, no.1, pp.22-29, Mar.1987

［A 8］市瀬龍太郎，沼尾正行："正例と負例に弁別不能な例からの関係学習"，電子情報通信学会論文誌D-Ⅰ, vol.J82-D-Ⅰ, no.ⅠⅡ, pp.1387-1393, Dec.1999

［A 9］村瀬洋："解説 古くて新しい画像認識法—固有空間法による画像認識—"，情報処理(情報処理学会誌)，vol.38, no.1, pp.54-60, Jan.1997

［A10］Wei-Chung Lin and Chen-Kuo Tsao："Document classification using associative memories"，Journal of Neural Network Computing, pp.33-41, April 1990

［A11］Jesse Spencer-Smith, Robert L.Goldstone："The dynamics of similarity"，認知科学，vol.4, no.4, pp.38-56, Dec.1997

［A12］井口征士："感性情報処理"，電子情報通信学会誌，vol.80, no.10, pp.1007-1012, Oct.1997

［A13］北原義典："感性情報とメディア処理技術"，電子 情報通信学会誌，vol.81, no.1, pp.60-67, Jan.1998

［A14］Rangachari Anand, Kishan Mehrotra, Chilukuri K.Mohan, Sanjay Ranka："Efficient classification

for multiclass problems using modular neural networks", IEEE Transactions on Neural Networks, vol.6, no.1, pp.117-124, Jan.1995
[A15] 佐野千遥："知的人工生命の学習進化"，森北出版，Apr.1996
[A16] 山田誠二："適応エージェント(認知科学モノグラフ8)"，共立出版，Nov.1997
[A17] 下原勝憲他(ATR進化システム研究室編)："人工生命と進化システム"，東京電機大学出版局，Mar.1998
[A18] 郭軍(Jun GVO)，孫寧(Ning SUN)，根本義章，木村 正行，越後宏，佐藤利三郎："余弦整形変換を用いた 手書き文字認識アルゴリズム"，電子情報通信学会論文誌，vol.J76-D-Ⅱ，no.4, pp.835-842, Apr.1993
[A19] E.W.Cheney："近似理論入門"，一松信・新島耕一訳，p.112, 共立出版，Dec.1977

文　献　B

[B 1] 鈴木昇一："認識工学"，柏書房，Feb.1975
[B 2] 鈴木昇一："ニューラルネットの新数理"，近代文芸社，Sept.1996
[B 3] 鈴木昇一："パターン認識問題の数理的一般解決"， 近代文芸社，June 1997
[B 4] 鈴木昇一："認識知能情報論の新展開"，近代文芸社，Aug.1998
[B 5] 鈴木昇一："測度的不変量検出形認識系の構成理 論"，電子通信学会論文誌(D)，vol.55-D, no.8, pp.531-538, Aug.1972
[B 6] 鈴木昇一："パターンのエントロピーモデル"，電子情報通信学会論文誌(D-Ⅱ)，vol.J77-D-Ⅱ，no.10, pp.2220-2238, Nov.1994
[B 7] 鈴木昇一，中村三郎："知識情報処理における帰納的推論"，情報研究(文教大学・情報学部)，no.9, pp.173-196, Dec.1988
[B 8] 鈴木昇一，中村三郎："最汎アトムを用いない精密化方法によるPrologプログラムの帰納的自動合成システムの、C言語による実現"，情報研究(文教大学・情報学部)，no.10, pp.151-167, Dec.1989
[B 9] 中村三郎，田代達也，鈴木昇一："ソフトウェアをコンピュータに作らせる夢―１つの提案「MIS」について―"，コンピュータアクセス，pp.54-62, Jan.1990
[B10] 鈴木昇一："手書き漢字の側抑制効果的分解と その計算機シミュレーション"，情報処理学会誌，vol.15, no.12, pp.927-934, Dec.1974
[B11] 鈴木昇一："画像情報量とその手書き漢字への 応用"，画像電子学会誌，vol.4, no.1, pp.4-12, Apr.1975
[B12] 鈴木昇一："抽出された特徴による手書き漢字 構造の再生"，情報処理学会誌，vol.18, no.11, pp.1115-1122, Nov.1977
[B13] 鈴木昇一，斉藤静昭，奥野治雄，太田芳雄："画像の復元とその計算機シュミレーション" 工学院大 学研究報告，no.39, pp.198-206. Jan.1976
[B14] 鈴木昇一："回転群と画像の分解・強調・構造 化再構成に関する計算機シュミレーション"，情報研究(文教大学情報学部)，vol.4, pp.36-56, Dec.1983
[B15] 鈴木昇一："連想形記憶器 MEMOTRON と日本語母音系列の再生に関する計算機シミュレ

ーション”，情報研究（文教大学情報学部），vol.7, pp.14-29, Dec.1986
[B16] 鈴木昇一：“収縮写像の構成用空間回路とその計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），vol.9, pp.17-29, Dec.1988
[B17] 鈴木昇一：“多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），vol.10, pp.35-49, Dec.1989
[B18] 鈴木昇一：“帰属係数法に基づく類似度、帰属関係あいまい度、認識情報量の計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），vol.11, pp.51-68, Dec.1990
[B19] 鈴木昇一：“構造受精法と日本語単独母音の認識”，情報研究（文教大学・情報学部），vol.18, pp.17-51, Dec.1998
[B20] 鈴木昇一，前田英明：“有声破裂音の代表パターンの学習的決定と、その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.20, pp.77-95, Dec.1998
[B21] 鈴木昇一，前田英明：“変動エントロピーによる有声破裂音の順序付けと、その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.21, pp.51-78, Mar.1999
[B22] 鈴木昇一：“平均顔を用いた顔画像の２値化、並びに、目・鼻・口の抽出と、その計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.22, pp.65-150, Dec.1999
[B23] 鈴木昇一：“界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の、顔画像処理に関する計算機シミュレーション”，情報研究（文教大学・情報学部），no.23, pp.109-182, Mar.2000
[B24] 鈴木昇一：“風景画から知識を抽出し、解釈するシステムの、ファジィ推論ニューラルネットによる構成”，情報研究（文教大学・情報学部），no.23, pp.183-265, Mar.2000

付録A．特徴の存在からの、感性を反映しない類似度関数SMの構成

本付録Aでは、個人感性を反映させない類似度関数 SM を構成することを目的として、定理3.2以外の式(3.12)の eval の設定法が研究される。

個人感性を反映させない式(3.5)の類似度関数SMを構成するには、次の定理A.1が参考になる。

［定理A.1］**（個人感性を反映させない類似度関数 SM の構成定理）**

式(3.12)の印象度 eval$(T\varphi, T\varphi_{t,j})$を、次の①～④と設定でき、このとき、定理3.1が成り立つ：

①十分小さい3つの正数

$$\varepsilon_1(\ell),\quad \varepsilon_2(\ell),\quad \varepsilon_3(\ell) \tag{A.1}$$

を決める。

(i) $|x-y| < \varepsilon_1(\ell)$ならば、

$$f_\ell(x, y;\ \varepsilon(\ell)) = 1 \tag{A.2}$$

(ii) $|x-y| \geqq \varepsilon_1(\ell) \wedge |x| \geqq \varepsilon_2(\ell) \wedge |y| \leqq \varepsilon_3(\ell)$ならば、

$$f_\ell(x, y;\ \varepsilon(\ell)) = 0 \tag{A.3}$$

(iii)上述の(i)，(ii)以外の場合は

$$f_\ell(x, y;\ \varepsilon(\ell)) = 1 \tag{A.4}$$

と定義された2つの複素数値変数 x, y の2値関数

$$f_\ell(x, y;\ \varepsilon(\ell)) \in \{0, 1\},\ \ell \in L \tag{A.5}$$

を導入する。

2つの特徴抽出写像

$u: \Phi \times L \rightarrow \{-1, 0, +1\}$ (A.6)

$u: \Phi \times L \rightarrow Z$(複素数全体の集合) (A.7)

の場合、

$$\mathrm{eval}(T\varphi, T\varphi_{t,j}) = |L|^{-1} \cdot [\sum_{\ell \in L} f_\ell(u(T\varphi, \ell),\ u(T\varphi_{t,j}, \ell);\ \varepsilon(\ell))] \cdot (2q+1) \quad (A.8)$$

②2つの特徴抽出写像

$u: \Phi \times L \rightarrow \{0, 1\}$ (A.9)

$u: \Phi \times L \rightarrow R[0, 1]$ (1より大きくない非負実数全体の集合) (A.10)

の場合、

$$\mathrm{eval}(T\varphi, T\varphi_{t,j}) = |L|^{-1} \cdot [\sum_{\ell \in L} \max\{1 - u(T\varphi, \ell),\ u(T\varphi_{t,j}, \ell)\}] \cdot (2q+1) \quad (A.11)$$

③特徴抽出写像

$u: \Phi \times L \rightarrow R^+$(非負実数全体の集合) (A.12)

の場合、

$$\mathrm{eval}(T\varphi, T\varphi_{t,j}) = |L|^{-1} \cdot [\sum_{\ell \in L} \max\{1 - u(T\varphi, \ell)/\max_{k \in L} u(T\varphi, k),\ u(T\varphi_{t,j}, \ell)/\max_{k \in L} u(T\varphi_{t,j}, k)\}] \cdot (2q+1) \quad (A.13)$$

④特徴抽出写像

$u: \Phi \times L \rightarrow R$(実数全体の集合) (A.14)

と式(A.6)の特徴抽出写像uとの2つの場合、

$$\mathrm{eval}(T\varphi, T\varphi_{t,j}) = |L|^{-1} \cdot [\sum_{\ell \in L} \max\{1 - |u(T\varphi, \ell)|/\max_{k \in L} |u(T\varphi, k)|,\ |u(T\varphi_{t,j}, \ell)|/\max_{k \in L} |u(T\varphi_{t,j}, k)|\}] \cdot (2q+1) \quad (A.15)$$

(証明) 明らかである。 □

付録B. 不動点認識計算は何を求めているのか？

本付録Bでは、4式(5.57)～(5.60)の不動点認識計算が何を求めているのかが、5.10節の直交性と5.12節のミックスチュア条件とを満たす式(3.5)の類似度関数SMを採用している条件の下で説明される。

B1. 同値関係 $\sim_\triangle{}^*$ の商集合 $\langle \Phi, 2^J \rangle / \sim_\triangle{}^*$

2式(5.23), (5.24)のポテンシャルエネルギー関数Eと3式(5.29)～(5.31)の構造受精変換TA(μ)Tを用いて導入されるカテゴリ帰属知識集合 $\langle \Phi, 2^J \rangle$ 上の同値関係 $\sim_\triangle{}^*$ が定義5.6で導入されているが、本章では、引き続いて、同値関係 $\sim_\triangle{}^*$ から定まる同値類 $[\langle \varphi, \gamma \rangle]_\triangle{}^*$ などが説

明される。

$\langle \Phi, 2^J \rangle$ の任意の2元 $\langle \varphi, \gamma \rangle \sim_{\triangle}{}^* \langle \eta, \mu \rangle$ の間に、同値関係 $\sim_{\triangle}{}^*$ が成立するかしないかを必ず決めることができ、この意味で、$\langle \varphi, \gamma \rangle \sim_{\triangle}{}^* \langle \eta, \mu \rangle$ は、$\langle \varphi, \gamma \rangle$ が $\langle \eta, \mu \rangle$ と(ポテンシャルエネルギー&構造受精に関し)**同値**であると読む。

$\langle \varphi, \gamma \rangle$ と同値な $\langle \Phi, 2^J \rangle$ の元全体を $\langle \varphi, \gamma \rangle$ を含む $\langle \Phi, 2^J \rangle$ の**同値類** (the equivalence class containing $\langle \varphi, \gamma \rangle$)といい、

$$
\begin{aligned}
&[\langle \varphi, \gamma \rangle]_{\triangle}{}^* \\
&\equiv \{\langle \eta, \mu \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle \mid \langle \varphi, \gamma \rangle \sim_{\triangle}{}^* \langle \eta, \mu \rangle\} \\
&\quad \subset \langle \Phi, 2^J \rangle
\end{aligned}
\tag{B. 1}
$$

と表す。任意にとった2つの同値類は、全く一致するか、または共通の元を1つも持たない。同値類 $[\langle \varphi, \gamma \rangle]_{\triangle}{}^*$ の1つの要素を $[\langle \varphi, \gamma \rangle]_{\triangle}{}^*$ の代表元(representative)という。同値関係(equivalence relation) $\sim_{\triangle}{}^*$ による $\langle \Phi, 2^J \rangle$ の**商集合**(quotient set) $\langle \Phi, 2^J \rangle / \sim_{\triangle}{}^*$ とは、$\langle \Phi, 2^J \rangle$ の同値類全体の集合

$$
\langle \Phi, 2^J \rangle / \sim_{\triangle}{}^* \equiv \{[\langle \varphi, \gamma \rangle]_{\triangle}{}^* \mid \langle \varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle\} \tag{B.2}
$$

のことである。

B2. 半順序関係 $\leqq_{\triangle}{}^*$ から定まる知識集合 $\langle \Psi, \Lambda \rangle$ 上の上限 $\sqcup_{\triangle}{}^*$

本章では、カテゴリ帰属知識集合 $\langle \Phi, 2^J \rangle$ 上の同値関係 $\sim_{\triangle}{}^*$ と、半順序関係 $\leqq_{\triangle}{}^*$ とから定まる上限 $\sqcup_{\triangle}{}^*$ について、説明される。

処理の対象とする問題のカテゴリ帰属知識集合 $\langle \Phi, 2^J \rangle$ の部分集合 $\langle \Psi, \Lambda \rangle$ を考える。この半順序関係 $\leqq_{\triangle}{}^*$ の下での、知識集合 $\langle \Psi, \Lambda \rangle$ ($\subseteq \langle \Phi, 2^J \rangle$)の**上限**(supremum)、即ち、**最小上界**(least upper bound) $\sqcup_{\triangle}{}^* \langle \Psi, \Lambda \rangle$ を次のように定義する。

［定義B.1］**($\langle \Psi, \Lambda \rangle$($\subseteq \langle \Phi, 2^J \rangle$) の最小上界 $\sqcup_{\triangle}{}^* \langle \Psi, \Lambda \rangle$ の定義)**

$\langle \Phi, 2^J \rangle$ を半順序関係 $\leqq_{\triangle}{}^*$ の定義された半順序集合(partially ordered set)とするとき、$\langle \Phi, 2^J \rangle$ の部分集合 $\langle \Psi, \Lambda \rangle$ の上限 $\langle \psi, \lambda \rangle$ とは、次の2条件(ｉ), (ii)を満たす $\langle \Phi, 2^J \rangle$ の要素であり($\langle \Psi, \Lambda \rangle$の要素とは限らない)、

$$
\langle \psi, \lambda \rangle \equiv \sqcup_{\triangle}{}^* \langle \Psi, \Lambda \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle \tag{B.3}
$$

と書く：

(ｉ)(上界性；$\langle \Psi, \Lambda \rangle \leqq_{\triangle}{}^* \langle \psi, \lambda \rangle$)

$\forall \langle \eta, \mu \rangle \in \langle \Psi, \Lambda \rangle$, $\langle \eta, \mu \rangle \leqq_{\triangle}{}^* \langle \psi, \lambda \rangle$.

