能力の異なる複数serverの待ち行列システムの解析
(第3報，有限入力源待ち行列における平均系内人数の最小化について)

竹田　　仁

The Analysis of Heterogeneous Server Queues
(Part Ⅲ　Minimization of the Expected Number in the Finite source Queue)

Hitoshi Takeda

有限待ち行列において，ポアソン到着，指数分布サービス，能力の異なる複数serverの待ち行列システムについて，定常状態におけるシステム内の状態確率を求めるアルゴリズムを示す。また，これをもとにして，server数2及び3の場合serverの能力の一定にしたとき，平均系内人数を最小にするserverの能力分布について検討する。

This paper deals with the heterogeneous server finite source queuing system with exponential interarrival time and exponential service time, and we develop the computing algorithm to find stationary probability is shown. Using the above result, in the case of two or three servers stationary probability is calculated. In these cases, the problem of searching for the ability ratio of servers to minimize the expected number in the system is studied.

§1．序論

ある待ち行列システムに別のserverを加えてシステムの効率を良くすることがある。加えるserverの能力が0でない限り平均待ち時間は減少するが，加えたserverの能力によっては平均系内滞留時間，平均系内人数は減少するとは言えない。能力の異なる複数serverの待ち行列システムを扱ったものとして竹田・岩瀬［1］［2］などがある。これは，ポアソン到着，指数分布サービス，server数2及び3の待ち行列システムを扱い，無限待ち行列モデル，有限待ち行列モデルについて定常状態における状態確率を計算するアルゴリズムを示し，serverの能力和を一定にしたとき平均系内人数を最小にするserverの能力分割の問題を考察ている。

本稿では，ポアソン到着，指数分布サービスの能力の異なるserver数cの有限入力源待ち行列システムについてその定常状態における状態確率を計算するアルゴリズムを示す。また能力の異なるserver数2及び3の場合について，serverの能力和を一定としたとき平均系内人数を最小にするserverの能力配分の問題について解析し，$E_1/E_1/2/m$及び$E_1/E_1/3/m$の場合の平均系内人数について比較する。

§2. モデルと記号

2. 1 モデル

定常状態において，有限入力源待ち行列モデル M/M (μ_1, μ_2) /2/m, M/M (μ_1, μ_2, μ_3) /3/m のモデルを扱う。

ただし，これらのモデルにおいて，複数の server が空いている場合に到着した客は，より能力の高い server のサービスを受けるものとする。各 server の平均サービス率 μ_1 は，$\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \cdots \leqq \mu_c$ とし，server の番号が大きくなる程高くなるものとする。到着した客は，先着順サービスを受ける。

2. 2 記号

λ：客の平均到着率

μ_i：第 i server の平均 service 率

$\theta_i = \dfrac{\mu_i}{\lambda}$

$\Theta = \sum_{i=1}^{c} \theta_i$

$\rho = 1/\Theta$

P_i ：系内人数が i 人である状態確率

$(j1, j2, \cdots, ji)$ ：系内人数が i 人で第 j_1, 第 j_2, …, 第 j_i server がサービス中である状態を表す。
$1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots < j_i \leqq c$ とする。

$P_{i(j1, j2, \cdots, ji)}$：系内人数が i 人で，第 j_1, 第 j_2, …, 第 j_i server がサービス中である状態確率
$1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots < j_i \leqq c$ とする。

S (i_1, i_2, …, i_k)：系内人数が k − 1 人で，一人の客が到着したとき状態 (i_1, i_2, …, i_k) に，移行するような状態全体の集合。

$T(i_1, i_2, \cdots, i_k) = \{(j_1, j_2, \cdots, j_{k+1}) \mid 1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots < j_{k+1} \leqq c, \{j_1, j_2, \cdots, j_{k+1}\}$
$\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}\}$

T (i_1, i_2, …, i_k) は，第 i_1, …, 第 i_k server とそれ以外のもう一人の server が service 中の状態全体の集合を表す。

$R(k) = \{i_1, i_2, \cdots, i_k) \mid 1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqq c\}$

上の定義より，$P_k = \sum_{(j1, j2, \cdots jk) \in R(k)} P_{k(j1, j2, \cdots, jk)}$ ($1 \leqq k \leqq c$) が成り立つ。

