資産価格過程：金融経済学の基礎

栗林　　訓

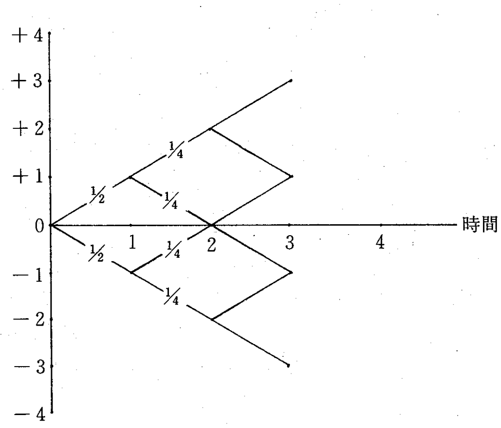
Asset Price Processes : Foundations of Financial Economics

Satoshi Kuribayashi

This article starts with specifying heuristically the stochastic process followed by asset prices. After discussing the Markov property, typical processes followed by stock prices are derived. Among them, the Geometric Brownian Motion plays a vital role in developing stochastic financial economics, especially contingent claims analysis. Finally, the log-normal property of asset price and return distributions is briefly discussed. This article does not take up Martingales, one of the most important topics in stochastic processes and financial economics.

本稿は，資産価格の従う確率過程をヒューリスティックに特定化し，そのマルコフ的な性質からウィーナー過程，伊藤過程（幾何ブラウン運動）を導く。これらの確率過程は特に株価の動きを記述する際に基本となるものである。次いで，条件付き請求権（オプション等）の評価で重要な役割を果たす対数正規との関係を調べる。本稿で取り上げる確率過程や分布特性は新しい金融経済学の基礎となるものである。

1．資産価格の従う確率過程：ヒューリスティック・アプローチ



上の図で横軸は時間（t），縦軸はある資産価格が上昇したり下落したりした後の位置を表わすとしよう。スタートの０時点では価格は０の位置にある。１時点では，＋１（すなわち上昇）か－１（すなわち下落）かのいずれかである。上昇するか下落するかの確率はそれぞれ１／２とする。２時点では，価格が上昇して＋２の位置にくる確率は１／４，１時点で上昇したのち下落する確率が１／４，１時点で下落したのち上昇する確率もやはり１／４である。結局，価格が２時点でスタート時点と同じ位置にいる確率は１／２である。最後に，２時点で－２の位置にある確率は１／４である。

この例のような離散的な確率変数 x の期待値 E と分散 σ^2 は，対応する確率を P として，以下のように定義される：

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$$

$$\sigma^2(x) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x)]^2 P_i$$

上の図を参考にして，各時点における期待値と分散（標準偏差 σ も）を計算してみる：

$$t=1: E(x) = (+1)(1/2) + (-1)(1/2) = 0$$
$$\sigma^2(x) = (+1-0)^2 1/2 + (-1-0)^2 1/2 = 1$$
$$\sigma(x) = \sqrt{1}$$

$$t=2: E(x) = (+2)(1/4) + (0)(1/2) + (-2)(1/4) = 0$$
$$\sigma^2(x) = (+2-0)^2(1/4) + (0-0)^2(1/2) + (-2-0)^2(1/4) = 2$$
$$\sigma(x) = \sqrt{2}$$

$$t=3: E(x) = 0$$
$$\sigma^2(x) = 3$$
$$\sigma(x) = \sqrt{3}$$

・・・・・・・・

$$t=T: E(x) = 0$$
$$\sigma^2(x) = T$$
$$\sigma(x) = \sqrt{T}$$

独立な試行を考えて，上昇の場合には確率 p を，下落の場合は確率 $q = 1 - p$ を与える（上の図では $p = q = 1/2$）。n 回の試行で上昇が k 回起こる確率は：

$$P_r(x = k) = {}_nC_k p^k q^{n-k}$$
$$= n! / (k!(n-k)!) p^k q^{n-k}$$

で与えられる。２項分布である。上の図で各ノードにおける確率はこの公式を使って計算できる。

このヒューリスティックな例から分かることは，まず，期待値は時間の経過にかかわらず常に０（すなわちスタート時点の値に等しい），そして分散は経過時間の長さであるという点である。