(ii)(最小性；$\langle \Psi, \Lambda \rangle \leqq_{\triangle}{}^* \langle \psi', \lambda' \rangle$ ならば、

$\langle \psi, \lambda \rangle \leqq_{\triangle}{}^* \langle \psi', \lambda' \rangle$)

$\exists \langle \varphi, \gamma \rangle \in \langle \Phi, 2^J \rangle$, $\forall \langle \eta, \mu \rangle \in \langle \Psi, \Lambda \rangle$,

$\langle \eta, \mu \rangle \leqq_{\triangle}{}^* \langle \varphi, \gamma \rangle$

ならば、

$\langle \psi, \lambda \rangle \leqq_{\triangle}{}^* \langle \varphi, \gamma \rangle$. □

特に、$\sqcup_{\triangle}{}^* \{\langle \varphi_1, \gamma_1 \rangle, \langle \varphi_2, \gamma_2 \rangle\}$ を、

$$
\langle \varphi_1, \gamma_1 \rangle \sqcup_{\triangle}{}^* \langle \varphi_2, \gamma_2 \rangle \tag{B.4}
$$

と表すことがある。式(B. 4)の $\langle \varphi_1, \gamma_1 \rangle \sqcup_{\triangle}{}^* \langle \varphi_2, \gamma_2 \rangle$ は $\langle \varphi_1, \gamma_1 \rangle$ と $\langle \varphi_2, \gamma_2 \rangle$ とを併合して得られた帰属知識 **($\langle \varphi_1, \gamma_1, \langle \varphi_2, \gamma_2 \rangle$ 双方に共通な情報を備えている帰属知識)** であるという。

次の命題B.1の成立は、$\langle \varphi, \gamma \rangle \leqq_{\triangle}^* \langle \eta, \mu \rangle$ が2つの元からなる有限集合 $\{\langle \varphi, \gamma \rangle, \langle \eta, \mu \rangle\}$ に関する半順序関係 $\leqq_{\triangle}^*$ の上限であることから、明らかである。

[命題B.1]（上限の性質）

$$\langle \varphi, \gamma \rangle \leqq_{\triangle}^* \langle \eta, \mu \rangle$$
$$\Leftrightarrow \langle \varphi, \gamma \rangle \sqcup_{\triangle}^* \langle \eta, \mu \rangle = \langle \eta, \mu \rangle. \qquad \square$$

B3. 不動点帰納認識論理

先ず、4式(5.57)～(5.60)の不動点認識計算に関し、最大認識段階番号 t_{max} が有限値で存在するという“認識過程の有限停止性”に注目しておく：

ある1つのカテゴリのみに帰属しているという意味で異常でないパターン $\varphi \in \Phi$ についてのパターン認識の働きとは、4式(5.57)～(5.60)に関し、

[認識過程の**有限停止性**(finite termination)]

$$\exists t_{max} < \infty, \exists t \in \{0, 1, 2, \cdots, t_{max}\},$$
$$\sqcup_{\triangle}^* \langle \Psi, \Lambda \rangle_0 \leqq_{\triangle}^* \sqcup_{\triangle}^* \langle \Psi, \Lambda \rangle_1 \leqq_{\triangle}^* \cdots$$
$$\leqq_{\triangle}^* \sqcup_{\triangle}^* \langle \Psi, \Lambda \rangle_s \leqq_{\triangle}^* \cdots \leqq_{\triangle}^* \sqcup_{\triangle}^* \langle \Psi, \Lambda \rangle_t \qquad \text{(B.5)}$$
$$\text{where } \langle \Psi, \Lambda \rangle_s$$
$$\equiv \{\langle \psi_0, \lambda_0 \rangle, \langle \psi_1, \lambda_1 \rangle, \cdots, \langle \psi_s, \lambda_s \rangle\}\ (0 \leqq s \leqq t) \qquad \text{(B.6)}$$

という具合に、B2章でいう上限 $\sqcup_{\triangle}^*$ を求める操作を介し、式(B.5)を満たす1つのカテゴリ帰属知識 $\langle \omega_j, [j] \rangle \in \langle \Psi, \Lambda \rangle_t$ を探索することである。 □

次の定理B.1は、類似度関数SMの直交性とミックスチュア性との下で、式(B.2)の商集合 $\langle \Phi, 2^J \rangle / \sim_{\triangle}^*$ を決定しているが、**不動点帰納認識論理**を説明しているともいえよう。

[定理B.1]**（不動点多段階認識の働きによる商集合 $\langle \Phi, 2^J \rangle / \sim_{\triangle}^*$ の決定定理）**

処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ についての、4式(5.57)～(5.60)で表される“不動点探索形構造受精多段階帰納推論に基づくパターン認識過程(認識計算)”について、考えよう。

類似度関数SMが、5.10節の直交条件、並びに、5.12節のミックスチュア条件を満たしていれば、式(3.48)の商集合 $\langle \Phi, 2^J \rangle / \sim_{\triangle}^*$ は、次のように各代表パターンモデル $T\omega_j$ のカテゴリ帰属知識 $\langle T\omega_j, [j] \rangle$ を $j \in J$ にわたり寄せ集め、且つ、零パターン 0 のカテゴリ帰属知識 $\langle 0, \phi \rangle$ をも加えた要素からなる集合として、表される：

$$\langle \Phi, 2^J \rangle / \sim_{\triangle}^* = \{\langle T\omega_j, [j] \rangle \mid j \in J\} \cup \{\langle 0, \phi \rangle\}. \qquad \square$$

付録C. 補間による類似度関数SMの構成

本付録Cでも、付録Aと同様に、個人感性を反映させない類似度関数SMが構成される。

2つのパターンモデル $T\varphi, T\omega_i$ 間の相違度関数 g_i の、$i \in J$ にわたる系による**補間に**基づいて、補間関数 f_i の系$(i \in J)$を構成し、axiom 2を満たす**類似度関数SM**を構成し、その応用として SM′ から今1つのSMを構成してみよう。

[零条件 $g_i(\varphi) = 0$ if $\| T\varphi - T\omega_i \| = 0] \wedge [$**T-不変性** $\forall \varphi \in \Phi, g_i(T\varphi) = g_i(\varphi)]$ (C.1)

を満たし、$T\varphi$ が $T\omega_i$ と異なれば異なるほど、大きいと解釈可能な非負の値をとる**相違度関数**

$g_i : \Phi \to R^+$(非負実数全体の集合) (C.2)

の、$j \in J$にわたる系を導入する。例えば、2つのパターンモデル$T\varphi, T\omega_i$間のノルム距離

$$g_i(\varphi) \equiv \| T\varphi - T\omega_i \|, i \in J \tag{C.3}$$

がそうである。そして、**補間関数**

$$f_i : \Phi \to R^+ \tag{C.4}$$

を、

$$f_i(\varphi) \equiv \prod_{k \in J-\{i\}} g_k(\varphi) / \prod_{\ell \in J-\{i\}} g_\ell(\omega_i) \tag{C.5}$$

と定義する。式(C. 3)のg_iを採用していれば、

$$f_i(\varphi) = \prod_{k \in J-\{i\}} \| T\varphi - T\omega_k \| / \prod_{\ell \in J-\{i\}} \| T\omega_i - T\omega_\ell \| \tag{C.6}$$

と表される。

このとき、次の定理C.1が成立し、式(C.5)の補間関数f_iの系を使って、axiom 2を満たす類似度関数

$$SM : \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \tag{C.7}$$

が構成されることがわかる。

［定理C.1］**(補間による類似度関数 SM の構成定理)**

非一致条件

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \| T\omega_i - T\omega_j \| > 0 \tag{C.8}$$

の下で、

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} f_j(\varphi) / \sum_{i \in J} f_i(\varphi) \cdots \sum_{i \in J} f_i(\varphi) > 0 \text{ の場合} & \text{(C.9)} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \sum_{i \in J} f_i(\varphi) = 0 \text{ の場合} & \text{(C.10)} \end{cases}$$

と定義される式(C.7)の関数SMはaxiom 2を満たす。

(証明)　式(C.5)の$f_i(\varphi)$について、明らかに、式(C.1)の零条件より

$$\forall j \in J, f_j(\omega_j) = 1 \tag{C.11}$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, f_j(\omega_i) = 0 \quad \because \text{ 式(C.5)} \tag{C.12}$$

が成り立つとがわかる。axiom 2の(ⅰ)(直交性)の成立は、2式(C.11), (C.12)から明らかである。

axiom 2の(ⅱ)(規格化条件)の成立は、SMの2定義式(C.9), (C.10)から明らかである。

補間関数式(C. 5)の設定f_jを考慮して、axiom 1の(ⅲ)(Tのべき等性)の後半$T \cdot T = T$を適用すると、式(C.1)のT-不変性より

$$\forall j \in J, f_j(T\varphi) = f_j(\varphi) \quad \because \text{ 式(C.5)} \tag{C.13}$$

を得、SMの2定義式(C.9), (C.10)に式(C.13)を適用すると、axiom 2の(ⅲ)(T-不変性)の成立は明らかである。 □

axiom 2を満たす類似度関数SM′からaxiom 2を満たす類似度関数SMを、式(C.5)の補間関数f_jを使って、再帰的に構成できることは、次の定理C.2で指摘される。

［定理C.2］**(類似度関数 SM の再帰的構成定理)**

axiom 2を満たす類似度関数

$$SM' : \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \tag{C.14}$$

と、式(C.5)の補間関数$f_i(\varphi)$とを用いて、

$SM(\varphi, \omega_j)=$

$$\begin{cases} f_j(\varphi)\cdot SM'(\varphi, \omega_j)/\sum_{i\in J} f_j(\varphi)\cdot SM'(\varphi, \omega_i) \cdots \sum_{i\in J} f_i(\varphi)\cdot SM'(\varphi, \omega_i)>0 \text{ の場合} & (C.15)\\ p(\mathfrak{C}_j)\cdots \sum_{i\in J} f_i(\varphi)\cdot SM'(\varphi, \omega_i)=0 \text{ の場合} & (C.16)\end{cases}$$

と定義される式(C.7)の関数SMはaxiom 2を満たす。

(証明) 式(C.5)の $f_i(\varphi)$ について成り立つ2式(C.11), (C.12)と、式(C.14)の SM' がaxiom 2の(i)(直交性)を満たすことから、明らかに、2式(C.15), (C.16)で定義される関数SMは、axiom 2の(i)(直交性)を満たすことがわかる。

axiom 2の(ii)(規格化条件)の成立は2式(C.15), (C.16)から明らかである。

axiom 2の(i)(T-不変性)の成立は、式(C.5)の補間関数 $f_i(\varphi)$ のT-不変式(C.13)と、式(C.14)の SM' がaxiom 2の(iii)(T-不変性)を満たすことから、明らかである。 □

尚、零条件式(C. 1)を満たす式(C.2)の非負相違度関数 g_i の系として、式(C.3)以外に、例えば、次の5式(C.17)～(C.21)で表されるものがある：

非一致条件(C.8)の下では、

$$g_i(\varphi)\equiv 1-\exp(-a_i^{-1}\cdot \|T\varphi-T\omega_i\|),\ a_i>0 \tag{C.17}$$

$$g_i(\varphi)\equiv 1-|(T\varphi\|T\varphi\|^{-1}, T\omega_i\|T\omega_i\|^{-1})|^2 \tag{C.18}$$

$$g_i(\varphi) \equiv 1-\exp[-a_i^{-1}\cdot\{1-|(T\varphi\|T\varphi\|^{-1}, T\omega_i\|T\omega_i\|^{-1})|^2\}],\ a_i>0 \tag{C.19}$$

$$g_i(\varphi)\equiv 1-|d_i(\varphi)|^2/\sum_{k\in J}|d_k(\varphi)|^2 \tag{C.20}$$

$$g_i(\varphi) \equiv 1-\exp[-a_i^{-1}\cdot\{1-|d_i(\varphi)|^2/\sum_{k\in J}|d_k(\varphi)|^2\}] \tag{C.21}$$

などがある。ここに、**複素定数 $d_k(\varphi)$** は、

系 $T\omega_j, j\in J$ は1次独立であるとして、

$$\|T\varphi-\sum_{k\in J} d_k\cdot T\omega_k\|^2 \tag{C.22}$$

を最小にする1次結合係数 d_k のことである。 □

更に、非一致条件式(C.8)の下で、2条件

①(代表パターンの包含条件)

$$\forall j\in J,\ \omega_j\in\Psi_j\subset\Phi \tag{C.23}$$

②(非交差条件)

$$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},\ \Psi_j\cap\Psi_i=T\cdot\Psi_j\cap T\cdot\Psi_i=\phi \tag{C.24}$$

の下では、

$$g_i(\varphi)\equiv \min_{\eta\in\Psi_i}\|T\varphi-T\eta\| \tag{C.25}$$

$$g_i(\varphi) \equiv \min_{\eta\in\Psi_i}[1-\exp(-a(T\eta)^{-1}\cdot\|T\varphi-T\eta\|)],\ a(T\eta)>0 \tag{C.26}$$

$$g_i(\varphi) \equiv \min_{\eta\in\Psi_i}[1-|(T\varphi\|T\varphi\|^{-1}, T\eta\|T\eta\|^{-1})|^2] \tag{C.27}$$