§3. 解析

3. 1 M／M (μ_1, μ_2, …, μ_c)／C／m における方程式の導出

時刻 t と t + dt の状態遷移を考え，定常性より，P_0 の t における分布と t + dt での分布が一致することより下式を得る。

$$\sum_{i=1}^{c} P_{1(i)} \mu_i = P_0 m \lambda$$

両辺をλで割って（３．１．１）が得られる。

$$\sum_{i=1}^{c} P_{1(i)}\theta_i = P_0 m \tag{3.1.1}$$

第 j server 一人のみが service 中ある状態確率 $P_{1(j)}$ の定常性より

$$-P_{1(j)}((m-1)\lambda+\mu_j)+\sum_{(t1,t2)\in T(j)} P_{2(t1,t2)}\cdot\mu_{vjt}=0 \quad (1\leqq j\leqq c-1)$$

ただし $\{v_{jt}\}=\{t_1, t_2\}-\{j\}$。
両辺をλで割って（３．１．２）が得られる。

$$-P_{1(j)}((m-1)\theta_j)+\sum_{(t1,t2)\in T(j)} P_{2(t1,t2)}\mu_{vjt}=0 \quad (1\leqq j\leqq c-1) \tag{3.1.2}$$

最も能力の高い第 C server 一人が service 中の状態確率 $P_{1(c)}$ の定常性より

$$P_0 m\lambda-P_{1(c)}((m-1)\lambda+\mu_c)+\sum_{(t1,t2)\in T(c)} P_{2(t1,t2)}\mu_{vnt}=0$$

ただし $\{v_{nt}\}=\{t_1, t_2\}-\{c\}$。
両辺をλで割って（３．１．３）が得られる。

$$P_0 m\lambda-P_{1(c)}((m-1)\theta_c)+\sum_{(t1,t2)\in T(c)} P_{2(t1,t2)}\theta_{vnt}=0 \tag{3.1.3}$$

同様にして $P_{k(i1,i2,\cdots,ik)}$ $(2\leqq k\leqq c-1,\ 1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_k\leqq c)$ の定常性より

$$\sum_{(j1,\cdots,jk-1)\in s(i_1\cdots,i_k)} P_{k-1(j1,\cdots,jk-1)}(m-k+1)\lambda-P_{k(i1,\cdots,ik)}((m-k)\lambda+\mu_{i1}+\cdots+\mu_{ik})$$
$$+\sum_{(j1,\cdots,jk+1)\in T(i_i\cdots i_k)} P_{k(j1,j2,\cdots,jk+1)}\mu_{vij}=0$$

ただし $\{v_{ij}\}=\{j_1, \cdots, j_{k+1}\}-\{i_1, \cdots, i_k\}$。
両辺をλで割って，$2\leqq k\leqq c-1$，$1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_k\leqq c$ に対して（３．１．４）が成り立つ。

$$\sum_{(j1,\cdots,jk-1)\in S(i_1,\cdots,i_k)} P_{k-1(j1,\cdots,jk-1)}(m-k+1)-P_{k(i1,\cdots,ik)}((m-k)+\theta_{i1}+\cdots+\theta_{ik})$$
$$+\sum_{(j1,\cdots,jk+1)\in T(i_1,\cdots,i_k)} p_{k+1(j1,\cdots,jk+1)}\theta_{vij}=0 \tag{3.1.4}$$

P_k $(c\leqq k\leqq m-1)$ の定常性より

$$P_{k-1}(m-k+1)-P_k((m-k)+\Theta)+P_{k+1}\Theta=0 \qquad (c\leqq k\leqq m-1) \tag{3.1.5}$$

P_k $(1\leqq k\leqq c-1)$ の定常性より，$1\leqq k\leqq c-1$ に対して（３．１．６）が成り立つ。

$$P_{k-1}(m-k+1)-\sum_{(i1,\cdots,ik)\in R(k)} P_{k(i1,\cdots,ik)}((m-k)+\theta_{i1}+\cdots+\theta_{ik})$$
$$+\sum_{(j1,\cdots,jk+1)\in R(k+1)} P_{k+1(i1,\cdots,jk+1)}(\theta_{j1}+\cdots+\theta_{jk+1})=0 \tag{3.1.6}$$

