パターン情報処理における構造化パターン，最良近似構造化パターンと簡約構造モデル

鈴　木　昇　一

Structural Pattern, The Most-Approximate Structural Pattern and Reduced Structural Model in Pattern-Information Processing

Shoichi SUZUKI

Let a recognition system secure an internal model in memory corresponding to an input pattern. If the internal model can be constructed in such a way that the system extracts from the model the same features that input pattern has, the model is called a reduced structural model. In this paper, giving a good explanation of definitions and the resulting necessity thus far we calculate features and the binary features extracted from a structural pattern which possesses a more general form structurally than the internal model and determine the upper limits and the lower limits of the features.
We also explain a meaning and its application of a structural pattern of the same type called the most-approximate structural pattern that satisfies the condition that a best degree of approximation of the norm-normalized input pattern may be obtained. Lastly we seek an output pattern from a Perceptron-like spatial circuit to which the structural pattern is applied and it is shown that the output pattern has the same form as the input structural pattern.

1．ま　え　が　き

パターン情報処理技術とはヒトの持つ勝れた感覚・知覚・記憶・認識・理解・思考の諸機能を，情報処理装置として実現する技術のことである．この様な技術を確保するためには，先ず，次の２つの手法が必要とされる：

（ｉ）対象となるパターンから，ある座標

系の変換の下で不変な特徴量の組を抽出する手法

———— 多種類の抽出された「特徴量の組」の族は，処理対象パターン φをある意味で一意的に指定するものであることが必要とされる．情報の量子論[1]では，ノルム規格化処理対象パターン $\varphi\|\varphi\|^{-1}$ を絶対値1の複素定数倍を除いて，一意的に指定する「特徴量の組」の族（完備な特徴量の組の族）の構成法が phase 情報限定可能定理[3]（2.5節を参照）で指摘されている．————

（ii） 抽出された特徴量の組を媒介とし，記憶の働きで以て，原パターンに対応するモデル（内的表象）を確立する手法

———— 原処理対象パターン φの集合を$\mathfrak{D}$として，この様な $\varphi\epsilon\mathfrak{D}$ に対応するモデルを $\mathfrak{M}(\varphi)$ と表わすと，$\mathfrak{M}(\varphi)$ は2条件

（a） $\mathfrak{M}(\varphi)\epsilon\mathfrak{D}$

（b） $\mathfrak{M}(\mathfrak{M}(\varphi))=\mathfrak{M}(\varphi)$，$\forall\varphi$

を満たさなければならない。特に，条件bはモデルのモデルはモデルそのものでなくてはならぬことを要請していることに注意する．

————

情報の量子論[1]では，パターン φから抽出される不変量（*invariants*）としての特徴量の組として

$\vec{\mathfrak{F}}(\varphi)=\{\mathfrak{F}_l(\varphi)\ ;\ l\epsilon L\}$

で示される2次汎関数（2次形式）を採用しまた，この種の特徴量 $\mathfrak{F}_l(\varphi)$ の組 $\vec{\mathfrak{F}}(\varphi)$ としきい値 e_l の組 $\vec{e}=\{e_l\ ;\ l\epsilon L\}$ とを媒介とし，

$X_l(\varphi)=1\quad if\ \mathfrak{F}_l(\varphi)\geqq e_l,$

$\qquad\ =0\quad if\ \mathfrak{F}_l(\varphi)<e_l$

と定義される2値特徴量 $X_l(\varphi)$ の組

$\vec{X}(\varphi)=\{X_l(\varphi)\ ;\ l\epsilon L\}$

を基に，記憶の働きで以て確保される原パターン φに対応する簡約モデル（*reduced model*）として，簡約構造モデル

$\mathfrak{Y}(\varphi)=\sum_{l\epsilon L}X_l(\varphi)\cdot\theta_l(H)\,\xi\|\xi\|^{-1}$

を採用している．

$L=$(A　B　C　……　D)

をA，B，C，……，Dを要素とするリスト（*list*）Lという．AはこのリストLの最初の要素であり，Bは第2番目の要素であり，……，Dは最後の要素である．そして，

(CAR L)＝A，(CDR L)＝(B C…D)と定義される（CAR L)，(CDR L）を各々，リストLの *header part, tail part* という．

パターン情報処理における認識システムを構成するというのは，リスト構造のデータを処理するのに用いられる記号列処理言語LISP（*LIST Processor*）の立場からいえば，次の動作をする述語 (MEMBER X L) を構成するのと原理的に同じである：

述語 MEMBER は2つの引数（アトムX，リストL）を持ち，

（イ） XがLの第j番目の一員であれば，(MEMBER X L)＝J．

（ロ） XがLの一員でなければ，あるいはLが空リストであれば，

(MEMBER X L)＝0．

例えば，$X=8$，$L=$（2 6 8 9）であれば，(MEMBER X L)＝3であり，また，$X=5$であれば，(MEMBER X L)＝0．

さて，(MEMBER X L)＝J（≧1）と述語 MEMBER の値Jが定まったとしよう。Xをパターンといい，Lの第j番目の要素を第j番目のクラス（*class*）$\mathfrak{C}_j$ の代表パターンという．そして，処理対象としてのパターンXは第j番目のクラス$\mathfrak{C}_j$に帰属すると認識推断されるという．この種の認識推断動作を行うのが認識システムである。

なお，この様な述語 MEMBER は LISP 言語では次のように書かれる：

DEFINE(((MEMBER(LAMBDA(X L)

(PROG (M J) … プログラム変数として，M，Jを持ち，入力変数として，X，Lを持つ述語 MEMBER を定義する．

(SETQ M L) … MをLとせよ

(SETQ J 1) … Jを1とせよ

A(COND((NULL M) (RETURN 0)))

…… Mが空リストならば，MEMBER の値を 0 とせよ．

(COND ((EQUAL X (CAR M))

(RETURN J))) … X＝(CAR M) であれば MEMBER の値を J とせよ．

(SETQ M (CDR M)) … ここに制御が移るのは X≠(CAR M) の場合であり，(CDR M) をMに代入せよ．

(SETQ J (PLUS J 1)) … J＋1をJに代入せよ．

(GO A) … ポインタAの場所に戻れ．

)))))

パターン情報処理の通常の場面では，その帰属すべきクラスが未知であるパターンXが認識システムの記憶Lの中にそのままの形で存在するとは限らない．入力パターンXはLの中の各代表パターンに比較して，不規則で大幅な変形を受けているのが普通である．このため，認識システムの側から見た受容性の基準，忠実度基準 (*fidelity criterion*) を定め，この基準に従い，各クラスに帰属するパターンを互いに重なりあわない同値類(*equivalence class*) に分け，然も，各クラスに帰属するパターンはすべて，そのクラスから適確に選ばれた1つのパターン（代表パターン）によって十分満足的に再生され得ることが望ましい。

出現可能なパターンの，同値類への可能な分類は，情報の量子論では，2値特徴抽出写像 $\vec{X}(\cdot)=\{X_l(\cdot)\ ;l\epsilon L\}$ の出力でなされる.[3),(5)] 「$\vec{X}(\varphi)=\vec{X}(\eta)$」なる等式が成り立ち，このような等式が成立する2つのパターンφ，ηは同じ同値類に帰属し，然も同一クラスに帰属するとみてよい．いいかえれば，しきい値e_lの組に関して自己組織化された認識システムから眺めた忠実度基準は，各クラスに帰属するパターンから抽出される第l番目の特徴量の差はこのしきい値 e_l より小でなければならめ，という事実により定められる．

各クラス$\mathfrak{C}_j$に対し，そのクラス$\mathfrak{C}_j$ の代表とみなされる様なある特定のパターンω_jの列

$L=(\omega_1\quad \omega_2\quad \cdots\cdots\quad \omega_J{}')$

を想定し，各 ω_jの列

$L'=(\omega_1'\quad \omega_2'\quad \cdots\cdots\quad \omega_J')$

を用意しておき，入力パターンφのモデルφ'がL'のどのω_j'と最もよく似ているかどうかを決定すればよい．

情報の量子論では，このようなモデルを確保する働きを持つ写像として，構造化写像

$\mathfrak{Y}(\cdot):\mathfrak{D}\rightarrow\mathfrak{D}$

を用意している．$\mathfrak{D}$は各パターンφの表現空間としての可分な *Hilbert* 空間 $\mathfrak{H}$ のある部分集合であり，$\mathfrak{Y}(\cdot)$ は$\mathfrak{D}$の各要素に$\mathfrak{D}$の唯1つの要素を対応づける写像である．$\mathfrak{Y}(\varphi)$ は $\varphi\epsilon\mathfrak{D}$ に対応する簡約構造モデル（*reduced structural model*）と云われる．同じ同値類に帰属するパターンφ，η が同じ構造モデルを持つということは，

「$\vec{X}(\varphi)=\vec{X}(\eta)$」$\Leftrightarrow$「$\mathfrak{Y}(\varphi)=\mathfrak{Y}(\eta)$」

が成立するという事実より知れる．

さて，本論文では，情報の量子論におけるこれ迄の諸定義を明確かつ厳密に説明しながら，構造モデル

$\mathfrak{Y}(\varphi)=\sum_{l\epsilon L}X_l(\varphi)\cdot\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}$

は無論として，$\mathfrak{Y}(\varphi)$と同じ形式をもつ次の2つのパターンから抽出される特徴量の表現について検討する：

(1) 一般化した形式での構造パターン

$\eta=\sum_{l\epsilon L}a_l\cdot\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}$

（各a_lは複素定数）

(2) 処理対象パターンφのノルム$\|\varphi\|$を1に規格化したパターン$\varphi\|\varphi\|^{-1}$をノルム距離の意味で最良近似するパターン（最良近似構造化パターン）

$\mathfrak{Z}(\varphi)=\sum_{l\epsilon L}b_l(\varphi)\cdot\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}$.

構造化パターンηから抽出される特徴量$\mathfrak{F}_l(\eta)$の表現を求め，その2値表現 $X_l(\eta)$ を指摘し，更に，抽出された特徴量 $\mathfrak{F}_l(\eta)$に関しその変調度の上下限を決定するという解析がなされておる．この解析結果は構造モデル$\mathfrak{Y}$

(φ)，最良近似構造パターン $\mathfrak{Z}(\varphi)$についても適用でき，この両パターン $\mathfrak{Y}(\varphi)$，$\mathfrak{Z}(\varphi)$について新たな知見を得ることができる．

また，構造化パターンが入力されたパーセプトロン形空間回路

$\sum_{l \in L} w_l \cdot \theta_l(H)$

からの出力パターンも構造化パターンの形式になることが示され，この場合にも得られた解析結果が適用できる．

なお，本付録では，パターン φに対応する構造モデル $\mathfrak{Y}(\varphi)$ を得るに必要なしきい値 e_l の組を自己組織化的に決定するアルゴリズムが説明されている．

2．諸　定　義

2．1　内積，ノルム，基作用素

処理対象としてのパターン（*pattern*）φ の表現空間を可分な *Hilbert* 空間 $\mathfrak{H}$ としよう．$\mathfrak{H}$ での内積，ノルムをそれぞれ

$(\varphi,\ \eta)$，$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi,\ \varphi)}$

と表わす．ここに，

$(a\varphi,\ \eta) = a(\varphi,\ \eta) \in Z,\ \forall a \in Z$(複素数体)．

例えば，R^2を２次元全平面として，$\mathfrak{H} = L_2(R^2)$では，φ，η の内積は，$\varphi = \varphi(x_1,\ x_2)$ などとして，

$(\varphi,\ \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2\ \varphi(x_1,\ x_2) \cdot \overline{\eta(x_1,\ x_2)}$，ここに，$\bar{\eta}$ は η の複素共役と表わされる．

内積（φ，η）の一般形としては，M を n 次元 *Euclid* 空間 R^nの可測部分集合，$dm(x)$ を M 上での正値 *Lebesgue-Stieltjes* 式測度として，

