〈情報学共同研究〉

# ミクロ経済学におけるワルラスの法則とパターン類似度関数のホップフィールドニューラルネット形調整

鈴 木 昇 一

# Walras' law in Microeconomics and An Accommodation of Similarity-Measure Functions Between Patterns Using Hopfield Neural Networks

Shoichi Suzuki


## Abstract

When a correspondence between normalized prices which appear on Walras' law in the microeconomics and similarity-measures in a field of pattern-information processing is taken into account, a process of obtaining from an old simslarity-measure a new similarity-measure which is better in a faculty of separation and clustering than the old one may be explained by the assumption that a quantity which corresponds to an excess demand function is expressed in terms of a Hopfield neural network. In the present paper, a mechanism of accommodating the similarity-measure function to a set of training patterns is described and is related to a supervised learning process with a steepest descent strategy.

## 要　約

価格調整過程を記述する方程式の解（均衡価格）について成り立つワルラスの法則と同様なことが、パターン情報処理における類似度の調整過程において成立するならば、類似度関係からseparation・clusteringにつき性能の良い今一つの類似度関数が得られ、しかも、各財への超過需要量に対応する量をHopfield neural netの形式で表現すると、類似度関数の教師あり学習過程も記述され得ることが示されている。


## 1．まえがき

消費者や企業などの経済主体が直面している不確実性をいくらかでも減ずる可能性のある知識は〝情報″と呼ばれている。[(2)]

株式市場は、市場メカニズムに基づき、個別の企業活動の価値を評価し、資金の配分を最適化する機能を実現する場である。[4]

株式市場は、各種の〝情報〞、つまり、

（1）過去の株価の履歴

（2）公開された任意の情報（例えば、財務情報）

（3）インサイダ情報を含む任意の情報

に十分反応する。[4]

将来の株価を予測して、現在からある一期間での、彼の目的関数（効用関数）を最大にするように行動する投資家にとって〝情報の経済学〞とは？

不確実な環境[2]の下では、経済的に有利な現場の情報のすばやい利用[3]に伴い、情報の価値は、企業が情報処理能力を蓄積、学習する内に形成されてくるものである。

市場で経済的な取引を行なうにあたって、その取引の当事者たち全員が同じ情報を所有しなくて、一部の者に情報が偏在してしまう〝情報の非対称性〞が存在する。[2]

情報処理すればするほど、情報の非対称性は助長されてしまうことに注意しておかねばならない。

不確実性、情報を経済学の中で取り扱うことは古くから行なわれてきたが、経済学の重要な一分野として、最近、急速に発展して来た。[2] 本論文では、この種の急速な数理的発展に注目し、上記の有価証券（株券＋債券＋派生証券＋……）[4] の価格変動に対するアプローチ（証券の価格付けのモデル）は残念ながら取り入れることはできなかったが、複数の消費者の所得制約下における効用最大化[1]に関連して、需要と供給の均衡における〝価格のワルラス調整過程〞にhintを得て、パターン情報処理における学習技術の一部の確保を取り扱っている。

他学問分野の手法を導入することはやはり、当該学問分野を活気づけるものであるが、本論文での研究成果はこのような一例になっていると思う。

さて、我々が市場で観測できるのは、消費者（*consumer*）の需要量（*demand*） $x^c=(x_1^c, x_2^c, \cdots\cdots)$， $c=1, 2, \cdots\cdots m$ と、財（*goods*）の市場価格（*price*） $p=(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n)$ である。ここに、$x_i^c$は第 $c$ 番目の消費者が消費したいと思っている財 $i$ の量である。また、$p_i$は財 i の価格である。消費者 c は一定の所得（*income*） $I$ の予算制約（*budget constraint*）

$$\Sigma_{i=1}^{n} a\ p_i \cdot x_i \leqq a \cdot I \tag{1.1}$$

の下で、財を購買することになる。ここに、$a$ は正定数である。上の不等式 (1.1) からわかるように、

$$0 \leqq p_i,\ \Sigma_{i=1}^{n} p_i = 1 \tag{1.2}$$

と設定しても不都合はない。需要 $x_i$は

価格$p_1$，$p_2$，……，$p_n$と所得 $I$ との関数であり、

$$x_i = x_i(p,\ \mathrm{I}) \tag{1.3}$$

と書き、需要関数（*demand function*）という。

なお、著者は、ミクロ経済学における数学的理論の成功[1] は恐らく、価格ベクトル $p=(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n)$ を式 (1.2) を満たすように規格化して考えたことにあると思う。式（1．2）の設定と、パターン認識の数学的理論[18]での類似度関数

$SM : \Phi \times \Omega \to \{ s \mid 0 \leqq s \leqq 1 \}$

の満たすべき公理 $S$（第２章の*axiom* $S$, *ii* を参照）との対応に興味を持つことが、本論文を認める契機となった。

需要量が供給量(*supply*)を上回れば価格が上昇し、供給量が需要量を上回るならば価格が低下する。完全競争（*perfect competition*）の市場（*market*）では、消費者は価格に応じてそれぞれの需要量・供給量を変えてゆく。完全競争市場においては、各消費者は価格 $p$ を所与（*parameter*）として需要を決める。消費者が欲求を充足することによって得る満足を効用（*utility*）というが、需要 $x^c$ は予算制約式を満たす中で、最大効用を生むものとされる。

一定の価格 $p$ に対する需要 $D$ と供給 $S$ との差

$$Z = D - S \tag{1. 4}$$

を超過需要という。超過需要は価格 $p$ の関数　$Z(p)$ と考えられ、このとき、超過需要関数(*excess demand function*）という。

適当な価格 $p$ の下で、すべての財の市場において需要の総和が供給の総和と等しくなるなら、すなわち、$Z(p) = 0$ になるなら、その時の価格 $p$ と需要 $x$ の組を　均衡（*equilibrium*）という。均衡とは

$$Z(p) = 0 \tag{1. 5}$$

を満たす状況である。実際の価格が均衡価格と異なるとき、価格が均衡に向かって収束してゆくならば、均衡は安定（*stable*)、そうでないとき、不安定（*unstable*）と呼ぶ。

超過需要が正のときに価格が上昇し、超過需要が負のとき価格が低下するという〝価格調整過程〟を記述する方程式は、価格 $p$ が時間 $t$ の関数　$p = p(t)$ と考えると、

$$\frac{d}{dt} p(t) = Z(p(t))\text{、つまり}$$

$$(d/dt)\, p_i(t) = Z_i(p(t)), \quad i = 1 \sim n$$

$$-\infty < t < +\infty \tag{1. 6}$$

である。均衡　$Z = 0$　では、$(d/dt)\, p(t) = 0$　すなわち　価格 $p$ は一定に留まる。

この場合、超過需要　$Z(p)$ を成分表示して、

$$Z(p) = (Z_1(p), Z_2(p), \cdots\cdots, Z_n(p))$$

としているが、ワルラスの法則（*Walras' law*）とは、均衡価格

$$p^* = (p_1^*, p_2^*, \cdots\cdots, p_n^*)$$

について、

$$\Sigma_{i=1}^{n} p_i^* \cdot Z_i(p^*) = 0 \tag{1. 7}$$

が成立する。つまり、超過需要ベルトル $Z(p)$ が価格ベクトル $p$ と均衡において〝直交する〟こと（*orthogonality*）を指摘したものである。

〔定理１．１〕**(均衡価格定理)**

式（1.7)、つまり、ワルラスの法則が成立しているとすると、価格 $p^*$ について、

$$Z_i(p^*) \leqq 0 \quad for \quad any \quad i \tag{1. 8}$$

の場合が実現し、

$$Z_i(p^*) = 0$$

という均衡価格 $p^*$ が得られる場合がある
ことが、以下の解析から知られるように、価格の調整過程の表現から従うのである。

$$max\{a, \ b\} = a \quad if \quad a \geqq b \ , = b \quad if \quad a < b \tag{1. 9}$$

とし、

$$f_j(p) \equiv \frac{p_j + max\{Z_j(p), 0\}}{\Sigma_{i=1}^{n} \,[p_i + max\{Z_i(p), 0\}]}$$
$$= \frac{p_j + max\{Z_j(p), 0\}}{1 + \Sigma_{i=1}^{n} max\{Z_i(p), 0\}}$$
$$, \quad j = 1 \sim n \tag{1. 10}$$

と定義される関数を考えると、

$$\forall j \,(= 1 \sim n), \quad 0 \leqq f_j(p)$$
$$\Sigma_{j=1}^{n} f_j(p) = 1 \tag{1. 11}$$

が成立しているから、

$$f\,(p) = (f_1(p), \ f_2(p), \ \cdots\cdots, \ f_n(p)) \tag{1. 12}$$

は価格ベクトルから価格ベクトルへの関数であることが知られる。

今、価格 $p^*$ が写像 f の不動点(*fixed point*)として実現できると仮定すると、不動点方程式(*fixed point equation*)

$$p_j^* = \frac{p_j^* + max\{Z_j(p^*), \ 0\}}{1 + \Sigma_{i=1}^{n} max\{Z_i(p^*), \ 0\}}, \quad j = 1 \sim n \tag{1. 13}$$

が成り立つ。この等式（1．13）と、ワルラスの法則である式（1． 7）から

$$Z_j(p^*) \leqq, \quad j = 1 \sim n$$

つまり式（1.8）が成り立つことが以下のようにして知れる。

式（1.13）から

$$p_j^* + p_j^* \cdot \Sigma_{i=1}^{n} max\{Z_i(p^*), \ 0\}$$
$$= p_j^* + max\{Z_j(p^*), \ 0\}$$
$$\therefore \quad p_j^* \cdot \Sigma_{i=1}^{n} max\{Z_i(p^*), \ 0\}$$
$$= max\{Z_j(p^*), \ 0\} \tag{1. 14}$$