3．2　定常確率の求め方

入力総数 m でポアソン到着，指数分布サービス，複数の能力の等しい server 数 c の待ち行列システム M／M／c／m について，その平均系内人数 L は，参考文献［1］，［2］より下の（3．2．1）式で与えている。

$$P_0\left[\sum_{n=0}^{c-1} n\binom{m}{n} r^n + \sum_{n=c}^{m} n\binom{m}{n}\frac{n!}{c^{n-c}c!}r^n\right] \qquad (3.2.1)$$

ここで $P_0 = [\sum_{n=0}^{c-1}\binom{m}{n} r^n + \sum_{n=c}^{m}\binom{m}{n}\frac{n!}{c^{n-c}c!}r^n]^{-1}$

（3．1．1），（3．1．6）より $P_c = P_{c-1}(m-c+1)／\Theta$ この式と（3．1．5）より

$$P_{k+1} = P_k(m-k)／\Theta \quad (c-1 \leqq k \leqq m-1) \qquad (3.2.2)$$

（3．1．1），（3．1．2），（3．1．3），（3．1．4）の P_0 を $P_0 = 1$ として $P_{k(i1,\cdots,ik)}(1 \leqq k \leqq c-1,\ 1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqq c)$，$P_0$ を未知数とする 2^{c-1} 個の式よりなる連立一次方程式として解き，解を $Y_{k(i1,\cdots,ik)}(1 \leqq k \leqq n-1,\ 1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqq c)$ とする。

$g_k = \sum_{(i1,\cdots,ik)\in R(k)} Y_{k(i1,\cdots,ik)}$ とすると，

$P_k = g_k P_0\ (1 \leqq k \leqq c-1)$，$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$，（3．2．2）より

$$P_0(1+\sum_{k=1}^{c-2} g_k) + P_{c-1}(1+\sum_{k=c}^{m}(m-(c-1))\cdots(m-(k-1))／\Theta^{k-c+1}) = 1$$

$$P_0(1+\sum_{k=1}^{c-2} g_k + g_{c-1}(1+\sum_{k=c}^{m}(m-(c-1))\cdots(m-(k-1))／\Theta^{k-c+1}) = 1$$

$$P_0 = 1／(1+\sum_{k=1}^{c-2} g_k + g_{c-1}(1+\sum_{k=c}^{m}(m-(c-1))\cdots(m-(k-1))／\Theta^{k-c+1}) \qquad (3.2.3)$$

（3，2，3）より P_0 を求め，$P_{k(i1,\cdots,ik)} = P_0 Y_{k(i1,\cdots,ik)}$ より，$P_{k(i1,\cdots,ik)}$ を求める。

$$P_{c-1} = g_{c-1}P_0$$

$P_k = P_{c-1}(m-(c-1))\cdots(m-(k-1))／\Theta^{k-c+1}\ (c \leqq k \leqq m)$ より $P_k\ (c \leqq k \leqq m)$ を求める。

3．3　M／M$(\mu_1,\ \mu_2)$／2／m について

到着した客は，先着順に空いた server のサービスを受ける。第 1，第 2 server が共に空いているとき到着した客は，平均サービス率がより大きい第 2 server のサービスを受け，どちらか一方のみが空いているとき到着した客は，空いている server のサービスを受けるものとする。定常確率を求め，これより server の能力和が一定の場合平均系内人数 L を最小にする server の能力配分の問題について考察する。

（3．1．1）より

$$\theta_1 P_{1(1)} + \theta_2 P_{1(2)} = P_0 m \qquad (3.3.1)$$

同様にして（3．1．2），（3．1．3）より（3．3．2），（3．3．3）が得られる。

$$-((m-1)+\theta_1)P_{1(1)}+\theta_2P_2=0 \tag{3.3.2}$$
$$-((m-1)+\theta_2)P_{1(2)}+\theta_1P_2=-P_0m \tag{3.3.3}$$

（３．１．５）より（３．３．４）が得られる。

$$(m-k+1)P_{k-1}-((m-k)+\Theta)P_k+\Theta P_{k+1}=0\ (2\leqq k\leqq m-1) \tag{3.3.4}$$

