SS大分類関数 BSC の適応的構成への、計算論的学習理論の適用

鈴木　昇一

Application of Computational Learning Theory to Adaptive Construction of SS Rough-Classifier

Shoichi Suzuki

あらまし

パターン認識の数学的理論（**SS理論**）では、入力パターンφに対応するパターンモデル Tφを求め、Tφから不動点パターンモデルを連想する形で、φの帰属するカテゴリを決定する多段階パターン変換連想形不動点認識法（**SS連想形不動点認識法**）が考えられている。

訓練データ上で定義された出現確率分布を求めながら、ランダムな分類機能から開始し訓練データに関する分類誤差を次第に減少させることの可能な2カテゴリ分類規則を学習できる“適応的ブースティングアルゴリズム **Ada Boost**”を適用できるように、SS連想形不動点認識法を可能ならしめる３構成基本要素（3つのaxiom 1～3を各々、満たさなければならないモデル構成作用素 T、類似度関数 SM、大分類関数 BSC）の内の最後の大分類関数 BSC の構造形式が先ず、設定される。その後、設定された大分類関数 BSC のカテゴリ分類機能を改良できることが示される。

SS理論に計算論的学習の働きが取り入れられ、SS理論には数理形態学（mathematical morphology）、wavelet理論、動径基底関数族による学習理論、ニューラルネット理論の成果を取り入れ可能なことは既に示されている諸事実を思い起こすと、本研究によってSS理論の枠組の一般性を益々、正当付ける1つの証拠が明らかにされたといえよう。

キーワード

パターン認識の数学的理論（SS理論）　　モデル構成作用素　　類似度関数　　大分類関数
不動点連想形多段階認識法　　計算論的学習理論　　2カテゴリ分類　　ブースティング
動径基底関数　　訓練データの出現確率

Abstract

A recognition system RECOGNITRON which has been presented in a mathematical theory (i.e.SS theory) of recognizing patterns suggested by S.Suzuki gets a corresponding pattern-model Tφ of an input pattern φ in question to be recognized,and determines a category to which φ belongs so that a fixed-point pattern-model that appeared on a final stage of a muti-stage structural-fertilization transformation of pattern-models may be recalled in such a way of solving a fixed-point equation of associative reconition about $T\varphi$. RECOGNITRON necessitates a model-construction opearator T, a similarity-measure function SM and a rough classifier (binary-state classifier) BSC in order to search a category to which an input pattrn φ belongs.

The classifier BSC is a mapping from a direct product $\Phi \times J$ of a pattern-space Φ and a set J of category numbers to {0,1}. If $BSC(\varphi, j)=1$ then there is a possibility that pattern φ may belong to the jth category.

An application of an adaptive boosting algorithm Ada Boost appeared in a computational learning theory will help SS-theory to construct BSC which can give the possibility of that whether a pattern-model $T\psi$ obtained at any half-waystage of recognition may belong to a category or not.

"Boosting" is a general method for improving the performance of any learning algorithm. In the theory, boosting can be used to significantly reduce the error of any "weak" learning algorithm that consistently generates BSC which need only be a little bit better than random guessing.

Previous papers took into SS theory parts of a mathematical morphology, a wavelet theory and a theory of radial-basis function.Similarly it is proved in this paper that SS theory has a general frame of accepting the computational learning.
Key words : a mathematical theory of recognizing patterns (SS theory)　model-construction operator　similarity-measure function　rough classifier　multi-stage recognition of fixed-point searching type　computational learning theory　two-category classification　boosting　radial-basis function　probability of occurrence about training set of patterns

1. まえがき

本論文では、S.Suzukiが提案した認識システム **RECOGNITRON** に内蔵させなければならない大分類関数 BSC を計算論的学習によって決定する手法が研究される（新規性)。

処理の対象とする問題の入力パターン φ のパターンモデル $T\varphi$ を導入し、初期段階（第0認識段階）のパターン $\varphi[0]$ を

$$\varphi[0]=T\varphi \tag{1.1}$$

と設定する。第s（=0, 1, 2, …）認識段階のパターン $\varphi[s]$ から、パターンモデルの集合

$$\exists \psi_q,\ \varphi_q[s+1]=T\psi_q[s+1],\ q=1\sim n_t \tag{1.2}$$

を派生させ、その内の1つ $\varphi_r[s+1]$ $(1\leqq r\leqq n_t)$ を選び、第 $(s+1)$ 認識段階のパターン $\varphi[s]$ を

$$\varphi[s+1]=\varphi_r[s+1] \tag{1.3}$$

と、決定する。この決定に至る段階が第 s 認識段階から第（s+1）認識段階への、帰納推論による探索である。終了条件

$$\exists j\in J,\ SM(\varphi[t],\ \omega_j)=1 \tag{1.4}$$

を満たす第t段階（最終認識段階）のパターンモデル

$$\varphi[t]\ =T\psi[t] \tag{1.5}$$

を含むようなパターンモデルの系列

$$\varphi[0],\ \varphi[1],\ \varphi[2],\ \cdots,\ \varphi[t] \tag{1.6}$$

を求めれば、**帰納推論に基づいた“SS理論［B3］,［B4］での不動点多段階想起形認識”**による2つの情報処理結果

（イ）入力パターン φ は第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属する（パターン認識） (1.7)

（ロ）入力パターン φ は $\varphi[t]$ として再生される（パターン想起） (1.8)

が得られる。この想起形認識の働きを備えたのが認識システム **RECOGNITRON** である。

認識システム RECOGNITRON を構成するのには、axiom 1を満たすパターン集合 Φ と、モデル構成作用素 T との対［Φ, T］を選定し、axiom 2, 3を各々、満たす類似度関数 SM, 大分類関数 BSC を選定すればよい。そうすれば、文献［B3］の定理A 4.1を適用しカテゴリ選択関数 CSF の構造形式が定まり、文献［B3］の付録5での3式(A5.3)～(A5.5)による設定より、構造受精変換 TA(μ)T が確定し、構造受精変換の不動点を探索する形式で、“入力パターン $\varphi \in \Phi$ の**カテゴリ帰属知識**(categorical membership-knowledge)を処理する多段階パターン変換によるRECOGNITRONの不動点多段階想起形認識”が獲得されることになる。

パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属するカテゴリ候補に関する解釈

BSC(φ, j)＝1 ならば、パターン $\varphi \in \Phi$ の
帰属するカテゴリ候補の1つは
第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ である (1.9)

を可能にする**大分類関数**(rough classifier, binary-state classifier)と呼ばれる式(4.1)の**2値関数**BSCが、4章のaxiom 3 を満たすものとして導入されたとしよう。この際、注意すべきは、文献［B3］の付録E, axiom 4の**カテゴリ選択関数**(category-selection function)CSF(φ, γ)の定義での(iii)の場合からわかるように、

BSC(φ, j)＝0 であっても、第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ は
パターン $\varphi \in \Phi$ の帰属するカテゴリ候補の1つではない、
と言い切れない (1.10)

としていることである。また、4章のaxiom 3 の(i)からわかるように、式(4.4)の**カテゴリ間の相互排除性**を公理として要請していない事実に注意しておこう。

適切に多数の決定規則を階層的に配備すれば、順次細かい決定に進むことができ、最終的に入力パターン(処理の対象とする問題のパターン)の帰属するであろう唯1つのカテゴリを得ることができる。入力パターンに m 個のカテゴリ候補がある場合、有意情報、例えば、この入力パターンから抽出された特徴を用い、このカテゴリ候補を2分割していって(2カテゴリ分類)、最終的に唯一のカテゴリに到達するのには、$\log_2 m$ 個の有意情報を必要とする。

入力パターンから抽出され、与えられた全特徴を持つ出発節点(start node)からその入力パターンの帰属するであろう唯1つのカテゴリを持つ目標節点(goal node)へ至る順路(path)を探索する過程は、閉路(circuit)のない連結グラフ(connected graph)、つまり、**木**(tree)によって表すことが出来、節点(node)の集合と節点から節点への枝(edge)の集合との2つの集合からなるグラフ(状態空間)において、出発節点から出発し、たどり得る枝を循環路(cycle)を形成しないようにたどっていけば1つの木が得られるが、この木が探索木(search tree)である。2カテゴリ分類を階層的に何回か行えば(多段階分類；multi-stage classification)、入力パターンは複数のカテゴリの内の、どの唯1つのカテゴリに帰属するかが判明する。決定木の理論は正に、多段階分類を行える探索木を導けるた

めには、どのようなカテゴリ分類規則を階層的に配備したらよいかを論じるものである。

一種の探索木を生成しながら、想起形認識の働きを具現化するのが認識システムRECOGNITRONである。

訓練データ上で定義された出現確率分布の近似をその都度求めながら、従来の計算論的学習アルゴリズム［A8］を適用し、SS理論における多段階分類のために用いられる大分類関数BSCを、適応的に構成する手法が本論文では研究される。

複数の候補カテゴリが想定される場合、パターンφがその内の1つのカテゴリに帰属するか、しないかを決定することを、**2カテゴリ分類**(binary classification)という。**ユークリッド空間パターン**(有限次元実数列)を採用し**単段階パターン変換**を基調とした2カテゴリ分類に関する汎化能力を学習の働き(学習アルゴリズム)によって如何に改善し、獲得するかについてはある程度、詳細な数理解析が可能である。

計算論的学習理論(computational learning theory)とは、機械における学習問題を計算可能性理論を駆使した帰納推論として定式化し、学習に必要な計算量を解明したり、学習アルゴリズムを性能的に評価したりすることを目指す理論計算機科学の1分科である。本研究では、**パターン**の表現空間として**ヒルベルト空間**(無限次元関数空間)を採用し、**多段階パターン変換**を基調とした2カテゴリ分類の働きを計算論的学習理論の立場から、構成する手段を研究する。学習の問題については、SS理論のaxiom 3を満たす大分類関数の設計問題として論じる。

本論文では、パターン認識理論における典型的な2カテゴリ分類機能を計算論的学習により獲得できるブースティングアルゴリズムが説明され、その後、このアルゴリズムを適用すれば、大分類関数 BSC のカテゴリ分類機能を改良できることが示される(有効性)。

本論文の構成は次のようになっている。

処理の対象とする問題のパターンφの集合Φをある可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$のある部分集合と考え、$\varphi \in \Phi$を$T\varphi \in \Phi$へと変換し、式(2.1)のモデル構成作用素 T を考える。

2章では、パターンモデル$T\varphi$と原パターンφとの間に**同一知覚原理**が要請されるとすれば、対［Φ, T］がaxiom 1を満たさなければならないことが説明される。

3章では、処理の対象とする問題のパターンφが第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターンω_jと似ている程度を与える測度としての類似度関数 SM というものがaxiom 2を満たさなければならないことが説明される。

4章では、カテゴリを抽出する能力を備え、処理の対象とする問題のパターンφから、その帰属する可能性のあるカテゴリを抽出するためには、大分類関数 BSC が満たさなければならないaxiom 3が説明される。

5章では、先ず、ブースティングアルゴリズムが説明され、その後、このアルゴリズムを適用すれば、大分類関数 BSC のカテゴリ分類機能を改良できることが示される。

尚、これまでの文献BでのS.Suzuki諸研究に関連して、付録A～Fが設けられている。

各付録の内容について、簡単に説明しておこう。

付録Aでは、axiom 1,（i),（ii),（iii)の3後半と,（iv)を満たす式(2.1)のモデル構成作用素 T を2例、構成してみよう。

付録Bでは、axiom 1,（i),（ii),（iii)の3後半と,（iv)を満たす式(2.1)のモデル構成作用素 T を、可能な限り、各カテゴリの代表パターンへ変換するようなカテゴリ総数だけの変形除去座標を求め、構成しよう。

付録Cでは、3.2節の内容の一般化する。つまり、相違度関数 g_j に基づいて、axiom 2を満たす類似度関数 SM が構成される。

付録Dでは、axiom 2を満たす**類似度関数 SM** を2つの閾値 $s_0(j)$, $s_1(j)$ の系を使って、連続的、或いは、不連続的に変換し、最大類似度 1 への、かつ、最小類似度 0 へのその分離の程度を改良する構成法を示して見よう。

付録Eでは、2つのパターン φ, $\eta \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ の特徴間距離 Fdis(φ, η)内の重み <u>W</u> を、その帰属するカテゴリとその抽出された特徴量とがが判明しているサンプルパターンの集合を用いて決定する手法がエントロピー概念の導入の下で、研究される。

2つのパターン φ, $\eta \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ の特徴間距離 Fdis(φ, η)内の重み <u>W</u> は付録Eで決定されるが、付録Fでは、この Fdis(φ, η)を用いて、axiom 2を満たす類似度関数 SM を構成する手法が、付録Cの研究成果を利用し、研究される。

2. axiom 1と、処理対象パターン集合 Φ とモデル T との対 [Φ, T]

本章では、パターンモデル Tφ と原パターン φ との間に同一知覚原理が要請されるとすれば、対 [Φ, T] がaxiom 1を満たさなければならないことが説明される。

2.1 処理の対象とするパターン φ の集合 Φ とモデル構成作用素 T の対 [Φ, T] の構成

Tφ を見たり聞いたりしたならば、φ と同じように見えたり聞こえたりするような“パターン $\varphi \in \Phi$ に対応するパターンモデル(原パターン φ について**同一知覚原理を満たすパターモデル**) T$\varphi \in \Phi$ を出力する“モデル構成作用素”

$$T: \Phi \rightarrow \Phi \tag{2.1}$$

を考えよう。ここに、Φ は処理の対象とする問題のパターン Φ の集合であり、次の定理2.1の式(2.2)で与えられる。

実は、対 [Φ, T] が次のaxiom 1を満たすように構成されるとき、式(2.1)の写像 T は**モデル構成作用素**(model-construction operator)と呼ばれる [B3], [B4] ：

<u>Axiom 1</u> **(パターン集合Φとモデル構成作用素 Tとの対【Φ, T】の満たすべき公理)**

(i) (零元の**T-不動点性**；fixed-point property of zero element under mapping T) $0 \in \Phi \wedge T0 = 0$.

(ii) (**錐性**, 正定数倍吸収性；cone property)

$\forall \varphi \in \Phi$, $a \cdot \varphi \in \Phi \wedge T(a \cdot \varphi) = T\varphi$ for any positive real number a.

(iii) (**ベキ等性**, 埋込性；idempotency, embeddedness)

$\forall \varphi \in \Phi$, $T\varphi \in \Phi \wedge T(T\varphi) = T\varphi$.

(iv) (写像 T の**非零写像性**；non-zero mapping property of T) $\exists \varphi \in \Phi$, $T\varphi \neq 0$. □

上述のaxiom 1を満たす対 [Φ, T] の構成が可能であることは、次の定理2.1 [B3], [B4] で指摘される。

[定理2.1] **(パターン集合 Φ とモデル構成作用素 T の対【Φ, T】基本構成定理)**

写像 T がaxiom 1の(i), (ii), (iii)の3後半, 並びに、(iv)を満たすとしよう。そして、パターンと判明している φ の集合 Φ_B が与えられたとしよう。ならば、処理の対象とする問題のパターン φ の集合 Φ を

$$\Phi = R^{++}\cdot(\Phi_B \cup T\cdot\Phi_B)$$
$$\equiv \{r^{++}\varphi \mid \varphi\in\Phi_B,\ r^{++}\in R^{++}\}$$
$$\cup\{r^{++}T\varphi \mid \varphi\in\Phi_B,\ r^{++}\in R^{++}\}$$
where R^{++} is a set of positive real numbers (2.2)

の如く設定すれば、

$$\Phi\supset\{0\}\wedge[a\cdot\Phi=\Phi \text{ for any } a\in R^{++}]\ \wedge$$
$$[T\cdot\Phi=T\cdot\Phi B\subset\Phi] \tag{2.3}$$

が成立し、axiom 1の(i), (ii), (iii)の3前半をΦは満たし、結局、対 [Φ, T] はaxiom 1を満たす。 □

SS理論[B1]～[B6]では、パターンφは可分な(separable)**一般抽象ヒルベルト空間**(Hilbert space) $\mathfrak{H}$ の元とする。内積は(φ,η)と表され、ノルムは $\|\varphi\|\equiv\sqrt{(\varphi,\varphi)}$で表される。ここに、$\mathfrak{H}$が可分とは、稠密な(dense)可算部分集合が$\mathfrak{H}$に存在することを指す。$\varphi,\eta\in\mathfrak{H}$間のノルム距離 $\|\varphi-\eta\|=\sqrt{(\varphi-\eta,\varphi-\eta)}$に注意しておこう。

理解のためには、例えば、特別な場合として、内積(φ,η)を、

$$(\varphi,\eta)=\int_M dm(x)\ \varphi(x)\cdot\overline{\eta}(x) \tag{2.4}$$

ここに、$\overline{\eta}$はηの複素共役(a complex conjugate of η)であり、

M ： q次元ユークリッド空間 R_qの可測部分集合 (2.5)

dm(x)：正値Lebesgue-Stieltjes式測度 (2.6)

$x=\langle x_1, x_2, \cdots, x_q\rangle\in M(\subseteq R^q)$ (2.7)

とする可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}=L_2(M;dm)$で考えておけばよい [B1]。

2.2 モデル構成作用素 T の簡単な例

文献 [B23] の式(2.29)のパターンモデル Tφはaxiom 1, (i), (ii), (iii)の3後半と(iv)を満たし、その形は次の通り： M をq次元ユークリッド空間 R^qの可測部分集合として、

振幅の零性

$$\varphi(x)/\sup_{y\in M}|\varphi(y)|$$
$$=0 \text{ if } \sup_{y\in M}|\varphi(y)|=0 \tag{2.8}$$

を要請して、

$$(T\varphi)(x)=\begin{cases}1 & \text{if } 2/3<\varphi(x)/\sup_{y\in M}|\varphi(y)|\leqq 1\\ 2/3 & \text{if } 1/3<\varphi(x)/\sup_{y\in M}|\varphi(y)|\leqq 2/3\\ 0 & \text{if } -1/3<\varphi(x)/\sup_{y\in M}|\varphi(y)|\leqq 1/3\\ -2/3 & \text{if } -2/3\leqq\varphi(x)/\sup_{y\in M}|\varphi(y)|<-1/3\\ -1 & \text{if } -1\leqq\varphi(x)/\sup_{y\in M}|\varphi(y)|<-2/3\end{cases} \tag{2.9}$$

と定義された式(2.1)の写像 T はaxiom 1, (i), (ii), (iii)の3後半と(iv)を満たす。よって、定理2.1を適用すれば、axiom 1を満たす対 [Φ, T] が得られる。

3. axiom 2と類似度関数 SM

本章では、処理の対象とする問題のパターンφが第j∈J番目のカテゴリ$\mathfrak{C}$j の代表パターンω_j

と似ている程度を与える測度としての類似度関数 SM というものがaxiom 2を満たさなければならないことが説明される。

3.1 axiom 2と類似度関数 SM

“正常なパターン”(well-formed pattern)は、ある1つの**カテゴリ** $\mathfrak{C}_j$(第$j \in J$番目の類概念)のみに帰属しているものとし、このような $\mathfrak{C}_j$ の集まり(有限集合)

$$\underline{\mathfrak{C}} \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid j \in J\} \tag{3.1}$$

を想定する。$\mathfrak{C}_j$の備えている性質を典型的に備えている**代表パターン**(prototypical pattern) ω_j ($\neq 0$)を1つ選定する。$\mathfrak{C}_j$は、典型(prototype)としての代表パターン ω_j を中心とした緩やかなカテゴリであることを仮定したことに注意しておく。ここに、

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} \subset \Phi \tag{3.2}$$

が式(3.1)の全カテゴリ集合 $\underline{\mathfrak{C}}$ に対応する代表パターンの集合である。式(3.2)の系 Ω は、

複素定数 a_j の組 $\{a_j \mid j \in J\}$ について

$$\sum_{j \in J} a_j \cdot \omega_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J,\ a_j = 0 \tag{3.3}$$

が成立しているという意味で、**1次独立**(linearly independent)でなければならない。

axiom 1を満たす式(2.1)のモデル構成作用素 T によって、式(2.9)の代表パターン集合 Ω が変換されて得られる系

$$T \cdot \Omega \equiv \{T\omega \mid \omega \in \Omega\} = \{T\omega_j \mid j \in J\} \tag{3.4}$$

も1次独立であると要請する。このとき、**類似度関数**(similarity-measure function)

$$SM : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \tag{3.5}$$

を導入し、

$SM(\varphi, \omega_j) = 1, 0$ に従って、パターン $\varphi \in \Phi$ は各々、ω_j と
確定的な類似関係、相違関係にあり、また、$0 < SM(\varphi, \omega_j) < 1$ の
場合は、**曖昧な類似・相違関係**にある　(3.6)

と、SMを解釈しよう。関数SMは次のaxiom 2を満たすように構成されねばならない。Kronecker(クロネッカー)のデルタ記号

$$\delta_{ij} = 1 \ \text{if}\ i = j, \ = 0 \ \text{if}\ i \neq j \tag{3.7}$$

を導入しておく。

<u>Axiom 2</u> **(類似度関数SMの満たすべき公理)**

(i)(規格化直交性;orthonormality)

$$\forall i,\ \forall j \in J,\ SM(\omega_i, \omega_j) = \delta_{ij}.$$

(ii)(規格化条件,正規性;probability condition, normality)

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \sum_{j \in J} SM(\varphi, \omega_j) = 1.$$

(iii)(写像 T の下での不変性;invariance under mapping T)

$$\forall \varphi \in \Phi,\ \forall j \in J,\ SM(T\varphi, \omega_j) = SM(\varphi, \omega_j). \qquad \square$$

第$j \in J$番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の出現確率 $p(\mathfrak{C}_j)$ を導入しておく。確率性質

$$[\forall j \in J,\ 0 < p(\mathfrak{C}_j) < 1] \wedge [\sum_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) = 1] \tag{3.8}$$

を満たしていなければならない。

3.2 類似度関数 SM の構成例

非一致条件

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J-\{j\},\ \| T\omega_i - T\omega_j \| > 0 \tag{3.9}$$