実は，これはマーチンゲール性，フェアゲームという興味ある性質であるが，本稿では取り上げない。

2．マルコフ性と株価過程

原資産として株式を考える。株式市場における株式の価値，すなわち株価の動きについては，1950，60年代にアメリカを中心として統計的な実証研究が盛んにおこなわれた。主要な結論として「株価はマルコフ過程に従う」ことが明らかにされた。株価はあちらこちらに彷徨する系列に従っているようにみえる。傾向線や時系列モデルの当てはめは役に立たない。ゆえに1週間後の株価を予測するのはほとんど不可能であり，無意味である。つまり，株価の動きはランダム・ウォークするということである。ランダム・ウォークについては，Bachelier, Einstein, Wienerの先駆的業績がある。

ランダム・ウォークの定式化は，確率過程における「マルコフの性質」から導くことができる。これは，将来のある時点における株価の確率分布が現在の株価のみに依存する特殊な過程である。株価の動きに影響するのは新しい情報のみで，言葉の定義から過去をいくら分布しても意味がない。現在の株価は，過去の株価に含まれている情報および入手可能な情報をすべて体現しているという意味で，弱度型の効率性が成立している。株価がマルコフ過程に従うことは，市場における競争によって保証される。現在の株価が過去から独立していることから，効率的な市場は記憶をもたないといわれる。

マルコフの性質からウィーナー過程（ブラウン運動）が導かれる。変数 z がウィーナー過程に従う場合，微小期間 Δt における z の変化 Δz には次の性質がある：

(a) $\Delta z = \omega\sqrt{\Delta t}$；ただし ω は標準正規分布（平均ゼロ，標準偏差1の正規分布）からのランダム標本である。

(b) ふたつの異なる微小期間 Δt における Δz の値は独立である。

(a)から Δz は，平均ゼロ ($E(\Delta z) = 0$)，分散 Δt ($\sigma^2(\Delta z) = \Delta t$) の正規分布をする。また(b)から変数 z はマルコフ過程に従う。

期間 $T (= N\Delta t)$ における z の増分を $z(T) - z(0)$ で表わす。

$$
\left.
\begin{aligned}
z(T) - z(0) &= z(T) - z(T-1) && : \Delta z_T \\
&\quad + z(T-1) - z(T-2) && : \Delta z_{T-1} \\
&\quad + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot && \\
&\quad + z(2) - z(1) && : \Delta z_2 \\
&\quad + z(1) - z(0) && : \Delta z_1
\end{aligned}
\right\}
\begin{array}{l}\text{これらは独立}\\ \text{（性質(b)から）}\end{array}
$$

$$= \sum \omega_i \sqrt{\Delta t} \quad \text{（性質(a)から）} \tag{1}$$

ω_i ($i = 1, 2, \cdot\cdot\cdot, N$) は標準正規分布からのランダム標本で，性質(b)から互いに独立である。

(1)式から $z(T) - z(0)$ は正規分布になる。期待値は

$$E[z(T) - z(0)] = E[\sum \omega_i \sqrt{\Delta t}] = \sqrt{\Delta t} E(\sum \omega_i) = 0$$

分散は

$$\sigma^2[z(T)-z(0)] = N\Delta t = T$$

標準偏差は

$$\sigma[z(T)-z(0)] = \sqrt{T}$$

すなわち，$z(0)=0$ として，第1節に対応している。

$t \to 0$ として Δz と Δt の極限をとれば，性質(a)は

$$dz = \omega\sqrt{dt} \tag{2}$$

(2)式は基本ウィーナー過程と呼ばれる。この過程の特徴は，変数 z（dz ではない）の期待値は現在値に等しく（ドリフト率ゼロという），長さ T の期間における z の変化の分散が $1.0 \times T$ になる（分散率 1.0）という点である。