$g_i(\varphi)$

$$\equiv \min_{\eta \in \Psi_i} 【1-\exp[-a(T\eta)^{-1} \cdot \{1- |(T\varphi \| T\varphi \|^{-1}, T\eta \| T\eta \|^{-1})|^2\}]】, \quad a(T\eta) > 0 \tag{C.28}$$

$$g_i(\varphi) \equiv \min_{\eta \in \Psi_i} 【1- | d_{i,\eta}(\varphi)|^2 / \sum_{k \in J} \sum_{\eta \in \Psi_k} | d_{k,\eta}(\varphi)|^2】 \tag{C.29}$$

$$g_i(\varphi) \equiv \min_{\eta \in \Psi_i} 【1-\exp\ [-a_i^{-1} \cdot \{1- | d_{i,\eta}(\varphi)|^2 / \sum_{k \in J} \sum_{\eta \in \Psi_k} | d_{k,\eta}(\varphi)|^2\}]】 \tag{C.30}$$

も、零条件式(C.1)を満たす式(C.2)の非負相違度関数 g_i として採用できる。複素定数 $d_{k,\eta}(\varphi)$は、系 $T\eta_j, j \in J, \eta_j \in \Psi_j$ は1次独立であるとして、

$$\| T\varphi - \sum_{k \in J} \sum_{\eta \in \Psi_k} d_{k,\eta} \cdot T\eta \|^2 \tag{C.31}$$

を最小にする1次結合係数 $d_{k,\eta}$ のことであり、次の補助定理C.1が成立していることに注意しておく。

[補助定理C.1] **(1次結合係数 $d_{k,\eta}(\varphi)$ のT-不変・正規直交定理)**

(i)(T-不変性)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall k \in J, \forall \eta \in \Psi_k, \quad d_{k,\eta}(T\varphi) = d_{k,\eta}(\varphi). \tag{C.32}$$

(ii)(正規直交性)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall k \in J, \forall \eta \in \Psi_k, \quad d_{k,\eta}(\omega_i) = \begin{cases} 1 \text{ if } i=k \wedge \eta=\omega_i \\ 0 \text{ if } i \neq k \vee \eta \neq \omega_i \end{cases} \tag{C.33}$$

(証明) axiom 1, (iii)の後半 $T \cdot T = T$ より、

$$\| T\varphi - \sum_{k \in J} \sum_{\eta \in \Psi_k} d_{k,\eta} \cdot T\eta \|^2 = \| T(T\varphi) - \sum_{k \in J} \sum_{\eta \in \Psi_k} d_{k,\eta} \cdot T\eta \|^2$$

$$\because \ 系\ T\eta_j, j \in J, \eta_j \in \Psi_j \text{ は1次独立} \tag{C.34}$$

が成立することにより、(i)のT-不変性が成立する。

更に、式(C.33)の $d_{k,\eta}(\omega_i)$ を $d_{k,\eta}$ に採用すれば、

$$\| T\omega_i - \sum_{k \in J} \sum_{\eta \in \Psi_k} d_{k,\eta} \cdot T\eta \|^2 \tag{C.35}$$

$$= 0 \quad \because \ 2式(C.23),\ (C.24) \tag{C.36}$$

$$= \| T\omega_i - T\omega_i \|^2 \tag{C.37}$$

を得、式(C.35)が最小となっている。 □

付録D. cos変換による類似度関数 SM の合成

本付録Dでは、axiom 2を満たす式(3.5)の類似度関数 SM を今1つのaxiom 2を満たす式(3.5)の類似度関数 SM′ から構成する再帰的諸方法が研究される。特に、cos変換による再帰的構成法が注目に値するものであろう。

D1. 非負性・0-不動点性・1-不動点性を満たす関数による類似度関数 SM の再帰構成

［例D1］（類似度関数 SM の再帰構成定理）

変数 x の関数 f(x) が、3条件

$$f(x) \geqq 0 \text{ for } 0 \leqq x \leqq 1 \text{（非負性）} \tag{D1.1}$$

$$f(0) = 0 \text{（0-不動点性）} \tag{D1.2}$$

$$f(1) = 1 \text{（1-不動点性）} \tag{D1.3}$$

を満たすとしよう。

このとき、axiom2 を満たす類似度関数

$$SM' : \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \tag{D1.4}$$

を導入し、

$$SM(\varphi, \omega_j) \equiv \begin{cases} f(SM'(\varphi, \omega_j)) / \sum_{i \in J} f(SM'(\varphi, \omega_i)) \cdots \sum_{i \in J} f(SM'(\varphi, \omega_i)) > 0 \text{ の場合} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \sum_{i \in J} f(SM'(\varphi, \omega_i)) = 0 \text{ の場合} \end{cases} \tag{D1.5}$$

と定義される関数

$$SM : \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \tag{D1.6}$$

は axiom2 を満たす。

（証明） axiom 2の(i), (ii), (iii)の成立を確かめよう。

axiom 2の(i)の成立：任意に、$j \in J$ を選び、

$$\varphi = \omega_j \tag{D1.7}$$

とする。先ず、

$$f(SM(\varphi, \omega_j)) = 1$$
$$\wedge [\forall i \in J - \{j\}, f(SM(\varphi, \omega_i)) = 0]$$
$$\because \text{ 式(D1.3)} \wedge \text{式(D1.2)} \tag{D1.8}$$

が成立する。よって、結局、任意の $j \in J$ につき、

$$SM(\varphi, \omega_j) = 1$$
$$\wedge [\forall i \in J - \{j\}, SM(\varphi, \omega_i) = 0]$$
$$\because \text{ 式(D1.5)}$$

が成立し、証明が終わった。 (D1.9)

axiom 2の(ii)の成立：SM の定義式(D1.5)から明らか。

axiom 2の(iii)の成立：axiom 1の(iii)を適用すれば、

$$\forall \varphi \in \Phi,$$
$$\forall j \in J, f(SM'(T\varphi, \omega_j)) = f(SM'(\varphi, \omega_j)) \tag{D1.10}$$

が成り立つ。よって、

$$\forall \varphi \in \Phi,$$
$$\forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j) \tag{D1.11}$$

を得る。 □

D2. 1より大きくない非負性・0-不動点性・1-不動点性を満たす関数による再帰的構成

［例D2］（類似度関数 SM の再帰構成定理）

変数 x の関数 f(x) が、3条件

$1 \geqq f(x) \geqq 0$ for $0 \leqq x \leqq 1$
(1より大きくない非負性) (D2.1)
$f(0)=0$ (0-不動点性) (D2.2)
$f(1)=1$ (1-不動点性) (D2.3)
を満たすとしよう。

このとき、axiom2を満たす類似度関数

$$SM' : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \quad (D2.4)$$

を導入し、

$$SM(\varphi, \omega_j) \equiv 1/\left[1+\sum_{i \in J-\{j\}} [1-f(SM'(\varphi, \omega_j))] / [1-f(SM'(\varphi, \omega_i))]\right] \quad (D2.5)$$

$$=[1-f(SM'(\varphi, \omega_j))]^{-1} / \sum_{i \in J} [1-f(SM'(\varphi, \omega_i))]^{-1} \quad (D2.6)$$

と定義される関数

$$SM : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \quad (D2.7)$$

はaxiom2を満たす。

(証明) axiom 2の(i), (ii), (iii)の成立を確かめよう。

axiom 2の(i)の成立:任意に、$j \in J$を選び、$\varphi=\omega_j$とする。先ず、

$$f(SM(\varphi, \omega_j))=1 \wedge [\forall i \in J-\{j\}, f(SM(\varphi, \omega_i))=0] \quad \because \text{式(D2.3)} \wedge \text{式(D2.2)} \quad (D2.8)$$

が成立する。よって、結局、任意の$j \in J$につき、

$$SM(\varphi, \omega_j)=1 \quad \because \text{式(D2.5)} \wedge [\forall i \in J-\{j\}, SM(\varphi, \omega_i)=0] \quad \because \text{式(D2.6)} \quad (D2.9)$$

が成立し、証明が終わった。

axiom 2の(ii)の成立:SMの定義式(D2.6)から明らか。

axiom 2の(iii)の成立:axiom 1の(iii)を適用すれば、

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, f(SM'(T\varphi, \omega_j))=f(SM'(\varphi, \omega_j)) \quad (D2.10)$$

が成り立つ。よって、

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j)=SM(\varphi, \omega_j) \quad (D2.11)$$

を得る。 □

D3. 例D2の適用諸例

例D2の3条件式(D2.1), (D2.2), (D2.3)を満たす関数f(x)の1例を構成しよう。

[命題D1]

1変数x $(0 \leqq x \leqq 1)$の実数値関数 [A18]

$$f(x)=a-b \cdot \cos(\phi x+\theta) \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

（余弦整形変換） (D3.1)

について、条件

$0 \leqq f(x) \leqq 1$ for $0 \leqq x \leqq 1$ (D3.2)

$\wedge [0 \leqq \theta] \wedge [0 < \phi]$ (D3.3)

$\wedge [0 \leqq \phi + \theta \leqq \pi]$ (D3.4)

$\wedge [0 < a] \wedge [0 < b]$ (D3.5)

を課し、その後、

$f(0) = 0$ (D3.6)

$f(1) = 1$ (D3.7)

が満たされるように、パラメータ a, b を決めれば、

(i) $a = \cos\theta / [\cos\theta - \cos(\phi + \theta)]$

(ii) $b = 1/[\cos\theta - \cos(\phi + \theta)]$

であり、結局、構成される関数 f(x) は、

(iii) $f(x)$

$= [\cos\theta - \cos(\phi x + \theta)]/[\cos\theta - \cos(\phi + \theta)]$

と表される。特に、

$\theta + \phi/2 = \pi/2 \quad \therefore \quad \phi = \pi - 2\theta > 0$ (D3.8)

を採用すれば、このとき、

(iv) a, b, f(x) は

$a = 1/2$ (D3.9)

$b = 1/[2 \cdot \cos\theta]$ (D3.10)

$f(x)$

$= [\cos\theta - \cos[(\pi - 2\theta)x + \theta]]/[2 \cdot \cos\theta]$

$= 1/2 - [2 \cdot \cos\theta]^{-1} \cdot \cos[(\pi - 2\theta)x + \theta]$ (D3.11)

となり、

(v) f(x) の1, 2次微分係数について、

$[d/dx] f(x)$

$= \phi \cdot \sin(\phi x + \theta)]/[2 \cdot \cos\theta] \geqq 0$ (D3.12)

$[d^2/dx^2] f(x)$

$= \phi^2 \cdot \cos(\phi x + \theta)]/[2 \cdot \cos\theta]$

$$\begin{cases} > 0 & \text{if } x < 1/2 \\ = 0 & \text{if } x = 1/2 \\ < 0 & \text{if } x > 1/2 \end{cases}$$ (D3.13)

が成り立つ。

（証明） 2式(D3.6), (D3.7)を式(D3.1)に考慮して、

$a - b \cdot \cos\theta = 0$ (D3.14)

$a - b \cdot \cos(\phi + \theta) = 1$ (D3.15)

が得られるが、式(D3.14)$\times \cos(\phi + \theta)$－式(D3.15)$\times \cos\theta$ を作って、パラメータ a を求めれば、

$a = \cos\theta / [\cos\theta - \cos(\phi + \theta)]$ (D3.16)

となる。つまり、(i)が示された。

式(D3.16)を式(D3.14)に代入して、パラメータbを求めれば、

$$b=1/[\cos\theta-\cos(\phi+\theta)] \tag{D3.17}$$

が得られた。この式(D3.17)が(ii)である。(i), (ii)を式(D3.1)に代入すれば、(iii)が得られる。

式(D3.8)を考慮すれば、

$$\begin{aligned}&\cos\theta-\cos(\phi+\theta)\\&=\cos\theta-\cos(\pi-\theta)\\&=\cos\theta-[-\cos\theta]=2\cdot\cos\theta>0\\&\quad\because\ 2\text{式(D3.3), (D3.4), 或いは、}\\&\quad\ \text{式(D3.8)より、}\theta<\pi/2\end{aligned} \tag{D3.18}$$

であり、2式(D3.8), (D3.18)を(i), (ii), (iii)に代入すれば、(iv)が得られる。

(iv)において、2つの微分公式

$$d\cos x/dx=-\sin x,\ d\sin x/dx=\cos x \tag{D3.19}$$

を使い、

$$\cos x\ \begin{cases}>0 & \text{if } x<\pi/2\\=0 & \text{if } x=\pi/2\\<0 & \text{if } x>\pi/2\end{cases} \tag{D3.20}$$

を考慮すれば、(v)が成り立つ。 □

上述の命題の(vi)は、類似度関数SMを、

$$SM(\varphi,\omega_j)\rightarrow f(SM(\varphi,\omega_j))$$

と変換する場合、

中心x＝1/2付近を拡張して、SMを整形化する事実 (D3.21)

を指摘している。

［例D3］(類似度関数SMの再帰構成定理)

例D2の3条件式(D2.1), (D2.2), (D2.3)を満たす関数f(x)の1例を、階段関数として構成しよう。

命題D1の、式(D3.11)の関数f(x)に注目し、不等式

$$0\leqq\varepsilon_0<1/2<\varepsilon_1\leqq1 \tag{D3.22}$$

を満たす2つのパラメータε_0, ε_1を導入する。

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ if } x\leqq\varepsilon_0\\1/2-[2\cdot\cos\theta]^{-1}\cdot\cos[(\pi-2\theta)x+\theta] \text{ if } \varepsilon_0<x<\varepsilon_1\\1 \text{ if } \varepsilon_1\leqq x\end{cases} \tag{D3.23}$$

も、例D2の3条件式(D2.1), (D2.2), (D2.3)を満たす階段関数である。

［例D4］(類似度関数SMの再帰構成定理)