$(\varphi,\ \eta) = \int_M dm(x)\ \varphi(x) \cdot \overline{\eta(x)}$

を考えている．この場合，$\mathfrak{H}$ を $L_2(M\ ;dm)$ と書くことがある．

$\mathfrak{H}$ での自己共役作用素 H を１つ選定する．Hを基作用素という．例えば，$\mathfrak{H} = L_2(R^2)$ では，

$H = i^{-1}\,\partial/\partial x_1$，ここに，$i = \sqrt{-1}$

と選ぶことができる．

2．2　射影作用素の系

実変数λの関数　$\theta_l(\lambda)$　を

$\theta_l(\lambda) = 1 \quad if \quad \lambda \in S_l \cap \sigma(H)$，

$\quad\ = 0 \quad if \quad \lambda \notin S_l \cap \sigma(H)$

と決める．ここに，$\sigma(H)$は H のスペクトル系である．λ の代りに基作用素Hを代入して得られる射影作用素 $\theta_l(H)$を考えれば，当然

（ｉ）　$(\theta_l(H)\varphi,\ \eta) = (\varphi,\ \theta_l(H)\eta)$

$\forall \varphi,\ \forall \eta \in \mathfrak{H}$　（対称性，自己共役性）

（ii）　$\theta_l(H) \cdot \theta_l(H) = \theta_l(H)$　（巾等性）

が成り立つ．

基作用素Hの関数としての射影作用素　$\theta_l(H)$の組

$\vec{\theta}(H) = \{\theta_l(H)\ ;\theta_l(H) \neq 0$，

$\theta_l(H) \neq I$(恒等作用素)，$l \in L\}$

ここに，$L = \{1，2，\cdots，l，\cdots，L'\}$

の各成分 $\theta_l(H)$は，次の２条件を満たすように決定されねばならない：

(iii)　$\sum_{l \in L} \theta_l(H) = I$(恒等作用素$I$の分解)

(iv)　$\theta_k(H) \cdot \theta_l(H) = 0$　$(k \neq l)$（直交性）．

2．3　基関数，特徴抽出関数

実変数λの非負 *Borel* 可測関数　$f(\lambda)$　を１つ選定する．$f(\lambda)$を基関数という．λの代りに，自己共役作用素Hを代入して得られる作用素 $f(H)$は正値自己共役作用素であることが知れる．

今，$l \in L$ を添字にもつ関数 $f_l(\lambda)$ を

$f_l(\lambda) \equiv f(\lambda) \cdot \theta_l(\lambda)$

と定義すれば，　$f_l(H) = f(H) \cdot \theta_l(H)$　も正値自己共役作用素である．この作用素 $f_l(H)$を用いて，処理対象パターン φから抽出される，第 $l \in L$ 番目の特徴量 $\mathfrak{F}_l(\varphi)$ は

$\mathfrak{F}_l(\varphi) \equiv (f_l(H)\varphi,\ \varphi) / (\varphi,\ \varphi)$

と定義される．φが入力された正値作用素$f_l(H)$からの出力パターン$f_l(H)\varphi$と，入力パターン φとの内積（$f_l(H)\varphi$，φ）を，φ 同志の内積$(\varphi,\ \varphi)$で割って得られるのがこの特徴量 $\mathfrak{F}_l(\varphi)$である．$\mathfrak{F}_l(\cdot)$は，第 $l \in L$ 番目の特徴抽出関数と呼ばれる．

2．4　特徴抽出関数の定義域，ウニタリ不変性

$\mathfrak{H}$ における作用素 A の定義域 $\mathfrak{D}(A)$ とは

$\mathfrak{D}(A)\equiv\{\eta\,;\,\|A\eta\|<+\infty,\ \eta\epsilon\mathfrak{H}\}$

と定義され，これは，作用素 A を $\eta\epsilon\mathfrak{H}$ に施こして得られる $A\eta$ が $\mathfrak{H}$ に属する様な η の集合である．

$\varphi\epsilon\mathfrak{D}(f(H))$ とすれば，$\theta_l(H)$ は $f(H)$ と可換であるから，公式

（ｉ） $\|f(H)\varphi\|^2=\sum_{l\epsilon L}\|f_l(H)\varphi\|^2$

が成り立つ．

———以下，その証明．

各 $\theta_l(H)$ は $f(H)$ と可換であるから，

ａ） $\varphi\epsilon\mathfrak{D}(f(H))$ ならば，$\theta_l(H)\varphi\epsilon\mathfrak{D}(f(H))$ かつ $f(H)\ \theta_l(H)\varphi=\theta_l(H)\ f(H)\varphi$

が成り立つ．また，各 $\theta_l(H)$ は自己共役作用素であって，

ｂ） $(\psi,\ \theta_l(H)\eta)=(\theta_l(H)\psi,\ \eta)$，$\forall\psi$，$\forall\eta\epsilon\mathfrak{H}$

が成りたつ．さらに，各 $\theta_l(H)$ 同志の直交性

ｃ） $\theta_l(H)\cdot\theta_k(H)=0\quad(k\neq l)$

も成り立っている．

以上の３事実ａ，ｂ，ｃから，

$f_l(H)\equiv f(H)\cdot\theta_l(H)$

として，

$\varphi\epsilon\mathfrak{D}(f(H))$ ならば，

$(f_k(H)\varphi,\ f_l(H)\varphi)$

$=(\theta_k(H)\ f(H)\varphi,\ \theta_l(H)\ f(H)\varphi)$

$=(\theta_l(H)\cdot\theta_k(H)\ f(H)\varphi,\ f(H)\varphi)$

$=0\quad(k\neq l)$

が成り立つ．いいかえると，

ｄ） $(f_k(H)\varphi,\ f_l(H)\varphi)=0$ $(k\neq l)$，$\mathrm{A}\varphi\epsilon\mathfrak{D}(f(H))$.

このｄと，$f(H)=\sum_{l\epsilon L}f_l(H)$ とから

$\varphi\epsilon\mathfrak{D}(f(H))$ とすると，

$+\infty>\|f(H)\varphi\|^2=(f(H)\varphi,\ f(H)\varphi)$

$=\sum_{k\epsilon L}\sum_{l\epsilon L}(f_k(H)\varphi,\ f_l(H)\varphi)$

$=\sum_{l\epsilon L}\|f_l(H)\varphi\|^2$

が成り立つ．いいかえれば，

ｅ） $\|f(H)\varphi\|^2=\sum_{l\epsilon L}\|f_l(H)\varphi\|^2$，$\forall\varphi\epsilon\mathfrak{D}(f(H))$

を得て，これで証明された．———

従って，

$\|f(H)\varphi\|^2<+\infty$　ならば，

$\|f_l(H)\varphi\|^2<+\infty$，$\forall l\epsilon L$

を得て，

（ii） $\mathfrak{D}(f(H))\subseteqq\mathfrak{D}(f_l(H))$，$\forall l\epsilon L$

が示される．また，

（iii） 「$\varphi\epsilon\mathfrak{D}(f(H))$ ならば，$\mathfrak{F}_l(\varphi)$ は $f_l(H)$ の自己共役性より実数となり，正値性より，非負数となる」

ことが示される．

以後，$\mathfrak{D}(f(H))$ を $\mathfrak{D}$ で表わすことがある．

集合 U 内の任意の各要素に集合 V 内の唯１つの要素を対応づける写像 F を

$F\colon U\rightarrow V$

と書くことにすれば，特徴抽出関数 $\mathfrak{F}_l(\cdot)$ は，$\mathfrak{D}$ の各要素に R^+（非負実数の集合）の１つの要素を対応づける関係（$\mathfrak{D}$ から R^+ への関数）と考えられる：

$\mathfrak{F}_l(\cdot)\colon\mathfrak{D}\rightarrow R^+$，$l\epsilon L$.

（iv） 基作用素 H と可換な任意のウニタリ作用素 U の下での不変性

$\mathfrak{F}_l(U\varphi)=\mathfrak{F}_l(\varphi)$，$\forall\varphi\epsilon\mathfrak{D}$

が成り立つ．

———以下，その証明．

$f_l(H)$ は H と可換な任意の有界作用素と可換であるから，$f_l(H)$ は有界作用素 U と可換である．よって，

（イ） $\varphi\epsilon\mathfrak{D}(f(H))$ $(\subseteqq\mathfrak{D}(f_l(H)))$ ならば，$U\varphi\epsilon\mathfrak{D}(f_l(H))$ かつ $f_l(H)\ U\varphi=U f_l(H)\varphi$

が成り立つ．よって，U のウニタリ性により

$\mathfrak{F}_l(U\varphi)=(f_l(H)U\varphi,\ U\varphi)/(U\varphi,\ U\varphi)$

$=(Uf_l(H)\varphi,\ U\varphi)/(U\varphi,\ U\varphi)$

$=(f_l(H)\varphi,\ \varphi)/(\varphi,\ \varphi)$

$=\mathfrak{F}_l(\varphi)$，$\forall l\epsilon L$

を得て，これで証明された．———

「$\mathfrak{F}_l(A\varphi)=\mathfrak{F}_l(\varphi)$, $\forall\varphi\in\mathfrak{D}$, $\forall l\in L$」
なる等式を満たす，$\mathfrak{D}$ から $\mathfrak{D}$ の中への変換
$A:\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$
を保特徴変換（*feature-preserving transformation*）と呼べば，上述から，Hと可換なウニタリ作用素 Uは保特徴変換であることが知れる．

特に，Hと可換なウニタリ作用素Uとして
$e^{-itH}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n!)^{-1}(-itH)^n$，ここに t は任意の実数で，$i=\sqrt{-1}$
を選ぶことができる．なお，初期条件
$\varphi_t|_{t=0}=\varphi\in\mathfrak{D}(H)$
の下での，*Schrödinger* 形方程式（情報の量子論での基礎方程式）
$(i\,\partial/\partial t)\varphi_t=H\varphi_t$
の解 φ_t は，
$\varphi_t=e^{-itH}\varphi$
と与えられることに注意しておこう．

2．5　特徴量の組の完備な族

2つの自己共役作用素
$G^{(m)}\cdot=\sum_{l=1}^{+\infty}\mu_l^{(m)}(\,\cdot\,,\ \eta_l^{(m)})\eta_l^{(m)}$，$m=1,2$
を導入し，パターン φから抽出される2種類の「特徴量の組」　　　　$\mu_l^{(m)}$
$\mathfrak{F}_l^{(m)}(\varphi)=(g_l^{(m)}(G^{(m)})\varphi,\ \varphi)/(\varphi,\ \varphi)$
ここに，
$g_l^{(m)}(G^{(m)})=g^{(m)}(G^{(m)})\cdot\theta_l(G^{(m)})$
$g^{(m)}(\mu_l^{(m)})\geqq 0$，$\forall l$
$\theta_l^{(m)}(G^{(m)})\cdot=(\,\cdot\,,\ \eta_l^{(m)})\eta_l^{(m)}$
を考える．集合
$K_n\equiv\{k\,;C_{nk}\fallingdotseq 0\}$，ここに，$C_{nk}\equiv(\eta_n^{(2)},\ \eta_k^{(1)})$ を定義し，更に，今一つの集合
$N\equiv\{n\,;g^{(2)}(\mu_n^{(2)})>0\}$
を定義する．集合Nの各要素をすべて並べて
$N=\{n_1,\ n_2,\ \cdots\cdots\}$
としよう．

〔定理2．1〕（*phase*情報限定可能定理(3)）
$g^{(1)}(\mu_l^{(1)})>0$，$\forall l$
であり，しかも
$\bigcup_{n\in N}K_n=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\}$　かつ
$K_{n_j}\cap K_{n_{j+1}}\fallingdotseq\phi$（空集合）
が成り立っているならば，
「$\mathfrak{F}_l^{(m)}(\varphi)=\mathfrak{F}_l^{(m)}(\eta)<+\infty$，$\forall l$，$m=1,2$」
$\Longleftrightarrow$「$|b|=1$を満たすある複素定数 b が存在して，$\varphi\|\varphi\|^{-1}=b\cdot\eta\|\eta\|^{-1}$」．
（定理2.1終）

