パターンの変形理論

鈴　木　昇　一　　　前　田　英　明

A Theory of Deformed Patterns

Shoichi Suzuki　　Hideaki Maeda

あらまし

パターンの対応するモデルというものは、小さな変形や雑音に対し、頑健でなければならない。最も重要なことは、これまでの如何なる諸研究でも、認識されるパターンの大きな変形を制御出来ていないことである。本研究では、パターンの事前パラメータ化がパターンの広い変形を表現することを可能にすることが示される。パターンの見掛けの変形を表現する目的のために、3D画像問題に向けての、詳細な数理化を与えよう。

ありとあらゆるパターンがある１つの標準パターンからの変形として記述されなければならないと想定し、パターン認識問題に論及するために、本論文では、ある標準パターンからの正準的な変形として、形状を表現する手法が提案される。2つのパターンが簡単な物理的変形によって、結び付いていることを示す。この事実は、同一のカテゴリに帰属するものとして表れる複数のパターンを同定することを許すものである。

キーワード　パラメータ化されたパターン　変形の情報密度　ゆがみ測度関数　最尤パターン　標準パターン　ガウス核　変体パターン

Abstract

A corresponding model of pattern has to be somewhat robust to small deformations and noise. Most importantly, none of approaches thus far can handle large deformations of patterns to be recognized. This paper makes it possible for a priori parameterization upon the patterns to represent a somewhat wider variation (deformation) in patterns. For the purpose of representing an pattern's appearance deformation we will give a detailed mathematical formulation for 3D-image problems.

Supposing that every pattern have to be described as deformations from a single prototype pattern, in order to address the recognition problem we propose a method of representing shapes as canonical deformations from some prototype object. We will show two patterns are related by a simple physical deformation. This has allowed us to identify patterns that appear to be members of the same category.

Key words : parameterized pattern information density of deformation distortion-measure function maximum-likelihood pattern prototype Gaussian kernel transformational variant

1. まえがき

文字(character)、画像(image)、音声(speech sound)などの総称をパターン(pattern)という。パターンが何を表しているかを正規化・特徴抽出した後、識別・認識し、理解する能力を備えたシステムを構成する技術の総称が“**認識工学**[13]”と云われるものである。

認識工学の歴史はパターンの変形に対する戦いであり、攻略法の歴史でもある。

例えば、誤差逆伝播学習ニューラルネット[29]をパターン認識情報処理に用いるのは、結局は、入出力関係の高々可算個の事例を介し、経験したことの無い変形未知入力に対し、正しい認識出力を得るような“補間的学習能力の存在”を、ニューラルネットに期待しているからである。

本論文では、変形パラメータ(a deformation parameter) αを持つような、座標系xでのパターン$\varphi(x;\alpha)$は、$\varphi(x) \equiv \varphi(x;\alpha)|_{\alpha=x}$の変体パターン(variant pattern)と云われ、$\varphi(x;\alpha)$,$\varphi(x)$が3条件(**停留性, 最尤性, 復元性**)を満たせば、2つのパターン$\varphi(x;\alpha)$, $\varphi(x)$の間に、どのような関係があるかが研究される。

そもそも、数理科学の対象と出来るように、パターンという概念を認識の働きと結び付けて、定義することさえ、文献[6]においてさえなされていない。“パターン認識の数学的理論[28]”を構築しょうとしているS.Suzukiは最近になって、パターン集合を再帰的に定義可能な“**領域方程式**”を提案し、パターンという概念を確立しょうとしている。

パターンが記号(symbol)と異なるのは、変形に耐え、その意味を保持出来ることにある。本研究の目的は、パターン認識システムの認識能力を計る“物差し”として使用可能なように、画像パターンの変形を表す構造式を提案することである。

パターンとは、ある種のユニタリ座標変換(基本的なパターン変換)からある程度の変形を受けても、ある種の雑音が加わっても、その意味が保存されるような情報である。そのために、パターンというものは、冗長な表現形態を備えざるを得ない。よって、連想[21], [31]、認識[14], [23], [24], [27]などに関して、**効率的なパターン情報処理機能を獲得**するためには、処理の対象とする問題の、冗長な表現形態を備えているパターン$\varphi \in \Phi$に対し、その代りとなる“加わっているある種の雑音を取り去るような簡潔な構造形式を備えており、然も、その指示する類概念(category)がある種のユニタリ座標変換の下で不変であるようなパターンモデル[14], [15], [19]” $T\varphi \in \Phi$が求められることが必要とされる(付録Bの式(B1)を参照)。ここに、Φは処理の対象とするパターンφの集合であり、φのモデル$T\varphi$はΦに埋め込まれていなければならないこと(3.4節のパターンの帰納的定義を参照)[15], [24]に注意しておく(文献[28]の第24部を参照)。

ある情報の意味(meaning)とは、既に意味の判明しているいま1つの情報に対応させることによっても確定する。或いは、既に意味の判明している極小の情報の組合せでその情報を“近似的に再現”することによっても確定すると、考えられる。パターン情報処理の場面では、既に意味の判明している極小の情報とは**変形不能なパターン**のことであり、これ即ち、付録Bの式(B1)の各ψ_k(第$k \in L$番目のパターン形状素; the k-th primitive shape-component)のことであり、既に意味の判明している極小の情報の組合せ(パターン$\varphi \in \Phi$から抽出された第$k \in L$番目の非

負特徴量$u(\varphi, k)$を1次結合係数に持つ各ψ_kの1次結合)でその情報を"近似的に再現"されたものは、式(B1)で示されている"パターンφに対応するパターンモデル$T\varphi$"である。後者の定義より、パターンモデル$T\varphi \in \Phi$によって、原パターン$\varphi \in \Phi$の意味が確定すると考える訳である[19]。

本研究では、前者の定義で考え、既に意味の判明しているいま1つの情報としての**最尤パターン$\varphi(x) \equiv \varphi(x;\alpha) \mid \alpha = x$に変形パターン$\varphi(x;\alpha)$を対応させることにより、変形パターン$\varphi(x;\alpha)$の意味が確定する**と考えている。

今少し、詳しく説明しょう。

$x \in R^n$(n次元ユークリッド空間)はパターンφの表示のために使われる、空間座標とする。パラメータαがあって、パターン$\varphi(x)$からの変形パターン$\varphi(x;\alpha)$は、

$\alpha = \alpha_0$

で最小となるものとする。$\varphi(x;\alpha)$が、この最小を与えるパラメータα_0からのずれ$(\alpha-\alpha_0)$に対し、どの程度の変形を持っているかは、パラメータα_0に関するテーラー展開式

$$\begin{aligned}&\varphi(x;\alpha)\\&=\varphi(x;\alpha)|_{\alpha=\alpha_0}+(\alpha-\alpha_0)\\&\quad\cdot(\partial\alpha/\partial\alpha)\varphi(x;\alpha)|_{\alpha=\alpha_0}+2^{-1}\cdot(\alpha-\alpha_0)^2\cdot(\partial^2\alpha/\partial\alpha^2)\varphi(x;\alpha)|_{\alpha=\alpha_0}+\cdots\end{aligned}$$

を基に、解析され得る。$|\alpha-\alpha_0|$が十分小の場合は、

$$\begin{aligned}&\varphi(x;\alpha)\\&\fallingdotseq\varphi(x;\alpha)|_{\alpha=\alpha_0}+(\alpha-\alpha_0)\\&\quad\cdot(\partial\alpha/\partial\alpha)\varphi(x;\alpha)|_{\alpha=\alpha_0}+2^{-1}\cdot(\alpha-\alpha_0)^2\cdot(\partial^2\alpha/\partial\alpha^2)\varphi(x;\alpha)|_{\alpha=\alpha_0}\end{aligned}$$

とみなしてよいだろう。このとき、登場したパターン

$\varphi(x;\alpha)|_{\alpha=\alpha_0}$

は、最尤方程式(maximum likelihood equation)

$(\partial/\partial\alpha)\quad(x;\alpha)|\alpha=\alpha_0=0$ (停留性)

を満たし、然も、最尤推定値α_0が座標値xに等しいとき、つまり、

$\alpha_0 = x$ (座標値xの最尤性)

のとき、最尤パターン(maximum likelihood pattern)と呼ばれる。$\varphi(x;\alpha)$は最尤パターン$\varphi(x;\alpha)|_{\alpha=x}$の変体(variants)という。

実は、2条件(停留性,最尤性)に加えて、今1つの条件である復元性を考慮すれば、変形パターン$\varphi(x;\alpha)$は、最尤パターン$\varphi(x;\alpha)|_{\alpha=x}$を基に、具体的に決まることを示すのが本研究の目的である。

このように、2つのパターンが簡単な物理的変形によって、結び付いていることが示されるという事実は、同一のカテゴリに帰属するものとして表れるパターンを同定することを許すものである。

パターンの事前パラメータ化がパターンの広い変形を表現することを可能にする3条件(停留性,最尤性,復元性)を指摘したことが、本研究のセールスポイントであろう。

2．パターンの変形とは？

本章では、取り扱うパターンφの集合Φが先ず、明らかにされ(2.1節)、その後、3性質(埋込

性質、冪等性質、吸収性質)を備えたパターンモデルTφを構成することがパターン情報処理の始まりである[13], [28]という考えが説明され(2.2節)、更に、線形な変形を含む複雑な変形を取り除くことがパターン情報処理におけるパターンモデル構成手法であることが指摘され(2.3節)、最後に、数々の誤差を含んだデータの集まりを表現するのが1つのパターンによる冗長性表現であると云う考えが、重回帰分析を介し説明される(2.4節)。

2.1 可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の部分集合Φ

本章以降、可分な(separable)[1], [32] **ヒルベルト**(Hilbert)**空間**$\mathfrak{H}$として、$\mathfrak{H}=L_2(M\,;\,dm)$を選んでいると想定しても良い。その内積$(\varphi,\eta)$は、

$$(\varphi,\eta)\equiv\int_M dm(x)\,\varphi(x)\cdot\overline{\eta}(x)$$

ここに、$\overline{\eta}$はηの複素共役であり、

M: n次元ユークリッド空間R^nの可測部分集合

dm(x) ：正値Lebesgue-Stieltjes式測度 (1)

である[1], [2], [9], [15]。また、φのノルム$\|\varphi\|\equiv\sqrt{(\varphi,\varphi)}$を導入しておく。

或いは、a(t), b(t)をパラメータtに依存する2つの正実関数として、また、Aをa densely defined linear operatorとして、

$$(\varphi,\eta)_t\equiv a(t)\cdot(\varphi,\eta)+b(t)\cdot(A\varphi,A\eta) \tag{2}$$

を内積とするヒルベルト空間$\mathfrak{H}_t$を想定してもよい。このヒルベルト空間$\mathfrak{H}_t$では、

$$\|\varphi\|_t\equiv\sqrt{(\varphi,\varphi)_t}=0\Rightarrow\|\varphi\|=0\wedge\|A\varphi\|=0 \tag{3}$$

に注意しておく(付録Aを参照)。

処理の対象とするパターンφの集合Φはヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の、零元を含むある部分集合である[15]。

2.2 パターンモデル Tφ

処理の対象とする問題のパターンφの変形は通常不規則であり、パターン全体にわたる単一の変換(a single global transformation)、例えば、平行移動[16](translation)、縮小拡大(scaling)[17], [18]、回転(rotation)[20]では表され得ない[11], [33]。重要なことは、これまでのパターン情報処理学はパターンの大きな変形に対しては無力な処理手法しか提供していないことである。

パターンとはある1つの標準的なパターンからの変形物として記述されると考えよう。パターン認識問題に言及するためには、何らかの標準的なパターンからのcanonical deformationsとしてパターンというものの形(configuration)を表現する方法を確立しなければならない。

S.Suzukiは、**ユニタリ座標変換のもたらすパターンφの変形**を少なくとも吸収する表現をパターンモデルTφとして確立する“パターン認識の数学的理論[28]”を構築しょうとしている。このパターンモデル Tφ は小さい変形や雑音に対し頑健な表現であること(somewhat robust to small deformations and noise)が次第に明らかになりつつある。Φを処理の対象とするパターンφの集合として、**埋込性質**(law of being embedded)

$$\psi\in\Phi\ \Rightarrow\ T\psi\in\Phi \tag{4}$$

と、**ベキ等性質**(idempotent law)

$$T(T\psi)=T\psi \text{ for any } \psi\in\Phi \tag{5}$$

並びに、**吸収性質**(absorptive law)

$$T(D\psi)=T\psi \text{ for any } \psi\in\Phi \quad \text{,where D is a distortion operator} \tag{6}$$

をもたらす“**モデル構成作用素**(model-construction operator)”と呼ばれる写像

$$T:\Phi\to\Phi \tag{7}$$

を使用することは、同一のカテゴリに帰属する成員であるパターンを識別することにつながるものである。

2.3　線形な変形の除去

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I \tag{8}$$

を満たすという意味で、その逆A^{-1}が存在するとは限らない線形作用素 A で変形を受けたパターンψが観測されたとき、方程式

$$A\eta=\psi \tag{9}$$

が成り立っているから、Aの共役作用素(adjoint operator) A^*を用意して、方程式(9)から成り立つことが知られる**正規方程式**(the normal equation)

$$A^*A\eta=A^*\psi \tag{10}$$

を導入すると、

$$\eta=(A^*A)^{-1}A^*\psi \tag{11}$$

と、変形前のパターンηが求まる。

一般に、線形作用素Bに対し、等式

$$BCB=B \tag{12}$$

を満たす線形作用素Cを、a pseudoinverse of C というが[2]、例えば、

$$BC=B\wedge BB=B\Rightarrow BCB=B \tag{13}$$

$$CB=B\wedge BB=B\Rightarrow BCB=B \tag{14}$$

であることに注意しておく。式(7)のモデル構成作用素Tに対しては、このTは線形ではないが、式(13)は2式(6),(5)より満たされており、

$$TDT\psi=T\psi\wedge T\eta=\psi\ \Rightarrow\ TDT\psi=\psi\quad\because\quad TT=T \tag{15}$$

より、観測方程式(9)に対応する方程式$T\eta=\psi$の解ηは、$\eta=DT\psi$で与えられることがわかる。

さて、

$$A^+\equiv(A^*A)^{-1}A^* \tag{16}$$

と定義される線形作用素A^+は、明らかに、等式

$$AA^+A=A \tag{17}$$

を満たすことが知れ、Aのpseudoinverseである。

観測方程式(9)の解η'が存在すれば、$\eta''=A^+\psi$も観測方程式(9)の解であることが、

$$A\eta''=A(A^+\psi)=AA^+(A\eta')=A\eta'=\psi \tag{18}$$

であることよりわかる。

問題は、パターン情報処理における実際の場面では、観測方程式(9)でのAが知られていないことであり、また、知られていたとしてもAが線形とは限らない複雑な構造を持っている場合が多数考えられることである。

2.4　多数の変形データを表現するパターン

ある程度変形が許される情報とは？　それは冗長性のあるパターンであり、冗長性排除(the elimination of redundancy)の対象になる情報表現のことである。

本節では、本論文で取り扱うパターンの1つの種類が説明される。

実験や調査などで得られたデータは種々の誤差を含んでいるが、a_{ij}, b_iは共に実数値として、

このような誤差があるm個の1次独立なデータの組

$$\{\langle a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}\rangle,\quad b_i\}_{i=1\sim m} \tag{19}$$

についての、自乗誤差(mean-squared-error)

$$\overline{e^2} \equiv \Sigma_{i=1}^{m}[\Sigma_{k\in L} c_k \cdot \psi_k(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) - b^i]^2 \tag{20}$$

が最小となるような実係数c_kの組 $\{c_k\}_{k\in L}$を求めることを考えよう。ここに、

$$\psi_k = \psi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n), k \in L \tag{21}$$

はn変数$x_1, x_2, \cdots, x_n$の1次独立な実数値関数系(a set of linearly independent real-valued functions)としておく。

それには、

$$\partial\overline{e^2}/\partial c_k = \Sigma_{i=1}^{m} 2 \cdot [\Sigma_{\ell\in L} c_\ell \cdot \psi_\ell(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) - b_i] \cdot \psi_k(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) = 0, k \in L \tag{22}$$

を満たすように、$\{c_k\}_{k\in L}$を求めればよい。つまり、連立1次方程式(a sytem of n simultaneous equations in n unknowns)

$$[\Sigma_{\ell\in L} c_\ell \cdot [\Sigma_{i=1}^{m} \psi_k(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \cdot \psi_\ell(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})] = \Sigma_{i=1} b_i \cdot \psi_k(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), k \in L \tag{23}$$

を解けばよい。

このような解$\{c_k\}_{k\in L}$が存在する場合、本論文で処理するパターン$\varphi = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$は、

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \Sigma_{k\in L} c_k \cdot \psi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{24}$$

と表され、

もし、最小自乗誤差

$$\min\overline{e^2} = \Sigma_{i=1}^{m} b_i \cdot b_i - \Sigma_{k\in L} c_k \cdot \Sigma_{i=1}^{m} b_i \cdot \psi_k(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \tag{25}$$

がある与えられた正の値εより小さければ、この条件を満たすという意味で、パターンφは**ある程度の変形が許される情報**という意味である。つまり、不等式

$$\min\overline{e^2} < \varepsilon \tag{26}$$

を満たす、式(19)でのデータの組$\{\langle a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}\rangle, b_i\}_{i=1\sim m}$は式(24)でのパターン$\varphi$を表していると考えられる。

このとき、$\{\psi_k\}_{k\in L}$はパターンφをそこまで分解できるという意味で、

a set of primitive shape-components　(形状素パターンψ_kの集合)

と呼ばれる。式(24)のφは、式(19)のデータの組について、**重回帰分析**(multiple-regression analysis)**して得られたパターン**と考えられる。同様な考えで、重回帰分析によって得られた線形回帰式(パターン)を古典2値真理関数で近似することが文献[49]において行われているが、この場合の古典2値真理関数が、そこでの直交系を$\{\psi_k\}_{k\in L}$として採用すれば、本論文でのモデル$T\varphi$(の定数倍)に相当することを指摘しておこう。

2.5　微分幾何学から眺めたパターン変形

微分幾何学(differential geometry)の立場からは、n = 2の場合の、式(24)で表されるパターン$\varphi = \varphi(x_1, x_2)$は、3次元位置ベクトル(three-dimensional position vector)

$$\underline{r}(x_1, x_2) = x_1 \cdot \underline{i} + x_2 \cdot \underline{j} + x_3 \cdot \underline{k}$$

ここに、$x_3=\varphi(x_1,x_2)$, $\underline{i}=\langle 1,0,0\rangle$, $\underline{j}=\langle 0,1,0\rangle$, $\underline{k}=\langle 0,0,1\rangle$ (27)

と同一視されてよい。ならば、

The end point of $\underline{r}(x_1,x_2)$ generates the surface

と云うことになるが、このとき得られるsurface上の点 $\langle x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3\rangle$ から、点 $\langle x_1, x_2, \varphi(x_1,x_2)\rangle$ でのこのsurfaceの接平面への距離 $D(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))$ は、

$$D(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))$$
$$=2^{-1}\cdot[(\partial^2\varphi/\partial x_1^2)dx_1^2+2(\partial^2\varphi/\partial x_1\partial x_2)dx_1dx_2+(\partial^2\varphi/\partial x_2^2)dx_2^2]$$
$$/[(\partial\varphi/\partial x_1)^2+(\partial\varphi/\partial x_2)^2+1]^{1/2} \tag{28}$$

で与えられる[4]。接平面からの変形の程度を与えるこの距離 $D(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))$ などを用いて、パターン $\varphi=\varphi(x_1,x_2)$ の近似表現を求め、この近似表現を φ の代りに用いるパターンモデルの研究については、割愛される(付録Fを参照)。

3．連続的微分可能なパターン（多変数関数）の表現

処理の対象とする問題のパターン $\varphi=\varphi(x)$ が各変数について2回まで連続的微分可能な関数であると仮定すると、その積分表示が正確に可能になることが以下のように、示される。

先ず、n変数 $x=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$ の関数 $\varphi=\varphi(x)=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ については、恒等式

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)-\varphi(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$
$$=\int_0^1 dt[(d/dt)\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)]_{y_k=a_k+t(x_k-a_k)(k=1\sim n)} \tag{1}$$

が成立することから、出発する。

式(1)を変形しよう。

式(1)＝

$$\int_0^1 dt\ \sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\cdot(\partial/\partial y_i)\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)|_{y_k=a_k+t(x_k-a_k)(k=1\sim n)}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\cdot\int_0^1 dt(\partial/\partial y_i)\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)|_{y_k=a_k+t(x_k-a_k)\ (k=1\sim n)} \tag{2}$$

が成立し、

$$\eta_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$\equiv\int_0^1 dt(\partial/\partial y_i)\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)|_{y_k=a_k+t(x_k-a_k)\ (k=1\sim n)} \tag{3}$$

とおけば、

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=\varphi(a_1,a_2,\cdots,a_n)+\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\cdot\eta_i(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{4}$$