例D2の3条件式(D2.1), (D2.2), (D2.3)を満たす関数f(x)の1例を、階段関数として構成しよう。

命題D1の、式(D3.11)の関数f(x)に注目し、不等式

$$0\leqq\varepsilon_0^-<\varepsilon_0^+<1/2<\varepsilon_1^-<\varepsilon_1^+\leqq1 \tag{D3.24}$$

を満たす2つのパラメータε_0, ε_1を導入する。

2つの実数p, q(p＜q)を、

$$0\leqq p\equiv1/2-[2\cdot\cos\theta]^{-1}\cdot\cos[(\pi-2\theta)\varepsilon_0^{+}+\theta]$$

$$\leqq 1 \tag{D3.25}$$

$$0 \leqq q \equiv 1/2-[2\cdot\cos\theta]^{-1}\cdot\cos[(\pi-2\theta)\,\varepsilon_1^{-}+\theta]$$

$$\leqq 1 \tag{D3.26}$$

と設定する。

$$f(x)=$$

$$\begin{cases} 0 \text{ if } x \leqq \varepsilon_0^{-} \\ p\cdot(x-\varepsilon_0^{-})/(\varepsilon_0^{+}-\varepsilon_0^{-}) \text{ if } \varepsilon_0^{-}<x\leqq\varepsilon_0^{+} \\ 1/2-[2\cdot\cos\theta]^{-1}\cdot\cos[(\pi-2\theta)x+\theta] \text{ if } \varepsilon_0^{+}<x<\varepsilon_1^{-} \\ (1-q)\cdot(x-\varepsilon_1^{-})/(\varepsilon_1^{+}-\varepsilon_1^{-})+q \text{ if } \varepsilon_1^{-}\leqq x<\varepsilon_1^{+} \\ 1 \text{ if } \varepsilon_1^{+}\leqq x \end{cases} \tag{D3.27}$$

も、例D2の3条件式(D2.1)，(D2.2)，(D2.2)を満たす階段関数である。

このとき、

$$[d^2/dx^2]\,f(x)$$

$$\begin{cases} =0 \text{ if } x \leqq \varepsilon_0^{+} \\ >0 \text{ if } \varepsilon_0^{+}<x<1/2 \\ =0 \text{ if } x=1/2 \\ <0 \text{ if } 1/2<x<\varepsilon_1^{-} \\ =0 \text{ if } \varepsilon_1^{-}\leqq x \end{cases} \tag{D3.28}$$

が成り立っていることに注意しておこう。

D4. 無限大値をとる非負関数による再帰的構成

［例D5］（類似度関数SMの再帰構成定理）

変数xの関数f(x)が、3条件

$$f(x)\geqq 0 \text{ for } 0\leqq x\leqq 1 \tag{D4.1}$$

$$\lim_{x\to+0} f(x)=c(\text{有限確定値})\geqq 0 \tag{D4.2}$$

$$\lim_{x\to1-0} f(1)=+\infty \tag{D4.3}$$

を満たすとしよう。

このとき、axiom2を満たす類似度関数

$$SM' : \Phi\times\Omega\to\{s \mid 0\leqq s\leqq 1\} \tag{D4.4}$$

を導入し、

① $\sum_{i\in J} f(SM'(\varphi,\omega_i))>0$ の場合

$$SM(\varphi,\omega_j)\equiv$$

$$1/[1+\sum_{i\in J-\{j\}} f(SM'(\varphi,\omega_i))$$

$$/f(SM'(\varphi,\omega_j))] \tag{D4.5}$$

$$=f(SM'(\varphi,\omega_j))$$

$$/\sum_{i\in J} f(SM'(\varphi,\omega_i)) \tag{D4.6}$$

② $\sum_{i\in J} f(SM'(\varphi,\omega_i))=0$ の場合

$$SM(\varphi,\omega_j)\equiv p(\mathfrak{C}_j) \tag{D4.7}$$

と定義される関数

$SM: \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\}$ (D4.8)

はaxiom2を満たす。

（証明） axiom 2の（i），（ii），（iii）の成立を確かめよう。

axiom 2の（i）の成立：任意に、$j \in J$を選び、$\varphi = \omega_j$とする。先ず、

$$f(SM'(\varphi, \omega_j)) = +\infty$$
$$\wedge [\forall i \in J - \{j\}, f(SM'(\varphi, \omega_i)) = c]$$
$$\because \text{式(D4.3)} \wedge \text{式(D4.2)} \quad \text{(D4.9)}$$

が成立する。よって、結局、任意の$j \in J$につき、

$$SM(\varphi, \omega_j) = 1 \quad \because \text{式(D4.5)}$$
$$\wedge [\forall i \in J - \{j\}, SM(\varphi, \omega_i) = 0]$$
$$\because \text{式(D4.6)}$$

が成立し、証明が終わった。

axiom 2の（ii）の成立：SMの定義式(D4.6)，(D4.7)から明らか。

axiom 2の（iii）の成立：axiom 1の（iii）を適用すれば、

$$\forall \varphi \in \Phi,$$
$$\forall j \in J, f(SM'(T\varphi, \omega_j)) = f(SM'(\varphi, \omega_j))$$

が成り立つ。よって、

$$\forall \varphi \in \Phi,$$
$$\forall j \in J, SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j)$$

を得る。 □

［例D6］（対数関数による類似度関数SMの再帰構成定理）

変数xの関数f(x)を、

$$f(x) = \log_e 1/\sqrt{1-x} \quad \text{(D4.10)}$$

と設定し、axiom2を満たす類似度関数

$$SM': \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \quad \text{(D4.11)}$$

を導入して

$$SM(\varphi, \omega_j) \equiv$$
$$1/[1 + \sum_{i \in J - \{j\}} f(SM'(\varphi, \omega_i))$$
$$/f(SM'(\varphi, \omega_j))] \quad \text{(D4.12)}$$
$$= f(SM'(\varphi, \omega_j))$$
$$/\sum_{i \in J} f(SM'(\varphi, \omega_i))$$
$$= \log_e 1/\sqrt{1 - SM'(\varphi, \omega_j)}$$
$$/\sum_{i \in J} \log_e 1/\sqrt{1 - SM'(\varphi, \omega_i)} \quad \text{(D4.13)}$$

と定義される関数

$$SM: \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \quad \text{(D4.14)}$$

はaxiom2を満たす。

（証明） 式(D4.10))の関数f(x)は、例D5の3条件式(D4.1)，(D4.2)，(D4.3)を満たすことがわかり、例D3の類似度関数SMの再帰構成定理から明らか。

尚、$\sum_{i \in J} f(SM'(\varphi, \omega_i)) = 0$の場合は生じない。何故ならば、式(D4.10)の関数f(x)について、

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{(D4.15)}$$

であり、然も、式(D4.11)の類似度関数SM´はaxiom 2の(ii)を満たすことから、

$$\forall i \in J, SM'(\varphi, \omega_i)=1 \tag{D4.16}$$

は如何なる$\varphi \in \Phi$ についても生じないからである。 □

付録E. 類似度関数 SM のmin・max演算による合成

3.1節のaxiom 2を満たす式(3.5)の類似度関数SMについては、

SM(φ, ω_j) is the degree of match between φ and ω_j

と解釈できる。ここで、確率条件式(3.8)を満たさなければならない第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の生起確率$p(\mathfrak{C}_j)$を導入しておこう。

本付録Eでは、axiom 2を満たす式(3.5)の類似度関数SMが複数個ある場合、axiom 2を再び、満たすように、min, max の演算で合成して、axiom 2を満たす式(3.5)の類似度関数を得る手法が研究される。

E1. 類似度関数 SM の改良的再帰構成

次の定理E.1は、条件式関数f_jの系を使用し、複数個の類似度関数を合成する一般的な方法を指摘している。

[定理E.1] **(類似度関数の改良的再帰構成定理)**

式(3.5)の関数SMがaxiom 2を満たせば、

$$\forall j \in J, f_j(0)=0 \wedge f_j(1)>0 \tag{E.1}$$

であるような任意の |J| 個から成る関数f_jの組

$$f_j : \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \rightarrow R^+ \text{(非負実数全体の集合)}$$
$$, j \in J \tag{E.2}$$

を用い、

$$SM'(\varphi, \omega_j) \equiv$$
$$\begin{cases} f_j(SM(\varphi, \omega_j))/\sum_{k\in J} f_k(SM(\varphi, \omega_k)) \\ \qquad \cdots \sum_{k\in J} f_k(SM(\varphi, \omega_k))>0 \text{ の場合} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \sum_{k\in J} f_k(SM(\varphi, \omega_k))=0 \text{ の場合} \end{cases}$$
$$, j \in J$$

と定義される関数

$$SM' : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \tag{E.3}$$

はaxiom 2を満たす。

(証明) axiom 2の(i), (ii), (iii)の成立を示す。

axiom 2の(i)の成立：

$$SM'(\omega_i, \omega_j)$$
$$=f_j(SM(\omega_i, \omega_j))/\sum_{k\in J} f_k(SM(\omega_i, \omega_k)) \tag{E.4}$$

であるが、

①i=j の場合

$$SM'(\omega_i, \omega_j)$$

$=f_j(SM(\omega_j, \omega_j))/ [f_j(SM(\omega_j, \omega_j))$
$+\sum_{k\in J-\{j\}} f_k(SM(\omega_j, \omega_k))]$
$=f_j(1)/[f_j(1)+\sum_{k\in J-\{j\}} f_k(0)]$
$\because$ axiom 2の(i)
$=f_j(1)/f_j(1)$ $\because$ 式(E.1)
$=1$ $\because$ 式(E.1)
②if $i\neq j$ の場合
$SM'(\omega_i, \omega_j)$
$=f_j(SM(\omega_i, \omega_j))/ [f_i(SM(\omega_i, \omega_i))$
$+\sum_{k\in J-\{i\}} f_k(SM(\omega_i, \omega_k))]$
$=f_j(0)/[f_i(1)+\sum_{k\in J-\{i\}} f_k(0)]$
$\because$ axiom 2の(i)
$=f_j(0)/f_j(1)$ $\because$ 式(E.1)
$=0$ $\because$ 式(E.1)
axiom 2の(ii)の成立：
式(E.1)を考慮すると、SM´の定義から明らか。
axiom 2の(iii)の成立：
$\forall\varphi\in\Phi, \forall j\in J,$
$SM'(T\varphi, \omega_j)\equiv$

$$\begin{cases} f_j(SM(T\varphi, \omega_j))/\sum_{k\in J} f_k(SM(T\varphi, \omega_k)) \\ \qquad \cdots\sum_{k\in J} f_k(SM(T\varphi, \omega_k))>0 \text{ の場合} \\ p(\mathfrak{C}_j)\cdots\sum_{k\in J} f_k(SM(T\varphi, \omega_k))=0 \text{ の場合} \end{cases}$$

$=$

$$\begin{cases} f_j(SM(\varphi, \omega_j))/\sum_{k\in J} f_k(SM(\varphi, \omega_k)) \\ \qquad \cdots\sum_{k\in J} f_k(SM(\varphi, \omega_k))>0 \text{ の場合} \\ p(\mathfrak{C}_j)\cdots\sum_{k\in J} f_k(SM(\varphi, \omega_k))=0 \text{ の場合} \end{cases}$$

$\because$ axiom 2の(iii)
$=SM'(\varphi, \omega_j)$ □

E2. 類似度関数 SM のmin-構成

次の定理E.2は、min演算を使用し、複数個の類似度関数を合成する一般的な方法を指摘している。

［定理E.2］**（類似度関数 SM のmin-構成定理）**

各関数$SM_k(1\leqq k\leqq n)$がaxiom 2を満たすならば、

$$s_j(\varphi)\equiv\min_{1\leqq k\leqq n} SM_k(\varphi, \omega_j) \quad (E.5)$$

として、

$SM'(\varphi, \omega_j)\equiv$

$$\begin{cases} s_j(\varphi)/\sum_{k\in J} s_k(\varphi) \\ \qquad \cdots \sum_{k\in J} s_k(\varphi)>0 \text{ の場合} \\ p(\mathfrak{C}_j)\cdots \sum_{k\in J} s_k(\varphi)=0 \text{ の場合} \end{cases}$$

$$, j\in J \tag{E.6}$$

と定義される関数

$$SM': \Phi\times\Omega\to\{s \mid 0\leqq s\leqq 1\} \tag{E.7}$$

はaxiom 2を満たす。

［定理E.2の系1］

$s_j(\varphi)=0$ のとき、

$$\begin{cases} SM'(\varphi, \omega_j)= \\ 0 \qquad \cdots \exists k\in J-\{j\},\ s_k(\varphi)>0 \text{ の場合} \\ p(\mathfrak{C}_j)\cdots \forall k\in J-\{j\},\ s_k(\varphi)=0 \text{ の場合} \end{cases}$$

$, j\in J.$

［定理E.2の系2］

$s_j(\varphi)=1$ のとき、

$SM'(\varphi, \omega_j)=$

$1/[1+\sum_{k\in J-\{j\}} s_k(\varphi)],\ j\in J.$

（証明） axiom 3の（i），（ii），（iii）の成立を示す。

axiom 3の（i）の成立：

$\varphi=\omega_j$ であれば、

$$\begin{aligned} s_j(\varphi) &= \min_{1\leqq k\leqq n} SM_k(\varphi, \omega_j) \\ &= \min_{1\leqq k\leqq n} 1 \quad \because \text{ SM に関するaxiom 3の（i）} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{E.8}$$

であり、

$\varphi=\omega_i(i\neq j)$ であれば、

$$\begin{aligned} s_j(\varphi) &= \min_{1\leqq k\leqq n} SM_k(\varphi, \omega_j) \\ &= \min_{1\leqq k\leqq n} 0 \quad \because \text{ SM に関するaxiom 3の（i）} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{E.9}$$

であることにまず、注意する。

$\varphi=\omega_j$ であれば、

$$\begin{aligned} \sum_{k\in J} s_k(\varphi) &= s_j(\varphi)+\sum_{k\in J-\{j\}} s_k(\varphi) \\ &= 1+\sum_{k\in J-\{j\}} s_k(\varphi) \quad \because \text{ 式(E.8)} \\ &= 1+\sum_{k\in J-\{j\}} 0 \quad \because \text{ 式(E.9)} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{E.10}$$