確率の和が１になることより（３．３．５）が成り立つ。

$$\sum_{i=0}^{\infty}P_i=1 \tag{3.3.5}$$

平均系内人数Ｌは（３．３．６）で表せる。

$$L=\sum_{i=1}^{\infty}iP_i \tag{3.3.6}$$

（３．３．１）～（３．３．５）より次の（３．３．７）～（３．３．10）を得る。

$$P_0=\frac{1}{1+fG} \tag{3.3.7}$$

$$P_{1(1)}=\frac{P_0m\,(m-1)}{\theta_1\,(2\,(y-1)+\Theta)} \tag{3.3.8}$$

$$P_{1(2)}=\frac{P_0m\,((m-1)+\Theta)}{\theta_2\,(2\,(m-1)+\Theta)} \tag{3.3.9}$$

$$P_{k+1}=P_k\,(m-k)\,/\,\Theta\quad(1\leqq k\leqq m-1) \tag{3.3.10}$$

（３．３．６）～（３．３．10）より，平均系内人数Ｌを（３．３．11）のように表せる。

$$L=\frac{f}{(1+fG)}H \tag{3.3.11}$$

ここで　$f=\dfrac{m\,((m-1)+\theta_1)\,\Theta}{\theta_1\theta_2\,(2\,(m-1)+\Theta)}$

$$G=1+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(m-1)\cdots(m-k)}{\Theta_k}$$

$$H=1+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(k+1)\,(m-1)\cdots(m-k)}{\Theta^k}$$

（３．３．11）より固定したΘの値に対し，Ｌを最小にする server の能力配分を求める・
１変数関数の極小問題を解くことになり

$$\theta_1=-(y-1)+\sqrt{(y-1)^2+(y-1)\,\Theta},\qquad \theta_2=\Theta-\theta_1$$

のときＬは最小となる。
Table 1 ～Table 4 は，ｍのいくつかの値について各々の ρ の値に対し，Ｍ／Ｍ／２／ｍにおけるＬの値と，Ｍ／Ｍ $(\mu_1,\ \mu_2)$ ／２／ｍにおいてＬを最小にする能力比とその時のＬの値を列記したものである。

Table 1　The value of L for M/M/2/2 and M/M (μ_1, μ_2) /2/2

ρ	L M/M/2/2	L M/M(μ_1,μ_1)/2/2	optimum ability ratio	
0.05	0.181818	0.135649	0.179	0.821
0.10	0.333333	0.277775	0.232	0.768
0.15	0.461538	0.408318	0.265	0.735
0.20	0.571429	0.524204	0.290	0.710
0.25	0.666667	0.626070	0.309	0.691
0.30	0.750000	0.715563	0.324	0.676
0.35	0.823529	0.794453	0.337	0.663
0.40	0.888889	0.864342	0.348	0.652
0.45	0.947368	0.926600	0.358	0.642
0.50	1.000000	0.982367	0.366	0.634
0.55	1.047619	1.032586	0.373	0.627
0.60	1.090909	1.078036	0.380	0.620
0.65	1.130435	1.119361	0.386	0.614
0.70	1.166667	1.157097	0.391	0.609
0.75	1.200000	1.191694	0.396	0.604
0.80	1.230769	1.223529	0.400	0.600
0.85	1.259259	1.252923	0.404	0.596
0.90	1.285714	1.280146	0.408	0.592
0.95	1.310345	1.305434	0.411	0.589

Table 2　The value of L for M/M/2/2 and M/M (μ_1, μ_2) /2/3

ρ	L M/M/2/2	L M/M(μ_1,μ_2)/2/3	optimum ability ratio	
0.05	0.273751	0.225067	0.232	0.768
0.10	0.505774	0.458982	0.290	0.710
0.15	0.706401	0.669109	0.324	0.676
0.20	0.881844	0.853553	0.348	0.652
0.25	1.036364	1.015161	0.366	0.634
0.30	1.173168	1.157259	0.380	0.620
0.35	1.294818	1.282799	0.391	0.609
0.40	1.403417	1.394256	0.400	0.600
0.45	1.500727	1.493676	0.408	0.592
0.50	1.588235	1.582754	0.414	0.586
0.55	1.667204	1.662901	0.420	0.580
0.60	1.738707	1.735298	0.425	0.575
0.65	1.803664	1.800939	0.429	0.571
0.70	1.862859	1.860662	0.433	0.567
0.75	1.916968	1.915183	0.436	0.564
0.80	1.966572	1.965111	0.440	0.560
0.85	2.012173	2.010969	0.442	0.558
0.90	2.054206	2.053207	0.445	0.555
0.95	2.093050	2.092215	0.447	0.553