の下で、2条件

$$①\forall j \in J,\ \omega_j \in \Psi_j (\neq \phi) \tag{3.10}$$

$$②\forall j \in J,\ \forall i \in J-\{j\},$$

$$\Psi_i \cap \Psi_j = T \cdot \Psi_i \cap T \cdot \Psi_j = \phi \tag{3.11}$$

を満たすパターンの有限集合 Ψ_j の系 $\Psi_j,\ j \in J$ を導入する。2つの関数

$$g_j(\varphi) = \min_{\eta \in \Psi_j} \| T\varphi - T\eta \| \tag{3.12}$$

$$f_j(\varphi) = \min_{k \in J-\{j\}} g_k(\varphi) \tag{3.13}$$

を定義した後、

$$SM(\varphi,\ \omega_j) =$$

$$\begin{cases} f_j(\varphi) / \sum_{k \in J} f_k(\varphi) \\ \qquad \cdots \sum_{k \in J} f_k(\varphi) > 0 \text{ の場合} & (3.14) \\ p(\mathfrak{C}_j) \quad \cdots \sum_{k \in J} f_k(\varphi) > 0 \text{ の場合} & (3.15) \end{cases}$$

と定義される式(3.5)の関数 SM はaxiom 2を満たすことは、

$$③\forall j \in J,\ g_j(\omega_j) = 0 \quad \because \ \text{式}(3.10) \tag{3.18}$$

$$④\forall j \in J,\ \forall i \in J-\{j\},\ g_j(\omega_i) > 0$$

$$\because \ 2\text{式}(3.9),\ (3.11) \tag{3.19}$$

を考慮して得られる2事項

$$⑤\forall j \in J,\ f_j(\omega_j) = \min_{k \in J-\{j\}} g_k(\omega_j) = 0$$

$$\because \ \text{式}(3.18) \tag{3.20}$$

$$⑥\forall j \in J,\ \forall i \in J-\{j\},$$

$$f_j(\omega_i) = \min_{k \in J-\{j\}} g_k(\omega_i) = 0$$

$$\because \ \text{式}(3.18) \tag{3.21}$$

と、axiom 1, (iii)の後半などから明らかである。

4. axiom 3と、大分類関数 BSC

本章では、各代表パターンω_jについてそのカテゴリ番号$j \in J$を正確に抽出する能力を備え、処理の対象とする問題のパターンφから、その帰属する可能性のあるカテゴリを抽出するためには、大分類関数 BSC が満たさなければならないaxiom 3が説明される。

4.1 カテゴリ抽出能力を備えた大分類関数 BSC

大分類関数(rough classifier, binary-state classifier)と呼ばれる**2値関数**

$$BSC : \Phi \times J \rightarrow \{0,\ 1\} \tag{4.1}$$

を、次のaxiom 3 を満たすものとして導入し、解釈

パターン$\varphi \in \Phi$の帰属する候補カテゴリの1つが

第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$であるならば、

$BSC(\varphi, j) = 1$ であることが望ましい　(4.2)

を採用しよう。この際、注意すべきは、文献［B3］の付録E, axiom 4のカテゴリ選択関数(category-selection function)$CSF(\varphi, \gamma)$の定義での(iii)の場合からわかるように、

$BSC(\varphi, j) = 0$ であっても、パターン$\varphi \in \Phi$ の帰属する

カテゴリ候補の1つは、第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$でないとは

限らない　(4.3)

としていることである。また、axiom 3 の(ⅰ)からわかるように、**カテゴリ間の相互排除性**(the mutual exclusion of the one category from the other categories)

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J - \{j\},\ BSC(\omega_i, j) = 0 \tag{4.4}$$

を公理として要請していない事実に注意しておこう。

Axiom 3 **(大分類関数 BSC の満たすべき公理)**

(ⅰ)(**カテゴリ抽出能力**；category separability)

$$\forall j \in J, BSC(\omega_j, j) = 1.$$

(ⅱ)(写像 T の下での**不変性**；invariance under mapping T)

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J,\ BSC(T\varphi, j) = BSC(\varphi, j).$$ □

文献［B3］の付録E, axiom 4の $CSF(\varphi, \gamma)$の定義での(iv)の場合からわかるように、大分類関数 BSC は、3.1節でのaxiom 2を満たす類似度関数 SM のカテゴリ抽出能力のあいまい性を2値化する形で、そのカテゴリ抽出能力を補うものである。

4.2 大分類関数 BSC の構成例

2式(3.9), (3.10)を満たすパターンの有限集合の系 Ψ_j, $j \in J$ を導入し、2式(3.11), (3.12)の2種類の関数 g_j, f_jを定義する。1実変数 u の2値関数

$$psn(u) = 1 \text{ if } u \geqq 0,\ = 0 \text{ if } u < 0 \tag{4.5}$$

を導入する。

2次ニューラルネット(the second-order neural network)の各重み $W(j, i)$, $W(j, i1, i2)$を導入し、

$$f_i(\varphi), i \in J \tag{4.6}$$

を入力とするその第$j \in J$番目の出力 $snn(\varphi ; j)$を

$$snn(\varphi ; j) = \sum_{i \in J} W(j, i) \cdot f_i(\varphi) + \sum_{i1 \in J} \sum_{i2 \in J} W(j, i1, i2) \cdot f_{i1}(\varphi) \cdot f_{i2}(\varphi) \tag{4.7}$$

と定義し、式(4.1)の関数 BSC を

$$BSC(\varphi, j) = psn(snn(\varphi ; j) - h(j)) \tag{4.8}$$

と定義すれば、不等式

$$①\forall j \in J, snn(\omega_j ; j) = W(j, j) \cdot f_j(\omega_j) + W(j, j, j) \cdot f_j(\omega_j) \cdot f_j(\omega_j) \geqq h(j) \quad \because \text{ 2式(3.20), (3.21)} \tag{4.9}$$

を満たすように、各重み $W(j, i)$, $W(j, i1, i2)$が選ばれていれば、axiom 3の(ⅰ)が満たされ、また、明らかに、axiom 1, (iii)の後半により、axiom 3の(ⅰ)が満たされる。更に、不等式

②$\forall j \in J,\ \forall i \in J-\{j\}$, $snn(\omega_i\ ;\ j)$
$= W(j, i) \cdot f_i(\omega_i)$
$+ W(j, i, i) \cdot f_i(\omega_i) \cdot f_i(\omega_i) < h(j)$
∵ 2式(3.20), (3.21) (4.10)

を満たすように、各重み W(j, i), W(j, i1, i2)が選ばれていれば、カテゴリ間の相互排除性が満たされる。

5. 大分類関数 BSC の持つカテゴリ分類精度の改良アルゴリズム

本章では、先ず、ブースティングアルゴリズムが説明され、その後、このアルゴリズムを適用すれば、大分類関数 BSC のカテゴリ分類機能が改良され得ることが示される。

5.1 ブースティングアルゴリズム AdaBoost による“学習誤差 0 の最終学習仮説 H(x)”の生成

たとえ、当初カテゴリ分離機能がランダムであっても、誤って分類された事例に関する大分類関数 BSC 内の重みを増やし、正しく分類された事例の重みを減らさないということを続けてゆく学習アルゴリズムが内蔵されていれば、大分類関数 BSC の分類機能は経験と共に改良されてゆくことが理解できよう。出来るなら、ランダムなカテゴリ分類機能よりわずかだけ良い機能を当初与えることが望ましい。本節で説明される適応的なブースティング(adaptive boosting)アルゴリズム Ada Boost は、一般的な分類規則の、かくの如き性質を持つ学習アルゴリズムを設計することを可能にする：

“Boosting” is a general method for improving the performance of any learning algorithm.In the theory, boosting can be used to significantly reduce the error of any “weak” learning algorithm that consistently generates classifiers which need only be a little bit better than random guessing.

We assume that examples are generated independently at random according to some fixed but unknown distribution $\mathfrak{D}$ over $X \times \{-1, +1\}$.

The training set is a list of m pairs

$$S = \{\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle, \cdots, \langle x_m, y_m \rangle\} \tag{5.1}$$

chosen according to $\mathfrak{D}$.We use $P_{\langle x, y \rangle \sim \mathfrak{D}}\{A\}$ to denote probability of the event A when each example $\langle x, y \rangle$ is chosen according to distribution $\mathfrak{D}$.

A base hypothesis $h \in H$(the basis hypothesis space)is a mapping from an instance space X to $\{-1, +1\}$. □

次のブースティングアルゴリズム Ada Boost は、任意の重み付けされた学習サンプルに対して、学習誤差 ε_t が 1/2 未満の学習仮説生成回数で学習誤差 0 の最終学習仮説 H(x)を生成できる：

[**Ada Boost**] [A8]

Given：

$$\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle, \cdots, \langle x_m, y_m \rangle \tag{5.2}$$

where

$$x_i \in X,\ y_i \in Y = \{-1, +1\} . \tag{5.3}$$

Initialize

$$D_1(i) = 1/m\,(i = 1 \sim m). \tag{5.4}$$

For $t=1 \sim T$：

○Train weak learner using distribution D_t.

○Get weak hypothesis

$$h_t : X \to \{-1, +1\} \tag{5.5}$$

with error

$$\varepsilon_t = Pr_{i \sim Dt}[h_t(x_i) \neq y_i] = \sum_{i=1}^{m} h_t(x_i) \neq y_i \; D_t(i). \tag{5.6}$$

○Choose

$$\alpha_t = 2^{-1} \cdot \log_e[(1-\varepsilon_t)/\varepsilon_t]. \tag{5.7}$$

○Update ：

$$D_{t+1}(i) = D_t(i) \cdot \exp\ [-\alpha_t \cdot y_i \cdot h_t(x_i)]/Z_t \tag{5.8}$$

$$=$$

$$\begin{cases} D_t(i) \cdot \exp[-\alpha_t]/Z_t \text{ if } h_t(x_i) = y_i & (5.9) \\ D_t(i) \cdot \exp[+\alpha_t]/Z_t \text{ if } h_t(x_i) \neq y_i & (5.10) \end{cases}$$

where

$$Z_t [= \sum_{j=1}^{m} D_t(j) \cdot \exp[-\alpha_t \cdot y_j \cdot h_t(x_j)]] \tag{5.11}$$

is a normalization factor chosen so that D_{t+1} will be a distribution.

○Output the final hypothesis ：

$$H(x) \equiv \text{sign}(\sum_{t=1}^{T} \alpha_t \cdot h_t(x)) \tag{5.12}$$

□

5.2 ブースティングアルゴリズム AdaBoost による大分類関数 BSC の設計

前節によれば、数多くの精度の低い分類規則を組み合わせて一層精度の高い分類規則を得ることの出来る分類規則を得るための一手法として、**ブースティング**(boosting)があり、ブースティングはランダムな分類規則さえ与えられれば、分類の難しい訓練事例に集中して学習することにより、高性能を持つ学習アルゴリズムを設計することを可能にする。

本節では、前節のブースティングアルゴリズムAda Boost を用いて、axiom 3を満たす式(4.1)の大分類関数 BSC を設計してみよう。

5.2.1 大分類関数 BSC´の拡張とは？

①$BSC(\varphi, j)=1$ であれば、パターン $\varphi \in \Phi$ は第$j \in J$番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属する可能性がある

②$BSC(\varphi, j)=0$ であれば、パターン $\varphi \in \Phi$ は第$j \in J$番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属する可能性があるし、帰属しない可能性もあるという意味で、カテゴリ帰属に関しては何とも言えない

という形で、axiom 3を満たす大分類関数

$$BSC(\cdot, j) : \Phi \times \{j\} \to \{0, 1\} \tag{5.13}$$

は、パターン $\varphi \in \Phi$ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリに帰属するか否かを仮に決定する帰納的分類規則を表している。

axiom 3を満たす今1つの大分類関数

$$BSC':\ \Phi\times J\to\{0,1\} \tag{5.14}$$

を用意し、第$j\in J$番目のパターン集合 Φ_j を

第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属しているパターン$\varphi\in\Phi$の集合 (5.15)

とすると、包含関係

$$\{\varphi\in\Phi\mid BSC'(\varphi,j)=1\}\subseteq\Phi_j \tag{5.16}$$

が成り立つ。0 は偽、1 は真と考えると、第 $j\in J$ 番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$は

処理の対象とする問題のパターン集合Φから2元集合$\{0,1\}$への

写像 $g_j:\Phi\to\{0,1\}$ である (5.17)

と想定でき、分類誤差 0 のカテゴリ分類写像 g_j により、パターン集合 Φ_j は

$$\Phi_j=\{\varphi\in\Phi\mid g_j(\varphi)=1\} \tag{5.18}$$

と表現され得、

g_j の縮小が BSC'である (5.19)

ということになる。結局、大分類関数 BSC'の拡張が g_j であることになる。

5.2.2 $H(\varphi,j)$の値域 $\{-1,+1\}$ の、$\{0,1\}$への変換として大分類関数 $BSC(\varphi,j)$

先ず、axiom 3を満たす式(5.14)の大分類関数 BSC' を用意する。時刻 t での、axiom 3を満たす大分類関数を、

$$BSC_t:\ \Phi\times J\to\{0,1\} \tag{5.20}$$

と表す。以後、カテゴリ番号 $j\in J$ を固定する。

符号関数

$$\mathrm{sign}(u)\equiv+1\ \text{if}\ u\geqq0,\ -1\ \text{if}\ u<0 \tag{5.21}$$

を用意しておく。

初期条件として、

$$BSC_t\mid_{t=0}\equiv BSC' \tag{5.22}$$

を採用し、出力

$$\begin{aligned}&H(\varphi,j)\\&\equiv\mathrm{sign}\Bigl(\sum_{t=t1}^{t2}\bigl[\alpha_t(j)/\sum_{t=t1}^{t2}\alpha_s(j)\bigr]\cdot\\&\quad h_t(\varphi,j)-\delta_j\Bigr)\end{aligned} \tag{5.23}$$

を求めて、

$$BSC(\varphi,j)\equiv2^{-1}\cdot[1+H(\varphi,j)] \tag{5.24}$$

とおく。

5.2.3 動径基底関数ニューラルネット $g_t(\varphi,j)$ の符号化としての、$h_t(\varphi,j)$ の値域の変換による第 t 訓練段階の大分類関数 $BSC_t(\varphi,j)$の設定

写像

$$h_t:\ \Phi\times J\to\{-1,+1\} \tag{5.25}$$

を求めると、

$$BSC_t(\varphi,j)\equiv2^{-1}\cdot[1+h_t(\varphi,j)] \tag{5.26}$$

と求まる。ここに、

2式(5.25), (5.26)の $h_t(\varphi,j)$は、

$$\begin{aligned}&h_t(\varphi,j)\\&=\mathrm{sign}(g_t(\varphi,j))\end{aligned} \tag{5.27}$$

と設定される。また、

$$\sigma(T\varphi)^2 \equiv \max_{1 \leqq n \leqq N} \| T\varphi - T\varphi_n \|^2 \tag{5.28}$$

として、

$$\begin{aligned} & g_t(\varphi, j) \\ & \equiv \sum_{n=1}^{N} C_n(j) \cdot [D_t(n) / \sum_{m=1}^{N} D_t(m)] \cdot \\ & \quad \exp[-\| T\varphi - T\varphi_n \|^2 / \sigma(T\varphi)^2]] \end{aligned} \tag{5.29}$$

である。

$$\forall j \in J,\ \forall n \in \{1, 2, \cdots, N\},\ C_n(j) \in \{-1, +1\} \tag{5.30}$$

なので、不等式

$$\begin{aligned} & \forall \varphi \in \Phi,\ \forall j \in J, \\ & 0 \leqq | g_t(\varphi, j) | = | \sum_{n=1}^{N} C_n(j) \cdot \\ & [D_t(n) / \sum_{m=1}^{N} D_t(m)] \cdot \exp[-\| T\varphi - T\varphi_n \|^2 / \sigma(T\varphi)^2]] \ | \\ & \leqq \sum_{n=1}^{N} [D_t(n) / \sum_{m=1}^{N} D_t(m)] \\ & \cdot \exp[-\| T\varphi - T\varphi_n \|^2 / \sigma(T\varphi)^2]] \leqq 1 \end{aligned} \tag{5.31}$$

が成立している。

式(5.29)の $g_t(\varphi, j)$ はRadial-Basis Function Network(**動径基底関数ニューラルネット**)としての形式を備えており、指数関数

$$\exp[-\| T\varphi - T\varphi_n \|^2 / \sigma(T\varphi)^2] \tag{5.32}$$

は1つのradial basis function kernel［B25］として採用されている。

5.2.4　訓練データ集合 $\langle T\varphi_n, C_n(j) \rangle$, $n=1, 2, \cdots, N$ で定義された出現確率分布 $D_t(n)$, $n=1, 2, \cdots, N$ の求め方と、式(5.23)の写像 $H: \Phi \times J \rightarrow \{-1, +1\}$ の決定

訓練データ集合 $\langle T\varphi_n, C_n(j) \rangle$, $n=1, 2, \cdots, N$ で定義された出現確率分布

$$D_t(n),\ n=1, 2, \cdots, N \tag{5.33}$$

を求める方法を以下に説明しよう。

カテゴリ番号 $j \in J$ を固定する。式(2.3)の $T \cdot \Phi$ に注目すれば、

$$T\varphi_n \in T \cdot \Phi \tag{5.34}$$

であるが、±1をとり、第n番目のパターンモデル $T\varphi_n$ の帰属するカテゴリに関する情報 $C_n(j)$ を

$$\{-1, +1\} \ni C_n(j) = \begin{cases} +1 \cdots T\varphi_n \in T \cdot \Phi \text{が第} j \in J \text{番目のカテゴリ} \mathfrak{C}_j \text{に属しているとき} \\ -1 \cdots T\varphi_n \in T \cdot \Phi \text{が第} j \in J \text{番目のカテゴリ} \mathfrak{C}_j \text{に属していないとき} \end{cases} \tag{5.35}$$

と定義して、帰属カテゴリ付き訓練パターンモデルデータ集合

$$\langle T\varphi_n, C_n(j) \rangle,\ n=1, 2, \cdots, N \tag{5.36}$$

が与えられたとする。先ず、

$$D_t(n\,;\,j) = p(\mathfrak{C}_{j(n)}) / \sum_{m=1}^{N} p(\mathfrak{C}_{j(m)}) \tag{5.37}$$

とおく。ここに、$\mathfrak{C}_{j(n)}$ は第n(=1, 2, …, N)番目のパターンモデル $T\varphi_n$ が帰属するカテゴリである。

2媒介量 $\varepsilon_t(j)$, $\alpha_t(j)$ を

$$\varepsilon_t(j) = \Sigma_{n=1 \sim N\,;\, h_t(\varphi_n, j) \neq C_n} D_t(n\,;\,j) \tag{5.38}$$

$$\alpha_t(j) = (1/2) \cdot \log_e[(1 - \varepsilon_t(j)) / \varepsilon_t(j)] \tag{5.39}$$

$$\begin{cases} >0 \text{ if } \varepsilon_t(j)<2^{-1} \\ =0 \text{ if } \varepsilon_t(j)=2^{-1} \\ <0 \text{ if } \varepsilon_t(j)>2^{-1} \end{cases} \tag{5.40}$$

と定義する。

$$\varepsilon_t(j)\to 1 \text{ のとき、} \alpha_t(j)\to -\infty \tag{5.41}$$

$$\varepsilon_t(j)\to 0 \text{ のとき、} \alpha_t(j)\to +\infty \tag{5.42}$$

であることに注意する。

2媒介量 $\varepsilon_t(j)$, $\alpha_t(j)$によれば、式(5.44)の、$D_t(n;j)$から$D_{t+1}(n;j)$への更新は、カテゴリ $\mathfrak{C}_j$の部分表現h_tの誤差に適応し、h_tにより誤って分類された訓練事例$\langle T\varphi_n, C_n(j)\rangle$の出現度合いを増やし、正しく分類された訓練事例$\langle T\varphi_n, C_n(j)\rangle$の出現度合いを減少させていることに注意する。

2つの助変数 $\delta_0(j)$, $\delta_1(j)$を不等式

$$0<\delta_0(j)<2^{-1},\ 2^{-1}<\delta_1(j)<1 \tag{5.43}$$

を満たすように選ぶ。次のⅠ, Ⅱの如く、時刻tの出現確率分布$D_t(n;j)$から$D_{t+1}(n;j)$を求める。

Ⅰ. $\delta_0(j)<1-\varepsilon_t(j)<\delta_1(j)$のとき

$$D_{t+1}(n;j)$$

$$=D_t(n;j)\cdot\exp\left[-\alpha_t(j)\cdot C_n(j)\cdot h_t(\varphi_n, j)\right]/Z_t(j) \tag{5.44}$$

$$=$$

$$\begin{cases} D_t(n;j)\cdot\exp\left[-\alpha_t(j)\right]/Z_t(j) \\ \qquad \text{if } h_t(\varphi_n, j)=C_n(j) \\ D_t(n;j)\cdot\exp\left[+\alpha_t(j)\right]/Z_t(j) \\ \qquad \text{if } h_t(\varphi_n, j)\neq C_n(j) \end{cases} \tag{5.45}$$

を求める。ここに、規格化定数$Z_t(j)$は

$$Z_t(j)\equiv$$

$$\sum_{n=1}^{N} D_t(n)\cdot\exp\left[-\alpha_t(j)\cdot C_n(j)\cdot h_t(\varphi_n, j)\right) \tag{5.46}$$

であり、2不等式、2等式

(イ)$\exp\left[-\alpha_t(j)\right]$

$$\begin{cases} >1 \text{ if } 0<1-\varepsilon_t(j)<2^{-1} \\ =1 \text{ if } 1-\varepsilon_t(j)=2^{-1} \\ <1 \text{ if } 2^{-1}<1-\varepsilon_t(j)<1 \end{cases} \tag{5.47}$$

(ロ)$\exp\left[+\alpha_t(j)\right]$

$$\begin{cases} <1 \text{ if } 0<1-\varepsilon_t(j)<2^{-1} \\ =1 \text{ if } 1-\varepsilon_t(j)=2^{-1} \\ >1 \text{ if } 2^{-1}<1-\varepsilon_t(j)<1 \end{cases} \tag{5.48}$$