が成り立っているから、

$$\begin{aligned} &SM'(\varphi, \omega_j) \\ &= s_j(\varphi)/\sum_{k\in J} s_k(\varphi) \quad \because \text{ 式(E.6)} \\ &= 1/1 \quad \because \text{ 2式(E.8), (E.10)} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{E.11}$$

であり、また、

$\varphi=\omega_i\,(i\neq j)$であれば、

$$\sum_{k\in J}s_k(\varphi)=s_i(\varphi)+\sum_{k\in J-\{i\}}s_k(\varphi)$$
$$=1+\sum_{k\in J-\{i\}}s_k(\varphi)\quad\because\quad \text{式(E.8)}$$
$$=1+\sum_{k\in J-\{i\}}0\quad\because\quad \text{式(E.9)}$$
$$=1 \tag{E.12}$$

が成り立っているから、

$$SM'(\varphi,\omega_j)$$
$$=s_j(\varphi)/\sum_{k\in J}s_k(\varphi)\quad\because\quad \text{式(E.6)}$$
$$=0/1\quad\because\quad 2\text{式(E.9), (E.10)}$$
$$=0. \tag{E.13}$$

axiom 3の(ii)の成立：

SM′の定義式(E.6)から明らか。

axiom 3の(iii)の成立：

SMがaxiom 3の(iii)を満たしていることから明らか。

(系1, 系2の証明)　SM′の定義式(E.6)から明らか。 □

E3. 類似度関数SMのmax-構成

次の定理E.3は、max演算を使用し、複数個の類似度関数を合成する一般的な方法を指摘している。

［定理E.3］**（類似度関数のmax-再帰的構成）**

各関数SMk$(1\leqq k\leqq n)$がaxiom 2を満たすならば、

$$s_j(\varphi)\equiv\max_{1\leqq k\leqq n}SM_k(\varphi,\omega_j) \tag{E.14}$$

として、

$$SM'(\varphi,\omega_j)\equiv$$
$$\begin{cases} s_j(\varphi)/\sum_{k\in J}s_k(\varphi) \\ \qquad\cdots\sum_{k\in J}s_k(\varphi)>0\text{ の場合} \\ p(\mathfrak{C}_j)\cdots\sum_{k\in J}s_k(\varphi)=0\text{ の場合}\end{cases}$$
$$,j\in J \tag{E.15}$$

と定義される関数

$$SM':\Phi\times\Omega\rightarrow\{s\mid 0\leqq s\leqq 1\} \tag{E.16}$$

はaxiom 2を満たす。

［定理E.3の系1］

$s_j(\varphi)=0$のとき、

$$SM'(\varphi,\omega_j)=$$
$$\begin{cases}0 & \cdots\exists k\in J-\{j\},\ s_k(\varphi)>0\text{ の場合}\\ p(\mathfrak{C}_j) & \cdots\forall k\in J-\{j\},\ s_k(\varphi)=0\text{ の場合}\end{cases}$$
$$,j\in J.$$

［定理E.3の系2］

$s_j(\varphi)=1$ のとき、

$SM'(\varphi, \omega_j)=$

$1/[1+\sum_{k\in J-\{j\}} s_k(\varphi)],\ j\in J.$

(証明)　axiom 3の(i), (ii), (iii)の成立を示す。

axiom 3の(i)の成立：

$\varphi=\omega_j$ であれば、

$$s_j(\varphi)=\max_{1\leqq k\leqq n} SM_k(\varphi, \omega_j)$$
$$=\max_{1\leqq k\leqq n} 1 \quad \because\ \text{SM に関する axiom 3の(i)}$$
$$=1 \tag{E.17}$$

であり、

$\varphi=\omega_i\,(i\neq j)$ であれば、

$$s_j(\varphi)=\max_{1\leqq k\leqq n} SM_k(\varphi, \omega_j)$$
$$=\max_{1\leqq k\leqq n} 0 \quad \because\ \text{SM に関する axiom 3の(i)}$$
$$=0 \tag{E.18}$$

であることにまず、注意する。

$\varphi=\omega_j$ であれば、

$$\sum_{k\in J} s_k(\varphi)=s_j(\varphi)+\sum_{k\in J-\{j\}} s_k(\varphi)$$
$$=1+\sum_{k\in J-\{j\}} s_k(\varphi) \quad \because\ \text{式(E.17)}$$
$$=1+\sum_{k\in J-\{j\}} 0 \quad \because\ \text{式(E.18)}$$
$$=1 \tag{E19}$$

が成り立っているから、

$$SM'(\varphi, \omega_j)$$
$$=s_j(\varphi)/\sum_{k\in J} s_k(\varphi) \quad \because\ \text{式(E.15)}$$
$$=1/1 \quad \because\ \text{2式(E.17), (E.19)}$$
$$=1$$

であり、また、

$\varphi=\omega_i\,(i\neq j)$ であれば、

$$\sum_{k\in J} s_k(\varphi)=s_i(\varphi)+\sum_{k\in J-\{i\}} s_k(\varphi)$$
$$=1+\sum_{k\in J-\{i\}} s_k(\varphi) \quad \because\ \text{式(E.17)}$$
$$=1+\sum_{k\in J-\{i\}} 0 \quad \because\ \text{式(E.18)}$$
$$=1 \tag{E.20}$$

が成り立っているから、

$$SM'(\varphi, \omega_j)$$
$$=s_j(\varphi)/\sum_{k\in J} s_k(\varphi) \quad \because\ \text{式(E.15)}$$
$$=0/1 \quad \because\ \text{2式(E.18), (E.20)}$$
$$=0.$$

axiom 3の(ii)の成立：

SM′の定義式(E.6)から明らか。

axiom 3の(iii)の成立：

SM がaxiom 3の(iii)を満たしていることから明らか。

(系1, 系2の証明)SM´の定義式(E.6)から明らか。 □

E4. 類似度関数 SM のmin-max構成

次の定理E.4は、min-max演算を使用し、複数個の類似度関数を合成する一般的な方法を指摘している。

[定理E.4] **(類似度関数 SM のmin-max構成定理)**

各関数 $SM_k (1 \leqq k \leqq n)$ がaxiom 2を満たすならば、

$$s_j(\varphi) \equiv \begin{cases} \min_{1 \leqq k \leqq n} SMk(\varphi, \omega_j) / \max_{1 \leqq k \leqq n} SM_k(\varphi, \omega_j) \\ \qquad \cdots \max_{1 \leqq k \leqq n} SM_k(\varphi, \omega_j) > 0 \text{ の場合} \\ 0 \cdots \max_{1 \leqq k \leqq n} SM_k(\varphi, \omega_j) = 0 \text{ の場合} \end{cases} \tag{E.21}$$

として、

$$SM'(\varphi, \omega_j) \equiv \begin{cases} s_j(\varphi) / \sum_{k \in J} s_k(\varphi) \\ \qquad \cdots \sum_{k \in J} s_k(\varphi) > 0 \text{ の場合} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \sum_{k \in J} s_k(\varphi) = 0 \text{ の場合} \end{cases}$$

$$, j \in J \tag{E.22}$$

と定義される関数

$$SM' : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \tag{E.23}$$

はaxiom 2を満たす。

[定理E.4の系1]

$s_j(\varphi) = 0$ のとき、

$$SM'(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} 0 \qquad \cdots \exists k \in J - \{j\},\ s_k(\varphi) > 0 \text{ の場合} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \forall k \in J - \{j\},\ s_k(\varphi) = 0 \text{ の場合} \end{cases}$$

$$, j \in J.$$

[定理E.4の系2]

$s_j(\varphi) = 1$ のとき、

$$SM'(\varphi, \omega_j) = 1 / \left[1 + \sum_{k \in J - \{j\}} s_k(\varphi)\right],\ j \in J.$$

(証明) axiom 3の(i), (ii), (iii)の成立を示す。

axiom 3の(i)の成立：

$\varphi = \omega_j$ であれば、

$$\max_{1 \leqq k \leqq n} SM_k(\varphi, \omega_j)$$

$$= \max_{1 \leqq k \leqq n} 1$$

∵ SM に関するaxiom 3の(i)

$$= 1 \tag{E.24}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
& s_j(\varphi) \\
&= \min_{1\leqq k\leqq n} SM_k(\varphi, \omega_j) / \max_{1\leqq k\leqq n} SM_k(\varphi, \omega_j) \\
&\qquad \because \text{式(E.21)} \\
&= \min_{1\leqq k\leqq n} 1 / \max_{1\leqq k\leqq n} 1 \\
&\qquad \because \text{SM に関する axiom 2 の(i)} \\
&= 1/1 \\
&= 1 \qquad \text{(E.25)}
\end{aligned}$$

であり、

$\varphi = \omega_i (i \neq j)$であれば、

$$\begin{aligned}
& \max_{1\leqq k\leqq n} SMk(\varphi, \omega_j) \\
&= \max_{1\leqq k\leqq n} 0 \\
&\qquad \because \text{SM に関する axiom 2 の(i)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
& s_j(\varphi) \\
&= 0 \quad \because \text{式(E.21)} \qquad \text{(E.26)}
\end{aligned}$$

であることにまず、注意する。

$\varphi = \omega_j$であれば、

$$\begin{aligned}
& \sum_{k\in J} s_k(\varphi) = s_j(\varphi) + \sum_{k\in J-\{j\}} s_k(\varphi) \\
&= 1 + \sum_{k\in J-\{j\}} s_k(\varphi) \quad \because \text{式(E.25)} \\
&= 1 + \sum_{k\in J-\{j\}} 0 \quad \because \text{式(E.26)} \\
&= 1 \qquad \text{(E.27)}
\end{aligned}$$

が成り立っているから、

$$\begin{aligned}
& SM'(\varphi, \omega_j) \\
&= s_j(\varphi) / \sum_{k\in J} s_k(\varphi) \quad \because \text{式(E.22)} \\
&= 1/1 \quad \because \text{2式(E.25), (E.27)} \\
&= 1 \qquad \text{(E.28)}
\end{aligned}$$

であり、また、

$\varphi = \omega_i (i \neq j)$であれば、

$$\begin{aligned}
& \sum_{k\in J} s_k(\varphi) = s_i(\varphi) + \sum_{k\in J-\{i\}} s_k(\varphi) \\
&= 1 + \sum_{k\in J-\{i\}} s_k(\varphi) \quad \because \text{式(E.25)} \\
&= 1 + \sum_{k\in J-\{i\}} 0 \quad \because \text{式(E.26)} \\
&= 1 \qquad \text{(E.29)}
\end{aligned}$$

が成り立っているから、

$$\begin{aligned}
& SM'(\varphi, \omega_j) \\
&= s_j(\varphi) / \sum_{k\in J} s_k(\varphi) \quad \because \text{式(E.22)} \\
&= 0/1 \quad \because \text{2式(E.26), (E.29)} \\
&= 0. \qquad \text{(E.30)}
\end{aligned}$$

axiom 3の(ii)の成立：

SM´の定義式(E.22)から明らか。

axiom 3の(iii)の成立：

SMがaxiom 3の(iii)を満たしていることから明らか。

(系1, 系2の証明)　SM´の定義式(E.22)から明らか。 □

E5. 類似度関数SMのmax-min構成

次の定理E.5は、max-min演算を使用し、複数個の類似度関数を合成する一般的な方法を指摘している。

[定理E.5] **(類似度関数SMのmax-min構成定理)**

各関数$SM_k(1\leqq k\leqq n)$がaxiom 2を満たすならば、

$$s_j(\varphi)\equiv \begin{cases} \max_{1\leqq k\leqq n} SM_k(\varphi,\omega_j)/\min_{1\leqq k\leqq n} SM_k(\varphi,\omega_j) & \cdots \min_{1\leqq k\leqq n} SM_k(\varphi,\omega_j)>0 \text{ の場合} \\ 0 & \cdots \min_{1\leqq k\leqq n} SM_k(\varphi,\omega_j)=0 \text{ の場合} \end{cases} \tag{E.31}$$

として、

$$SM'(\varphi,\omega_j)\equiv \begin{cases} s_j(\varphi)/\sum_{k\in J} s_k(\varphi) & \cdots \sum_{k\in J} s_k(\varphi)>0 \text{ の場合} \\ p(\mathfrak{C}_j) & \cdots \sum_{k\in J} s_k(\varphi)=0 \text{ の場合} \end{cases}, j\in J \tag{E.32}$$

と定義される関数

$$SM':\Phi\times\Omega\rightarrow\{s\mid 0\leqq s\leqq 1\} \tag{E.33}$$

はaxiom 2を満たす。

[定理E.5の系1]

$s_j(\varphi)=0$のとき、

$$SM'(\varphi,\omega_j)= \begin{cases} 0 & \cdots \exists k\in J-\{j\},\ s_k(\varphi)>0 \text{ の場合} \\ p(\mathfrak{C}_j) & \cdots \forall k\in J-\{j\},\ s_k(\varphi)=0 \text{ の場合} \end{cases}, j\in J.$$

[定理E.5の系2]

$s_j(\varphi)=1$のとき、

$$SM'(\varphi,\omega_j)= 1/[1+\sum_{k\in J-\{j\}} s_k(\varphi)],\ j\in J.$$

(証明)　axiom 2の(i), (ii), (iii)の成立を示す。

axiom 2の(i)の成立：

$\varphi=\omega_j$であれば、

$$\min_{1\leqq k\leqq n} SM_k(\varphi,\omega_j)$$

$$=\min_{1\leqq k\leqq n} 1$$

$\because$ SM に関する axiom 2 の(i)

$= 1$ (E.34)

であるから、

$s_j(\varphi)$

$= \max_{1 \leqq k \leqq n} SM_k(\varphi, \omega_j) / \min_{1 \leqq k \leqq n} SM_k(\varphi, \omega_j)$

$\because$ 式(E.21)

$= \max_{1 \leqq k \leqq n} 1 / \min_{1 \leqq k \leqq n} 1$

$\because$ SM に関する axiom 2 の(i)

$= 1/1$

$= 1$ (E.35)

であり、

$\varphi = \omega_i (i \neq j)$ であれば、

$\min_{1 \leqq k \leqq n} SM_k(\varphi, \omega_j)$

$= \min_{1 \leqq k \leqq n} 0$

$\because$ SM に関する axiom 3 の(i)

