確率過程と金融経済学

栗林　　訓

Stochastic Financial Economics

Satoshi Kuribayashi

Recent developments in the theory of stochastic differential equations, particularly the Ito calculus and the concept of martingales, have been applied successfully in financial economics. Two major areas of interest are the pricing of financial contingent claims and the optimal consumption-investment decisons. The pioneeriong work of the former was the pricing of simple options by Black & Scholes (1973), which has motivated the study of more general contingent-claims analysis, both theoretical and practical. The consumption-investment decison making in the explicit framewok of continuous-time and stochastic dynamics was originally given by Merton (1971). This article takes up the first topic, e.g., contingent-claims analysis in a rigorous manner.

本稿では確率微分方程式の理論的成果を金融経済学（Financial Economics）の主要なトピックスのひとつである派生的証券（derivative securities），より一般的には条件付き請求権（contingent claims）の評価問題に応用する。この分野のパイオニア的な業績としては Black & Scholes（1973）による株式のオプション評価モデルがある。Merton（1971）が先鞭をつけた intertemporal な最適消費・投資問題も興味あるテーマであるが，ここでは取り上げない。

条件付き請求権および消費・投資に関する理論は，その後，Harrison & Kreps（1979），Harrison & Pliska（1981）などによって確率過程（特にマーチンゲール）の枠組みのなかで精緻化されてきた。リスクのある証券（株式など）を連続時間（continuous-time）でモデル化するために確率微分方程式を援用するところに特徴がある。

1．モデルの構造

まずモデルの構造を特定化する。市場では $d+1$ 個の証券が連続的に取引されている。以下では取引対象期間 T（$0 \leq T < \infty$）を固定する。証券のひとつは「債券」で，その価格 $P_0(t)$ は以下の微分方程式に従って展開する：

(1) $dP_0(t) = r(t)P_0(t)\,dt,\ P_0(0) = p_0;\ 0 \le t \le T.$

$r(t) \equiv r$ ならば，債券価格の過程には確率的な要素が入っていないので，(1)式は次式と同等である：

(1a) $P_0(t) = p_0 \exp(rt)$

残りの d 個の証券は「株式」でリスキーである。その価格の動きは以下の線型確率微分方程式でモデル化される $(i = 1, \ldots, d)$：

(2) $$dP_i(t) = b_i(t)P_i(t)dt + P_i(t)\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)\,dW_t^j,$$
$$P_i(0) = p_i;\ 0 \le t \le T.$$

過程 $W = \{W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^d)^T,\ \mathscr{F}_t;\ 0 \le t \le T\}$ は確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の d-次元ブラウン運動である(注1)。フィルトレーション (filtration) $\{\mathscr{F}_t\}$ は W の生成するフィルトレーション $\{\mathscr{F}^W_t\}$ の P のもとで増大系である(注2)。金利過程 $\{r(t),\ \mathscr{F}_t;\ 0 \le t \le T\}$，平均収益率ベクトル $\{b(t) = (b_1(t), \ldots, b_d(t))^T,\ \mathscr{F}_t;\ 0 \le t \le T\}$，偏差行列 $\{\sigma(t) = \sigma_{ij}(t)_{1 \le i, j \le d},\ \mathscr{F}_t;\ 0 \le t \le T\}$ は $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ において可測 (measurable)，適合的 (adapted)，一様有界である (bounded uniformly) とする(注3)。

ここで，$a(t) := \sigma(t)\sigma^T(t)$ とおく（$:=$ は『定義的に等しい』という意味であり，添え字Tは転置を表わす)。そして任意の $\varepsilon > 0$ について以下を仮定する：

(3) $\xi^T a(t)\xi \ge \varepsilon \|\xi\|^2;\ \forall \xi \in \boldsymbol{R}^d,\ 0 \le t \le T,$ a.s.(注4)

(3)式の仮定のもとでは，偏差行列について次のことが確かめられる。第一に，$\sigma^T(t)$ は逆行列をもち，かつ

(4) $\|(\sigma^T(t))^{-1}\xi\| \le \varepsilon^{-1/2}\|\xi\|;\ \forall \xi \in \boldsymbol{R}^d,\ 0 \le t \le T,$ a.s.