であることに注意しておく。

Ⅱ. $1-\varepsilon_t(j)\leqq\delta_0(j)\vee\delta_1(j)\leqq 1-\varepsilon_t(j)$のとき

$$D_{t+1}(n;j)=D_t(n;j),\ n=1\sim N \tag{5.49}$$

を、求める。 □

上記のⅠ, Ⅱを、

$$t=t_1, t_1+1, t_1+2, \cdots, t_2 \tag{5.50}$$

について繰り返した後、不等式

$$\max_{i\in J-\{j\}} \sum_{t=t1}^{t2} [\alpha_t(j)/\sum_{s=t1}^{t2}\alpha_s(j)]\cdot ht(\omega_i, j)$$

$$<\delta_j \tag{5.51}$$

$$\leqq \sum_{t=t1}^{t2} [\alpha_t(j)/\sum_{s=t1}^{t2}\alpha_s(j)]\cdot h_t(\omega_j, j) \tag{5.52}$$

を満たす閾値 δ_j を求め、式(5.23)の如く、写像

$$H: \Phi\times J\to\{-1, +1\} \tag{5.53}$$

を決める。式(5.23)の $H(\varphi, j)$ 内の

$$\alpha_t(j)/\sum_{s=t1}^{t2}\alpha_s(j) \tag{5.54}$$

は $h_t(\varphi, j)$ に付与された重要度である。

ランダムな分類能力しかなくて、学習誤差 ε_t が 2^{-1} に近い場合、式(5.49)の $D_{t+1}(n;j)$ によれば、$D_t(n;j)$ から $D_{t+1}(n;j)$ $(n=1\sim N)$ への更新は増減しない形でなされていることに注意しておく。

5.3 ブースティングアルゴリズムに基づく"axiom3を満たし、カテゴリ間の相互排除性をも満たす"大分類関数 BSC の構成

次の定理5.1は、前節の適応アルゴリズムによって、カテゴリ間の相互排除式(4.4)を満たすように、axiom 3を満たす2カテゴリ分類写像としての、式(4.1)の大分類関数 BSC が獲得され得ることを明らかにしている。

［定理5.1］**(大分類関数 BSC の構成定理)**

式(5.24)のように定義された式(4.1)の関数 BSC は、axiom 3を満たす。然も、カテゴリ間の相互排除式(4.4)を満たしている。

(証明)　δ_j の選定法を示す不等式(5.52)によって、

$\forall j\in J, H(\omega_j, j)=1$　∵　式(5.23)

∴　$BSC(\omega_j, j)=1$　∵　式(5.24)

を得、axiom 3の(i)の成立が示された。

$\forall\varphi\in\Phi, \forall j\in J, g_t(T\varphi, j)=g_t(\varphi, j)$

∵　式(5.29)にaxiom 1, (iii)の後半を適用

∴　$h_t(T\varphi, j)=h_t(\varphi, j)$　∵　式(5.27)

for any $t\in\{t_1, t_1+1, t_1+2, \cdots, t_2-1, t_2\}$

∴　$H(T\varphi, j)=H(\varphi, j)$　∵　式(5.23)

∴　$BSC(T\varphi, j)=BSC(\varphi, j)$　∵　式(5.24)

を得、axiom 3の(ii)の成立が示された。

δ_j の選定法を示す不等式(5.52)によって、

$\forall j\in J, \forall i\in J-\{j\}, H(\omega_i, j)=-1$

∵　式(5.23)

∴　$BSC(\omega_i, j)=0$　∵　式(5.24)

を得、カテゴリ間の相互排除式(4.4)が満たされている。 □

6. むすび

知能工学は、知能というものを知的活動のモデル化を介し、計算機による情報処理の働きで捉えようとする。

パターン認識の働きにはもともと、多数のパターン事例を知覚したという経験から獲得された感受性、感性が反映されており、この感性を基盤として、所与の公理系（SS公理系）と推論規則（構造受精変換）からファジィ定理を導きだす論理的計算の働きで認識知能を組み立てている。

SS理論での不動点多段階想起形認識［B3］,［B4］は、パターンとその帰属する候補カテゴリの番号のリストとの対であると定義されるカテゴリ帰属知識の形式を用い、処理の対象とする問題のパターンのカテゴリ帰属に関する曖昧さを解消するようなパターン処理法であり、**連想形認識過程の心理モデル**をも提供している。各認識段階での複数の候補カテゴリを絞っていく機能、即ち、ファジィ（曖昧さ）を減少させてゆく機能のある多段階のファジィ処理法を提供しており、最終的に入力パターンの帰属しないカテゴリを排除し、帰属する唯一の正当なカテゴリを抽出する目的を持っており、入力パターンから想起されるパターン（入力パターンの帰属するカテゴリを典型的に代表する代表パターンのモデル）をも出力する。変形しているパターン $\varphi \in \Phi$ ほど、このパターン $\varphi \in \Phi$ をその帰属する第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ のパターンモデル $T\omega_j$ に変換するには、想起形認識のより多くの段階を必要とする。

この不動点多段階想起形認識の働きは、処理の対象とする問題のパターン $\varphi \in \Phi$ を多段階パターン変換を介して、認識するものであり、

“処理の対象とする問題のパターン φ に関し、その帰属するカテゴリを探索することを伴う**帰納的推論**（inductive reasoning）”

の反復で、あるカテゴリ帰属知識を不動点解に持つある**連想形認識方程式**の求解過程で構成されている。

訓練データ上で定義された出現確率分布を求めながら、ランダムな分類機能から開始し訓練データに関する分類誤差を次第に減少させることの可能な2カテゴリ分類規則を学習できる“適応的ブースティングアルゴリズム Ada Boost”を適用して、SS理論での多段階不動点探索形帰納認識を可能ならしめる**3構成基本要素**（3axiom 1～3を各々、満たさなければならないモデル構成作用素 T、類似度関数 SM、大分類関数 BSC）の内の最後の大分類関数 BSC を本論文で構成したが、この構成によってSS理論に計算論的学習の働きが取り入れられ、SS理論には数理形態学（mathematical morphology）、wavelet理論、動径基底関数族による学習理論、ニューラルネット理論の成果を取り入れ可能なことは既に示されている諸事実［B13］,［B22］,［B25］,［B26］を思い起こすと、SS理論の枠組の一般性を益々、正当付ける1つの証拠が明らかにされたといえよう。

文　献　A

［A 1］青木利夫, 高橋渉：“集合·位相空間要論”, 培風館, Sept.1979

［A 2］福村晃夫：“情報理論（情報工学3）”, コロナ社, June 1970

［A 3］Solomon W.Gelomb：“A new derivation of the entropy expressions”, IRE Transactions on Information Theory, vol.IT-7, no.3, pp.166-167, July 1961

[A 4] 有本卓："情報理論（共立数学講座22)"，共立出版, Feb.1976
[A 5] L.Zadeh："Fuzzy Sets"，Information and Control, vol.8, pp.338-353, 1965
[A 6] Ashok K.Agrawala："Learning with a probabilistic teacher"，IEEE Trans. on information theory, vol.IT-16, no.4, pp.373-379, July 1970
[A 7] Vladimir N.Vanik："The nature of statistical learning theory"，Springer-Verlag New York, Inc., 1995
[A 8] ヨアブ・フロイド, ロバート・シャピリ："ブースティング入門（特集 計算学習理論の進展と応用可能性)"，人工知能学会誌, vol.14, no.5, pp.771-780, Sept.1999（訳 安倍直樹）
[A 9] 末松伸朗，林朗："ブースティング法に発想を得た確率モデル学習アルゴリズム"，人工知能学会誌，vol.15, no.1, pp.129-136, Jan.2000
[A10] Robert E.Schapire, Yoav Freund, Peter Bartlett, Wee Sun Lee："Boosting the margin", Machine Learning：proceedings of the Fourteenth International Conference（ICML'），Nashville, Tennessee, July 8-12, 1997/edited by Douglas H.Fisher, Jr., …Morgan Kaufmann.1997, pp, 322-330, 1997
[A11] Luc Devroye, Laszlo Gyorfi, Gabor Lugosi："A Probabilistic Theory of Pattern Recognition", Springer-Verlag New York, Inc., 1996
[A12] 小野田崇, Gunnar Rätsch, Klaus R.Müller："2値分類問題におけるAdaBoostの漸近特性解析と改善"，人工知能学会誌, vol.15, no.2, pp.287－295, Mar.2000
[A13] 水上嘉樹, 古賀和利, 鳥岡豊士："変位抽出を行う手書き文字認識システム"，電子情報通信学会論文誌D-Ⅱ, vol.J80-D-Ⅱ, no.1, pp.63-72, Jan.2000
[A14] P.Pala, S.Santini："Image retrieval by shape and texture"，Pattern Recognition, vol.32, pp.517-527, 1999
[A15] ズデネクプロハースカ, 伊藤崇之, 岡本敏雄："変形関数による画像間対応関係の決定とその応用"，電子情報通信学会論文誌D-Ⅱ, vol.J82-D-Ⅱ, no.9, pp.1374-1382, Sept.1999
[A16] 森中雄，大原剛三，馬場口登，北橋忠宏："事例間の非類似度を用いたデータベースからのクラス間関係の獲得"，情報処理学会論文誌, vol.41, no.11, pp.3193-3196, Nov.2000

文　献　B

[B 1] 鈴木昇一："認識工学"，柏書房, Feb.1975
[B 2] 鈴木昇一："ニューラルネットの新数理"，近代文芸社, Sept.1996
[B 3] 鈴木昇一："パターン認識問題の数理的一般解決"，近代文芸社, June 1997
[B 4] 鈴木昇一："認識知能情報論の新展開"，近代文芸社, Aug.1998
[B 5] 鈴木昇一："測度的不変量検出形認識系の構成理論"，電子通信学会論文誌（D），vol.55-D, no.8, pp.531-538, Aug.1972
[B 6] 鈴木昇一："パターンのエントロピーモデル"，電子情報通信学会論文誌（D-Ⅱ），vol.J77-D-Ⅱ, no.10, pp.2220-2238, Nov.1994
[B 7] 鈴木昇一："新しい情報の測度とパターン情報処理"，情報研究（文教大学・情報学部), no.13, pp.273-358, Dec.1992

[B 8] 鈴木昇一："手書き漢字の側抑制効果的分解とその計算機シミュレーション", 情報処理学会誌, vol.15, no.12, pp.927-934, Dec.1974

[B 9] 鈴木昇一："画像情報量とその手書き漢字への応用", 画像電子学会誌, vol.4, no.1, pp.4-12, Apr.1975

[B10] 鈴木昇一："抽出された特徴による手書き漢字構造の再生", 情報処理学会誌, vol.18, no.11, pp.1115-1122, Nov.1977

[B11] 鈴木昇一, 斉藤静昭, 奥野治雄, 太田芳雄："画像の復元とその計算機シュミレーション" 工学院大学研究報告, no.39, pp.198-206.Jan.1976

[B12] 鈴木昇一："回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シュミレーション", 情報研究（文教大学情報学部), no.4, pp.36-56, Dec.1983

[B13] 鈴木昇一："連想形記憶器 MEMOTRON と日本語母音系列の再生に関する計算機シミュレーション", 情報研究（文教大学情報学部), no.7, pp.14-29, Dec.1986

[B14] 鈴木昇一："収縮写像の構成用空間回路とその計算機シミュレーション", 情報研究（文教大学・情報学部), no.9, pp.17-29, Dec.1988

[B15] 鈴木昇一："多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション", 情報研究（文教大学・情報学部), no.10, pp.35-49, Dec.1989

[B16] 鈴木昇一："帰属係数法に基づく類似度、帰属関係あいまい度、認識情報量の計算機シミュレーション", 情報研究（文教大学・情報学部), no.11, pp.51-68, Dec.1990

[B17] 鈴木昇一："構造受精法と日本語単独母音の認識", 情報研究（文教大学・情報学部), no.18, pp.17-51, Dec.1998

[B18] 鈴木昇一, 前田英明："有声破裂音の代表パターンの学習的決定と、その計算機シミュレーション", 情報研究（文教大学・情報学部), no.20, pp.77-95, Dec.1998

[B19] 鈴木昇一, 前田英明："変動エントロピーによる有声破裂音の順序付けと、その計算機シミュレーション", 情報研究（文教大学・情報学部), no.21, pp.51-78, Mar.1999

[B20] 鈴木昇一："平均顔を用いた顔画像の2値化、並びに、目・鼻・口の抽出と、その計算機シミュレーション", 情報研究（文教大学・情報学部), no.22, pp.65-150, Dec.1999

[B21] 鈴木昇一："界面エネルギーの減少に伴うモデル構成作用素の、顔画像処理に関する計算機シミュレーション", 情報研究（文教大学・情報学部), no.23, pp.109-182, Mar.2000

[B22] 鈴木昇一："風景画から知識を抽出し、解釈するシステムの、ファジィ推論ニューラルネットによる構成", 情報研究（文教大学・情報学部), no.23, pp.183-265, Mar.2000

[B23] 鈴木昇一："各個人の感性を反映した認識システムRECOGNITRON", 情報研究（文教大学・情報学部), no.24, pp.185-257, Dec.2000

[B24] 鈴木昇一："プロダクション・システムとしてのファジィ・マルチメディア・コンピュータと、空間多重パターンファジィ推論系", 情報研究（文教大学・情報学部), no.24, pp.105-184, Dec.2000

[B25] 鈴木昇一："Radial-Basis Function Networks, Wavelet-Based Networksを用いたモデル構成作用素の構成法", 情報研究（文教大学・情報学部), vol.17, pp.71-131, Dec.1996

[B26] 鈴木昇一, 佐久間拓也, 前田英明："数理形態学における諸演算とモデル構成作用素", 情報研究（文教大学・情報学部), vol.17, pp.133－170, Dec.1996

付録A. モデル構成作用素 T の構成2例

本付録Aでは、axiom 1, (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)の3後半と, (ⅳ)を満たす式(2.1)のモデル構成作用素 T を2例、構成してみよう。

A1. Radial-Basis Function Networksを用いたモデル構成作用素 T の1構成

ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ として、

$$(\varphi,\ \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2\ \varphi(x_1, x_2)\cdot \overline{\eta}(x_1, x_2),\ \text{ここに、}\overline{\eta}\text{は}\eta\text{の複素共役} \tag{A.1}$$

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \tag{A.2}$$

を内積、ノルムとする $L_2(R^2, dx_1dx_2)$ を選ぶ。

以後、すべてのパターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ は実数値関数とする。処理の対象とする問題のパターン集合Φは以下の式(A.20)のように定義される式(2.1)のモデル構成作用素 T を用いて、式(2.2)のように選ばれる。

$x = \langle x_1, x_2\rangle \in R^2$ について、その長さ

$$|x| = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2} \tag{A.3}$$

を定義しておく。座標値の代表点 $\underline{a}(k)$ の系列

$$\underline{a}(k) = \langle a_1(k),\ a_2(k)\rangle \in R^2,\ k = 1 \sim N \tag{A.4}$$

について、$\varphi(\underline{a}(k))$ は、理想出力 $b(k)$ をとるものとする $(k = 1 \sim N)$。

反自己共役作用素

$$Q_j = \partial/\partial x_j$$

を導入すると、Q_j の共役作用素 $Q_j{}^*$ は

$$Q_j{}^* = -Q_j = -\partial/\partial x_j$$

である。

$$Q_j{}^*\cdot Q_j = -(\partial/\partial x_j)^2$$

は

$$\|Q_j\psi\| = (Q_j{}^*\cdot Q_j\psi,\ \psi) \geqq 0$$

$$\text{for any }\ \psi \in \mathrm{Domain}(Q_j{}^*\cdot Q_j) \equiv \{\varphi \in \mathfrak{H}\ |\ \|Q_j{}^*\cdot Q_j\varphi\| < \infty\}$$

を満たす**半正値自己共役作用素**である。

$$Q^*\cdot Q = -\sum_{j=1}^{2}(\partial/\partial x_j)^2 = \sum_{j=1}^{2} Q_j{}^*\cdot Q_j$$

も半正値自己共役作用素である。

補間条件

$$\psi(\underline{a}(k)) = \varphi(\underline{a}(k)),\ \ k = 1 \sim N \tag{A.5}$$

を満たす変数 $\psi \in \mathfrak{H}$ の、正のパラメータを持つ汎関数

$$F(\psi) = \sum_{k=1}^{N}\ [b(k) - \psi(\underline{a}(k))]\ 2 + \lambda\cdot(Q^*\cdot Q\psi,\ \psi) \tag{A.6}$$

を最小ならしめる解 $\psi \in \mathfrak{H}$ は次のように与えられる：

超関数論的方程式

$$(Q^*\cdot Qg)(x_1, x_2)=\delta(x_1)\cdot\delta(x_2)$$

ここに、$\delta(x_j)$はDiracの超関数 (A.7)

の解 g と各1次結合係数 $c_k(k=1\sim N)$を使って、

$$\psi(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{N} c_k\cdot g(x-\underline{a}(k))+\psi^{\circ}(x_1, x_2) \quad (A.8)$$

ここに、

$$(Q^*\cdot Q\psi^{\circ})(x_1, x_2)=0 \quad (A.9)$$

と表される。

①式(A.8)内の g の導出

$$\{-\sum_{j=1}^{2}(\partial/\partial x_j)^2(-g')\}(x_1, x_2) = \delta(x_1)\cdot\delta(x_2) \quad (A.10)$$

の解 $-g'$は

$$g'(x_1, x_2)=(2\pi)^{-1}\cdot\log_e|x| \quad (A.11)$$

であるから、方程式(A.7)の解 g は、ポテンシャル論でよく知られているように、

$$g(x_1, x_2)=-g'(x_1, x_2) =(2\pi)^{-1}\cdot\log_e|x|^{-1} \quad (A.12)$$

である。

②式(A.8)内の各1次結合係数 $c_k(k=1\sim N)$ の導出

式(A.9)を満たす関数 ψ°が、

$$\psi^{\circ}(\underline{a}(k))=0,\ k=1\sim N \quad (A.13)$$

を満たす場合、式(A.8)から

$$\psi(\underline{a}(j)) = \sum_{k=1}^{N} c_k\cdot g(\underline{a}(j)-\underline{a}(k)) \quad (A.14)$$

のように表されるが、各1次結合係数 $c_k(k=1\sim N)$は、連立1次方程式

$$(G+\lambda\cdot I)\underline{c}=\underline{b} \quad (A.15)$$

ここに、

$$G=(g_{k\ell})_{1\leq k,\ell\leq N},\ g_{k\ell}=g(\underline{a}(k)-\underline{a}(\ell)) \quad (A.16)$$

$$\underline{b}=\mathrm{col}(b(1)\ b(2)\ b(N))\text{(列ベクトル)} \quad (A.17)$$

$$\underline{c}=\mathrm{col}(c_1\ c_2\cdots c_N) \quad (A.18)$$

を解いて得られる。

③上記のように得られた各1次結合係数 $c_k(k=1\sim N)$を用いて、式(A.6)の汎関数 $F(\psi)$の最小値 $\min_{\psi} F(\psi)$は、

$$\min_{\psi} F(\psi) = \sum_{k=1}^{N}\lambda^2\cdot c_k^2 + \sum_{k=1}^{N}[b(k)-\psi(\underline{a}(k))]\cdot\psi(\underline{a}(k)) \quad (A.19)$$

□

このとき、次の定理A.1によって、パターンモデル $T\varphi$が構成できる。

［定理A.1］**（RBFN法による2次元パターンモデル構成定理）**

$$(T\varphi)(x)=\begin{cases}0 & \cdots\forall \ell\in L,\ c_\ell=0\ のとき\\ \sum_{k=1}^{N}[c_k/\sup_{\ell=1\sim N}|c_\ell|]\cdot g(x-\underline{a}(k)) & \\ \quad\cdots\exists \ell\in L,\ c_\ell\neq 0\ のとき\end{cases} \tag{A.20}$$

と定義される式(2.1)の写像 T はaxiom 1,（i），（ii），（iii）の3後半と（iv）を満たす。

（証明）文献［B25］の定理4.1の特別なものである。 □

よって、定理2.1を適用すれば、axiom 1を満たす対［Φ, T］が得られる。

尚、発散を阻止するため、式(A.12)の g は、

十分小さい2つの正実数 d_1, d_2 を選定・固定して、

$$g(x_1, x_2)=(2\pi)^{-1}\cdot\log_e 1/\ [\sqrt{(x_1+d_1)^2+(x_2+d_2)^2}\,] \tag{A.21}$$

とすることが便宜的に認められよう。

A2. 変形座標関数によるパターンモデルの構成（A construction of a pattern-model by warping coordinate function）

A2.1 最適化問題の解としてのモデル構成作用素の決定

2次元直交座標系 $x=\langle x_1, x_2\rangle$ を選定し、処理の対象とする問題のパターン $\varphi(x)=\varphi(x_1, x_2)\in\Phi$ は実数値とする。

2次元平面から可測部分集合 M を選び、代表的な座標点 $\underline{p_i}=\langle p_i(1), p_i(2)\rangle$ の系列

$$\underline{p_i},\ i=1\sim N \tag{A.22}$$

をも、選定する。

各 $c_i(j)$ を実定数とする座標関数（**変形座標関数**；warping coordinate function）

$$v_k(x_1, x_2)=\sum_{i=1}^{N}c_i(k)\cdot g(|\underline{x}-\underline{p_i}|)\quad k=1, 2 \tag{A.23}$$

を導入する［A14］。ここに、関数 g は、標準偏差 σ（>0）を持つガウス形関数に選び、

$$g(u)=\exp[-(2\sigma^2)^{-1}\cdot u^2] \tag{A.24}$$

である。また、$|\underline{x}-\underline{p_i}|$ は $\underline{x}$ と $\underline{p_i}$ との間のユークリッド距離であって、

$$|\underline{x}-\underline{p_i}|=\sqrt{\Sigma_{\ell=1}{}^{2}(x_\ell-p_i(\ell))^2} \tag{A.25}$$

である。

非零定数 a と $\{\langle c_i(1), c_i(2)\rangle \mid i=1\sim N\}$ をパラメータに持つ**汎関数**

$$F(a;\{\langle c_i(1), c_i(2)\rangle \mid i=1\sim N\};\varphi)=\sum_{j\in J}2^{-1}\cdot\int dx_1\int dx_2\,{}_M[a\cdot\varphi(v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2))-\omega_j(x_1, x_2)]^2 \tag{A.26}$$

を最小とするパラメータ

$$a^*,\ \{\langle c_i(1)^*, c_i(2)^*\rangle \mid i=1\sim N\} \tag{A.27}$$

を求め、パターン η を

$$\eta(x)=\eta(x_1, x_2)=a^*\cdot\varphi(v_1^*(x_1, x_2),\ v_2^*(x_1, x_2)) \tag{A.28}$$