$= 0$

であるから、

$s_j(\varphi)$

$= 0 \quad \because$ 式(E.31) (E.36)

であることにまず、注意する。

$\varphi = \omega_j$ であれば、

$\sum_{k \in J} s_k(\varphi) = s_j(\varphi) + \sum_{k \in J - \{j\}} s_k(\varphi)$

$= 1 + \sum_{k \in J - \{j\}} s_k(\varphi) \quad \because$ 式(E.35)

$= 1 + \sum_{k \in J - \{j\}} 0 \quad \because$ 式(E.36)

$= 1$ (E.37)

が成り立っているから、

$SM'(\varphi, \omega_j)$

$= s_j(\varphi) / \sum_{k \in J} s_k(\varphi) \quad \because$ 式(E.32)

$= 1/1 \quad \because$ 2式(E.35), (E.37)

$= 1$ (E.38)

であり、また、

$\varphi = \omega_i (i \neq j)$ であれば、

$\sum_{k \in J} s_k(\varphi) = s_i(\varphi) + \sum_{k \in J - \{i\}} s_k(\varphi)$

$= 1 + \sum_{k \in J - \{i\}} s_k(\varphi) \quad \because$ 式(E.35)

$= 1 + \sum_{k \in J - \{i\}} 0 \quad \because$ 式(E.36)

$= 1$ (E.39)

が成り立っているから、

$SM'(\varphi, \omega_j)$

$= s_j(\varphi) / \sum_{k \in J} s_k(\varphi) \quad \because$ 式(E.32)

$=0/1$ ∵ 2式(E.36), (E.39)

$=0.$ (E.40)

axiom 2の(ii)の成立：

SM′の定義式(E.32)から明らか。

axiom 2の(iii)の成立：

SMがaxiom 2の(iii)を満たしていることから明らか。

(系1, 系2の証明) SM′の定義式(E.32)から明らか。 □

付録F. グラム行列Gの逆行列の存在証明

本付録Fでは、1次独立な系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$についての、式(F.3)のグラム行列Gは逆行列$G^{-1}$を持つことが証明される。

つまり、次の定理F.1を証明しよう。

[定理F.1] **(グラム行列Gの逆行列の存在定理)**

ψ_ℓ, $\ell\in L$は内積(,)を持つ可分な一般抽象

ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$での1次独立な系である (F.1)

ならば、ψ_k, ψ_ℓ間の内積

$$g_{k\ell}\equiv(\psi_k, \psi_\ell) \tag{F.2}$$

を第k行第ℓ列に持つグラム行列

$$G\equiv(g_{k\ell})_{k,\ell\in L} \tag{F.3}$$

の行列式$|G|$は零でなくて、その逆行列G^{-1}は存在する。

(証明) 以下の証明方法は、文献[A19]の第4章, 1.序に倣う。

1次独立な系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$にGram-Schmidtの直交化法[B4] (Gram-Schmidt orthogonalization process)

$$\eta_1'\equiv\psi_1 \tag{F.4}$$

$$\eta_2'\equiv\psi_2-(\psi_2, \eta_1'\|\eta_1'\|^{-1})\cdot\eta_1'\|\eta_1'\|^{-1} \tag{F.5}$$

$$\eta_3'\equiv\psi_3-(\psi_3, \eta_1'\|\eta_1'\|^{-1})\cdot\eta_1'\|\eta_1'\|^{-1}-(\psi_3, \eta_2'\|\eta_2'\|^{-1})\cdot\eta_2'\|\eta_2'\|^{-1} \tag{F.6}$$

…

$$\eta_k'\equiv\psi_k-\sum_{\ell=1}^{k-1}(\psi_k, \eta_\ell'\|\eta_\ell'\|^{-1})\cdot\eta_\ell'\|\eta_\ell'\|^{-1}\quad(k\geqq 2) \tag{F.7}$$

$$\eta_k\equiv\eta_k'\|\eta_k'\|^{-1} \tag{F.8}$$

…

を適用すると、

$$k<\ell \text{ ならば、} b_{k\ell}=0 \tag{F.9}$$

を満たす行列$B\equiv(b_{k\ell})_{k,\ell\in L}$を導入して、各$\eta_k$が

$$\eta_k=\sum_{\ell=1}^{\infty}b_{k\ell}\cdot\psi_\ell \tag{F.10}$$

の形をした正規直交系$\{\eta_k\}_{k\in L}$が得られる。よって、

$$\delta_{k\ell}=(\eta_k, \eta_\ell)$$

$$=\left(\sum_{p=1}^{\infty} b_{kp}\cdot\psi_p,\ \sum_{q=1}^{\infty} b_{\ell q}\cdot\psi_q\right)$$
$$=\sum_{p=1}^{\infty} b_{kp}\cdot\sum_{q=1}^{\infty}(\psi_p,\ \psi_q)\cdot\overline{b_{\ell q}},\ (k,\ \ell\in L) \tag{F.11}$$
が得られる。この式(F.11)を行列で書き直すと、

I(対角成分のみ1で、その他の成分がすべて0の

$$単位行列)=BG(\overline{B})^t \tag{F.12}$$
と書ける。ここに、Bは第k行第ℓ列の要素が$b_{k\ell}$であるような行列であり、$(\overline{B})^t$は$\overline{B}$の行番号，列番号を入れ替えて得られる転値行列である。式(F.12)の両辺の行列式を考えると、
$$1=|B|\cdot|G|\cdot|(\overline{B})^t| \tag{F.13}$$
を得、よって、Gの行列式$|G|$が$|G|\neq 0$であることがわかり、行列論からわかるように、等式
$$G\cdot G^{-1}=G^{-1}\cdot G=I \tag{F.14}$$
を満たす“Gの逆行列G^{-1}”は存在することになる。 □

付録G. 正規直交展開(フーリェ式展開)による一意的近似におけるノルム自乗誤差の最小性

本付録Gでは、1次独立な系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$が正規直交系の場合、その1次展開がノルムによる最小自乗近似を与えることの、“微分法に基づく証明法”と異なる手法で証明される。

ノルム規格化性
$$\|\psi_\ell\|=1 \text{ for any } \ell\in L \tag{G.1}$$
を満たし、式(2.52)を満たす直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$は正規直交系(orthonormal system)と呼ばれる。正規直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$を採用した場合の2式(2.50)，(2.51)は、式(2.53)を代入して、1次展開(正規直交展開)の形式に、
$$\forall\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H},$$
$$\exists\varphi_\perp\in\mathfrak{H},\ \varphi=\sum_{\ell\in L}(\varphi,\ \psi_\ell)\cdot\psi_\ell+\varphi_\perp \tag{G.2}$$
$$\wedge[\forall\ell\in L,\ (\varphi_\perp,\ \psi_\ell)=0] \tag{G.3}$$
と書き直される。

次の定理G.1は、2式(G.2)．(G.3)の1次展開の最良近似性·一意性を改めて、指摘したものであり、その証明法もいささか構成的である。

[定理G.1] **(フーリェ式直交展開の最良近似定理)**

正規直交性(orthonormality)
$$(\psi_k,\ \psi_\ell)=\delta_{k\ell} \tag{G.4}$$
を備えた系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$について、各複素定数$a_\ell$が
$$a_\ell=(\varphi,\ \psi_\ell) \tag{G.5}$$
であるときに限り、a_ℓを係数に持つ1次結合
$$\sum_{\ell\in L} a_\ell\cdot\psi_\ell \tag{G.6}$$
を用いて、可分な一般抽象ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の元φを近似するときのノルム自乗誤差
$$0\,\|\varphi-\sum_{\ell\in L} a_\ell\cdot\psi_\ell\|^2 \tag{G.7}$$
は最小であり、任意の$\varphi\in\mathfrak{H}$は一意的に、2式(G.2)，(G.3)の如く、展開される。

(証明)　各a_ℓを式(G.5)の如く選んで、φ_1を

$$\varphi_1 = \sum_{\ell \in L} a_\ell \cdot \psi_\ell \left(= \sum_{\ell \in L} (\varphi, \psi_\ell) \cdot \psi_\ell \right) \tag{G.8}$$

とおく。そのとき、φ の和分解

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \text{ where } \varphi_2 \equiv (\varphi - \varphi_1) \tag{G.9}$$

における $-\varphi_2 = \varphi_1 - \varphi$ につき、

$$\begin{aligned}
&\forall \ell \in L, (\varphi_1 - \varphi, \psi_\ell) \\
&= (\varphi_1, \psi_\ell) - (\varphi, \psi_\ell) \\
&= \sum_{k \in L} a_k \cdot (\psi_k, \psi_\ell) - (\varphi, \psi_\ell) \\
&= a_\ell - (\varphi, \psi_\ell) \quad \because \text{ 式(G.4)} \\
&= 0 \quad \because \text{ 式(G.5)}
\end{aligned} \tag{G.10}$$

が成立しているから、$\varphi_1 - \varphi$ は各 ψ_ℓ ($\ell \in L$)に直交することがわかる。

ここで、各複素定数 d_ℓ を任意に選んで得られる任意の1次結合

$$\eta \equiv \sum_{\ell \in L} d_\ell \cdot \psi_\ell \tag{G.11}$$

につき、

$$\eta - \varphi_1 = \sum_{\ell \in L} (d_\ell - a_\ell) \cdot \psi_\ell \tag{G.12}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
&(\varphi_1 - \varphi, \eta - \varphi_1) \\
&= \sum_{\ell \in L} \overline{(d_\ell - a_\ell)} \cdot (\varphi_1 - \varphi, \psi_\ell) \\
&= \sum_{\ell \in L} \overline{(d_\ell - a_\ell)} \cdot 0 \quad \because \text{ 式(G.10)} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{G.13}$$

を得て、

$\varphi_1 - \varphi$ は $\eta - \varphi_1$ と直交する

こともわかる。よって、Re [⋯] を ⋯ の実部の意として、不等式

$$\begin{aligned}
&\| \eta - \varphi \|^2 = \| (\eta - \varphi_1) + (\varphi_1 - \varphi) \|^2 \\
&= \| \eta - \varphi_1 \|^2 + 2 \cdot \mathrm{Re}[(\eta - \varphi_1, \varphi_1 - \varphi)] \\
&\quad + \| \varphi_1 - \varphi \|^2 \\
&= \| \eta - \varphi_1 \|^2 + \| \varphi_1 - \varphi \|^2 \quad \because \text{ 式(G.13)} \\
&\geqq \| \varphi_1 - \varphi \|^2
\end{aligned} \tag{G.14}$$

を得ることになるが、この不等式(G.14)において、もし、$\eta \neq \varphi_1$ であれば、等号 = は成立しない。この不成立は、φ_1 の表現式(G.8)内の、式(G.5)の如く選ばれる各複素定数 a_ℓ の最良近似性とその一意性を保証している。 □

式(G.4)の性質を備えた正規直交系 $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ で張られる閉部分空間での、一般元としての1次結合

$$\sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \psi_\ell \tag{G.15}$$

を用いて、ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の元 φ を近似する場面において、各複素定数 a_ℓ が式(G.5)のように、φ, ψ_ℓ 間の内積値(φ, ψ_ℓ)に選ばれると、その近似誤差が最小になっているという意味で、最良性を備えている事実を保証するものである。

式(G.3)を満たす1次展開式(G.2)の残余 $\varphi_\perp$ が 0 になっている式(G.6)は、ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の元 φ の**フーリェ式展開**(Fourier expansion)と呼ばれ、式(G.5)の(φ, ψ_ℓ)は、φ の第 $\ell \in L$ 番目のフーリェ式直交展開係数と称される。

［定理G.2］**(フーリェ式展開定理)**

$$\forall \ell \in L, (\varphi, \psi_\ell)=0 \Rightarrow \|\varphi\|=0 \tag{G.16}$$

が成り立つという意味で、正規直交系$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$が**完全**(complete)であるように選ばれている場合、

$$\varphi_\perp=0 \tag{G.17}$$

が成立し、この場合の1次展開式(G.2)は、

$$\forall \varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}, \varphi=\sum_{\ell\in L}(\varphi, \psi_\ell)\cdot\psi_\ell \tag{G.18}$$

と、書き直される。

(証明)　η を、

$$\eta \equiv \sum_{\ell\in L}(\varphi, \psi_\ell)\cdot\psi_\ell \tag{G.19}$$

とおくと、$\eta \in \mathfrak{H}$ である。(η, ψ_k) を計算すると、

$$\begin{aligned}&\forall k \in L, (\eta, \psi_k)\\ &=(\sum_{\ell\in L}(\varphi, \psi_\ell)\cdot\psi_\ell, \psi_k)\\ &=\sum_{\ell\in L}(\varphi, \psi_\ell)\cdot(\psi_\ell, \psi_k)\\ &=(\varphi, \psi_k) \quad \because \text{ 式(G.4)の正規直交性}\end{aligned} \tag{G.20}$$

を得、

$$\forall k \in L, (\varphi-\eta, \psi_k)=0 \tag{G.21}$$

の成立がわかる。従って、式(G.16)において、φ の代りに、$\varphi-\eta$ を採用すれば、

$$\|\varphi-\eta\|=0 \tag{G.22}$$

を得、$\varphi=\eta$ が判明し、式(G.19)を考慮すると、証明が終了したことがわかる。　□

付録H．パターンφの、最小自乗1次展開

本付録Hでは、**最小自乗法**(method of least squares)を適用して、近似誤差のノルムの自乗を最小にするように、パターン$\varphi\in\mathfrak{H}$を1次(結合式として)展開する手法が説明される。

H1．1次独立な系 $\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$ によるパターンの、最小自乗ノルム1次展開

複素定数c_ℓ の組 $\{c_\ell\}_{\ell\in L}$ について、

$$\sum_{\ell\in L} c_\ell\cdot\psi_\ell=0 \Rightarrow \forall \ell\in L, c_\ell=0 \tag{H.1}$$

が成立しているという意味で、

$$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}\text{は}\textbf{1次独立な系}\text{である} \tag{H.2}$$