このように，
$\{\mathfrak{F}_l^{(m)}(\varphi)\,;l\in L\}$，$m=1$，$2$
は，ある場合には，その絶対値が1であるという意味での *phase* 定数を除いて，パターン $\varphi\|\varphi\|^{-1}$を一意的に指定する「特徴量の組」の族となることがわかった．本定理2.1でいう
$\{\mathfrak{F}_l^{(m)}(\varphi)\,;l\in L,\ m=1,\ 2\}$ をパターン φの，特徴量の組の完備な族という．

2．6　H, $\theta_l(\lambda)$, $f(\lambda)$, $f_l(\lambda)$, $\mathfrak{F}_l(\cdot)$ の例

次の事実も知られている．

〔定理2．2〕（自己共役作用素定理）
$(\varphi,\ \eta)=\int\int_M dm(x_1,\ x_2)\ \varphi(x_1,\ x_2)\cdot\overline{\eta(x_1,\ x_2)}$
なる内積を採用していて，
$dm(x_1,\ x_2)=dx_1dx_2\,p(x_1,\ x_2)$
と表現し得る密度関数　$p=p(x_1,\ x_2)$　が存在する場合，
$H=i\cdot\sum_{j=1}^{2}F_j(x_1\ x_2)\cdot\partial/\partial x_j$
ここに，
（i）2変数 x_1，x_2 の実数値関数 $F_j(x_1,\ x_2)$ は M上で1階までの連続な偏導関数を持つ
（ii）M上のいたるところで，
$\sum_{j=1}^{2}[F_j(x_1,\ x_2)]^2\fallingdotseq 0$
が自己共役作用素となるために，$p(x_1,\ x_2)$が満たさなければならない必要十分条件は，
「M上のいたるところで，
$\sum_{j=1}^{2}(\partial/\partial x_j)(F_j\,p)=0$」
である．　　　　　　　　　　　（定理2.2終）

例えば，
$F_1(x_1,\ x_2)=-1$，$F_2(x_1,\ x_2)=0$
と選んだ場合，　$p(x_1,\ x_2)=1$　となり，$L_2(M\,;dm)$は　$L_2(R^2)$　であることが知れ自己共役作用素 Hは

$H = i^{-1}\ \partial/\partial x_1$

と決定される．この場合，

$(e^{-itH}\varphi)\ (x_1,\ x_2) = \varphi(x_1 - t, x_2),\ \ \forall\varphi\epsilon\mathfrak{H}$

が成り立ち，Hと可換なウニタリ作用素 e^{-itH} は，x_1軸上の，t だけの平行移動を表わすウニタリ作用素である．

実変数λの任意の *Borel* 可測関数 $g(\lambda)$ において，λの代りに上の微分作用素Hを代入して得られる作用素 $g(H)$の，スペクトル表現は，

$$(g(H)\varphi)\ (x_1,\ x_2) = \left[\Pi_{j=1,2}(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_j\, e^{+i\lambda_j x_j}\right] g(\lambda_1) \left[\Pi_{k=1,2}(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} dy_k\, e^{-i\lambda_k y_k}\right]\varphi(y_1,\ y_2)$$
$$\forall\varphi\epsilon\mathfrak{D}(g(H))$$

であることが知られている．これから，

$(g(H)\varphi,\ \varphi)/(\varphi,\ \varphi)$

に対するスペクトル表現

$$(g(H)\varphi,\ \varphi)/(\varphi,\ \varphi) = \left[\Pi_{j=1,2}(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_j\right]\cdot g(\lambda_1)\cdot \left|\left[\Pi_{k=1,2}(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} dy_k\, e^{-i\lambda_k y_k}\right]\cdot\varphi(y_1, y_2)\right|^2 \Big/ \left[\Pi_{j=1,2}(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_j\right]\cdot\left|\left[\Pi_{k=1,2}(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} dy_k\, e^{-i\lambda_k y_k}\right]\varphi(y_1,\ y_2)\right|^2,\ \forall\varphi\epsilon\mathfrak{D}(g(H))$$

も成り立つ．

以上の諸公式において，$g(\lambda)$ の代りに各各，$\theta_l(\lambda)$，$f(\lambda)$，$f_l(\lambda)$を考えれば，$\theta_l(H)$，$f(H)$，$f_l(H)$，$\mathfrak{F}_l(\varphi)$のスペクトル表現が得られる．

2．7　クラス，代表パターン，平均パターン

各処理対象 $\varphi\epsilon\mathfrak{D}$ が帰属する類概念，クラス(*class*)の全体(有限集合)を考え，これを

$\mathfrak{C} = \{\mathfrak{C}_j\ ;\ j\epsilon J\}$，

ここに，$J = \{1,\ 2,\ \cdots,\ j,\ \cdots,\ J'\}$

としよう．$\mathfrak{C}_j$は第 $j\epsilon J$ 番目のクラスである．$\mathfrak{C}_j$の生起確率を p_jとすれば，

$0 < p_j,\ \ \sum_{j\epsilon J} p_j = 1$

が成り立つとしてよい．$\mathfrak{C}_j$ の持つ諸性質を典型的にほどよく反映している1つのパターンω_j を $\omega_j\epsilon\mathfrak{D}$ と選ぶ．この ω_j を $\mathfrak{C}_j$ の代表パターンという．

可分な *Hilbert* 空間 $\mathfrak{H}$ として，$L_2(M\,;dm)$を選定している場合，パターン$\psi\epsilon\mathfrak{D}$の汎関数(各 $\omega_j\|\omega_j\|^{-1}$からのノルム距離の自乗 $\|\psi - \omega_j\|\omega_j\|^{-1}\|^2$ の平均値)

$g(\psi) \equiv \sum_{j\epsilon J} p_j\cdot\|\psi - \omega_j\|\omega_j\|^{-1}\|^2$

を最小ならしめるψを ξ と書いて，ξ をクラス集合 $\mathfrak{C}$ 上の平均パターン (*mean pattern*) という．

〔定理2．3〕(平均パターンの最小自乗ノルム距離定理)

上の $g(\psi)$ を最小ならしめる ψは

$\xi = \sum_{j\epsilon J} p_j\cdot\omega_j\|\omega_j\|^{-1}$

と与えられる．

(証明)　$g(\psi)$ が最小となるように，ψ が選ばれているとしよう．

今，十分小さな実パラメータαと任意の関数 $\eta(x)$ とを導入すれば，ψの代りに $\psi + \alpha\cdot\eta$ を考えて得られる

$$g(\psi + \alpha\cdot\eta) = \sum_{j\epsilon J} p_j\cdot\|\psi + \alpha\cdot\eta - \omega_j\|\omega_j\|^{-1}\|^2 = \sum_{j\epsilon J} p_j\cdot\int_M dm(x)\left[\psi(x) + \alpha\cdot\eta(x) - \omega_j(x)\|\omega_j\|^{-1}\right]\cdot\left[\overline{\psi}(x) + \alpha\cdot\overline{\eta}(x) - \overline{\omega_j}(x)\|\omega_j\|^{-1}\right]$$

は，$\alpha = 0$ で極小値をとるから，

$0 = (\partial/\partial\alpha)g(\psi + \alpha\cdot\eta)\mid_{\alpha=0}$

でなければならない．具体的に計算すると，

$$(\partial/\partial\alpha)g(\psi + \alpha\cdot\eta) = \sum_{j\epsilon J} p_j\cdot\int_M dm(x)\eta(x)\left[\overline{\psi}(x) + \alpha\cdot\overline{\eta}(x) - \overline{\omega_j}(x)\|\omega_j\|^{-1}\right] + \sum_{j\epsilon J} p_j\cdot\int_M dm(x)\left[\psi(x) + \alpha\cdot\eta(x) - \omega_j(x)\|\omega_j\|^{-1}\right]\cdot\overline{\eta}(x)$$

であるから，

$$0 = (\eta,\ \sum_{j\epsilon J} p_j\cdot[\psi - \omega_j\|\omega_j\|^{-1}]) + (\sum_{j\epsilon J} p_j\cdot[\psi - \omega_j\|\omega_j\|^{-1}],\ \eta)$$

を得る．これから，

$\sum_{j\epsilon J} p_j\cdot[\psi - \omega_j\|\omega_j\|^{-1}] = 0$

を得て，

$\psi = \sum_{j\epsilon J} p_j\cdot\omega_j\|\omega_j\|^{-1}$

が成立する．　　　　　　　　　（証明・終）

2．8　構造化パターン

ノルムが規格化された平均パターン　$\xi\|\xi\|^{-1}$　に，射影作用素の系

$\vec{\theta}(H)=\{\theta_l(H);\theta_l(H)\neq 0,\ I,\ l\epsilon L\}$

を施こして得られるパターンの組

$\vec{\theta}(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}=\{\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1};\ l\epsilon L\}$

を，パターンの基本要素　$\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}$ の組であるという．

この各　$\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}$　にある複素定数 a_l をかけ，$l\epsilon L$ にわたり総和して得られるパターン（パターンの基本要素　$\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}$ の線形1次結合で表わされるパターン）

$\eta=\sum_{l\epsilon L} a_l\cdot\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}$

を構造化パターン(*structural pattern*)という．

構造化パターンとして，

（i）　$\varphi\epsilon\mathfrak{D}$ と同じ2値特徴量の組 $\vec{X}(\varphi)=\{X_l(\varphi);\ l\epsilon L\}$ を備えており，簡約構造モデルと呼ばれている $\mathfrak{Y}(\varphi)$

（ii）　ノルム規格化パターン $\varphi\|\varphi\|^{-1}$　から最短距離にあり，最良近似構造化パターンと呼ばれている $\mathfrak{Z}(\varphi)$

（iii）　パーセプトロン形空間回路　$W(H)=\sum_{l\epsilon L} w_l\cdot\theta_l(H)$ からの出力パターン

などがある事実を以下の諸章において示そう．

3．構造化パターンから抽出される特徴量

構造化パターン

$\eta=\sum_{l\epsilon L} a_l\cdot\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}$

　ここに，各 a_l は複素定数かつ　$\xi\epsilon\mathfrak{D}$　に関し，

$\eta\epsilon\mathfrak{D}$　となるための条件，

η から抽出される，第 $l\epsilon L$ 番目の

　特徴量 $\mathfrak{F}_l(\varphi)$

などを決定しよう．

〔補助定理3．1〕　構造化パターン

$\eta=\sum_{l\epsilon L} a_l\cdot\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}$

ここに，各 a_l は複素定数かつ $\xi\epsilon\mathfrak{D}$

に対し，次の2公式（i），（ii）が成り立つ．

（i）　$f(H)\eta=\sum_{l\epsilon L} a_l\cdot\theta_l(H)f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}$

（ii）　$\|f(H)\eta\|^2=\sum_{l\epsilon L}|a_l|^2\cdot\|f(H)\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|^2$

（証明）　有界作用素 $\theta_l(H)$ は $f(H)$ と可換であるから，

a）$\xi\|\xi\|^{-1}\ \epsilon\mathfrak{D}\Rightarrow\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\ \epsilon\mathfrak{D}$

　かつ $f(H)\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}=\theta_l(H)f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}$，$\forall l\epsilon L$

が成りたつ．この事実 a は以下でたびたび用いられる．

i の証明：　a を適用すれば，

$f(H)\eta=f(H)\cdot\sum_{l\epsilon L} a_l\cdot\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}$
$=\sum_{l\epsilon L} a_l\cdot f(H)\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}$
$=\sum_{l\epsilon L} a_l\cdot\theta_l(H)f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}$

がなりたつ．これが i の公式である．

ii の証明：　$\theta_l(H)$ の自己共役性，直交性，事実 a などを適用すれば，公式 i を使い，

$\|f(H)\eta\|^2$
$=\sum_{k\epsilon L}\sum_{l\epsilon L} a_k\cdot\overline{a_l}\cdot(\theta_k(H)f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1},\ \theta_l(H)f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1})$
$=\sum_{k\epsilon L}\sum_{l\epsilon L} a_k\cdot\overline{a_l}\cdot(\theta_l(H)\theta_k(H)f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1},\ f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1})$
$=\sum_{l\epsilon L}|a_l|^2\cdot(\theta_l(H)\cdot\theta_l(H)f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1},\ f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1})$
$=\sum_{l\epsilon L}|a_l|^2\cdot(\theta_l(H)f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1},\ \theta_l(H)\cdot f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1})$
$=\sum_{l\epsilon L}|a_l|^2\cdot(f(H)\cdot\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1},\ f(H)\cdot\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1})$
$=\sum_{l\epsilon L}|a_l|^2\cdot\|f(H)\cdot\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|^2$