を決定する。a^*, $c_i(k)^*$ ($i=1\sim N$；$k=1, 2$) が汎関数 F を最小にするという最適化問題の解としての最適化パラメータであり、**最適**な変形座標関数 v_k^* は

$$v_k^*(x_1, x_2)$$
$$=\sum_{i=1}^{N} c_i(k)^* \cdot g(|\underline{x}-\underline{p_i}|),\quad k=1, 2 \tag{A.29}$$

と表される。

次の定理A.2は、定理2.1を適用すれば、axiom 1を満たす対［Φ, T］が得られることを指摘している。

［定理A.2］**（変形座標関数による2次元パターンモデル構成定理1）**

$$(T\varphi)(x)=$$
$$\begin{cases} 0 \quad \cdots \sup_{x\in M}|\eta(x)|=0 \text{ のとき} & \text{(A.30)} \\ \eta(x)/\sup_{x\in M}|\eta(x)| & \\ \quad \cdots \sup_{x\in M}|\eta(x)|>0 \text{ のとき} & \text{(A.31)} \end{cases}$$

と定義された式(2.1)の写像 T はaxiom 1,（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）の3後半と（ⅳ）を満たす。

（証明） axiom 1,（ⅰ）の後半の成立：$\varphi=0$ とすれば、式(A.28)より、$\eta=0$ を得、式(A.30)より、$T\varphi=0$.

axiom 1,（ⅱ）の後半の成立：

c を正の定数とする。

$$\varphi'=c\cdot\varphi \tag{A.32}$$

とおく。

（ⅱ－イ）$\varphi=0$ のとき

axiom 1,（ⅰ）の後半が成立していることより、$T\varphi=0$ である。また、$\varphi'=0$ より、同様に、$T\varphi'=0$ である。結局、$T\varphi=0=T\varphi'$ が示された。

（ⅱ－ロ）$\varphi\neq 0$ のとき

2式(A.28)，(A.29)の下で、式(A.31)の $T\varphi$ が成立している。式(A.26)の汎関数 F の意味から、φ' に対応する η' を

$$\eta'(x)=\eta'(x_1, x_2)$$
$$=a'^*\cdot\varphi'(v_1'^*(x_1, x_2),\ v_2'^*(x_1, x_2))\neq 0 \tag{A.33}$$

とすると、

$$a'^*=c^{-1}\cdot a^* \tag{A.34}$$
$$v_j'^*=v_j^*,\ j=1, 2 \tag{A.35}$$

であることは直ちに、わかる。よって、

$$\eta'(x)=\eta'(x_1, x_2)$$
$$=a^*\cdot\varphi(v_1^*(x_1, x_2),\ v_2^*(x_1, x_2))$$
$$\because\ \text{式(A.32)} \tag{A.36}$$
$$=\eta(x_1, x_2)\neq 0 \tag{A.37}$$

を得、式(A.31)より、

$$T\varphi'=\eta'(x_1, x_2)/\sup_{x\in M}|\eta'(x_1, x_2)|$$
$$=\eta(x_1, x_2)/\sup_{x\in M}|\eta(x_1, x_2)| \tag{A.38}$$
$$=T\varphi. \tag{A.39}$$

axiom 1, (iii)の後半の成立：

$$\varphi' = T\varphi \tag{A.40}$$

とおく。

(iii－イ) $\varphi'=0$ のとき

axiom 1, (i)の後半が成立していることより、$T\varphi'=0$ を得、$T(T\varphi)=T\varphi'=0=\varphi'=T\varphi$.

(iii－ロ) $\varphi' \neq 0$ のとき

2式(A.28), (A.31)の下で、式(A.26)の汎関数 F の意味から、φ' に対応する η' を式(A.33)の如く考えると、

$$a'^{*} = \sup_{x \in M} |\eta(x)| > 0 \tag{A.41}$$

$$v_k'^{*} = x_j,\ k=1, 2 \tag{A.42}$$

であることは直ちに、わかる。よって、

$$\eta'(x) = \eta'(x_1, x_2)$$

$$= [\sup_{x \in M} |\eta(x)|] \cdot \eta(x) / \sup_{x \in M} |\eta(x)| \tag{A.43}$$

$$= \eta(x_1, x_2) \neq 0 \tag{A.44}$$

を得、式(A.31)より、$T\varphi'=T\varphi$ を得、$T(T\varphi)=T\varphi'=T\varphi$.

axiom 1, (iv)の成立：　任意であるが、ある1つのカテゴリ番号 $j \in J$ を選定し、$\varphi=\omega_j (\neq 0)$ とおく。2式(A.28)(A.31)より、明らかに、$T\varphi \neq 0$. □

A2.2 学習による最適パラメータ a^*, $c_i(k)^*$ $(i=1\sim N；k=1, 2)$ の決定

2式(A.28), (A.29)内の最適化パラメータである最適化振幅 a^* と最適化1次結合係数 $c_i(k)^*$ $(i=1\sim N；k=1, 2)$ を求める過程は以下の【1】,【2】,【3】で記述される。

先ず、第t段階の変形座標関数 $v_k(x_1, x_2)(t)$ を、

$$v_k(x_1, x_2)(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} c_i(k)(t) \cdot g(|\underline{x} - \underline{p_i}|)$$

$$(k=1, 2) \quad \because \quad 式(A.23) \tag{A.45}$$

であると考えておく。

【1】初期化(initialization)(第t(＝0)段階)

先ず、変形座標が全く無いものと想定し、第0段階の変形座標関数 $v_k(x_1, x_2)(t)|_{t=0} = v_k(x_1, x_2)(0)$ を、

$$v_k(x_1, x_2)(0) = x_k \tag{A.46}$$

と仮に設定して、

$$0 = \partial F / \partial a$$

$$= \sum_{j \in J} \int dx_1 \int dx_{2\,M} [a \cdot \varphi(v_1(x_1, x_2),$$

$$v_2(x_1, x_2)) - \omega_j(x_1, x_2)] \cdot \varphi(v_1(x_1, x_2),$$

$$v_2(x_1, x_2)) \tag{A.47}$$

から、第0段階の振幅パラメータ $a(t)|_{t=0} = a(0)$ を

$$a(0)$$

$$= \sum_{j \in J} \int dx_1 \int dx_{2\,M}\, \varphi(v_1(x_1, x_2)(0),$$

$$v_2(x_1, x_2)(0)) \cdot \omega_j(x_1, x_2)$$

$$/ \sum_{j \in J} \int dx_1 \int dx_{2\,M}\, \varphi(v_1(x_1, x_2)(0),$$

$v_2(x_1, x_2)(0))\cdot\varphi(v_1(x_1, x_2)(0),$
$v_2(x_1, x_2)(0))$ (A.48)

と仮に決定する。

【2】帰納(recursion)(第t(=1, 2, …)段階)

第(t−1)段階の振幅パラメータ $a(t-1)$，変形座標 $v_k(x_1, x_2)(t-1)(k=1, 2)$を用いて、第t段階の変形座標 $v_k(x_1, x_2)(t)(k=1, 2)$を以下の如く、最急降下法に従って決定する。決定されたこの $v_k(x_1, x_2)(t)(k=1, 2)$を用いて、その後、第t段階の振幅パラメータ $a(t)$を、

$$
\begin{aligned}
&a(t)\\
&=\sum_{j\in J}\int dx_1\int dx_{2\,M}\,\varphi(v_1(x_1, x_2)(t),\\
&v_2(x_1, x_2)(t))\cdot\omega_j(x_1, x_2)\\
&/\sum_{j\in J}\int dx_1\int dx_{2\,M}\,\varphi(v_1(x_1, x_2)(t),\\
&v_2(x_1, x_2)(t))\cdot\varphi(v_1(x_1, x_2)(t),\\
&v_2(x_1, x_2)(t))
\end{aligned}
\qquad (A.49)
$$

と決定する。

最急降下法による式(A.45)の$v_k(x_1, x_2)(t)(k=1, 2)$を決定する手法、つまり、$a(t-1)$，$\langle c_i(1)(t-1), c_i(2)(t-1)\rangle(i=1\sim N)$から$\langle c_i(1)(t), c_i(2)(t)\rangle(i=1\sim N)$を決定する手法を以下に、説明しよう。

第 t 段階の訓練時刻 s の変形座標関数 $v_k(x_1, x_2)(t;s)$を、

$$
\begin{aligned}
&v_k(x_1, x_2)(t;s)\\
&=\sum_{i=1}^{N}c_i(k)(t;s)\cdot g(|\underline{x}-\underline{p_i}|)\\
&(k=1, 2)
\end{aligned}
\qquad (A.50)
$$

とおく。

s=0 のときの初期条件を

$$
\begin{aligned}
&c_i(k)(t;s)|_{s=0}=c_i(k)(t-1)\\
&(i=1\sim N;k=1, 2)
\end{aligned}
\qquad (A.51)
$$

とおく。但し、式(A.46)が成立するように、第0段階の $c_i(k)(t)|t=0=c_i(k)(0)$を、

$$ci(k)(0)=x_k/\sum_{i=1}^{N}g(|\underline{x}-\underline{p_i}|),\ k=1, 2 \qquad (A.52)$$

とおく。汎関数

$$
\begin{aligned}
&F_s\equiv\\
&F(a(t-1);\{\langle c_i(1)(t;s), c_i(2)(t;s)\rangle\ |\ i=1\sim N\};\varphi)\\
&=\sum_{j\in J}2^{-1}\cdot\int dx_1\int dx_{2\,M}\,[a(t-1)\cdot\varphi(v_1(x_1, x_2)(t;s),\\
&v_2(x_1, x_2)(t;s))-\omega_j(x_1, x_2)]^2\\
&\qquad\because\ 式(A.26)
\end{aligned}
\qquad (A.53)
$$

を導入し、時定数

$$\tau_i(k)(t;s)>0 \qquad (A.54)$$

を考え、最急降下方程式(**学習方程式**)

$$
\begin{aligned}
&dc_i(k)(t;s)/ds\\
&=-\tau_i(k)(t;s)\cdot\partial F_s/\partial c_i(k)(t;s)
\end{aligned}
\qquad (A.55)
$$

を導入する。この学習方程式(A.55)の時間的発展では、

$$dF_s/ds$$
$$=\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{N}\partial F_s/\partial c_i(k)(t;s)\cdot$$
$$[dc_i(k)(t;s)/d_s]$$
$$=-\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{N}\tau_i(k)(t;s)\cdot$$
$$[\partial F_s/\partial c_i(k)(t;s)]^2$$
$$\leqq 0 \quad \because \quad 式(A.35) \qquad (A.56)$$

と、不一致誤差 F_s の値は時刻変数 s が増大するにつれて減少するので、解 $c_i(k)(t)$ は、

$$c_i(k)(t)=\lim_{s\to\infty} c_i(k)(t;s)$$
$$(i=1\sim N;k=1,2) \qquad (A.57)$$

と求まる。

学習方程式(A.55)の求解過程(**学習過程**)を次のように離散化表現するのがよい。

時刻刻み間隔 $\Delta s>0$ を適切に選んでいる場合、時刻 s での $c_i(k)(t;s)$ から、時刻 $s+\Delta s$ での $c_i(k)(t;s+\Delta s)$ を求める離散化表現

$$c_i(k)(t;s+\Delta s)$$
$$=c_i(k)(t;s)+\Delta c_i(k)(t;s)$$
$$(i=1\sim N;j=1,2) \qquad (A.58)$$

において、更新量 $\Delta c_i(k)(t;s)$ は

$$\Delta c_i(k)(t;s)$$
$$=(\Delta s)\cdot[-\tau_i(k)(t;s)]\cdot$$
$$\partial F_s/\partial c_i(k)(t;s) \qquad (A.59)$$

と求まる。方程式(A.59)に登場している偏微分係数は、式(A.50)より、

$$\partial v_k(t;s)/\partial c_i(k)(t;s)$$
$$=g(|\underline{x}-\underline{p_i}|)$$
$$(i=1\sim N;k=1,2) \qquad (A.60)$$

であるから、

$$\partial F_s/\partial c_i(k)(t;s)$$
$$=\sum_{j\in J}\int dx_1\int dx_{2\,M}\,[a(t-1)\cdot\varphi(v_1(x_1,x_2)(t;s),$$
$$v_2(x_1,x_2)(t;s))-\omega_j(x_1,x_2)]\cdot$$
$$\partial\varphi(v_1(x_1,x_2)(t;s),\ v_2(x_1,x_2)(t;s))/$$
$$\partial v_j(x_1,x_2)(t;s)\cdot g(|\underline{x}-\underline{p_i}|)$$
$$\because \quad 2式(A.50),\ (A.53) \qquad (A.61)$$

と求まる。

事実上、式(A.45)の $c_i(k)(t)$ は次のように求まる。

予め選んでいる十分小さい正数 $\varepsilon(t)$ について、不等式

$$\sum_{i=1}^{N}|c_i(k)(t;s+\Delta s)-c_i(k)(t;s)|$$
$$<\varepsilon(t) \qquad (A.62)$$

が成立するような非負正数 s を選んで、

$$c_i(k)(t)=c_i(k)(t;s)\ (k=1,2) \qquad (A.63)$$

とすればよい。

【3】終了(termination)

十分小さい2つの正数 $\varepsilon_1(0)$, $\varepsilon_2(k)$ を選んでおいて、終了のための不動点条件

$$|a(t+1)-a(t)|<\varepsilon_1(0) \tag{A.64}$$

$$\wedge\left[\forall k\in\{1,2\},\ \sum_{i=1}^{N}|c_i(k)(t+1)-c_i(k)(t)|<\varepsilon_2(k)\right] \tag{A.65}$$

が満たされる段階番号 t を求め、

$$a^*=a(t) \tag{A.66}$$

$$c_i(k)^*=c_i(k)(t)\ (i=1\sim N\ ;\ k=1,2) \tag{A.67}$$

と決定する。

A3. 前章の手法は入力パターン φ の如何なる不規則な変形を除去しているか？

A3.1 並進、回転、縮小・拡大を含むパターン変形

パターン $\varphi=\varphi(x_1, x_2)$、並びに、そのすべての偏導関数が領域 M 内で連続で偏微分可能なときは、$\varphi(x_1, x_2)$ のテーラー展開

或る1より小さくない正定数 θ が存在して、

$$\begin{aligned}&\varphi(x_1+\Delta v_1, x_2+\Delta v_2)\\&=\varphi(x_1, x_2)+(1!)^{-1}\cdot[\Delta v_1\cdot\partial/\partial x_1+\Delta v_2\cdot\partial/\partial x_2]\\&\varphi(x_1, x_2)+(2!)^{-1}\cdot[\Delta v_1\cdot\partial/\partial x_1+\Delta v_2\cdot\partial/\partial x_2]^2\\&\varphi(x_1, x_2)+\cdots+((n-1)!)^{-1}\cdot[\Delta v_1\cdot\partial/\partial x_1+\Delta v_2\cdot\partial/\partial x_2]^{n-1}\\&\varphi(x_1, x_2)+R_n\end{aligned} \tag{A.68}$$

ここに、

$$\begin{aligned}&R_n\\&=(n!)^{-1}\cdot[\Delta v_1\cdot\partial/\partial x_1+\Delta v_2\cdot\partial/\partial x_2]^n\\&\varphi(x_1+\theta\cdot\Delta v_1, x_2+\theta\cdot\Delta v_2)\end{aligned} \tag{A.69}$$

が成り立つことが知られている。

ここで、座標変換

$$x_k\rightarrow v_k(x_1, x_2),\quad k=1,2 \tag{A.70}$$

に起因する変形の特別なもの(規則的な変形)には、

①c1, c2 だけの並進(平行移動)

$$\varphi(x_1, x_2)\rightarrow\varphi(x_1-c_1, x_2-c_2) \tag{A.71}$$

②角度 θ だけの回転

$$\varphi(x_1, x_2)\rightarrow\varphi(x_1\cos\theta-x_2\sin\theta, x_1\sin\theta+x_2\cos\theta) \tag{A.72}$$

③c_1, c_2 (>0) だけの縮小・拡大

$$\varphi(x_1, x_2)\rightarrow\varphi(x_1/c_1, x_2/c_2) \tag{A.73}$$

がある。

座標点 $a=\langle y_1, y_2\rangle$ において、

$$\begin{aligned}&\Delta\varphi(v_1(y_1, y_2),\ v_2(y_1, y_2))\\&=\varphi(y_1, y_2)-\varphi(v_1(y_1, y_2),\ v_2(y_1, y_2))\end{aligned} \tag{A.74}$$

だけの変形があるパターン

$$\varphi(v_1(y_1, y_2),\ v_2(y_1, y_2)) \tag{A.75}$$

は、

$$v_k(y_1, y_2) = x_k + [v_k(y_1, y_2) - x_k],\ k = 1, 2 \tag{A.76}$$

と考えると、

$$\begin{aligned}
&-\Delta \varphi(v_1(y_1, y_2),\ v_2(y_1, y_2)) \\
&= \\
&-[\varphi(y_1, y_2) - \varphi(v_1(y_1, y_2),\ v_2(y_1, y_2))] \\
&= \varphi(v_1(y_1, y_2),\ v_2(y_1, y_2)) - \varphi(y_1, y_2) \qquad (A.77) \\
&= [v_1(y_1, y_2) - x_1] \cdot \partial \varphi(x_1, x_2)/\partial x_1 \\
&+ [v_2(y_1, y_2) - x_2] \cdot \partial \varphi(x_1, x_2)/\partial x_2 \\
&+ 2^{-1} \cdot [v_1(y_1, y_2) - x_1]^2 \cdot \partial^2 \varphi(x_1, x_2)/\partial x_1^2 \\
&+ [v_1(y_1, y_2) - x_1] \cdot [v_2(y_1, y_2) - x_2] \cdot \\
&\{\partial/\partial x_1\}\{\partial/\partial x_2\}\ \ \varphi(x_1, x_2) \\
&+ 2^{-1} \cdot [v_2(y_1, y_2) - x_2]^2 \cdot \partial^2 \varphi(x_1, x_2)/\partial x_2^2 \\
&+ \cdots
\end{aligned}$$

と表示できる。 (A.78)

A3.2　変形除去パターンモデル $T\varphi$

パターン φ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属するとすれば、その変形

$$\omega_j(x_1, x_2) \rightarrow \varphi(x_1, x_2) \tag{A.79}$$

を除去するため、最適化パラメータ a^*, $c_i(k)^*(i=1 \sim N;\ k=1, 2)$ を学習の働きで求め、パターン $\varphi(x_1, x_2)$ を式(A.28)のパターン $\eta(x_1, x_2)$ に変換する。更に、この η から構成される定理4.2のパターンモデル $T\varphi$ をあたかも φ かのように取り扱うことにより、φ 内に存在する"不規則かつ規則的変形"を吸収しようとする。

パターン認識過程においては、パターンモデル $T\varphi$ を見たり聞いたりしたならば原パターン φ と同じに見えたり聞こえたりするような"$T\varphi$"を、φ の代りに採用する"SS理論の立場"からは、原パターン φ に含まれる"φ の帰属するであろうカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン ω_j からの変形"を可能な限り取り除いたことが、$T\varphi$ には反映されていなければならない。A2章では、このようなパターンモデル $T\varphi$ を構成する手法が研究された。この意味で、$T\varphi$ は(帰属カテゴリからの、式(A.79)で表される)**変形**(を)**除去**(して得られる)**パターンモデル**と称されてよい。

A3.3　変分問題から最急降下問題への転換で得られる変形除去パターンモデル $T\varphi$

2次元(平面上の)パターン $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ が存在する空間領域 M から式(A.22)のN個の座標点 $\underline{p_i}$, $i = 1 \sim N$ を選定し、直交座標系 $\underline{x} = \langle x_1, x_2 \rangle$ を変換して得られる座標変換後の、座標系 $\underline{v} = \langle v_1(x_1, x_2),\ v_2(x_1, x_2) \rangle$ を式(A.24)のthe radial basis function $g(u)$ を用い、式(A.23)の如く選ぶのは、つまり、$g(|\underline{x} - \underline{p_i}|)$ の1次結合で表現するのは、式(A.26)の汎関数 F を最小にする様な変形除去座標関数 $\underline{v}$ を求める最適化問題を**変分問題として取り扱うことを排除**できるように、最急降下法で非零振幅定数 a と1次結合パラメータ $\{\langle c_i(1),\ c_i(2) \rangle \mid i = 1 \sim N\}$ とを求める問題に帰着させるためである。

その結果、式(A.26)の汎関数 F からわかるように、入力パターン φ と各カテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン ω_j との間で各画素 $\underline{p_i}$ 単位で最適な対応付け

$\underline{x} = \langle x_1, x_2 \rangle$

$\rightarrow \underline{v}^* = \langle v_1^*(x_1, x_2), v_2^*(x_1, x_2) \rangle$ (A.80)

を行い、原パターン $T\varphi$ から振幅変化に起因する変形($a^* \rightarrow a$)と、(線形座標変換を含む)非線形座標変換に起因する変形($\underline{v}^* \rightarrow v$)を取り除いたモデル $T\varphi$ を定理A.2の如く構成できた。

2次元座標系の伸縮からもたらされるパターン変形に対応できるパターンモデル $T\varphi$ が構成できたのである。

第A2章の研究内容と関連して、他の諸研究について、簡単に言及しておこう。

文献［A13］では、式(A.23)の変形座標関数 $v_k(x_1, x_2)$ として、位置ずれ変形座標関数

$v_k(x_1, x_2) = x_k + f_k(x_1, x_2),\ k = 1, 2$ (A.81)

を考え、この変形に基づいて、手書き文字を認識する手法を提案している。

文献［A14］では、式(A.23)の変形座標関数 $v_k(x_1, x_2)$ を考え、変形座標関数 v_1, v_2 に関する2次微分エネルギーを一定値に抑えながら、あるカテゴリの代表パターン $\omega(x_1, x_2)$ を $\omega(v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2))$ と変形し、この変形代表パターン $\omega(v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2))$ と、入力パターン $\varphi(x_1, x_2)$ との不一致の度合いをを最小化している。

文献［A15］では、変形問題を汎関数の、条件付き最小化問題として定式化することは、文献［A14］と同様であるが、あるカテゴリの代表パターン ω の座標 $\langle x_1, x_2 \rangle$ が変形座標 $v(x_1, x_2)$ に変換された結果、入力パターン φ が得られているという対応を考えている。