と表現される。

更に、同様に考えて、

$$(\partial/\partial y_i)\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)|_{y_k=a_k+t(x_k-a_k)\ (k=1\sim n)}$$
$$-(\partial/\partial y_i)\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)|_{y_k=a_k\ (k=1\sim n)}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(x_j-a_j)\cdot t\cdot\int_0^1 dt(\partial^2/\partial y_j\partial y_i)\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)|_{y_k=a_k+ts(x_k-a_k)\ (k=1\sim n)} \tag{5}$$

を得て、結局

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)-\varphi(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\cdot\int_0^1 dt\ \ [(\partial/\partial y_i)\varphi|_{y_k=a_k\ (k=1\sim n)}+\sum_{j=1}^{n}(x_j-a_j)\cdot t\cdot$$

$$\int_0^1 ds(\partial^2/\partial y_j\partial y_i)\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)|_{y_k=a_k+ts(x_k-a_k)\ (k=1\sim n)}]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\cdot(\partial/\partial y_i)\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)|_{y_k=a_k(k=1\sim n)}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i-a_i)\cdot(x_j-a_j)\cdot\int_0^1 dt\ \ t\cdot\int_0^1 ds$$

$$(\partial^2/\partial y_j\partial y_i)\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)|_{y_k=a_k+ts(x_k-a_k)(k=1\sim n)} \tag{6}$$

つまり、

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$=\varphi(a_1,a_2,\cdots,a_n)+\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\cdot\int_0^1 dt\ (\partial/\partial y_i)\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)|_{y_k=a_k+t\ (x_k-a_k)\ (k=1\sim n)}$$

$$=\varphi(a_1,a_2,\cdots,a_n)+\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\cdot$$

$$(\partial/\partial y_i)\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)|_{y_k=a_k}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i-a_i)\cdot(x_j-a_j)\cdot$$

$$\int_0^1 dt\ \ t\cdot\int_0^1 ds(\partial^2/\partial y_j\partial y_i)\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)|_{y_k=a_k+ts(x_k-a_k)\ (k=1\sim n)}] \tag{7}$$

と表現出来、この式(7)が所要の表現式である。

尚、式(4)に関連して、文献[5]の第1章、§1、定理2(p.6)では、次の事実が指摘されている:

$f(x)$をn次元実ユークリッド空間$R^n(\ni x=(x_1,x_2,\cdots,x_n))$上の$C^\infty$−関数(無限回連続的微分可能な関数)とし、$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$を$R^n$上の点とする。このとき、

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$=f(a_1,a_2,\cdots,a_n)+\sum_{j=1}^{n}(x_j-a_j)\cdot g_j(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{8}$$

が成り立つ。ここに、$g_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(1\leqq j\leqq n)$はすべて、C^∞−関数である。 □

上述の関数g_iは、具体的に次のように構成される。

$$f_0=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

$$f_1=(x_1,a_2,\cdots,x_n)$$

…

$$f_i=(x_1,x_2,\cdots,x_i,a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_n) \tag{9}$$

…

$$f_n=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

とすれば、

$$f=f_0+\sum_{i=1}^{n}(f_i-f_{i-1}) \tag{10}$$

が成り立つが、このとき、

$$g_i\equiv g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$\equiv(f_i-f_{i-1})/(x_i-a_i) \tag{11}$$

とおけば良い。

4.パターン変形の捕らえ方と情報量

本論文は、パターンの変形をどう捕らえるかを研究したものであり、標準パターン(prototype) $\varphi(\mathrm{x})$からの崩れに対処出来なければならない認識システム、ニューラルネットの性能を解析する際の**試験入力パターン**として、

パラメータつきパターン$\varphi(\mathrm{x};\alpha)$

が用いれられるべきであることを主張したものである。

本章では、先ず、標準パターン$\varphi(\mathrm{x})$と、その変形パターン$\varphi(\mathrm{x};\alpha)$とが満たさなければならない3条件を指摘し(4.1節)、このとき登場したδ型の関数に付いて説明し(4.2節)、compact supportを備え、無限回微分可能な関数への変換を可能にするFriedrichsの軟化子についても説明を加え(4.3節)、本研究の主題である**"変形パターンの構成法"**(4.4節)を示し、ガウス型ゆがみ測度関数を採用した場合、標準パターン$\varphi(\mathrm{x})$と、その変形パターン$\varphi(\mathrm{x};\alpha)$とが簡単な関係で結び付いていることを明らかにし(4.5節)、変形パターンに含まれている標準パターンの程度を情報量として計量化し(4.6節)、最後に、4.5節の結果を多次元化する(4.7節)。

4.1 パラメータ付きパターン$\varphi(\mathrm{x};\alpha)$の満たすべき3条件

n次元ユークリッド空間R^n内のある可測部分集合をMとして、Mにおいて、定義された複素数値関数φを想定する。Mの各点xにスカラー$\varphi(\mathrm{x})$が対応していると考えて、φをM上で定義された**スカラー場**という。更に、スカラー場φの内、例えば、Hilbert空間$\mathfrak{H}=L_2(M;dm)$に属するもののみを考えよう。処理の対象とする問題のパターンφの集合Φは、このようなスカラー場φの集まりであり、少なくとも、条件

$$0\in\Phi\subseteqq\mathfrak{H} \qquad (1)$$

を満たすものである。

以後、パターン変形を論じる場面においては、M＝n次元ユークリッド空間R^nと採り、Mの直角座標系を$\mathrm{x}=\langle \mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_n\rangle$とする。然も、**スカラー場$\varphi$を非負実数値と制限しよう。**

$\mathrm{x}\in M=R^n$の非負実数値関数としてのパターンφの変形としての、2つのパラメータα,γを含むパターン

$$\varphi(\mathrm{x};\alpha)\equiv\varphi_\gamma(\mathrm{x};\alpha) \qquad (2)$$

は、次の3条件(i),(ii),(iii)を満たすとしょう。

(i)(φの**停留性**) 方程式

$$(\partial/\partial\alpha)\varphi_\gamma(\mathrm{x};\alpha)=0 \qquad (3)$$

を満たすパラメータαの値は少なくとも存在して、その1つは座標値$\mathrm{x}\in R^n$である。

(ii)(φの**最尤性**) パラメータαに座標値xを代入して得られるパターン

$$\varphi_\gamma(\mathrm{x};\alpha)|_{\alpha=\mathrm{x}} \qquad (4)$$

は、パターン集合

$$\{\varphi_\gamma(\mathrm{x};\alpha)\,|\,\alpha\in R\ (\text{実数全体の集合})\} \qquad (5)$$

の中で、最も出現しやすいという意味で、

最尤パターン(maximum-likelihood pattern)と云われるが、等式

$\exists C'\in R^{++}$(正実数全体の集合),

$$\varphi_\gamma(\mathrm{x};\alpha)|_{\alpha=\mathrm{x}}=C'\cdot\varphi(\mathrm{x}) \qquad (6)$$

が成立する。

(iii)(最尤パターンの**復元性**)　α以外のあるパラメータγにつき、

$$\gamma \to \infty \tag{7}$$

とすると、(ii)でのパターン$\varphi(x)$とある正実定数Cとについて、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, \varphi_\gamma(x;\alpha) \to C \cdot \varphi(x) \quad \textbf{（第１種復元性）} \tag{8}$$

を実現可能にする手段がある。

4.2　δ型の関数

文献(3)のpp.34－38(第１章,§2の5)によれば、次の２条件(a),(b)を満たす$g_\gamma(\alpha)$をδ型の関数であるという:

(a)どんな正数Mをとっても、$|a| \leqq M, |b| \leqq M$なる限り、積分の絶対値

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \;\; g_\gamma(\alpha) \right| \tag{9}$$

は、a，ｂ及び、γには無関係に(Mにだけ関係する)ある正数で押さえられている。

(b) 0でない任意のa，ｂに対して、

$$\lim_{\gamma\to\infty} \int_a^b d\alpha \;\; g_\gamma(\alpha) =$$

$$\begin{cases} 0 \cdots a < b < 0 \text{ または、} 0 < a < b \text{ のとき} \\ 1 \cdots a < 0 < b \text{ のとき} \end{cases} \tag{10}$$

である。

n次元ユークリッド空間R^nで定義せられ、無限回連続的に微分可能で、ある有界領域の外ではその値が0になる(この有界領域は各関数毎によって各々変わって良い)ような実数値関数全体の集合をD_∞と表す。唯単に、R^nで定義せられた無限回偏微分可能な関数の全体の全体はE_∞と書かれる。

実数値関数$\varphi(x) \in D_\infty$に対して

$$\int_{R^n} dx \;\; \varphi(x) \cdot f(x) = \varphi(0) \tag{11}$$

が成立するような局所積分可能な関数$f(x)$を、**Dirac δ超関数**といい、次のように表す:

$$f = \delta. \tag{12}$$

このとき、変数変換すれば、

$$\int_{R^n} dx \; \varphi(x) \cdot f(x - x_0) = \varphi(x_0) \tag{13}$$

が成り立つことが知れる。また、

$$\theta(t) \equiv$$

$$\begin{cases} 0 & \text{if} \quad t < 0 \\ 1 & \text{if} \quad t > 0 \end{cases} \tag{14}$$

として、

$$(d/dt)\theta(t) = \delta(t) \tag{15}$$

が成り立つことが、部分積分により確かめられる。

今少し、説明しておこう。

$\{g_\gamma(\alpha)\}_\gamma$を$\delta$型の関数列とし、その原始関数列$\{G_\gamma(\beta)\}_\gamma$を考える：

$$G_\gamma(\beta)=\int_{-1}^{\beta} d\alpha \ \ g_\gamma(\alpha) \tag{16}$$

$\{g_\gamma(\alpha)\}_\gamma$が$\delta$型関数列であるから、$\gamma\to\infty$のとき、関数列 $\{G_\gamma(\beta)\}_\gamma$は、

$\beta<0$ならば、0に、また、$\beta>0$ならば、1に収束する

ことになる。更に、任意の有限区間では、

$G_\gamma(\beta)$はγに関しては、一様に有界である

であることもわかる。従って、関数$G_\gamma(\beta)$は超関数の意味で、

$\beta<0$ならば、0に、また、$\beta>0$ならば、1になる式(15)の関数$\theta(t)$に収束する

ということになる。よって、

関数$g_\gamma(\alpha)=(d/d\beta)G_\gamma(\beta)|_{\beta=\alpha}$は超関数の意味で、

$(d/d\alpha)\theta(\alpha)=\delta(\alpha)$に収束する

ことがわかる。

4.3 Friedrichsの軟化子

$\eta\in L_2(R^n;dx)$であれば、以下に説明するFriedrichsの**軟化子**(modifier) ρ_ϵを用いて、

$$\|\rho_\varepsilon*\eta-\eta\|\to 0 \quad (\varepsilon\to+0) \tag{17}$$

を満たす関数$\rho_\varepsilon*\eta=(\rho_\varepsilon*\eta)(x)\in E_\infty$が得られ、然も、

ηがある有界領域の外では、その値が0になるようなものであれば、その有界領域のε－近傍において$\rho_\varepsilon*\eta$はその値が0になる

から、十分小に採られたεの下での$\rho_\varepsilon*\eta$を最尤パターンに選べることになる。

文献[50]，文献，pp.25－28(第1章，7節)によれば、$\rho_\varepsilon*\eta$は次のように定義され、命題4.1が成り立つ。

n次元ユークリッド空間R^nで定義された可測関数$\varphi(x)$が各点の近傍でLebesgue式積分可能とする。このような$\varphi(x)$をlocally summableと云う。$x\in R^n$のどんな小さい近傍をとっても、

$$\int_V dx\ |\varphi(x)|>0 \tag{18}$$

と云う性質を持つ点$x\in R^n$の集合を$\varphi(x)$のsupportと呼ぶ。明らかに、supportは閉集合である。

さて、$\rho(x)$は次の4条件（i），(ii)，(iii)，(iv) を満たすものとする：

(i)(非負実数性) $\forall x\in R^n, \rho(x)\geqq 0$

(ii)(無限回微分可能性) $\rho(x)$は無限回微分可能であって、かつ、compact supportを持つ。

(iii)(supportの有界性) $\rho(x)$のsupportは単位球$|x|\equiv[\sum_{j=1}^{n}x_j^2]^{1/2}\leqq 1$に含まれる。

(iv)(規格化積分性) $\int_{R}^{n} dx\ \ \rho(x)=1$.

上述の4条件(i),(ii),(iii),(iv)を満たすものとして、例えば、

$$\begin{cases}\rho(x)\equiv \\ \quad \exp(-(1-|x|^2))/\int_{R^n}dy\ \exp(-(1-|y|^2)) & \text{if}\quad |x|<1 \\ 0 \qquad \text{if} \quad |x|\geqq 1\end{cases} \tag{19}$$

がある。

このとき、$\varepsilon(>0)$をパラメータとして、

$$\rho_\varepsilon(x)\equiv(1/\varepsilon)^n\cdot\rho(x/\varepsilon)\equiv(1/\varepsilon)^n\cdot\rho(x_1/\varepsilon,x_2/\varepsilon,\cdots,x_n/\varepsilon) \tag{20}$$

とおくと、$\rho_\varepsilon(x)$は、そのsupportが$|x| \leqq \varepsilon$の中にあることを除いて、やはり、4条件(i),(ii),(iii),(iv)を満たす。

さて、$\eta(x)$をlocally summableとして、$\rho_\varepsilon * \eta$は、

$$(\rho_\varepsilon * \eta)(x) \equiv \int_{R^n} dy \ \rho_\varepsilon(x-y) \cdot \eta(y) \tag{22}$$

と定義される。このとき、次の命題4.1が成り立つことが知られている。

[命題4.1](Friedrichsの軟化子の緒性質)

(i)(無限回微分可能性) $(\rho_\varepsilon * \eta)(x) \equiv (\rho_\varepsilon * \eta)(x_1, x_2, \cdots, x_n)$は、無限回微分可能である。

(ii) (supportのε^-有界性) $\rho(x)$のsupportはηのε^-近傍にある。

(iii) (一様収束性) $\eta = \eta(x)$をm回連続的微分可能とすれば、$\varepsilon \to 0$のとき、任意のコンパクト集合(有界閉集合) $K \subset R^n$の上でm次の導関数まで込めて、$(\rho_\varepsilon * \eta)(x)$は$\eta(x)$に一様収束する。

(iv) (L_pノルムに関する収束性) $p > 1$として、

$$\int_{R^n} dx \ |\eta(x)|^p < \infty \tag{23}$$

であれば、

$\varepsilon \to 0$のとき、

$$\int_{R^n} dx \ |(\rho_\varepsilon * \eta)(x) - \eta(x)|^p \to 0 \tag{24}$$

4.4 パラメータ付きパターン$\varphi(x ; \alpha)$の構成法

5.1節の手法を用いて、パターン$\varphi(x)$は非負実数値へ変換されているものとする。

パラメータαを含むパターン$\varphi(x;\alpha)$がパターン$\varphi(x)$からの変体(transformational variant)であるとしょう。パターン$\varphi(x)$についての2つの変形$\varphi(x;\alpha_1)$, $\varphi(x;\alpha_2)$があって、

$$\forall x \in M, \varphi(x;\alpha_1) > \varphi(x;\alpha_2) \tag{25}$$

であるならば、母集団(population)

$$\{\varphi(x;\alpha) \mid \alpha \in R\} \tag{26}$$

内の母数(parameter) αの推定値としては、α_1の方がα_2より望ましいと考えられる。パターン$\varphi(x;\alpha_1)$の方がパターン$\varphi(x;\alpha_2)$より生起しやすいからである。そして、生起の程度が大なるパターンほど、認識システムが正しく処理出来なければならないからである。

従って、尤度$\varphi(x;\alpha)$を最大にするようなαの値α_0は、αの推定値としては最も望ましいものと考えられるであろう。このα_0を母数αの最尤推定値(maximum likelihood estimate)と云う。

最尤推定値 α_0は、最大値を与えるための必要条件

$$(\partial / \partial \alpha) \varphi(x;\alpha) \mid_{\alpha=\alpha_0} = 0 \tag{27}$$

或いは、**最尤方程式**(maximum likelihood equation)

$$(\partial / \partial \alpha) \log_e \varphi(x;\alpha)|_{\alpha=\alpha_0} = [\varphi(x;\alpha)]^{-1} \cdot (\partial / \partial \alpha) \varphi(x;\alpha)|_{\alpha=\alpha_0} = 0$$
$$\text{such that} \quad \varphi(x;\alpha)|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0 \tag{28}$$

を満足しなければならない。α_0を求めるには、2式(27),(28)のいずれかを解けばよい。

次の定理1(**主定理**)は、4.1節の3条件(i),(ii),(iii)を満たす変形パターン$\varphi_\gamma(x;\alpha)$の構造を3種類、決定している。

[備考1]：以下の定理1の$\varphi(x;\alpha)$は、

$$\varphi(x;\alpha) = \lim_{n\to\infty} c\cdot\varphi(x)\cdot f_n(\alpha)\cdot g_\gamma(\alpha - x) \tag{29}$$

と考えるべきものであるが、式(34)のように略記する。ここに、$f_n(\alpha)\in D_\infty$であり、

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\alpha)|_{\alpha=x} = 1 \tag{30}$$

を満たしていなければならない。

[定理1]（**変形パターン　$\varphi_\gamma(x\ ;\ \alpha)$の表現定理**）

基準となるパターン$\varphi(x)$があるカテゴリ(category;類概念)の代表パターンなどの、あまり形の崩れていないパターンの場合、

$$\varphi(x;\alpha) \equiv \varphi\gamma(x;\alpha) \equiv c\cdot\varphi(x)\cdot g_\gamma(\alpha - x) \tag{31}$$

ここに、cはある正定数であり、

とおくと、$g_\gamma(\alpha)$が、次の3つ(イ),(ロ),(ハ)のいずれかで与えられれば、式(31)の$\varphi(x;\alpha) \equiv \varphi_\gamma(x;\alpha)$は、4.1節の3条件(i),(ii),(iii)を満たす:

(イ) $g_\gamma(\alpha) = (1/\pi)\cdot(1/\gamma)\cdot[\alpha^2 + (1/\gamma)^2]^{-1}$

ここに、$\varepsilon = 1/\gamma > 0$

(ロ) $g_\gamma(\alpha) = (1/\pi)\cdot(1/\alpha)\cdot\sin(\gamma\alpha)$

ここに、$0 < \gamma < \infty$

(ハ) $g_\gamma(\alpha) = (2\pi\cdot 1/\gamma)^{-1/2}\cdot\exp(-2^{-1}\cdot\gamma\alpha^2)$

ここに、$\sigma^2 = 1/\gamma$

(証明) (イ),(ロ),(ハ)の$g_\gamma(\alpha)$が4.2節のδ型の関数であることは、文献[3]のpp.35−38で示されている。(イ),(ロ),(ハ)の$g_\gamma(\alpha)$が4.1節の3条件(i),(ii),(iii)を満たすことを、以下に示す。

<u>(イ)について：</u>

(イ)のi：　$(\partial/\partial\alpha)\, g_\gamma(\alpha)$

$$= (-2\alpha)\cdot[\alpha^2 + \varepsilon^2]^{-1}\cdot g_\gamma(\alpha) \tag{32}$$

であるから、$(\partial/\partial\alpha)\, g_\gamma(\alpha) = 0$を満たす　α　は、$\alpha = 0$のみであることがわかる。よって、式(3)を満たすパラメータαの値は$\alpha = x$しか存在しないことがわかる。尚、

$$\begin{aligned}&(\partial^2/\partial\alpha^2)\, g_\gamma(\alpha)\\ &= g_\gamma(\alpha)\cdot\{2/[\alpha^2 + \varepsilon^2]^{-1}\}\\ &\quad\cdot\{2\alpha^4 + (1+2\varepsilon^2)\alpha^2 - \varepsilon^2\}/[\alpha^2 + \varepsilon^2]^{-1}\end{aligned} \tag{33}$$

である。

(イ)のii：　式(31)と(イ)から、

$$\begin{aligned}&\varphi(x;\alpha)|_{\alpha=x} =\\ &= C\cdot\varphi(x)\cdot g_\gamma(0) = C'\cdot\varphi(x)\\ &\text{ここに、}C' = C\cdot(1/\pi)\cdot(1/\varepsilon) > 0\end{aligned} \tag{34}$$

を得て、式(6)の成立が示された。

(イ)のiii：

$\lim_{\gamma\to\infty} g_\gamma(\alpha) = \delta(\alpha)$ (文献[3]のpp.35−38)

$$\therefore\ \lim_{\gamma\to\infty} g_\gamma(\alpha - x) = \delta(\alpha - x) \tag{35}$$

が成立しているから、$\gamma\to\infty$に従い、式(8)が成り立つことがわかる。

(ロ)について：

(ロ)のｉ：　$(\partial/\partial\alpha)\,g_\gamma(\alpha)$

$$=(-1/\alpha)\cdot g_\gamma(\alpha)+\gamma\cdot(1/\pi)\cdot(1/\alpha)\cdot\cos(\alpha_\gamma) \tag{36}$$