を得て，これで証明された．　　（証明・終）

〔補助定理3．2〕（構造化パターンの帰属空間定理）　構造化パターン

$\eta=\sum_{l\epsilon L} a_l\cdot\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}$

　ここに，各 a_l は複素定数かつ　$\xi\epsilon\mathfrak{D}$

に対し，次の i，ii，iiiが成り立つ．

（i）　$\sup_{l\epsilon L}|a_l|^2<+\infty\Rightarrow\eta\epsilon\mathfrak{D}$

（ii）　$\sum_{l\epsilon L}|a_l|^2<+\infty\Rightarrow\eta\epsilon\mathfrak{D}$

（iii）　$\sum_{l\epsilon L}|a_l|<+\infty\Rightarrow\eta\epsilon\mathfrak{D}$

（証明）　まず，2つの事実

a）$\xi\epsilon\mathfrak{D}$ より，$\|f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|^2<\infty$

b）2．4節の公式（i）より，$\|f(H)\ \varphi\|^2$

$=\sum_{l\epsilon L}\|f(H)\theta_l(H)\ \varphi\|^2<\infty,\ \forall\varphi\epsilon\mathfrak{D}$

に注目する．この事実は暗黙のうちに度々用いられる．

（ i ）の証明：　補助定理3.1の公式(ii)を用いれば，　$\sup_{l\epsilon L}|a_l|^2<+\infty$　であれば，

$\|f(H)\ \eta\|^2$
$=\sum_{l\epsilon L}|a_l|^2\cdot\|f(H)\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|^2$
$\leqq(\sup_{l\epsilon L}|a_l|^2)\cdot\sum_{l\epsilon L}\|f(H)\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|^2$
$\leqq(\sup_{l\epsilon L}|a_l|^2)\cdot\sum_{l\epsilon L}\|f(H)\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|^2$
$=(\sup_{l\epsilon L}|a_l|^2)\cdot\|f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|^2$
$<+\infty\quad\therefore\quad\eta\epsilon\mathfrak{D}$

がいえる．

（ii）の証明：　公式bより

$\sup_{l\epsilon L}\|f(H)\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|^2$
$\leqq\|f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|^2$

が成り立つ．よって，

$\sum_{l\epsilon L}|a_l|^2<+\infty$　であれば，

$\|f(H)\ \eta\|^2$
$=\sum_{l\epsilon L}|a_l|^2\cdot\|f(H)\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|^2$
$\leqq(\sum_{l\epsilon L}|a_l|^2)\cdot\sup_{l\epsilon L}\|f(H)\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|^2$
$\leqq(\sum_{l\epsilon L}|a_l|^2)\cdot\|f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|^2$
$<+\infty\quad\therefore\quad\eta\epsilon\mathfrak{D}$

がいえる．

(iii)の証明：　三角不等式

$\|\varphi_1+\varphi_2\|\leqq\|\varphi_1\|+\|\varphi_2\|,\ \forall\varphi_1,\ \forall\varphi_2\epsilon\mathfrak{H}$ と，

$\|a\varphi\|=|a|\cdot\|\varphi\|,\ \mathrm{A}\,a\epsilon Z$(複素数体), $\forall\varphi\epsilon\mathfrak{H}$

とを適用しよう．また，射影作用素 $\theta_l(H)$ のノルム有界性

$\|\theta_l(H)\ \varphi\|\leqq\|\varphi\|,\ \forall\varphi\epsilon\mathfrak{H}$

をも使おう．

補助定理3．1の公式（i）を使えば，

$\|f(H)\ \eta\|$
$=\|\sum_{l\epsilon L}a_l\cdot\theta_l(H)f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|$
$\leqq\sum_{l\epsilon L}\|a_l\cdot\theta_l(H)f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|$
$=\sum_{l\epsilon L}|a_l|\cdot\|\theta_l(H)f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|$
$\leqq(\sum_{l\epsilon L}|a_l|)\cdot\|f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|$
$<+\infty\quad\therefore\quad\eta\epsilon\mathfrak{D}$

がいえる．　（証明・終）

〔補助定理3．3〕

$a_l,\ a_l'$（$l\epsilon L$）は複素定数　かつ $\xi\epsilon\mathfrak{D}$

として，2つの構造化パターン

$\eta=\sum_{l\epsilon L}a_l\cdot\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}$
ここに，$\sup_{l\epsilon L}|a_l|^2<+\infty$
$\eta'=\sum_{l\epsilon L}a_l'\cdot\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}$
ここに，$\sup_{l\epsilon L}|a_l'|^2<+\infty$

を考えよう．

（ i ）　$a_l=a_l',\ \forall l\epsilon L\Rightarrow\|\eta-\eta'\|=0$

（ii）　$\|\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|^2\neq0,\ \forall l\epsilon L$

であれば，

$\|\eta-\eta'\|=0\Rightarrow a_l=a_l',\ \forall l\epsilon L.$

系3．3　$\|\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|^2\neq0,\ \forall l\epsilon L$ であれば，

$a_l=a_l',\ \forall l\epsilon L\Leftrightarrow\|\eta-\eta'\|=0.$

（証明）

i の証明：　$\eta=\sum_{l\epsilon L}a_l\cdot\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}$
$=\sum_{l\epsilon L}a_l'\cdot\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}=\eta'.$

ii の証明：　$b_l\equiv a_l-a_l'$　とおけば，

$\eta-\eta'=\sum_{l\epsilon L}b_l\cdot\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}$

と表わされる．よって，

$0=\|\eta-\eta'\|^2=(\eta-\eta',\ \eta-\eta')$
$=\sum_{k\epsilon L}\sum_{l\epsilon L}b_k\overline{b_l}(\theta_k(H)\ \xi\|\xi\|^{-1},\ \theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1})$
$=\sum_{k\epsilon L}\sum_{l\epsilon L}b_k\overline{b_l}(\theta_l(H)\cdot\theta_k(H)\ \xi\|\xi\|^{-1},\ \xi\|\xi\|^{-1})$
$=\sum_{l\epsilon L}|b_l|^2\cdot(\theta_l(H)\cdot\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1},\ \xi\|\xi\|^{-1})$
$=\sum_{l\epsilon L}|b_l|^2\cdot(\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1},\ \xi\|\xi\|^{-1})$
$=\sum_{l\epsilon L}|b_l|^2\cdot\|\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|^2$

が得られる．ここで，条件

$\|\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|^2\neq0,\ \forall l\epsilon L$

を考慮すれば，

$|b_l|^2=0\quad\therefore\quad b_l=0,\ \forall l\epsilon L$

が成立する．

系3．3の証明：　i，ii から明然．

（証明・終）

いよいよ，構造化パターンから抽出される

特徴量の表現を求めよう．

〔定理３．１〕（構造化パターンから抽出される特徴量）

構造化パターン

$\eta=\sum_{l\epsilon L} a_l\cdot\theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}$，ここに

$a_l(\ l\epsilon L\ )$ は複素定数，$\xi\epsilon\mathfrak{D}$

に関しては，条件

$\sup_{l\epsilon L}|\ a_l\ |^2<+\infty$

の下で，

$\eta\epsilon\mathfrak{D}$

となり，この η から抽出される，第 $l\epsilon L$ 番目の特徴量

$\mathfrak{F}_l(\eta)=(f_l(H)\eta,\ \eta)/(\eta,\ \eta)$

は，次のように表わされる：

$\mathfrak{F}_l(\eta)=\mathfrak{F}_l(\ \xi\|\xi\|^{-1})\cdot u_l(\eta),\ u_l(\eta)$

$Y\equiv[\sum_{m\epsilon L}|\ a_l\ |^2\cdot\|\ \theta_m(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|^2]$

$/[\sum_{k\epsilon L}|\ a_k\ |^2\cdot\|\ \theta_k(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|^2]$．

（証明）　まず，補助定理３．２のiiから条件　$\sup_{l\epsilon L}|\ a_l\ |^2<+\infty$　の下で，$\eta\epsilon\mathfrak{D}$　が従う．

$\|\eta\|^2=(\eta,\ \eta)$，$\|\xi\|^2=(\ \xi,\ \xi\ )$，

$(f_l(H)\eta,\ \eta)$　を計算しよう．

（ｉ）　$\|\eta\|^2=(\eta,\ \eta)$

$=\sum_{m\epsilon L}|\ a_m\ |^2\cdot\|\ \theta_m(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|^2$

（ii）　$\|\xi\|^2=(\ \xi,\ \xi\ )$

$=\sum_{m\epsilon L}|\ \theta_m(H)\ \xi\|^2$

（iii）　$(f_l(H)\eta,\ \eta)$

$=|\ a_l\ |^2\cdot\mathfrak{F}_l(\ \xi\|\xi\|^{-1})$

———　以下，ｉ，ii，iiiの証明．

ｉの証明：　各 $\theta_l(H)$ 間の直交性

$\theta_k(H)\cdot\theta_l(H)=0\ \ (k\neq l)$　　（３．１）

と，巾等性（ベキトウ）

$\theta_l(H)\cdot\theta_l(H)=\theta_l(H)$　　（３．２）

とを適用すれば，

$\theta_m\ (H)\eta=a_m\cdot\theta_m(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}$，$\forall m$

（３．３）

を得る．よって，各 $\theta_l(H)$ の自己共役性

$(\theta_l(H)\ \varphi,\ \psi\ )=(\varphi,\ \theta_l(H)\ \psi\ )$，$\forall\varphi$，$\forall\psi\epsilon\mathfrak{H}$　　（３．４）

を適用すれば，式（３．３）を代入して

$\|\eta\|^2=(\eta,\ \eta)$

$=\sum_{m\epsilon L} a_m(\theta_m(H)\ \xi\|\xi\|^{-1},\ \eta)$

$=\sum_{m\epsilon L} a_m(\theta_m(H)\cdot\theta_m(H)\ \xi\|\xi\|^{-1},\ \eta)$

$=\sum_{m\epsilon L} a_m(\theta_m(H)\ \xi\|\xi\|^{-1},\ \theta_m(H)\ \eta)$

$=\sum_{m\epsilon L}|\ a_m\ |^2\cdot(\theta_m(H)\ \xi\|\xi\|^{-1},\ \theta_m(H)\ \xi\|\xi\|^{-1})$

$=\sum_{m\epsilon L}|\ a_m\ |^2\cdot\|\ \theta_m(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}\|^2$

が得られ，これで証明されたことがわかる．

ii の証明：　$\|\xi\|^2=(\ \xi,\ \xi\ )$

$=\sum_{m\epsilon L}(\theta_m(H)\ \xi,\ \xi\ )$

$=\sum_{m\epsilon L}(\theta_m(H)\cdot\theta_m(H)\ \xi,\ \xi\ )$

$=\sum_{m\epsilon L}(\theta_m(H)\ \xi,\ \theta_m(H)\ \xi\ )$

$=\sum_{m\epsilon L}\|\ \theta_m(H)\ \xi\|^2$.

iiiの証明：　$f(H)$ は有界作用素 $\theta_l(H)$ と可換であるから，

$\xi\epsilon\mathfrak{D}$　ならば　$\theta_l(H)\ \xi\epsilon\mathfrak{D}$　かつ

$f(H)\ \theta_l(H)\ \xi=\theta_l(H)\ f(H)\ \xi$（３.５）

が成り立つ．よって，式（３.３）から

$f_l(H)\ \eta=f(H)\cdot\theta_l(H)\ \eta$

$=a_l\cdot f(H)\ \theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}$

$=a_l\cdot\theta_l(H)\ f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1}$　　（３．６）