Table 3　The value of L for M/M/2/2 and M/M (μ_1, μ_2) /2/5

ρ	L M/M/2/5	L M/M(μ_1,μ_2)/2/5	optimum ability ratio	
0.05	0.464794	0.419026	0.290	0.710
0.10	0.890669	0.859608	0.348	0.652
0.15	1.290869	1.272229	0.380	0.620
0.20	1.660909	1.649947	0.400	0.600
0.25	1.994819	1.988349	0.414	0.586
0.30	2.290083	2.286215	0.425	0.575
0.35	2.547718	2.545365	0.433	0.567
0.40	2.770938	2.769479	0.440	0.560
0.45	2.963893	2.962969	0.445	0.555
0.50	3.130841	3.130244	0.449	0.551
0.55	3.275726	3.275332	0.453	0.547
0.60	3.402001	3.401736	0.457	0.543
0.65	3.512603	3.512422	0.459	0.541
0.70	3.609987	3.609862	0.462	0.538
0.75	3.696191	3.696102	0.464	0.536
0.80	3.772895	3.772831	0.466	0.534
0.85	3.841491	3.841445	0.468	0.532
0.90	3.903132	3.903098	0.469	0.531
0.95	3.958774	3.958749	0.471	0.529

Table 4　The value of L for M/M/2/2 and M/M (μ_1, μ_2) /2/10

ρ	L M/M/2/10	L M/M(μ_1,μ_2)/2/10	optimum ability ratio	
0.05	1.038638	1.008610	0.358	0.642
0.10	2.403722	2.393911	0.408	0.592
0.15	3.900848	3.898331	0.431	0.569
0.20	5.139164	5.138587	0.445	0.555
0.25	6.037252	6.037117	0.454	0.546
0.30	6.677783	6.677448	0.461	0.539
0.35	7.146547	7.146538	0.466	0.534
0.40	7.501349	7.501345	0.469	0.531
0.45	7.778314	7.778313	0.472	0.528
0.50	8.000229	8.000229	0.475	0.525
0.55	8.181923	8.181922	0.477	0.523
0.60	8.333384	8.333383	0.479	0.521
0.65	8.461564	8.461564	0.480	0.520
0.70	8.571442	8.571442	0.482	0.518
0.75	8.666674	8.666674	0.483	0.517
0.80	8.750004	8.750004	0.484	0.516
0.85	8.823532	8.823532	0.485	0.515
0.90	8.888890	8.888890	0.485	0.515
0.95	8.947369	8.947369	0.486	0.514

Table 1 ～ 4 より server の能力和が一定のとき平均系内人数 L を最小にする server の能力比の違いは，ρ の値が小さい程大きい。ρ の値が小さいことは，server の能力和が客の平均到着率に比べて大きいことを意味する。すなわち server の能力和が客の到着に比べて大きいとき，2 人の server の能力比の違いを大きくして能力の大きな server に service の大部分を行わせることが平均系内人数を少なくするために有効でる。ρ の値が 1 に近づくと，L を最小にするための 2 人の server の能力比の違いは小さくなる。ρ の値が 1 に近づくとともに，客の到着に比較して

server の能力和は小さくなり，能力の劣る第 1 server が service 中の確率が増加する。このため ρ の値が 1 に近い場合，第 1 server の能力と第 2 server の能力が大きく異なると，第 1 server に service を受けた客の影響で平均系内人数 L が大きな値をとる。
そこで ρ の値が 1 に近づくと，平均系内人数 L を最小にする 2 人の server の能力比の違いは小さくなる。また，同じ ρ の値について，M／M (μ_1, μ_2) ／2／m における最小の L を M／M／2／m の L で割った値は，ρ が小さくなると小になり，能力配分をうまく行うことによって L の値を小さくする効果は，ρ の値が小さい程大きくなることがわかった。

3．4　M／M (μ_1, μ_2, μ_3) ／3／m について

到着した客は，先着順に空いた server のサービスを受ける。3 人の server が共に空いているとき到着した客は，平均サービス率が最大の第 3 server のサービスを受ける。2 人の server が空いているとき到着した客は，平均サービス率がより大きい（番号のより大きい）server のサービスを受ける。
server 数が 2 の場合と同様に定常確率を求め，これを利用し server の能力和が一定の場合，平均系内人数 L を最小にする server の能力配分の問題について考察する。
（3．1．1）より（3．4．1）が得られる。

$$\theta_1 P_{1(1)} + \theta_2 P_{1(2)} + \theta_3 P_{1(3)} = P_0 m \qquad (3.4.1)$$