を得るが、この式（1．14）の両辺に $Z_j(p^*)$ をかけ、総和をとれば、

$$\Sigma_{j=1}^{n} p_j^* \cdot Z_j(p^*) \cdot \Sigma_{i=1}^{n} max\{Z_i(p^*), \ 0\}$$
$$= \Sigma_{j=1}^{n} Z_j(p^*) \cdot max\{Z_j(p^*), \ 0\} \tag{1. 15}$$

となるが、式（1． 7）から、上の式（1．15）の左辺は零となり、

$$0 = \Sigma_{j=1}^{n} Z_j(p^*) \cdot max\{Z_j(p^*),\ 0\} \qquad (1.16)$$

が成立する。ここで、和の各項は

$$Z_j(p^*) \cdot max\{Z_i(p^*),\ 0\}$$
$$= \begin{cases} Z_j(p^*)^2 > 0 & if \quad Z_j(p^*) > 0 \\ 0 & if \quad Z_j(p^*) \leqq 0 \end{cases} \qquad (1.17)$$

であるから、非負量である。2式（1．16)、(1．17) より、

$$\forall_j\ (=1 \sim n),\ Z_j(p^*) \cdot max\{Z_j(p^*),\ 0\} = 0 \qquad (1.18)$$

を得て、これは、式（1．17) より、式（1．18) の成立を意味し、上述の定理1が証明された。（定理1．1の以上の証明は文献(1)を参考にして要約し、簡潔的に書き直したものである。）□

さて、処理の対象とするパターン$\varphi$の集合を　$\Phi$　として、各パターン　$\varphi \in \Phi$　は $|J|$ (= *cardinality of set J*) 個のカテゴリー（類概念）$\mathfrak{C}_j$, $j \in J$　の内の1つに帰属しているものとしよう。また、第$j \in J$番目のカテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターン (*prototypical pattern*) $\omega_j \in \Omega \subset \Phi$を導入しておく。可分な*Hilbert*空間を$\mathfrak{H}$として、$\mathfrak{H}$での内積、ノルムを各々（ , ）, $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$ と表わす。$\Phi \subset \mathfrak{H}$とする。代表パターン$\omega_j$の集合

$$\Omega = \{\omega_j \mid j \in J\}$$

は1次独立であり、$T \cdot \Omega \equiv \{T\omega_j \mid j \in J\}$ も同様に1次独立とする。ここに、写像

$$T : \Phi \to \Phi$$

は**モデル構成作用素** (*model-construction operator*) と呼ばれるものである。[12] $T\varphi \in \Phi$はパターン $\varphi \in \Phi$の代りとなるもので、モデル (*model*) と呼ばれることがある。[18] このとき、

$SM$ ($\varphi$, $\omega_j$) = 1, 0に従って、パターン$\varphi \in \Phi$は各々代表パターン$\omega_j$と確定的な類似関係、相違関係にある

と想定し、類似度関数 (*similarity-measure function*)

$$SM : \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\}$$

が第2章での*axiom S*を満たすように導入されたとする。[18]

本論文は、この類似度関数$SM$の更新・調整を上述のワルラスの法則に従って行う方法を研究したものである。

## 2．類似度関数SMの不動点定理

本章では、第1章で説明された均衡価格定理が類似度関数、

$$SM : \Phi \times \Omega \to \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\}$$

についても同様に成り立つことが、類似度関数$SM$の再帰定理の特別な場合としての不動点定理の観点から指摘され、あわせて、*axiom S*を満たす類似度関数$SM$の簡単な4例が示される。

処理の対象とするパターン$\varphi$の集合$\Phi$は内積、ノルムを各々（ , ）, $\|\cdot\| =$

$\sqrt{(\cdot, \cdot)}$ とする可能なHilbert空間 $\mathfrak{H}$（その諸例は文献(14)にある）の部分集合とする。

特徴抽出写像

$u: \Phi \times L \to F$

を用意する。$u(\varphi, \ell) \in F$ はパターン $\varphi \in \Phi$ から抽出される第 $\ell \in L$ 番目の特徴量であり、

$u(\varphi) = \{u(\varphi, \ell) \mid \ell \in L\}$

は $\varphi \in \Phi$ のこのような特徴量 $u(\varphi, \ell)$ の組である。

$\omega_j \in \Omega \subset \Phi$ は生起確率 $p(\mathfrak{C}_j)$ をもつ第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターンである。ここに、

$\forall j \in J,\ p(\mathfrak{C}_j) > 0 \ \wedge\ \Sigma_{j \in J} p(\mathfrak{C}_j) = 1$

Hilbert空間 $\mathfrak{H}$ での1次独立な系（例えば、直交系）として

$\psi_\ell \in \Phi \subset \mathfrak{H},\ \ell \in L$

を用意する。このとき、

〔定理2．1〕**（特徴抽出写像定理）**

$u_\ell \in F,\ \ell \in L$ が与えられたとき、等式

$\forall \forall \in L,\ u(\varphi, \ell) = u_\ell$

を満たすパターン $\varphi \in \Phi$ が

$\varphi = \Sigma_{\ell \in L} u_\ell \cdot \psi_\ell$

の形式で存在する。 □

何故ならば、S. Suzuki のパターン認識の数学的理論(18)；(11)～(15)；(17)（以後、簡単に**SS理論**と呼ぶことがある）によれば、

$T\eta = \Sigma_{\ell \in L} u(\eta, \ell) \cdot \psi_\ell$ (*a human perceptual pattern-model*), *for any pattern* $\eta \in \Phi$

と定義される写像（モデル構成作用素）

$\mathrm{T}: \Phi \to \Phi$

は、等式

$\forall \ell \in L,\ u(T\eta, \ell) = u(\eta, \ell) \in F$

を満たし、このような特徴抽出写像 $u: \Phi \times L \to F$ を想定できるからである。

特徴抽出写像 $u$、モデル構成作用素 $T$ に加えて、

$SM(\varphi, \omega_j)$ はパターン $\varphi \in \Phi$ が代表パターン $\omega_j \in \Omega$ と似ている程度を表わす1より大きくない非負実数

という解釈を可能ならしめる類似度関数

$SM: \Phi \times \Omega \to [0, 1] \equiv \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\}$

が次の*axiom S*を満たす形式で導入しよう。ここに、

$\Omega = \{\omega_j \mid j \in J\} \subset \Phi$

$\delta_{ij} = 1 \quad if \quad i = j, = 0 \quad if \quad i \neq j$

*AxiomS*（**類似度関数SM公理**）[18]

（i）（直交条件；*orthogonality*）

$\forall j, \ \forall k \in J, \ SM(\omega_j, \ \omega_k) = \delta_{jk}$

（ii）（正規条件；*normality condition*）

$\forall \varphi \in \Phi, \ \Sigma_{j \in J} SM(\varphi, \ \omega_j) = 1$

（iii）（写像Tの下での不変性；*invariance under mapping T*）

$\forall \varphi \in \Phi, \ \forall j \in J, \ SM(T\varphi, \ \omega_j) = SM(\varphi, \ \omega_j)$

以上の準備の下で、

$g_j(T\varphi) \in R$（実数全体の集合）、$\varphi \in \Phi$という関数

$g_j : T \cdot \Phi \rightarrow R, \ j \in J$

ここに、$T \cdot \Phi \equiv \{T\varphi \in \Phi \mid \varphi \in \Phi\}$

を用意する。

$$SM'(\varphi, \ \omega_j) \equiv \frac{SM(\varphi, \ \omega_j) + g_j^+(T\varphi)}{\Sigma_{k \in J}[SM(\varphi, \ \omega_k) + g_k^+(T\varphi)]}$$

$$= \frac{SM(\varphi, \ \omega_j) + g_j^+(T\varphi)}{1 + \Sigma_{k \in J} g_k^+(T\varphi)} \tag{2.1}$$

ここに、

$$g_j^+(T\varphi) \equiv max\{g_j(T\varphi), \ 0\} \geqq 0$$

という写像

$$SM' : \Phi \times \Omega \rightarrow \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1\}$$

を考えてみよう。

まず、次の簡単な2事実イ、ロに注意しておく。

（イ）$g_j(T\varphi) \leqq 0 \wedge [\exists k \in J - \{j\}, \ g_k(T\varphi) > 0]$

$\Rightarrow SM'(\varphi, \ \omega_j) < SM(\varphi, \ \omega_j)$

（ロ）$g_j(T\varphi) > 0$

$$\Rightarrow SM'(\varphi, \ \omega_j) > \frac{SM(\varphi, \ \omega_j)}{1 + g_j(T\varphi) + \Sigma_{k \in J - \{j\}} g_k^+(T\varphi)}$$

$$< SM(\varphi, \ \omega_j)$$

□

次に、$SM'$ の簡単な性質を次の補助定理2．2で指摘しておく。

〔**補助定理2．2**〕

（i） $\forall \varphi \in \Phi$,〔$\forall j \in J$, $0 \leqq SM'(\varphi, \omega_j)$〕$\wedge \Sigma_{j\in J} SM(\varphi, \omega_j) = 1$

（ii） $g_j(T\varphi) \leqq 0 \wedge SM(\varphi, \omega_j) = 0$
$\Leftrightarrow SM'(\varphi, \omega_j) = 0$

（iii） $g_j(T\varphi) > 0 \vee SM(\varphi, \omega_j) > 0$
$\Leftrightarrow 0 < SM'(\varphi, \omega_j) \leqq 1$

（iv） 例えば、
$\forall k \in J - \{j\}$、$g_k(T\varphi) \leqq$ であれば、
$\Sigma_{k\in J} g_k^+(T\varphi) = g_j^+(T\varphi)$

が成り立つが、

$\Sigma_{k\in J}\ g_k^+(T\varphi) = g_j^+(T\varphi)$
$\Leftrightarrow SM'(\varphi, \omega_j) = 1$