が成り立つ．以上の３式（３.６），（３.２），（３.４）から，

$(\ f_l(H)\ \eta,\ \eta\ )$

$=a_l\cdot(\theta_l(H)\ f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1},\ \eta\ )$

$=a_l\cdot(\theta_l(H)\cdot\theta_l(H)\ f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1},\ \eta)$

$=a_l(\theta_l(H)\ f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1},\ \theta_l(H)\ \eta\ )$

を得るが，これに再び，式（３．３）を代入すれば，

$(\ f_l(H)\ \eta,\ \eta\ )$

$=|\ a_l\ |^2(\theta_l(H)\ f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1},\ \theta_l(H)\ \xi\|\xi\|^{-1})$

と書き換えられるが，更に，３式（３．４），（３．２），（３．５）を適用すれば，次のように所要の表現が得られる：

$(\ f_l(H)\ \eta,\ \eta\ )$

$=|\ a_l\ |^2\cdot(\theta_l(H)\cdot\theta_l(H)\ f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1},\ \xi\|\xi\|^{-1})$

$=|\ a_l\ |^2\cdot(\theta_l(H)\ f(H)\ \xi\|\xi\|^{-1},\ \xi\|\xi\|^{-1})$

$= | a_l |^2 \cdot (f(H)\, \theta_l(H)\, \xi \| \xi \|^{-1},$
$\xi \| \xi \|^{-1}) / (\xi \| \xi \|^{-1},\ \xi \| \xi \|^{-1})$
$= | a_l |^2 \cdot \mathfrak{F}_l(\xi \| \xi \|^{-1}).$ ―――

証明を続けよう．ii から

$\exists\, l \in L,\ \ \theta_l(H)\, \xi \neq 0 \Rightarrow \xi \neq 0$ （３．７）

が成り立っていることに注意して，

$\mathfrak{F}_l(\eta) = (f_l(H)\, \eta,\ \eta) / (\eta,\ \eta)$

に，上の公式ｉ，iiiを代入すれば，

$\mathfrak{F}_l(\eta) = | a_l |^2 \cdot \mathfrak{F}_l(\xi \| \xi \|^{-1})$
$/ \sum_{k \in L} | a_k |^2 \cdot \| \theta_k(H)\, \xi \| \xi \|^{-1} \|^2$

が得られるが，これに，公式iiより得られる関係

$1 = \| \xi \| \xi \|^{-1} \|^2 = \sum_{m \in L} \| \theta_m(H)\, \xi \| \xi \|^{-1} \|^2$ （３．８）

を代入すれば，結局

$\mathfrak{F}_l(\eta)$
$= \mathfrak{F}_l(\xi \| \xi \|^{-1}) \cdot \sum_{m \in L} | a_l |^2 \cdot \| \theta_m(H)\, \xi \| \xi \|^{-1} \|^2 / \sum_{k \in L} | a_k |^2 \cdot \| \theta_k(H)\, \xi \| \xi \|^{-1} \|^2$
$= \mathfrak{F}_l(\xi \| \xi \|^{-1}) \cdot u_l(\eta)$

が得られ，これで証明された．　（証・終）

この定理３．１から，次の補助定理３．４をも得る．

〔補助定理３．４〕

条件　$\xi \in \mathfrak{D}$　の下での２つの構造化パターン

$\eta = \sum_{l \in L} a_l \cdot \theta_l(H)\, \xi \| \xi \|^{-1}$，各 a_l は複素定数，$\sup_{l \in L} | a_l |^2 < +\infty$

$\eta' = \sum_{l \in L} a'_l \cdot \theta_l(H)\, \xi \| \xi \|^{-1}$，各 a'_l は複素定数，$\sup_{l \in L} | a'_l |^2 < +\infty$

は，各 a_l，a'_l の間に条件

$| a_l |^2 = | a'_l |^2,\ \ \forall\, l \in L$

が成り立っていれば，

$\mathfrak{F}_l(\eta) = \mathfrak{F}_l(\eta'),\ \ \forall\, l \in L.$

４．２値特徴抽出関数と構造化パターンから抽出される特徴量

今，１変数 u の関数

$Y(u) = 0 \quad if\ u < 0,\ = 1 \quad if\ u \geqq 0$

を導入し†，各定数 e_l を不等式

$0 < e_l \leqq \mathfrak{F}_l(\xi \| \xi \|^{-1})$ （４．１）

を満たすように，本付録の示すアルゴリズムで決めておく．e_l をしきい値として，パターン $\varphi \in \mathfrak{D}$ に対し定義される量

$X_l(\varphi) \equiv Y(\mathfrak{F}_l(\varphi) - e_l)$ （４．２）

$= \begin{cases} 0 & if\ \mathfrak{F}_l(\varphi) < e_l \\ 1 & if\ \mathfrak{F}_l(\varphi) \geqq e_l \end{cases}$

を，φ から抽出される第 $l \in L$ 番目の２値特徴量といい，$X_l(\cdot)$ を第 $l \in L$ 番目の２値特徴抽出関数と呼ぶことにしよう．

２値特徴抽出関数　$X_l(\cdot)$　は，$\mathfrak{D}$ の各要素に，集合　｛０，１｝（０，１の２つの要素から成る集合）　の１つの要素を対応づける関係（$\mathfrak{D}$ から｛０，１｝への関数）と考えられる：

$X_l(\cdot) : \mathfrak{D} \to \{0,\ 1\},\ \ l \in L.$

〔定理４．１〕（構造化パターンから抽出される２値特徴量定理）

３条件

$\xi \in \mathfrak{D}$ （４．３）

$\theta_l(H)\, \xi \neq 0,\ \ \forall\, l \in L$ （４．４）

$0 < e_l \leqq \mathfrak{F}_l(\xi \| \xi \|^{-1}),\ \ \forall\, l \in L$ （４．５）

の下で考えよう．構造化パターン

$\eta = \sum_{l \in L} a_l \cdot \theta_l(H)\, \xi \| \xi \|^{-1}$ （４．６）

において，各複素定数 a_l が

$a_l = 0 \ \text{or}\ 1$ （４．７）

であるとすれば，

$\eta \in D$ （４．８）

であり，しかも

$X_l(\eta) = a_l,\ \ \forall\, l \in L$ （４．９）

が成り立つ．

† ヘビサイド関数（*Heaviside function*）と呼ばれる $Y = Y(u)$ の近似関数としては，次の２種類のものが考えられる：
（ｉ）$f(u) = (1 + e^{-ku})$　$(k > 0)$
（ロジスチック曲線（*logistic curve*））
（ii）$f(u) = 2^{-1} + 2^{-1} \cdot tanh(ku^n)$（$k$, $n > 0$, n は奇数），ここに $tanh(x) = (e^{+x} - e^{-x}) \cdot 2^{-1} / [(e^{+x} + e^{-x}) \cdot 2^{-1}]$.

（証明）　$\eta\epsilon\mathfrak{D}$　なることは，

$\sup_{l\epsilon L}|a_l|^2\leqq 1<+\infty$

であるから，補助定理３．２のｉより明然．

１）$a_l=0$，$\forall l\epsilon L$　の場合

$\eta=0$

であるから，

$\mathfrak{F}_l(\eta)=0$，$X_l(\eta)=0$，$\forall l\epsilon L$

が従い，よって，

$X_l(\eta)=0=a_l$，$\forall l\epsilon L$

が成り立っている．

２）$\exists l\epsilon L$，$a_l\fallingdotseq 0$　の場合，

定理３．１の証明内の公式ｉ，ii から得られる公式

$\|\eta\|^2=(\eta,\ \eta)=\sum_{m\epsilon L}|a_m|^2\cdot\|\theta_m(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2$

$=\sum_{m\epsilon L}|a_m|^2\cdot\|\theta_m(H)\xi\|^2/\sum_{k\epsilon L}\|\theta_k(H)\xi\|^2$

と，式（４．４）とを考慮すると，

$\mathfrak{F}_l(\eta)=(f_l(H)\eta,\ \eta)/(\eta,\ \eta)$

の分母（$\eta,\ \eta$）と，ξに関しては，

$(\eta,\ \eta)\fallingdotseq 0$，$\xi\fallingdotseq 0$　（４，10）

であることに注意しておく．

２．ｉ）$a_l=0$であるような$l\epsilon L$　の場合

定理３．１より

$u_l(\eta)=0$，$\mathfrak{F}_l(\eta)=0$

を得て，よって，

$X_l(\eta)=0$

が従う．すなわち，

$X_l(\eta)=0=a_l$

が成立している．

２．ii）$a_l=1$であるような$l\epsilon L$の場合

定理３．１で導入された量

$u_l(\eta)=[\sum_{m\epsilon L}|a_l|^2\cdot\|\theta_m(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2]/[\sum_{k\epsilon L}|a_k|^2\cdot\|\theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2]$

を評価しよう．$a_l=1$であるから，

$u_l(\eta)\geqq 1$

を得る．よって，定理３．１より不等式

$\mathfrak{F}_l(\eta)=\mathfrak{F}_l(\xi\|\xi\|^{-1})\cdot u_l(\eta)$

$\geqq\mathfrak{F}_l(\xi\|\xi\|^{-1})\geqq e_l$

を得て，

$X_l(\eta)=1$

が従う．いいかえれば

$X_l(\eta)=1=a_l$

が成立している．　（証・終）

５．構造化パターンから抽出される特徴量に関する変調度

本章では，定理３．１を基礎にして得られる事実を説明しよう．

本章では，構造化パターン

$\eta=\sum_{l\epsilon L}a_l\cdot\theta_l(H)\xi\|\xi\|^{-1}$，各$a_l(l\epsilon L)$は複素定数，$\xi\epsilon\mathfrak{D}$　（５．１）

に対し，２条件

$\theta_l(H)\xi\fallingdotseq 0$，$\forall l\epsilon L$　（５．２）

$\sup_{l\epsilon L}|a_l|^2<+\infty$　（５．３）

の他に，今一つの条件

$\mathfrak{F}_l(\xi\|\xi\|^{-1})>0$，$\forall l\epsilon L$　（５．４）

を課しておこう．定理３．１によれば，$\eta\epsilon\mathfrak{D}$から抽出される特徴量$\mathfrak{F}_l(\eta)$は

$u_l(\eta)\equiv[\sum_{m\epsilon L}|a_l|^2\cdot\|\theta_m(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2]/[\sum_{k\epsilon L}|a_k|^2\cdot\|\theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2]$　（５．５）

を導入して，次のように表現される：

$\mathfrak{F}_l(\eta)=\mathfrak{F}_l(\xi\|\xi\|^{-1})\cdot u_l(\eta)$．（５．６）

上の$\mathfrak{F}_l(\eta)$が$\mathfrak{F}_l(\xi\|\xi\|^{-1})$　に比し，どの程度変調されているかを検討するため，式（５．４）で示される条件の下で，不等式

$[1+c_l(\eta)]\leqq\mathfrak{F}_l(\eta)/\mathfrak{F}_l(\xi\|\xi\|^{-1})\leqq[1+d_l(\eta)]$　（５．７）

と，等式

$\mathfrak{F}_l(\eta)\equiv[1+\gamma_l(\eta)]\cdot\mathfrak{F}_l(\xi\|\xi\|^{-1})$　（５．８）

とにおける，３種類の量

$c_l(\eta)$，$\gamma_l(\eta)$，$d_l(\eta)$

を具体的に求めよう．明らかに，この３量の間に，不等式

$c_l(\eta)\leqq\gamma_l(\eta)\leqq d_l(\eta)$　（５．９）

が成り立ち，それぞれ，ηの下限変調度，変調度（*degree of modulation*），上限変調度と呼ぶことにしよう．

$\eta\epsilon\mathfrak{D}$ から抽出される特徴量 $\mathfrak{F}_l(\eta)$ を２値化して，２値特徴量 $X_l(\eta)$ を得るときの，２式（４．１），（４．２）でのしきい値 e_l を

