能力の異なる複数serverの待ち行列システムの解析
(第2報，有限待ち行列における平均系内人数の最小化について)

竹　田　　　仁・岩　瀬　雅　治

The Analysis of Heterogeneous Server Queues
(Part II Minimization of the Expected Number in the Finite Queue)

Hitoshi Takeda・Masaharu Iwase

有限待ち行列において，ポアソン到着，指数分布サービス，能力の異なる複数 server の待ち行列システムについて，定常状態におけるシステム内の状態確率を求めるアルゴリズムを示す。また，これをもとにして，server 数2及び3の場合 server の能力の和を一定にしたとき，平均系内人数を最小にする server の能力配分について検討する。

On the heterogeneous server finite queing system with exponential interarrival time and exponential service time, the algorithm to find stationary probability is shown.

From the above result, the problem of searching for the ability ratio of servers to minimize the expected number in the system is studied.
Key word : Systems Engineering

§1．序　　論

ある待ち行列システムに別の server を加えてシステムの効率を良くすることがある。加える server の能力が0でない限り平均待ち時間は減少するが，加えた server の能力によっては平均系内滞留時間，平均系内人数は減少するとは言えない。能力の異なる複数 server の待ち行列システムを扱ったものとして山城［1］がある。

これは，server 数1のポアソン到着，指数分布サービスの待ち行列システムに1個の補助 server を付け加えたとき，その付け加えた補助 server の能力によってシステムの平均待ち時間，平均系内滞留時間がどのように変化するかを解析している。

本稿では，ポアソン到着，指数分布サービスの能力の異なる server 数 c の有限待ち行列システムについてその定常状態における状態確率を計算するアルゴリズムを示す。そして，その応用として能力の異なる server 数2及び3の場合について，server の能力和を一定としたとき平均系内人数を最小にする server の能力分割の問題を考察する。

§2. M/M (μ_1, μ_2, …, μ_c)/c (n) における方程式の導出

記　号

λ：客の平均到着率

μ_1：第 i server の平均 service 率

$\theta_1 = \frac{\mu_i}{\lambda}$

$\Theta = \sum_{i=1}^{c} \theta_i$

$\rho = 1 / \Theta$

P_i　：系内人数が i 人である状態確率。

$(j1,j2,\cdots,ji)$　：系内人数が i 人で第 j_1，第 j_2，…，第 j_i server がサービス中である状態を表す。

$P_{i(j1,j2,\cdots,ji)}$　：系内人数が i 人で第 j_1，第 j_2，…，第 j_i server がサービス中である状態確率。

$S(i_1, i_2, \cdots i_k)$　：系内人数が（k−1）人で，一人の客が到着したとき状態 $(i_1, i_2, \cdots i_k)$ に移行するような状態全体の集合。

$T(i_1, i_2, \cdots i_k) = \{(j_1, j_2, \cdots, j_{k+1}) \mid 1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots < j_{k+1} \leqq n, \{j_1, j_2, \cdots, j_{k+1}\}\{i_1, i_2, \cdots, j_x\}\}$ $T(i_1, i_2, \cdots i_k)$ は，第 i_1，…，第 i_k server とそれ以外のもう一人の server が service 中の状態全体の集合。

$R(k) = \{(i_1, i_2, \cdots, i_x) \mid 1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqq n\}$

上の定義より，$P_k = \sum_{j1,j2,\cdots,jk \in R(k)} P_{k(j1,j2,\cdots,jk)}$　$(1 \leqq k \leqq c)$ が成り立つ。

各 server の平均サービス率 μ_1 は，server の番号が大きくなる程，等しいか高くなるものとする $(\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \cdots \leqq \mu_c)$。

到着した客は，先着順サービスを受ける。ただし複数の server が空きの状態のとき到着した客は空きの server のうち能力が最も高い server の service を受けるものとする。