である。

$(\partial/\partial\alpha)\,g_\gamma(\alpha)=0$ を満たす α を求めよう。

公式１　$\sin x = x-(3!)^{-1}\cdot x^3+(5!)^{-1}\cdot x^5-\cdots+(-1)\,r\cdot((2r+1)!)^{-1}x^{2r+1}+\cdots$

$\therefore\ (1/x)\cdot\sin x=1-(3!)^{-1}\cdot x^2+(5!)^{-1}\cdot x^4-\cdots+(-1)^r\cdot((2r+1)!)^{-1}x^{2r}+\cdots$

公式２　$\cos x=1-(2!)^{-1}\cdot x^2+(4!)^{-1}\cdot x^4-\cdots+(-1)^r\cdot((2r)!)^{-1}x^{2r}+\cdots$

を使えば、

$$\cos x-x^{-1}\cdot\sin x =x^2\cdot(-1)\cdot[(2!)^{-1}-(3!)^{-1}]+x^4\cdot(-1)^2\cdot[(4!)^{-1}-(5!)^{-1}]+\cdots+x^{2r}\cdot(-1)^r\cdot[((2r)!)^{-1}-((2r+1)!)^{-1}]+\cdots \tag{37}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}[\cos x-x^{-1}\cdot\sin x]/x=0 \tag{38}$$

が得られた。この公式(38)を適用し、

$(\partial/\partial\alpha)\,g_\gamma(\alpha)$

$$=(\gamma^2/\pi)\cdot(\alpha\gamma)^{-1}\cdot[\cos(\alpha\gamma)-(\alpha\gamma)^{-1}\cdot\sin(\alpha\gamma)]\to 0 \tag{39}$$

がわかり、

$\alpha=0$ は方程式 $(\partial/\partial\alpha)\ g_\gamma\ (\alpha)\ =0$ の解である

ことがわかる。よって、式(３)を満たすパラメータ α の値の１つは $\alpha=x$ であることがわかる。
尚、公式(36)を使って、

$(\partial^2/\partial\alpha^2)\,g_\gamma(\alpha)$

$$=[2/\alpha^2-\gamma^2]\cdot g_\gamma(\alpha)-(2\gamma/\alpha)\cdot(1/\pi))\,\alpha^{-1}\cdot\cos(\alpha\gamma) \tag{40}$$

と求められる。ここで、

$\cos(\alpha\gamma)=1-2\cdot\sin 2\,(\alpha\gamma/2)$

を適用すれば、結局、

$(\partial^2/\partial\alpha^2)\,g_\gamma(\alpha)$

$$=-(2\gamma/\alpha\pi^2)+[2/\alpha^2-\gamma^2]\cdot g_\gamma(\alpha)+(\alpha\gamma)\cdot g_\gamma(\alpha/2)^2 \tag{41}$$

と書換えられる。

(ロ)のii：　式(31)と(イ)から、

$\varphi(x;\alpha)\mid_{\alpha=x}=C\cdot\varphi(x)\cdot g_\gamma(0)=C'\cdot\varphi(x)$

ここに、$C'=C\cdot(\gamma/\pi)>0$　(42)

を得て、式(６)の成立が示された。

(ロ)のiii：

$\lim_{\gamma\to\infty} g_\gamma(\alpha)=\delta(\alpha)$ (文献[３]のpp.35－38)

$$\therefore\ \lim_{\gamma\to\infty} g_\gamma(\alpha-x)=\delta(\alpha-x) \tag{43}$$

が成立しているから、$\gamma\to\infty$ に従い、式(８)が成り立つことがわかる。

(ハ)について：

(ハ)のｉ：　$(\partial/\partial\alpha)\,g_{\gamma}(\alpha)=(-\alpha/\sigma^{2})\cdot g_{\gamma}(\alpha)$ (44)

であるから、$(\partial/\partial\alpha)\,g_{\gamma}(\alpha)=0$ を満たすαは、

$\alpha=0$のみであることがわかる。よって、式(3)を満たすパラメータαの値は$\alpha=x$しか存在しないことがわかる。尚、

$(\partial^{2}/\partial\alpha^{2})\,g_{\gamma}(\alpha)=(1/\sigma^{2})\cdot\{(\alpha^{2}-\sigma^{2})/\sigma^{2}\}\cdot g_{\gamma}(\alpha)$ (45)

である。

この(イ)でのガウス型関数$g_{\gamma}(\alpha-x)$は、$\alpha=x$と云う平面に対称であり、$\alpha=x$で最大値$(2\pi\cdot 1/\gamma)^{-1/2}$をとり、$x\pm\sqrt{1/\gamma}$が変曲点であることは２式(44)，(45)からわかる。

因みに、

$h(x)\equiv-(d^{2}/dx^{2})\exp(-2^{-1}\cdot x^{2})$

$=[1-x^{2}]\cdot\exp(-2^{-1}\cdot x^{2})$ (46)

は、wavelet展開理論[39]ではthe mexican hat functionと呼ばれるものである。

(ハ)のii：　式(31)と(イ)から、

$\varphi(x;\alpha)\,|_{\alpha=x}=C\cdot\varphi(x)\cdot g_{\gamma}(0)=C'\cdot\varphi(x)$

ここに、$C'=C\cdot[2\pi\sigma^{2}]^{-1/2}>0$ (47)

を得て、式(6)の成立が示された。

(ハ)のiii：

$\lim_{\gamma\to\infty}g_{\gamma}(\alpha)=\delta(\alpha)$ (文献[3]のpp.35－38)

$\therefore\ \lim_{\gamma\to\infty}g_{\gamma}(\alpha-x)=\delta(\alpha-x)$ (48)

が成立しているから、$\gamma\to\infty$に従い、式(8)が成り立つことがわかる。 □

以後、$g_{\gamma}(\alpha-x)$が定理１の(ハ)のガウス型関数である場合、変形パターン$\varphi(x;\alpha)$と情報量密度$I(\varphi;\alpha)(x)$とについて、簡単に説明しておこう。

4.5 定理１から導かれる簡単な変形パターン$\varphi_{\gamma}(x;\alpha)$

変形パラメータαの付いた非負実数値パターン(parameterized pattern) $\varphi(x;\alpha)$ について、極値を与えるための必要条件

$(\partial/\partial)\,\varphi(x;\alpha)=0$ (49)

を満たすαの値の１つのα_{0}を用いて、最も出現し易いパターン(最尤パターン)$\varphi(x)$は、

$\varphi(x)\equiv\varphi(x;\alpha)|_{\alpha=\alpha_{0}}$ (50)

であると定義される。前節の定理１から、式(31)の非負実数値パターン$\varphi(x;\alpha)$が、この極値を与える変形パラメータαの値がα_{0}が座標値xであるように設定されていることがわかるのである。

変形パラメータαの付いたパターン$\varphi(x;\alpha)$には、**最も出現頻度の大きい最尤パターン** $\varphi(x)$が含まれているとすれば、原$\varphi(x;\alpha)$はどのような形式で与えられるべきかを、定理１では研究された。

定理１の応用を考えてみょう。

変形パターン$\varphi_{\gamma}(x;\alpha)$をテーラー展開しょう。

$|\alpha-x|$が十分小の場合、

$\varphi_{\gamma}(x;\alpha)$

$\fallingdotseq\varphi_{\gamma}(x;\alpha)\,|_{\alpha=x}+(\alpha-x)\cdot(\partial/\partial\alpha)\,\varphi_{\gamma}(x;\alpha)\,|_{\alpha=x}$

$+2^{-1}\cdot(\alpha-x)^2\cdot(\partial^2/\partial\alpha^2)\varphi_\gamma(x;\alpha)|_{\alpha=x}$ (51)

と、与えられることがわかる。ところが、$\varphi(x)$が最尤パターンであれば、最尤方程式(28)が成立し、

$\varphi_\gamma(x;\alpha)|_{\alpha=x}\neq 0$であれば、

$(\partial/\partial\alpha)\varphi_\gamma(x;\alpha)|_{\alpha=x}=0$ (52)

が成立し、よって、式(51)は、

$|\alpha-x|$が十分小の場合、

$\varphi_\gamma(x;\alpha)$

$\fallingdotseq\varphi_\gamma(x;\alpha)|_{\alpha=x}+2^{-1}\cdot(\alpha-x)^2\cdot(\partial^2/\partial\alpha^2)\varphi_\gamma(x;\alpha)|_{\alpha=x}$ (53)

と書き直される。定理1の証明において、3式(33),(40),(45)を求めておいたのは、変形パターン$\varphi_\gamma(x;\alpha)$のこの表式(53)の具体化に必要になるからである。

特に、定理1は、式(31)に登場し、**ゆがみ測度関数**(distortion-measure function)と称されて良い$g_\gamma(\alpha)$として、“$\gamma\to\infty$のときDiracδ超関数に収束する”関数$g\,\gamma(\alpha)$が用いられるべきと指摘しており、定理1の(イ),(ロ),(ハ)のいずれかで与えれば都合がよいことが示されている。特に、$g_\gamma(\alpha-x)$は変形パラメータαが座標値xを採る確率の密度と考えられる定理1,(ハ)のガウス型を選定し、

$g_\gamma(\alpha)=[2\pi\sigma^2]^{-1/2}\cdot\exp(-\alpha^2/(2\sigma^2))$

ここに、$\gamma=1/\sigma^2$ (54)

と、選んでいる場合、式(45)より、

$(\partial^2/\partial\alpha^2)\varphi_\gamma(x;\alpha)$

$=C\cdot\varphi(x)\cdot(\partial^2/\partial\alpha^2)g_\gamma(\alpha-x)$

$=C\cdot\varphi(x)\cdot(1/\sigma^2)\cdot[\{(\alpha-x)^2-\sigma^2\}/\sigma^2]\cdot g_\gamma(\alpha-x)$ (55)

$\therefore\ (\partial^2/\partial\alpha^2)\varphi_\gamma(x;\alpha)|_{\alpha=x}$

$=\varphi_\gamma(x;\alpha)|_{\alpha=x}\cdot(-1/\sigma^2)$ (56)

であるから、この式(56)を式(51)に代入して、近似的に、

$\varphi(x;\alpha)$

$=\varphi_\gamma(x;\alpha)|_{\alpha=x}\cdot[1-2^{-1}\cdot(\alpha-x)^2/\sigma^2]$ (57)

ここに、

$\varphi_\gamma(x;\alpha)|_{\alpha=x}$

$=C\cdot\varphi(x)\cdot g_\gamma(0)$

$=C\cdot\varphi(x)\cdot(2\pi\cdot 1/\gamma)^{-1/2}$ (58)

と、求められることがわかる。

この変形パターン式(57)は直ちに、多次元化され得る。

同様に、定理1の(イ),(ロ)の場合も、2式(33),(40)を使えば、式(51)から、式(57)に対応する公式が求められるが、割愛される。

4.6 変形パターンに含まれる変形情報量密度

変形パターンに含まれる最尤パターンの程度を表す情報量の密度を定義してみょう。

4.6.1 情報量密度$I(\varphi;\alpha)(x)$

最尤パターン$\varphi(x)$に含まれる変形パターン$\varphi(x;\alpha)$の程度を表す**情報量密度** (a density of the amount of information about the pattern $\varphi(x;\alpha)$ contained in the pattern $\varphi(x)$) $I(\varphi;\alpha)$

(x) というものを、

$$I(\varphi;\alpha)(x)\equiv$$

$$\begin{cases} 0 \quad \text{if} \quad |\varphi(x;\alpha)|^2/|\quad(x)|^2>1 \\ -2^{-1}\cdot\log_e[1-|\varphi(x;\alpha)|^2/|\varphi(x)|^2] \quad \text{if}\ |\varphi(x;\alpha)|^2/|\varphi(x)|^2\leqq 1 \end{cases} \tag{59}$$

と定義してみょう。式(59)は、“$\varphi_\gamma(x;\alpha)$内に$\varphi(x)$が含まれている程度”を表現する情報量の密度として、定義されているともみなされても良い。そうすると、

$$I(\varphi;\alpha)=$$

$$\int_{R^n} dx\, I(\varphi;\alpha)(x)$$

$$=(-1/2)\cdot\int_{|\varphi(x;\alpha)|^2/|\varphi(x)|^2\leqq 1} dx \log_e[1-|\varphi(x;\alpha)|^2/|\varphi(x)|^2] \tag{60}$$

と与えられることになる。

4.6.2　1つの具体形と一般形

一般の式(59)の$I(\varphi;\alpha)(x)$の場合、式(31)を考慮して、式(59)から、

$$I(\varphi;\alpha)(x)=$$

$$\begin{cases} 0 \quad \text{if} \quad |C\cdot g_\gamma(\alpha-x)|^2>1 \\ -2^{-1}\cdot\log_e[1-|C\cdot g_\gamma(\alpha-x)|^2] \quad \text{if} \quad |C\cdot g_\gamma(\alpha-x)|^2\leqq 1 \end{cases} \tag{61}$$

となる。

特に、$g_\gamma(\alpha)$がガウス型関数の場合(定理1，(ハ)の場合)、2式(57)，(58)を式(59)に代入して、近似的に、

$$I(\varphi;\alpha)(x)=$$

$$\begin{cases} 0 \quad \text{if} \quad |C\cdot g_\gamma(0)\cdot[1-2^{-1}\cdot(\alpha-x)^2/\sigma^2]|^2>1 \\ -2^{-1}\cdot\log_e[1-|C\cdot g_\gamma(0)\cdot[1-2^{-1}\cdot(\alpha-x)^2/\sigma^2]|^2] \\ \quad \text{if}\ |C\cdot g_\gamma(0)\cdot[1-2^{-1}\cdot(\alpha-x)^2/\sigma^2]|^2\leqq 1 \end{cases} \tag{62}$$

と、与えられることがわかる。

変形パターン$\varphi(x;\alpha)$の、標準パターン$\varphi(x)$からの**変形量**(distortion degree)としての、式(62)の情報量密度関数$I(\varphi;\alpha)(x)$は、結果として、$\varphi(x)$に無関係になり、変形パラメータαと、今注目している座標値xとの距離$|\alpha-x|$にのみ、依存する形式になっていることに注意しておこう。

4.7　多次元化

変形パターン$\varphi(x;\alpha)$は、αを変形パラメータとして、最尤パターン$\varphi(x)$からその形状が崩れたパターンを表していなければならないが、本研究では、この変形パターン$\varphi(x;\alpha)$は式(34)の形式で定義されている。最尤パターン$\varphi(x)$はあるカテゴリの典型的なパターンに、4.3節のFriedrichsの軟化子ρ_εを作用させたものであると想定されて良いものであり、$\varphi(x)\in D_\infty$であるとみて良い。

今1つのパラメータγについては、$\gamma\to\infty$にすれば、式(31)内のゆがみ測度関数と称される$g_\gamma(\alpha-x)$はDiracδ超関数$\delta(\alpha-x)$に収束するように設定されている。

Diracδ超関数$\delta(u)$は、4.2節で説明されており、偶関数としての性質

$$\forall u\in R(\text{実数全体の集合}),\ \delta(-u)=\delta(u) \tag{63}$$

を備えており、

$$\lim_{\gamma\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\varphi_\gamma(x;\alpha)=C\cdot\varphi(\alpha)\quad \textbf{(第2種復元性)} \tag{64}$$

が成立する。このようにして、

変形パターン$\varphi_\gamma(x;\alpha)$は、最尤パターンの正の定数倍$c\cdot\varphi(\alpha)$の**素形状成分**(elementary shape-component)を含有している

と、解釈され得、

$\gamma\to\infty$なる極限では、最尤パターンの正の定数倍$c\cdot\varphi(\alpha)$に一致する

事実に注意しておかねばならない。

特に、ゆがみ測度関数と称される$g_\gamma(\alpha-x)$として、(ハ)の**ガウス型関数を採用している場合**を考えてみよう。

$$C\cdot g_\gamma(0)=C\cdot(2\pi\cdot 1/\gamma)^{-1/2}=1 \tag{65}$$

を満たすように、正実定数$C>0$を選んでいる場合、式(57)から近似的に、変形パターン$\varphi_\gamma(x;\alpha)$は、

$\gamma=1/\sigma^2$として、

$$\varphi(x;\alpha)\equiv\varphi_\gamma(x;\alpha)\fallingdotseq\varphi(x)\cdot[1-(2\sigma^2)^{-1}\cdot(\alpha-x)^2] \tag{66}$$

であるが、

$$1-(2\sigma^2)^{-1}\cdot(\alpha-x)^2\geqq 0$$
$$\Leftrightarrow x-\sqrt{2\sigma^2}\leqq\alpha\leqq x+\sqrt{2\sigma^2} \tag{67}$$

が成立しているから、

$$\varphi(x;\alpha)\equiv\varphi_\gamma(x;\alpha)$$
$$\begin{cases}<0 & \text{if}\quad \alpha<x-\sqrt{2\sigma^2}\ \vee\ x+\sqrt{2\sigma^2}<\alpha\\ =0 & \text{if}\quad \alpha=x\pm\sqrt{2\sigma^2}\\ >0 & \text{if}\quad x-\sqrt{2\sigma^2}\leqq\alpha\leqq x+\sqrt{2\sigma^2}\end{cases} \tag{68}$$

であるが、$\varphi_\gamma(x;\alpha)\geqq 0$であることを考慮すれば、実際には、

$$\varphi(x;\alpha)\equiv\varphi_\gamma(x;\alpha)\fallingdotseq$$
$$\begin{cases}\varphi(x)\cdot[1-(2\sigma^2)-1\cdot(\alpha-x)^2]\\ \qquad \text{if}\quad x-\sqrt{2\sigma^2}\leqq\alpha\leqq x+\sqrt{2\sigma^2}\\ 0 \qquad \text{otherwise}\end{cases} \tag{69}$$

と、表されなければならない。更に、

$$x=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle\in R^n$$
$$\alpha=\langle \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\rangle\in R^n \tag{70}$$

と云う多次元の場合、式(69)から帰納して、

$\gamma=1/\sigma^2$として、

$$\varphi(x;\alpha)\equiv\varphi_\gamma(x;\alpha)\fallingdotseq$$
$$\begin{cases}\varphi(x)\cdot[1-(2\sigma^2)^{-1}\cdot|\alpha-x|^2]\\ \qquad \text{if}\quad x_i-\sqrt{2\sigma^2}<\alpha_i<x_i+\sqrt{2\sigma^2}\\ 0 \qquad \text{otherwise}\\ \qquad \text{for any } i\in\{1,\ 2,\ \cdots,n\}\end{cases} \tag{71}$$

ここに、

$$|\alpha-x|2=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i-x_i|^2 \tag{72}$$

とするのが良いと、考えられる。

本研究で最終的に提案する2式(69),(71)が、標準パターンφ(x)からの、正準変形(canonical deformation)としての変形パターンφ_γ(x;α)の表現である。

[備考2]:非負実数値標準パターンからの変形を想定するときには、どんなに変形しても変形パターンは依然として非負実数値でなければならない、つまり、$\varphi_\gamma(x;\alpha) \geqq 0$でなければならないとする仮定のもとでは、定理1の(ロ)の場合は、この仮定に矛盾するゆがみ測度関数$g_\gamma(\alpha - x)$を用意していることになる。式(69),式(71)の有する意味を勘案し、不等式

$$\gamma \cdot (\alpha - x) \geqq 0 \tag{73}$$

を満たす座標値x,変形パラメータα以外の座標値では、$\varphi_\gamma(x;\alpha) = 0$と考えなければならないことになろう。

5. 非負実数値パターンへの変換

本章では、複素数値パターンを4つの非負実数値パターンの和へ変換する方法を先ず説明し(5.1節,5.3節)、更に、実数値パターンから複素数値パターンへ変換されるパターン変換例(フレネル変換)を指摘し(5.2節)、実数値パターンから非負実数値パターンへの変換法がGaussian filter,2階偏微分作用素,振幅規格化作用素を使って、可能であることが示される(5.3節)。

5.1　4つの非負実数値パターンの和への、簡単な変換法

複素数値パターンφ(x)は、2つの実数値パターン$\varphi_1(x)$,$\varphi_2(x)$の和に、

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\,\varphi_2(x) \tag{1}$$

と分解出来る。ここに、$i \equiv \sqrt{-1}$であり、$\overline{\varphi}$をφの複素共役として、

$$\varphi_1(x) \equiv 2^{-2} \cdot [\varphi(x) + \overline{\varphi}(x)] \tag{2}$$

$$\varphi_2(x) \equiv 2^{-1} \cdot [\varphi(x) - \overline{\varphi}(x)]. \tag{3}$$

また、各実数値パターン$\varphi_k(x)$は、2つの角非負実数値パターン$\varphi_k^+(x)$,$\varphi_k^-(x)$の和に、

$$\varphi_k(x) = \varphi_k^+(x) + \varphi_k^-(x) \quad ,k=1,\ 2 \tag{4}$$

と分解出来る。ここに、

$$\varphi_k^+(x) \equiv 2^{-1} \cdot [\varphi_k(x) + |\varphi_k(x)|] \tag{5}$$

$$\varphi_k^-(x) \equiv 2^{-1} \cdot [\varphi_k(x) - |\varphi_k(x)|]. \tag{6}$$

結局、複素数値パターンφ(x)の代りに、非負実数値パターンを扱えばよいという考えがでてくる。

無論、複素数値パターンφ(x)に対し、各非負実数値パターン$\varphi_k^+(x)$,$\varphi_k^-(x)$(k=1,2)がどの程度情報を保持しているかのどうか解析は必要であるが。