さらに $a'(t) := \sigma^T(t)\sigma(t)$ とおいて

(5) $\xi^T a'(t)\xi \ge \varepsilon \|\xi\|^2;\ \forall \xi \in \boldsymbol{R}^d,\ 0 \le t \le T,$ a.s.

ゆえに $\sigma(t)$ も逆行列をもち，

(6) $\|(\sigma(t))^{-1}\xi\| \le \varepsilon^{-1/2}\|\xi\|;\ \forall \xi \in \boldsymbol{R}^d,\ 0 \le t \le T,$ a.s.

2．ポートフォリオ過程，消費過程

さて初期資産額 $x \ge 0$ でスタートし，それを $d+1$ 個の証券に投資する投資家を考えよう(注5)。$N_i(t)$ を投資家が時点 t で保有する証券 i の数量（たとえば株数）とする。

$$X_0 \equiv x = \sum_{i=0}^{d} N_i(0)\,p_i$$

であり，時点 t における投資家の資産は：

(7) $$X_t = \sum_{i=0}^{d} N_i(t)\,P_i(t).$$

証券の取引が時点 t と t + h の間で離散的に生じ，この間に資産の流出入がないとすれば：

(8) $$X_{t+h} - X_t = \sum_{i=0}^{d} N_i(t)\,[P_i(t+h) - P_i(t)].$$

他方，投資家が t + h 時点で hC_{t+h} の量を消費すれば，資産は減少する。(8)式は：

(9) $$X_{t+h} - X_t = \sum_{i=0}^{d} N_i(t)\,[t+h) - P_i(t)] - hC_{t+h}.$$

(9)式に対応する連続型は：

$$dX_t = \sum_{t=0}^{d} N_t(t)\,dP_i(t) - C_t dt.$$

上式は，(1)，(2)，(7)式と i 番目の証券への投資額 $\pi_i(t) := N_i(t)P_i(t)$，$1 \le i \le d$ から以下のように書くことができる：

(10) $$dX_t = (r(t)X_t - C_t)\,dt + \sum_{i=1}^{d}(b_i(t) - r(t))\,\pi_i(t)\,dt + \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\pi_i(t)\,\sigma_{ij}(t)\,dW_t^j.$$

つぎにポートフォリオ過程 π を定義する。$\pi = \{\pi(t) = (\pi_1(t), \ldots, \pi_d(t))^T,\ \mathscr{F}_t ; 0 \le t \le T\}$ は，可測・適合過程で

(11) $$\sum_{i=1}^{d}\int_0^T \pi_i^2(t)\,dt < \infty,\ \text{a.s.}$$

とする。

消費過程 $C = \{C_t,\ \mathscr{F}_t ; 0 \le t \le T\}$ は可測・適合過程で $[0,\ \infty]$ の値をとる。
そして C について

(12) $$\int_0^T C_t dt < \infty,\ \text{a.s.}$$

とする。

債券投資額は：

$$\pi_0(t) := X_t - \sum_{i=1}^{d}\pi_i(t)$$ である。

条件式(11)，(12)によって確率微分方程式(10)は一意な強解をもつ。実際

(13) $$X_t = \exp\left(-\int_0^t r(s)\,ds\right)\left\{x + \int_0^t \exp\left(-\int_0^s r(u)\,du\right)\left[\pi(s)^T(b(s) - r(s)\mathbf{1}) - C_s\right]ds + \int_0^t \exp\left(-\int_0^s r(u)\,du\right)\pi^T(s)\sigma(s)\,dW_s\right\};\ 0 \le t \le T$$

は(10)式の解となることが確かめられる。$\mathbf{1}$ はすべての要素が 1 の d-次元ベクトルである。ベクトルはすべて列ベクトルである。

ポートフォリオ過程と消費過程のペア $(\pi,\ C)$ は，(13)式の資産過程が次式を充たす時，初期資産 $x \ge 0$ について admissible といわれる：

(14) $$X_t \ge 0\ ;\ 0 \le t \le T,\ \text{a.s.}$$

$0 \leq t \leq T$ について，$b(t)=r(t)\mathbf{1}$ ならば，還元要素 $\exp(-\int_0^t r(s)\,ds)$ は全証券の成長率を正確に相殺し，(13)式から

(15) $M_t := X_t \exp(-\int_0^t r(s)\,ds) - x + \int_0^t \exp(-\int_0^s r(u)\,du)\,C_s ds$