（3．1．2）より次の（3．4．2）（3．4．3）が得られる。

$$-(m-1+\theta_1)P_{1(1)} + \theta_2 P_{2(1,2)} + \theta_3 P_{2(1,3)} = 0 \qquad (3.4.2)$$

$$-(m-1+\theta_2)P_{1(2)} + \theta_1 P_{2(1,2)} + \theta_3 P_{2(2,3)} = 0 \qquad (3.4.3)$$

（3．1．3）より（3．4．4）が得られる。

$$-(m-1+\theta_3)P_{1(3)} + \theta_1 P_{2(1,3)} + \theta_2 P_{2(2,3)} = -P_0 m \qquad (3.4.4)$$

S (1,2) は空集合，S (1,3) = {(1)}，S (2,3) = {(2), (3)} であり，（3．1．4）より（3．4．5）～（3．4．7）が得られる。

$$-(m-2+\theta_1+\theta_2)P_{2(1,2)} + \theta_3 P_3 = 0 \qquad (3.4.5)$$

$$(m-1)P_{1(1)} - (m-2+\theta_1+\theta_3)P_{2(1,3)} + \theta_2 P_3 = 0 \qquad (3.4.6)$$

$$(m-1)P_{1(2)} + (m-1)P_{1(3)} - (m-2+\theta_2+\theta_3)P_{2(2,3)} + \theta_1 P_3 = 0 \qquad (3.4.7)$$

（3．1．5）より（3．4．8）が得られる。

$$(m-k+1)P_{k-1} - (m-k+\Theta)P_k + \Theta P_{k+1} = 0 \quad (3 \leqq k \leqq m-1) \qquad (3.4.8)$$

確率の和が 1 になることより（3．4．9）が成り立つ。

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1 \qquad (3.4.9)$$

平均系内人数は（3．4．10）で表せる。

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} iP_i \qquad (3.4.10)$$

（3．4．1）～（3． 4． 10）より，数値計算によってLを求めることができる。Table 5 ～ 7は各々の ρ の値に対し，M／M／3／m におけるLの値と，M／M (μ_1, μ_2, μ_3)／3／m において $\Theta = 1/\rho$ とし，$\Theta \doteqdot \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ を満たしながら θ_1, θ_2, θ_3 を0.005刻みで変化させたときLを最小にするserverの能力比とその時のLの値を列記したものである。
M／M (μ_1, μ_2, μ_3)／3／m における連立一次方程式の計算は，GAUSSの消去法で行った。

Table 5 The value of L for M/M/3/3 and M/M (μ_1, μ_2, μ_3) /3/3

ρ	L M/M/3/3	L M/M(μ_1,μ_2,μ_3)/3/3	optimum ability ratio		
0.05	0.391304	0.252052	0.055	0.225	0.720
0.10	0.692308	0.540650	0.090	0.270	0.640
0.15	0.931034	0.800383	0.120	0.290	0.590
0.20	1.125000	1.019829	0.140	0.305	0.555
0.25	1.285714	1.202673	0.160	0.315	0.525
0.30	1.421053	1.355615	0.175	0.320	0.505
0.35	1.536585	1.484735	0.185	0.320	0.495
0.40	1.636364	1.594943	0.195	0.325	0.480
0.45	1.723404	1.690009	0.205	0.325	0.470
0.50	1.800000	1.772844	0.215	0.325	0.460
0.55	1.867925	1.845624	0.220	0.330	0.450
0.60	1.928571	1.910100	0.225	0.330	0.445
0.65	1.983051	1.967631	0.230	0.330	0.440
0.70	2.032258	2.019290	0.235	0.330	0.435
0.75	2.076923	2.065942	0.240	0.330	0.430
0.80	2.117647	2.108291	0.245	0.330	0.425
0.85	2.154930	2.146910	0.245	0.330	0.425
0.90	2.189189	2.182270	0.250	0.330	0.420
0.95	2.220779	2.214784	0.255	0.330	0.415