5.2　実数値パターンから複素数値パターンへの変換例

たとえ、実数値パターンであっても複素数値パターンへ変換するdistortion operator Dの例を挙げよう。

distortion operator Dはある自己共役作用素[1],[2](self-adjoint operator) Hと可換であるユニタリ作用素[1],[2](unitary operator)であることが判明してはいるが、(Dについての)それ以外の諸性質は不明であるとしてみよう。このようなoperator Dの集合は少なくとも、ユニタリ作用素の集合

$\{\exp(-itg(H)) | -\infty < t < +\infty,\ \ i \equiv \sqrt{-1},\quad g(\lambda)$は

1実変数 λ の実数値Borel可測関数} (7)

を含んでいる。文献[19]では、2式(5),(6)を満たすD−不変パターン復元写像(pattern-restoration mapping invariant under distortion D) $T: \Phi \to \Phi$ を、distortion operator D としてユニタリ座標変換である場合について構成している。

式(7)での自己共役作用素Hの指数関数(ユニタリ作用素) $\exp(-itg(H))$ の3例を挙げておこう。

内積 (φ, η), ノルム $\| \cdot \| \equiv \sqrt{(\cdot, \ \cdot)}$ が各々、

$$(\varphi, \eta) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \, \varphi(x1, \ x2) \cdot \overline{\eta}(x1, \ x2) \qquad \| \varphi \| \equiv \sqrt{(\varphi, \ \varphi)}$$

ここに、$\overline{\eta}$ は η の複素共役 (8)

である可分なHilbert空間 $\mathfrak{H} = L_2 \ (R^2 ; dx_1 dx_2)$ で考え(R^2は2次元全平面)、自己共役作用素

$H \equiv i^{-1} \cdot \partial / \partial x_1$ ここに、$i \equiv \sqrt{-1}$ (9)

を導入する。複素数値指数関数

$\eta_{\lambda_1 \ \lambda_2} \equiv \eta_{\lambda_1 \ \lambda_2}(x_1, \ x_2) \equiv \eta_{\lambda_1}(x_1) \cdot \eta_{\lambda_2}(x_2)$

ここに、$\eta_\lambda \equiv \eta_\lambda(x) \equiv (2\pi)^{-1/2} \cdot \exp(+i\lambda x)$ (10)

を導入すると、自己共役作用素Hは、

$(H\varphi)(x_1, \ x_2)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_1 \, \lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_2 \, (\varphi, \eta_{\lambda_1 \ \lambda_2}) \cdot \eta_{\lambda_1 \ \lambda_2}(x_1, \ x_2) \qquad (11)$$

とスペクトル表現され、ユニタリ作用素 $\exp(-itg(H))$ は、

$(\exp(-itg(H))(x_1, x_2)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_1 \exp(-itg(\lambda_1)) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_2 \, (\varphi, \eta_{\lambda_1 \ \lambda_2}) \cdot \eta_{\lambda_1 \ \lambda_2}(x_1, \ x_2) \qquad (12)$$

とスペクトル表現されることに注意しておく。

次の①~③は、フーリェ変換の性質を使って容易に証明されることが知られている。

① $g(\lambda) = \lambda$ の場合

$(\exp(-itg(H)\varphi)(x_1, \ x_2) = \varphi(x_1 - t, x_2)$ (13)

であり、$\exp(-itg(H))$ は x_1軸に関し、$\varphi(x_1, x_2)$ を t だけ**平行移動させる機能を持つ移動変換**(Lie座標変換の典型的なもの)である。

② $g(\lambda) = 2^{-1} \cdot \lambda^2$ の場合

$(\exp(-itg(H) \quad)(x1, \ x2)$

$= \exp(-i(\pi/4) \cdot \mathrm{sgn}(t)) \cdot$

$$[2\pi \cdot |t|]^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \exp(+i(2t)^{-1}(x_1 - y_1)^2) \cdot \varphi(y_1, \ x_2)$$

ここに、

$\mathrm{sgn}(t)$

$\equiv t/|t|$ if $t \neq 0$, $\equiv 1$ if $t = 0$ (14)

であり、

$\exp(i(\pi/4) \cdot \mathrm{sgn}(t)) \cdot \exp(-itg(H))$ (15)

は、**フレネル変換**(Fresnel transform)である。

③ $g(\lambda) =$

$$\begin{cases} \pi/2 & \text{if} \quad \lambda > 0 \\ 3\pi/2 & \text{if} \quad \lambda < 0 \end{cases}$$

の場合

$(\exp(-itg(H)\varphi)(x_1, x_2)$

$$=[(-1/\pi)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}dy_1(x_1-y_1)^{-1}]^{-t}\cdot\varphi(y_1, x_2) \tag{16}$$

であり、

$$\exp(-itg(H))|t=-1=i\cdot \mathrm{sgn}(H) \tag{17}$$

は、**Hilbert変換**(Hilbert transform)である。

平行移動変換、Hilbert変換は実数値パターンを実数値パターンへ変換するが、フレネル変換はそうではないことがわかる。

5.3　実数値パターンから非負実数値パターンへの変換法

本節では、非負実数性

$$\varphi(x)\geqq 0 \quad \text{for every } x\in M \tag{18}$$

を成立させるために、任意の実数値パターン φ_{-3}を非負実数値 edge−pattern φへと変換することを考えよう。

例えば、簡単のために、その座標系が $x=\langle x_1, x_2\rangle$ で与えられる2次元平面 R^2上の画像関数(the image function on the image plane whose coordinates are $x=\langle x_1, x_2\rangle$)

$$\varphi^{-3}=\varphi^{-3}(x)=\varphi^{-3}(x_1, x_2) \tag{19}$$

で考えよう。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}du_1\ \exp(+i\ s_1u_1)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}du_2\ \exp(+i\ s_2u_2)\cdot g_{-3}(u_1, u_2)$$

$$=\exp[-(\sigma^2/2)\cdot(s_1^2+s_2^2)] \tag{20}$$

ここに、

$g_{-3}(u_1, u_2)$

$\equiv(2\pi\sigma^2)^{-1}\cdot\exp[-(u_1^2+u_2^2)/(2\sigma^2)]$

(a Gaussian kernel of a specified width $\sigma>0$)　(21)

が成り立っており、

$\sigma^2\to 0$のとき、$g_{-3}(u^1, u^2)$はDirac $\delta(u_1, u_2)$超関数に収束する　(22)

ことに注意し、φ_{-3}内の微細な変化を無視するため、高周波数成分を除去する目的で、Gaussian filterを利用し、

$\varphi_{-2}(x_1, x_2)\equiv(K\varphi_{-3})(x_1, x_2)$

$$\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}dy_1\int_{-\infty}^{+\infty}dy_2\quad g_{-3}(x_1-y_1, x_2-y_2)\cdot\varphi_{-3}(y_1, y_2) \tag{23}$$

と変換し低域制限して得られたこのφ_{-2}に関し、

$\sigma^2(>0)$を十分小さく選んでおけば、白色加法的雑音ηに対し、

$K(\varphi_{-3}+\eta)$

$\fallingdotseq K\varphi_{-3}=\varphi_{-2}$ (noise removal)

$\fallingdotseq\varphi_{-3}$(approximate restoration)　(24)

が成立する[17]。

ある1次元区間内の値をとる変数sの関数f(s)の、凸から凹への、あるいは、凹から凸への変化回数
は、
$-(d^2/ds^2)\,f(s)$の零点の総数である
こと[21], [27]に注目し(付録Aの式(A14)を参照)、得られたφ_{-2}を更に、φ_{-1}へと、

$$\varphi_{-1}(x_1,\ x_2)$$
$$\equiv -[\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2]\,\varphi_{-2}(x_1,\ x_2) \tag{25}$$

という形式で、変換する。
このとき、

$$\varphi_{-1}(x_1,\ x_2)$$
$$\equiv \int_{-\infty}^{+\infty}dy_1\int_{-\infty}^{+\infty}dy_2\quad g_{-2}(x_1-y_1,\ x_2-y_2)\cdot\varphi_{-3}(y_1,\ y_2) \tag{26}$$

ここに、

$$g_{-2}(u_1,\ u_2)$$
$$=-[\partial^2/\partial u_1^2+\partial^2/\partial u_2^2]\,\varphi_{-3}(u_1,\ u_2)$$
$$=(2/\sigma^2)\cdot[1-(u_1^2+u_2^2)/(2\sigma^2)]\cdot g_{-3}(u_1,\ u_2) \tag{27}$$

が成り立つ。
Zero-crossings in the Gaussian-filtered images roughly correspond to edges
と考える、つまり、$\varphi_{-1}(x_1,\ x_2)=0$を満たす座標点$x=\langle x_1,\ x_2\rangle$が原パターン$\varphi_{-3}(x_1,\ x_2)$のedge位置であると考えるのが、Marr等のedge or zero-crossing segmentsの検出法[32]である。
その後、$0/0=0$と約束し、

$$\varphi(x_1,\ x_2)$$
$$\equiv[\varphi_{-1}(x_1,\ x_2)-\inf_{\langle x_1,\ x_2\rangle}\varphi_{-1}(x_1,\ x_2)]$$
$$/[\sup_{\langle x_1,\ x_2\rangle}\varphi_{-1}(x_1,\ x_2)-\inf_{\langle x_1,x_2\rangle}\varphi_{-1}(x_1,x_2)] \tag{28}$$

と変換し、このφを原パターンφ_{-3}の代りに採用すれば、非負実数値性

$$\varphi(x_1,\ x_2)\geqq 0\quad \text{for every } \langle x_1,\ x_2\rangle\in M \tag{29}$$

が成立し、このφはφ_{-3}の非負実数値edge－patternである。

6．他の緒研究

パターン変形に関連して、他の緒研究について、簡単に紹介しておこう。
文献[7]では、離散的なGauss関数との畳み込みで標準字形に法線方向に摂動を与え、平面上の変形2値パターンを発生させる手法について、研究されている。
文献[8]では、たる型歪(糸巻き歪)、台形歪、傾斜歪を印加させ、個々の利用者の好みに沿った多様な手書き風文字パターンを生成している。
文献[9]では、見本書体を基にして、様々な書体を自動生成するため、変形パラメータが無限に近づくにつれて、回転、切断、一様伸縮などの座標変換を含むアフィン変換になるようなpyramid transformationを研究している。
文献[10]では、形状分解のための基本形状要素としてメタ楕円体(meta－ellipsoids)を提案し、

固定形状の要素を用いた形状分解法と比較している。自然画像内の物体領域の形状を近似的に表現するために、メタ楕円体の集合による形状分解法が研究されている。

文献[11]では、位置ベクトルのパラメータ化された形式で漢字の形状曲線を表現し、漢字の変形を記述するために、a hierarchical deformation modelを発展させている。

文献[12]では、the sensor dataから直接にthe modal shape invariantsを得る手法に関連し、変形情報同士を対応させることを研究している。

文献[43]では、固有ベクトルを使うパターン認識技術に必要な固有値問題の計算量を減じることの出来るthe constant regions methodが提案されている。

文献[44]では、計算機による物体認識における不変量の応用可能性を広げるため、複数枚の像を扱うことで3次元から2次元への投影によって欠落した情報を補い、構造に制約のない3次元物体に対する不変量を導いている。

文献[45]では、新しいパターン認識アルゴリズムを試験するために、コンピュータによってgraphic imagesを生成する手法が提案されている。

文献[46]では、Daugman's projection neural net, Kohonen's self-organizing neural netを用いて、各座標点でのlocal range surface featuresを抽出する手法が研究されている。

文献[47]では、steerable filtersのための、a parameterized family of kernels $F(x ; \theta)$をearly visionの実現のために利用している。。

文献[48]による研究をパターンモデル(付録Bの式(B1)を参照)[19] $T\varphi$の立場で説明しよう。2つの異なる時刻s, t (s < t)に提示されたパターンη_s, η_tの2つのパターンモデル

$$T\eta_s=\sum_{k\in L} u(\eta_s,\ k)\cdot\psi_k$$

$$T\eta_t=\sum_{k\in L} u(\eta_t,\ k)\cdot\psi_k$$

において、

$$\sum_{k\in L'} u(\eta_s,\ k)\cdot\psi_k+\sum_{k\in L-L'} u(\eta_t,\ k)\cdot\psi_k$$

が、η_tのモデル$T\eta_t$として誤って知覚される様相について論じている。

文献[52]では、mathematical morphology(数理形態学)における“the object reconstructionが正確に可能な”skeleton representation を使って、平行移動、回転、縮小拡大に不変で一意的な“簡単な2値形状の和集合へa binary shapeを分解する手法”がstructuring elementsとして、circle,square, rhombusを用い、研究されている。

7. むすび

本研究の主張を少し詳しく整理しておこう。

7.1 最尤パターン

$x\in R^n$はパターンφの表示のために使われる空間座標とする。変形していないパターン$\varphi=\varphi(x)$がパラメータαを含むパターン$\varphi(x;\alpha)$へと変形した場合を想定しよう。

$\varphi(x;\alpha)$を母数(母集団特性値；parameter) αの関数とみて、尤度関数(likelihood function)とみなそう。　$\varphi(x)$は、変形パターン集合

$\{\varphi(x;\alpha)|\alpha\in R$(実数全体の集合)$\}$ (1)

の中で最も生起頻度が大でなければならないとすると、$\varphi(x)$の正定数倍$c\cdot\varphi(x)$は、尤度方程式(like-lihood equation)

$(\partial/\partial)\varphi(x;\alpha)|_{\alpha=\alpha_0}=0$ (停留性) (2)

を満たす$\alpha=\alpha_0$を$\varphi(x;\alpha)$に代入して得られるものに一致しなくてはならない。α_0は母数の最尤推定値(maximum likelihood estimate)であると考えられる：

$\forall x,\ \varphi(x;\alpha)|\alpha=\alpha 0=C'\cdot\varphi(x)$ (最尤性)

ここに、C'はある正定数 (3)

等式(3)が成り立つとき、$\varphi(x)$は最尤パターンφ (maximum-likelihood pattern)と呼ばれる。

7.2 変形情報の積分とガウス型変形情報表現

更に、パラメータαについて、変形情報を$(x;\alpha)$について集めたもの

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\,\varphi(x;\alpha) \tag{4}$$

について考えてみょう。ある手段を用いると(αとは異なるあるパラメータγを$\gamma\to\infty$とすると)、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\,\varphi(x;\alpha)\to C\cdot\varphi(x)\ (\text{第1種復元性})$$

$\therefore$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx(x;\alpha)\to C\cdot\varphi(\alpha)\ (\text{第2種復元性}) \tag{5}$$

と云う具合に、$\varphi(x)$, $\varphi(\alpha)$の正定数倍$c\cdot\varphi(x)$, $C\cdot\varphi(\alpha)$を復元出来るものであらねばならない(第4章、2式(8), (64)を参照)。第2種復元性は、結果として、従う事実に注意しておこう。

2つのパターン$\varphi(x)$, $\varphi(x;\alpha)$の間に、3性質(**停留性、最尤性、復元性**)の成立を要請していることに注意しておかねばならない。

通常は、式(2)の解α_0は、$\alpha_0=x$であらねばならないし、式(3)での正定数cについては$c\cdot g\gamma(0)=1$となるように、cを決定すればよいだろう(式(7)並びに、第4章、式(65)を参照)。

本論文は、上述で登場する変形パターン$\varphi(x;\alpha)$は、

$\gamma\to\infty$とすると、Dirac δ関数δに、$g_\gamma(\alpha)\to\delta(\alpha)$と収束する (6)

ような関数$g_\gamma(\alpha)$を用いて、

$\varphi(x;\alpha)(\equiv\varphi_\gamma(x;\alpha))=c\cdot\varphi(x)\cdot g_\gamma(\alpha-x)$ (7)

と与えられることを指摘する。最尤法(method of maximum-likelihood)を適用するものとすれば、**変形$\varphi(x;\alpha)$は尤度関数として得られなければならない**から、尤度を最大にする母数αの値α_0(αの最尤推定値)について、常に、式(2)を満たしていなければならないのである。

本論文では、**ゆがみ測度関数**(distortion-meaure function)と称されるこのような関数$g_\gamma(\alpha)$の3例を与え(第4章、定理1)、特に、$g_\gamma(\alpha)$が分散$\sigma^2>0$を持つガウス型であれば、

$\varphi(x;\alpha)$

$\fallingdotseq\varphi(x;\alpha)|_{\alpha=\alpha_0}+(\alpha-x)\cdot[(\partial\alpha/\partial)\varphi(x;\alpha)|_{\alpha=\alpha_0}]+$

$2^{-1}\cdot(\alpha-x)^2\cdot[(\partial^2/\partial\alpha^2)\varphi(x;\alpha)|_{\alpha=\alpha_0}]$

$=\varphi(x)\cdot[1-2^{-1}\cdot(\alpha-x)^2/\sigma^2]$

ここに、$C\cdot g_\gamma(0)=1$ (8)

と近似され得ることが示された(第4章、式(66)を参照)。

7.3　変形パターンに含まれる最尤パターンの程度を表す情報量の密度

また、最尤パターン$\varphi(x)$に含まれる変形パターン$\varphi(x;\alpha)$の程度を表す**情報量密度**(a density of the amount of information about the pattern $\varphi(x;\alpha)$ contained in the pattern $\varphi(x)$)

$I(\varphi;\alpha)(x)$が、

$$I(\varphi;\alpha)(x)=\begin{cases}0 & \text{if } |\varphi(x;\alpha)|2/|\varphi(x)|^2>1\\ -2^{-1}\cdot\log_e[1-|\varphi(x;\alpha)|^2/|\varphi(x)|^2] & \text{if } |\varphi(x;\alpha)|^2/|\varphi(x)|^2\leqq 1\end{cases}\tag{9}$$

と定義される(第4章、式(59)を参照)。特に、$g_\gamma(\alpha)$が**ガウス型関数**の場合、近似的に、

$$I(\varphi;\alpha)(x)=\begin{cases}0 \quad \text{if } 1-2^{-1}\cdot(\alpha-x)^2/\sigma^2|^2>1\\ -2^{-1}\cdot\log_e[1-|1-2^{-1}\cdot(\alpha-x)^2/\sigma^2|^2]\\ \text{if } 1-2^{-1}\cdot(\alpha-x)^2/\sigma^2|^2\leqq 1\\ \text{ここに、}C\cdot g_\gamma(0)=1\end{cases}\tag{10}$$

と、与えられることが示される(第4章、式(62)を参照)。

一般の式(7)の$\varphi(x;\alpha)$の場合、

$$I(\varphi;\alpha)(x)=\begin{cases}0 & \text{if } |c\cdot g_\gamma(\alpha-x)|^2>1\\ -2^{-1}\cdot\log_e[1-|c\cdot g_\gamma(\alpha-x)|^2] & \text{if } |c\cdot g_\gamma(\alpha-x)|^2\leqq 1\end{cases}\tag{11}$$

となる(第4章、式(61)を参照)。

7.4　変形パターンに含まれる最尤パターンの情報量密度

パラメータαの付いたパターン(parameterized pattern)$\varphi(x;\alpha)$には、最も出現頻度の大きいパターン(最尤パターン;maximum likelihood pattern)$\varphi(x)$が含まれているとすれば、$\varphi(x;\alpha)$はどのような形式で与えられるべきかを、本論文では研究している。

$|\alpha-x|$が十分小の場合、

$$\varphi_\gamma(x;\alpha)$$
$$\fallingdotseq \varphi_\gamma(x;\alpha)|_{\alpha=x}+(\alpha-x)\cdot(\partial/\partial\alpha)\varphi_\gamma(x;\alpha)|_{\alpha=x}$$
$$+2^{-1}\cdot(\alpha-x)^2\cdot(\partial^2/\partial\alpha^2)\varphi_\gamma(x;\alpha)|_{\alpha=x}\tag{12}$$

と、与えられることが示される。

式(9)が、“$\varphi_\gamma(x;\alpha)$内に$\varphi(x)$が含まれている程度”を表現する情報量の密度として、定義される。

極値を与えるための必要条件

$$(\partial/\partial)\varphi(x;\alpha)=0\tag{13}$$

を満たすαの値の1つのα_0を用いて、$\varphi(x)$は、

$$\varphi(x)\equiv\varphi(x;\alpha)|_{\alpha=\alpha_0}\tag{14}$$

であると定義される。

定数Cと、“$\gamma\to\infty$のときDirac δ超関数に収束する”ある関数$g_\gamma(\alpha)$を用いて、式(C7)のごとく与えれば都合がよいことが示される。特に、

$$g_\gamma(\alpha)=[2\pi\sigma^2]^{-1/2}\cdot\exp(-\alpha^2/(2\sigma^2))$$

ここに、 $\gamma = 1/\sigma^2$ (15)