（証明）

i の証明： $\forall \varphi \in \Phi$, $1 + \Sigma_{k\in J} g_k^+(T\varphi) \geqq 1$
であり、これから明白。

ii の証明： $g_j(T\varphi) \leqq \wedge SM(\varphi, \omega_j) = 0$
$\Leftrightarrow g_j^+(T\varphi) = 0 \wedge SM(\varphi, \omega_j) = 0$
$\Leftrightarrow SM'(\varphi, \omega_j) = 0$

iii の証明： ii の対偶であるが一応証明しておく。
$g_j(T\varphi) > 0 \vee SM(\varphi, \omega_j) > 0$
$\Leftrightarrow g_j^+(T\varphi) > 0 \vee SM(\varphi, \omega_j) > 0$
$\Leftrightarrow SM(\varphi, \omega_j) + g_j^+(T\varphi) > 0$
$\Leftrightarrow 0 < SM'(\varphi, \omega_j) \leqq 1$

iv の証明： $\Sigma_{k\in J} g_k^+(T\varphi) = g_j^+(T\varphi)$
$\Leftrightarrow 1 + \Sigma_{k\in J} g_k^+(T\varphi) = 1 + g_j^+(T\varphi)$
$\Leftrightarrow 1 + \Sigma_{k\in J} g_k^+(T\varphi) = SM(\varphi, \omega_j) + g_j^+(T\varphi) \wedge SM(\varphi, \omega_j) = 1$
$\Leftrightarrow SM'(\varphi, \omega_j) = 1$ □

実は、写像 $T: \Phi \to \Phi$ が**モデル構成作用素**と呼ばれるためには次の*axiomT*を満たしていなければならない。（写像 $T$ の諸例については、文献(13)～(15)、(17)、(18)を参照。）

*AxiomT*（**モデル構成作用素Tの公理**）[18]

（i） $\varphi = 0$ に対しては、$T\varphi = 0$

（ii）（錐性；*cone property*）
$\forall \varphi \in \Phi$、$T(a \cdot \varphi) = T\varphi$ *for any positive real number a.*

（iii）（ベキ等法則；*idempotent law*）
$\forall \varphi \in \Phi$, $T(T\varphi) = T\varphi$

（iv） $\exists \varphi \in \Phi$, $T\varphi \neq 0$ □

このとき、次の定理2.3が成り立ち、関数 $g_j$ の組 $\{g_j\}_{k \in J}$ と類似度関数 $SM$ を用い、式 (2.1) で定義される写像 $SM' : \Phi \times \Omega \to [0,\ 1]$ は

$SM : \Phi \times \Omega \to [0,\ 1]$

と同様、類似度関数として採用できる場合があることがわかる。

〔定理２．３〕(**類似度関数の再帰定理**；*reflective theorem for similarity-measure function*)

$$\forall i,\ \forall j(i \neq j) \in J,\ g_j(T\omega_i) \leqq 0 \qquad (2.\ 2)$$

が満たされていれば、写像 $SM' : \Phi \times \Omega \to [0,\ 1]$ は*axiomS*を満たす。

（証明）*axiomS*のｉ～iiiの成立を示す。

（イ）*axiomS*, ｉの成立： $\varphi = \omega_j$ とする。

$SM(\varphi,\ \omega_j) = \wedge\ [\forall k \in J - \{j\},\ SM(\varphi,\ \omega_k) = 0]$

であり、仮定式（２．２）より

$\forall i,\ \forall j(i \neq j) \in J,\ g_j^+(T\omega_i) = 0$

であることに注意しておく。

<u>イ－１</u> $$SM'(\varphi,\ \omega_j) = \frac{SM(\varphi,\ \omega_j) + g_j^+(T\varphi)}{1 + g_j^+(T\varphi)} = 1$$

<u>イ－２</u> $k \in J - \{j\}$ とする。

$$SM'(\varphi,\ \omega_k) = \frac{SM(\varphi,\ \omega_k) + g_k^+(T\varphi)}{1 + g_j^+(T\varphi)} = \frac{0 + 0}{1 + g_j^+(T\varphi)} = 0$$

（ロ）*axiomS*, iiの成立： 補助定理２．２のｉの一部である。

（ハ）*axiomS*, iiiの成立： $\varphi \in \Phi$, $j \in J$ を任意にとれば、*axiomS*のiiiと、*axiomT*のiiiとにより、$SM'(T\varphi,\ \omega_j) = SM'(\varphi,\ \omega_j)$ を得る。 □

以後、定理２．３の条件式（２．２）が成立しているとする。ならば、*axiomS*を満たす類似度関数*SM*から同じように*axiomS*を満たす今一つの類似度関数*SM'*を得ている式（２．１）は、類似度関数*SM*を*SM'*へと調整する過程

$$SM(\varphi,\ \omega_j),\ j \in J \to SM'(\varphi,\ \omega_j),\ j \in J \qquad (2.\ 3)$$

を表現しているとみなせる。

*fixed-point eguation*（**不動点方程式**）

$$\forall j \in J,\ SM'(\varphi,\ \omega_j) = SM(\varphi,\ \omega_j) \qquad (2.\ 4)$$

の示す**再帰関係**（*recursive relation*）が成立する場合を考えてみよう。以下の定理２，４での式（２．６）の成立を

**ワルラスの直交関係**（*Walras' orthogonal relation*）

ということにする。

〔定理２．４〕(**類似度関数の均衡定理**)

$$\forall j \in J,\ SM'(\varphi,\ \omega_j) = SM(\varphi,\ \omega_j) \qquad (2.\ 5)$$

$$\wedge\ \Sigma_{k \in J} SM(\varphi,\ \omega_k) \cdot g_k(T\varphi) = 0 \qquad (2.\ 6)$$

$\Rightarrow \quad \forall j \exists J,\ g_j(T\varphi) \leqq 0$ （2．7）

（証明）　式（2．5）が成立しているとする。

$$\forall j \in J,\quad SM(\varphi,\ \omega_j) = \frac{SM(\varphi,\ \omega_j) + g_j^+(T\varphi)}{1 + \Sigma_{k \in J} g_k^+(T\varphi)} \tag{2. 8}$$

$$\Rightarrow \quad \forall j \in J,\ SM(\varphi,\ \omega_j) \cdot \Sigma_{k \in J} g_k^+(T\varphi) = g_j^+(T\varphi) \tag{2. 9}$$

$\Rightarrow$　両辺に $g_j(T\varphi)$ をかけ，$j \in J$ につき総和をとれば、

$$[\Sigma_{k \in J} SM(\varphi,\ \omega_j) \cdot g_j^+(T\varphi)] \cdot \Sigma_{k \in J} g_k^+(T\varphi) = \Sigma_{j \in J} g_j^+(T\varphi) \cdot g_j^+(T\varphi) \tag{2. 10}$$

を得るが、ワルラスの直交関係式（2．6）を考慮すれば、

$$0 = \Sigma_{j \in J} g_j(T\varphi) \cdot g_j^+(T\varphi) \tag{2. 11}$$

が得られる。この右辺の各項は非負量であり、一般に

$$h(x) \cdot h^+(x) = \begin{cases} h(x)^2 & \text{if} \quad h(x) > 0 \\ 0 & \text{if} \quad h(x) \leqq 0 \end{cases}$$

ここに、$h^+(x) \equiv max\{h(x),\ 0\} \geqq 0$

であるから、式（2．7）が成立しなければならない。 □

上述の定理2．4は次の事実を指摘している：

あるパターン $\varphi \in \Phi$ について、$SM(\varphi,\ \omega_j)$，$j \in J$ の調整過程式（2．3）において、不動点方程式（2．5）が成立し、しかもワルラスの直交関係式（2．6）が成立しているとすれば、

均衡　$\forall j \in J,\ g_j(T\varphi) \leqq 0$

特別なものとして、

$$\forall j \in J,\ g_j(T\varphi) = 0 \tag{2. 12}$$

が成立している。

さて、以下に、*axiomS*を満たす類似度関数　$SM: \Phi \times \Omega \to [0,\ 1]$ の4例を掲げよう。この4例では、写像$B$は

$\varphi \in \Phi \Rightarrow B\varphi \in \Phi$

を満たすものであれば、非線形でもよい。

［構成例1］(*a logarithmic nonlinearity following Weber's Law*)

$$SM(\varphi,\ \omega_j) = \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot d_j \cdot \ell og_e[1 - |b_j(\varphi)|^2]}{\Sigma_{k \in J}(-\frac{1}{2}) \cdot d_k \cdot \ell og_e[1 - |b_k(\varphi)|^2]}$$

条件　$\forall i,\ \forall j(i \neq j) \in J,\ |b_j(\omega_i)|^2 \neq 1$

ここに、$\forall_j \in J,\ d_j > 0$

$$b_j(\varphi) \equiv \frac{(BT\varphi,\ BT\omega_j)}{\|BT\varphi\| \cdot \|BT\omega_j\|}$$

この$SM$が*axiomS*を満たすことは

$\varphi=\omega_j \Rightarrow\ b_j(\varphi)=1$

からわかる。

［構成例２］

パターン$\varphi\in\Phi$から抽出される第$\ell\in L$番目の特徴量　$u(\varphi,\ \ell_j)$を用いれば、

$$SM(\varphi,\ \omega_j)\equiv\frac{(-\frac{1}{2})\cdot d_j\cdot \ell og_e[1-|a_j(\varphi)|^2]}{\Sigma_{k\in J}(-\frac{1}{2})\cdot d_k\cdot \ell og_e[1-|a_k(\varphi)|^2]}$$

条件　$\forall i,\ \forall j(i\neq j)\in J,\ \ |a_j(\omega_i)|^2\neq 1$

ここに、$\forall j\in J,\ d_j>0$

$$a_j(\varphi)\equiv\frac{\Sigma_{k\in J}v_\ell\cdot u(BT\varphi,\ \ell)\cdot u(BT\omega_j,\ \ell)}{[\Sigma_{\ell\in L}v_\ell\cdot|u(BT\varphi,\ \ell)|^2]^{1/2}\cdot[\Sigma_{\ell\in L}v_\ell\cdot|u(BT\omega_j,\ \ell)|^2]^{1/2}}$$