付録B. カテゴリ毎に変形の除去処理を考えた場合のモデル構成作用素 T の構成1例

本付録Bでは、axiom 1, (i), (ii), (iii)の3後半と, (iv)を満たす式(2.1)のモデル構成作用素 T を、可能な限り、各カテゴリの代表パターンへ変換するようなカテゴリ総数だけの変形除去座標を求め、構成しよう。

言い替えれば、

$a_j \cdot \varphi(v_{1j}(x_1, x_2),\ v_{2j}(x_1, x_2))$

から $\omega_j(x_1, x_2)$ への変換 (B.1)

を可能にする**振幅変形除去パラメータ** a_j と、**変形除去座標** $v_{1j}(x_1, x_2),\ v_{2j}(x_1, x_2)\ (j \in J)$ とを求めることによって、パターンモデル$(T\varphi)(x_1, x_2)$を構成する手法が研究される。この手法はA2章の1種の拡張となっており、そこでの、式(A.31)のパターンモデル $T\varphi$ より入力パターン φ の座標変換に関する歪みを多く除去することになる式(B.12)のパターンモデル $T\varphi$ が得られている。

B1. 最適化問題の解としての変形座標関数によるモデル構成作用素の決定

2次元直交座標系 $\underline{x} = \langle x_1, x_2 \rangle$ を選定し、処理の対象とする問題のパターン $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2) \in \Phi$ は実数値とする。

2次元平面から可測部分集合 M を選び、代表的な座標点 $\underline{p_i} = \langle p_i(1),\ p_i(2) \rangle$ の系列

$\underline{p_i},\ i = 1 \sim N$ (B.2)

をも、選定する。

各 $c_{ij}(k)$ を実定数とする“座標変換を除去できるような座標関数”(変形座標関数；warping coordinate function)

$$v_{kj}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{N} c_{ij}(k) \cdot g_j(|\underline{x} - \underline{p_i}|)$$
$$k = 1, 2, j \in J \tag{B.3}$$
を導入する。ここに、関数 g_j は、標準偏差 $\sigma_j(>0)$ を持ガウス形関数に選び、
$$g_j(u) = \exp\left[-(2\sigma_j^2)^{-1} \cdot u^2\right] \tag{B.4}$$
である。また、$|\underline{x} - \underline{p_i}|$ は $\underline{x}$ と $\underline{p_i}$ との間のユークリッド距離であって、
$$|\underline{x} - \underline{p_i}| = \sqrt{\Sigma_{\ell=1}{}^2 (x_\ell - p_i(\ell))^2} \tag{B.5}$$
である。

非零定数 a_j と $\{\langle c_{ij}(1), c_{ij}(2)\rangle \mid i = 1 \sim N\}$ をパラメータに持つ汎関数
$$F(a_j; \{\langle c_{ij}(1), c_{ij}(2)\rangle \mid i = 1 \sim N\}; \varphi)$$
$$= 2^{-1} \cdot \int dx_1 \int dx_{2\,M} \left[a \cdot \varphi(v_{1j}(x_1, x_2),\ v_{2j}(x_1, x_2)) - \omega_j(x_1, x_2)\right]^2 \tag{B.6}$$
を最小とするパラメータ
$$a_j^*, \{\langle c_{ij}(1)^*, c_{ij}(2)^*\rangle \mid i = 1 \sim N\} \tag{B.7}$$
を求める。その後、
$$\operatorname*{argmin}_{p \in J} F(a_p^*; \{\langle c_{ip}(1)^*, c_{ip}(2)^*\rangle \mid i = 1 \sim N\}; \varphi)$$
$$= j \in J \tag{B.8}$$
を求め、パターン η を
$$\eta(x) = \eta(x_1, x_2)$$
$$= a_j^* \cdot \varphi(v_{1j}^*(x_1, x_2),\ v_{2j}^*(x_1, x_2)) \tag{B.9}$$
を決定する。$a_j^*, c_{ij}(k)^*(i = 1 \sim N; k = 1, 2)$ が汎関数 F を最小にするという最適化問題の解としての最適化パラメータであり、最適な変形座標関数 v_{kj}^* は
$$v_{kj}^*(x_1, x_2)$$
$$= \sum_{i=1}^{N} c_{ij}(k)^* \cdot g(|\underline{x} - \underline{p_i}|),\ k = 1, 2 \tag{B.10}$$
と表される。

次の定理B.1は、定理2.1を適用すれば、axiom 1を満たす対［Φ, T］が得られることを指摘している。

［定理B.1］**（変形座標関数による2次元パターンモデル構成定理1）**
$$(T\varphi)(x) =$$
$$\begin{cases} 0 \quad \cdots \sup_{x \in M} |\eta(x)| = 0 \text{ のとき} & \text{(B.11)} \\ \eta(x) / \sup_{x \in M} |\eta(x)| & \\ \quad \cdots \sup_{x \in M} |\eta(x)| > 0 \text{ のとき} & \text{(B.12)} \end{cases}$$
と定義された式(2.1)の写像 T はaxiom 1,（i），（ii），（iii）の3後半と（iv）を満たす。

（証明） axiom 1,（i）の後半の成立：$\varphi = 0$ とすれば、式(B.9)より、$\eta = 0$ を得、式(B.11)より、$\sup_{x \in M} |\eta(x)| = 0$ を得、$T\varphi = 0$.

axiom 1,（ii）の後半の成立：

c を正の定数とする。
$$\varphi' = c \cdot \varphi \tag{B.13}$$
とおく。

（ii－イ）$\varphi = 0$ のとき

axiom 1, (i)の後半が成立していることより、$T\varphi=0$ である。また、$\varphi'=0$ より、同様に、$T\varphi'=0$ である。結局、

$$T\varphi=0=T\varphi' \qquad \text{(B.14)}$$

が示された。

(ii－ロ) $\varphi\neq0$ のとき

2式(B.8), (B.9)の下で、式(B.12)の $T\varphi$ が成立している。式(B.6)の汎関数 F の意味から、

$$\operatorname*{argmin}_{p\in J} F(a_p^*\,;\{\langle c_{ip}(1)^*, c_{ip}(2)^*\rangle \mid i=1\sim N\}\,;\,\varphi)$$
$$=j\in J \qquad \text{(B.15)}$$

とすれば、

$$\operatorname*{argmin}_{p\in J} F(a_p'^*\,;\{\langle c_{ip}(1)'^*, c_{ip}(2)'^*\rangle \mid i=1\sim N\}\,;\,\varphi')$$
$$=j\in J \qquad \text{(B.16)}$$

であり、φ' に対応するパターン

$$\eta'(x)=\eta'(x_1, x_2)$$
$$=a'_j{}^*\cdot\varphi'(v_{1j}'^*(x_1, x_2),\ v_{2j}'^*(x_1, x_2))$$
$$\neq0 \qquad \text{(B.17)}$$

について、

$$a'_j{}^*=c^{-1}\cdot a_j^* \qquad \text{(B.18)}$$
$$v_{kj}'^*=v_{kj}^*,\ k=1, 2 \qquad \text{(B.19)}$$

であることは直ちに、わかる。よって、

$$\eta'(x)=\eta'(x_1, x_2)$$
$$=a^*\cdot\varphi(v_{1j}^*(x_1, x_2),\ v_{2j}^*(x_1, x_2))$$
$$\because\ 3式(B.17), (B.18), (B.19) \qquad \text{(B.20)}$$
$$=\eta(x_1, x_2)\neq0 \quad \because\ 式(B.9) \qquad \text{(B.21)}$$

を得、式(B.12)より、

$$(T\varphi')(x_1, x_2)$$
$$=\eta'(x_1, x_2)/\sup_{x\in M}|\eta'(x_1, x_2)|$$
$$=\eta(x_1, x_2)/\sup_{x\in M}|\eta(x_1, x_2)| \qquad \text{(B.22)}$$
$$=(T\varphi)(x_1, x_2). \qquad \text{(B.23)}$$

axiom 1, (iii)の後半の成立：

$$\varphi'=T\varphi \qquad \text{(B.24)}$$

とおく。

(iii－イ) $\varphi'=0$ のとき

axiom 1, (i)の後半が成立していることより、$T\varphi'=0$ を得、

$$T(T\varphi)=T\varphi'=0=\varphi'=T\varphi. \qquad \text{(B.25)}$$

(iii－ロ) $\varphi'\neq0$ のとき

2式(B.8), (B.9)の下で、式(B.12)の $T\varphi$ が成立している。式(B.12)より、

$$\varphi'(x_1, x_2)$$
$$=\eta(x_1, x_2)/\sup_{x\in M}|\eta(x_1, x_2)| \qquad \text{(B.26)}$$

である。

式(B.6)の汎関数 F の意味から、式(B.15)が成立しているとすると、式(B.16)が成立しており、φ'に対応する式(B.17)のパターン$\eta'(x)$について、

$$a'_j{}^* = a_j^* \cdot \sup_{x \in M} |\eta(x_1, x_2)| \tag{B.27}$$

$$v_{kj}'^* = v_{kj}^*, k=1, 2 \tag{B.28}$$

であることは直ちに、わかる。よって、

$$\eta'(x) = \eta'(x_1, x_2)$$

$$= a_j^* \cdot \varphi(v_{1j}^*(x_1, x_2),\ v_{2j}^*(x_1, x_2))$$

$$\because\ 3式(B.17),\ (B.27),\ (B.28) \tag{B.29}$$

$$= \eta(x_1, x_2) \neq 0 \quad \because\ 式(B.9) \tag{B.30}$$

を得、式(B.12)より、

$$(T\varphi')(x_1, x_2)$$

$$= \eta'(x_1, x_2) / \sup_{x \in M} |\eta'(x_1, x_2)|$$

$$= \eta(x_1, x_2) / \sup_{x \in M} |\eta(x_1, x_2)| \tag{B.31}$$

$$= (T\varphi)(x_1, x_2). \tag{B.32}$$

axiom 1, (iv)の成立： 任意であるが、ある1つのカテゴリ番号 $j \in J$ を選定し、$\varphi = \omega_j (\neq 0)$とおく。2式(B.9), (B.12)より、明らかに、$T\varphi \neq 0$. □

A2.2 学習による最適パラメータ a_j^*, $c_{ij}(k)^*$ $(i=1\sim N;k=1, 2;j\in J)$ の決定

2式(B.8), (B.9)内の最適化パラメータである最適化振幅 a_j^*と最適化1次結合係数 $c_{ij}(k)^*(i=1 \sim N;k=1, 2;j\in J)$を求める過程は以下の【1】,【2】,【3】で記述される。

先ず、第 t 段階の変形座標関数 $v_{kj}(x_1, x_2)(t)$を、

$$v_{kj}(x_1, x_2)(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} c_{ij}(k)(t) \cdot g(|\underline{x} - \underline{p_i}|)$$

$$(k=1, 2;j\in J) \quad \because\ 式(B.10) \tag{B.33}$$

であると考えておく。

【1】初期化(initialization)(第t(=0)段階)

先ず、変形座標が全く無いものと想定し、第0段階の変形座標関数 $v_{kj}(x_1, x_2)(t) \mid t=0 = v_{kj}(x_1, x_2)(0)$を、

$$v_{kj}(x_1, x_2)(0) = x_k \tag{B.34}$$

と仮に設定して、

$$0 = \partial F / \partial a_j$$

$$= \int dx_1 \int dx_{2\,M}\ [a_j \cdot \varphi(v_{1j}(x_1, x_2),$$

$$v_{2j}(x_1, x_2)) - \omega_j(x_1, x_2)] \cdot \varphi(v_{1j}(x_1, x_2),\ v_{2j}(x_1, x_2)) \tag{B.35}$$

から、第0段階の振幅パラメータ $a(t) \mid_{t=0} = a(0)$を

$$a_j(0)$$

$$= \int dx_1 \int dx_{2\,M}\ \varphi(v_{1j}(x_1, x_2)(0),$$

$$v_{2j}(x_1, x_2)(0)) \cdot \omega_j(x_1, x_2)$$

$$/ \int dx_1 \int dx_{2\,M} \varphi(v_{1j}(x_1, x_2)(0),$$

$$v_{2j}(x_1, x_2)(0)) \cdot \varphi(v_{1j}(x_1, x_2)(0),$$

$$v_{2j}(x_1, x_2)(0)) \tag{B.36}$$

と仮に決定する。

【2】帰納(recursion)(第t(＝1, 2, …)段階)

第$(t-1)$段階の振幅パラメータ$a_j(t-1)$, 変形座標 $v_{kj}(x_1, x_2)(t-1)$ $(k=1, 2 ; j \in J)$を用いて、第t段階の変形座標 $v_{kj}(x_1, x_2)(t)$ $(k=1, 2)$を以下の如く、最急降下法に従って決定する。決定されたこの $v_{kj}(x_1, x_2)(t)$ $(k=1, 2 ; j \in J)$を用いて、その後、第t段階の振幅パラメータ $a_j(t)$ を、

$$
\begin{aligned}
&a_j(t)\\
&=\int dx_1 \int dx_{2\,M}\, \varphi(v_{1j}(x_1, x_2)(t),\\
&v_{2j}(x_1, x_2)(t)) \cdot \omega_j(x_1, x_2)\\
&/ \int dx_1 \int dx_{2\,M}\, \varphi(v_{1j}(x_1, x_2)(t),\\
&v_{2j}(x_1, x_2)(t)) \cdot \varphi(v_{1j}(x_1, x_2)(t),\\
&v_{2j}(x_1, x_2)(t))
\end{aligned} \tag{B.37}
$$

と決定する。

最急降下法による式(B.33)の$v_{kj}(x_1, x_2)(t)$ $(k=1, 2)$を決定する手法、つまり、$a_j(t-1)$, $\langle c_{ij}(1)(t-1), c_{ij}(2)(t-1)\rangle$ $(i=1 \sim N ; j \in J)$ から $\langle c_{ij}(1)(t), c_{ij}(2)(t)\rangle$ $(i=1 \sim N ; j \in J)$を決定する手法を以下に、説明しよう。

第 t 段階の訓練時刻 s の変形座標関数 $v_{kj}(x_1, x_2)(t ; s)$を、

$$
\begin{aligned}
&v_{kj}(x_1, x_2)(t ; s)\\
&=\sum_{i=1}^{N} c_{ij}(k)(t ; s) \cdot g(|\underline{x}-\underline{p_i}|)\\
&(k=1, 2)
\end{aligned} \tag{B.38}
$$

とおく。

$s=0$ のときの初期条件を

$$
\begin{aligned}
&c_{ij}(k)(t ; s)|_{s=0}=c_{ij}(k)(t-1)\\
&(i=1 \sim N ; k=1, 2)
\end{aligned} \tag{B.39}
$$

とおく。但し、式(B.34)が成立するように、第0段階の $c_{ij}(k)(t)|_{t=0}=c_{ij}(k)(0)$を、

$$
c_{ij}(k)(0)=x_k / \sum_{i=1}^{N} g(|\underline{x}-\underline{p_i}|), \quad k=1, 2 \tag{B.40}
$$

とおく。汎関数

$$
\begin{aligned}
&F_s(j) \equiv\\
&F(a_j(t-1) ; \{\langle c_{ij}(1)(t ; s),\\
&c_{ij}(2)(t ; s)\rangle | i=1 \sim N\} ; \varphi)\\
&=2^{-1} \cdot \int dx_1 \int dx_{2\,M}\, [a_j(t-1) \cdot \varphi(v_{1j}(x_1, x_2)\\
&(t ; s), v_{2j}(x_1, x_2)(t ; s))\\
&-\omega_j(x_1, x_2)]^2 \qquad \because \text{式(B.6)}
\end{aligned} \tag{B.41}
$$

を導入し、時定数

$$
\tau_{ij}(k)(t ; s)>0 \tag{B.42}
$$

を考え、最急降下方程式(学習方程式)

$$
\begin{aligned}
&dc_{ij}(k)(t ; s)/d_s\\
&=-\tau_{ij}(k)(t ; s) \cdot \partial F_s(j) / \partial c_{ij}(k)(t ; s)
\end{aligned} \tag{B.43}
$$

を導入する。この学習方程式(B.43)の時間的発展では、

$$dF_s(j)/ds$$
$$=\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{N} \partial F_s(j)/\partial c_{ij}(k)(t;s)\cdot$$
$$[dc_{ij}(k)(t;s)/ds]$$
$$=-\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{N} \tau_{ij}(k)(t;s)\cdot$$
$$[\partial F_s(j)/\partial c_{ij}(k)(t;s)]^2$$
$$\leqq 0 \quad \because \ \text{式}(B.43) \qquad (B.44)$$

と、不一致誤差 Fs の値は時刻変数 s が増大するにつれて減少するので、解 $c_{ij}(k)(t)$ は、

$$c_{ij}(k)(t)=\lim_{s\to\infty} c_{ij}(k)(t;s)$$
$$(i=1\sim N;k=1,2;j\in J) \qquad (B.45)$$

と求まる。

学習方程式(B.43)の求解過程(学習過程)を次のように離散化表現するのがよい。

時刻刻み間隔 $\Delta s>0$ を適切に選んでいる場合、時刻 s での $c_{ij}(k)(t;s)$ から、時刻 $s+\Delta s$ での $c_{ij}(k)(t;s+\Delta s)$ を求める離散化表現

$$c_{ij}(k)(t;s+\Delta s)$$
$$=c_{ij}(k)(t;s)+\Delta c_{ij}(k)(t;s)$$
$$(i=1\sim N;j=1,2) \qquad (B.46)$$

において、更新量 $\Delta c_{ij}(k)(t;s)$ は

$$\Delta c_{ij}(k)(t;s)$$
$$=(\Delta s)\cdot[-\tau_{ij}(k)(t;s)]\cdot$$
$$\partial F_s(j)/\partial c_{ij}(k)(t;s) \qquad (B.47)$$

と求まる。方程式(B.47)に登場している偏微分係数は、式(B.38)より、

$$\partial v_{kj}(t;s)/\partial c_{ij}(k)(t;s)$$
$$=g(|\underline{x}-\underline{p_i}|)$$
$$(i=1\sim N;k=1,2;j\in J) \qquad (B.48)$$

であるから、

$$\partial F_s(j)/\partial c_{ij}(k)(t;s)$$
$$=\int dx_1 \int dx_{2\,M}\ [a(t-1)\cdot$$
$$\varphi(v_{1j}(x_1,x_2)(t;s),\ v_{2j}(x_1,x_2)(t;s))$$
$$-\omega_j(x_1,x_2)]\ \cdot$$
$$\partial\varphi(v_{1j}(x_1,x_2)(t;s),\ v_{2j}(x_1,x_2)(t;s))$$
$$/\partial v_{kj}(x_1,x_2)(t;s)\cdot$$
$$g(|\underline{x}-\underline{p_i}|) \quad \because \ 2\text{式}(B.38),\ (B.41) \qquad (B.49)$$

と求まる。

事実上、式(B.33)の $c_{ij}(k)(t)$ は次のように求まる。

予め選んでいる十分小さい正数 $\varepsilon_j(t)$ について、不等式

$$\sum_{i=1}^{N} |c_{ij}(k)(t;s+\Delta s)$$
$$-c_{ij}(k)(t;s)|$$
$$<\varepsilon_j(t) \qquad (B.50)$$

が成立するような非負正数 s を選んで、

$$c_{ij}(k)(t)=c_{ij}(k)(t;s)\ (k=1,2) \tag{B.51}$$

とすればよい。

【3】終了(termination)

十分小さい2つの正数 $\varepsilon_{1j}(0)$, $\varepsilon_{2j}(k)$ を選んでおいて、終了のための不動点条件

$$|a_j(t+1)-a_j(t)|<\varepsilon_{1j}(0) \tag{B.52}$$

$$\wedge[\forall k,\in\{1,2\},\ \sum_{i=1}^{N}|c_{ij}(k)(t+1) -c_{ij}(k)(t)|<\varepsilon_{2j}(k)] \tag{B.53}$$

が満たされる段階番号 t を求め、

$$a_j{}^*=a_j(t) \tag{B.54}$$

$$c_{ij}(k)^*=c_{ij}(k)(t)\ (i=1\sim N;k=1,2) \tag{B.55}$$

と決定する。

付録C. 類似度関数 SM の構成諸例

本付録Cでは、3.2節の内容を一般化する。つまり、相違度関数 g_j に基づいて、axiom 2を満たす類似度関数 SM が構成される。

その**構成根拠**は次のとおりである：

或るパターンモデル $T\varphi$ が第j∈J番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン ω_j のモデル $T\omega_j$ と似ている程度を、$T\varphi$ が他のカテゴリ $\mathfrak{C}_i(i\neq j)$ の代表パターン ω_i のモデル $T\omega_i$ と異なっている程度と考えてみよう。つまり、$T\varphi$ が $T\omega_i(i\neq j)$ と異なっているほど、$T\varphi$ が $T\omega_j$ と似ていると解釈する訳である。 □

2つのパターンモデル $T\varphi$, $T\omega_i$ 間の相違度関数 g_i の、$i\in J$ にわたる系に基づいて、類似の測度関数 f_i の系 $(i\in J)$ を構成し、axiom 2を満たす類似度関数 SM を構成し、その応用としてある類似度関数 SM′ から今1つの SM を再帰的に構成してみよう。

C1. 他のカテゴリから眺めた類似の測度関数 f_j による類似度関数 SM の構成

パターンモデル間の**非一致条件**

$$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},\ \|T\omega_i-T\omega_j\|>0 \tag{C.1}$$

を要請する。

零条件

$$g_j(\varphi)=0 \text{ if } \|T\varphi-T\omega_j\|=0 \tag{C.2}$$

と、T－不変性

$$\forall\varphi\in\Phi,\ g_j(T\varphi)=g_j(\varphi) \tag{C.3}$$

とを満たし、$T\varphi$ が $T\omega_j$ と異なれば異なるほど、大きいと解釈可能な非負の値をとる**相違度関数**

$$g_j:\Phi\to R^+\text{(非負実数全体の集合)} \tag{C.4}$$

の、$j\in J$ にわたる系を導入する。例えば、2つのパターンモデル $T\varphi$, $T\omega_i$ 間のノルム距離

$$g_j(\varphi)\equiv\|T\varphi-T\omega_j\|,\ j\in J \tag{C.5}$$

がそうである。そして、**類似の測度関数**

$$f_j : \Phi \to R^+ \tag{C.6}$$
を、
$$f_j(\varphi) \equiv \min_{k \in J - \{j\}} g_k(\varphi) \tag{C.7}$$
と定義する。