と、選んでいる場合、近似的に、

$$\varphi(x;\alpha) = \varphi(x)\cdot[1 - 2^{-1}\cdot(\alpha - x)^2/\sigma^2] \tag{16}$$

と、与えられることが示され、情報量密度 $I(\varphi;\alpha)(x)$ が、式(10)のごとく、与えられることも示される。 □

上述の論を多次元化した結果も示される。

本論文は、パターンの変形をどう捕らえるかを研究したものであり、標準パターン $\varphi(x)$ からの崩れに応じることの出来る認識システム、ニューラルネットの性能を解析する際の試験入力パターンとして、

パラメータつきパターン $\varphi(x;\alpha)$

が用いれられるべきであることを主張したものである。 次の3つの(a),(b),(c)の場合の研究は、紙面の都合上、割愛された。

(a)第3章、式(7)で表されたパターン φ がガウス型のゆがみ測度関数 g_γ で変形するときの表現式

(b)座標xがある作用素Uの影響を受けて $y = Ux$ へと変化したとき、パターン $\varphi = \varphi(x)$ は、座標系yでは、$\varphi(U^{-1}y)(=\varphi(x))$ と表される。

座標の変換と考える代りに、パターンの変形と考えれば、

$(S\varphi)(y) = \varphi(U^{-1}y)$ $\quad \therefore (S\varphi)(Ux) = \varphi(x)$

$\therefore \varphi U = S^{-1}$ $\quad \therefore \varphi = S^{-1}\varphi U^{-1}$

を満たす変形作用素Sが定義される。本研究では、このような変形を扱わなかった。

(c)処理対象とするパターン集合Φでの半順序関係 $\sqsubseteq$ と、この半順序関係 $\sqsubseteq$ の下での上限 $\sqcup$ を用意し、2つのパターン φ, η が同値なことを $\varphi \sim \eta$ と表し、

$\varphi \sim \eta \Leftrightarrow \varphi \sqsubseteq \eta \wedge \eta \sqsubseteq \varphi$

と定義してみよう。このとき、パターン φ が与えられたときの再帰関係

$\psi \sim (\varphi \sqcup B\psi)$

を満たす最小の ψ を ψ' と表記し、

$\psi' = S\varphi$

と書こう。このような変形作用素Sの研究も残された。

尚、最後に、6付録A～Fについて、解説しておく。

付録Aでは、パターンに変形をもたらす線形作用素の典型的な例(積分作用素)について、解説しておいた。

パターン認識の数学的理論[28]が提案する正規化パターン(処理の対象とするパターン φ の代りとなるパターン) $T\varphi$ が、これまでの、著者以外のパターン認識理論での正規化パターンと異なる点は、連想や認識の働きの対象としてのパターン φ のこのモデル $T\varphi$ が、特徴抽出の働きが発現した後、形成されて来るという原理を採用した構造形式を持っていることである[19]。付録Bでは、このパターンモデル構成作用素 $T:\Phi \to \Phi$ が3層ニューラルネットとみなされる事実を解説しておいた。

付録Cでは、複素直交展開はある条件の下で、実直交展開に変換可能な事実について、解説しておいた。

付録Dでは、部分空間法的識別法[41]などにおいて各部分空間での原パターンの再表現として、

直交展開が用いれられることを考慮して、パターンを直交展開する場面[19]において、一層、精密に展開する手法が存在する事実が指摘されている。

付録Eでは、パターン変形をもたらす積分作用素の例として、exponential filter について、Hilbert空間論的線形作用素の理論[1]を適用して解説しておいた。

付録Fでは、その画像強度が2次元平面上で与えられた場合、画像不変量を抽出する新しい手法を提案しておいた。

文　　献

[1]吉田耕作：“近代解析(基礎数学講座20)”，共立出版，Dec. 1963

[2]Angus E.Taylor, David C. Lay: “Introduction to function analysis”, p.251, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1980

[3]ゲリファンド，シーロフ：“超関数論入門 I (共立全書526)”，功刀金二郎・井関清志・麦林布道訳，pp.34－38，共立出版，Aug. 1963

[4]Harry Lass：“Vector and Tensor Analysis”，McGraw－Hill Book Company, INC., New York, 1950

[5]秋月康夫：“調和積分論(上)(現代数学16a)”，岩波書店，Aug. 1963

[6]高木隆司：“形の数理(現代人の数理 1)”，朝倉書店，Sept. 1992

[7]石井健一郎：“変形文字パターン発生法とその応用”，電子通信学会論文誌(D)，vol.66－D, No.11，pp.1270－1277, Nov. 1983

[8]塩野充：“非線形な幾何学的ひずみを用いた手書き風文字パターン生成の一手法”，電子情報通信学会論文誌(D－II)，vol.J74－D－II, no.2, pp.209－219, Feb. 1991

[9]猪尾充雄，堀内隆彦，寅市和男：“錐体変換法を用いた多品種フォントの自動生成”，電子情報通信学会技術研究報告[パターン認識・理解]，vol.91，no.252，PRU91－54，pp.21－28, Sept. 1991

[10]木本伊彦，浅井基博，安田靖彦：“分布関数による形状記述の一方式”，電子情報通信学会論文誌(D－II), vol.J76－D－II, no.5, pp.1006－1014, May 1993

[11]Wen－Tsuen Chen and Tzren－Ru Chou：“A hierarchical deformation model for on－line cursive script recognition”, Pattern Recognition, vol.27, no.2, pp.205－219, Feb.1994

[12]Stan Sclaroff and Alex P.Pentland：“Modal matching for correspondence and recognition”, IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.17, no.6, pp.545－561, June 1995

[13]鈴木昇一：“認識工学(上)”，柏書房，Feb.1975

[14]鈴木昇一：“測度的不変量検出形認識系の構成理論”，信学論(D)，vol.55－D, no.8, pp.531－538, Aug. 1972

[15]鈴木昇一：“パターン認識における構造化モデルの 4 性質とその応用”，信学論(D)，vol. J60－D, no. 9, pp.710－717, Sept. 1977

[16]鈴木昇一，斎藤静昭，奥野治雄，太田芳雄：“画像の復元とその計算機シミュレーション”，工学院大学研究報告，vol.39, pp.198－206, Jan. 1976

[17]鈴木昇一：“手書き漢字の側抑制効果的分解とその計算機シミュレーション”，情報処理，vol.15, no. 12, pp.927－934, Dec. 1974

[18]鈴木昇一：“抽出された特徴による手書き漢字構造の再生，情報処理，vol.18，no.11, pp.1115－1122, Nov. 1977

[19]鈴木昇一:“パターンのエントロピーモデル”，信学論(D－II), vol. J77－D－II, no. 11, pp. 2220－2238, Nov. 1994

[20]鈴木昇一：“回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シミュレーション”，

情報研究(文教大学情報学部), vol.4, pp.36－56, Dec. 1983

[21]鈴木昇一："連想形記憶器MEMOTRONと日本語母音系列の再生に関する計算機シミュレーション", 情報研究(文教大学情報学部), vol.7, pp.14－29, Dec. 1986

[22]鈴木昇一："収縮写像の構成用空間回路とその計算機シミュレーション", 情報研究(文教大学情報学部), vol.9, pp.17－28, Dec. 1988

[23]鈴木昇一："帰属係数法に基づく類似度、帰属関係あいまい度, 認識情報量の計算機シミュレーション", 情報研究(文教大学情報学部), vol.11, pp.51－68, Dec. 1983

[24]鈴木昇一："半順序と情報処理", 情報研究(文教大情報学部), vol.12, pp.121－174, Dec.1991

[25]鈴木昇一："新しい情報の測度とパターン情報処理", 情報研究(文教大情報学部), vol.13, pp.273－358, Dec. 1992

[26]鈴木昇一："平均類似度の概念に基づく特徴抽出及び識別法($\Phi_u^{(m)}$－核型第1種特徴抽出作用素の固有値問題)", 信学技報インホメーション理論研, no.IT71－10, Apr.1971

[27]鈴木昇一："平均類似度を用いた構造受精法を用いた日本語単独母音の認識", 信学技報, vol.82, no.31, PRL82, no.31, PRL82－4, pp.25－32, May 1982

[28]鈴木昇一："パターン認識の数学的理論", 信学技報[パターン認識と学習, パターン認識と理解], PRL84－6(第I部), PRL84－30, PRL84－38, PRL85－27, PRU86－8, PRU86－35, PRU86－69, PRU87－1, PRU87－28, PRU88－30, PRU89－1, PRU89－27, PRU89－40, PRU89－66, PRU89－77, PRU89－136, PRU90－5, PRU90－15, PRU90－29, PRU90－125, PRU91－1, PRU91－29, PRU91－42, PRU92－1, PRU92－18, PRU92－25, PRU92－89, PRU92－102(第28部), May 1984～Jan. 1993

[29]鈴木昇一："誤差確率分布を考慮した誤差逆伝播学習", 情報研究 (文教大情報学部), vol.13, pp.173－202, Dec.1992

[30]鈴木昇一："ミクロ経済学におけるワルラスの法則とパターン類似度関数のホップフィールドニューラルネット形調整", 情報研究(文教大情報学部), vol.14, pp.211－236, Dec.1993

[31]鈴木昇一, 佐久間拓也："パターンモデルを用いた不動点探索形連想記憶システム方程式", 情報研究(文教大情報学部), vol.15, pp.97－128, Dec. 1994

[32]D.Marr and E.Hildreth : "Theory of edge detection", Proc.R.Soc.Lond.B, vol.207, pp.187－217, 1980

[33]Cem Yuceer and Kemal Oflazer : "A rotation, scaling, and translation invariant pattern classification System", Pattern Recognition, vol.26, no.5, pp.687－710, May 1993

[34]C.A.Desoer and B.H.Whalen : "A note on pseudoinverses", J.Soc.Indust.Appl.Math., vol.11, no.2, pp.442－447, June 1963

[35]M.H.Hayes: "Inverse problems:An overview", 計測制御, vol.25, no.12, pp.1089－1094, Dec.1986

[36]S.Geman and D.Geman: "Stochastic relaxation, Gibbs distribution, and the Bayesian restoration of images", IEEE Trans. Pattern Anal. & Mach. Intell., vol.PAMI－6, no.6, PP.721－741, Nov. 1984

[37]Dante C. Youla: "Generalized image restoration by the method of alternating orthogonal projections", IEEE Trans. Circuits & Syst., vol.CAS－25, no.9, pp.694－702, Sept.1978

[38]Charles A. Micchelli : “Interpolation of Scattered Data:Distance Matrices and Conditionlly Positive Definite Functions”, Constructive Approximation, vol.2, pp.11－22, 1986
[39]Ingrid Daubechies : “Orthonormal bases of compactly supported wavelets”, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. XLI, pp.909－996, 1988
[40]桜井明, 石井好, 吉村和美, 高山文雄 : “スプライン関数入門”, 東京電機大学出版局, p.53, May 1991
[41]Erkki Oja: “パターン認識と部分空間法”, 小川英光・佐藤誠訳, 産業図書, Apr. 1986
[42]乾敏郎 : “視覚情報の競合と統合, 認知科学(日本認知科学会編集), vol.2, no.2, pp.5－20, May 1995
[43]James B.Roseborough and Hiroshi Murase: “Partial eigenvalue decomposition for large image sets using run－length encoding”, Pattern Recognition, vol.28, no.3, pp.421－430, Mar. 1993
[44]Long Quan: “Invariants of Six Points and Projective Reconstruction from Three Uncalibrated Images”, IEEE Trans. Pattern Anal. & Mach. Intell., vol.17, no.1, pp.34－46, Jan. 1995
[45]Mario Miyojim and Heng－Da Cheng: “Synthesized images for pattern recognition”, Pattern Recognition, vol.28, no.4, pp.595－610, Apr. 1995
[46]Sugata Ghosal and Rajiv Mehrotra : “Range surface characterization and Segmentation using neural networks”, Pattern Recognition, vol.28, no.5, pp.711－727, May 1995
[47]Pietro Perona: “Deformable kernels for early vision”, IEEE Trans. Pattern Anal. & Mach. Intell., vol.17, no.5, PP.488－499, May 1995
[48]下村満子, 横沢一彦 : “特徴統合と視覚的注意の時間的特性”, 認知科学(日本認知科学会編集), vol.2, no.2, pp.21－32, May 1995
[49]月本洋 : “数値データからの論理命題の発見”, 人工知能学会誌 , vol.8, no.6, pp.752－759, Nov. 1993
[50]溝畑茂 : “偏微分方程式論(現代数学 9)”,岩波書店, Aug. 1965
[51]飯島泰蔵 : “自然観測フィルタによる一般波形の受理と生成”, 電子情報通信学会論文誌(A), vol. J78－A, no.6, pp.722－727, June 1995
[52]Joannis Pitas and Anastasios N.Venetsanopoulos: “Morphological shape decomposition”, IEEE Trans. Pattern Anal. & Mach. Intell., vol.12, no.1, pp.38－45, Jan. 1995

付録A （L_2－kernelを持つ線形作用素）

本付録Aでは、S.Suzukiの提案した**平均類似度作用素**(量子統計力学での密度作用素、或いは統計作用素(statistical operator)の１種)[26], [13], [14]が、積分作用素であることに注目し、パターンの変形をもたらす様々な積分作用素を考察する。

A.1 簡単な積分作用素の１例

まず、簡単な例について考察する。

内積(φ, η)を、

$$(\varphi, \eta)=\int_0^1 dx\,\varphi(x)\cdot\eta(x) \tag{A1}$$

と設定し、可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$=real L_2 ([0, 1]; dx)で考えよう。**微分方程式**

$$-(d_2/dx_2)\eta(x)=\varphi(x),\quad 0\leqq x\leqq 1 \tag{A2}$$

の一般解$\eta(x)$は、2つの積分定数c, dによって、

$$\eta(x)=-\int_0^x dy(x-y)\cdot\varphi(y)+cx+d \tag{A3}$$

と与えられる。境界条件

$$\varphi(x)\mid_{x=0}=\varphi(x)\mid_{x=1}=0 \tag{A4}$$

の下では、2定数 c, d は、

$$c=\int_0^1 dy(1-y)\cdot\varphi(y),\quad d=0 \tag{A5}$$

と定まり、よって、式 (A5) を式 (A3) に代入して、$\eta(x)$は、

$$\eta(x)=\int_0^1 dyg(x, y)\cdot\varphi(y) \tag{A6}$$

ここに、

$$g(x, y)=\begin{cases}(1-x)y & \text{if}\quad y\leqq x\\ (1-y)x & \text{if}\quad y>x\end{cases} \tag{A7}$$

と与えられる。

$$-(d_2/dx_2)\sin(k\pi x)=(k\pi)^2\cdot\sin(k\pi x),\quad k=1, 2, \cdots \tag{A8}$$

が知れ、ここで、

$$\psi_k(x)\equiv\sqrt{2}\cdot\sin(k\pi x),\quad \lambda_k\equiv(k\pi)^2 \tag{A9}$$

とおくと、自己共役性

$$(-(d^2/dx^2)\eta_1,\ \eta_2)=(\eta_1, -(d^2/dx^2)\eta_2)\quad \text{for any } \eta_1 \text{ and any } \eta_2 \tag{A10}$$

と、固有値方程式

$$-(d^2/dx^2)\psi_k(x)=\lambda_k\cdot\psi_k(x) \tag{A11}$$

並びに、正規直交性

$$(\psi_k,\ \psi_k)=1\wedge(\psi_k,\ \psi_n)=0\ (k\neq n) \tag{A12}$$

が成立することがわかる。

境界条件式(A4)の下では、$\varphi(x)$は、

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi,\ \psi_k)\cdot\psi_k(x) \tag{A13}$$

とフーリェ式展開され、2式(A2), (A4)を満たす$\eta(x)$は、

$$\begin{aligned}\eta(x)&=[-(d^2/dx^2)]^{-1}\varphi(x)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi,\ \psi_k)\cdot[-(d^2/dx^2)]^{-1}\psi_k(x)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{k-1}\cdot(\varphi,\ \psi_k)\cdot\psi_k(x)\end{aligned} \tag{A14}$$

と与えられる。 □

式(A14)は、日本語単独母音の認識計算機シミュレーション[27]、日本語単独母音系列の連想計算機シミュレーション[21]において、特徴抽出の働きを設定するにあたり、考慮されている。

A. 2　共役作用素

可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}=L_2(M;dm)$ で考えよう。

パターン η をパターン φ に変形する作用素をAとする：$\varphi = A\eta$. (A15)

作用素Aの定義域

$$\mathrm{Domain}(A) \equiv \{\eta \in \mathfrak{H} \mid \|A\eta\| < \infty\} \tag{A16}$$

を導入し、集合Sの閉苞を S^a と表す。パターン φ の変形作用素Aは $\mathrm{Domain}(A)^a = \mathfrak{H}$ を満たす閉線形作用素(closed linear operator)とする。つまり、Aは、a densely－defined closed linear operatorと称されるものである。η, $\psi \in \mathfrak{H}$ が、

$$(A\omega,\ \eta) = (\omega,\ \psi) \text{ for all } \omega \in \mathrm{Domain}\ (A) \tag{A17}$$

を満たすならば、

$$\eta \in \mathrm{Domain}(A^*) \wedge A^*\eta = \psi \tag{A18}$$

が成立するような線形作用素 A^* を想定し、A^* をAの共役作用素(the adjoint of A)という。

$$(A\eta)(x) = \int_M dm(y)\, a(x,\ y) \cdot \eta(y) \tag{A19}$$

と表されるAを $a(x,\ y)$ を核関数(積分核)とする積分作用素というが、積分作用素Aの共役作用素 A^* は形式的には、次の命題 A1 で決定される。

[命題 A1] (積分作用素の共役作用素)

式(A19)のdensely－defined closed linear operator Aの共役作用素 A^* を、

$$(A^*\eta)(x) = \int_M dm(y)\, a^*(x,\ y) \cdot \eta(y) \tag{A20}$$

と表せば、

$$a^*(x,y) = \overline{a(y,x)}\ (a(y,x) \text{の複素共役}) \tag{A21}$$

である。

(証明)　$(A\omega,\ \eta) = \int_M dm(x)\, \overline{\eta(x)} \cdot (A\omega)(x)$

$$= \int_M dm(x)\, \overline{\eta(x)} \cdot \int_M dm(y)\, a(x,\ y) \cdot \omega(y)$$

$$= \int_M dm(y) \int_M dm(x)\, a(x,\ y) \cdot \omega(y) \cdot \overline{\eta(x)}$$

∵ 積分順序の交換

$$= \int_M dm(y)\, \omega(y) \cdot \int_M dm(x)\, a(x,\ y) \cdot \overline{\eta(x)}$$

$$= \int_M dm(y)\, \omega(y) \cdot \overline{\int_M dm(x)\, \overline{a(x,\ y)} \cdot \eta(x)}$$

$$= \int_M dm(x)\, \omega(x) \cdot \overline{\int_M dm(y)\, \overline{a(y,\ x)} \cdot \eta(y)}$$ □

$$= (\omega, A^*\eta).$$

例えば、2式(A6), (A7)での作用素

$$\eta(x) = [-(d^2/dx^2)]^{-1}\varphi(x)$$

$$= \int_0^1 dy\, g(x,\ y) \cdot \varphi(y) \tag{A22}$$

については、式(A14)から、

$$\eta(x)=\int_0^1 dy\, h(x,\ y)\cdot\varphi(y) \tag{A23}$$

ここに、

$$h(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-1}\cdot\psi_k(x)\cdot\overline{\psi_k(y)} \tag{A24}$$

と、表現され、自己共役性

$$h(x,\ y)=\overline{h(y,\ x)} \tag{A25}$$

が成立している。尚、

$$(\eta,\ \psi)=\int_a^b dx\,\eta(x)\cdot\overline{\psi(x)} \tag{A26}$$

を内積とするHilbert空間

$$=L_2([a,\ b];dx),\quad \text{ここに、}[a,\ b]\equiv\{x\mid a<x<b\} \tag{A27}$$

においては、$a=0$の場合、

$$(A\eta)(x)=\int_0^x dy(1/x)\,\eta(y)$$

と定義される作用素Aの共役作用素A^*は、

$$(A^*\psi)(x)=\int_x^b dy(1/y)\,\psi(y) \tag{A28}$$

と表される。

A.3　積分作用素の積の核表現と、歪作用素のエネルギー

2つの積分作用素の積が、どのように核表現され得るかを見てみよう。

[命題A2](積分作用素の積の核表現)

$$(A\eta)(x)\equiv\int_M dm(y)\,a(x,\ y)\cdot\eta(y) \tag{A29}$$

$$(B\eta)(x)\equiv\int_M dm(y)\,b(x,\ y)\cdot\eta(y) \tag{A30}$$

の積$C\equiv AB$について、

$$(C\eta)(x)\equiv(AB\eta)(x)=\int_M dm(y)\,c(x,\ y)\cdot\eta(y) \tag{A31}$$

ここに、

$$c(x,\ y)=\int_M dm(u)\,a(x,\ u)\cdot b(u,\ y). \tag{A32}$$

(証明)　$(C\eta)(x)\equiv(AB\eta)(x)$

$$=\int_M dm(y)\,a(x,\ y)\cdot(B\eta)(y)$$

$$=\int_M dm(y)\,a(x,\ y)\cdot\int_M dm(z)\,b(y,\ z)\cdot\eta(z)$$

$$=\int_M dm(z)\cdot\int_M dm(y)\,a(x,\ y)\cdot b(y,\ z)\cdot\eta(z)$$

∵ 積分順序の交換

$$=\int_M dm(z)\, c(x,\ z)\cdot\eta(z)$$

さて、出力　$\varphi = A\eta$のエネルギー

$$\|\varphi\|^2 = (\varphi,\ \varphi) = (A\eta,\ A\eta) = (A^*\cdot A\eta,\ \eta) \tag{A33}$$