ただし，有限待ちのため系内人数が n 人のとき到着した客は，系内に入ることはできないものとする。

時刻 t と t+d t の状態遷移を考え，定常性より P_0 の t における分布と t +d t での分布が一致することより以下の式を得る。

$$\sum_{i=1}^{c} P_{1(i)} \mu_1 = P_0 \lambda$$

両辺を λ で割って（2．1）が得られる。

$$\sum_{i=1}^{c} P_{1(i)} \theta_1 = P_0 \qquad \cdots\cdots (2.1)$$

第 J server 一人のみが service 中である状態確率 $P_{1(j)}$ の定常性より

$$-P_{1(j)}(\lambda + \mu_j) + \sum_{(t1,t2) \in T(j)} P_{2(t1,t2)} \mu_{vjt} = 0 \qquad (1 \leqq j \leqq c-1)$$

ただし $\{v_{jt}\} = \{t_1,\ t_2\} - \{j\}$。

両辺を λ で割って（2．2）が得られる。

$$-P_{1(j)}(1 + \theta_j) + \sum_{(t1,t2) \in T(j)} P_{2(t1,t2)} \theta_{vjt} = 0 \qquad (1 \leqq j \leqq c-1) \qquad \cdots\cdots (2.2)$$

最も能力の高い第 c server 一人が service 中の状態確率 $P_{1(c)}$ の定常性より

$$P_0\lambda - P_{1(c)}(\lambda+\mu_c) + \sum_{(t1,t2)\in T(c)} P_{2(t1,t2)}\mu_{vct} = 0$$

ただし $\{v_{ct}\}=\{t_1, t_2\}-\{C\}$。
両辺を λ で割って（２．３）が得られる。

$$P_0 - P_{1(n)}(1+\theta_n) + \sum_{(t1,t2)\in T(c)} P_{2(t1,t2)}\theta_{vct} = 0 \qquad \cdots\cdots (2.3)$$

同様にして $P_{k(i1,i2,\cdots,ik)}$（$2\leqq k\leqq c-1$, $1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_k\leqq c$）の定常性より

$$\sum_{(j1,j2,\cdots,jk-1)\in S(i_1, i_2, \cdots, i_k)} P_{k-1(j1,j2,\cdots,jk-1)}\lambda - P_{k(i1,i2,\cdots,ik)}(\lambda+\mu_{i1}+\cdots+\mu_{ik}) + \sum_{(j1,j2,\cdots,jk+1)\in T(i_1, i_2, \cdots, i_k)} P_{k+1(j1,j2,\cdots,jk+1}\mu_{vij} = 0$$

ただし$\{v_{ij}\}=\{j_1, j_2, \cdots, j_{k+1}\}-\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$。
両辺を λ で割って，$2\leqq k\leqq c-1$, $1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_k\leqq c$ に対して（２．４）が成り立つ。

$$\sum_{(j1,j2,\cdots,jk-1)\in S(i_1, i_2, \cdots, i_k)} P_{k-1(j1,j2,\cdots,jk-1)} - P_{k(i1,i2,\cdots,ik)}(1+\theta_{i1}+\cdots+\theta_{ik}) + \sum_{(j1,j2,\cdots,jk+1)\in T(i_1, i_2, \cdots, i_k)} P_{k+1(j1,j2,\cdots,jk+1}\theta_{vij} = 0 \qquad \cdots\cdots (2.4)$$

$P_k(C\leqq k\leqq n-1)$ の定常性より

$$P_{k-1} - P_k(1+\Theta) + P_{k+1}\Theta = 0 \qquad (c\leqq k\leqq n-1) \qquad \cdots\cdots (2.5)$$

$P_k(1\leqq k\leqq c-1)$ の定常性より，$1\leqq k\leqq c-1$ に対して（２．６）が成り立つ。

$$P_{k-1} - \sum_{(i1,i2,\cdots,ik)\in R(k)} P_{k(i1,i2,\cdots,ik)}(1+\theta_{i1}+\cdots+\theta_{ik}) + \sum_{(j1,j2,\cdots,jk)\in R(k+1)} P_{k+1(j1,j2,\cdots,jk+1)}(\theta_{j1}+\cdots+\theta_{jk+1}) = 0 \qquad \cdots\cdots (2.6)$$