は確率積分である。換言すれば，現在の資産と累積消費から成る過程はともに適当に還元されれば，局所マーチンゲールである(注6)。$b(t) \neq r(t)\mathbf{1}$ ならば，(15)式は P のもとで局所マーチンゲールではない。しかし新しい測度 P^*（これは(10)式でドリフト項 $\pi(t)^T(b(t)-r(t)\mathbf{1})$ を取り除くもの）のもとで局所マーチンゲールである。

より具体的には，過程

(16) $\theta(t) := (\sigma(t))^{-1}(b(t)-r(t)\mathbf{1})$

は有界である。そして

(17) $Z_t = \exp\{-\sum_{j=1}^{d}\int_0^t \theta_j(s)\,dW_s^j - (1/2)\int_0^t \|\theta(s)\|^2 ds\}$

とおけば，$Z=\{Z_t, \mathscr{F}_t ; 0 \leq t \leq T\}$ はマーチンゲールで(注7)，新しい確率測度

(18) $P^*(A) := E[Z_T \mathbf{1}_A]\,;\, A \in \mathscr{F}_t$（$\mathbf{1}_A$ は指標関数）

は，P と P^* が相互に $\mathscr{F}_t$ 上で絶対連続で過程

(19) $W_t^* := W_t + \int_0^t \theta(s)\,ds\,;\, 0 \leq t \leq T$

は P^* のもとで n-次元ブラウン運動である(注8)。W^* で(13)式を書けば

(20)
$$X_t \exp(-\int_0^t r(s)\,ds) + \int_0^t \exp(-\int_0^s r(u)\,du)\,C_s ds$$
$$= x + \int_0^t \exp(-\int_0^s r(u)\,du)\,\pi^T(s)\,\sigma(s)\,dW_s^*\,;\, 0 \leq t \leq T,\ \text{a.s.}$$

admissible なペア（π, C）について，(20)式は非負で右辺は P^*-局所マーチンゲールである。ゆえに，左辺と $X_t \exp(-\int r(s)\,ds)$ は P^* のもとで非負の優マーチンゲールである(注9)。

ここで

(21) $\gamma_0 = T \wedge \inf\{t \in [0, T]\,;\, X_t = 0\}$

とする。このとき(注10)

$X_t = 0\,;\, \gamma_0 \leq t \leq T$ が $\{\gamma_0 < T\}$ でほとんど確実に成立する。

$\gamma_0 < T$ ならば，時点 γ_0 で破産するという。

(20)式の優マーチンゲール性から，次式を得る：

(22) $E^*[X_T \exp(-\int_0^T r(s)\,ds) + \int_0^T C_t \exp(-\int_0^t r(s)\,ds)\,dt] \leq x$

ゆえに，admissibility に関する以下の必要条件が得られる：

(23) $E^* \int_0^T \exp(-\int_0^t r(s)\,ds)\,C_t dt \leq x.$

この条件は，以下の命題の意味で admissibility の十分条件でもある：
命題：$x \geq 0$ で消費過程 C は(23)式が充たされるように与えられるとする。すると，ペア（π, C）が初期資産 x について admissible であるようなポートフォリオ過程が存在する。
証明：

$$D := \int_0^T C_t \exp\left(-\int_0^t r(s)\,ds\right) dt$$ とする。非負の過程を以下のように定義する：

$$\xi_t := E^*\left[\int_t^T C_s \exp\left(-\int_t^s r(u)\,du\right) ds \,\Big|\, \mathscr{F}_t\right] + (x - E^*D)\exp\int_0^t r(s)\,ds.$$

ゆえに

(24) $$\xi_t = \exp\left(\int_0^t r(s)\,ds\right)\left\{x + m_t - \int_0^t C_s \exp\left(-\int_0^t r(u)\,du\right) ds\right\},$$

ただし $m_t := E^*(D \mid \mathscr{F}_t) - E^*D = E(DZ_T \mid \mathscr{F}_t) / Z_t - E(DZ_T)$.
以下のマーチンゲールの P-a.e. 経路(注11)

$$N_t := E(DZ_T \mid \mathscr{F}_t),\ \mathscr{F}_t;\quad 0 \leq t \leq T$$

は RCLL で，以下の性質の可測・$\{\mathscr{F}_t\}$ 適合・$\boldsymbol{R}^d$ の過程 Y が存在する(注12)：

(25) $$\int_0^T \|Y(t)\|^2 dt < \infty \qquad \text{かつ}$$

(26) $$N_t = E(DZ_T) + \sum_{j=1}^{d}\int_0^t Y_j(s)\,dW_s^j\,;\ 0 \leq t \leq T.$$