を考慮し、自己共役作用素

$$H \equiv A^*\cdot A \tag{A34}$$

を、歪作用素(distortion operator) Aのエネルギー作用素という。

上述の命題A 2を適用すると、次の命題A 3が得られる。

[命題A3](エネルギー作用素の核表現)

式(A34)のエネルギー作用素Hは次のように核表現される：

$$(H\eta)(x)$$

$$=\int_M dm(y)\, h(x,\ y)\cdot\eta(y) \tag{A35}$$

ここに、

$$h(x,y) = \int_M dm(u)\, \overline{a(u,\ x)}\cdot a(u,\ y) \tag{A36}$$

A.4　積分作用素のL$_2$－ノルム

式(A19)での積分作用素Aについて、

$$N^2(A) \equiv \int_M dm(x)\cdot\int_M dm(y)|a(x,\ y)|^2 < \infty \tag{A37}$$

を満たす積分作用素Aは、L$_2$－kernel　a(x,　y)を持つという[2]。また、N(A)を積分作用素AのL$_2$－ノルム　と云う。

[命題A4](積分作用素のノルム有界性)

式(A19)での積分作用素Aについて、

$\forall\ \eta,\ \ \|A\eta\| \leqq N(A)\cdot\|\eta\|.$

(証明)　$\forall\ x \in M,$

$$|(A\eta)(x)|^2 = \left|\int_M dm(y)\, a(x,\ y)\cdot\eta(y)\right|^2$$

$$\leqq \left[\int_M dm(y)|a(x,y)|^2\right]\cdot\left[\int_M dm(y)|\eta(y)|^2\right] \quad \because \text{ Schwarzの不等式}$$

$$=\left[\int_M dm(y)|a(x,\ y)|^2\right]\cdot\|\eta\|^2$$

を得て、

$$\|A\eta\|^2 = \int_M dm(y)|(A\eta)(x)|^2$$

$$\leqq \int_M dm(x)\int_M dm(y)|a(x,\ y)|^2\cdot\|\eta\|^2 = N^2(A)\cdot\|\eta\|^2.$$

A.5　L$_2$-kernelを持つ積分作用素の近似

Hilbert空間　$\mathfrak{H} = L_2(M;dm)$の１つの完全正規直交系$\{\psi_k\}_{k\in L}$を導入する。L^2－kernel a(x,　y)を持つ線形作用素Aは、

$$(B_n\eta)(x) = \int_M dm(y)\, b_n(x,\ y)\cdot\eta(y)$$

ここに、

$$b_n(x, y)=\sum_{k=1}^{n}\psi_k(x)\cdot[\int_M dm(z)\,a(z, y)\cdot\overline{\psi_k(z)}] \tag{A38}$$

と定義される線形作用素B_nの列$\{B_n\}$ $n=1, 2, \cdots$によって、任意に与えられた正数εに対し、正整数nを選ぶことにより、

$$\int_M dm(x)\int_M dm(y)|a(x, y)-b_n(x, y)|^2<\varepsilon \tag{A39}$$

のごとく近似できることは、完全正規直交系$\{\psi_k\}_{k\in L}$による$\eta\in\mathfrak{H}$ の直交展開式の評価

$$\forall\,\eta\in\mathfrak{H},\ \ \|\eta-\sum_{k=1}^{n}(\eta, \psi_k)\cdot\psi_k\|^2=\sum_{k=n+1}^{\infty}|(\eta, \psi_k)|^2 \tag{A40}$$

を適用することによって得られる評価式

$$\begin{aligned}\forall\,y\in M,\ &\int_M dm(x)|a(x, y)-\sum_{k=1}^{n}\psi_k(x)\\&\cdot[\int_M dm(z)\,a(z, y)\cdot\psi_k(z)]|^2\\=&\sum_{k=n+1}^{\infty}|\int_M dm(z)|a(z, y)\cdot\overline{\psi_k(z)}|^2\end{aligned} \tag{A41}$$

からわかる[2]。各B_nは、an integral operaror on $L_2(M;dm)$ with a degenerate kernel $b_n(x, y)$と呼ばれる。

A.6 完全連続作用素

$$\eta_n,\ \ n=1, 2, \cdots \tag{A42}$$

をノルム有界な点列とする。この各点列について、常に、

$A\eta_n$, $n=1, 2, \cdots$

が$\mathfrak{H}$のある元に収束する部分点列を含むことが云えるならば、線形作用素Aは

a compact operator or a completely continuous operator(完全連続作用素)

と呼ばれる。

完全連続作用素Aは連続[1]である。

前節で論じた“L_2−kernel $a(x, y)$を持つ線形作用素”Aは、

the limit of integral operators with degenerate kernels

であるから、完全連続である。

また、次の事実も知られている：ある複素定数λと　のある元ηについて、方程式(固有値方程式)$A\eta=\lambda\eta$が成り立つような完全連続作用素Aのスペクトルλは、高々可算個存在するに過ぎない。そして、$\lambda=0$以外に集積点を持たない。

式(A34)の、エネルギー作用素$H\equiv A^*\cdot A$について、

$$(H\eta)(x)=\int_M dm(y)\,h(x, y)\,\eta(y) \tag{A44}$$

と云う核表現が可能であるとし、

$$N^2(H)\equiv\int_M dm(x)\cdot\int_M dm(y)|h(x, y)|^2<\infty \tag{A45}$$

を仮定してみよう。このとき、エネルギー作用素$H\equiv A^*\cdot A$は、L_2−kernel $a(x, y)$を持つ積分作用素であり、完全連続作用素である。

完全正規直交系$\{\psi_k\}$ $k \in L$を1つ選定し、エネルギー作用素$H \equiv A^* \cdot A$を、正整数nを十分大きく選び、G_nで近似することが考えられる：

$$(G_n \eta)(x) = \int_M dm(y)\, g_n(x, y)\, \eta(y)$$

ここに、

$$g_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(x) \cdot \left[\int_M dm(z)\, h(z, y) \cdot \psi_k(z)\right] \tag{A46}$$

□

A.7 平均類似度[26]から導かれる積分作用素

カテゴリ集合

$$\mathfrak{C} = \{\mathfrak{C}_j \mid j \in J\} \tag{A47}$$

を、用意する。$\mathfrak{C}_j$は第$j \in J$番目のカテゴリである。各カテゴリ$\mathfrak{C}_j$の代表パターンω_jの集合

$$\Omega \equiv \{\omega_j \mid j \in J\} \subseteqq \Phi \subseteqq \mathfrak{H} \tag{A48}$$

を、例えば、学習ベクトル量子化法を簡易化して得られる方法(文献[28]の第21部、付録1を参照)で適応的に決定しておく。

各カテゴリ$\mathfrak{C}_j$に帰属すると判明しているサンプルパターン$\varphi_{j,k}$の集合

$$\Psi_j \equiv \{\varphi_{j,k} \mid k \in L_j\}, \quad j \in J \tag{A49}$$

を選び、処理の対象とする問題のパターンφと式(49)のパターン集合$\Psi_j(\ \ni \omega_j)$との間の**平均類似度**(Average Similarity－Measure) $ASM(\Psi_j, \varphi)$を、

$$ASM(\Psi_j, \varphi) \equiv \sum_{k \in L_j} prob(\varphi_{j,k}) \cdot |(\varphi, \varphi_{j,k})|^2 \tag{A50}$$

と、定義する。式(A50)に登場した量$prob(\varphi_{j,k})$はサンプルパターン$\varphi_{j,k}$の生起確率であり、

$$[\forall k \in L_j, \ 0 < prob(\varphi_{j,k})] \wedge \sum_{k \in L_j} prob(\varphi_{j,k}) = 1 \tag{A51}$$

を満たすものである。

$$H_j \eta$$

$$\equiv \sum_{k \in L_j} prob(\varphi_{j,k}) \cdot [(\eta, \varphi_{j,k})/(\varphi_{j,k}, \varphi_{j,k})] \cdot \varphi_{j,k} \ \text{for any } \eta \in \mathfrak{H} \tag{A52}$$

と定義される自己共役作用素H_jを用意すると、等式

$$(H_j \eta, \eta)/(\eta, \eta) = ASM(\Psi_j, \eta) \tag{A53}$$

が成立することがわかる。これ、即ち、平均類似度法[14]における**基礎方程式**である。

処理の対象とするパターンηの変形過程

$$\eta \to H_j \eta, \quad j \in J \tag{A54}$$

を想定すると、各$j \in J$につき、平均類似度法の$|J|$(集合J内の要素の総数)回の適用で直交系

$$\psi_{j,k}, \quad k \in L_j, \quad j \in J \tag{A55}$$

が決定され得[13]、各$H_j \eta$は

$$H_j \eta = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{j,k} \cdot [(\eta, \psi_{j,k})/(\psi_{j,k}, \psi_{j,k})] \cdot \psi_{j,k} \quad \text{for any } \eta \in \mathfrak{H} \tag{A56}$$

とスペクトル表現される。固有値方程式

$$H_j \psi_{j,k} = \lambda_{j,k} \cdot \psi_{j,k} \tag{A57}$$

を満たす各固有値$\lambda_{j,k}$は、式(A52)からわかるように、

$$ASM(\Psi_j,\ \psi_{j,k}) = \lambda_{j,k} \tag{A58}$$

を満たす。自己共役作用素H_jは、式(A52)或いは式(A56)を変形すればわかるように、

$$(H_j \eta)(x) = \int_M dm(y)\, h_j(x,\ y)\, \eta(y) \quad \text{for any } \eta \in L_2(M\ ;\ dm)$$

ここに、

$$h_j(x,\ y) = \sum_{k \in L_j} prob(\varphi_{j,k}) \cdot \varphi_{j,k}(x) \cdot \overline{\varphi_{j,k}(y)} \int_M dm(y)\ |\ \varphi_{j,k}(y)\ |^2$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{j,k} \cdot \psi_{j,k}(x) \cdot \overline{\psi_{j,k}(y)} \int_M dm(y)\ |\ \psi_{j,k}(y)\ |^2 \tag{A58}$$

と、核表現され、A.5, A.6両節における論から、H_jは、　式(A49)の各Ψ_jが有限集合の場合、

a compact integral operator with a degenerate kernel $h(x,\ y)$

であることがわかる(通常、2式(A47), (A48)に登場しているカテゴリ番号集合Jも有限集合である)。

$$\underline{\psi} = \cup_{j \in J} \{\psi_{j,k}\}\ k \in L_j \tag{A60}$$

については、直交性

$$(\psi_{j,k}, \psi_{p,q}) = 0 \quad \text{if} \quad j \neq p \vee k \neq q \tag{A61}$$

が満たされているとは限らないが、直交性

$$\forall\ j \in J,\ (\psi_{j,k},\ \psi_{j,q}) = 0 \quad \text{if} \quad k \neq q \tag{A62}$$

は満たされていることに注意しておく。

付録B（パターンモデル$T\varphi$とニューラルネット）

本付録Bでは、S.Suzukiの提案した“パターンφの代りとなるパターンモデル[13]〜[15]、[19]$T\varphi$”が、3層ニューラルネットからの出力と解釈されうることに焦点を当てて、パターンモデル$T\varphi$の能力につき、検討する。$T\varphi$を計算機シミュレーションで求めた諸例については、文献[16]、[18]、[20]、[21]、[23]、[27]にある。

B.1パターンモデル$T\varphi$の形式

処理の対象とする問題のパターン$\varphi \in \Phi$に対応するパターンモデル$T\varphi \in \Phi$は一般に、パターンφから抽出された各特徴量$u(\varphi, k)$を1次展開係数に持つ各パターン形状素φ_kの1次形式

$$T\varphi = \sum_{k \in L} u(\varphi, k) \cdot \psi_k \tag{B1}$$

として、表される。

B.2　直交系$\{\varphi_k\}_{k \in L}$の設定法

パターン形状素φ_kの集合$\{\psi_k\}_{k \in L}$が直交系であれば、写像Tが2.2節のモデル構成作用素であるための2性質を表す2式(5), (6)を満たすような特徴抽出写像

$$u : \Phi \times L \to R^+ \text{(非負実数全体の集合)} \tag{B2}$$

が多数存在することが、$\{\varphi_k\}_{k \in L}$が直交系であれば、示される[19]。パターンの変形の現れ方にも、一定の不変の構造、つまり、ユニタリ不変構造がある場合、言い替えれば、式(6)の吸収性質からわかるように、distortion operator Dがユニタリ作用素の場合、有効となる**変形吸収**

法である。

Hilbert空間 $\mathfrak{H}=L_2((-\infty,+\infty)\,;dx)$ では、式(B1)での ψ_k として、mother shape－component と称されても良い $\eta(x)$ を用いて定義される次の①～⑤での η_k を採用できる。①～④では、$\eta(x)$ は、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\eta(x)=0 \text{ (直流分無しの条件)} \tag{B3}$$

を満たしている事に注意する。以下の①～⑤での n は有限な正整数とする。

①(余弦関数に相当) $\eta(x)=$

$$\begin{cases} 1 & \text{for } |x|<1 \\ -1/2 & \text{for } 1\leqq |x|<3 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

として、

$$\eta_k(x)\equiv\eta(x-6k),\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,\ \pm n$$

②(正弦関数に相当) $\eta(x)=$

$$\begin{cases} 1/2\cdot \mathrm{sign}(x) & \text{for } |x|<1 \\ 1\cdot \mathrm{sign}(x) & \text{for } 1\leqq|x|<2 \\ 1/2\cdot \mathrm{sign}(x) & \text{for } 2\leqq|x|<3 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

として、

$$\eta_k(x)\equiv\eta(x-6k),\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,\ \pm n$$

ここに、$\mathrm{sign}(x)\equiv-1$ if $x<0$, $\equiv 0$ if $x=0$, $\equiv+1$ if $x>0$

③(余弦関数に相当) $\eta(x)=$

$$\begin{cases} 1 & \text{for } 0\leqq |x|<1 \\ -1 & \text{for } 1\leqq |x|<2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

として、

$$\eta_k(x)\equiv\eta(x-4k),\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,\ \pm n$$

④(正弦関数に相当) $\eta(x)=$

$$\begin{cases} -1 & \text{for } -2<x<0 \\ 0 & \text{for } x=0 \\ +1 & \text{for } 0<x<2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

として、

$$\eta_k(x)\equiv\eta(x-4k),\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,\ \pm n$$

⑤ $\eta(x)=$

$$\begin{cases} \exp[-(1-x^2)-1] & \text{for } |x|<1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

として、

$$\eta_k(x)\equiv\eta(x-2k),\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,\ \pm n$$

この $\eta_k(x)$ は直ちに多次元の場合に拡張され得る。例えば、2次元に拡張してみよう。内積

$(\varphi,\ \eta)$

$$\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2\, \varphi(x_1,\ x_2)\cdot \bar{\eta}(x_1,\ x_2) \tag{B4}$$

を持つ直積Hilbert空間 $\mathfrak{H} = L_2((-\infty,\ +\infty)\ ;dx_1)\otimes L_2((-\infty,\ +\infty)\ ;dx_2)$では、

$$\eta_k(x) \equiv \eta(x_1,\ x_2) \equiv \eta_{k1}(x_1)\cdot \eta_{k2}(x_2)$$

ここに、$k\equiv\langle k_1,\ k_2\rangle,\ \ x\equiv\langle x_1,\ x_2\rangle$ (B5)

を採用すればよい。

B.3　1次独立な $\{\psi_k\}_{k\in L}$ の設定法

実は、パターン形状素 ψ_kの集合$\{\psi_k\}_{k\in L}$が直交系でなくても、1次独立であれば、式(B1)の形式を持つパターンモデル$T\varphi$が、4式(B25)～(B28)を満たすように構成出来る。但し、式(B29)でいうユニタリ不変性の具備は不可能であり、写像Tが2.2節のモデル構成作用素であるための2性質を表す2式(5)，(6)の内、冪等性質の式(5)のみを満たすような**特徴抽出写像**

$$u:\Phi\times L\to Z\ (\text{複素数体}) \tag{B6}$$

が存在するだけである。

例えば、式(B6)のuを次のように設定すればよい：

系$\{\psi_k\}_{k\in L}$が1次独立であれば、連立1次方程式

$$\sum_{m\in L}(\psi_m,\ \ \psi_k)\cdot v_m(\varphi) = (\varphi, \psi_k),\ \ k\in L \tag{B7}$$

の解$v_k(\varphi)$を用いて、各$u(\varphi,\ k)$を以下の式(B23)で定義する。このとき、

$$\min_{vk,k\in L}\|\varphi - \sum_{m\in L} v_k\cdot\psi_k\|$$
$$= \|\varphi - \sum_{m\in L} v_k(\varphi)\cdot\psi_k\| \tag{B8}$$

が成立し、原パターンφは、2式(B16)，(B17)の如く表される。 □

この場合、例えば、$\sigma^2>0$と云う正実パラメータσを導入し、

$$\psi(x)$$
$$= -\sigma^2\cdot(d^2/dx^2)\exp(-2^{-1}x^2/\sigma^2)$$
$$= (1-x^2/\sigma^2)\cdot\exp(-2^{-1}x^2/\sigma^2)\ (\text{余弦関数に相当}) \tag{B9}$$

あるいは、

$$\psi(x)$$
$$= -\sigma\cdot(d/dx)\exp(-2^{-1}x^2/\sigma^2)$$
$$= (x/\sigma)\cdot\exp(-2^{-1}x^2/\sigma^2)\ (\text{正弦関数に相当}),$$

ここに、$\sigma^2>0$ (B10)

などの、あるmother shape−component $\psi(x)$によって、モデル$(T\varphi)(x)$が、例えば、

$$(T\varphi)(x) = \sum_{m\in L} u(\varphi,\ m)\cdot\psi_m(x),$$

ここに、$m=\langle j,\ k\rangle$ であり、

$$\psi_m(x) =$$
$$a^{-j/2}\cdot\psi(a^{-j}\cdot x - k\cdot b),\ \ a>0,\ \ b>0,$$

$$L=\{\langle j,\ k\rangle\ |\ j\in\{0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,\ \pm M\},\ k\in\{0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,\ \pm N\}\} \tag{B11}$$

と表される場合(wavelet展開[39])、

a^{-j}：入力層，中間層間の重み

$k \cdot b$：中間層の閾値

$u(\varphi, m) \cdot a^{-j/2} = u(\varphi, \langle j, k \rangle) \cdot a^{-j/2}$：中間層，出力層間の重み (B12)

という対応を考えると、**写像 T：Φ→Φは 3 層ニューラルネットの構造形式を表している**と解釈できる。しかしながら、この場合、$u(\varphi, \langle j, k \rangle)$がユニタリ不変性をあからさまに備えているように設定できないのである。

連想[21]，[31]や認識[23]，[27]の働きの対象としてのパターンφのモデル$T\varphi$が、特徴抽出の働きが発現した後、形成されて来るという上述の思想は、ニューラルネットでの中間層においてパターンの符号化が如何に形成されて来るかについてのhintを与えるだろうと、著者には思えるが、パターモデル$T\varphi$が如何なる構造形式を持つべきかの解答が与えられており[19]、ある程度の変形を受けてもその意味が保存される情報としての**パターンというものの帰納的定義**[28]を可能ならしめるパターンの基本的変換として、4式(B25)～(B28)を満たすモデル構成作用素T：Φ→Φの基本的重要性が再認識される。

B.4 ユニタリ不変でないパターンモデル

可分なHilbert空間$\mathfrak{H}$の各元ψ_kからなる集合$\{\psi_k\}_{k \in L}$を直交系とする。

$$\| \varphi - \sum_{m \in L} v_k \cdot \psi_k \| \to \min$$

(the weighted least－squares estimation of pattern φ) (B13)