§3．定常確率の求め方

（２．１）、（２．６）より $P_c=P_{c-1}/\Theta$
上式と（２．５）より
$P_{k+1}=P_k/\Theta \qquad (c-1\leqq k\leqq n-1) \qquad \cdots\cdots (3.1)$
（２．１），（２．２），（２．３），（２．４）を $P_0=1$ として
$P_{k(i1,\cdots,ik)}(1\leqq k\leqq n-1$, $1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_k\leqq n)$, P_n を未知数とする
2^{n-1}個の式よりなる連立一次方程式として解き，解を $Y_{k(i1,\cdots,ik)}(1\leqq k\leqq c$, $1\leqq i_1<i_2<\cdots\cdots\cdots<i_k\leqq c)$ とする。

$g_k=\sum_{(i1,\cdots,ik)\in R(k)} Y_{k(i1,\cdots,ik)}$ とすると，
$P_k=g_kP_0(1\leqq k\leqq c-1)$, $\sum_{k=0}^{n} P_k=1$,（３．１）より

$$P_0(1+\sum_{k=1}^{c-2} g_k) + P_{c-1}(\sum_{k=0}^{n-c+1} / \Theta^k) = 1$$

$$P_0(1+\sum_{k=1}^{c-2} g_k) + g_{c-1}(\Theta^{n-c+2}-1)/(\Theta^{n-c+1}(\Theta-1)) = 1$$

$$P_0 = 1/(1+\sum_{k=1}^{c-2} g_k) + g_{n-1}(\theta^{n-c+2}-1)/(\Theta^{n-c+1}(\Theta-1)) = 1 \qquad \cdots\cdots (3.2)$$

（３．２）より P_0 を求め，$P_{k(i1,\cdots,ik)}=P_0Y_{k(i1,\cdots,ik)}$ より $P_{k(i1,\cdots,ik)}$ を求める。

さらに $P_k=g_{c-1}P_0/\Theta^{k-c+1}$ $(c-1\leqq k\leqq n)$ より $P_k(c\leqq k\leqq n)$ を求める。

§4. M/M $(\mu_1,\ \mu_1)$/2 (n)

到着した客は，先着順に空いたserverのサービスを受ける。第1，第2 serverが共に空いているとき到着した客は，平均サービス率がより大きい第2 serverのサービスを受け，どちらか一方のみが空いているとき到着した客は，空いているserverのサービスを受けるものとする（図1)。ただし，系内人数がn人のとき到着した客は，系内に入ることはできないものとする。

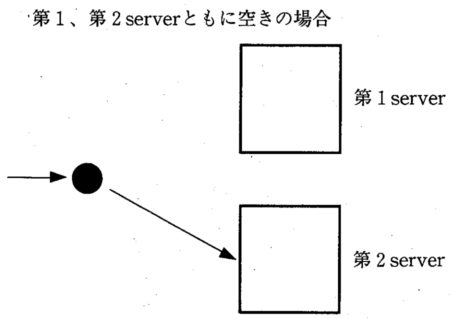

図1. M/M(μ_1,μ_2)/2における客の到着

定常確率を求め，これよりserverの能力和が一定の場合平均系内滞留人数Lを最小にするserverの能力配分の問題について考察する。

（2.1）より

$$\theta_1P_{1(1)}+\theta_2P_{1(2)}=P_0 \quad \cdots\cdots (4.1)$$

同様にして（2.2），（2.3），より（4.2），（4.3）が得られる。

$$-(1+\theta_1)P_{1(1)}+\theta_2P_2=0 \quad \cdots\cdots (4.2)$$

$$-(1+\theta_2)P_{1(2)}+\theta_1P_2=-P_0 \quad \cdots\cdots (4.3)$$

（2.5）より（4.4）が得られる。

$$P_{k-1}-(1+\Theta)P_k+\Theta P_{k+1}=0(2\leqq k\leqq n-1) \quad \cdots\cdots (4.4)$$