としよう。問題としているパターン$\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$を、複素定数$c_\ell$の組$\{c_\ell\}_{\ell\in L}$を適切に選び、$\psi_\ell$, $\ell\in L$ の線形1次結合(a linear combination of ψ_ℓ, $\ell\in L$)$\sum_{\ell\in L} c_\ell\cdot\psi_\ell\in\mathfrak{H}$を用いて、最小自乗ノルムの意味で近似することを考えよう。

近似誤差 $\varphi-\sum_{\ell\in L} c_\ell\cdot\psi_\ell$のノルムの自乗

$$\|\varphi-\sum_{\ell\in L} c_\ell\cdot\psi_\ell\|^2 \tag{H.3}$$

を最小ならしめる各複素係数$c_\ell=c_\ell(\varphi)$ は、**連立1次方程式**

$$\sum_{\ell\in L} b_{k\ell}\cdot c_\ell=q_k, k\in L \tag{H.3}$$

where

$$b_{k\ell}\equiv(\psi_\ell, \psi_k),\ q_k\equiv(\varphi, \psi_k) \tag{H.4}$$

の解として求めることが出来る。$\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$は1次独立であると仮定しているから、付録Gを適用すると**グラム行列** $(b_{k\ell})_{k,\ell\in L}$の逆行列は必ず存在し、連立1次方程式(H.3)の解

$$\underline{C}(\varphi) \equiv \{c_\ell(\varphi)\}_{\ell \in L} \tag{H.5}$$

は求まる。

このとき、$\varphi \in \Phi$ は、

$$\exists \varphi_\perp \in \mathfrak{H},\ \varphi = \sum_{\ell \in L} c_\ell(\varphi) \cdot \psi_\ell + \varphi_\perp \tag{H.6}$$

$$\wedge [\forall \ell \in L,\ (\varphi_\perp,\ \psi_\ell) = 0] \tag{H.7}$$

と、**残余**(residue) $\varphi_\perp$ を持つ $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ の1次結合式 $\sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \psi_\ell$ として展開(1次展開)される。

もし、$\{\psi_k\}_{k \in L}$ が、

$$(\psi_k,\ \psi_\ell) = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq \ell \\ \|\psi_\ell\|^2 > 0 & \text{if } k = \ell \end{cases} \tag{H.8}$$

を満たすという意味で、**直交系**(orthogonal system)の場合、

$$\{\psi_\ell\}_{\ell \in L} \text{ は直交系} \Rightarrow \{\psi_\ell\}_{\ell \in L} \text{ は1次独立な系} \tag{H.9}$$

であるから、連立1次方程式(H.3)を解いて、各複素係数 $c_k(\varphi)$ は、

$$\forall \ell \in L,\ c_\ell(\varphi) = (\varphi,\ \psi_\ell)/(\psi_\ell,\ \psi_\ell) \tag{H.10}$$

と、与えられることがわかる。

H2. 連立1次方程式(H.3), (H.4)の導出と、1次展開式(H.6), (H.7)の証明

1次展開式(H.6), (H.7)を証明しよう。

複素数 c_ℓ の組 $\underline{C} \equiv \{c_\ell\}_{\ell \in L}$ の汎関数

$$F(\underline{C}) \equiv \|\varphi - \sum_{k \in L} c_k \cdot \psi_k\|^2$$
$$= (\varphi - \sum_{k \in L} c_k \cdot \psi_k,\ \varphi - \sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \psi_\ell) \tag{H.11}$$

を用意し、連立方程式

$$\partial F(\underline{C})/\partial c_m = 0,\ m \in L \tag{H.12}$$

の解 $\underline{C}$ が式(H.5)の $\underline{C}(\varphi) \equiv \{c_\ell(\varphi)\}_{\ell \in L}$ である。

① $\partial/\partial c_m [\sum_{k \in L} c_k \cdot \psi_k] = \psi_m$

$\because$ $\partial c_k/\partial c_m = 1$ if $m = k$, $= 0$ if $m \neq k$

② $\partial/\partial \overline{c_m}\ [\sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \psi_\ell] = 0$

$\because$ $\partial/\partial c_k,\ \partial/\partial \overline{c_m}$ は $k = m$ であっても、

1次独立であるから、$\partial c_k/\partial \overline{c_m} = 0$

を適用すれば、2式(H.11), (H.12)から

$$0 = \partial F(\underline{C})/\partial c_m$$
$$= (-\partial/\partial c_m [\sum_{k \in L} c_k \cdot \psi_k],\ \varphi - \sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \psi_\ell)$$
$$+ (\varphi - \sum_{k \in L} c_k \cdot \psi_k,\ -\partial/\partial \overline{c_m} [\sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \psi_\ell])$$
$$= -(\psi_m,\ \varphi - \sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \psi_\ell)$$
$$\text{for any } m \in L \tag{H.13}$$

が得られる。式(H.13)を変形すれば、

$$(\varphi - \sum_{\ell \in L} c_\ell \cdot \psi_\ell,\ \psi_m) = 0,\ m \in L \tag{H.14}$$

を得て、この式(H.14)を変形したものが連立1次方程式(H.3)である。

ここで、$\varphi_\perp$ を、

$$\varphi_\perp \equiv \varphi - \sum_{\ell \in L} c_\ell(\varphi) \cdot \psi_\ell \qquad \text{(H.15)}$$

とおけば、$\varphi_\perp \in \mathfrak{H}$ であることがわかり、式(H.14)に式(H.15)の $\varphi_\perp$ を代入すると、

$$\forall m \in L, \ (\varphi_\perp, \ \psi_m) = 0 \qquad \text{(H.16)}$$

が成立し、式(H.7)が得られた。式(H.15)において、$\sum_{\ell \in L} c_\ell(\varphi) \cdot \psi_\ell$ を左辺に移項したものが式(H.6)である。

付録I. モデル構成作用素 T´の近似再帰的拡張

先ず、次の性質①～④(2.1節のaxiom 1の(i), (ii), (iii)の3後半と(iv))を考えよう：

①(零元不動点性)

$\varphi = 0$ について

$T'\varphi = \varphi \in \Phi.$

②(正定数倍不変性)

$\forall \varphi \in \Phi, T'(a \cdot \varphi) = T'\varphi \in \Phi$

for any positive real number a.

③(T´の吸収性)

$\forall \varphi \in \Phi, T'(T'\varphi) = T'\varphi.$

④(非零写像性)

$\exists \varphi \in \Phi, T'\varphi \neq 0.$ □

本付録Iでは、上記の4性質①～④を満たすという意味でモデル構成作用素と呼ばれる式(I.3)の写像 T´を、式(I.12)のごとく定義される式(I.13)の写像 S にパターンモデルの差集合 $T' \cdot \Phi - T' \cdot \Phi_0$ 上で近似的に帰着させよう。正確には、S は2.1節のaxiom 1の(i), (ii), (iii)の3後半と(iv)を満たす式(2.1)の写像 T´の近似による拡張であって、T´の構造を**近似再帰**的に明らかにしている表現(定理 I 1)を求めよう。

I 1. 写像 S の定義

処理の対象とする問題のパターン φ の基礎集合(basic domain)

$$\Phi_B \equiv \{\varphi_k \mid T'\varphi_k \neq 0, k \in K\} \subset \Phi \subset \mathfrak{H} \qquad \text{(I.1)}$$

について、式(3.2)の代表パターン集合 Ω に注目し、条件

$$0 \in \Phi_0 \subset \Phi \wedge [0 \overline{\in} \Phi_B \subset \Phi] \wedge [\forall k \in K, \varphi_k \overline{\in} \Phi_0]$$
$$\wedge [\Omega \subset \Phi_B - \Phi_0] \qquad \text{(I.2)}$$

を満たすパターン集合 Φ_0 を選定する。**パターン $\varphi \in \Phi_0$ は比較的重要でないパターンである。**上記の4性質①～④を満たすという意味でモデル構成作用素と呼ばれるある1つの写像

$$T' : \Phi \rightarrow \Phi \qquad \text{(I.3)}$$

を考えている。

容易に満たされる条件

$$\| T'\varphi_i - T'\varphi_j \| > 0 \ (i \neq j) \qquad \text{(I.4)}$$
$$\wedge \ [\forall k \in K, \| T'\varphi_k \| > 0] \qquad \text{(I.5)}$$

の下で考えよう。各正数 ε_j を、不等式

$$\forall j \in K, 0 < \varepsilon_j < \min_{k \in K-\{j\}} \| T'\varphi_k - T'\varphi_j \| \\ \leqq \| T'\varphi_i - T'\varphi_j \| \text{ if } i \neq j \tag{I.6}$$

を満たすように選び、固定しておく。$T\cdot\Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\}$ と同様に、$T'\cdot\Phi_B$, $T'\cdot\Phi_0$ を定義し、中心が $T'\varphi_k$ で半径が ε_k の開球(open sphere)

$$OS(T'\varphi_k ; \varepsilon_k) \\ \equiv \{T'\varphi \mid \| T'\varphi - T'\varphi_k \| < \varepsilon_k, \varphi \in \Phi\} \subset T'\cdot\Phi \tag{I.7}$$

を用意し、$T'\cdot\Phi_0$ の、$T'\cdot\Phi$ に関する差集合

$$T'\cdot\Phi - T'\cdot\Phi^0 \\ \equiv \{T'\varphi \in \Phi \mid T'\varphi \in \Phi \wedge T'\varphi \overline{\in} \Phi_0, \varphi \in \Phi\} \\ \subset T'\cdot\Phi \subset \Phi \tag{I.8}$$

を導入する。ここに、包含性質

$$\{0\} \cup R^{++}\cdot\Phi \cup T'\cdot\Phi \subset \Phi \tag{I.9}$$

が満たされているとしている。

任意の $\varphi \in \Phi$ に対し、非負量

$$u_j(\varphi) \equiv \begin{cases} \varepsilon_j - \| T'\varphi - T'\varphi_j \| \\ \quad \cdots \| T'\varphi - T'\varphi_j \| < \varepsilon_j \text{のとき} \\ 0 \cdots \| T'\varphi - T'\varphi_j \| \geqq \varepsilon_j \text{のとき} \end{cases} \tag{I.10}$$

を求め、その後、

$$v_j(\varphi) \equiv \begin{cases} u_j(\varphi) / \sum_{k \in K} u_k(\varphi) \cdots \exists k \in K, \| T'\varphi - T'\varphi_k \| < \varepsilon_k \text{のとき} \\ 0 \cdots \forall k \in K, \| T'\varphi - T'\varphi_k \| \geqq \varepsilon_k \text{のとき} \end{cases} \tag{I.11}$$

を算出し、

$$S\varphi \equiv \sum_{j \in J} v_j(\varphi) \cdot T'\varphi_j \tag{I.12}$$

と定義される写像

$$S : \Phi \rightarrow \Phi \tag{I.13}$$

を導入する。

I 2. 擬モデル構成作用素としての S

次の定理 I 1の(ii)は、$T'\cdot\Phi - T'\cdot\Phi_0$ 上で、式(I.12)で定義される式(I.13)の写像 S が十分な精度で上記の4性質①～④を満たすモデル構成写像 T′ を近似可能ことを指摘しており、系1の③において、T′の代りに、S を想定すると、写像 S は**ベキ等性**をも近似的に満たすことになり、系1，系2を勘案すると、**写像Sは**上記の4性質①～④を近似的に満たす**"擬モデル構成作用素"である**と言えるものである。

即ち、S は T′ 自身を用い、T′の再帰構造をモデル集合 $T'\cdot\Phi - T'\cdot\Phi_0$ 上で近似的に明らかにしている写像と言えよう。

[定理 I 1] **(モデル構成作用素 T′ の近似的再帰的拡張定理)**

上記の4性質①～④を満たす式(I.3)の1つのモデル構成作用素 T′ について、包含仮定

(i) $T'\cdot\Phi - T'\cdot\Phi_0 \subset \bigcup_{k \in K} OS(T'\varphi_k ; \varepsilon_k)$ の下では、次の(ii)，(iii)が成り立つ：

(ii)(T´・Φ－T´・Φ0上での近似可能性)

$\forall T'\varphi \in T'\cdot\Phi - T'\cdot\Phi_0$,

$\| S\varphi - T'\varphi \| \leqq \max_{k\in K} \varepsilon_k$.

(iii)($T'\cdot\Phi_0$上での零写像性) $\forall T'\varphi \in T'\cdot\Phi_0$,

$S\varphi = 0$.

[定理Ｉ1の系1] 式(I.12)で定義される式(I.13)の写像Sについて、次の①´～④´が成り立つ：

①´**(零元不動点性)**

$\varphi=0$ について $S\varphi=\varphi\in\Phi$.

②´**(正定数倍不変性)**

$\forall\varphi\in\Phi, S(a\cdot\varphi)=S\varphi\in\Phi$

for any positive real number a.

③´**(SによるT´の吸収性)**

$\forall\varphi\in\Phi, S(T'\varphi)=S\varphi$.

④´**(非零写像性)** $\exists\varphi\in\Phi$, $S\varphi\neq0$. □

[定理Ｉ1の系2] (Φ_B上でのS, T´の一致性)

式(I.12)で定義される式(I.13)の写像Sについて、

$\forall\varphi\in\Phi_B, S\varphi=T'\varphi$.