ならしめる各複素係数$v_k(\varphi) \equiv v_k$は

$$v_k(\varphi) \equiv (\varphi, \psi_k)/(\psi_k, \psi_k) \quad \text{(B14)}$$

と与えられる。このとき、

$$S\varphi \equiv \sum_{m \in L} v_k(\varphi) \cdot \psi_k \quad \text{(B15)}$$

と定義される写像S：Φ→Φを用意すると、パターンφは、

$$\forall k \in L, \ (\varphi_\perp, \psi k) = 0 \quad \text{(B16)}$$

を満たす$\mathfrak{H}$の元$\varphi_\perp$が存在して、

$$\varphi = S\varphi + \varphi_\perp \quad \text{(B17)}$$

と表現される。

パターンφに対し、式(B16)が成立するような元$\varphi_\perp \in \mathfrak{H}$を見つけたとしょう。このとき、パターン$\varphi$は互いに相関性のない2つの成分(直交成分)

$$S\varphi, \ \varphi_\perp \quad \text{(B18)}$$

に分解されており、$\varphi \in \mathfrak{H}$の代用物として$S\varphi \in \mathfrak{H}$を採用することは、$\varphi_\perp$を加法的雑音と考えると、Hilbert空間$\mathfrak{H}$の元$\varphi$を互いに直交する基底関数(basis function)ψ_kの和に分解するという直交変換(orthogonal transformation) S：Φ→Φにより、noise removalを行い、しかも原パターンφ内の冗長性を圧縮したことに、特に、写像Sの値域が有限次元になるように集合Lが有限集合に選ばれていれば、**次元数削減**(dimensionality reduction)をしたことになると解釈されて良い。

直交変換S：Φ→Φの適用によって、φの代りに、$S\varphi$を採用することでもたらされる冗長度抑圧作用(redundancy compression)は、具体的には、3性質

$$\forall \eta \in \Phi, \ \forall k \in L, \ v_k(S\eta) = v_k(\eta) \quad \text{(B19)}$$

$$\forall \eta \in \Phi,\ S(S\eta) = S\eta \tag{B20}$$
$$\forall k \in L,\ S\psi_k = \psi_k \tag{B21}$$
の成立からわかる。式(B20)は式(5)のベキ等性質である。然しながら、
$$\forall \eta \in \Phi,\ S(a \cdot \eta) = a \cdot S\eta \quad \text{for any complex number a} \tag{B22}$$
が成立しており、パターン$\varphi \in \Phi$の代用物$S\varphi \in \Phi$は定数倍に対しては不変でない。

以上を考慮し、式(B14)で定義された$v_k(\varphi)$を用いて、

$$u(\varphi,\ k) \equiv$$
$$\begin{cases} 0 & \cdots \forall k \in L,\ v_k(\varphi) = 0 \quad \text{のとき} \\ v_k(\varphi)/\sqrt{\sum_{m \in L} |v_k(\varphi)|^2} & \cdots \exists k \in L,\ v_k(\varphi) \neq 0 \quad \text{のとき} \end{cases} \tag{B23}$$

と定義される(パターン$\varphi \in \Phi$から抽出される第 $k \in L$番目の)複素数値特徴量$u(\varphi,\ k)$を用意する。次の定理B1は容易に証明される。

[定理B1] (**ユニタリ不変でないパターンモデル定理**)

任意の直交系$\{\psi_k\}k \in L$を用いて、式(B23)の$u(\varphi,\ k)$を用いて、

$$T\varphi = \sum_{m \in L} u(\varphi,\ k) \cdot \psi_k \tag{B24}$$

と定義される写像$T : \Phi \to \Phi$は、4性質
$$\forall \eta \in \Phi,\ T(S(\eta) + \eta^{*}) = T(S\eta) = T\eta \tag{B25}$$
$$\forall \eta \in \Phi,\ T(a \cdot \eta) = T\eta \quad \text{for any positive real number a} \tag{B26}$$
$$\forall \eta \in \Phi,\ T(T\eta) = T\eta \tag{B27}$$
$$\forall k \in L,\ T\psi_k = \psi_k \ (\text{各}\psi_k\text{の完全復元性}) \tag{B28}$$
を満たすが、しかし

恒等作用素Iと異なるいかなるユニタリ作用素Uに対しても、
$$\forall \eta \in \Phi,\ T(U\eta) = T\eta \tag{B29}$$
は必ずしも成立しない。 □

$T\eta \in \Phi$は、2式(B16), (B17)での、パターン$\eta \in \Phi$のフーリェ式展開式との関係で説明すれば、式(B16)と同様な式を満たす加法的雑音$\eta_{\perp}$を用い、

$$T\eta$$
$$= [\eta - \eta_{\perp}]/\sqrt{\sum_{m \in L} |v_k(\eta)|^2}$$
$$= S\eta/\sqrt{\sum_{m \in L} |v_k(\eta)|^2} \quad \cdots \exists k \in L,\ v_k(\eta) \neq 0 \quad \text{のとき} \tag{B30}$$

と表されることになる。

定理B1での写像$T : \Phi \to \Phi$は、モデル構成作用素[19], [28]と呼ばれるものの一種であるが、このTについては式(B15)の冗長度抑圧作用の働きを持つ写像$S : \Phi \to \Phi$についての不変性を表す式(B25)が成り立っていることに注意しておく。

B.5 パターンモデル$T\varphi$の持つ補間能力、近似能力

一般に、原パターン$\varphi \in \Phi$の再表現としてのモデル$T\varphi \in \Phi$の性能は、既知パターンφに対する“一種の近似能力としての**再現忠実性**(fidelity to the original pattern)”と、観測方程式$D\eta = \varphi$での未知パターンηに対する“一種の補間能力としての**再現要約性**(summary of the original pattern)”という2つの指標により評価されて良い。

式(B29)を満たすユニタリ不変であるパターンモデル$T\varphi$の諸例は、文献[13]～[15], [19]にあり、その記述能力は文献[16], [18], [20], [21], [23], [27]の各計算機シミュレーションで明らかにされているが、そのユニタリ不変性から多様な変形を吸収する能力があり、それゆえ、補間能力は強いが、近似能力は弱いのであり、定理B1での、ユニタリ不変でないモデル$T\varphi$は、その逆の機能を備えていることが指摘され得る。

このことなどから、推察が付くように、式（B29）を満たすパターンモデル$T\varphi$は、ユニタリ不変性を備えているという意味で、

○非直交wavelet展開法[39]

○GRBF(Generalized Radial Based Functions)法　[38]

○mathematical morphological set operatorsによるパターンの再表現(the shape reconstruction algorithm based on skeletonization employing minimal skeletons)　[52]

などとは、明らかに異なるものである。

なお、式（B1）で示されているパターンモデル構造形式は、パターンの帰納的定義から得られるパターン集合[28] Φに関連し、部分空間法的識別法の近似的再現法をも説明され得るが、これらの構造形式は本来、

○連想形認識方程式の求解過程の表現[23], [24], [27], [28]

○無限次元multi－channel形ニューラルネットの表現[21], [28], [31]

において用いれられてこそ、その機能が発揮される筋合いのものであることを最後に付記しておく。

付録C（実直交展開、複素直交展開の間の等価変換）

本付録Cでは、実数値直交系を用いた展開と、複素数値直交系を用いた展開との間の等価変換につき、一般的に研究する。このような一般化は案外、知られていないのであり、少なくとも、複素数値、実数値パターンモデル [19] $T\varphi$ 間の変換を可能にするものである。

C.1　実・複素直交展開間変換に関する基本定理

先ず、3つの補助定理C1, C2, C3を証明する。

虚数単位 $i \equiv \sqrt{-1}$ を導入する。

次の補助定理1の（i），（ii）は、各々、複素数値から実数値への変換、実数値から複素数値への変換を表している。

［補助定理C1］

（i） φ_k^{+}はHilbert空間$\mathfrak{H}$の、実数値ではなくして複素数値の、パラメータ$k \in K$に依存する元とする。φ_k^{-}は、

$$\varphi_k^{-} \equiv \overline{\varphi_k^{+}} \ (\varphi_k^{+}\text{の複素共役}) \tag{C1}$$

と定義される。η_k, ψ_kを、

$$\eta_k \equiv (\sqrt{2})^{-1} \cdot [\varphi_k^{+} + \varphi_k^{-}] \tag{C2}$$

$$\psi_k \equiv (\sqrt{2}\, i)^{-1} \cdot [\varphi_k^{+} - \varphi_k^{-}] \tag{C3}$$

と定義する。η_k, ψ_kは$\mathfrak{H}$の実数値元である。

（ii）逆に、η_k, ψ_kはHilbert空間$\mathfrak{H}$の、実数値の、パラメータ$k \in K$に依存する元とする。φ_k^{+}を、

$$\varphi_k^{+} \equiv (\sqrt{2})^{-1} \cdot [\eta_k + i\, \psi_k] \tag{C4}$$

と定義し、φ_k^-を、

$\varphi_k^- \equiv \overline{\varphi_k^-}$（$\varphi_k^-$の複素共役）

$= (\sqrt{2})^{-1} \cdot [\eta_k - i\,\psi_k]$ (C5)

と定義しよう。φ_k^+，φ_k^-は$\mathfrak{H}$の複素数値元である。

（証明）明然。

次の補助定理C２は、実数値展開内の２つの項の和から成る部分系と複素数値展開内の２つの項の和から成る部分系との間の等価変換の存在を指摘している。

［補助定理C2］

φ_k^+が与えられ、φ_k^-，η_k，ψ_kが定義される補助定理１の（ｉ）においても、逆に、η_k, ψ_kが与えられ、φ_k^+，φ_k^-が定義される補助定理１の（ii）においても、Hilbert space $\mathfrak{H}$の任意の元φについて、

$\forall\, k \in k,\ (\varphi,\ \eta_k) \cdot \eta_k + (\varphi,\ \psi_k) \cdot \psi_k$

$= (\varphi,\ \varphi_k^+) \cdot \varphi_k^+ + (\varphi,\ \varphi_k^-) \cdot \varphi_k^-$ (C6)

（証明）任意の$k \in K$について、φ_k^+から定義された（ｉ）のφ_k^-，η_k，ψ_kについて、変形して行くと、

$(\varphi,\ \eta_k) \cdot \eta_k + (\varphi,\ \psi_k) \cdot \psi_k$

$= 2^{-1} \cdot (\varphi,\ \varphi_k^+ + \varphi_k^-) \cdot [\varphi_k^+ + \varphi_k^-]$

$\quad + 2^{-1} \cdot (\varphi,\ \varphi_k^+ - \varphi_k^-) \cdot [\varphi_k^+ - \varphi_k^-]$

$= 2^{-1} \cdot (\varphi,\ \varphi_k^+ + \varphi_k^-) \cdot \varphi_k^+$

$\qquad + 2^{-1} \cdot (\varphi,\ \varphi_k^+ - \varphi_k^-) \cdot \varphi_k^+$

$+ 2^{-1} \cdot (\varphi,\ \varphi_k^+ + \varphi_k^-) \cdot \varphi_k^-$

$\qquad - 2^{-1} \cdot (\varphi,\ \varphi_k^+ - \varphi_k^-) \cdot \varphi_k^-$

$= (\varphi,\ \varphi_k^+) \cdot \varphi_k^+ + (\varphi,\ \varphi_k^-) \cdot \varphi_k^-$ (C7)

が成り立つことがわかる。

η_k，ψ_kから定義された（ii）のφ_k^+，φ_k^-について、上述の式（C7）を逆にたどり、

$(\varphi,\ \varphi_k^+) \cdot \varphi_k^+ + (\varphi,\ \varphi_k^-) \cdot \varphi_k^-$

$= (\varphi,\ \eta_k) \cdot \eta_k + (\varphi,\ \psi_k) \cdot \psi_k$

が得られる。 □

Kronecker delta記号

$\delta_{km} = 1 \quad \text{if} \quad k = m, \ = 0 \quad \text{if} \quad k \neq m$ (C8)

を用意する。

次の補助定理C３は、実数値直交系内の２つの項の和から成る部分系と複素数値直交内の２つの項の和から成る部分系との間の等価変換の存在を指摘している。

［補助定理C３］

（ｉ）φ_k^+が与えられ、φ_k^-，η_k，ψ_kが定義される補助定理１の（ｉ）において、

$(\varphi_k^+,\ \varphi_m^+) = (\varphi_k^-,\ \varphi_m^-) = \delta_{km}$

$\qquad \wedge (\varphi_k^+,\ \varphi_m^-) = (\varphi_k^-,\ \varphi_m^+) = 0$ (C9)

$\Rightarrow (\eta_k,\ \eta_m) = (\psi_k,\ \psi_m) = \delta_{km} \wedge (\eta_k,\ \psi_m) = 0$ (C10)

がいえ、また、

（ii）η_k，ψ_kが与えられ、φ_k^+，φ_k^-が定義される補助定理１の（ii）において、

$(\eta_k,\ \eta_m)=(\psi_k,\ \psi_m)=\delta_{km}\wedge(\eta_k,\ \psi_m)=0$ (C11)

$\Rightarrow(\varphi_k^+,\ \varphi_m^+)=(\varphi_k^-,\ \varphi_m^-)=\delta_{km}$

$\wedge(\varphi_k^+,\ \varphi_m^-)=(\varphi_k^-,\ \varphi_m^+)=0$ (C12)

（証明）明然。

3補助定理C1～C3から証明され得る次の定理C1は、実数値直交展開内の2つの項の和から成る部分系と複素数値直交系内の2つの項の和から成る部分系との間の等価変換に注目し、2つの展開の間の等価変換の存在を指摘している。

［定理C1（**実、複素直交展開間変換に関する基本定理**）］（実、複素直交展開の間の等価変換定理）

（i）φ_k^+が与えられ、φ_k^+，η_k，ψ_kが定義される補助定理1の（i）において、式（C9）が成り立っていれば、任意の$\varphi\in\mathfrak{H}$は、

$\forall\ k\in K,\ (\varphi_\perp,\ \varphi_k^+)=(\varphi_\perp,\ \varphi_k^-)=0$ (C13)

を満たす$\mathfrak{H}$の元$\varphi_\perp$が存在して、

$$\varphi=\sum_{k\in K}(\varphi,\ \varphi_k^+)\cdot\varphi_k^+ + \sum_{k\in K}(\varphi,\ \varphi_k^-)\cdot\varphi_k^- + \varphi_\perp \quad \text{(C14)}$$

と直交展開される。このとき、式（C6）、式（C10）が成り立つから、式（C14）は、次のように、書換えられる：

$\forall\ k\in K,\ (\varphi_\perp,\ \varphi_k^+)=(\varphi_\perp,\ \varphi_k^-)=0$ (C15)

を満たす $\mathfrak{H}$ の元φが存在して、

$$\varphi=\sum_{k\in K}(\varphi,\ \eta_k)\cdot\eta_k + \sum_{k\in K}(\varphi,\ \psi_k)\cdot\psi_k + \varphi_\perp \quad \text{(C16)}$$

と直交展開される。

（ii）η_k，ψ_kが与えられ、φ_k^+，φ_k^-が定義される補助定理1の（ii）において、式（C11）が成り立っていれば、任意の$\varphi\in\mathfrak{H}$は、

$\forall\ k\in K,\ (\varphi_\perp,\ \eta_k)=(\varphi_\perp,\ \psi_k)=0$ (C17)

を満たす$\mathfrak{H}$の元$\varphi_\perp$が存在して、

$$\varphi=\sum_{k\in K}(\varphi,\ \eta_k)\cdot\eta_k + \sum_{k\in K}(\varphi,\ \psi_k)\cdot\psi_k + \varphi_\perp \quad \text{(C18)}$$

と直交展開される。このとき、式（C6）、式（C12）が成り立つから、式（C18）は、次のように、書換えられる：

任意の$\varphi\in\mathfrak{H}$ は、

$\forall\ k\in K,\ (\varphi_\perp,\ \varphi_k^+)=(\varphi_\perp,\ \varphi_k^-)=0$ (C19)

を満たす$\mathfrak{H}$の元$\varphi_\perp$が存在して、

$$\varphi=\sum_{k\in K}(\varphi,\ \varphi_k^+)\cdot\varphi_k^+ + \sum_{k\in K}(\varphi,\ \varphi_k^-)\cdot\varphi_k^- + \varphi_\perp \quad \text{(C20)}$$

と直交展開される。

C.2　3角関数系、複素指数関数系

定理1の如き一般化はこれ迄知られていなかった。ちなみに、定理C1の典型的な適用例を挙げておこう。

周期c（＞0）の関数$\varphi=\varphi(x)\ (0\leqq x<c)$は、

$\lambda=2\pi/c$ (C21)

として、

$$\varphi(x)-c^{-1}\cdot\int_0^c dx\,\varphi(x)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cdot\cos(k\lambda x)+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\cdot\sin(k\lambda x) \tag{C22}$$

ここに、

$$a_k=(2/c)\cdot\int_0^c dy\ \varphi(y)\cos(k\lambda y) \tag{C24}$$

$$a_k=(2/c)\cdot\int_0^c dy\ \varphi(y)\cos(k\lambda y) \tag{C25}$$

と、フーリエ級数（Fourier series）に直交展開されることが良く知られている。この3式（C22），（C23），（C24）は、

$$\varphi(x)-c^{-1}\cdot\int_0^c dx\,\varphi(x)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cdot\exp(+ik\lambda x)+\sum_{k=1}^{\infty}A_{-k}\cdot\exp(-ik\lambda x) \tag{C25}$$

$$A_k\equiv c^{-1}\cdot\int_0^c dy\,\varphi(y)\exp(-ik\lambda y) \tag{C26}$$

と書き直されることが知られており、

$$(\varphi,\ \eta)=\int_0^c dx\,\varphi(x)\cdot\overline{\eta}(x) \tag{C27}$$

$$\eta_k(x)=\sqrt{2/c}\cdot\cos(k\lambda y) \tag{C28}$$

$$\psi_k(x)=\sqrt{2/c}\cdot\sin(k\lambda x) \tag{C29}$$

$$\varphi_k^{+}(x)=\sqrt{1/c}\cdot\exp(+ik\lambda x) \tag{C30}$$

$$\varphi_k^{-}(x)=\sqrt{1/c}\cdot\exp(-ik\lambda x) \tag{C31}$$

とおけば、これは、定理1そのものである。

C.3　複素数値正規直交系の構成

最後に、1次独立な実数値パターンの系列

$$\omega_1,\ \omega_2,\cdots\omega_n,\ \cdots\in\text{Hilbert space }\mathfrak{H} \tag{C32}$$

が与えられたとき、複素数値正規直交系の構成法を示しておこう。

$$\omega_1'\equiv\omega_1$$

$$\omega_2'\equiv\omega_2-(\omega_2,\omega_1'\,\|\,\omega_1'\,\|^{-1})\cdot\omega_1'\,\|\,\omega_1'\,\|^{-1}$$

$$\omega_3'\equiv\omega_3-(\omega_3,\omega_1'\,\|\,\omega_1'\,\|^{-1})\cdot\omega_1'\,\|\,\omega_1'\,\|^{-1}$$
$$-(\omega_3,\omega_2'\,\|\,\omega_2'\,\|^{-1})\cdot\omega_2'\,\|\,\omega_2'\,\|^{-1}$$

$$\omega_n'\equiv\omega_n-\sum_{j=1}^{n-1}(\omega_n,\ \omega_j'\,\|\,\omega_j'\,\|^{-1})\cdot\omega_j'\,\|\,\omega_j'\,\|^{-1}$$

(orthogonalization-process by the Gram-Schmidt)　(C33)

とおけば、直交性

$$(\omega_j',\ \omega_k')=0\ (j\neq k) \tag{C34}$$

が成立する。よって、

$$\eta_k\equiv\omega_{2k-1}'\,\|\,\omega_{2k-1}'\,\|^{-1} \tag{C35}$$

$$\psi_k\equiv\omega_{2k}'\,\|\,\omega_{2k}'\,\|^{-1} \tag{C36}$$

とし、

$\varphi_k^{+}=(\sqrt{2})^{-1}\cdot(\eta_k+i\,\psi_k)$ (C37)

$\varphi_k^{-}=(\sqrt{2})^{-1}\cdot(\eta_k-i\,\psi_k)$ (C38)

とおけば、

$\{\varphi_k^{+}\}_{k-1,2,\cdots}\cup\{\varphi_k^{-}\}_{k-1,2,\cdots}$ (C39)

は、複素数値正規直交系である。

付録D（パターンφの直交展開法における補間）

本付録では、２つの直交パターンによる展開を改良して、歪を取り除き、一層精密に、パターンのbody成分を求めることの出来る手法が研究される。この手法は、パターンモデル［19］$T\varphi$による原パターンφの近似を改良するのに役立つ。

D.1　２つの直交パターンによるパターンの展開

直交性

$(\eta,\ \psi)=0$ (D1)

を満たす２つのパターンη，ψが与えられたとしよう。

このとき、任意のパターンφは、

$\varphi=(\varphi,\ \eta\|\eta\|^{-1})\cdot\eta\|\eta\|^{-1}+(\varphi,\ \psi\|\psi\|^{-1})\cdot\psi\|\psi\|^{-1}+\varphi_\perp$

ここに、$(\varphi_\perp,\ \eta)$は$(\varphi_\perp,\ \eta)=(\varphi_\perp,\ \psi)=0$を満たすHilbert空間$\mathfrak{H}$の元 (D2)

と直交展開される。パターンφの、body成分

$S\varphi\equiv(\varphi,\ \eta\|\eta\|^{-1})\cdot\eta\|\eta\|^{-1}+(\varphi,\ \psi\|\psi\|^{-1})\cdot\psi\|\psi\|^{-1}$ (D3)