確率の和が1になることより（4.5）が成り立つ。

$$\sum_{i=0}^{n}P_i=1 \quad \cdots\cdots (4.5)$$

平均系内滞留人数Lは（4.6）で表される。

$$L=\sum_{i=1}^{n}iP_i \quad \cdots\cdots (4.6)$$

（4.1）～（4.5）より（4.7）～（4.10）を得る。

$$P_0=\frac{1}{1+f(\Theta^n-1)/(\Theta^{n-1}(\Theta-1))} \quad \cdots\cdots (4.7)$$

$$P_{1(1)}=\frac{P_0}{\theta_1(2+\Theta)} \qquad \cdots\cdots (4.8)$$

$$P_{1(2)}=\frac{P_0(1+\Theta)}{\theta_2(2+\Theta)} \qquad \cdots\cdots (4.9)$$

$$P_{k+1}=P_k/\Theta \quad (1\leqq k\leqq n-1) \qquad \cdots\cdots (4.10)$$

（4．6）～（4．10）より，平均系内滞留人数Lは（4．11）となる。

$$L=\frac{f}{(1+f(\Theta^n-1)/(\Theta^{n-1}(\Theta-1)))}\cdot\frac{\Theta^2(\Theta^{n+1}-(n+1)\Theta+n)}{(\Theta-1)^2\Theta^{n+1}} \qquad \cdots\cdots (4.11)$$

ここで $f=\dfrac{\Theta(1+\theta_1)}{\theta_1\theta_2(2+\Theta)}$

（4．11）より固定した Θ の値に対し，Lを最小にするserverの能力配分を求める。
1変数関数の極小問題を解くことになり

$\theta_1=-1+\sqrt{\Theta+1}$，$\theta_2=\Theta+1-\sqrt{\Theta+1}$

のときLは最小となり，最小値は式（4．11）において，$f=\Theta/((\sqrt{\Theta+1}-1)^2(2+\Theta))$ としたときの値である。
このように各 Θ に対し，Lを最小にする θ_1 と θ_2 の値はnの値に無関係に Θ によって定まる。
表1～表4は各々の ρ の値に対し，nを2，3，4，10としたときのM／M／2(n)におけるLの値と，M／M(μ_1，μ_2)／2(n)においてLを最小にする能力比と，その時のLの値を列記したものである。また，比較のため，表5に系内人数に制限を設けない場合のLの値を記した。

表1　The value of L for M/M/2(2) and M/M(μ_1, μ_1)/2(2)

ρ	L M/M/2(2)	L M/M(μ_1,μ_1)/2(2)	optimum ability ratio	
0.05	0.099548	0.072520	0.179	0.821
0.10	0.196721	0.159149	0.232	0.768
0.15	0.289963	0.249157	0.265	0.735
0.20	0.378378	0.338048	0.290	0.710
0.25	0.461538	0.423514	0.309	0.691
0.30	0.539326	0.504413	0.324	0.676
0.35	0.611825	0.580269	0.337	0.663
0.40	0.679245	0.650991	0.348	0.652
0.45	0.741866	0.716707	0.358	0.642
0.50	0.800000	0.777666	0.366	0.634
0.55	0.853974	0.834175	0.373	0.627
0.60	0.904110	0.886562	0.380	0.620
0.65	0.950715	0.935154	0.386	0.614
0.70	0.994083	0.980267	0.391	0.609
0.75	1.034483	1.022199	0.396	0.604
0.80	1.072165	1.061224	0.400	0.600
0.85	1.107358	1.097595	0.404	0.596
0.90	1.140271	1.131542	0.408	0.592
0.95	1.171095	1.163273	0.411	0.589

表2　The value of L for M/M/2(3) and M/M(μ_1, μ_1)/2(3)