$\forall\ \ell\in L,\ v_\ell>0$

この$SM$が$axiomS$を満たすことは、

$\varphi=\omega_j\Rightarrow\ a_j(\varphi)=1$

からわかる。

［構成例３］（*a fuzzy information measure*）

$$SM(\varphi,\ \omega_j)=\frac{d_j\cdot\|BT\varphi-BT\omega_j\|^{-1}}{\Sigma_{k\in J}d_k\|BT\varphi-BT\omega_k\|^{-1}},\ \ d_j>0$$

条件　$\forall i,\ \forall j(i\neq j)\in J,\ \|BT\omega_i-BT\omega_j\|>0$

［構成例４］

$$SM(\varphi,\ \omega_j)=\frac{d_j\cdot[C_j(\varphi)]^{-1}}{\Sigma_{k\in J}d_k\cdot[C_k(\varphi)]^{-1}},\ \ d_j>0$$

条件　$\forall i,\ \forall j(i\neq j)\in J,\ \exists\,\ell\in L,\ u(BT\omega_i,\ \ell)$
$\neq u(BT\omega_j,\ \ell)$

ここに

$$C_j(\varphi)=[\Sigma_{\ell\in L}v_\ell\cdot|u(BT\varphi,\ \ell)-u(BT\omega_j,\ \ell)|^2]^{1/2}$$

$\forall\,\ell\in L,\ v_\ell>0$

## ３．類似度の調整過程

本章では、価格調整過程を記述する方程式（１．６）に対応して、式（３．５）で定義される方程式を導入し、しかも、式(２．１)での関数$g_j(T\varphi)$を式(３．４)のごとく、*a many-neurons densely interconnected neural network*の形式で定義し、導入した方程式（３．14）の解の収束を論じる。

まず、１より大きくない非負実数$u_j$の組$\{u_j\}_{j\in J}$が

$[\forall\ j\in J,\ \ 0\leqq u_j]\ \wedge\ \Sigma_{j\in J}u_j=1$

を満たす形で与えられたとき、

$\varphi = \Sigma_{k\in J} u_k' \cdot T\omega_k \in \Phi$ （3．1）

　ここに、$0 \leqq u_k' \wedge \Sigma_{k\in J} u_k' = 1$

というパターン$\varphi\in\Phi$を想定し、*axiomS*を満たし次のように定義される類似度関数

$SM : \Phi\times\Omega \to \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1 |\}$

を考えておくことにしよう：

$\forall j \in J,\ \varepsilon_0(j) < u_j < \varepsilon_1(j)$

のとき、

$0 \leqq u_j \equiv u_j' + \Delta u_j' \leqq 1 \wedge [\forall j \in J,\ 0 \leqq u_j'] \wedge \Sigma_{j\in J} u_j' \leqq 1$

を満たす量$\Delta_j$の組$\{\Delta_j | j \in J\}$を想定する。
ただし、$0 \leqq \varepsilon_0(j) < \varepsilon_1(j) \leqq 1,\ j \in J$としておく。

$SM(\varphi,\ \omega_j) = SM(\Sigma_{k\in J} u_k' \cdot T\omega_k,\ \omega_j)$

$$= \begin{cases} 1\ (=u_j) & \cdots\cdots u_j' \geqq \varepsilon_1(j) \\ & \quad \wedge\ [\forall k \in J - \{j\},\ u_k' < \varepsilon_0(j)] \text{ のとき} \\ 0\ (=u_j) & \cdots\cdots u_j' \leqq \varepsilon_0(j) \\ & \quad \wedge\ [\exists k \in J - \{j\},\ u_k' > \varepsilon_0(k)] \text{ のとき} \\ u_j & \cdots\cdots \mathit{otherwise} \end{cases}$$

（3．2）□

様々な　$u_j'$，$j \in J$　を与えて、$SM(\Sigma_{k\in J} u_k' \cdot T\omega_k,\ \omega_j)$ を計算することにより、

$\varepsilon_0(j),\ \varepsilon_1(j),\ \Delta_j,\ j \in J$

をみつけることができる。このような類似度関数*SM*については、次の仮定3．1は無論成立する。

**〔仮定3．1〕**　類似度関数

$SM : \Phi\times\Omega \to \{s \mid 0 \leqq s \leqq 1 |\}$

に対し、

$u = \{u_j | j \in J\},\ 0 \leqq u_j (j \in J) \wedge \Sigma_{k\in J} u_j = 1$

が与えられたとき、

$\forall j \in J,\ SM(\varphi,\ \omega_j) = u_j$ （3．3）

を満たす$\varphi\in\Phi$が少くとも1つは存在するようなパターン集合$\Phi$が存在する。□

また、次の仮定3．2をも用意する。

**〔仮定3．2〕**　式（2．1）内の関数

$g_j : T\cdot\Phi \to R$（実数全体の集合）

は$SM(T\varphi,\ \omega_j)(= SM(\varphi,\ \omega_j))$，$j \in J$　によって一意的に決まるとする。

本論文では、仮定3．2を満たす関数$g_j$を

$g_j(T\varphi) = \Sigma_{k\in J} W_{jk}\cdot f_k(SM(T\varphi,\ \omega_k)) - h_j,\quad j\in J$

ここに、$W_{jk}$, $h_j$（$j$, $k\in J$）は実数値の重み、しきい値、

$f_k(u)$ は一実変数 $u$ の単調非減少関数

（3．4）

と設ける。$g_i(T\varphi)$ の右辺は *Hopfield neural net* [(5), (6), (11), (13), (18)～(20)]の形式で与えられていることに注意する。

$W_{jk}$, $h_j$, $f_k$（$j$, $k\in J$）が固定されたとき、

$$\tau(d/dt)SM(\varphi,\ \omega_j) = g_j(T\varphi),\quad j\in J \tag{3. 5}$$

つまり、

$$\tau(d/dt)SM(\varphi,\ \omega_j) = \Sigma_{k\in J} W_{jk}\cdot f_k(SM(T\varphi,\ \omega_k)) - h_j,\quad j\in J \tag{3. 6}$$

という力学方程式（*the neurodynamical system of equations)* に従って、類似度関数 $SM(\varphi,\ \omega_j)$, $j\in J$ の値は変動するものとする。ここに、$\tau>0$ は時定数である。

上述の設定は，ミクロ経済学[(1)]では、

$\overline{x_j^c}$：消費者 $c$ の、財 $j$ の初期保有量

として、式（1．6）での価格調整方程式

$$(d/dt)\cdot p_j(t) = Z_j(p(t)),\quad j=1\sim n$$

での超過需要関数 $Z_j(p(t))$ は

$Z_j(p) = \Sigma_{c=1}^{m} x_j^c(p) - \Sigma_{c=1}^{m}\overline{x_j^c}$

（財 $j$ への超過需要量）

と与えられることに対応している。つまり、

$h_j$：財 $j$ への初期保有量（供給）

$g_j(T\varphi) = \Sigma_{k\in J} W_{jk}\cdot f_k(SM(\varphi,\ \omega_k)) - h_j$

：（時刻 $t$ での、財 $j$ への超過需要量）

と考える訳である。

方程式（3．6）の意味は次の通りである。

（3．i）　$\Sigma_{k\in J} W_{jk}\cdot f_k(SM(\varphi,\ \omega_k)) > h_j$

（需要＞供給）であれば、$SM(\varphi,\ \omega_j)$ は増加し、

もし、パターン $\varphi\in\Phi$ が第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属するならば、パターン $\varphi$ は正しく認識されるような状況へと変化している。

（3．ii）　$\Sigma_{k\in J} W_{jk}\cdot f_k(SM(\varphi,\ \omega_k)) < h_j$

（需要＜供給）であれば、$SM(\varphi,\ \omega_j)$ は減少し、

もし、パターンが第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ 以外のカテゴリ $\mathfrak{C}_k$（$k\neq j$）に帰属するならば、パターン $\varphi$ は正しく認識される状況へと変化している。

（3．iii）　$\Sigma_{k\in J} W_{jk}\cdot f_k(SM(\varphi,\ \omega_k)) = h_j$

（需要＝供給）であれば、$SM(\varphi,\ \omega_j)$ は一定値のままに留まり、パターン　$\varphi\in\Phi$ を正しくあるいは誤まって認識する状況が達成されている。　□

このようにして、式（3．4）の $g_j(T\varphi)$ は、ミクロ経済学における超過需要関数に対応したものであり、均衡（*equilibirium*）とは、

$g_j(T\varphi)=0$, $j\in J$, つまり、
$\Sigma_{k\in J}W_{jk}\cdot f_k(SM(T\varphi,\ \omega_k))=h_j,\ \ j\in J$

が満たされる状況、具体的には、このときの

$SM(T\varphi,\ \omega_j)$, $j\in J$（価格ベクトル）と
$\Sigma_{k\in J}W_{jk}\cdot f_k(SM(T\varphi,\ \omega_k))$, $j\in J$（需要ベクトル）との組

を指しているといえよう。均衡を求めるということは、いいかえれば、方程式系（3．6）を解くということは、$W_{jk}$, $h_j$, $f_k$（$j$，$k\in J$）が固定されて与えられたとき、連立1次方程式

$$\Sigma_{k\in J}W_{jk}\cdot x_k=h_j,\ \ j\in J,$$
$$\text{ここに、}x_k\equiv f_k(SM(T\varphi,\ \omega_k)) \qquad (3.\ 7)$$

を解くことに他ならない。

ここで、式（3．4）で登場した、一変数$u$の単調非減少関数$f_k$の具体例を与えておこう：

$$f_k(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+exp\left[-\dfrac{(u-s_k)}{a_k}\right]} & if\quad \varepsilon_0(k)<u<\varepsilon_1(k)\\ 1\quad if\quad u\geqq\varepsilon_1(k) & \\ 0\quad if\quad u\leqq\varepsilon_0(k) & \end{cases}$$