さて，$m_t = u(N_t, Z_t) - E(DZ_T)$，ただし $u(x, y) = (x / y)$ で伊藤の公式から $\phi(t) := (Y(t) + N_t\theta(t)) / Z_t$ とおいて次式を得る：

(27) $$m_t = \sum_{j=1}^{d}\int_0^t \phi(s)\,dW^{*j}_s;\quad 0 \leq t \leq T.$$

ここで，$dZ_t = -Z_t\theta^T dW_t$ と(19)式を使った。以下を定義する：

(28) $$\pi(t) := \exp\left(\int_0^t r(s)\,ds\right)(\sigma^T(t))^{-1}\phi(t).$$

よって $\xi = X$ とすれば，(21)式は(17)式になる（証明終り）。

3．オプション評価

いままでの文脈で，時点 $t = 0$ において，特定の将来時点 T（満期日）に株式1株を決められた価格 q（行使価格）で買うというオプション契約をするとしよう。満期では，株式1の価格 P^1_T が行使価格を下回っていれば，契約は無価値である。他方 $P^1_T > q$ であれば，オプションを行使して（すなわち，決められた行使価格 q で1株を買って）ただちに株式を市場で価格 P^1_T で売る。この契約はオプションとよばれるが，満期で $(P^1_T - q)^+ := \max(P^1_T - q,\ 0)$ の支払いと同値である。ヨーロピアン・オプションはこの契約に該当するが，アメリカン・オプションは $t = 0$ と満期の間でいつでも行使可能である。

以下の定義はオプションの概念を一般化したものである。

定義：条件付き請求権（contingent claim）はつぎのように構成される金融手段である：

①ペイオフ・レート　$g = \{g_t,\ \mathscr{F}_t\ ;\ 0 \leq t \leq T\}$,
②満期のペイオフは f_T。

ここで g は非負，可測，かつ適合過程とする。f_T は非負，$\mathscr{F}_t$- 可測な確率変数である。そして，ある $\mu > 1$ について：

(29)　$$E\,[f_T + \int_0^T g_t dt\,]^\mu < \infty.$$

注意すべきは，オプションは $g \equiv 0$ で $f_T = (P^1_T - q)^+$ という特殊な条件付き請求権であるという点である。

つぎにヘッジング戦略を定義する。$x \geq 0$ を所与とし，$(\pi,\ C)$ を初期財産xについて許容可能な（admissible）ポートフォリオ・消費過程のペアとする。ペア $(\pi,\ C)$ は以下の条件が成立する（a.s.）場合，条件付き請求権 $(g,\ f_T)$ に対するヘッジング戦略とよばれる：

①　$C_t = g_t\ ;\ 0 \leq t \leq T$,

②　$X_T = f_T$

ただし，X はペア $(\pi,\ C)$ と初期条件 $X_0 = x$ に関連する資産過程（wealth process）である。

ヘッジング戦略の概念は条件付き請求権の評価問題の解を求めるために導入されている。すなわち，時点 $t = 0$ において条件付き請求権にペイする公正な価格はなにか。初期資産 $X_0 = x$ について許容可能なヘッジング戦略が存在するとすれば，$t = 0$ で条件付き請求権 $(g,\ f_T)$ を価格 x で買うエージェントは，そのかわりに条件付き請求権のペイオフを複製するような資産に投資することができるであろう。したがって，請求権の価格は x を上回ってはならない。x よりもはるかに少額な初期資産で，条件付き請求権のペイオフを複製できるか。解答は肯定的である。

条件付き請求権の公正な価格は，初期資産 x でヘッジング戦略を構築するような最小の $x \geq 0$ である。条件(3)式とその前の前提のもとで，すべての条件付き請求権は公正な価格をもつことが示される。またオプションの公正な価格式を明示的に表わす Black & Scholes (1973) を導出することができる。

ここでひとつの系（Lemma）を証明する。

系：条件付き請求権 $(g,\ f_T)$ が与えられたとして，以下を定義する：

(30)　$$Q = \exp\left(-\int_0^T r(u)\,du\right) f_T + \int_0^T \exp\left(-\int_0^s r(u)\,du\right) g_s ds.$$