このとき、次の定理C.1が成立し、式(C.6)の類似の測度関数 f_j の系を使って、axiom 2を満たす類似度関数
$$SM : \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \tag{C.8}$$
が構成されることがわかる。

パターンモデル $T\varphi$ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ 以外の、任意のカテゴリ $\mathfrak{C}_k (k \in J - \{j\})$ の代表パターンモデル $T\omega_k$ から相違していればいるほど、$T\varphi$ が $T\omega_j$ と類似しているという様に、$T\varphi$ と $T\omega_j$ との類似性を直接的ではなく、$T\omega_j$ を用いないで間接的に定義し、その結果、構成された式(C.9)の類似度 $SM(\varphi, \omega_j)$ が得られていることに注意しておく。

[定理C.1] **(他のカテゴリから眺めた類似の測度関数 f_j による類似度関数 SM の構成定理)**

非一致条件式(C.1)の下で、
$$SM(\varphi, \omega_j) =$$
$$\begin{cases} f_j(\varphi) / \sum_{k \in J} f_k(\varphi) \\ \qquad \cdots \sum_{i \in J} f_i(\varphi) > 0 \text{ の場合} & \text{(C.9)} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \sum_{i \in J} f_i(\varphi) = 0 \text{ の場合} & \text{(C.10)} \end{cases}$$
と定義される式(C.8)の関数 SM はaxiom 2を満たす。

(証明) 非一致条件式(C.1)の下では、明らかに、零条件式(C.2)から、
$$\forall j \in J, g_j(\omega_j) = 0 \tag{C.11}$$
$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, g_j(\omega_i) > 0 \tag{C.12}$$
が成立することを考慮すれば、式(C.7)の $f_j(\varphi)$ について、明らかに、
$$\forall j \in J, f_j(\omega_j) > 0 \tag{C.13}$$
$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, f_j(\omega_i) = 0 \tag{C.14}$$
が成り立つとがわかる。axiom 2の(i)(直交性)の成立は、2式(C.13), (C.14)を考慮すれば、SM の定義式(C.9)から
$$\forall j \in J, SM(\omega_j, \omega_j) = f_j(\omega_j)/f_j(\omega_j) = 1 \tag{C.15}$$
$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\},$$
$$SM(\omega_i, \omega_j) = f_j(\omega_i)/f_i(\omega_i) = 0 \tag{C.16}$$
を得、示された。

axiom 2の(ii)(規格化条件)の成立は、SM の2定義式(C. 9), (C.10)から明らかである。

axiom 2の(iii)(T-不変性)の成立は、**T-不変性**
$$\forall \varphi \in \Phi, f_j(T\varphi) = f_j(\varphi)$$
$$\because \ g_j \text{ の T-不変式(C.3)} \tag{C.17}$$
を考慮すれば、、SM の2定義式(C. 9), (C.10)から明らかである。 □

C2. 他のカテゴリから眺めた類似の測度関数 f_j による類似度関数 SM の再帰的構成

axiom 2を満たす類似度関数 SM´からaxiom 2を満たす類似度関数 SM を、式(C.7)の類似の測度関数 f_j を使って、再帰的に構成できることは、次の定理C.2で指摘される。

［定理C.2］**（他のカテゴリから眺めた類似の測度関数 f_j による類似度関数 SM の再帰的構成定理）**

axiom 2を満たす類似度関数

$$SM' : \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\} \quad (C.18)$$

と、式(C.7)の類似の測度関数 $f_i(\varphi)$ とを用いて、

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} f_j(\varphi) \cdot SM'(\varphi, \omega_j) / \sum_{k \in J} f_k(\varphi) \cdot SM'(\varphi, \omega_k) \\ \cdots \sum_{i \in J} f_i(\varphi) \cdot SM'(\varphi, \omega_i) > 0 \text{ の場合} & (C.19) \\ p(\mathfrak{C}_j) \\ \cdots \sum_{i \in J} f_i(\varphi) \cdot SM'(\varphi, \omega_i) = 0 \text{ の場合} & (C.20) \end{cases}$$

と定義される式(C.8)の関数 SM はaxiom 2を満たす。

（証明）　式(C.7)の $f_i(\varphi)$ について成り立つ2式(C.13)，(C.14)と、式(C.18)の SM´がaxiom 2の(ⅰ)(直交性)を満たすことから、2式(C.19)，(C.20)で定義される関数 SM が、axiom 2の(ⅰ)(直交性)を満たすことは、

$$\forall j \in J, SM(\omega_j, \omega_j) = f_j(\omega_j) \cdot SM'(\omega_j, \omega_j) / f_j(\omega_j) \cdot SM'(\omega_j, \omega_j) = 1 \quad (C.21)$$

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, SM(\omega_i, \omega_j) = f_j(\omega_i) \cdot SM'(\omega_i, \omega_j) / f_i(\omega_i) \cdot SM'(\omega_i, \omega_i) = 0 \quad (C.22)$$

とわかる。

axiom 2の(ⅱ)(規格化条件)の成立は2式(C.19)，(C.20)から明らかである。

axiom 2の(ⅰ)(T-不変性)の成立は、式(C.7)の補間関数 $f_i(\varphi)$ の T-不変式(C.17)と、式(C.18)のSM´がaxiom 2の(ⅲ)(T-不変性)を満たすことから、明らかである。□

C3. 零条件式(C.2)とT-不変式(C.3)とを満たす式(C.4)の非負相違度関数 g_j の系の構成

パターンモデル間の非一致条件式(C.1)の下で零条件式(C.2)とT-不変式(C.3)とを満たす式(C.4)の非負相違度関数 g_i の系として、式(C.5)以外に、例えば、次の5式(C.23)～(C.27)で表されるものがある：

非一致条件(C.1)の下で、第 $i \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_i$ の非重要さを表す正の助変数 $a_i > 0$ を導入し、

$$g_i(\varphi) \equiv 1 - \exp(-a_i^{-1} \cdot \| T\varphi - T\omega_i \|), \quad a_i > 0 \quad (C.23)$$

$$g_i(\varphi) \equiv a_i^{-1} \cdot [1 - |(T\varphi \| T\varphi \|^{-1}, T\omega_i \| T\omega_i \|^{-1})|^2] \quad (C.24)$$

$$g_i(\varphi) \equiv 1 - \exp[-a_i^{-1} \cdot \{1 - |(T\varphi \| T\varphi \|^{-1}, T\omega_i \| T\omega_i \| - 1)|^2\}] \quad (C.25)$$

$$g_i(\varphi) \equiv a_i^{-1} \cdot [1 - |d_i(\varphi)|^2 / \sum_{k \in J} |d_k(\varphi)|^2] \quad (C.26)$$

$$g_i(\varphi) \equiv 1 - \exp[-a_i^{-1} \cdot \{1 - |d_i(\varphi)|^2 / \sum_{k \in J} |d_k(\varphi)|^2\}] \quad (C.27)$$

などがある。ここに、複素定数 $d^k(\varphi)$ は、

系 $T\omega_j, j\in J$ は1次独立であるとして、

$$\| T\varphi - \sum_{k\in J} d_k \cdot T\omega_k \|^2 \tag{C.28}$$

を最小にする1次結合係数 d_k のことである。 □

更に、非一致条件式(C.1)の下で、2条件

①(代表パターン ω_j の包含条件)

$$\forall j\in J,\ \omega_j \in \Psi_j \subset \Phi \tag{C.29}$$

②(非交差条件)

$$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},$$

$$\Psi_j \cap \Psi_i = T\cdot\Psi_j \cap T\cdot\Psi_i = \phi \tag{C.30}$$

の下で、正なる助変数 $a_i(T\eta)>0$ をパターン $\eta\in\Psi_i$ のモデル $T\eta$ の非重要さと考えておいて、

$$g_i(\varphi) \equiv \min_{\eta\in\Psi i} a_i(T\eta)^{-1}\cdot \| T\varphi - T\eta \| \tag{C.31}$$

$$g_i(\varphi) \equiv \min_{\eta\in\Psi i} [1-\exp(-a_i(T\eta)^{-1}\cdot \| T\varphi - T\eta \|)], \tag{C.32}$$

$$g_i(\varphi) \equiv \min_{\eta\in\Psi i} a_i(T\eta)^{-1}\cdot [1-|(T\varphi \| T\varphi \|^{-1}, T\eta \| T\eta \|^{-1})|^2] \tag{C.33}$$

$$g_i(\varphi) \equiv \min_{\eta\in\Psi i} 【1-\exp[-a_i(T\eta)^{-1}\cdot \{1- |(T\varphi \| T\varphi \|^{-1}, T\eta \| T\eta \|^{-1})|^2\}]】 \tag{C.34}$$

$$g_i(\varphi) \equiv \min_{\eta\in\Psi i} ai(T\eta)^{-1}\cdot【1- |d_{i,\eta}(\varphi)|^2 / \sum_{k\in J} \sum_{\eta\in\Psi k} |d_{k,\eta}(\varphi)|^2】 \tag{C.35}$$

$$g_i(\varphi) \equiv \min_{\eta\in\Psi i} 【1-\exp[-a_i(T\eta)^{-1}\cdot \{1- |d_i,\ \eta(\varphi)|^2 / \sum_{k\in J} \sum_{\eta\in\Psi k} |d_{k,\eta}(\varphi)|^2\}]】 \tag{C.36}$$

も、零条件式(C.2)とT-不変条件式(C.3)を満たす式(C.4)の非負相違度関数 g_i として採用できる。複素定数 $d_{k,\eta}(\varphi)$ は、

系 $T\eta_j,\ \eta_j\in\Psi_j, j\in J$ は1次独立であるとして、

$$\| T\varphi - \sum_{k\in J} \sum_{\eta\in\Psi k} d_{k,\eta}\cdot T\eta \|^2 \tag{C.37}$$

を最小にする1次結合係数 $d_{k,\eta}$ のことであり、次の補助定理C.1が成立していることに注意しておく。

[補助定理C.1] **(1次結合係数 $d_{k,\eta}(C)$ のT-不変・正規直交定理)**

(i)(T-不変性)

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall k\in J,\ \forall\eta\in\Psi_k,$$

$$d_{k,\eta}(T\varphi) = d_{k,\eta}(\varphi). \tag{C.38}$$

(ii)(正規直交性)

$$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall k\in J,\ \forall\eta\in\Psi_k,$$

$$d_{k,\eta}(\omega_i) =$$

$$\begin{cases}1 \text{ if } i=k \vee \eta=\omega_i \\ 0 \text{ if } i\neq k \vee \eta\neq \omega_i\end{cases} \quad (C.39)$$

(証明) axiom 1, (iii)の後半 $T\cdot T=T$ より、

$$\| T\varphi - \sum_{k\in J} \sum_{\eta\in\Psi_k} d_{k,\eta}\cdot T\eta \|^2$$

$$= \| T(T\varphi) - \sum_{k\in J} \sum_{\eta\in\Psi_k} d_{k,\eta}\cdot T\eta \|^2$$

$$\because \ \text{系 } T\eta_j,\ \eta_j\in\Psi_j, j\in J \text{ は1次独立} \quad (C.40)$$

が成立することにより、(i)のT-不変性が成立する。

更に、式(C.39)の $d_k, \eta(\omega_i)$ を $d_{k,\eta}$ に採用すれば、

$$\| T\omega_i - \sum_{k\in J} \sum_{\eta\in\Psi_k} d_{k,\eta}\cdot T\eta \|^2 \quad (C.41)$$

$$= \| T\omega_i - T\omega_i \|^2$$

$$\because \ 2\text{式}(C.29),\ (C.30) \quad (C.42)$$

$$=0 \quad (C.43)$$

を得、式(C.41)が最小となっている。 □

以上は、文献 [B23] の付録Cの補間関数による類似度関数の構成論を簡単化したものになっているが、より使いやすいといえるであろう。

C4. 構成された類似度関数 SM の1・0性質

2定理C.1, C.2で得られた類似度関数 SM が如何なる場合に最大値 1, 最小値 0 をとるかを2定理C.3, C.4で明らかにしよう。

次の定理C.3は、零条件式(C.2)とT-不変式(C.3)を満たす式(C.4)の関数 g_j の系を用い、2式(C.9), (C.10)で定義される式(C.8)の類似度関数 SM が第$j\in J$番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン ω_j 以外のパターン $\varphi\in\Psi_j$ に最大値 1 を与えることを指摘し、

$$\omega_j \text{ から } \varphi\in\Psi_j \text{ へのパターン変形} \quad (C.44)$$

に適応している事実を明らかにしたものである。

[定理C.3] **(SM の1・0一定理)**

例えば、2条件(C.29), (C.30)の下での、6式(C.31)~(C.36)においては、任意の $\varphi\in\Psi_j$ について、

$$g_j(\varphi)=0 \wedge [\forall i\in J-\{j\},\ g_i(\varphi)>0] \quad (C.45)$$

が成立する。このように、式(C.45)が成立するようなパターン $\varphi\in\Phi$ については、2式(C.9), (C.10)で定義される式(C.8)の類似度関数 SM は、"1・0一性質"

$$SM(\varphi, \omega_j)=1 \wedge [\forall i\in J-\{j\},\ SM(\varphi, \omega_i)=0 \quad (C.46)$$

を満たす。

(証明)非一致条件式(C.1)の下では、式(C.45)が成立することを考慮すれば、式(C.7)の $f_j(\varphi)$ について、明らかに、

$$f_j(\varphi)>0 \wedge [\forall i\in J-\{j\},\ f_i(\varphi)=0] \quad (C.47)$$

が成り立つとがわかる。axiom 2の(i)(直交性)の成立は、2式(C.13), (C.14)を考慮すれば、SM の定義式(C.9)から

$$\forall j\in J, SM(\varphi, \omega_j)=f_j(\varphi)/f_j(\varphi)=1 \quad (C.48)$$

$$\forall j\in J, \forall i\in J-\{j\},$$

$$SM(\varphi,\ \omega_i)=f_i(\varphi)/f_j(\varphi)=0/f_j(\varphi)=0 \tag{C.49}$$

を得、示された。 □

次の定理C.4は、零条件式(C.2)とT-不変式(C.3)を満たす式(C.4)の関数 g_j の系を用い、2式(C.19)，(C.20)で定義される式(C.8)の類似度関数 SM が第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターンω_j以外のパターン$\varphi\in\Psi_j$ に最大値 1 を与えることを指摘し、式(C.44)のパターン変形に適応している事実を明らかにしたものである。

［定理C.4］**(再帰 SM の1･0ー定理)**

例えば、2条件(C.29)，(C.30)の下での、6式(C.31)～(C.36)においては、任意の$\varphi\in\Psi_j$ について、式(C.45)が成立する。このように、式(C.45)が成立し、かつ

$$SM'(\varphi,\ \omega_j)>0 \tag{C.50}$$

が成立するようなパターン$\varphi\in\Phi$については、2式(C.19)，(C.20)で定義される式(C.8)の類似度関数 SM は、式(C.46)の“1･0ー性質”を満たす。

(証明)非一致条件式(C.1)の下では、式(C.45)が成立することを考慮すれば、式(C.7)の$f_j(\varphi)$について、明らかに、式(C.47)が成り立つとがわかる。axiom 2の(ⅰ)(直交性)の成立は、2式(C.13)，(C.14)を考慮すれば、SM の定義式(C.19)から

$$\begin{aligned}&\forall j\in J,\ SM(\varphi,\ \omega_j)\\&=f_j(\varphi)\cdot SM'(\varphi,\ \omega_j)/[f_j(\varphi)\cdot SM'(\varphi,\ \omega_j)]=1\end{aligned} \tag{C.51}$$

$$\begin{aligned}&\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},\\&SM(\varphi,\ \omega_i)\\&=f_i(\varphi)\cdot SM'(\varphi,\ \omega_i)/[f_j(\varphi)\cdot SM'(\varphi,\ \omega_j)]\\&=0/[f_j(\varphi)\cdot SM'(\varphi,\ \omega_j)]=0\end{aligned} \tag{C.52}$$

を得、示された。 □

C5. 2式(C.28)，(C.37)を各々、最小にする1次結合係数 d_k, $d_{k,\eta}$ を求める方法

2式(C.28)，(C.37)を各々、最小にする1次結合係数 d_k, $d_{k,\eta}$ を求める方法を説明しよう。

式(C.28)内の各 d_j は、式(C.29)において各 Ψ_j が

$$\begin{aligned}&\Psi_j=\{\omega_j\}(\text{唯1つの}\ \omega_j\ \text{のみからなる集合}),\\&j\in J\end{aligned} \tag{C.53}$$

と表される場合であるから、式(C.37)を最小にする $d_{k,\eta}$ を求める方法のみ説明しよう。

最小自乗法によれば、各 $d_{j,\psi}$ $(\psi\in\Psi_j, j\in J)$が式(C.37)を最小にするとすれば、

$$\begin{aligned}&\partial\,\|\,T\varphi-\sum_{k\in J}\ \sum_{\eta\in\Psi k} d_{k,\eta}\cdot T\eta\,\|^2/\partial\, d_{j,\ \psi}\\&=0,\ \eta\in\Psi_j,\ j\in J\end{aligned} \tag{C.54}$$

が成立する。式(C.54)を計算すれば、$\overline{d_{j,\psi}}$ を $d_{k,\psi}$の複素共役として、

$$\begin{aligned}&0=\\&\partial\,\|\,T\varphi-\sum_{k\in J}\ \sum_{\eta\in\Psi k} d_{k,\eta}\cdot T\eta\,\|^2/\partial\, d_{j,\psi}\\&=(\partial/\partial\, d_{j,\psi}\,[T\varphi-\sum_{k\in J}\ \sum_{\eta\in\Psi k} d_{k,\eta}\cdot T\eta],\\&T\varphi-\sum_{k\in J}\ \sum_{\eta\in\Psi k} d_{k,\eta}\cdot T\eta)\\&+(T\varphi-\sum_{k\in J}\ \sum_{\eta\in\Psi k} d_{k,\eta}\cdot T\eta,\\&\partial/\partial\,\overline{d_{j,\psi}}\,[T\varphi-\sum_{k\in J}\ \sum_{\eta\in\Psi k} d_{k,\eta}\cdot T\eta]\ )\end{aligned}$$

$$=-(T\psi, T\varphi-\sum_{k\in J}\sum_{\eta\in\Psi k} d_{k,\eta}\cdot T\eta)$$
$$, \psi\in\Psi_j, j\in J \quad \text{(C.55)}$$
$$\because \quad \partial d_{k,\eta}/\partial\overline{d_{j,\psi}}=0 \quad \text{(C.56)}$$
と計算されるから、連立1次方程式
$$\sum_{k\in J}\sum_{\eta\in\Psi k} d_{k,\eta}\cdot(T\eta, T\eta')=(T\varphi, T\eta'),$$
$$\eta'\in\Psi_j, j\in J \quad \text{(C.57)}$$
が導かれる。このとき、連立1次方程式(C.57)の解 $d_{k,\eta}(\varphi)=d_{k,\eta}$ を用いて、$T\varphi$ の1次結合展開
$$\exists(T\varphi)\perp\in\mathfrak{H} \text{ such that}$$
$$\forall j\in J, \forall\eta\in\Psi^j, ((T\varphi)_\perp, T\eta)=0, \quad \text{(C.58)}$$
$$T\varphi=\sum_{k\in J}\sum_{\eta\in\Psi k} d_{k,\eta}(\varphi)\cdot T\eta+(T\varphi)_\perp \quad \text{(C.59)}$$
が成り立つ。そして、$T\varphi$ を1次結合
$$\sum_{k\in J}\sum_{\eta\in\Psi k} d_{k,\eta}\cdot T\eta \quad \text{(C.60)}$$
で近似するときの誤差
$$T\varphi-\sum_{k\in J}\sum_{\eta\in\Psi k} d_{k,\eta}\cdot T\eta \quad \text{(C.61)}$$
のノルムの自乗の最小値は、
$$\inf d_{k,\eta\,(k\in J,\eta\in\Psi k)}\,\|T\varphi-\sum_{k\in J}\sum_{\eta\in\Psi k} d_{k,\eta}\cdot T\eta\|^2 \quad \text{(C.62)}$$
$$=\|T\varphi-\sum_{k\in J}\sum_{\eta\in\Psi k} d_{k,\eta}(\varphi)\cdot T\eta\|^2 \quad \text{(C.63)}$$
$$=(T\varphi, T\varphi-\sum_{k\in J}\sum_{\eta\in\Psi k} d_{k,\eta}(\varphi)\cdot T\eta)$$
$$-\sum_{k\in J}\sum_{\eta\in\Psi k} d_{k,\eta}(\varphi)\cdot$$
$$(T\eta, T\varphi-\sum_{j\in J}\sum_{\psi\in\Psi k} d_{j,\psi}(\varphi)\cdot T\psi)$$
$$=\|T\varphi\|^2-\sum_{k\in J}\sum_{\eta\in\Psi k}\overline{d_{k,\eta}(\varphi)}\cdot(T\varphi, T\eta)$$
$$\because \quad \text{式(C.55)} \quad \text{(C.64)}$$
と求められる。

付録D. 類似度関数SMの閾“連続・不連続”変換

本付録Dでは、axiom 2を満たす類似度関数SMを2つの閾値 $s_0(j)$, $s_1(j)$ の系を使って、連続的、、或いは、不連続的に変換し、最大類似度 1 への、かつ、最小類似度 0 へのその分離の程度を改良する構成法を示して見よう。

D.1 類似度関数 SM の閾“連続”変換に基づく類似度関数 SM の構成

axiom 2を満たす類似度関数
$$SM':\Phi\times\Omega\to\{s\mid 0\leqq s\leqq 1\} \quad \text{(D.1)}$$
が与えられたとし、更に、閾値 $s_0(j)$, $s_1(j)$ が、不等式
$$0\leqq s_0(j)<s_1(j)\leqq 1\,(j\in J) \quad \text{(D.2)}$$
を満たすように選ばれているとしよう。

次の定理D.1は、与えられた類似度関数 SM′がaxiom 2を満たす今1つの類似度関数 SM に変換

できることを示しており、得られたSMは、SM´が$s_1(j)$以上になると最大値1に変換される可能性が生じ、$s_0(j)$以下になると最小値0に変換される可能性が生じ(定理D.1の系1)、その結果、各々、1, 0になるパターンを多くしている。