ここに、

$$0<a_k,\qquad -\infty<s_k<+\infty$$
$$-\infty<\varepsilon_0(k)<s_1(k)<+\infty$$
$$\varepsilon_0(k)<s_k<\varepsilon_1(k) \qquad (3.\ 8)$$

上記の式（3．8）の関数$f_k$の逆関数

$f_k^{-1}(y)$, ただし、$0<y<1$

は一意的に定まり、

$$f_k^{-1}(y)=s_k-a_k\cdot \ell og\,[(1-y)/y] \qquad (3.\ 9)$$

と与えられるから、

$y_k=f_k(SM(\varphi,\ \omega_k))$

が与えられると、類似度 $SM(\varphi,\ \omega_k)$ は

$$SM(\varphi,\ \omega_k)\begin{cases}=s_k-a_k\cdot \ell og[(1-y_k)/y_k] & if\quad 0<y_k<1\\ \geqq\varepsilon_1(k) & if\quad y_k=1\\ \leqq\varepsilon_0(k) & if\quad y_k=0\\ \in\phi\,(the\ empty\ set) & if\quad y_k>1\ \vee\ y_k<0\end{cases} \qquad (3.\ 10)$$

と求まる。なお、微分係数 $(d/du)f_k(u)$ は次のように求まる：

$(d/du)f_k(u)$

$$
= \begin{cases} a_k^{-1} \cdot f_k(u)\,[\,1 - f_k(u)\,] \\ \quad\quad if \quad \varepsilon_0(k) < u < \varepsilon_1(k) \\ 0 \quad if \quad u \geqq \varepsilon_1(k) \vee u \leqq \varepsilon_0(k) \end{cases}
$$

（３．11）

また、式（３．４）の $g_j(T\varphi)$ は次のように分解できることにも注意しておく。

$W_{jk} = W_{jk}^{+} - W_{jk}^{-}, \quad h_j = h_j^{+} - h_j^{-}$

ここに

$$
W_{jk}^{-} = 2^{-1} \cdot [\,|W_{jk}| + W_{jk}] = \begin{cases} W_{jk} & if \quad W_{jk} \geqq 0 \\ 0 & if \quad W_{jk} < 0 \end{cases}
$$

$$
W_{jk}^{-} = 2^{-1} \cdot [\,|W_{jk}| - W_{jk}] = \begin{cases} 0 & if \quad W_{jk} > 0 \\ -W_{jk} & if \quad W_{jk} \leqq 0 \end{cases}
$$

$h_j^{+} = 2^{-1} \cdot [\,|h_j| + h_j]$

$h_j^{-} = 2^{-1} \cdot [\,|h_j| - h_j]$ （３．13）

と、正部分 $W_{jk}^{+}$, $h_j^{+}$, 負部分 $W_{jk}^{-}$, $h_j^{-}$ の２つに各々 $W_{jk}$, $h_j$ は分解でき、

$$
g_j(T\varphi) = \Sigma_{k \in J} W_{jk}^{+} \cdot f_k(SM(\varphi, \omega_k)) - h_j^{+}
$$
$$
- [\Sigma_{k \in J} W_{jk}^{-} \cdot f_k(SM(\varphi, \omega_k)) - h_j^{-}]
$$

（３．14）□

さて、類似度 $SM$ の調整過程を表現する微分方程式（３．５）あるいは（３．６）の解

$SM(\varphi, \omega_j), \quad j \in J$

の存在につき、論じよう。

いかなる類似度

$SM(\varphi, \omega_j)|_{t=0} = u_j, \quad j \in J$

から出発しても、一意的な均衡へと収束していくという

類似度調整過程の大域的安定性（*global stability*）

は一般には成り立たない。成り立つのは例えば、次の場合である。

リャプーノフ関数（*Liapunov-function*）と呼ばれる

$V = V(SM(\varphi, \omega_j), \quad j \in J)$

が存在して、２条件

（３．ａ）均衡（$\forall\, j \in J$, $g_j(T\varphi) = 0$ を満たす状況）以外の類似度 $SM(\varphi, \omega_j)$, $j \in J$ では、

$V > 0 \wedge (d/dt)\,V < 0$

（３．*b*）均衡類似度 $SM^*(\varphi, \omega_j)$, $j \in J$

では、

$V(SM^*(\varphi, \omega_j), \quad j \in J) = 0$

が満たされれば、

均衡以外の任意の類似度 $SM(\varphi, \omega_j)$, $j \in J$

を初期値とする解は均衡に収束する

ことが知られている。ただし、以下の解析からわかるように、

任意の類似度 $SM(\varphi, \omega_j)$, $j \in J$ から出発したとき得られる解が(十分長い時間をかけて次第に)「すべての均衡類似度ベクトル $SM^*(\varphi, \omega_j)$, $j \in J$ の集合」の内の一つへ近づいて行くという準安定性(*quasi-stability*)

をもつ。

$$E_1 \equiv -\frac{1}{2}\Sigma_{i \in J}\Sigma_{j \in J}\, 2^{-1} \cdot W_{ij} \cdot f_i(SM(\varphi, \omega_i)) \cdot f_j(SM(\varphi, \omega_j)) + \Sigma_{i \in J}\, 2^{-1} \cdot h_i \cdot f_i(SM(\varphi, \omega_i)) \quad (3.16)$$

$$E_2 \equiv -\frac{1}{2}\Sigma_{i \in J}\Sigma_{j \in J}\, 2^{-1} \cdot W_{ji} \cdot f_i(SM(\varphi, \omega_i)) \cdot f_j(SM(\varphi, \omega_j)) + \Sigma_{i \in J}\, 2^{-1} \cdot h_i \cdot f_i(SM(\varphi, \omega_i)) \quad (3.17)$$

$$E \equiv E_1 + E_2 = -\frac{1}{2}\Sigma_{i \in J}\Sigma_{j \in J} W_{ij}' \cdot f_i(SM(\varphi, \omega_i)) \cdot f_j(SM(\varphi, \omega_j)) + \Sigma_{i \in J} h_i \cdot f_i(SM(\varphi, \omega_i))$$

ここに、$W_{ij}' = 2^{-1}\,[W_{ij} + W_{ji}]$ (3. 18)

とすると、$E_1 = E_2$ であるから、

$$E = 2E_1 = -\frac{1}{2}\Sigma_{i \in J}\Sigma_{j \in J} W_{ij} \cdot f_i(SM(\varphi, \omega_i)) \cdot f_j(SM(\varphi, \omega_j)) + \Sigma_{i \in J} h_i \cdot f_i(SM(\varphi, \omega_i)) \quad (3.19)$$

が成り立つ。ここに、

$W_{ij}' = W_{ji}'$ *for any i and j* (対称性;*the symmetric connection weight*)

が成り立っていることに注意しておく。

$E_1$ を最小化することはリヤプノフ関数(エネルギー関数、*energy function*)と呼ばれるEを最小化することになるから、式(3. 6)の代りに

$$\tau\,(d/dt)SM(\varphi, \omega_j) = \Sigma_{k \in J} W_{jk}' \cdot f_k(SM(\varphi, \omega_k)) - h_j, \quad j \in J$$

ここに、$W_{jk}' = W_{kj}' = 2^{-1}\,[W_{jk} + W_{kj}]$ (3. 20)

を考え、その収束を論じればよい。

$$\tau\,(d/dt)SM(\varphi, \omega_j) = \Sigma_{k \in J} W_{jk} \cdot f_k(SM(\varphi, \omega_k)) - h_j, \quad j \in J \quad (3.21)$$

$$\tau\,(d/dt)SM(\varphi, \omega_j) = \Sigma_{k \in J} W_{kj} \cdot f_k(SM(\varphi, \omega_k)) - h_j, \quad j \in J \quad (3.22)$$

が共に収束するとしよう。各々に $2^{-1}$をかけて加えると、式(3. 20)を得ることになり、

式(3. 21)、式(3. 22)、が共に収束すると、式(3. 20)が収束する、あるいはその対偶をとり、式(3. 20)が収束しないのなら、式(3. 21)、式(3. 22)のいずれか一つは収束しない

という結論を得ることに注意する。

式(3. 20)なる微分方程式系は、初期値

$SM(\varphi, \omega_j)|_{t=0}$

が与えられると、離散近似式

$$SM(\varphi,\ \omega_j)|_{t+\Delta t}=SM(\varphi,\ \omega_j)|_t+\Delta SM(\varphi,\ \omega_j)|_t$$

ここに、

$$\Delta SM(\varphi,\ \omega_j)|_t=\frac{\Delta t}{\tau}\cdot〔\Sigma_{k\in J}W_{jk}'\cdot f_k(SM(\varphi,\ \omega_k)|_t)-h_j〕 \qquad (3.\ 23)$$

を次々適用すると、解くことができることに注意しておく。

次の定理3．1から分かるように、式（3．18）で定義されたエネルギーEに関し、

$dE/dt \leqq 0$（エネルギーEの減少性）

が成り立つ。

〔定理3．1〕(**エネルギー減少定理**)

$u_j \equiv SM'(\varphi,\ \omega_j),\ x_j \equiv f_j(SM'(\varphi,\ \omega_j)),\ j\in J$

とおくと、

（i）$\partial E/\partial x_j=-〔\Sigma_{k\in J}W_{jk}'\cdot x_k-h_j〕,\ j\in J$

がいえ、式（3．20）が成り立っていれば、

$\partial E/\partial x_j=-\tau\ (d/dt)\ u_j,\ \ j\in J$

（ii）

$$\tau\frac{dE}{dt}=-\Sigma_{j\in J}(\tau\frac{du_j}{dt})^2\cdot\frac{d}{du}f_j(u)|_{u=u_j}\leqq 0$$