$e_l \equiv (1+q_l)\cdot\mathfrak{F}_l(\xi\|\xi\|^{-1})$

とおくと，定数 q_l はしきい値 e_l に含まれている自己組織化の程度を反映している量である．この q_l を用いると，

$\mathfrak{F}_l(\eta)-e_l=[\gamma_l(\eta)-q_l)]\cdot\mathfrak{F}_l(\xi\|\xi\|^{-1})$

と表わされ，式（５．４）なる条件の下で

$X_l(\eta)=Y(\gamma_l(\eta)-q_l)$

という表現が成り立つ．このように，構造化パターン η から抽出される２値特徴量 $X_l(\eta)$ は，η の変調度 $\gamma_l(\eta)$ と，しきい値 e_l に関する自己組織化係数 q_l とで決まってしまう事実に注意を払っておこう．

〔定理５．１〕（構造化パターンから抽出される特徴量の変調度定理）

式（４．３），式（５．２），式（５．３）で示される３条件と，今１つの条件式（５．４）との下で，変調度 $\gamma_l(\eta)$，下限変調度 $c_l(\eta)$，上限変調度 $d_l(\eta)$ は各々，次のように表現される．

（ｉ） $\gamma_l(\eta)=[\,|a_l|^2-\sum_{m\epsilon L}|a_m|^2\cdot\|\theta_m(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2]/[\sum_{k\epsilon L}|a_k|^2\cdot\|\theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2]$

（ii） $c_l(\eta)=[\,|a_l|^2-\sup_{m\epsilon L}|a_m|^2]/\sup_{k\epsilon L}|a_k|^2$

（iii） $d_l(\eta)=[\,|a_l|^2-inf_{m\epsilon L}|a_m|^2]/\inf_{k\epsilon L}|a_k|^2$

（証明）　ｉの証明：　式（５．８），式（５．６）から，

$\gamma_l(\eta)=\mathfrak{F}_l(\eta)/\mathfrak{F}_l(\xi\|\xi\|^{-1})-1$

$=u_l(\eta)-1$

であるが，これに，式（５．５），式（３．８）を代入すれば，

$$
\begin{aligned}
\gamma_l(\eta)&\\
&=[\,|a_l|^2\cdot\textstyle\sum_{m\epsilon L}\|\theta_m(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2]/[\sum_{k\epsilon L}|a_k|^2\cdot\|\theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2]-1\\
&=|a_l|^2/[\textstyle\sum_{k\epsilon L}|a_k|^2\cdot\|\theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2]-1 \qquad (5.10)\\
&=[\,|a_l|^2-\textstyle\sum_{m\epsilon L}|a_m|^2\cdot\|\theta_m(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2]/\sum_{k\epsilon L}|a_k|^2\cdot\|\theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2
\end{aligned}
$$

と得られる．

ii，iiiの証明：　明らかに，不等式

$[\inf_{k\epsilon L}|a_k|^2]\cdot\sum_{m\epsilon L}\|\theta_m(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2$

$\leqq\sum_{m\epsilon L}|a_m|^2\cdot\|\theta_m(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2$

$\leqq[\sup_{k\epsilon L}|a_k|^2]\cdot\sum_{m\epsilon L}\|\theta_m(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2$

が成り立つが，これに，式（３．８）を代入して，不等式

$\inf_{k\epsilon L}|a_k|^2\leqq\sum_{m\epsilon L}|a_m|^2\cdot\|\theta_m(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2\leqq\sup_{k\epsilon L}|a_k|^2$

を得る．さらに，この不等式を，不等式（５．10）において勘案すれば，不等式

$$\frac{|a_l|^2}{\sup_{k\epsilon L}|a_k|^2}-1\leqq\gamma_l(\eta)\leqq\frac{|a_l|^2}{\inf_{k\epsilon L}|a_k|^2}-1$$

が成立し，３式（５．７），（５．８），（５．９）から，ii，iiiの成立は明然．

（証・終）

定理５．１から得られる次の５つの結論1°～5°にも留意しておこう．

1°） $|a_l|^2=\text{const}\,(\neq 0)$，$\forall\, l\epsilon L$ であれば，

$c_l(\eta)=\gamma_l(\eta)=d_l(\eta)=0$

を得，このような η は

$\eta=\sum_{l\epsilon L}a_l\cdot\theta_l(H)\xi\|\xi\|^{-1}$

$\quad=\text{const}\cdot\sum_{l\epsilon L}\theta_l(H)\xi\|\xi\|^{-1}$

$\quad=\text{const}\cdot\xi\|\xi\|^{-1}$

からわかるように，$\xi\|\xi\|^{-1}$ の複素定数倍（零倍を除く）である．

2°）常に，$-1\leqq c_l(\eta)$ である．

3°）常に，次の不等式が成り立つ．

$d_l(\eta)\leqq\sup_{m\epsilon L}|a_m|^2/\inf_{k\epsilon L}|a_k|^2$

4°） $|a_l|^2=|a_l'|^2$，$\forall\, l\epsilon L$ であれば，例えば，$a_l=1$ のとき，$a_l'=-1$，$\forall\, l\epsilon L$ であれば，

$\eta=\sum_{l\epsilon L}a_l\cdot\theta_l(H)\xi\|\xi\|^{-1}$

$\eta'=\sum_{l\epsilon L}a_l'\cdot\theta_l(H)\xi\|\xi\|^{-1}$

に対し，次の３つの等式が成り立つ．

$c_l(\eta')=c_l(\eta)$, $\gamma_l(\eta')=\gamma_l(\eta)$, $d_l(\eta')=d_l(\eta)$, $\forall l\in L$.

5°) $a_l=0$ or 1, $\forall l\in L$ の場合

$\exists m\in L$, $a_m\neq 0$ であれば, $c_l(\eta)=-1$ or 0 であるし, また,

$\exists m\in L$, $a_m=0$ であれば, $d_l(\eta)=0$ or $+\infty$ (ただし $0/0$を0と考えて).

6．最良近似構造パターン

射影作用素 $\theta_l(H)$ のすべての和

$\sum_{l\in L}\theta_l(H)$

は恒等作用素であり, パターン $\varphi\in\mathfrak{H}$ に対し

$$\varphi\|\varphi\|^{-1}=\sum_{l\in L}\theta_l(H)\varphi\|\varphi\|^{-1} \quad (6.1)$$

が成り立つ. 構造化パターン

$$\eta=\sum_{l\in L}a_l\cdot\theta_l(H)\xi\|\xi\|^{-1},\ ここに,\ \xi\in\mathfrak{D}\ かつ\ 各\ a_l\ は0\ or\ 1 \quad (6.2)$$

により, 式 (6.1) の $\varphi\|\varphi\|^{-1}$を近似してみよう. つまり, 不等式†

$$\inf_{a_l=0\text{ or }1}\|\sum_{l\in L}\theta_l(H)\varphi\|\varphi\|^{-1}-\sum_{l\in L}a_l\cdot\theta_l(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|$$
$$=\|\sum_{l\in L}\theta_l(H)\varphi\|\varphi\|^{-1}-\mathfrak{Z}(\varphi)\|$$
$$\leq\|\sum_{l\in L}\theta_l(H)\varphi\|\varphi\|^{-1}-\mathfrak{Y}(\varphi)\| \quad (6.3)$$

を満たす構造化パターン

$$\mathfrak{Z}(\varphi)=\sum_{l\in L}b_l(\varphi)\cdot\theta_l(H)\xi\|\xi\|^{-1},\quad b_l(\varphi)=0\ \text{or}\ 1 \quad (6.4)$$

を求めてみよう. このような$\mathfrak{Z}(\varphi)$ は個々のパターン φの構造に関する最良近似モデルとなっている.

〔定理6．1〕[7] (最良近似構造パターン定理) 不等式 (6.3) を満たす構造パターン $\mathfrak{Z}(\varphi)$ 内の2値量 $b_l(\varphi)$ は

$$b_l(\varphi)=1-Y(\|\theta_l(H)〔\varphi\|\varphi\|^{-1}-\xi\|\xi\|^{-1}〕\|^2-\|\theta_l(H)\varphi\|\varphi\|^{-1}\|^2)$$
$$=\begin{cases}0 & if\ \|\theta_l(H)〔\varphi\|\varphi\|^{-1}-\xi\|\xi\|^{-1}〕\|^2\geq\|\theta_l(H)\varphi\|\varphi\|^{-1}\|^2\\ 1 & if\ \|\theta_l(H)〔\varphi\|\varphi\|^{-1}-\xi\|\xi\|^{-1}〕\|^2<\|\theta_l(H)\varphi\|\varphi\|^{-1}\|^2\end{cases}$$

と与えられる.

(証明)[7] まず,

$$K^2\equiv\|\sum_{l\in L}\theta_l(H)\varphi\|\varphi\|^{-1}-\sum_{l\in L}a_l\cdot\theta_l(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2$$
$$=\|\sum_{l\in L}\theta_l(H)〔\varphi\|\varphi\|^{-1}-a_l\cdot\xi\|\xi\|^{-1}〕\|^2$$
$$=\sum_{k\in L}\sum_{l\in L}(\theta_k(H)〔\varphi\|\varphi\|^{-1}-a_k\cdot\xi\|\xi\|^{-1}〕,\ \theta_l(H)〔\varphi\|\varphi\|^{-1}-a_l\cdot\xi\|\xi\|^{-1}〕)$$

であるが, 式 (3.4) で示される, $\theta_l(H)$ の自己共役性を使えば,

$$K^2=\sum_{k\in L}\sum_{l\in L}(\theta_l(H)\cdot\theta_k(H)〔\varphi\|\varphi\|^{-1}-a_l\cdot\xi\|\xi\|^{-1}〕,〔\varphi\|\varphi\|^{-1}-a_l\cdot\xi\|\xi\|^{-1}〕)$$

と変形される. 更に, 式 (3.1) で示される, 各 $\theta_l(H)$ 同志の直交性を適用して,

$$K^2=\sum_{l\in L}(\theta_l(H)\cdot\theta_l(H)〔\varphi\|\varphi\|^{-1}-a_l\cdot\xi\|\xi\|^{-1}〕,\ \varphi\|\varphi\|^{-1}-a_l\cdot\xi\|\xi\|^{-1})$$
$$=\sum_{l\in L}(\theta_l(H)〔\varphi\|\varphi\|^{-1}-a_l\cdot\xi\|\xi\|^{-1}〕,\ \theta_l(H)〔\varphi\|\varphi\|^{-1}-a_l\cdot\xi\|\xi\|^{-1}〕)$$
$$=\sum_{l\in L}\|\theta_l(H)〔\varphi\|\varphi\|^{-1}-a_l\cdot\xi\|\xi\|^{-1}〕\|^2$$

と最終的に変形される. ここで,

$$\text{norm}(a_l)\equiv\|\theta_l(H)〔\varphi\|\varphi\|^{-1}-a_l\cdot\xi\|\xi\|^{-1}〕\|^2\geq 0$$

とおけば, K^2は

$$K^2=\sum_{l\in L}〔\text{norm}(a_l)〕^2$$

と表わされる. よって, 各 $l\in L$について

〔norm (a_l)〕^{2}

を可能な限り小になるように, a_lを0か1かに選べばよい.

$$\text{norm}(a_l)|_{a_l=0}=\|\theta_l(H)\varphi\|\varphi\|^{-1}\|^2$$
$$\text{norm}(a_l)|_{a_l=1}=\|\theta_l(H)〔\varphi\|\varphi\|^{-1}-\xi\|\xi\|^{-1}〕\|^2$$

であるから, 求める2値量 $b_l(\varphi)$ は

$$b_l(\varphi)=0\ \{if\ \text{norm}(a_l)|_{a_l=1}\geq\text{norm}(a_l)$$

† $\mathfrak{Y}(\varphi)$ はφの簡約構造モデルと呼ばれ, 同じ2値特徴量の集合を持つパターン φの集合の構造に関する適応モデルとなっていること, つまり, 等式

$X_l(\mathfrak{Y}(\varphi))=X_l(\varphi)$, A $l\in L$

が成り立っている事実が第7章の簡約構造モデル定理より知れる.

$$\begin{cases} \quad\quad \Big|_{a_l=0} \\ 1 \quad if\ \mathrm{norm}\,(a_l)\big|_{a_l=1} < \mathrm{norm}\,(a_l) \\ \quad\quad \Big|_{a_l=0} \end{cases}$$

と与えられる．これを書き直したものが定理6．1である．（証・終）

7．簡約構造モデル

構造化パターン

$\eta = \sum_{l \in L} a_l \cdot \theta_l(H)\,\xi \|\xi\|^{-1}$，ここに，

各 a_l は複素定数　かつ　$\xi \in \mathfrak{D}$

は，たとえば，条件

$\sup_{l \in L} |a_l|^2 < +\infty$

の下で，

$\eta \in \mathfrak{D}$

となる（補助定理3．2のiを参照）．

今，構造化パターン η 内の複素定数 a_l を，パターン $\varphi \in \mathfrak{D}$ から抽出される2値特徴量 $X_l(\varphi)$ とおいた場合，つまり，

$a_l = X_l(\varphi)$，$l \in L$

と選定した場合の構造化パターン η を，φ の簡約構造モデル（*reduced structural model*）といい，$\mathfrak{Y}(\varphi)$ と表わす：

$\mathfrak{Y}(\varphi) \equiv \sum_{l \in L} X_l(\varphi) \cdot \theta_l(H)\,\xi \|\xi\|^{-1}$.