(2)式を拡張して，変数 x の一般ウィーナー過程は以下のように定義される：

$$dx(t) = adt + bdz\ (= adt + b\omega\sqrt{dt}) \tag{3}$$

a と b は定義である（時間 t と x の関数ではない）ことに注意すべきである。

$$E[dx(t)] = adt$$
$$\sigma^2(dx(t)) = b^2dt$$

から，(3)式のドリフト率（すなわち単位時間当たりのドリフト）は a，分散率（すなわち単位時間当たりの分散）は b^2 である。記述的に説明すれば，bdz の項がなければ，x_0 を初期値として $x(t) = x_0 + at$（ドリフトがゼロならば $x(t) = x_0$）である。bdz の項は x の従う経路に雑音（noise）を追加するものと考えられる。この雑音（変動性）の量は基本ウィーナー過程に分散の平方根（標準偏差）を乗じた値になる。

ウィーナー過程をさらに一般化したものが伊藤過程である。これは，パラメーター a と b が元の変数 x と時間 t の関数になる確率過程である：

$$dx(t) = a(x, t)dt + b(x, t)dz \tag{4}$$

伊藤過程のドリフト率，分散率は時間の経過につれて変化する。

株価変動のモデルとしてはウィーナー過程には欠点がある。株式の期待収益率が株価水準から独立しているという点，また，時間につれて株価が無限大になったりマイナスになったりするということがありうる。

伊藤過程との関連で，具体例として株価（無配）の確率過程を取り上げてみよう。株価の比率で表わされる期待ドリフトが一定であると仮定する。これは，S を株価とした場合，dS／S が一定ということである。すなわち，このパラメーターを m とすれば，S のドリフト率は mS となる。ゆえに dt における S の期待上昇は mSdt であり，無配であるから m は株式の期待収益率である。株価の分散率が常にゼロであれば

$$dS(t) = mS(t)dt$$

と書ける。つまり

$$dS(t) / S(t) = mdt$$

すなわち

$$S(t) = S_0 \exp(mt)$$

S_0 は 0 時点の株価である。分散率がゼロのとき，株価は連続複利 m の率で幾何級数的に成長する。実際には株価は変動するから，これを考慮して，σ^2 を株価の比率的変化（ dS／S）の分散率とする。$\sigma^2 = \sigma^2(dS/S)\,dt$ から $\sigma^2(dS) = \sigma^2 S^2 dt$。ゆえに S の瞬間的な分散率は $\sigma^2 S^2$ である。以上から，株価は以下の伊藤過程として表現される：

$$dS(t) = mS(t)\,dt + \sigma S(t)\,dz \tag{5}$$

ゆえに

$$dS(t) / S(t) = mdt + \sigma dz \tag{6}$$

これが株価の時間的な変動を表わす伊藤過程であり，幾何ブラウン運動（Geometric Brownian Motion）とも呼ばれる。(5)式ないし(6)式を株価が従う確率過程とする。(6)式は dS／S が平均 mdt，標準偏差 σdt の正規分布であることを示している。なお，(3)式のウィーナー過程は算術ブラウン運動（Arithmetic Brownian Motion）とも呼ばれる。

3．伊藤の公式と対数正規性

株価の従う確率過程として(5)式を採用すると，対数正規との関連が明らかになる。その際，確率過程における伊藤の公式が強力な武器になる。株価 S の自然対数を ln(S) とし，$G \equiv \ln(S)$ と定義する。G は確率変数 S の関数であるから，伊藤の公式が使える。

$$\partial G / \partial S = 1 / S,\quad \partial^2 G / \partial S^2 = -1 / S^2,\quad \partial G / \partial t = 0$$