（証明）　$a_{ij},\ h_j$が変数 $y_i$（$i=1\sim n$）を含まない定数として、

（イ）$a_{ij}=a_{ji}$（$i,\ j=1\sim n$）の下では、

$(\partial/\partial y_k)\ \Sigma_{i=1}^{n}\Sigma_{j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j$

$=2\cdot\Sigma_{i=1}^{n}a_{kj}\cdot y_j,\ \ k=1\sim n$

（ロ）$(\partial/\partial y_k)\ \Sigma_{i=1}^{n}h_iy_i=h_k,\ \ k=1\sim n$

が成立していることを適用すると、

$\partial E/\partial x_j=(\partial/\partial x_j)〔-2^{-1}\Sigma_{i\in J}\Sigma_{j\in J}W_{ij}'\cdot x_ix_j+\Sigma_{i\in J}h_ix_i)$

$=-\Sigma_{k\in J}W_{jk}'\cdot x_k+h_j$

$=-〔\Sigma_{k\in J}W_{jk}'\cdot x_k-h_j〕$

を得て、iが示された。

iiの証明：

$\tau dE/dt=\tau\cdot\Sigma_{k\in J}(\partial E/\partial u_j)\cdot(du_j/dt)$

であるが、

$(\partial E/\partial u_j)=(\partial E/\partial x_j)\cdot(dx_j/du_j)$

$=(\partial E/\partial x_j)\cdot(d/du)f_j(u)|_{u=u_j}$

が成立していることを代入すれば、

$$\tau\cdot\frac{dE}{dt}=\Sigma_{j\in J}\frac{\partial E}{\partial x_j}\cdot\frac{dx_j}{du_j}\cdot(\tau\frac{du_j}{dt})$$

となり、iを代入すると、

$$\tau \cdot \frac{dE}{dt} = \Sigma_{j \in J} (-\tau \frac{d}{dt} u_j) \cdot (\tau \frac{du_j}{dt}) \cdot \frac{d}{du} f_j(u)|_{u=u_j}$$

$$= -\Sigma_{j \in J} (-\tau \frac{d}{dt} u_j)^2 \cdot \frac{d}{du} f_j(u)|_{u=u_j} \leqq 0$$

$\because$ $f_j(u)$は$u$の単調非減少関数 □

定理3．1は式（3．16）のエネルギー$E_1$を極小にする微分方程式（3．20）の解が求まることを保証する。それは次の事実から明白である。

$(\Delta t)/\tau > 0$ を十分小さく選び、式（3．23）による逐次近似法を適用し、

$$\ell im_{t \to \infty} SM(\varphi, \omega_j)|_t$$

を求めれば、定理3．1のiiからわかるように、

式（3．18）のEを極小にする類似度$SM(\varphi, \omega_j)$, $j \in J$ が求まり、これは、式（3．19）から、

式（3．16）の$E_1$を極小にする微分方程式（3．20）の解$SM(\varphi, \omega_j)$, $j \in J$

である。

## 4．重み、しきい値の学習

第3章では、第2章での*axiomS*を満たすことで定義され得る類似度関数 $SM: \Phi \times \Omega \to [0, 1]$ を調整する過程につき、

重み $W_{jk}$, 閾値 $h_j$ ($j$, $k \in J$)

を固定して、微分方程式（3．5）あるいは（3．6）の解$SM(\varphi, \omega_j)$の収束性を論じた。本章では、類似度関数$SM$の再帰定理（定理2．3）を満たす形で、つまり式（2．2）を満たす形で、この重み、しきい値の組を学習的決定すること、類似度関数$SM$の自己組織化過程を研究しよう。

式（2．1）、式（3．4）、式（3．8）に関連して、$SM$の再帰定理（定理2．3）から、

$$SM'(\varphi, \omega_j) = \frac{SM(\varphi, \omega_j) + g_j^+(T\varphi)}{1 + \Sigma_{k \in J} g_k^+(T\varphi)} \quad (4.\ 1)$$

ここに、

$$g_j^+(T\varphi) = \begin{cases} 0 & if \quad g_j(T\varphi) \leqq 0 \\ g_j(T\varphi) & if \quad g_j(T\varphi) > 0 \end{cases} \quad (4.\ 2)$$

$$g_j(T\varphi) = \Sigma_{k \in J} W_{jk} \cdot f_k(SM(\varphi, \omega_k)) - h_j, \quad j \in J \quad (4.\ 3)$$

$f_k(u)$ は一実変数$u$の単調減少関数であり、

$-\infty < u < +\infty$に対し、

$$0 \leqq f_k(u) \leqq 1, \quad k \in J \quad (4.\ 4)$$

と定義される関数 $SM': \Phi \times \Omega \to [0, 1]$ が*axiomS*を満たすためには、

$$\forall i, \ \forall j \ (i \neq j) \in J, \ g_j(T\omega_i) \leqq 0 \quad (4.\ 5)$$

(*a conceptually orthogonal principle of redundancy reduction and irrelevancy removal*)

は必ず満たされなければならないことに注意する。

まず、不等式（4．5）が成り立つための一つの十分条件を明らかにしよう。

〔定理4．1〕(**再帰定理が成り立つための十分条件定理**)　条件

$$f_j(0)=0 \wedge f_j(1)=1,\ j\in J \tag{4.6}$$

の下では、

$$\forall i,\ \forall j(i\neq j)\in J,\ W_{ji}\leqq h_j \tag{4.7}$$

であれば、

$$\forall i,\ \forall j(i\neq j)\in J,\ g_j(T\omega_i)\leqq 0 \tag{4.8}$$

(証明)

$\delta_{ik}=1$　*if*　$i=k,=0$　*if*　$i\neq k$

とすると、*axiomS*より

$SM(\omega_i,\ \omega_k)=\delta_{ik}$

が成り立っているから、また、本定理の条件より

$$f_k(\delta_{ik})=\delta_{ik} \tag{4.9}$$

が成り立っている。よって

$$\begin{aligned}
&\forall i,\ \forall j(i\neq j)\in J,\\
&g_i(T\omega_i)\\
&=\Sigma_{k\in J}W_{jk}\cdot f_k\ (SM(\omega_i,\ \omega_k))-h_j\\
&=\Sigma_{k\in J}W_{jk}\cdot f_k\ (\delta_{ik})-h_i\\
&=W_{ji}\cdot f_i\ (\delta_{ii})-\Sigma_{k\in J-\{i\}}W_{jk}\cdot f_k\ (\delta_{ik})-h_i\\
&=W_{ji}-h_j\leqq 0
\end{aligned}$$

□

補助定理2.2のⅱ、ⅳ並びに定理2.3からわかるように

$$g_j(T\varphi)\begin{cases}>0\ \cdots\cdots \text{訓練パターン}\ \varphi\ \text{がカテゴリ}\ \mathfrak{C}\ \text{に帰属しているとき} & (4.10)\\ \leqq 0\ \cdots\cdots \text{訓練パターン}\ \varphi\ \text{が}\ \mathfrak{C}_j\ \text{以外のカテゴリ}\ \mathfrak{C}_k\ (k\neq j)\ \text{に帰属しているとき} & (4.11)\end{cases}$$

を満たすように

$W_{jk},\ h_j\ (j,\ k\in J)$

を決めればよい。ここで、式（4．8）からわかるように、式（4．10）は必ずしも必要でない。

時刻 $t$ に、カテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に帰属していると判明している訓練パターン $\varphi_t$ が入力されたとき、

$$\begin{aligned}
W_{jk}\ (t+\Delta t)&=W_{jk}(t)+\Delta W_{jk}(t)\\
h_j\ (t+\Delta t)&=h_j(t)+\Delta h_j(t)
\end{aligned}$$

という更新過程において、

$$\Delta W_{jj}(t) \geqq 0$$
$$\forall k \in J - \{j\},\ \Delta W_{jk}(t) < 0 \qquad (4.13)$$

とすればよい。

以下、**最急降下法**（*method of steepest descent*）を適用して、重み $W_{jk}$、閾値 $h_j$ の学習的決定を論じる。

まず、訓練パターン $\varphi_t$ の系列

$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots\cdots,\ \varphi_t,\ \cdots\cdots$

を用意する。$y_k(t)$, $v_{jk}(t)$ を

$$y_k(t) = \begin{cases} f_k(SM(\varphi_t,\ \omega_k)) & \cdots\cdots k \in J \text{ のとき} \\ 1 & \cdots\cdots k = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$v_{jk}(t) = \begin{cases} W_{jk}(t) & \cdots\cdots k \in J \text{ のとき} \\ -h_j(t) & \cdots\cdots k = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義し、

$$[V_j(t),\ y(t)] \equiv \Sigma_{k \in J\{0\} \cup J}\, v_{jk}(t) \cdot y_k(t)$$

ここに

$$V_j(t) \equiv \{v_{jk}(t) \mid k \in \{0\} \cup J\}$$
$$y(t) \equiv \{y_k(t) \mid k \in \{0\} \cup J\}$$

とおくと、

$$g_j(T\varphi_t) = \Sigma_{k \in J}\, W_{jk}(t) \cdot f_k(SM(\varphi_t,\ \omega_k)) - h_j(t)$$

は

$$g_j(T\varphi_t) = [V_j(t),\ y(t)] \qquad (4.14)$$

と表現できる。

不等式　$0 < \alpha < 1$　を満たす $\alpha$ と正実数 $c$ を固定して（$c = 1$ と採ってよい）、*criterion function*

$F_{j,\alpha}(t)$

$$= \begin{cases} \alpha\{c - [V_j(t),\ y(t)]\} > 0 \\ \qquad \cdots\cdots \varphi_t \text{がカテゴリ} \mathfrak{C}_j \text{に帰属し、} [V_j(t),\ y(t)] < c \text{ の場合} \\ (1-\alpha)\{c + [V_j(t),\ y(t)]\} > 0 \\ \qquad \cdots\cdots \varphi_t \text{がカテゴリ} \mathfrak{C}_j \text{以外のカテゴリ} \mathfrak{C}_k\ (k \neq j) \text{ に帰属し、} \\ \qquad [V_j(t),\ y(t)] > -c \text{ の場合} \\ 0 \qquad \cdots\cdots \text{その他} \end{cases}$$