〔定理7．1〕（簡約構造モデル定理）

3条件

$\xi \in \mathfrak{D}$

$\theta_l(H)\,\xi \neq 0$，$\forall\, l \in L$

$0 < e_l \leqq \mathfrak{F}_l(\xi \|\xi\|^{-1})$

の下で，任意の $\varphi \in \mathfrak{D}$ に対し，

（i）$\mathfrak{Y}(\varphi) \in \mathfrak{D}$，すなわち，構造化写像と呼ばれる $\mathfrak{Y}(\cdot)$ は

$\mathfrak{Y}(\cdot) : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$.

（ii）$X_l(\mathfrak{Y}(\varphi)) = X_l(\varphi)$，$\forall\, l \in L$.

（iii）$\mathfrak{Y}(\mathfrak{Y}(\varphi)) = \mathfrak{Y}(\varphi)$.

（iv）基作用素 H と可換な任意のウニタリ作用素 U の下で，$\mathfrak{Y}(U\varphi) = \mathfrak{Y}(\varphi)$.

（証明）　iの成立は，$\sup_{l \in L} |X_l(\varphi)|^2 = 1 < +\infty$ を考慮し，補助定理3．2のiを適用すれば明らか．

iiの成立は，定理4．1から明然．

iiiの成立は，iiから

$\sum_{l \in L} X_l(\mathfrak{Y}(\varphi)) \cdot \theta_l(H)\,\xi \|\xi\|^{-1}$

$= \sum_{l \in L} X_l(\varphi) \cdot \theta_l(H)\,\xi \|\xi\|^{-1}$

を得て，これを書き直したものである．

ivの成立は次のようにして示される．

2．4での特徴抽出関数 $\mathfrak{F}_l(\cdot)$ の不変性より成り立つ2値特徴抽出関数 $X_l(\cdot)$ の不変性

$X_l(U\varphi) = X_l(\varphi)$，A $l \in L$

がいえ，これから，

$\mathfrak{Y}(U\varphi) = \mathfrak{Y}(\varphi)$

が成り立つ．（証・終）

8．パーセプトロン形空間回路からの出力パターン

$w_l(l \in L)$ を複素定数として定義される作用素

$W \equiv W(H) \equiv \sum_{l \in L} w_l \cdot \theta_l(H)$

をパーセプトロン形空間回路（*Perceptronlike spatial circuit*）という．ここに，条件

$\sup_{l \in L} |w_l|^2 < +\infty$

を課すものとする．

〔定理8．1〕（パーセプトロン形空間回路からの出力パターン定理）

構造化パターン

$\eta = \sum_{l \in L} a_l \cdot \theta_l(H)\,\xi \|\xi\|^{-1}$，ここに

各 a_l は複素定数で，$\sup_{l \in L} |a_l|^2 < +\infty$，

しかも　$\xi \in \mathfrak{D}$

が入力されたパーセプトロン形空間回路

$W(H) = \sum_{l \in L} w_l \cdot \theta_l(H)$，ここに

各 w_l は複素定数で，$\sup_{l \in L} |w_l|^2 < +\infty$

からの出力パターン　$W(H)\,\eta$　は

$W(H)\,\eta = \sum_{l \in L} w_l \cdot a_l \cdot \theta_l(H)\,\xi \|\xi\|^{-1}$

と表わされ，これはまた，構造化パターンであり，しかも

$W(H)\,\eta \in \mathfrak{D}$.

（証明）　式（3．1）で示される各 $\theta_l(H)$ 同志の直交性，並びに，式（3．2）で示される各 $\theta_l(H)$ の巾等性を適用すれば，

$W(H)\,\eta$

$=\sum_{l\in L} w_l \cdot \theta_l(H) \cdot \sum_{m\in L} a_m \cdot \theta_m(H)\ \xi$
$\quad \xi\|\ \xi\|^{-1}$
$=\sum_{l\in L} w_l \cdot \sum_{m\in L} a_m \cdot \theta_l(H) \cdot \theta_m(H)$
$\quad \xi\|\ \xi\|^{-1}$
$=\sum_{l\in L} w_l \cdot a_l \cdot \theta_l(H)\ \xi\|\ \xi\|^{-1}$

が得られる．ここで，

$$v \equiv \sup_{l\in L} |\ w_l \cdot a_l\ |^2 < +\infty \qquad (8.\ 1)$$

であれば，補助定理３．２のｉより

$W(H)\ \eta \in \mathfrak{D}$

がいえる．

式（８．１）を示そう．条件から，

$\sup_{l\in L} |\ a_l\ |^2 = |\ a_{l_1}\ |^2 < +\infty \quad (l_1 \in L)$

$\sup_{l\in L} |\ w_l\ |^2 = |\ w_{l_2}\ |^2 < +\infty \quad (l_2 \in L)$

が成り立っている．それ故，

$\exists l_3 \in L,\ v = |\ w_{l_3} \cdot a_{l_3}\ |^2 = |\ w_{l_3}\ |^2 \cdot |\ a_{l_3}\ |^2.$

よって，

$v \leqq [\sup_{k\in L} |\ w_l\ |^2] \cdot [\sup_{l\in L} |\ a_l\ |^2]$
$\quad \leqq |\ w_{l_2}\ |^2 \cdot |\ a_{l_1}\ |^2 < +\infty$

を得て，示された．（証・終）

９．む　す　び

鈴木が提唱した情報の量子論における３種類のパターン

$\eta = \sum_{l\in L} a_l \cdot \theta_l(H)\ \xi\|\ \xi\|^{-1}$
（構造化パターン）

$\mathfrak{Z}(\varphi) = \sum_{l\in L} b_l(\varphi) \cdot \theta_l(H)\ \xi\|\ \xi\|^{-1}$
（最良近似構造化パターン）

$\mathfrak{Y}(\varphi) = \sum_{l\in L} X_l(\varphi) \cdot \theta_l(H)\ \xi\|\ \xi\|^{-1}$
（簡約構造モデル）

につき，これ迄の研究内容を省察しながら，“厳密さの欠けている諸点”を補い，最も基礎となる“構造化パターンから抽出される特徴量の表現”について論究した．原処理対象パターン φ と同じ２値特徴量の組を備えているという意味で，この原パターン φ に等価な虚像が簡約構造モデル　$\mathfrak{Y}(\varphi)$　であるが，これに関連した簡約構造モデル定理(定理７.１)のii[3),5)]がこの表現（定理３．１）から得られる２値特徴量定理（定理４．１）を用いて簡単に証明されたことに注意しておこう．また，構造化パターン η から抽出される特徴量に関する変調度 $\gamma_l(\eta)$，並びにその上限 $d_l(\eta)$，下限 $c_l(\eta)$ を指摘できたことは，外界のパターンそのものから抽出される特徴量と対比すれば，興味深い．

外界のパターン φ は，パターン情報処理システム PIPS（*pattern-information processing system*）の内では，その内的表象 $\mathfrak{Y}(\varphi)$ として捕えられる．$\mathfrak{Y}(\varphi)$ は構造化パターン形式の１つの特別なものであり，φ の最良近似パターン　$\mathfrak{Z}(\varphi)$　に比べ，近似の度合が悪いけれども，その抽出された特徴量 $\mathfrak{F}_l(\varphi)$ を１，０のいずれかに２値化する際のしきい値 e_l に，付録に示す自己組織化過程を介して統計的情報を反映させることが可能という意味においても重要である．

なお，本論文で得られた諸結果は以後提出されるであろう“問題解決形パターン情報処理システム”の構築において基本的に，然も随時暗黙的に使用されるであろうことを指摘しておこう．

文　　献

（１）鈴木昇一：認識工学(上)，柏書房，1975年２月

（２）Donald E. McClure : Image Models in Pattern Theory, Computer Graphics and Image Processing, Vol. 12, No. 4, April 1980, p. 309 - 325

（３）鈴木昇一：測度的不変量検出形認識系の構成理論，電子通信学会論文誌(D)，Vol. 55 - D, No. 8, 1972年８月，p. 531 - 538

（４）鈴木昇一：構造化情報パターンの4性質，電子通信学会論文誌(D)，Vol. J59 - D, No. 12, 1976年12月，p. 937 - 938

（５）鈴木昇一：抽出された特徴による手書き漢字構造の再生，情報処理学会誌，Vol.18, No. 11, 1977年11月，p. 1115 - 1122

（６）鈴木昇一，大槻善樹：線形帰属係数とパターン情報処理，電子通信学会技術研究報告

〔パターン認識と学習〕, Vol. 80, No. 173, PRL 80 - 45, 1980年11月, pp. 33 - 40
（７）鈴木昇一，大槻善樹：パターン情報処理における心理物理の数学的取り扱い，情報研究（文教大学情報学部），Vol. 1, 1980年12月, pp. 18 - 28

付録（２値特徴抽出関数　$X_l(\cdot)=Y(\mathfrak{F}_l(\cdot)-e_l)$　内の刺激しきい値 e_l の自己組織化的決定方法）

特徴抽出関数

$\mathfrak{F}_l(\cdot):\mathfrak{D}\to R^+$

と，刺激しきい値（*stimulus threshold value*）e_l とを用いて，２値特徴抽出関数　$X_l(\cdot)$　は

$X_l(\cdot)=Y(\mathfrak{F}_l(\cdot)-e_l):\mathfrak{D}\to\{0,1\}$

と定義される．e_l は不等式

$0<e_l\leqq\mathfrak{F}_l(\xi\|\xi\|^{-1})$

を満たさなければならないが，このような定数 e_l の決め方については，次のように考えればよいであろう．

不等式（６．３）が成立している事実を勘案し，各パターン $\varphi\epsilon\mathfrak{D}$ について構造モデル

$\mathfrak{Y}(\varphi)=\sum_{l\epsilon L}X_l(\varphi)\cdot\theta_l(H)\,\xi\|\xi\|^{-1}$

を，最良近似構造化パターン

$\mathfrak{Z}(\varphi)=\sum_{l\epsilon L}b_l(\varphi)\cdot\theta_l(H)\,\xi\|\xi\|^{-1}$

に可能な限り，近づければよい。即ち，その代表パターンとして $\omega_j\epsilon\mathfrak{D}$ を持つクラス$\mathfrak{C}_j$に帰属すると判明している訓練パターン $\varphi\epsilon\mathfrak{D}$ に対し

$\|\mathfrak{Y}(\varphi)-\mathfrak{Z}(\omega_j)\|\to\mathrm{MIN}$

となるように，具体的には，出来るだけ

$Y(\mathfrak{F}_l(\varphi)-e_l)=b_l(\omega_j),\ l\epsilon L$

が成立するように，刺激しきい値 e_l の組

$\vec{e}=\{e_l\,;\,l\epsilon L\}$

を決定すればよいだろう．

クラス $\mathfrak{C}_j$ に帰属することが判明しているパターン（訓練パターン）$\varphi\epsilon\mathfrak{D}$ の有限集合 Φ_j を導入しよう．Φ_j 同志は互いに素であること，つまり，性質