[定理D.1] **(閾連続変換SM定理)**

類似度$SM'(\varphi, \omega_j)$を連続的に、

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, sm_j(\varphi) = \begin{cases} 1 \quad \text{if } s_1(j) \leqq SM'(\varphi, \omega_j) \leqq 1 \\ [SM'(\varphi, \omega_j) - s_0(j)] / [s_1(j) - s_0(j)] \\ \quad \text{if } s_0(j) < SM'(\varphi, \omega_j) < s_1(j) \\ 0 \quad \text{if } 0 \leqq SM'(\varphi, \omega_j) \leqq s_0(j) \end{cases} \tag{D.3}$$

と、$sm_j(\varphi)$へと変換すると、

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall j \in J, SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} sm_j(\varphi) / \sum_{k \in J} sm_k(\varphi) \\ \quad \cdots \sum_{i \in J} sm_i(\varphi) > 0 \text{ の場合} \\ p(\mathfrak{C}_j) \cdots \sum_{i \in J} sm_i(\varphi) = 0 \text{ の場合} \end{cases} \tag{D.4}$$

と定義される式(C.8)の関数SMはaxiom 2を満たす。

[定理D.1の系1] **(閾連続変換 SM の1・0定理)**

(i)不等式

$$s_1(j) \leqq SM'(\varphi, \omega_j) \tag{D.5}$$

を満たすパターン$\varphi \in \Phi$に対し、

$$SM(\varphi, \omega_j) = 1/ \left[1 + \sum_{k \in J - \{j\}} sm_k(\varphi)\right] \tag{D.6}$$

であり、更に、パターン$\varphi \in \Phi$が、不等式

$$\forall k \in J - \{j\}, SM'(\varphi, \omega_k) \leqq s_0(k) \tag{D.7}$$

を満たして入れば、

$$SM(\varphi, \omega_j) = 1. \tag{D.8}$$

(ii)不等式

$$SM'(\varphi, \omega_j) \leqq s_0(j) \tag{D.9}$$

を満たし、更に、不等式

$$\exists k \in J - \{j\}, s_0(k) < SM'(\varphi, \omega_k) \tag{D.10}$$

を満たしているようなパターン$\varphi \in \Phi$に対し、

$$SM(\varphi, \omega_j) = 0. \tag{D.11}$$

(定理D.1の系1の証明)

(i)の成立：不等式(D.5)を満たしていれば、

$$sm_j(\varphi) = 1 \quad \because \quad \text{式(D.3)} \tag{D.12}$$

であり、よって、式(D.6)は式(D.4)から従う。更に、不等式(D.7)から、

$$\forall k \in J - \{j\}, sm_k(\varphi) = 0 \quad \because \quad \text{式(D.3)} \tag{D.13}$$

を得、この式(D.13)を式(D.6)に代入すれば、式(D.8)が従うことになる。

(ii)の成立：不等式(D.9)から、

$$sm_j(\varphi) = 0 \quad \because \quad \text{式(D.3)} \tag{D.14}$$

を得、更に、不等式(D.10)から、

$\exists k \in J-\{j\},\ 0 < sm_k(\varphi)$　∵　式(D.3)　(D.15)

を得、

$$\begin{aligned}&SM(\varphi,\ \omega_j)\\&= sm_j(\varphi)/\ [sm_j(\varphi)+\sum_{k\in J-\{j\}} sm_k(\varphi)]\\&\qquad \because\ 式(D.4)\qquad\qquad (D.16)\\&=0/\ [0+\sum_{k\in J-\{j\}} sm_k(\varphi)]\\&\qquad\quad \because\ 2式(D.14),\ (D.15)\\&=0\end{aligned}$$

が従い、式(D.11)を得た。

(定理D.1の証明)　先ず、$\varphi=\omega_j$について、SM′がaxiom 1の(i)を満たすことから、2不等式(D.5), (D.7)が満たされ、等式(D.8)が従う。

$\varphi=\omega_i\ (i\neq j)$について、SM′がaxiom 1の(i)を満たすことから、不等式(D.9)が満たされ、更に、閾値 $s_0(j)$, $s_1(j)$ に関する不等式(D.2)を考慮すれば、不等式(D.10)が満たされ、等式(D.11)が従う。

以上により、axiom 2の(i)(直交性)を満たすことがわかった。

axiom 2の(ii)(規格化条件)の成立は、SM の定義式(D.4)から明らかである。

先ず、SM′がaxiom 1の(iii)を満たすことから、式(D.3)のsm_jの**T-不変性**

$\forall \varphi\in\Phi,\ \forall j\in J,\ sm_j(T\varphi)=sm_j(\varphi)$　(D.17)

を得、SM の定義式(D.4)からaxiom 2の(iii)(T-不変性)の成立が知れる。　□

D.2　2つの閾値 $s_0(j)$, $s_1(j)$ の系の選定法

因みに、2つの閾値 $s_0(j)$, $s_1(j)$ の系は次のように選ぶのがよい：

$\Psi_j(\subset\Phi)$を第$j\in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属していると判明しているパターン$\varphi\in\Phi$の有限集合とすれば、

①$s_1(j)\leqq \min_{\psi\in\Psi_j} SM'(\psi,\ \omega_j)$　(D.18)

②$\max_{k\in J-\{j\}}\ \max_{\psi\in\Psi k} SM'(\psi,\ \omega_j)\leqq s_0(j)$　(D.19)

□

何故ならば、次の(イ), (ロ)が成立し、この成立はΨ_jの有する意味合いに適合しているからである：

(イ)任意のパターン$\varphi\in\Psi_j$について、不等式(D.18)から、不等式(D.5)が満たされ、かつ、不等式(D.19)から、不等式(D.7)が満たされることにより、定理D.1の系1が適用され、等式(D.8)が成立する。

(ロ)任意のパターン$\varphi\in\Psi_i\ (i\neq j)$ について、不等式(D.19)から、不等式(D.9)が満たされ、かつ、

$s_1(i)\leqq \min_{\psi\in\Psi i} SM'(\psi,\ \omega_i)\leqq SM'(\varphi,\ \omega_i)$

　∵　不等式(D.18)　(D.20)

$0\leqq s_0(i)<s_1(i)\leqq 1$　∵　不等式(D.2)　(D.21)

から、不等式(D.10)が満たされることにより、定理D.1の系2が適用され、等式(D.11)が成立する。

□

D.3　類似度関数 SM の閾“不連続”変換に基づく類似度関数 SM の構成

次の定理D.2は、定理D.1において式(D.3)の、SM´の連続な関数としてのsm_jの代りに、

(a) $SM'(\varphi, \omega_j)=s_0(j)$ のとき 飛び $s_0(j)$があって、

更に、

(b) $SM'(\varphi, \omega_j)=s_1(j)$ のとき 飛び $1-s_1(j)$ がある

ような式(D.25)の sm_j を採用したものであり、よって、定理D.1においては、不等式

$$s_0(j) < SM'(\varphi, \omega_j) < s_1(j) \tag{D.22}$$

を満たすパターン$\varphi\in\Phi$に対し、不等式

$$sm_j(\varphi) \geqq SM'(\varphi, \omega_j)-s_0(j) \tag{D.23}$$

が成立しているが、よって、定理D.1においては、

不等式(D.22)が成立している場合、

$$\begin{aligned} SM(\varphi, \omega_j) &= 1/\ [1+ \\ &\Sigma_{k\in J\wedge[SM'(\varphi,\omega_k)>s_0(k)]}\ sm_k(\varphi)/sm_j(\varphi)] && \text{(D.24)} \\ &\geqq 1/\ [1+ \\ &\Sigma_{k\in J\wedge[SM'(\varphi,\omega_k)>s_0(k)]}\ sm_k(\varphi)/\ \{SM'(\varphi, \omega_j)-s_0(j)\}] && \text{(D.25)} \\ &\geqq 1-\Sigma_{k\in J\wedge[SM'(\varphi,\omega_k)>s_0(k)]}\ sm_k(\varphi)/\ \{SM'(\varphi, \omega_j)-s_0(j)\}] && \text{(D.26)} \\ &\quad \because\ 1/[1+x]-[1-x]=x^2/[1+x]\geqq 0 \\ &\qquad \text{for any } x\geqq 0 && \text{(D.27)} \end{aligned}$$

が成立しているが、定理D.2においては等式、

$$sm_j(\varphi)=SM'(\varphi, \omega_j) \tag{D.28}$$

が成立しているから、不等式(D.22)が成立している場合、定理D.2においても成立している等式(D.24)を適用して、

$$\begin{aligned} SM(\varphi, \omega_j) &= 1/\ [1+ \\ &\Sigma_{k\in J\wedge[SM'(\varphi,\omega_k)>s_0(k)]}\ sm_k(\varphi)/SM'(\varphi, \omega_j)] && \text{(D.29)} \\ &\geqq 1-\Sigma_{k\in J\wedge[SM'(\varphi,\omega_k)>s_0(k)]}\ sm_k(\varphi)/SM'(\varphi, \omega_j) && \text{(D.30)} \end{aligned}$$

が成立している。

［定理D.2］**(閾不連続変換SM定理)**

閾値 $s_0(j)$, $s_1(j)$ が、不等式(D.2)を満たすように選ばれているとしよう。このとき、

$$sm_j(\varphi)= \begin{cases} 1 \quad \text{if } s_1(j)\leqq SM'(\varphi, \omega_j)\leqq 1 \\ SM'(\varphi, \omega_j) \\ \quad \text{if } s_0(j)<SM'(\varphi, \omega_j)<s_1(j) \\ 0 \quad \text{if } 0\leqq SM'(\varphi, \omega_j)\leqq s_0(j) \end{cases} \tag{D.31}$$

を導入し、式(D.4)の様に定義される式(C.8)の関数 SM はaxiom 2を満たす。

［定理D.2の系1］**(閾連続変換 SM の1･0定理)**

定理D.1の系1がそのまま、成立する。

(定理D.2、並びに、その系1の証明)　定理D.1の系1の証明がそのまま成立して、定理D.2の系1が成立する。式(D.31)の $sm_j(\varphi)$についても、T-不変式(D.17)が成立することに注意すれば、式(D.3)の $sm_j(\varphi)$ のT-不変式(D.17)を式(D.31)の $sm_j(\varphi)$ のT-不変式(D.17)に読み替えれば、定理D.1の証明がそのまま、成立する。　□

付録E. 特徴間距離関数内の各重みの与え方

本付録Eでは、2つのパターンφ, $\eta \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ の特徴間距離 Fdis(φ, η)内の重み $\underline{W}$ を、その帰属するカテゴリとその抽出された特徴量とがが判明しているサンプルパターンの集合を用いて決定する手法がエントロピー概念の導入の下で、研究される。

E1. 特徴間距離 Fdis(φ, η)の定義から得られたサンプルパターン間の特徴間距離 $D_{rs}(\varphi_r, \varphi_s)$

E1.1 特徴間距離 Fdis(φ, η)の定義

$u(\varphi, L) \in Z$ はパターン$\varphi \in \Phi$から抽出された第 $\ell \in L$番目の特徴量であると解釈可能な特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \rightarrow Z\text{(複素数全体の集合)} \tag{E.1}$$

を導入する。分離条件(非一致条件)

$$\forall j \in J, \forall i \in J - \{j\}, \ u(\omega_i, \ell) \neq u(\omega_j, \ell) \tag{E.2}$$

が少なくとも、満たされていなければならない。

特徴軸の番号の有限集合 L を

$$L = \{1, 2, \cdots, q\} \tag{E.3}$$

として、パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出された第 $\ell \in L$番目の特徴量 $u(\varphi, \ell) \in Z$ の $\ell \in L$ にわたる組

$$\begin{aligned}&\underline{u}(\varphi)\\&= \mathrm{col}(u(\varphi, 1)\ u(\varphi, 2) \cdots u(\varphi, q))\\&\quad\text{(列ベクトル)}\end{aligned} \tag{E.4}$$

を導入しておく。

2つのパターン φ, $\eta \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ の**特徴間距離**(distance between extracted fetures) Fdis(φ, η)は、正・有界条件

$$[\forall \ell \in L, 0 < w_\ell] \wedge \sum_{\ell \in L} w_\ell < \infty \tag{E.5}$$

を満たす重み

$$\underline{W} \equiv \{w_\ell \mid \ell \in L\} \tag{E.6}$$

を導入して、

$$\begin{aligned}&\mathrm{Fdis}(\varphi, \eta)\\&\equiv \sum_{\ell \in L} w_\ell \cdot | u(T\varphi, \ell) - u(T\eta, \ell) |\end{aligned} \tag{E.7}$$

と定義できる。

E1.2 サンプルパターン間の特徴間距離 $D_{rs}(\varphi_r, \varphi_s)$

その帰属するカテゴリとその抽出された特徴量とがが判明しているサンプルパターンの集合

$$\varphi_k, \mathfrak{C}_{J(k)}, \underline{u}(\varphi_k), \ k = 1 \sim n \tag{E.8}$$

が与えられたとしよう。$\mathfrak{C}_{J(k)} \in \underline{\mathfrak{C}} \equiv \{\mathfrak{C}_j \mid j \in J\}$ は第 $k(=1, 2, \cdots, n)$ 番目のサンプルパターンφ_sが帰属するカテゴリである。確率条件

$$[\forall \ell \in L, 0 \leqq p_k(\ell) \leqq 1] \tag{E.9}$$

$$\begin{aligned}&\wedge \sum_{\ell \in L} p_k(\ell) = 1\\&\quad \text{for any } k \in \{1, 2, \cdots, n\}\end{aligned} \tag{E.10}$$

を満たすような、φ_k を固定したときの第 $\ell \in L$番目の特徴量 $u(\varphi, \ell) \in Z$ の重要性尺度確率 $p_k(\ell)$ を導入する。例えば、

$$p_k(\ell) = [n+k+\ell]^{-1} / [\sum_{\ell \in L} (n+k+\ell)^{-1}] \quad \text{(E.11)}$$

と選べばよい。確率分布

$$\underline{p_k} = \mathrm{col}(p_k(1)\ p_k(2) \cdots p_k(q)) \quad \text{(E.12)}$$

の第$\ell \in L$番目の$p_k(\ell)$に注目し、そのエントロピー

$$H_k(\ell) \equiv -p_k(\ell) \cdot \log_2 p_k(\ell) - [1-p_k(\ell)] \cdot \log_2 [1-p_k(\ell)] \quad \text{(E.13)}$$

について、3性質

$$(1\#)\ \forall\ \ell \in L,\ 0 \leqq H_k(\ell) \leqq 1 \quad \text{(E.14)}$$

$$(2\#)\ p_k(\ell) = 2^{-1} \Rightarrow H_k(\ell) = 1 \quad \text{(E.15)}$$

$$(3\#)\ p_k(\ell) \in \{0,\ 1\} \Rightarrow H_k(\ell) = 0 \quad \text{(E.16)}$$

が成り立つ。

確率条件

$$[\forall \ell \in L,\ 0 \leqq v_k(\ell) \leqq 1] \quad \text{(E.17)}$$

$$\wedge \sum_{\ell \in L} v_k(\ell) = 1 \quad \text{(E.18)}$$

$$\text{for any } k \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$$

を満たす重み$v_k(\ell)$を、例えば、

$$v_k(\ell) = [n+k+\ell]^{-2} / [\sum_{\ell \in L} (n+k+\ell)^{-2}] \quad \text{(E.19)}$$

と定めて、非負量$e_k(\ell)$を、

$$e_k(\ell) \equiv 1 + v_k(\ell) \cdot [1 - H_k(\ell)] \quad \text{(E.20)}$$

と定義する。

3性質(1#), (2#), (3#)から、不等式

$$1 \leqq e_k(\ell) \leqq 1 + v_k(\ell) \quad \text{(E.21)}$$

が得られる。

第$k \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$番目のサンプルパターン$\varphi_k$から抽出される特徴量が第$\ell \in L$番目の特徴量$u(\varphi_k,\ \ell)$に集中して表現されていればいるほど、エントロピー$H_k(\ell)$は小さくなり、よって、$e_k(\ell)$は大きくなることに注意する。

$$w_{rs}(\ell) \equiv e_r(\ell) + e_s(\ell) \quad \text{(E.22)}$$

$$\text{for any } r \text{ and } s \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$$

と定義される$w_{rs}(\ell)$は、不等式(E.21)から、不等式

$$2 \leqq w_{rs}(\ell) \leqq 2 + v_r(\ell) + v_s(\ell) \quad \text{(E.23)}$$

を満たすけれども、この$w_{rs}(\ell)$を使い、2つのパターンφ_r, φ_s間の非類似度尺度$D_{rs}(\varphi_r,\ \varphi_s)$は

$$D_{rs}(\varphi_r,\ \varphi_s) \equiv \sum_{\ell \in L} w_{rs}(\ell) \cdot |\, u(T\varphi_r,\ \ell) - u(T\varphi_s,\ \ell)\, | \quad \text{(E.24)}$$

と定義できる。

E1.3 選定されたサンプルパターンの適切性の判定法

式(E.8)の、n個のサンプルパターンの内、第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属するパターンφ_kの添字kの集合を$(\phi \neq) N_j \subset \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$としよう。そうすると、式(E.8)の、n個からなるサンプル

パターンの集合についての、第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の限界類似性尺度 $D(\mathfrak{C}_j)$を、式(E.24)の $D_{rs}(\varphi_r, \varphi_s)$を用いて、

$$D(\mathfrak{C}_j) \equiv \max_{r \in Nj} \min_{s \in Nj} {}_{(r \neq s)} D_{rs}(\varphi_r, \varphi_s) \tag{E.25}$$

と定義できる。この限界類似性尺度 $D(\mathfrak{C}_j)$の効用は、次のとおりである：

$J(s) = j \in J$で、第 $s(=1, 2, \cdots, n)$番目のサンプルパターン φ_s が

第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属するとき、

$$D_{rs}(\varphi_r, \varphi_s) > D(\mathfrak{C}_j) \tag{E.26}$$

であれば、第 $r(=1, 2, \cdots, n)$ 番目のサンプルパターン φ_r は第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属しないと、推論できる。 □

もし、この推論が正しくないとすれば、サンプルパターンの集合が適切に選ばれていなかったと、結論でき、サンプルパターンの集合を選び直す必要があろう。

E2. 特徴間距離 Fdis 内の重み $\underline{W}$ の設定法

式(E.7)で定義される特徴間距離 $\mathrm{Fdis}(\varphi, \eta)$内の、式(E.6)の各重み w_ℓ は、式(E.22)の $w_{rs}(\ell)$を使い、不等式(E.23)を考慮し、

$$w_\ell \equiv \left[\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} {}_{(r \neq s)} w_{rs}(\ell)\right] / \left[(n^2 - n) \cdot \{2 + v_r(\ell) + v_s(\ell)\}\right] \tag{E.27}$$

と定義できる。

第 $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 番目のサンプルパターン φ_k から抽出される特徴量が第 $\ell \in L$ 番目の特徴量 $u(\varphi_k, \ell)$に集中していればいるほど、w_ℓ は大きく設定されることがわかる。

尚、データベース内の2つの、記号列で表される事例 a, b 間の非類似度 D(a, b)の形式 [A16] は、2つのパターン φ_r, φ_s間の、式(E.24)の特徴間距離 $D_{rs}(\varphi_r, \varphi_s)$の形式に一般化され、受け継がれている。

付録F. 特徴間距離 $\mathrm{Fdis}(\varphi, \eta)$を用いて、axiom 2を満たす類似度関数 SM を構成する手法

2つのパターン $\varphi, \eta \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ の特徴間距離 $\mathrm{Fdis}(\varphi, \eta)$内の重み $\underline{W}$ は付録Eで決定されたが、本付録Fでは、この $\mathrm{Fdis}(\varphi, \eta)$を用いて、axiom 2を満たす類似度関数 SM を構成する手法が、付録Cの研究成果を利用し、研究される。

正・有界条件式(E.5)の下で式(E.7)で定義される特徴間距離 $\mathrm{Fdis}(\varphi, \eta)$を使って、axiom 2を満たす式(C.8)の類似度関数 SM を構成するため、定理C.1～C.4に対応する4定理E.1～E.4を研究しよう。つまり、2つの特徴量の組 $\underline{u}(T\varphi)$, $\underline{u}(T\omega_i)$間の相違度関数 g_i の、$i \in J$ にわたる系に基づいて、類似の測度関数 f_i の系$(i \in J)$を構成し、axiom 2を満たす**類似度関数 SM** を構成し、その応用として、axiom 2を満たす類似度関数 SM′ から今1つの SM を構成してみよう。

F1. 他のカテゴリから眺めた類似の測度関数 f_j による類似度関数 SM の構成

先ず、式(E.7)の特徴間距離 Fdis の **T-不変性**

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall \eta \in \Phi, \mathrm{Fdis}(T\varphi, T\eta) = \mathrm{Fdis}(T\varphi, \eta)$$

$= \mathrm{Fdis}(\varphi, T\eta) = \mathrm{Fdis}(\varphi, \eta)$

$\because$ axiom 2, (iii)の後半 (F.1)

が成立していることに注意しておく。

抽出される特徴量の組間の**分離条件**(非一致条件)

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J-\{j\},\ \mathrm{Fdis}(\omega_i, \omega_j) > 0 \tag{F.2}$$

を要請する。**零条件**

$$g_j(\varphi) = 0 \text{ if } \mathrm{Fdis}(\varphi, \omega_j) = 0 \tag{F.3}$$

をも要請する。g_j の**T-不変性**

$$\forall \varphi \in \Phi,\ g_j(T\varphi) = g_j(\varphi) \tag{F.4}$$

とを満たし、パターン $\varphi \in \Phi$ から抽出された特徴量 $u(\varphi, \ell)$ の組である式(E.4)の $\underline{u}(\varphi)$ が $\underline{u}(\omega_j)$ と異なれば異なるほど、大きいと解釈可能な非負の値をとる**相違度関数**

$$g_j : \Phi \to R^+ \text{(非負実数全体の集合)} \tag{F.5}$$

の、$j \in J$ にわたる系を導入する。その後、第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ 以外の、任意のカテゴリ $\mathfrak{C}_k(k \in J-\{j\})$ から眺めた**類似の測度関数**

$$f_j : \Phi \to R^+ \tag{F.6}$$

が、

$$f_j(\varphi) \equiv \max_{k \in J-\{j\}} g_k(\varphi) \tag{F.7}$$

と定義される。

このとき、次の定理F.1が成立し、式(F.7)の類似の測度関数 f_j の系を使って、axiom 2を満たす式(C.8)の類似度関数 SM が構成されることがわかる。