このとき E^*Q は有限で公正な価格 $(g,\ f_T)$ のうえで下界である。

証明：r は t と ω において一様有界であることを想起して，$Q \leq L\,(f_T + \int_0^T g_s ds)$ と書ける。ここで L は定数である。(17)式から，すべての $\nu \geq 1$ について：

$$Z^\nu{}_T = \exp\{-\sum_{i=1}^{d} \int_0^T \nu_j(s)\,dW^j{}_s - (1/2)\int_0^T \|\nu\theta(s)\|^2 ds\}$$
$$\times \exp\{\nu(\nu - 1)/2 \int_0^T \|\theta(s)\|^2 ds\},$$

そして，$\|\theta\|$ はある定数 K で有界であるから：

$EZ_T^{\nu} \leq \exp\{\nu(\nu-1)K^2T/2\} < \infty.$

(29)式の μ と ν を $(1/\nu)+(1/\mu)=1$ で与えてヘルダーの不等式から：(注13)

$$E^*Q \leq LE[Z_T(f_T + \int_0^T g_s ds)$$

$$\leq L(EZ^V{}_T)^{1/\nu}[E(f_T + \int_0^T g_s ds)^{\mu}]^{1/\mu} < \infty.$$

(π, C) が条件付き請求権 (g, f_T) に対するヘッジング戦略であるとしよう。それに対応する資産過程は初期条件 $X_0 = x$ の過程 X である。定義を想起して，(22)式を $EQ^* \leq x$ と書き直せる（証明終り）。

定理：条件(3)式とその前の前提のもとで，条件付き請求権 (g, f_T) の公正な価格は E^*Q である。さらに初期資産 $x = E^*Q$ でヘッジング戦略が存在する。

証明：以下を定義する：

(31) $$\xi_t := \exp(\int_0^t r(s)ds)[E^*Q + m_t - \int_0^t (\exp(-\int_0^t r(u)du)g_s ds],$$

ただし，$m_t = E^*(Q|\mathscr{F}_t) - E^*Q$ である。前出の命題とまったく同じように，D を Q に代え，π を(28)式で定義し，$C \equiv g$ とすれば，$X = \xi$, $x = E^*Q$，として(31)式は(20)式になる。しかし(31)式はまた

(32) $$X_t = E^*[\exp(-\int_t^T r(u)du)f_T + \int_t^T \exp(-\int_t^s r(u)du)g_s ds \Big| \mathscr{F}_t]; 0 \leq t \leq T.$$

ゆえに，$X_t \geq 0; 0 \leq t \leq T$ かつ $X_T = f_T$ は a.s. で成立する（証明終り）。

最後に例として Black and Scholes (1973) のオプション評価式を取り上げよう。

オプションは，$g \equiv 0$，$f_T = (P_T^{(1)} - q)^+$，$d = 1$ で定係数 $r(t) = r > 0$，$\sigma_{11}(t) = \sigma > 0$ で，債券の価格は：

$$P_0(t) = p_0\exp(rt); 0 \leq t \leq T.$$

株価は次式に従う：

$$dP_1(t) = b_1(t)P_1(t)dt + \sigma P_1(t)dW_t$$

時点 T において価格 q で 1 株を買うオプションについて，(32)式から以下の評価過程を得る：

(33) $$X_t = E([\exp(-r(T-t))(P_1(T) - q)^+ | \mathscr{F}_t]; 0 \leq t \leq T$$

(33)式をより明確な形で書くために，以下の関数はコーシーの問題(注14)および前定理を充たすことに注意する：

(34) $$v(t, x) := \begin{cases} x\Phi(\rho_+(T-t,x)) - q\exp(-r(T-t))\Phi(\rho_-(T-t,x)); t = T, x \geq 0 \\ \\ (x-q)^+; \end{cases}$$

ただし：

$$\rho_{\pm}(t, x) = 1/\sigma\sqrt{t}\left[\ln x/q + t(r \pm \sigma^2/2\right],$$

$$\Phi(x) = 1/\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{x}\exp(-z^2/2)\,dz$$