を用意し（この評価関数 $F_{j,\alpha}(t)$ の形式は文献(5)から *hint* を得ている）、微分方程式系

$$\tau \frac{d}{dt} v_{jk} = -\varepsilon'(t) \cdot \frac{\partial}{\partial v_{jk}} F_{j,\alpha}(t), \quad j \in J, \quad k \in \{0\} \cup J$$

ここに、$\varepsilon'(t) > 0$, $\tau > 0$ （4．16）

に従って、各$v_{jk}$を更新することを考えよう。実際には、適当な初期値

$$v_{jk}(t)|_{t=0}$$

の下で、微分方程式系（4.16）の離散近似

$$v_{jk}(t+\Delta t) = v_{jk}(t) + \Delta v_{jk}(t) \qquad (4.17)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \Delta v_{jk}(t) &= -\frac{\Delta t}{\tau} \cdot \varepsilon'(t) \cdot \frac{\partial}{\partial v_{jk}} F_{j,\alpha}(t) \\ &= \varepsilon(t) \cdot [-(\partial/\partial v_{jk}) F_{j,\alpha}(t)] \\ \varepsilon(t) &\equiv (\Delta t/\tau) \cdot \varepsilon'(t) > 0 \\ \Delta t &= 1 \end{aligned} \qquad (4.18)$$

を使って、更新していけばよい。ここに、

$$-(\partial/\partial v_{jk}) F_{j,\alpha}(t)$$

$$= \begin{cases} \alpha \cdot y_k(t) \cdots\cdots \varphi_t \text{がカテゴリ} \mathfrak{C}_j \text{に帰属し、} [V_j(t),\ y(t)] < c \text{ の場合} \\ -(1-\alpha)\ y_k(t) \\ \qquad \cdots\cdots \varphi_t \text{がカテゴリ} \mathfrak{C}_j \text{以外のカテゴリに帰属し、} [V_j(t),\ y(t)] > -c \text{ の場合} \\ 0 \ \cdots\cdots \text{その他} \end{cases} \qquad (4.19)$$

何故ならば、式（4．16）を代入すれば、

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} F_{j,\alpha}(t) &= \tau \cdot \Sigma_{k \in \{0\} \cup J} \frac{\partial F_{j,\alpha}}{\partial v_{jk}} \cdot \frac{dv_{jk}}{dt} \\ &= \Sigma_{k \in \{0\} \cup J} \frac{\partial F_{j,\alpha}}{\partial v_{jk}} \cdot \tau \frac{dv_{jk}}{dt} \\ &= -\varepsilon'(t) \cdot \Sigma_{k \in \{0\} \cup J} (\partial F_{j,\alpha}/\partial v_{jk})^2 \leqq 0 \end{aligned} \qquad (4.20)$$

となって $F_{j,\alpha}(t)$ は微分方程式（4．16）の解曲線の上で決して増加しないことがわかる。従って、この微分方程式（4．16）を解き、十分時間が経過したときの $v_{jk}$ の値を求めれば、各 $F_{j,\alpha}(t)$ をその都度、極小にする $v_{jk}(j \in J,\ k \in \{0\} \cup J)$ が求められる。

もし、有限時間で打ち切って得られる解 $v_{jk}(j \in J,\ k \in \{0\} \cup J)$ に関し、

（4．イ）$\varphi = \omega_j$ のとき、$[V_j,\ y] \leqq 0$
（4．ロ）$\varphi = \omega_k\ (k \neq j)$ のとき、$[V_j,\ y] > 0$

のいずれか一つが成立していれば、上述の学習はまだ十分なされていない事実を示していることに注意しておこう。

## 5．他の諸研究について

本章では、本研究内容への理解を深めるために、

$$\tau \frac{d}{dt} u_i(t) = -u_i(t) + \Sigma_{j=1}^{n} W_{ij} \cdot x_j(t) - h_i, \quad i = 1 - n$$

ここに、

$u_i(t)$：第 i （＝1～$n$）番目のニューロンの活動レベル（*activation level*）

$x_i(t)$：第 i （＝1～$n$）番目のニューロンの時刻 $t$ での出力（$x_i(t) = f_i(u_i(t))$）

$f_i(u)$：ニューロン発火関数（*activation function*）

$\tau$：時定数（＞0）

$W_{ij}$：第 $j$ ニューロンから第 $i$ ニューロンへのシナプス結合の重み（*weight of the synaptic connection*）

$W$：*symmetric*（*zero-diagonal*）*connection matrix*

$$W = (W_{ij})_{1 \leq i,\ j \leq n}$$

$$W_{ij} = W_{ji}, \quad W_{ii} = 0 \quad (i,\ j = 1 \sim n)$$

と表される*Hopfield networks of formal neurons*[11]についての応用研究を簡単に紹介しておく。

*L. Bobrowski*は、方程式

$$\frac{d}{dt} W_i = -\varepsilon(t) \cdot \frac{\partial}{\partial W_i} \psi_{k,\alpha}(W), \quad i = 0 \sim N$$

ここに、$\varepsilon(t)$は十分小なる正数

$$-(\partial/\partial W_i)\ \psi_{k,\alpha}(W) = \alpha \cdot \Sigma_{j \in J_1(W)}\ y_i^j - (1-\alpha) \cdot \Sigma_{j \in J_0(W)} y_i^j$$

を解く形式で、いいかえれば、*the Perceptron criterion function*

$$\psi_{k,\alpha}(W) = \alpha \cdot \Sigma_{j \in J_1(W)} [1 - (W,\ y^j)] + (1-\alpha) \cdot \Sigma_{j \in J_0(W)} [1 + (W,\ y^j)]$$

ここに、

$$0 < \alpha < 1$$

$$(W,\ y^j) = -\theta \cdot 1 + \Sigma_{k=1}^{N} W_k \cdot x_k^j$$

$$W = \{W_i |\ i = 0 \sim N\}, \quad W_0 = -\theta$$

$$y^j = \{y_i^j |\ i = 0 \sim N\}, \quad y_0^j = +1$$

$$y_i^j = x_i^j (i = 1 \sim N)$$

$$J_1(W) = \{ j\ | y^j \in \hat{C}_k \wedge (W,\ y^j) < 1 \}$$

$$J_0(W) = \{ j\ | y^j \in \cup_{i \neq k} \hat{C}_i \wedge (W,\ y^j) > -1 \}$$

$\hat{C}_k$：第 $k$（＝1～$K$）番目のクラス$C_k$に帰属する特徴ベクトル$x^j = \{x_i^j |\ i = 1 \sim N\}$の集合であり、$\hat{C}_k = \{x^j\}_{j=1 \sim M_k}$

を最小化する重みベクトル$W$が

*the steepest descent strategy of basis exchange*

を適用して決定され（*the supervised learning process*）

$$\Sigma_{k=1}^{N} W_k \cdot x_k \geqq \theta, \quad < \theta$$

に従って、*the feature vector* $x = \{ x_i |\ i = 1 \sim N\}$ の集合を2分割する方法が研究されている。[5]

島健、釜谷幸男、田中俊明は、エネルギー

$E=-(1/2)\Sigma_i\Sigma_j W_{ij}V_iV_j-\Sigma_i I_iV_i+\Sigma_i(1/R_i)\int_0^{V_i}dv\, g^{-1}(v)$

を持つホップフィールドニューラルネット

$C_i(d/dt)U_i=-U_i/R_i+\Sigma_j\cdot W_{ij}\cdot V_j+I_i$

ここに、$V_i=g(U_i)$

$1/R_i=1/\rho_i+\Sigma_j W_{ij}$

を

$C_i\,[U_i(t+\Delta)-U_i(t)]/\Delta$

$=-U_i(t+\Delta/2)/R_i+\Sigma_j\,[(W_{ij}+W_{ji})/2]\cdot V_j(t+\Delta/2)+I_i$

と近似し、ハードウェア化する際の回路の冗長性をなくす方式について論じている。(6)

*Teuvo Kohonen*は、

入力事象 $A_1$, $A_2$, $A_3$, …… の間に、$A_1RA_2RA_3R$……という関係がある場合、$x(A_k)=\{x_j(A_k)\,|\,j=1\sim n\}$ を入力として得られる出力 $\eta_{i(k)}$ が例えば、

$\eta_{i(k)}=\max_i \Sigma_{j=1}^{n} W_{ij}\cdot x_j(A_k)$

と表される場合に、

$i_1>i_2>i_3>\cdots\cdots$

という関係が成り立たせる様な重みベクトル $W_{ij}$ が例えば、

$W_{ij}(t+\Delta t)=W_{ij}(t)+\alpha\cdot x_j(t)\cdot\|W_i(t)+\alpha\cdot x(t)\|$

ここに、$W_i(t)=\{W_{ij}(t)\,|\,j=1\sim n\}$

$x(t)==\{x_i(t)\,|\,j=1\sim n\}$

という形式で決定される自己組織化過程（*self-organizing process*）を論じている。(19)

*R. J. Mceliece*等は、

$x_i'=sgn\ (\Sigma_{j-1}^{n} W_{ij}\cdot x_j)$, $i=1\sim n$

ここに、

$sgn(u)=-1\ \ if\ \ u<0,=0\ \ if\ \ u=0$

$=+1\ \ if\ \ u>0$

という形式で、

$x=\{x_i\ |\ x_i\in\{-1,+1\},\ \ i=1\sim n\}$ を

$x'=\{x_i'\ |\ x_i'\in\{-1,+1\},\ \ i=1\sim n\}$ へと変換する動作

を何回か反復して、

*symmetric zero-diagonal connection matrix*

$W=\{W_{ij}|\,i,\ \ j=1\sim n\}$

に貯えた記憶内容を、

ベクトル $x$ を *probe* として、$x'$ の形で呼び出す

*Hopfield associative recall*

の機能を備えた *the asynchronous associative memory* に関し、正確に呼び出せる（その成分±1が確率的に独立に確率1/2で生起する）記憶ベクトルの偶数 $m$（*the expected number of fixed points as a function of n*）をニューロン数 $n$ の関数の形で推定している。(20)