(定理Ｉ1の証明)

(一)包含仮定(i)の下では、

$T'\varphi\in T'\cdot\Phi - T'\cdot\Phi_0$に対し、

$$\exists k\in K, T'\varphi\in OS(T'\varphi_k;\varepsilon_k) \tag{I.14}$$

がいえ、$OS(T'\varphi_k;\varepsilon_k)$の定義式(I.7)より

$$\| T'\varphi - T'\varphi_k \| < \varepsilon_k \tag{I.15}$$

の成立がわかり、よって、式(I.10)の$u_j(\varphi)$の定義式(I.10)より、$u_k(\varphi)>0$がいえる。従って、$v_k(\varphi)$の定義式(I.11)より、$v_k(\varphi)$の分母$\sum_{j\in K} u_j(\varphi)$は、正の量、つまり、

$$\sum_{j\in K} u_j(\varphi)>0 \tag{I.16}$$

であることがわかる。このとき、2式(I.15), (I.16)より、

$$0<v_k(\varphi)\leqq1 \tag{I.17}$$

$$\wedge \sum_{j\in K} v_j(\varphi)=1 \tag{I.18}$$

である。よって、式(I.13)の写像Sの定義式(I.12)を考慮すると、表現

$$S\varphi - T'\varphi = \sum_{j\in K} v_j(\varphi)\cdot\varphi^j - T'\varphi$$

$$=\sum_{j\in K} v_j(\varphi)\cdot T'\varphi_j - \sum_{j\in K} v_j(\varphi)\cdot T'\varphi$$

$$\because \quad 式(I.18)$$

$$=\sum_{j\in K} v_j(\varphi)\cdot(T'\varphi_j - T'\varphi) \tag{I.19}$$

を得、この表現式(I.19)に、ノルムに関する3角不等式

$$\| \Sigma_k b_k\cdot\eta_k \| \leqq \Sigma_k | b_k | \cdot \| \eta_k \|$$

for any complex numbers b_k and any $\eta_k\in\mathfrak{H}$ (I.20)

を適用すると、式(I.19)より、不等式

$$\| S\varphi - T'\varphi \| \leqq \sum_{j\in K} v_j(\varphi)\cdot \| T'\varphi_j - T'\varphi \| \tag{I.21}$$

が成り立つ。

更に、不等式(I.21)は、不等式(I.15)を考慮すると、

$$\begin{aligned}&\| S\varphi - T'\varphi \| \\ &\leqq \Sigma_{v_j(\varphi)>0, j\in K}\, v_j(\varphi)\cdot \varepsilon_j \quad \because\ 式(I.17) \\ &= \sum_{j\in K} v_j(\varphi)\cdot \varepsilon_j \\ &= [\max_{k\in K} \varepsilon_k]\cdot \sum_{j\in K} v_j(\varphi) \\ &= [\max_{k\in K} \varepsilon_k] \quad \because\ 式(I.18)\end{aligned} \tag{I.22}$$

を得て、(ii)の成立が示された。

(二)包含仮定(i)の下では、$T'\varphi \in T'\cdot\Phi_0$に対し、

$$\forall k\in K, T'\varphi \overline{\in} OS(T'\varphi_k\ ;\ \varepsilon_k) \tag{I.23}$$

を得て、$OS(T'\varphi_k\ ;\ \varepsilon_k)$ の定義式(I.7)より、

$$\forall k\in K, \| T'\varphi - T'\varphi_k \| \geqq \varepsilon_k \tag{I.24}$$

が得られ、2式(I.10), (I.11)より、

$$\forall k\in K, u_k(\varphi)=0, v_k(\varphi)=0 \tag{I.25}$$

がわかる。S の定義式(I.12)より、

$$S\varphi = 0 \tag{I.26}$$

という(iii)が成り立つ。

(定理I 1の系1, 系2の証明) $0\in\Phi_0$であるから、T'が上記の①を満たすことより、$T'\varphi=0$ を得て、(iii)より、$S\varphi=0$がわかり、先ず、①´の成立がわかった。

次に、②´については、T'が上記の②を満たすことより、a を任意の正定数として、2式(I.10), (I.11)より、

$$\forall j\in K, u_j(a\varphi)=u_j(\varphi)$$
$$\therefore\ v_j(a\varphi)=v_j(\varphi)$$

がわかり、S の定義式(I.12)より、

$$S(a\varphi)=S\varphi$$

を得て、示された。

また、③´については、T'が上記の③を満たすことより、2式(I.10), (I.11)より、

$$\forall j\in K, u_j(T'\varphi)=u_j(\varphi)$$
$$\therefore\ v_j(T'\varphi)=v_j(\varphi)$$

がわかり、S の定義式(I.12)より、

$$S(T'\varphi)=S\varphi$$

を得て、示された。

最後に、④´については、系2を証明すれば、その成立は明らかである。系2の成立を示そう。
式(I.10)より、

$$u_j(\varphi_j)=\varepsilon_j>0$$
$$\forall k\in K-\{j\},\ v_k(\varphi_j)=0 \quad \because\ 式(I.6)$$

を得て、式(I.11)より、

$$v_j(\varphi_j)=1$$
$$\forall k\in K-\{j\},\ v_k(\varphi_j)=0$$

を得て、Sの定義式(I.12)より、

$$S\varphi_j = T'\varphi_j \neq 0 \quad \because \quad \text{式(I.1)}$$

を得て、系2の成立が示された。 □

付録J. モデル構成作用素Tの逆問題

モデル構成作用素T、処理の対象とする問題のパターン集合 Φ とのなす対【Φ, T】の満たすべき公理 axiom 1に注目し、パターン集合 Φ に関する再帰領域方程式の解 Φ が式(2.2)のように求められたとしよう。

本章では、モデル構成作用素 $T: \Phi \to \Phi$ の**逆問題**

「パターン $\eta \in \Phi$ が与えられた場合

$$\exists \varphi \in \Phi, T\varphi = \eta \in \Phi \tag{J.1}$$

の1つの解

$$\varphi = T^{+}\eta \tag{J.2}$$

を求めよ」

の部分的解が、**逐次的手法**(step by step method)を適用して求められる。つまり、

M′をMの選定された有限部分集合として、

$t \to \infty$ につれて、

$$|(T\varphi_t)(x) - \eta(x)| \to 0 \text{ for any } x \in M' \tag{J.3}$$

が成立する実数値関数 φ_t の列

$$\varphi_t(x), \ x \in M', t = 0, 1, 2, \cdots \tag{J.4}$$

を求めよう。

理解のためには、例えば、可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の特別な場合として、$L_2(M; dm)$ で考えておけばよい。

J1. Tの逆問題の1つの定式化

Tの逆問題を次のように定式化しよう。

$$\eta \in R^{++} \cdot (\Phi_B \cup T \cdot \Phi_B) \quad \because \quad \text{式(2.2)} \tag{J.5}$$

であれば、方程式

$$T\varphi = \eta \tag{J.6}$$

の解 φ が少なくとも、1つ存在することに注意しておこう。

【Tの逆問題】

Mの有限部分集合M′と、式(J.5)の実数値関数

$$\eta = \eta(x), \ x \in M \tag{J.7}$$

とが与えられたとき、式(J.6)の部分方程式

$$(T\varphi)(x) = \eta(x), \ x \in M' \tag{J.8}$$

の解の1つの実数値関数

$$\varphi = \varphi(x), \ x \in M' \tag{J.9}$$

を求めよ。 □

J2. Tの逆問題を解く逐次的手法

Tの逆問題を解く逐次的手法(step by step method)は次の①，②，③で与えられる。

先ず、次の3条件を要請する：

[条件1]

Mの**有限部分集合**M′（⊆M）を選定し、固定する。

[条件2]

2つの、十分小の正関数

$$\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x)\ (>0 \text{ for any } x\in M') \tag{J.10}$$

を選定·固定する。

[条件3]

次の3種類の、M′(⊂M) の部分集合が求まる。

$$\begin{aligned} &M^{-}{}_{T}(\psi_1,\ \psi_2)\\ &\equiv\{x\in M' \mid [\psi_1(x)\leqq\psi_2(x)\Rightarrow(T\psi_1)(x)>(T\psi_2)(x)]\\ &\vee[\psi_2(x)<\psi_1(x)\Rightarrow(T\psi_1)(x)>(T\psi_2)(x)]\} \end{aligned} \tag{J.11}$$

$$\begin{aligned} &M^{0}{}_{T}(\psi_1,\ \psi_2)\\ &\equiv\ \{x\in M' \mid [\psi_1(x)\leqq\psi_2(x)\Rightarrow(T\psi_1)(x)=(T\psi_2)(x)]\\ &\vee[\psi_2(x)<\psi_1(x)\Rightarrow(T\psi_1)(x)=(T\psi_2)(x)]\} \end{aligned} \tag{J.12}$$

$$\begin{aligned} &M^{+}{}_{T}(\psi_1,\ \psi_2)\\ &\equiv\{x\in M' \mid [\psi_1(x)\leqq\psi_2(x)\Rightarrow(T\psi_1)(x)<(T\psi_2)(x)]\\ &\vee[\psi_2(x)<\psi_1(x)\Rightarrow(T\psi_1)(x)<(T\psi_2)(x)]\} \end{aligned} \tag{J.13}$$

□

このとき、

$$\forall q\in\{-,0,+\},\ M^{q}{}_{T}(\psi_1,\ \psi_2)=M^{q}{}_{T}(\psi_2,\ \psi_1) \tag{J.14}$$

$q\neq r\Rightarrow$

$$M^{q}{}_{T}(\psi_1,\ \psi_2)\cap M^{r}{}_{T}(\psi_1,\ \psi_2)=\phi\ \text{(the empty set)} \tag{J.15}$$

$$M'=\cup_{q\in\{-,0,+\}}\ M^{q}{}_{T}(\psi_1,\ \psi_2) \tag{J.16}$$

が成り立つ。

Tの逆問題を解くの操作は次の①，②，③で記述されるとする：

①**初期条件**(initialization)

パターン$\eta\in\mathfrak{H}=L_2(M;dm)$を開始時刻$t=0$の$\varphi_t|_{t=0}$に入力する。つまり、

$$\varphi_t(x)\mid_{t=0}=\eta(x),\ x\in M'. \tag{J.17}$$

②**帰納**(recursion)

$t\in\{0,1,2,\cdots\}$として、**第t段階の近似解**

$$\varphi_t(x),\ x\in M' \tag{J.18}$$

から、第(t+1)段階の近似解

$$\varphi_{t+1}(x),\ x\in M' \tag{J.19}$$

を、次のように計算する。

先ず、仮に、$\varphi_{t+1}(x)$を、

$$\varphi_{t+1}(x)=\varphi_t(x)+(\Delta\varphi_t)(x),\ x\in M' \tag{J.20}$$

where

$$(\Delta\varphi_t)(x)=\varepsilon_1(x)\cdot[(T\varphi_t)(x)-\eta(x)] \tag{J.21}$$
とおく。但し、
$$(T\varphi_t)(x),\ x\in M' \tag{J.22}$$
を計算するときに、$x\in M-M'$ での $\varphi_t(x)$ の値を必要とする場合は、
$$x\in M-M' \text{ での } \varphi_{t-1}(x) \text{ の値を使う} \tag{J.23}$$
と約束する。

その後、次の②−1，②−2，②−3の処置を取る。

②−1　ある点 $x\in M'$ において
$$(T\varphi_t)(x)>\eta(x) \tag{J.24}$$
の場合

$x\in M^-_T(\varphi_t,\varphi_{t+1})$ についてだけ、2式(J.20)，(J.21)の計算を行う。

②−2　ある点 $x\in M'$ において
$$(T\varphi_t)(x)=\eta(x) \tag{J.25}$$
の場合

如何なる処置も取らない。

②−3　ある点 $x\in M'$ において
$$(T\varphi_t)(x)<\eta(x) \tag{J.26}$$
の場合

$x\in M^+_T(\varphi_t,\varphi_{t+1})$ についてだけ、2式(J.20)，(J.21)の計算を行う。

③**終了**(termination)

誤差 ε_2 内の近似

$\exists t\in\{0,1,2,\cdots\}$,
$$|\varphi_{t+1}(x)-\varphi_t(x)|<\varepsilon_2(x) \text{ for any } x\in M' \tag{J.27}$$
が成立するならば、

方程式(J.8)の近似解として、第t段階で計算された式(J.18)のパターン φ_t を採用する。□

J3. 求解過程の解析

上記の②−1，②−2，②−3が不等式(J.27)を満たす方向に φ_t を φ_{t+1} へ更新していることを説明しよう。

②−1　$(T\varphi_t)(x)>\eta(x)$ の場合について：
$$(T\varphi_t)(x)>(T\varphi_{t+1})(x) \tag{J.28}$$
が成り立つことを確かめれば、
$$(T\varphi_t)(x)-\eta(x)$$
$$>(T\varphi_{t+1})(x)-\eta(x) \tag{J.29}$$
が成り立つ。このとき、
$$(T\varphi_{t+1})(x)-\eta(x)\geqq 0 \tag{J.30}$$
が成り立つことも、$\varepsilon_1(x)$ を十分小に選定していることから、成立している。

式(J.28)の成立を示そう。
$$(T\varphi_t)(x)>\eta(x) \tag{J.31}$$
より、

$(\Delta\varphi_t)(x)>0 \quad \because$ 式(J.21) (J.32)

$\therefore \quad \varphi_{t+1}(x)>\varphi_t(x) \quad \because$ 式(J.20) (J.33)

が成立しているが、

$x \in MB^-{}_T(\varphi_t, \varphi_{t+1})$ (J.34)

であるから、不等式(J.28)が成り立つことがわかった。

②−2 $(T\varphi_t)(x)=\eta(x)$の場合について：

$(\Delta\varphi_t)(x)=0$ (J.35)

$\therefore \quad \varphi_{t+1}(x)=\varphi_t(x)$ (J.36)

$\therefore \quad T\varphi_{t+1}(x)=T\varphi_t(x)$ (J.37)

を得るから、如何なる処置も取らなくてよい。

②−3 $(T\varphi_t)(x)<\eta(x)$ の場合について：

$(T\varphi_t)(x)<(T\varphi_{t+1})(x)$ (J.38)

がに成り立つことを確かめれば、

$(T\varphi_t)(x)-\eta(x)$

$<(T\varphi_{t+1})(x)-\eta(x)$ (J.39)

が成り立つ。このとき、

$(T\varphi_{t+1})(x)-\eta(x)\leqq 0$ (J.40)

が成り立つことも、$\varepsilon_1(x)$ を十分小に選定していることから、成立している。

式(J.38)の成立を示そう。

$(T\varphi_t)(x)<\eta(x)$ (J.41)

より、

$(\Delta\varphi_t)(x)<0 \quad \because$ 式(J.21) (J.42)

$\therefore \quad \varphi_{t+1}(x)<\varphi_t(x) \quad \because$ 式(J.20) (J.43)

が成立しているが、

$x \in MB^+{}_T(\varphi_t, \varphi_{t+1})$ (J.44)

であるから、不等式(J.38)が成り立つことがわかった。 □

（著者　すずき　しょういち　文教大学情報学部　受付 平成12年9月13日）