ρ	L M/M/2(3)	L M/M(μ_1,μ_1)/2(3)	optimum ability ratio	
0.05	0.100204	0.073002	0.179	0.821
0.10	0.201309	0.162912	0.232	0.768
0.15	0.303495	0.260969	0.265	0.735
0.20	0.406417	0.363512	0.290	0.710
0.25	0.509434	0.468191	0.309	0.691
0.30	0.611778	0.573268	0.324	0.676
0.35	0.712668	0.677386	0.337	0.663
0.40	0.811388	0.779483	0.348	0.652
0.45	0.907327	0.878741	0.358	0.642
0.50	1.000000	0.974556	0.366	0.634
0.55	1.089046	1.066506	0.373	0.627
0.60	1.174224	1.154321	0.380	0.620
0.65	1.255397	1.237861	0.386	0.614
0.70	1.332514	1.317083	0.391	0.609
0.75	1.405594	1.392025	0.396	0.604
0.80	1.474715	1.462783	0.400	0.600
0.85	1.539990	1.529495	0.404	0.596
0.90	1.601565	1.592328	0.408	0.592
0.95	1.659605	1.651467	0.411	0.589

表3　The value of L for M/M/2(4) and M/M (μ_1, μ_1)/2(4)

ρ	L M/M/2(4)	L M/M (μ_1,μ_1)/2(4)	optimum ability ratio	
0.05	0.100248	0.073034	0.179	0.821
0.10	0.201931	0.163420	0.232	0.768
0.15	0.306262	0.263375	0.265	0.735
0.20	0.414088	0.370456	0.290	0.710
0.25	0.525822	0.483436	0.309	0.691
0.30	0.641444	0.601398	0.324	0.676
0.35	0.760544	0.723413	0.337	0.663
0.40	0.882394	0.848440	0.348	0.652
0.45	1.006047	0.975332	0.358	0.642
0.50	1.130435	1.102892	0.366	0.634
0.55	1.254454	1.229937	0.373	0.627
0.60	1.377049	1.355357	0.380	0.620
0.65	1.497262	1.478166	0.386	0.614
0.70	1.614271	1.597532	0.391	0.609
0.75	1.727412	1.712787	0.396	0.604
0.80	1.836176	1.823431	0.400	0.600
0.85	1.940204	1.929121	0.404	0.596
0.90	2.039276	2.029650	0.408	0.592
0.95	2.133284	2.124932	0.411	0.589

表4　The value of L for M/M/2(10) and M/M(μ_1, μ_1)/2(10)

ρ	L M/M/2(4)	L M/M (μ_1,μ_1)/2(4)	optimum ability ratio	
0.05	0.100251	0.073036	0.179	0.821
0.10	0.202020	0.163493	0.232	0.768
0.15	0.306905	0.263933	0.265	0.735
0.20	0.416666	0.372784	0.290	0.710
0.25	0.533329	0.490400	0.309	0.691
0.30	0.659311	0.618294	0.324	0.676
0.35	0.797567	0.758917	0.337	0.663
0.40	0.951739	0.915630	0.348	0.652
0.45	1.126267	1.092723	0.358	0.642
0.50	1.326384	1.295363	0.366	0.634
0.55	1.557891	1.529334	0.373	0.627
0.60	1.826597	1.800463	0.380	0.620
0.65	2.137378	2.113662	0.386	0.614
0.70	2.492921	2.471649	0.391	0.609
0.75	2.892423	2.873633	0.396	0.604
0.80	3.330681	3.314396	0.400	0.600
0.85	3.798043	3.784232	0.404	0.596
0.90	4.281411	4.269967	0.408	0.592
0.95	4.766119	4.756857	0.411	0.589

表5　The value of L for M/M/2 and M/M(μ_1, μ_1)/2

ρ	L M/M/2	L M/M (μ_1, μ_1)/2	optimum ability ratio	
0.05	0.100251	0.073036	0.179	0.821
0.10	0.202020	0.163493	0.232	0.768
0.15	0.306905	0.263933	0.265	0.735
0.20	0.416667	0.372785	0.290	0.710
0.25	0.533333	0.490404	0.309	0.691
0.30	0.659341	0.618322	0.324	0.676
0.35	0.797721	0.759063	0.337	0.663
0.40	0.952381	0.916249	0.348	0.652
0.45	1.128527	1.094923	0.358	0.642
0.50	1.333333	1.302169	0.366	0.634
0.55	1.577061	1.548203	0.373	0.627
0.60	1.875000	1.848294	0.380	0.620
0.65	2.251082	2.226367	0.386	0.614
0.70	2.745098	2.722214	0.391	0.609
0.75	3.428571	3.407368	0.396	0.604
0.80	4.444444	4.424779	0.400	0.600
0.85	6.126126	6.107867	0.404	0.596
0.90	9.473684	9.456712	0.408	0.592
0.95	19.487179	19.471384	0.411	0.589