パターンモデル $T\varphi$ が第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ 以外の、任意のカテゴリ $\mathfrak{C}_k(k \in J-\{j\})$ の代表パターンモデル $T\omega_k$ から相違していればいるほど、$T\varphi$ が $T\omega_j$ と類似しているという様に、$T\varphi$ と $T\omega_j$ との類似性を直接的ではなく、$T\omega_j$ を用いないで間接的に定義し、その結果、構成された式(F.8)の類似度 $SM(\varphi, \omega_j)$ が得られていることに注意しておく。

[定理F.1] **(他のカテゴリから眺めた類似の測度関数 f_j による類似度関数 SM の構成定理)**

分離条件式(F.2)の下で、

$$SM(\varphi, \omega_j) = \begin{cases} f_j(\varphi) / \sum_{k \in J} f_k(\varphi) & \cdots \sum_{i \in J} f_i(\varphi) > 0 \text{ の場合} \quad \text{(F.8)} \\ p(\mathfrak{C}_j) & \cdots \sum_{i \in J} f_i(\varphi) = 0 \text{ の場合} \quad \text{(F.9)} \end{cases}$$

と定義される式(C.8)の関数 SM はaxiom 2を満たす。

(証明)分離条件式(F.2)の下では、明らかに、零条件式(F.3)から、

$$\forall j \in J,\ g_j(\omega_j) = 0 \tag{F.10}$$

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J-\{j\},\ g_j(\omega_i) > 0 \tag{F.11}$$

が成立することを考慮すれば、式(F.7)の $f_j(\varphi)$ について、明らかに、

$$\forall j \in J,\ f_j(\omega_j) > 0 \tag{F.12}$$

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J-\{j\},\ f_j(\omega_i) = 0 \tag{F.13}$$

が成り立つとがわかる。axiom 2の(i)(直交性)の成立は、2式(F.12), (F.13)を考慮すれば、SM の定義式(F.8)から

$$\forall j \in J,\ SM(\omega_j,\ \omega_j) = f_j(\omega_j)/f_j(\omega_j) = 1 \tag{F.14}$$

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J - \{j\},$$

$$SM(\omega_i,\ \omega_j) = f_j(\omega_i)/f_i(\omega_i) = 0 \tag{F.15}$$

を得、示された。

axiom 2の(ii)(規格化条件)の成立は、SM の2定義式(F.8), (F.9)から明らかである。

axiom 2の(iii)(T-不変性)の成立は、**T-不変性**

$$\forall \varphi \in \Phi,\ f_j(T\varphi) = f_j(\varphi)$$

$$\because \quad g_j \text{ の T-不変式(F.4)} \tag{F.16}$$

を考慮すれば、SM の2定義式(F.8), (F.9)から明らかである。 □

F2. 他のカテゴリから眺めた類似の測度関数 f_j による類似度関数 SM の再帰的構成

axiom 2を満たす類似度関数 SM′からaxiom 2を満たす今1つの類似度関数SMを、式(F.7)の類似の測度関数 f_j を使って、再帰的に構成できることは、次の定理F.2で指摘される。

[定理F.2] **(他のカテゴリから眺めた類似の測度関数 f_j による類似度関数 SM の再帰的構成定理)**

分離条件式(E.29)の下で考えよう。

axiom 2を満たす類似度関数

$$SM' : \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \leq s \leq 1\} \tag{F.17}$$

と、式(F.7)の類似の測度関数 $f_i(\varphi)$ とを用いて、

$$SM(\varphi,\ \omega_j) =$$

$$\begin{cases} f_j(\varphi) \cdot SM'(\varphi,\ \omega_j) / \sum_{k \in J} f_k(\varphi) \cdot SM'(\varphi,\ \omega_k) \\ \cdots \sum_{i \in J} f_i(\varphi) \cdot SM'(\varphi,\ \omega_i) > 0 \text{ の場合} \quad (F.18) \\ p(\mathfrak{C}_j) \\ \cdots \sum_{i \in J} f_i(\varphi) \cdot SM'(\varphi,\ \omega_i) = 0 \text{ の場合} \quad (F.19) \end{cases}$$

と定義される式(C.8)の関数 SM はaxiom 2を満たす。

(証明) 式(F.7)の $f_i(\varphi)$ について成り立つ2式(F.12), (F.13)と、式(F.17)の SM′がaxiom 2の(i)(直交性)を満たすことから、2式(F.18), (F.19)で定義される関数 SM が、axiom 2の(i)(直交性)を満たすことは、

$$\forall j \in J,\ SM(\omega_j,\ \omega_j)$$

$$= f_j(\omega_j) \cdot SM'(\omega_j,\ \omega_j) / f_j(\omega_j) \cdot SM'(\omega_j,\ \omega_j)$$

$$= 1 \tag{F.20}$$

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J - \{j\},$$

$$SM(\omega_i,\ \omega_j)$$

$$= f_j(\omega_i) \cdot SM'(\omega_i,\ \omega_j) / f_i(\omega_i) \cdot SM'(\omega_i,\ \omega_i)$$

$$= 0 \tag{F.21}$$

とわかる。

axiom 2の(ii)(規格化条件)の成立はSM の2定義式(F.18), (F.19)から明らかである。

axiom 2の(i)(T-不変性)の成立は、式(F.7)の類似の測度関数 $f_i(\varphi)$ の T-不変式(F.16)と、式(F.17)の SM′がaxiom 2の(iii)(T-不変性)を満たすことから、明らかである。 □

F3. 零条件式(F.3)とT-不変式(F.4)とを満たす式(F.5)の非負相違度関数 g_j の系の構成

特徴軸の番号の集合 L が式(E.3)の如く設定されており、正・有界条件式(E.5)を満たす式(E.6)の重み w_ℓ を用いて、式(E.4)の形式を持つ2つの特徴量の組 $\underline{u}(\varphi)$, $\underline{u}(\eta)$の内積 $[\underline{u}(\varphi),\ \underline{u}(\eta)]$ と、ノルム $|\underline{u}(\varphi)|$ が、

$$[\underline{u}(\varphi),\ \underline{u}(\eta)] \equiv \sum_{\ell\in L} w_\ell\cdot u(\varphi,\ell)\cdot\overline{u(\eta,\ell)} \tag{F.22}$$

$$|\underline{u}(\varphi)| \equiv [[\underline{u}(\varphi),\ \underline{u}(\varphi)]]^{1/2} \tag{F.23}$$

と導入される。

抽出される特徴量 $u(T\varphi,\ell)$の組 $\underline{u}(T\varphi)$の集合

$$\underline{u}(T\cdot\Psi_j)\equiv\{\underline{u}(T\varphi)\mid\varphi\in\Psi_j\},\ j\in J \tag{F.24}$$

の、$j\in J$ にわたる系を使って、抽出された特徴量の組間の分離条件式(F.2)の下で零条件式(F.3)とT-不変条件式(F.4)とを満たす式(F.5)の非負相違度関数 g_i の系を構成しよう。それには、例えば、次の6式(F.28)～(F.33)で表されるものがある：

分離条件式(E.2)の下で、2条件

①(代表パターン ω_j の包含条件)

$$\forall j\in J,\ \omega_j\in\Psi_j\subset\Phi \tag{F.25}$$

②(選出されたパターン集合間と、そのパターンモデル集合間との2非交差条件)

$$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},$$

$$\Psi_j\cap\Psi_i=T\cdot\Psi_j\cap T\cdot\Psi_i=\phi \tag{F.26}$$

に加えて、正・有界条件式(E.5)の下で式(E.7)で定義される特徴間距離 $\mathrm{Fdis}(\varphi,\eta)$を使って、

③**分離条件式**(非一致条件式)(F.2)

をも課し、

④(抽出される特徴量の組の集合間の非交差条件)

$$\forall j\in J,\ \forall i\in J-\{j\},$$

$$\forall\varphi\in\Psi_j,\ \forall\eta\in\Psi_i,\ \mathrm{Fdis}(\varphi,\eta)>0 \tag{F.27}$$

の下で考えよう。

正なる助変数 $a_i(T\eta)>0$ をパターン$\eta\in\Psi_i$のモデル $T\eta$ の非重要さと考えておく。

$$g_i(\varphi)\equiv\min_{\eta\in\Psi i} a_i(T\eta)^{-1}\cdot\mathrm{dis}(\varphi,\eta) \tag{F.28}$$

$$g_i(\varphi)$$
$$\equiv\min_{\eta\in\Psi i}\ [1-\exp(-a_i(T\eta)^{-1}\cdot\mathrm{dis}(\varphi,\eta))] \tag{F.29}$$

$$g_i(\varphi)$$
$$\equiv\min_{\eta\in\Psi i} a_i(T\eta)^{-1}\cdot[1-|(\underline{u}(T\eta)\,|\underline{u}(T\varphi)|^{-1},$$
$$\underline{u}(T\eta)\,|\underline{u}(T\eta)|^{-1})|^2] \tag{F.30}$$

$$g_i(\varphi)$$
$$\equiv\min_{\eta\in\Psi i}\ 【1-\exp[-a_i(T\eta)^{-1}\cdot\{1-$$
$$|(\underline{u}(T\varphi)\,|\underline{u}(T\varphi)|^{-1},\underline{u}(T\eta)\,|\underline{u}(T\eta)|^{-1})|^2\}]】 \tag{F.31}$$

$$g_i(\varphi)$$
$$\equiv\min_{\eta\in\Psi i} a_i(T\eta)^{-1}\cdot【1-$$
$$|d_{i,\eta}(\varphi)|^2/\sum_{k\in J}\sum_{\eta\in\Psi k}|d_{k,\eta}(\varphi)|^2】 \tag{F.32}$$

$g_i(\varphi)$

$\equiv \min_{\eta\in\Psi i}$ 【$1-\exp$ $[-ai(T\eta)^{-1}\cdot\{1-$

$|d_{i,\eta}(\varphi)|^2/\sum_{k\in J}\sum_{\eta\in\Psi k}|d_{k,\eta}(\varphi)|^2\}]$】 (F.33)

□

2式(F.32), (F.33)に登場している複素定数 $d_{k,\eta}(\varphi)$は、

系$\underline{u}(T\eta_j)$, $\eta_j\in\Psi_j$, $j\in J$ は1次独立である (F.34)

として、

$|\underline{u}(T\varphi)-\sum_{k\in J}\sum_{\eta\in\Psi k}d_{k,\eta}\cdot\underline{u}(T\eta)|^2$ (F.35)

を最小にする1次結合係数 $d_{k,\eta}$のことであり、次の補助定理F.1が成立していることに注意しておく。

[補助定理F.1] **(1次結合係数 $d_{k,\eta}(\varphi)$のT-不変・正規直交定理)**

(i)(T-不変性)

$\forall\varphi\in\Phi$, $\forall k\in J$, $\forall\eta\in\Psi_k$,

$d_{k,\eta}(T\varphi)=d_{k,\eta}(\varphi)$. (F.36)

(ii)(正規直交性)

$\forall\varphi\in\Phi$, $\forall k\in J$, $\forall\eta\in\Psi_k$,

$d_{k,\eta}(\omega_i)=$

$\begin{cases}1 \text{ if } i=k\wedge\underline{u}(\eta)=\underline{u}(\omega_i)\\ 0 \text{ if } i\neq k\vee\underline{u}(\eta)\neq\underline{u}(\omega_i)\end{cases}$ (F.37)

(証明) axiom 1, (iii)の後半 $T\cdot T=T$ より、

$|\underline{u}(T\varphi)-\sum_{k\in J}\sum_{\eta\in\Psi k}d_{k,\eta}\cdot\underline{u}(T\eta)|^2$

$=|\underline{u}(T(T\varphi))-\sum_{k\in J}\sum_{\eta\in\Psi k}d_{k,\eta}\cdot\underline{u}(T\eta)|^2$

$\because$ 系 $\underline{u}(T\eta_j)$, $\eta_j\in\Psi_j$, $j\in J$, は1次独立 (F.38)

が成立することにより、式(F.36)が成立する。

更に、式(F.37)の $d_{k,\eta}(\omega_i)$を $d_{k,\eta}$に採用すれば、

$|\underline{u}(T\omega_i)-\sum_{k\in J}\sum_{\eta\in\Psi k}d_{k,\eta}\cdot\underline{u}(T\eta)|^2$ (F.39)

$=|\underline{u}(T\omega_i)-\underline{u}(T\omega_i)|^2$

$\because$ 3式(F.25), (F.2), (F.27) (F.40)

$=0$ (F.41)

を得、式(F.39)が最小となっている。 □

以上は、文献[B23]の付録Cの補間関数による類似度関数の構成論を式(E.1)の特徴抽出写像 u を使った形式で、簡単化したものになっているが、より使いやすいといえるであろう。

F4. 構成された類似度関数 SM の1・0性質

2定理F.1, F.2で得られた類似度関数 SM が如何なる場合に最大値 1, 最小値 0 をとるかを2定理F.3, F.4で明らかにしよう。

次の定理F.3は、零条件式(F.3)とT-不変式(F.4)を満たす式(F.5)の関数 g_jの系を用い、2式(F.8), (F.9)で定義される式(C.8)の類似度関数 SM が第$j\in J$番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン ω_j 以外のパターン $\varphi\in\Psi_j$ に最大値 1 を与えることを指摘し、

$\underline{u}(\omega_j)$から$\underline{u}(\varphi)\in\Psi_j$への特徴変動 (F.42)

に適応している事実を明らかにしたものである。

[定理F.3]（**SM の1·0一定理**）

例えば、F3節の4条件①～④の下での、6式(F.28)～(F.33)においては、任意の$\varphi \in \Psi_j$について、

$$g_j(\varphi)=0 \wedge [\forall i \in J-\{j\},\ g_i(\varphi)>0] \tag{F.43}$$

が成立する。このように、式(F.43)が成立するようなパターン$\varphi \in \Phi$については、2式(F.8), (F.9)で定義される式(C.8)の類似度関数 SM は、"1·0－性質"

$$SM(\varphi,\ \omega_j)=1 \wedge [\forall i \in J-\{j\}, SM(\varphi,\ \omega_i)=0 \tag{F.44}$$

を満たす。

（証明）F3節の4条件①～④の下では、式(F.43)が成立することを考慮すれば、式(F.7)の $f_j(\varphi)$について、明らかに、

$$f_j(\varphi)>0 \wedge [\forall i \in J-\{j\},\ f_i(\varphi)=0] \tag{F.45}$$

が成り立つとがわかる。axiom 2の(i)(直交性)の成立は、2式(F.12), (F.13)を考慮すれば、SMの定義式(F.8)から

$$\forall j \in J, SM(\varphi,\ \omega_j)=f_j(\varphi)/f_j(\varphi)=1 \tag{F.46}$$

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J-\{j\},$$

$$SM(\varphi,\ \omega_i)=f_i(\varphi)/f_j(\varphi)=0/f_j(\varphi)=0 \tag{F.47}$$

を得、示された。 □

次の定理F.4は、零条件式(F.3)とT-不変式(F.4)を満たす式(F.5)の関数g_jの系を用いて定義され、2式(F.18), (F.19)で定義される式(C.8)の類似度関数 SM が第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターンω_j以外のパターン$\varphi \in \Psi_j$に最大値1を与えることを指摘し、式(F.42)の特徴変動に適応している事実を明らかにしたものである。

[定理F.4]（**再帰 SM の1·0一定理**）

例えば、F3節の4条件①～④の下での、6式(F.28)～(F.33)においては、任意の$\varphi \in \Psi_j$について、式(F.43)が成立する。このように、式(F.43)が成立し、かつ

$$SM'(\varphi, \omega_j)>0 \tag{F.48}$$

が成立するようなパターン$\varphi \in \Phi$については、2式(F.18), (F.19)で定義される式(C.8)の類似度関数 SM は、式(F.44)の"1·0－性質"を満たす。

（証明）F3節の4条件①～④の下では、式(F.43)が成立することを考慮すれば、式(F.7)の$f_j(\varphi)$について、明らかに、式(F.45)が成り立つことがわかる。
axiom 2の(i)(直交性)の成立は、2式(F.12), (F.13)を考慮すれば、SM の定義式(F.18)から

$$\forall j \in J, SM(\varphi,\ \omega_j)$$

$$=f_j(\varphi)\cdot SM'(\varphi,\ \omega_j)/f_j(\varphi)\cdot SM'(\varphi,\ \omega_j)=1 \tag{F.49}$$

$$\forall j \in J,\ \forall i \in J-\{j\},$$

$$SM(\varphi,\ \omega_i)$$

$$=f_i(\varphi)\cdot SM'(\varphi,\ \omega_i)/[f_j(\varphi)\cdot SM'(\varphi,\ \omega_j)]$$

$$=0/[f_j(\varphi)\cdot SM'(\varphi,\ \omega_j)]=0 \tag{F.50}$$

を得、示された。 □

F5. 2式(F.35)を最小にする1次結合係数 $d_{k,\eta}$を求める方法

式(F.35)を最小にする1次結合係数 $d_{k,\eta}$を求める方法を説明しよう。

最小自乗法によれば、各 $d_{j,\psi}$ ($\psi \in \Psi_j, j \in J$) が式 (F.35) を最小にするとすれば、

$$\partial \mid \underline{u}(T\varphi) - \sum_{k \in J} \sum_{\eta \in \Psi k} d_{k,\eta} \cdot \underline{u}(T\eta) \mid^2$$
$$/\partial d_{j,\psi}$$
$$= 0, \ \eta \in \Psi_j, j \in J \tag{F.51}$$

が成立する。式 (F.51) を計算すれば、$\overline{d_{j,\psi}}$ を $d_{k,\psi}$ の複素共役として、

$$0 =$$
$$\partial \mid \underline{u}(T\varphi) - \sum_{k \in J} \sum_{\eta \in \Psi k} d_{k,\eta} \cdot \underline{u}(T\eta) \mid^2$$
$$/\partial d_{j,\psi}$$
$$= [\partial/\partial d_{j,\psi} \{\underline{u}(T\varphi) - \sum_{k \in J} \sum_{\eta \in \Psi k} d_{k,\eta} \cdot \underline{u}(T\eta)\},$$
$$\underline{u}(T\varphi) - \sum_{k \in J} \sum_{\eta \in \Psi k} d_{k,\eta} \cdot \underline{u}(T\eta)]$$
$$+ [\underline{u}(T\varphi) - \sum_{k \in J} \sum_{\eta \in \Psi k} d_{k,\eta} \cdot \underline{u}(T\eta),$$
$$\partial/\partial \overline{d_{j,\psi}} \ \{\underline{u}(T\varphi) - \sum_{k \in J} \sum_{\eta \in \Psi k} d_{k,\eta} \cdot \underline{u}(T\eta)\}]$$
$$= -[\underline{u}(T\psi), \ \underline{u}(T\varphi) - \sum_{k \in J} \sum_{\eta \in \Psi k} d_{k,\eta} \cdot \underline{u}(T\eta)]$$
$$, \psi \in \Psi_j, j \in J \tag{F.52}$$
$$\because \quad \partial d_{k,\eta}/\partial \overline{d_{j,\psi}} = 0 \tag{F.53}$$

と計算されるから、連立1次方程式

$$\sum_{k \in J} \sum_{\eta \in \Psi k} d_{k,\eta} \cdot [\underline{u}(T\eta), \ \underline{u}(T\eta')]$$
$$= [\underline{u}(T\varphi), \ \underline{u}(T\eta')],$$
$$\eta' \in \Psi_j, j \in J \tag{F.54}$$

が導かれる。このとき、連立1次方程式 (F.54) の解 $d_{k,\eta}(\varphi) = d_{k,\eta}$ を用いて、$\underline{u}(T\varphi)$ の1次結合展開

$$\exists (\underline{u}(T\varphi))_\perp \in \mathfrak{H} \text{ such that}$$
$$\forall j \in J, \forall \eta \in \Psi_j, [\underline{u}((T\varphi)_\perp), \ \underline{u}(T\eta)] = 0, \tag{F.55}$$
$$\underline{u}(T\varphi)$$
$$= \sum_{k \in J} \sum_{\eta \in \Psi k} d_{k,\eta}(\varphi) \cdot \underline{u}(T\eta) + (\underline{u}(T\varphi))_\perp \tag{F.56}$$

が成り立つ。そして、$u(T\varphi)$ を1次結合

$$\sum_{k \in J} \sum_{\eta \in \Psi k} d_{k,\eta} \cdot \underline{u}(T\eta) \tag{F.57}$$

で近似するときの誤差

$$u(T\varphi) - \sum_{k \in J} \sum_{\eta \in \Psi k} d_{k,\eta} \cdot \underline{u}(T\eta) \tag{F.58}$$

のノルムの自乗の最小値は、

$$\inf d_{k,\eta\,(k \in J, \eta \in \Psi k)} \mid \underline{u}(T\varphi) - \sum_{k \in J} \sum_{\eta \in \Psi k} d_{k,\eta} \cdot \underline{u}(T\eta) \mid^2 \tag{F.59}$$
$$= \mid \underline{u}(T\varphi) - \sum_{k \in J} \sum_{\eta \in \Psi k} d_{k,\eta}(\varphi) \cdot \underline{u}(T\eta) \mid^2 \tag{F.60}$$
$$= [\underline{u}(T\varphi), \ \underline{u}(T\varphi) - \sum_{k \in J} \sum_{\eta \in \Psi k} d_{k,\eta}(\varphi) \cdot \underline{u}(T\eta)] - \sum_{k \in J} \sum_{\eta \in \Psi k} d_{k,\eta}(\varphi) \cdot$$
$$[\underline{u}(T\eta), \ \underline{u}(T\varphi) - \sum_{j \in J} \sum_{\eta \in \Psi k} d_{j,\psi}(\varphi) \cdot \underline{u}(T\psi)]$$
$$= \mid \underline{u}(T\varphi) \mid^2 - \sum_{k \in J} \sum_{\eta \in \Psi k} \overline{d_{k,\eta}(\varphi)} \cdot [\underline{u}(T\varphi), \ \underline{u}(T\eta)]$$
$$\because \quad 式 (F.52) \tag{F.61}$$

と求められる。

（著者：すずき　しょういち　文教大学情報学部　受付　平成12年12月8日）