であるから，伊藤の公式より，G の従う過程は：

$$dG = (m - \sigma^2 / 2)\,dt + \sigma dz \tag{7}$$

m と σ は一定であるから，(7)式は G が一般ウィーナー過程に従うことを意味する。ドリフト率は $m - \sigma^2 / 2$，分散率は σ^2 である。これは，第 2 節の議論から，現在時点と将来時点 T の間における G の変化は，平均が $(m - \sigma^2 / 2)T$，分散が $\sigma^2 T$ の正規分布であることを意味する。すなわち，期間の長さ T における G（= lnS）の変化は $\ln S_T - \ln S_0$ であるから，正規分布関数 ϕ を使って：

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \phi[m - \sigma^2 / 2)T,\ \sigma\sqrt{T}]$$

正規分布の性質から，上式は：

$$\ln S_T \sim \phi[\ln S_0 + (m - \sigma^2 / 2)T,\ \sigma\sqrt{T}] \tag{8}$$

これは S_T が対数正規分布であることを含意している。

対数正規分布の性質と(8)式から，S_T の期待値と分散は次式で与えられる：

$E(S_T) = S_0 \exp(mT)$

$\sigma^2(S_T) = S^2 \exp(2mT)[\exp(\sigma^2 T) - 1]$

最後に，期間の長さTにおける株式の収益率（連続複利）をみることにする。連続複利の収益率をρとすれば：

$$S_T = S_0 \exp(\rho T)$$

$$\rho = (1/T)\ln(S_T/S_0) \qquad (9)$$

ところで，$\ln S_T - \ln S_0 = \ln(S_T/S_0)$であるから，(8)式のすぐ前の式は：

$$\ln(S_T/S_0) \sim \phi[m - \sigma^2/2)T,\ \sigma\sqrt{T}]$$

正規分布の性質と(9)式から，

$$\rho \sim \phi[(m - \sigma^2/2),\ \sigma/\sqrt{T}]$$

以上から，連続複利の収益率は平均$(m - \sigma^2/2)$，標準偏差$\sigma/\sqrt{T}$の正規分布をすることが分かった。

4．終りに

本稿では金融経済学の基礎となる資産価格過程に関する話題を取り扱った。数学的にはあまり厳密ではない。

第1節のヒューリスティックなアプローチをより厳密に展開したものにCox & Miller (1965)がある。

第2節のマルコフの性質については，Cox & Miller (1965)のほかに，Karlin & Taylor (1975)で詳しく解説されている。株価過程の理論的・実証的研究の集大成はCootner (1964)である。Bachelier (1900)の先駆的な論文もこの中で英訳されている。株式市場における効率性はFama (1970)で包括的に論じられている。幾何ブラウン運動までの確率過程はHull (1989)が参考になる。

第3節の伊藤の公式は，Hull (1989)のほかに栗林（1992）で（厳密ではないが）解説されている。対数正規はAitchison & Brown (1957)が網羅的である。栗林（1989）はオプションに応用している。

なお本稿で取り上げなかった重要なトピックであるマーチンゲールについてはKarlin & Taylor (1975)のChapter 6で解説されている。

参考文献

Aitchison, J. and J. A. C. Brown, *The Lognormal Distribution*, Cambridge University Press, 1957.

Cootner, P. H., ed., *The Random Character of Stock Market Prices*, MIT Press, 1964.

Cox, D. R. and H. D. Miller, *The Theory of Stochastic Processes*, Chapman and Hall, 1965.

Fama, E. F., "Efficient Capital Markets ： A Review of Theory and Empirical Work", *Journal of Finance*, May, 1970.

Hull, J., *Options, Futures and Other Derivative Securities*, Prentice-Hall, 1989.

Karlin, S. and H. M. Taylor, *A First Course in Stochastic Processes*, 2nd ed., Academic Press, 1975.

栗林　訓『オプション投資戦略の投資収益率』証券投資信託月報, 1989, 9月

栗林　訓『金融経済学のフロンティア』, 証券投資信託月報, 1992, 5月