§5. M／M (μ_1, μ_1, μ_3) ／3 (n)

到着した客は，先着順に空いた server のサービスを受ける。3人の server が共に空いているとき到着した客は，平均サービス率が最大の第3 server のサービスを受ける。2人の server が

空いているとき到着した客は，平均サービス率がより大きい（番号のより大きい）server のサービスを受ける（図２）。

ただし，系内人数が n 人のとき到着した客は，系内に入ることはできないものとする。

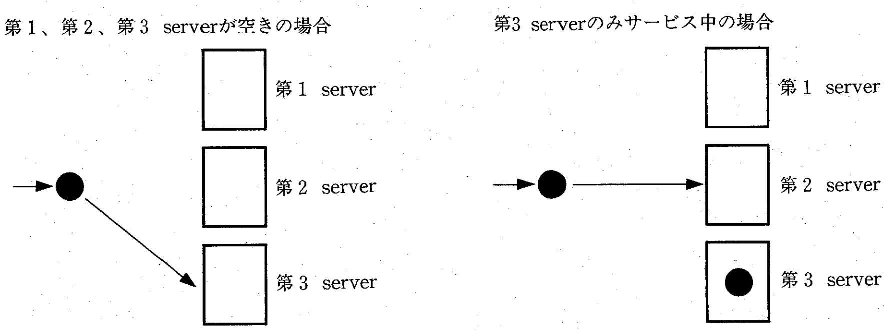

図２ $M/M(\mu_1, \mu_2, \mu_3)/3$ における客の到着

server 数が２の場合と同様に定常確率を求め，これを利用し server の能力和が一定の場合，平均系内人数 L を最小にする server の能力配分の問題について考察する。

（２．１）より（５．１）が得られる。

$$\theta_1 P_{1(1)} + \theta_2 P_{1(2)} + \theta_3 P_{1(3)} = P_0 \quad \cdots\cdots (5.1)$$

（２．２）より次の（５．２），（５．３）が得られる。

$$-(1+\theta_1)P_{1(1)} + \theta_2 P_{2(1,2)} + \theta_3 P_{1(1,3)} = 0 \quad \cdots\cdots (5.2)$$

$$-(1+\theta_2)P_{1(2)} + \theta_1 P_{2(1,2)} + \theta_3 P_{1(2,3)} = 0 \quad \cdots\cdots (5.3)$$

（２．３）より（５．４）が得られる。

$$-(1+\theta_3)P_{1(3)} + \theta_1 P_{2(1,3)} + \theta_2 P_{1(2,3)} = -P_0 \quad \cdots\cdots (5.4)$$

$S(1, 2)$ は空集合，$S(1, 3) = \{(1)\}$，$S(2, 3) = \{(2), (3)\}$ であり，（２．４）より（５．４）～（５．７）が得られる。

$$-(1+\theta_1+\theta_2)P_{2(1,2)} + \theta_3 P_3 = 0 \quad \cdots\cdots (5.5)$$

$$P_{1(1)} - (1+\theta_1+\theta_3)P_{2(1,3)} + \theta_2 P_3 = 0 \quad \cdots\cdots (5.6)$$

$$P_{1(2)} + P_{1(3)} - (1+\theta_1+\theta_3)P_{2(2,3)} + \theta_1 P_3 = 0 \quad \cdots\cdots (5.7)$$

（２．５）より（５．８）が得られる。

$$P_{k-1} - (1+\Theta)P_k + \Theta P_{k+1} = 0 \quad (3 \leqq k \leqq n-1) \quad \cdots\cdots (5.8)$$