ところでコーシーの問題は以下のように書ける：

(35) $$-\partial v/\partial t + rv = 1/2\sigma^2 x^2 \partial^2 v/\partial x^2 + rx\partial v/\partial x\,;\ [0,\ T)\times(0,\ \infty)$$

$$v(T,\ x) = (x - q)^+\,;\ x \geq 0$$

前定理と(33)式にマルコフの性質を適用して次式を得る：

(36) $$X_t = v(t, P_1(t))\,;\quad 0 \leq t \leq T,\ \text{a.s.}$$

よって，時点 t におけるオプションの価値を現在の株価 $P_1(t)$，満期までの期間 $T-t$，行使価格 q によって表わす式を得ることができた。

4．終りに

確率過程，確率微分方程式の分野では Doob，伊藤清の貢献が偉大である。前者の業績は Doob (1953) にまとめられている。後者は伊藤微積分を完成しその後の発展の基礎を築いた。伊藤 (1953) および伊藤 (1978) がある。比較的新しい成書としては渡辺 (1975)，國田 (1976)，Elliot (1982) 等がある。

伊藤微積分を金融経済学に初めて導入したのは Merton (1971) の功績である。Merton (1990) はその集大成である。類書としては Müller (1985), Ingersoll (1987), Huang & Litzenberger (1988), Duffie (1988), Dothan (1990) 等がある。

新しい金融経済学は，理論的に精緻であると同時に，きわめて実用的な (pragmatic) でもある。動学的なポートフォリオの構築や，条件付き請求権を絡めた金融新商品の開発に応用されている。その意味で経済学の分野では珍しい例といえるかもしれない。

(注)

1．ブラウン運動については飛田 (1975)，Harrison (1985) 参照。
2．増大系のフィルトレーション等については Karlin & Taylor (1975)，伊藤 (1978) 参照。
3．可測性，適合性，一様有界性等については Karatzas & Shreve (1988) 参照。
4．$\boldsymbol{R}^d$ は d- 次元ユークリッド空間，a.s. は almost sure。
5．オリジナルな定式化は Merton (1971) に負う。
6．局所マーチンゲールについては Karatzas & Shreve (1988) 参照。
7．Karatzas & Shreve (1988), Chapter 3．
8．Karatzas & Shreve (1988), Chapter 3．
9．Karatzas & Shreve (1988), Chapter 1．
10．Karatzas & Shreve (1988), Chapter 1．
11．Karatzas & Shreve (1988), Chapter 1．
12．Karatzas & Shreve (1988), Chapter 3．
13．ヘルダーの不等式については西尾 (1978) 参照。
14．コーシーの問題については Karatzas & Shreve (1988), Chapter 8．

参考文献

Black, F. & M. Scholes,"The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*,81, 1973.

Doob, J. L., *Stochastic Processes*, Wiley, New York, 1953.

Dothan, M. U., *Prices in Financial Markets*, Oxford University Press, 1990.

Duffie, D., *Security Markets*, Academic Press, 1988.

Elliot, R, J., *Stochastic Calculus and Applications*, Springer, 1982.

Harrison, J. M., *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems*, Wiley, 1985.

Harrison, J. M., & D. M. Kreps,"Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets ", *Journal of Economic Theory*, 20, 1979.

Harrison, J. M., & S. Pliska,"Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", *Stochastic Processes and Their Applications*, 11, 1981.

Huang, C. & R. Litzenberger, *Foundations for Financial Economics*, North-Holland, 1988.

Ingersoll, J., *Theory of Financial Decision Making*, Rowman & Littlefield, 1987.

Karatzas, I., & S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, 1987.

Karlin, S., & H. M. Taylor, *A First Couse in Stochastic Processes*, 2 nd Ed., Academic Press, 1975.

Merton, R. C.,"Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model", *Journal of Economic Theory*, 3, 1971.

Merton, R. C., *Continuous-Time Finance*, Basil Blackwell, 1990.

Müller, S., *Arbitrage Pricing of Contingent Claims*, Springer, 1985.

伊藤清『確率論』, 岩波, 1953。

伊藤清『確率論Ⅲ』, 岩波基礎数学, 1978。

飛田武幸『ブラウン運動』, 岩波, 1975。

渡辺信三『確率微分方程式』, 産業図書, 1975。

國田寛『確率過程の推定』, 産業図書, 1976。

西尾真喜子『確率論』, 実教出版, 1978。