## 6．むすび

本論文は、これ迄、情報学という新しい学問領域に関し、*S.Suzuki*等によって発表された論文(7)~(12)に続くものである。

ミクロ経済学[1]における各財への超過需要量に対応する量を *Hopfield neural net* の形式で表すと、*S.Suzuki*の提案した“パターン認識の数学的理論[18]”での類似度関数

$SM : \Phi \times \Omega \rightarrow \{ s \mid 0 \leqq s \leqq 1 \}$

に関し、価格調整過程を記述する方程式が今一つの新しい類似度を定義し(定理2．3)、しかもパターン認識システムの内蔵する類似度に関する学習過程（*the supervised learning process*）が素直に導入され得ることが示された。

式（2．1）で定義される　$SM' : \Phi \times \Omega \rightarrow [0,\ 1]$ が*axiomS*を満たす類似度関数であるための定理2．3（類似度関数の再帰定理）での条件式（2．2）は、第4章での“学習の成立条件（式（4．10)、式（4 .11))が各カテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターン$\omega_j$の集合$\Omega$について成立すること、つまり

$\forall j \in J,\ g_j(T\omega_j) > 0$

$\forall i \in J - \{ j \},\ g_j(T\omega_i) \leqq 0$

での後半であるが、この後半は

$j \in J$と異なるすべての$i \in J$についての$\omega_i$の和集合の各元$\varphi$

について、

ワルラスの法則は類似度関数調整過程の終了を表しているという結論である定理2．4（類似度関数の均衡定理）の式（2．7）が成り立つこと

を意味しているのである。

1990年代に至り、社会を動かすのに必要とされる経済的な資源は資本、労働よりも情報・知識が主要で根本的な役割を果たす“知識社会”へ突入したといわれる。本研究は、ミクロ経済学原理の一つと同様な考えが“パターンに関する知識（類似度)”を処理する工学分野においても成り立つと想定した場合に得られる手法の一つを提案したと思われるのである。

## 文　　献

（1）西村和雄：“ミクロ経済学”、東洋経済新報社、1992－06

（2）佐々木宏夫：“情報の経済学－不確実性と不完全情報”、日本評論社、1991－08

（3）青木昌彦：“日本企業の組織と情報”、東洋経済新報社、1991－02

（4）岸本一男：“証券価格変動をめぐる諸問題”情報処理（情報処理学会誌)、*Vol.*34、№3、*pp.*299－308、1993－05

（5）*Leon Bobrowski*：“*Dsign of Piecewise Linear Classifies from Formal Neurons by a basis Exchange Technique*”、*Pattern Recognition*、*Vol.*24、№9、*pp.*863－870、1991

（6）島健、釜谷幸男、田中俊明：“シナプス数を半減できるホップフィールドネットワーク構成法”、電子情報通信学会論文誌*D-II*、*Vol.J*76－*D-II*、№3、*pp.*689－697、1993－03

（7）鈴木昇一、中村三郎：“知識情報処理における帰納的推論”、情報研究（文教大学・情報学部)、*Vol.* 9、*pp.*173－196（1988－12)

（8）鈴木昇一、中村三郎：“最汎アトムを用いない精密化方法による*Prolog*プログラムの帰納的自動合成システムの、C言語による実現、情報研究（文教大学・情報学部)、*Vol.*10、*pp.*151－167（1989－12)

（9）中村三郎、田代達也、鈴木昇一：“ソフトウェアをコンピュータに作らせる夢－1つの提案「*MIS*」について－”、コンピュータアクセス、*pp.*54－62（1990－01)

(10) 鈴木昇一：“*Rosenfeld*型の確率的弛緩ラベリング法の基本的諸性質”、情報研究（文教大学・情報学部)、*Vol.*11、*pp.*163－181（1990－12)

(11) 鈴木昇一：“半順序と情報処理”、情報研究（文教大学・情報学部)、*Vol.*12、*pp.*121－174（1991－12)

(12) 鈴木昇一："新しい情報の測度とパターン情報処理"、情報研究(文教大学・情報学部)、*Vol.*13、*pp.*273－358 (1992－12)
(13) 鈴木昇一："誤差確率分布を考慮した誤差逆伝播学習"、情報研究（文教大学・情報学部)、*Vol.*13、*pp.*173－202 (1992－12)
(14) 鈴木昇一："認識工学（上)"、柏書房 (1975－02)
(15) 鈴木昇一："測度的不変量検出形認識系の構成理論"、電子通信学会論文誌D、*Vol.*55-*D*、No.8、*pp.*531－538 (1972－08)
(16) 鈴木昇一："特徴量としての測度的ウニタリ不変量の完全な集合の一構成"、電子通信学会論文誌D、*Vol.J*59－*D*、No.9、*pp.*678－680 (1976－09)
(17) 鈴木昇一："抽出された特徴による手書き漢字構造の再生"、情報処理学会誌、*Vol.*18、No.11、*pp.*1115－1122 (1977－11)
(18) 鈴木昇一："パターン認識の数学的理論"、
第Ⅰ部（考え方、*PRL*84-6、*pp.*1－10、1984－05)
第Ⅱ部（認識抽象と公理系、定理系、*PRL*84-30、*pp.*65－74、1984－09)
第Ⅲ部（認識抽象と不動点諸定理、*PRL*85-38、*pp.*65－73、1984－09)
第Ⅳ部（パターンの素領域、*PRU*86-27、*pp.*1－10、1985－09)
第Ⅴ部（認識停止と認識同値、*PRU*86-8、*pp.*65－74、1986－05)
第Ⅵ部（類似度関数の三構成法、*PRU*86-35、*pp.*51－60、1986－07)
第Ⅶ部（類似度関数の実現と解析、*PRU*87-69、*pp.*1－8、1986－12)
第Ⅷ部（大分類関数の自己組織化、*PRU*87-1、*pp.*1－8、1987－05)
第Ⅸ部（帰属関数あいまい度と認識情報量、*PRU*87-28、*pp.*1－10、1987－07)
第Ⅹ部（*mixture*条件の研究、*PRU*88-30、*pp.*1－8、1988－07)
第ⅩⅠ部（認識プログラム$FERT_D$の近似の鎖、*PRU*89-1、*pp.*1－8、1989－05)
第ⅩⅡ部（ポテンシャル関数による認識過程の評価、*PRU*89-27、*pp.*1－8、1989－07)
第ⅩⅢ部（認識プログラム$FERT_D$の不動点認識定理、*PRU*89-40、*pp.*1－8、1989－09)
第ⅩⅣ部（線形帰属係数法と諸基本定理、*PRU*89-66、*pp.*1－8、1989－11)
第ⅩⅤ部（パターンの構造的類似性をもたらす４種類の収縮写像、*PRU*89-77、*pp.*1－8、1989－12)
第ⅩⅥ部（コネクショニスト・モデルと収縮写像、*PRU*89-136、*pp.*9－16、1990－03)
第ⅩⅦ部（ホップフィールドネットワーク２値モデルと収縮写像(1)、*PRU*90-5、*pp.*1－8、1990－05)
第ⅩⅧ部（ホップフィールドネットワーク２値モデルと収縮写像(2)、*PRU*90-15、*pp.*1－8、1990－06)
第ⅩⅨ部（ホップフィールドネットワークの連続モデルと２種類と収縮写像(1)、*PRU*90-29、*pp.*9－16、1990－07)
第ⅩⅩ部（ホップフィールドネットワークの連続モデルと２種類と収縮写像(2)、*PRU*90-125、*pp.*1－8、1991－02)
第ⅩⅩⅠ部（誤差逆伝播ニューラルネットモデルと特徴抽出(1)、*PRU*91-1、*pp.*1－8、1991－05)
第ⅩⅩⅡ部（誤差逆伝播ニューラルネットモデルと特徴抽出(2)、*PRU*91-29、*pp.*23－28、1991－06)
第ⅩⅩⅢ部（誤差逆伝播ニューラルネットモデルと特徴抽出(3)、*PRU*91-42、*pp.*1－8、1991－07)
第ⅩⅩⅣ部（再帰領域方程式と標本化、*PRU*92-1、*pp.*1－8、1991－05)
第25部（画像前処理、*PRU*92-18、*pp.*1－8、1992－06)
第26部（線形歪を持った多次元パターンの、モーメントによる正規化、*PRU*92-25、*pp.*1－8、1992－09)
第27部（モデル構成作用素による、*Extended Dynamic Axes Warping*(1)、*PRU*92-89、*pp.*1－8、1992－12)
第28部（モデル構成作用素による、*Extended Dynamic Axes Warring*(2)、*PRU*92-102、*pp.*1－8、1993－01)、
電子（情報）通信学会技術研究報告［パターン認識と学習、パターン認識と理解］
(19) *Teuvo Kohonen*："*Self-Organized Formation of Topologically Correct Feature Maps*"、*Biological*

*Cybernetics*、*Vol.*43、*pp.*59－69（1982）
(20) *Robert J.Mceliece*、*Edward C.Posner*、*Eugene R.Rodemich and Santosh S.Venkatesh*：“*The Capacity of the Hopfield Associative Memory*”、*IEEE Trans. on INFORMATION THEORY*、*Vol.IT*-33、No.4、*pp.*461－482（1987－07）

（鈴木昇一、ミクロ経済学におけるワルラスの法則とパターン類似度関数のホップフィールドニューラルネット形調整、文教大学情報学部情報研究No.14投稿論文、1993年10月14日投稿）