Table 6 The value of L for M/M/3/5 and M/M (μ_1, μ_2, μ_3) /3/5

ρ	L M/M/3/5	L M/M(μ_1,μ_2,μ_3)/3/5	optimum ability ratio		
0.05	0.653778	0.513446	0.110	0.265	0.625
0.10	1.167212	1.068459	0.165	0.300	0.535
0.15	1.589427	1.529964	0.195	0.315	0.490
0.20	1.945021	1.909622	0.220	0.320	0.460
0.25	2.247790	2.226315	0.235	0.325	0.440
0.30	2.507018	2.493673	0.245	0.330	0.425
0.35	2.729856	2.721343	0.255	0.330	0.415
0.40	2.922169	2.916613	0.260	0.330	0.410
0.45	3.088859	3.085142	0.270	0.330	0.400
0.50	3.234020	3.231483	0.275	0.330	0.395
0.55	3.361062	3.359297	0.280	0.330	0.390
0.60	3.472814	3.471565	0.285	0.330	0.385
0.65	3.571615	3.570714	0.285	0.330	0.385
0.70	3.659401	3.658742	0.290	0.330	0.380
0.75	3.737777	3.737289	0.290	0.335	0.375
0.80	3.808075	3.807708	0.295	0.330	0.375
0.85	3.871405	3.871126	0.295	0.335	0.370
0.90	3.928696	3.928482	0.295	0.335	0.370
0.95	3.980728	3.980561	0.300	0.330	0.370

Table 7 The value of L for M/M/3/10 and M/M (μ_1, μ_2, μ_3) /3/10

ρ	L M/M/3/10	L M/M(μ_1,μ_2,μ_3)/3/10	optimum ability ratio		
0.05	1.361193	1.272325	0.180	0.305	0.515
0.10	2.723692	2.696891	0.235	0.325	0.440
0.15	4.083069	4.075942	0.260	0.330	0.410
0.20	5.218239	5.216422	0.275	0.330	0.395
0.25	6.068701	6.068221	0.285	0.330	0.385
0.30	6.690369	6.690232	0.295	0.330	0.375
0.35	7.151807	7.151764	0.300	0.330	0.370
0.40	7.503669	7.503654	0.300	0.335	0.365
0.45	7.779395	7.779390	0.305	0.335	0.360
0.50	8.000760	8.000757	0.305	0.335	0.360
0.55	8.182195	8.182194	0.310	0.335	0.355
0.60	8.333530	8.333529	0.310	0.335	0.355
0.65	8.461645	8.461645	0.315	0.330	0.355
0.70	8.571489	8.571489	0.315	0.335	0.350
0.75	8.666702	8.666702	0.315	0.335	0.350
0.80	8.750021	8.750021	0.315	0.335	0.350
0.85	8.823542	8.823542	0.315	0.335	0.350
0.90	8.888897	8.888897	0.320	0.330	0.350
0.95	8.947374	8.947374	0.320	0.335	0.345

server 数 3 の場合も，server 数 2 の場合と同様に，ρ の値が小さい場合平均系内人数を最小にする server の能力比の違いは大きい。同じ ρ の値について M／M／3／m と比較することより，能力配分をうまく行うことによって L の値を小さくする効果は，ρ の値が小さい程大きくなることがわかる。

§4　結語

複数の能力の異なる server を持つ source 有限入力源待ち行列システムについて，定常確率を求めるアルゴリズムを示した。またこれを利用して，server 数 2 及び 3 の場合，ρ の値を変化させた場合の平均系内人数を最小とする server の能力の配分方法について解析した。server 数 2 の場合は解析的方法により，server 数 3 の場合は数値計算によって，これらの場合，ρ の値が小さいほど平均系内人数を最小にする server の能力比の違いは大きく，また能力配分をうまく行うことによって L の値を小さくする効果は，ρ の値が小さい程大きくなることを示した。

参考文献

[1]　竹田仁，岩瀬雅治：能力の異なる複数 server を持つ有限待ち行列システムの解析
日本機械学会中国四国支部第 30 期総会・講演会（1992，3 月）
[2]　岩瀬雅治，竹田仁：能力の異なる複数 server を持つ待ち行列システムの解析
日本機械学会中国四国支部第 29 期総会・講演会（1991，3 月）
[3]　加藤ライジ：マネジメントのための待ち合わせ・ソフトウェア工学（1976）
[4]　森村英典，大前義次：応用待ち行列理論（1975）