確率の和が１になることより（５．９）が成り立つ。

$$\sum_{i=0}^{n} P_i = 1 \quad \cdots\cdots (5.9)$$

平均系内人数 L は（５．10）で表される。

$$L=\sum_{i=1}^{n} i P_i \qquad \cdots\cdots (5.10)$$

(5.1)～(5.10) より，数値計算によってLを求めることができる。表6，表7，表8はn=3，4，10について各々の ρ の値に対しM／M／3(n) におけるLの値と，M／M(μ_1, μ_2, μ_3)／3(n) において $\Theta=1/\rho$ とし，$\Theta=\theta_1+\theta_2+\theta_3$ を満たしながら θ_1, θ_2, θ_3 を0.05刻みで変化させたときLを最小にするserverの能力比と，その時のLの値を列記したものである。

また，比較のため，表9に系内人数に制限を設けない場合のLの値を記した。なおこれらの連立一次方程式の計算は，GAUSSの消去法で行った。

表6 The value of L for M/M/3(3) and M/M(μ_1, μ_1, μ_3)/3(3)

ρ	L M/M/3(3)	L M/M(μ1,μ1,μ3)/3(3)	optimum ability ratio		
0.05	0.149927	0.080180	0.040	0.175	0.785
0.10	0.299000	0.191770	0.075	0.220	0.705
0.15	0.445637	0.321846	0.100	0.245	0.655
0.20	0.588106	0.461327	0.120	0.265	0.615
0.25	0.724907	0.603269	0.140	0.275	0.585
0.30	0.854935	0.742738	0.155	0.285	0.560
0.35	0.977498	0.876564	0.165	0.290	0.545
0.40	1.092269	1.002963	0.180	0.295	0.525
0.45	1.199213	1.120989	0.185	0.300	0.515
0.50	1.298507	1.230414	0.195	0.305	0.500
0.55	1.390473	1.331451	0.205	0.305	0.490
0.60	1.475519	1.424420	0.210	0.310	0.480
0.65	1.554106	1.509915	0.215	0.315	0.470
0.70	1.626707	1.588449	0.220	0.315	0.465
0.75	1.693795	1.660629	0.230	0.315	0.455
0.80	1.755825	1.727029	0.235	0.315	0.450
0.85	1.813228	1.788152	0.235	0.320	0.445
0.90	1.866406	1.844519	0.240	0.320	0.440
0.95	1.915730	1.896584	0.245	0.320	0.435

表7 The value of L for M/M/3(4) and M/M(μ_1, μ_1, μ_3)/3(4)

ρ	L M/M/3(4)	L M/M(μ1,μ1,μ3)/3(4)	optimum ability ratio		
0.05	0.150021	0.080222	0.040	0.175	0.785
0.10	0.300233	0.192480	0.075	0.220	0.705
0.15	0.450799	0.325352	0.100	0.245	0.655
0.20	0.601580	0.471559	0.120	0.265	0.615
0.25	0.752074	0.625583	0.140	0.275	0.585
0.30	0.901480	0.783126	0.155	0.285	0.560
0.35	1.048820	0.940940	0.165	0.295	0.540
0.40	1.193067	1.096529	0.175	0.300	0.525
0.45	1.333250	1.247985	0.185	0.305	0.510
0.50	1.468531	1.393918	0.195	0.305	0.500
0.55	1.598246	1.533419	0.205	0.310	0.485
0.60	1.721917	1.665869	0.210	0.310	0.480
0.65	1.839249	1.790952	0.215	0.315	0.470
0.70	1.950107	1.908586	0.225	0.315	0.460
0.75	2.054495	2.018834	0.230	0.315	0.455
0.80	2.152524	2.121898	0.230	0.320	0.450
0.85	2.244390	2.218076	0.235	0.320	0.445
0.90	2.330344	2.307721	0.240	0.320	0.440
0.95	2.410681	2.391212	0.245	0.320	0.435

表8 The value of L for M/M/3(10) and M/M(μ_1, μ_1, μ_3)/3(10)