$\Phi_j\frown\Phi_k=\phi$（空集合）（$j\neq k$）

を満たしていなければならぬが，訓練パターン集合 Φ_j の和集合

$\Phi=\bigcup_{j\epsilon J}\Phi_j$

に対しては

$\#\Phi_j/\#\Phi=p_j$

が満足されるように選んでおく．ここに，$\#A$ は集合Aに含まれる要素の総数であり，p_jはクラス $\mathfrak{C}_j$ の生起確率である．$\#J=J'$として，集合 J の要素を並べて

$J=\{1,2,\cdots,J'\}$

としておく．また，$b_l(\omega_j)$（$l\epsilon L,\ j\epsilon J$）を求めておき，改ためて

$b_{l,j}\equiv b_l(\omega_j)$

と表記しておこう．

全訓練パターン集合 Φ を

$\Phi=\{\varphi_\gamma\,;\,\gamma\epsilon R\}$
$\quad=\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{R'}\},\ R=\{1,2,\cdots,R'\}$

とおき，更に，各 Φ_j を

$\Phi_j=\{\varphi_\gamma\,;\,\gamma\epsilon R_j\}$

とおく．Φ_j の中には，クラス $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン ω_j が含まれているとしよう．

Φ の各要素を繰り返し並べて得られる訓練パターンの系列

$\Phi,\Phi,\Phi,\cdots,\Phi,\cdots$

つまり，

$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{R'},\varphi_1,\varphi_2,\cdots$

を

$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t,\cdots$

と表わす．任意の $t\,(\geqq1)$ に対し，

$\eta_t=\varphi_\gamma$

なる添字　$\gamma\epsilon R$　が唯一つ存在するが，このγを

$\gamma_t\epsilon R$

で表わす．η_t すなわち φ_{γ_t} の帰属するクラスは判明しているものとして，これを

$\mathfrak{C}_{j_t}\epsilon\mathfrak{C}$

と表わす．

以後，しきい値　$\vec{e}=\{e_l\,;\,l\epsilon L\}$　は２変数 m, t の関数とみなして

$\vec{e}(m,t)=\{e_l(m,t)\,;\,l\epsilon L\}$

と表わす．ここに，変数 m は M'を十分大きく選び，

$m\epsilon M=\{1,2,\cdots,M'\}$

としよう．

時刻 t での訓練パターン $\eta_t\epsilon\mathfrak{D}$ から抽出される特徴量　$\mathfrak{F}_l(\eta_t)$　は判明しているものとし，$\mathfrak{F}_l(\eta_t)$ を

$\mathfrak{F}_l'(\eta_t)=\mathfrak{F}_l(\eta_t)+[(-2)\times b_{l,j_t}+1]\times\Delta_l(m)$

$$= \begin{cases} \mathfrak{F}_l(\eta_t)+\Delta_l(m) & if\ b_{l,j_t}=0 \\ \mathfrak{F}_l(\eta_t)-\Delta_l(m) & if\ b_{l,j_t}=1 \end{cases}$$

へと変換しておく．これは，得られるしきい値 $\vec{e}=\{e_l\ ;l\in L\}$ に $\pm\Delta_l(m)$ だけの変動を許すようにするためである．また，同一クラス$\mathfrak{C}_j$内で訓練パターンから抽出される第 $l\in L$番目の特徴量に関する全変動（*total variation of features within the class*）

$$\mathrm{var}(j,\ l)\equiv \mathrm{MAX}_{\gamma\in R_j}\mathfrak{F}_l(\varphi_\gamma)-\mathrm{MIN}_{\gamma\in R_j}\mathfrak{F}_l(\varphi_\gamma)\quad(j\in J,\ l\in L)$$

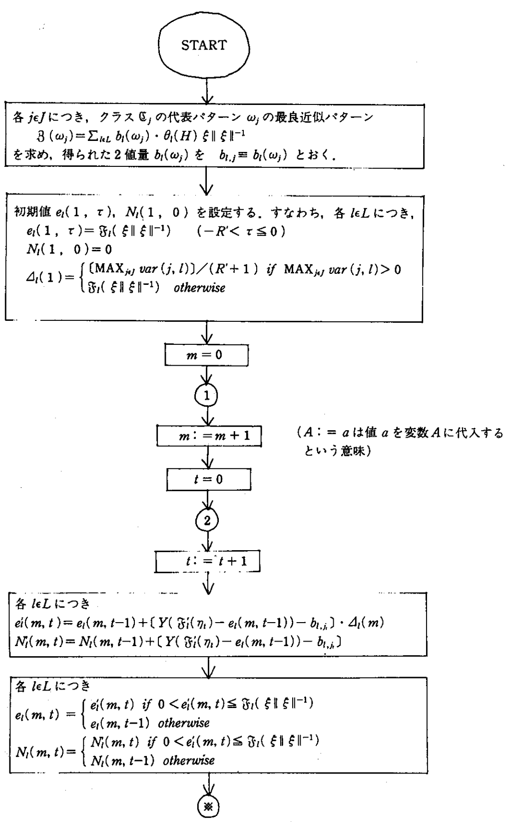
を導入しておく．

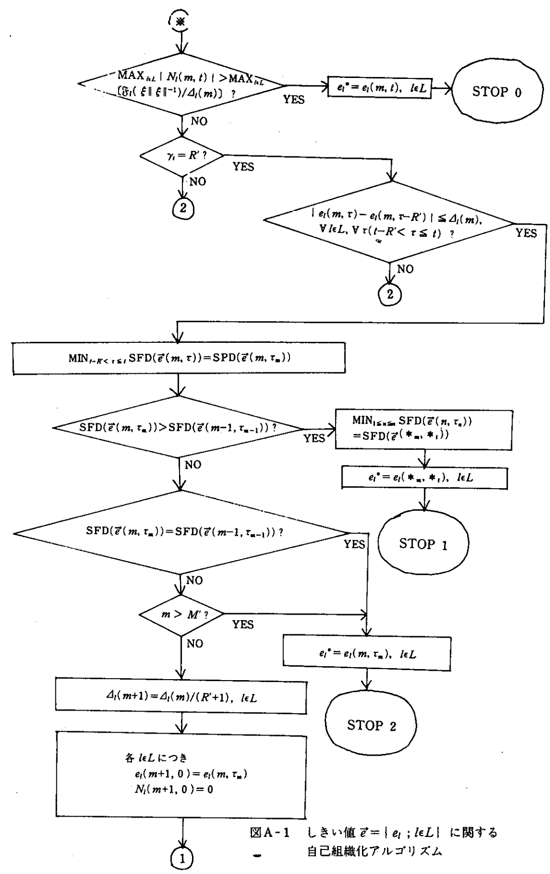
しきい値 $\vec{e}=\{e_l\ ;l\in L\}$ の下での，簡約構造モデル $\mathfrak{Y}(\varphi_\gamma)$，最良近似構造化パターン $\mathfrak{Z}(\varphi_\gamma)$ の2値特徴量の組の間の違い，特徴間距離の総和（*sum total of binary feature distances*）を

$$\mathrm{SFD}(\vec{e})=\sum_{\gamma\in R}\sum_{l\in L}\left|\ Y(\mathfrak{F}'_l(\varphi_\gamma)-e_l)-b_{l,j_\gamma}\right|$$

と導入しておく．

$\vec{e}$の自己組織化アルゴリズムを図A-1に示す．





図A-1　しきい値 $\vec{e}=\{e_l\ ;l\in L\}$ に関する自己組織化アルゴリズム

このアルゴリズムの完全収束条件とは

$$\mathrm{SFD}(\vec{e}(m,\ t))\rightarrow 0$$
$$(m\rightarrow m'\ \text{かつ}\ t\rightarrow t')$$

であり，この条件が成り立つとき，求めるしきい値 $\vec{e}^*=\{e_l^*\ ;l\in L\}$ は

$$e_l^*=e_l(m,\ t),\ l\in L$$

と得られると考えればよい．

図A-1に示される *flow chart* について説明を加えよう．

（i） STOPO，STOP1 の場合は打ち切り．

（ii） $m\leq M'$ で，STOP2に来た場合は，

完全収束条件で停止する場合を含んでいる．

(iii)　$m \leqq M'$　で，然も
$SFD(\vec{e}(1,\ \tau_1)) > SFD(\vec{e}(2,\ \tau_2)) > \cdots > SFD(\vec{e}(m-1,\ \tau_{m-1})) = SFD(\vec{e}(m,\ \tau_m))$
の場合，STOP 2 に至り，$\vec{e}^* = \vec{e}(m,\ \tau_m)$
と求まる．このとき，
$\mathrm{MAX}_{j \in J}\ var(j,\ l) > 0$　であれば，
$e_l^* = \mathfrak{F}_l(\xi \| \xi \|^{-1}) + \sum_{k=1}^{m} N_l(k,\ \tau_k) \cdot \Delta_l(k)$
と求まる．

なお，この flow chart における
$e_l(m,\ t-1) \rightarrow e_l'(m,\ t) \rightarrow e_l(m,\ t)$
という過程の持つ次の性質にも注意しておこう．

(1)　$Y(\mathfrak{F}_l'(\eta_t) - e_l(m,\ t-1)) - b_{l,j_t} = 0 - 1 = -1$　の場合

この場合は，$e_l(m,\ t-1)$ は減少することが望ましい．事実，flow chart によれば，
$e_l'(m,\ t) = e_l(m,\ t\text{-}1) - \Delta_l(m)$
と変更されている．

(2)　$Y(\mathfrak{F}_l'(\eta_t) - e_l(m, t-1)) - b_{l,j_t} = 0 - 0 = 1 - 1 = 0$　の場合

この場合は，$e_l(m,\ t-1)$ は変らないことが望まれる．事実，chart によれば，
$e_l'(m, t) = e_l(m, t-1)$
となっている．

(3)　$Y(\mathfrak{F}_l'(\eta_t) - e_l(m, t-1)) - b_{l,j_t} = 1 - 0 = 1$　の場合

この場合，$e_l(m,\ t-1)$ は増加することが望ましい．事実，chart によれば，
$e_l'(m,\ t) = e_l(m, t-1) + \Delta_l(m)$
と変更されている．

以上の (1)，(2)，(3) から主張できることは次の通りである．
$e_l(m, t-1) \rightarrow e_l'(m, t) \rightarrow e_l(m, t)$
という変換過程では，時刻 t での訓練パターン η_t に関し，不等式
$| Y(\mathfrak{F}_l'(\eta_t) - e_l'(m, t)) - b_{l,j_t} |$
$\leqq | Y(\mathfrak{F}_l'(\eta_t) - e_l(m, t)) - b_{l,j_t} |$
$\leqq | Y(\mathfrak{F}_l'(\eta_t) - e_l(m, t-1)) - b_{l,j_t} |,\ l \in L$
が成立し，時刻 t での訓練パターン η_t に関し，しきい値　$e_l'(m,\ t)$，$e_l(m,\ t)$，$e_l(m, t-1)$ の順に改良されている．

情報研究第２号に掲載された「パターン情報処理における構造化パターン，最良近似構造化パターンと簡約構造モデル」における誤りを下記正誤表によって訂正いたします．

正　誤　表

	誤	正
14頁右11行目	(LIST　Pro……	(LISt　Pro……
15頁左38行目	でなければならめ	でなければならない
16頁左21行目	$\forall a \in Z \cdots\cdots$	$a \in Z \cdots\cdots$
21頁左30行目	$Aa \in Z$	$\forall a \in Z$
22頁左16行目	$Y \equiv [\sum_{m \in L} \cdots\cdots$	$\equiv [\sum_{m \in L} \cdots\cdots$
23頁右27行目	$\eta \in D$	$\eta \in \mathfrak{D}$
23頁右脚注	$f(u) = (1 + e^{-ku}$	$f(u) = (1 + e^{-ku})^{-1}$