ρ	L M/M/3(10)	L M/M(μ1,μ1,μ3)/3(10)	optimum ability ratio		
0.05	0.150027	0.080225	0.040	0.175	0.785
0.10	0.300412	0.192582	0.075	0.220	0.705
0.15	0.452009	0.326167	0.100	0.245	0.655
0.20	0.606164	0.475009	0.120	0.265	0.615
0.25	0.764699	0.635864	0.140	0.275	0.585
0.30	0.929964	0.807641	0.155	0.285	0.560
0.35	1.104910	0.991171	0.165	0.295	0.540
0.40	1.293158	1.188826	0.175	0.300	0.525
0.45	1.499014	1.404143	0.185	0.305	0.510
0.50	1.727338	1.641632	0.195	0.310	0.495
0.55	1.983186	1.906235	0.205	0.310	0.485
0.60	2.271170	2.202545	0.210	0.315	0.475
0.65	2.594552	2.533916	0.215	0.315	0.470
0.70	2.954217	2.901231	0.220	0.320	0.460
0.75	3.347802	3.302157	0.230	0.320	0.450
0.80	3.769331	3.730673	0.235	0.320	0.445
0.85	4.209583	4.177443	0.235	0.325	0.440
0.90	4.657216	4.631009	0.240	0.325	0.435
0.95	5.100339	5.079386	0.245	0.325	0.430

表9 The value of L for M/M/3 and M/M(μ_1, μ_1, μ_3)/3

ρ	L M/M/3	L M/M(μ1,μ1,μ3)/3	optimum ability ratio		
0.05	0.150027	0.080225	0.040	0.175	0.785
0.10	0.300412	0.192582	0.075	0.220	0.705
0.15	0.452009	0.326167	0.100	0.245	0.655
0.20	0.606164	0.475010	0.120	0.265	0.615
0.25	0.764706	0.635870	0.140	0.275	0.585
0.30	0.930012	0.807682	0.155	0.285	0.560
0.35	1.105150	0.991384	0.165	0.295	0.540
0.40	1.294118	1.189701	0.175	0.300	0.525
0.45	1.502243	1.407154	0.185	0.305	0.510
0.50	1.736842	1.650652	0.195	0.310	0.495
0.55	2.008321	1.930412	0.205	0.310	0.485
0.60	2.332117	2.261767	0.210	0.315	0.475
0.65	2.732303	2.668827	0.215	0.315	0.470
0.70	3.248804	3.191474	0.220	0.320	0.460
0.75	3.953271	3.901444	0.230	0.320	0.450
0.80	4.988764	4.941859	0.235	0.320	0.445
0.85	6.688801	6.646253	0.235	0.325	0.440
0.90	10.053549	10.014896	0.240	0.325	0.435
0.95	20.083162	20.047997	0.245	0.325	0.430

有限待ち行列において server 数 3 の場合，server 数 2 の場合と同様に，ρ の値が小さい場合平均系以内人数を最小にする server の能力比の違いは大きい。同じ ρ の値について M／M／3と比較するとより，能力配分をうまく行うことによって L の値を小さくする効果は，ρ の値が小さい程大きくなることがわかる。

§6．結　言

複数の能力の異なる server を持つ有限待ち行列システムについて，定常確率を求めるアルゴリズムを示した。

またこのアルゴリズムを利用して，server 数 2 及び server 数 3 の場合，ρ の値を変化させた場合の平均系内人数を最小とする server の能力の配分方法について解析した（server 数 2 の場合は解析的方法により，server 数 3 の場合は数値計算によって）。この結果，ρ の値が小さいほど平均系内人を最小にする server の能力比の違いは大きく，又能力配分をうまく行うことによって L の値を小さくする効果は，ρ の値が小さい程大きくなることが示せた。

参考文献

[1]　山城光雄：単一の server と能力の異なる 2 人の server を持つポアソン型待ち行列システムの平均系内滞留時間の比較 OR 学会春季研究会予稿集（1970）

[2]　岩瀬雅治，竹田仁：能力の異なる複数 server を持つ待ち行列システムの解析
日本機械学会中国四国支部第29期総会・講演会（1991，3 月）

[3]　岩瀬雅治，竹田仁：能力の異なる複数 server を持つ待ち行列システムの解析（第 1 報　平均系内人数の最小化について）文京女子大学経営学部紀要第 1 号（1991　12月）