に、雑音$\varphi_\perp$が加わって、変形したパターンである式（D2）のパターンφが得られていると考えている訳である（付録Bの式（B15）を参照)。$\varphi_\perp$は、打切り誤差（truncation error）でもある。S. Suzukiの理論［13］,［14］,［19］によれば、

$|(\varphi,\ \eta\|\eta\|^{-1})|^2$, $|(\varphi,\ \psi\|\psi\|^{-1})|^2$ は各々、パターンφ内に$\eta\|\eta\|^{-1}$, $\psi\|\psi\|^{-1}$が存在している強度を表している。

ノルム最良近似関係

$\|\varphi-[(\varphi,\ \eta\|\eta\|^{-1})\cdot\eta\|\eta\|^{-1}+(\varphi,\ \psi\|\psi\|^{-1})\cdot\psi\|\psi\|^{-1}]\|^2$

$\leqq\|\varphi-[a_1\cdot\eta\|\eta\|^{-1}+a_2\cdot\psi\|\psi\|^{-1}]\|^2$

for any two complex numbers a_1 and a_2 (D4)

が成立しており、以後、このノルム最良近似関係式(D4)を改良する手法を示す。

D.2　１次独立な系に直交するパターンの構成

N＋１個の１次独立なパターンの有限集合

$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_N,\ \varphi_{N+1}$ (D5)

が与えられたとき、

$(\psi,\ \varphi_k)=0$　for　any　$k\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$ (D6)

が成り立つという意味で、各パターンφ_kに直交するパターンψは、シュミットの直交化法(Schmidt orthogonalization)を適用して、次のように構成される。

$\psi_1 = \varphi_1$
$\psi_2 = \varphi_2 - (\varphi_2,\ \psi_1 \| \psi_1 \|^{-1}) \cdot \psi_1 \| \psi_1 \|^{-1}$ (D8)
…
$\psi_1 = \varphi_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\varphi_k,\ \psi_j \| \psi_j \|^{-1}) \cdot \psi_j \| \psi_j \|^{-1}$
… (D9)
ψ_N (D10)

を構成すると、

$$\psi_{N+1} = \varphi_{N+1} - \sum_{j=1}^{N} (\varphi_{N+1},\ \psi_j \| \psi_j \|^{-1}) \cdot \psi_j \| \psi_j \|^{-1} \qquad \text{(D11)}$$

が、$\psi = \psi_{N+1}$である場合の、式(D6)を満たし、求めるものである。

以下に、式(D6)の成立を証明する。

シュミットの直交化法によれば、直交関係

$(\psi_k,\ \psi_m) = 0$ for any k, $m(k \neq m) \in \{1,\ 2,\ \cdots N+1\}$ (D12)

が成立している。それ故、先ず、

$(\psi_{N+1},\ \varphi_1) = (\psi_{N+1},\ \psi_1)$ ∵ 式(D7)
$= 0$ ∵ 式(D12) (D13)

が知れ、更に、

$(\psi_{N+1},\ \varphi_2) = (\varphi_{N+1},\ \psi_2 + (\varphi_2,\ \psi_1 \| \psi_1 \|^{-1}) \cdot \psi_1 \| \psi_1 \|^{-1})$
$= (\psi_{N+1},\ \psi_2 + \overline{(\varphi_2 \cdot \psi_1 \| \psi_1 \|^{-1})} \cdot (\psi_{N+1},\ \psi_1 \| \psi_1 \|^{-1}) = 0 + 0 = 0$ (D14)

が成立していることがわかる。

式(D9)から、

$$\varphi_k = \psi_k + \sum_{j=1}^{k-1} (\varphi_k,\ \psi_j \| \psi_j \|^{-1}) \cdot \psi_j \| \psi_j \|^{-1} \quad \text{for} \quad k \in \{2,\ \cdots,\ N+1\} \qquad \text{(D15)}$$

であるから、

$k = 2,\ 3,\ \cdots,\ N$として、

$$(\psi_{N+1},\ \varphi_k) = (\psi_{N+1},\ \varphi_k + \sum_{j=1}^{k-1} (\varphi_k,\ \psi_j \| \psi_j \|^{-1}) \cdot \psi_j \| \psi_j \|^{-1})$$
$$= (\psi_{N+1},\ \psi_k) + \sum_{j=1}^{k-1} \overline{(\varphi_k,\ \psi_j \| \psi_j \|^{-1})} \cdot (\psi_{N+1},\ \psi_j \| \psi_j \|^{-1})$$

$= 0 + 0 = 0$ ∵ 式(D12) (D16)

を得て、

$(\psi_{N+1},\ \varphi_k) = 0$ for any $k \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$ (D17)

がわかり、よって、

$\psi = \psi_{N+1}$ (D18)

が求めるものである。

D.3　2つの直交パターン間の多段階交換

直交式(D1)が成立している条件のもとで、

$\eta' \equiv \eta \| \eta \|^{-1} \cdot \psi' \equiv \psi \| \psi \|^{-1}$ (D19)

とし、そのノルム $\| \eta' \|$ が1のパターン η'と、同様な今1つのパターン ψ'とが任意に、与えられた場合、

$\psi_k|_{k=0} \equiv \eta' \to \psi_1 \to \psi_2 \to \cdots \to \psi_k|_{k=N} \equiv \psi'$ (D20)

と変換出来ることを示す。

ψ_k

$\equiv \eta \| \eta \|^{-1} \cdot \cos((\pi/2)\cdot(k/N)) + \psi \| \psi \|^{-1} \cdot$

$\sin((\pi/2)\cdot(k/N)),\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N$ (D21)

を構成してみよう。

そうすると、

$\psi_k|_{k=0} = \eta \| \eta \|^{-1}$ (D22)

$\psi_k|_{k=N/2} = \eta \| \eta \|^{-1} \cdot \cos(\pi/4) + \psi \| \psi \|^{-1} \cdot \sin(\pi/4)$

$= (\sqrt{2}/2)\cdot(\eta \| \eta \|^{-1} + \psi \| \psi \|^{-1})$ (D23)

$\psi_k |_{k=N} = \psi \| \psi \|^{-1}$ (D24)

が成立することが直ちに、わかる。

因みに、整数Nを十分大に選んでおくと、各ψ_k間に、近似的に、最大相関性

$(\psi_k,\ \psi_m) \fallingdotseq 1\ (k \neq m)$ (D25)

が成立していることを証明しておこう。

$\forall k \in \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N\},\ \| \psi_k \|^2 = (\psi_k,\ \psi_k) =$

$\cos^2((\pi/2)\cdot(k/N)) \cdot \sin^2((\pi/2)\cdot(k/N)) = 1$ (D26)

に注意する。また、

$(\psi_k,\ \psi_m)$

$= \cos((\pi/2)\cdot(k/N)) \cdot \cos((\pi/2)\cdot(m/N))$

$\sin((\pi/2)\cdot(k/N)) \cdot \sin((\pi/2)\cdot(m/N))$

$= \cos((\pi/2)\cdot\ [(m-k)/N]\ )$ (D27)

を得、公式

変数xの値が十分小さい値をとるとき、

$\cos x \fallingdotseq 1 - (x^2/2) + (x^2/24)$ (D28)

を適用すれば、

$|(m-k)/N|$が十分小のときの評価

$|(\psi_k,\ \psi_m)|2 = \cos^2((\pi/2)\cdot\ [(m-k)/N]\ )$

$\fallingdotseq 1 - \{((\pi/2)\cdot\ [(m-k)/N]\ )^2/2\}$

$+ \{((\pi/2)\cdot\ [(m-k)/N]\ )^2/24\}$ (D29)

を得、式（D25）が成立することがわかった。

D.4　ノルム最良近似関係の改良

先ず、直交式(D1)が成立している条件のもとで、整数Nを十分大に選び、式(D21)のψ_kを構成しよう。

得られた式（D21）のψ_kを基に、連立１次方程式

$\sum_{k=0}^{N} a_k(\varphi)\cdot(\varphi_k,\ \varphi_m) = (\varphi,\ \varphi_m),\ m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N$ (D30)

を用意し、これを解き、未知係数$a_k(\varphi)$の組$a(\varphi) \equiv \{a_k(\varphi)\}_{k=0\sim N}$を求める。

このとき、パターンφの１次展開式

$$\varphi=\sum_{k=0}^{N} a_k(\varphi)\cdot\psi_k+\varphi_\perp \qquad \text{(D31)}$$

ここに、$\varphi_\perp$は、

$\forall k\in\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N\},\ (\varphi_\perp,\ \psi_k)=0$ を満たすHilbert空間$\mathfrak{H}$の元 (D32)

が成立し、パターンφの直交展開式（D2）より精密なbody成分

$$\sum_{k=0}^{N} a_k(\varphi)\cdot\psi_k \qquad \text{(D33)}$$

が得られた。これ、即ち、式（D33）は**式（D20）の意味するところによれば**、式（D2）の**補間**(interpolation)に相等することになる。

尚、最小自乗法(method of least squares)の原理からわかるように、

$$\|\varphi-\sum_{k=0}^{N} a_k\cdot\psi_k\|^2\rightarrow \min \qquad \text{(D34)}$$

ならしめる各係数$a_k=a_k(\varphi)$は、連立1次方程式(D30)を満たすことが知られている。従って、4式(D21)～(D24)からわかるように、整数Nを十分大きく選んでおくと、2式(D4)，(D34)の間に、近似的に、

$$\|\varphi-\sum_{k=0}^{N} a_k(\varphi)\cdot\psi_k\|^2$$
$$\leqq\|\varphi-[(\varphi,\ \eta\|\eta\|^{-1})\cdot\eta\|\eta\|^{-1}+(\varphi,\ \psi\|\psi\|^{-1})\cdot\psi\|\psi\|^{-1}]\|^2$$
$$\text{for any } \varphi\in\mathfrak{H} \qquad \text{(D35)}$$

が成立することになることに注意しておこう。

付録E（a low－pass causal exponential filter 出力からヒントを得たパターン変形）

本付録Fでは、パターンφの低周波成分、高周波成分を主に、抽出する2つの作用素の和が恒等作用素となる事実に注目し、一方の成分が他方の成分より強大であれば、一方の成分に対し、他方の成分がパターンに変形をもたらしていると解釈される事実に関連した研究がなされる。

特に、2式(E39)、(E44)の$G\equiv Q^*\cdot Q$は自己共役作用素なので、S.Suzukiの提案した測度的不変量検出の理論[13]、[14]での空間回路[17]、[22]構成によるパターンモデル[19] $T\varphi$の設定において用いることができよう。

E. 1　1次元パターン$\varphi(x)$の低周波成分、高周波成分への分解

正実数aを任意に1つ選び、固定しよう。

(イ)実変数xの任意の関数$\varphi=\varphi(x)$について、表現

$$\varphi(x)$$
$$=a^{-1}\cdot\int_0^\infty dy\exp(-y/a)\cdot\varphi(x-y)$$
$$+(d/dx)\int_0^\infty dy\exp(-y/a)\cdot\varphi(x-y)$$

on condition that

$$\lim_{y\to\infty}\exp(-y/a)\cdot\varphi(x-y)=0 \quad \text{for any} \quad x\geqq 0 \qquad \text{(E1)}$$

が成り立つ[51]。**但し、文献[51]では、条件式(E1)を明示していないが。**

さて、

(ロ)　$a \to +0$のとき、

$(A\varphi)(x)$

$$\equiv a^{-1}\cdot\int_0^\infty dy\,\exp(-y/a)\cdot\varphi(x-y)\to\varphi(x)\qquad \text{for any}\quad x\geqq 0$$

(ハ) $a\to+\infty$のとき、

$(B\varphi)(x)$

$$\equiv(d/dx)\int_0^\infty dy\,\exp(-y/a)\cdot\varphi(x-y)\to\varphi(x)\qquad \text{for any}\quad x\geqq 0$$

が、条件式(E1)のもとで成立ち、式(イ)の前半$A\varphi$、後半$B\varphi$は、各々、パターン$\varphi(x)$の低周波成分(body成分)、高周波成分(edge成分)を主として、抽出する役目を持っている。パターン$\varphi(x)(x\geqq 0)$の、パラメータa付き変形は、$A\varphi$，$B\varphi$のいずれとも考えられる。

実は、作用素論的には、条件式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,|\varphi(x)|^2<\infty \qquad \text{(E2)}$$

が成り立っている場合、

(ニ) $a^{-1}\cdot[a^{-1}+i(i^{-1}d/dx)]^{-1}\varphi(x)$

$=(A\varphi)(x)$　for　any　$x\in R$(実数全体の集合)

(ホ) $i(i^{-1}d/dx)[a^{-1}+i(i^{-1}d/dx)]^{-1}\varphi(x)$

$=(B\varphi)(x)$　for　any　$x\in R$

ここに、$i\equiv\sqrt{-1}$

と書けるのである。よって、式(イ)は、

(ヘ)　$a^{-1}\cdot[a^{-1}+i(i^{-1}d/dx)]^{-1}$

$+i(i^{-1}d/dx)[a^{-1}+i(i^{-1}d/dx)]^{-1}$

$=I$ (the identity operator)

から、直ちに、証明され得ることがわかる。

更に、(ロ)は、

(ト)　$a\to+0$のとき、

$a^{-1}\cdot[a^{-1}+i(i^{-1}d/dx)]^{-1}\ \to\ I$

$i(i^{-1}d/dx)[a^{-1}+i(i^{-1}d/dx)]^{-1}\ \to\ 0$ (zero operator)

から明らかであり、また、(ハ)は、

(チ)　$a\to+\infty$のとき、

$a^{-1}\cdot[a^{-1}+i(i^{-1}d/dx)]^{-1}\ \to\ 0$

$i(i^{-1}d/dx)[a^{-1}+i(i^{-1}d/dx)]^{-1}\ \to\ I$

から明らかである。

因みに、(イ)を直接的に証明しておけば、次のようになる：　部分積分を行い、式(ロ)の$(A\varphi)(x)$は、

$(A\varphi)(x)$

$$\equiv\int_0^\infty dy\ a^{-1}\cdot\exp(-y/a)\cdot\varphi(x-y)$$

$$=-\int_0^{\infty} dy\ [(d/dy)\exp(-y/a)]\cdot\varphi(x-y)$$

$\because\quad (d/dy)\exp(-y/a)=-a^{-1}\cdot\exp(-y/a)$

$$=-[\exp(-y/a)\cdot\varphi(x-y)]_{y=0}^{y=\infty}$$

$$+\int_0^{\infty} dy\ \exp(-y/a)\cdot(d/dy)\varphi(x-y)$$

$$=\varphi(x)+\int_0^{\infty} dy\ \exp(-y/a)\cdot(d/dy)\varphi(x-y) \qquad \because\ 式(F1)$$

と変形されるが、ここで、最右辺の第２項は、

$$\int_0^{\infty} dy\ \exp(-y/a)\cdot(d/dy)\varphi(x-y)$$

$$=-\int_0^{\infty} dy\ \exp(-y/a)\cdot\{-(d/dy)\varphi(x-y)\}$$

$$=-\int_0^{\infty} dy\ \exp(-y/a)\cdot\{-(d(x-y)/dy)\cdot(d/d(x-y))\varphi(x-y)\}$$

$$=-\int_0^{\infty} dy\ \exp(-y/a)\cdot(d/d(x-y))\varphi(x-y)$$

$$=-\int_0^{\infty} dy\ \exp(-y/a)\cdot\{-(dx/d(x-y)\cdot(d/dx)\varphi(x-y)\}$$

$$=-\int_0^{\infty} dy\ \exp(-y/a)\cdot(d/dx)\varphi(x-y)$$

$$=-(d/dx)\int_0^{\infty} dy\ \exp(-y/a)\cdot\varphi(x-y)$$

$$=-(B\varphi)(x) \qquad \because\ 式(ハ)$$

であるから、

$$\varphi(x)=(A\varphi)(x)-\int_0^{\infty} dy\ \exp(-y/a)$$

$$\cdot(d/dy)\varphi(x-y)=(A\varphi)(x)+(B\varphi)(x)$$

を得て、証明が終わったことがわかる。 □

A low-pass causal exponential filterを定義する線形微分方程式は、

$(d/dt)g(t)+R/L=(1/L)\cdot f(t)$　　ここに、L，Rは正定数 (E3)

であり、この微分方程式(E3)を、初期条件

$g(t)|_{t=0}=g_0$ (E4)

の下で、解けば、

$g(t)$

$$=g_0\cdot\exp[-(R/L)\cdot t]+(1/L)\cdot\int_0^t duh(t-u)\cdot f(u) \qquad (E5)$$

ここに、$h\ (u)\ \equiv\exp[-(R/L)\cdot u]$ (E6)

となる。ここで、 (E7)

$a\equiv L/R$

とおけば、$u'=t-u$と云う座標変換を行って、

$$g(t)=g_0\cdot\exp[-t/a]$$

$$+(1/R)\cdot a^{-1}\int_0^t du\ \exp[-u/a]\cdot f(t-u) \qquad (E8)$$

と、表されることがわかる。式(イ)の表現式において、**指数項** $a^{-1}\cdot\exp(-y/a)$ が登場している意味が以上により、理解出来よう。

E.2 Hilbert空間の元としての多次元パターンの分解

$\overline{\eta}$ を η の複素共役として、内積

$$(\psi,\ \eta) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n\ \psi(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\cdot\overline{\eta}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \tag{E9}$$

を採用しよう。もちろん、ノルム $\|\eta\|$ は $\|\eta\|\equiv\sqrt{(\eta,\ \eta)}$ と導入される。

パターン η の表示座標系として、n次元直角座標系 $x=\langle x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\rangle$ を採用している訳であるが、このような $\eta=\eta(x)=\eta(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ の内、$\|\eta\|<\infty$ を満たす可測関数 η の集まりを $\mathfrak{H}$ と表す。$\mathfrak{H}$ は可分なHilbert空間である[1], [2]。

パターン $\eta\in\mathfrak{H}$ の多次元フーリェ変換

$$(F\eta)(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n) = \Pi_{j=1}^{n}(2\pi)^{-1/2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} dx_j \exp(-i\lambda_j x_j)\ \eta(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \quad ここに、i\equiv\sqrt{-1} \tag{E10}$$

を用意する[50]。フーリェ逆変換は、

$$(F^{-1}\psi)(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = \Pi_{j=1}^{n}(2\pi)^{-1/2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_j \exp(+i\lambda_j x_j)\ \psi(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n) \tag{E11}$$

と定義される。

$$\begin{aligned}&(F^{-1}\{\Pi_{j=1}^{n}[a_j^{-1}\cdot(a_j^{-1}+i\lambda_j)^{-1}+i\lambda_j\cdot(a_j^{-1}+i\lambda_j)^{-1}]\cdot(F\varphi)(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n)\})(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\\ &=[F^{-1}(F\varphi)(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n)](x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\\ &\quad=\varphi(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\quad \text{for any}\quad \varphi\in\mathfrak{H}\\ &\qquad ここに、a_j>0\quad(j=1\sim n)\end{aligned} \tag{E12}$$

が成り立つ。関数

$$g^{+}(y)=\begin{cases}0 & \text{if}\quad y<0,\\ 2^{-1} & \text{if}\quad y=0\\ 1 & \text{if}\quad y>0\end{cases} \tag{E13}$$

を導入する。次の3公式1, 2, 3に先ず、注意する。

公式1　実定数 a を $a>0$ として、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp(-i\mu y)\cdot g^{+}(y)\cdot\exp(-y/a) = [a^{-1}+i\mu]^{-1}.$$

公式2　$\|f\|<\infty$ として、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp(-i\lambda y)\cdot(i^{-1}d/dy)f(y) = \lambda\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp(-i\lambda y)\cdot f(y).$$

公式 3 (convolution)　$\| f \| < \infty \wedge \| g \| < \infty$　として、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \exp(-i\lambda z) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y) \cdot g(z-y)$$
$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp(-i\lambda y) \cdot f(y)\right]$$
$$\cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dz \exp(-i\lambda z) \cdot g(z)\right]$$

そうすると、式(E12)に3公式1，2，3を適用すると、

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$= \Pi_{j=1}^{n} [a_j^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dy_j\, g^{+}(y_j)$$
$$\cdot \exp(-y_j/a_j) + i(i^{-1}\partial/\partial x_j) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dy_j\, g^{+}(y_j) \cdot \exp(-y_j/a_j)]\, \varphi(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \cdots, x_n - y_n) \quad \text{for any} \quad \varphi \in \mathfrak{H} \tag{E14}$$

が成り立つことがわかる。

次の定義1、2は、2つの作用素X_j, Y_jを定義している。

[定義1] (作用素X_jの定義)

$$(X_j\varphi)(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$\equiv a_j^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dy_j\, g^{+}(y_j) \cdot \exp(-y_j/a_j)\, \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_j - y_j, \cdots, x_n)$$
$$= a_j^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dy_j \exp(-y_j/a_j)\, \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_j - y_j, \cdots, x_n) \qquad \square$$

[定義2] (作用素Y_jの定義)

$$(Y_j\varphi)(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$\equiv (i^{-1}\partial/\partial x_j) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dy_j\, g^{+}(y_j) \cdot \exp(-y_j/a_j)\, \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_j - y_j, \cdots, x_n)$$
$$= (i^{-1}\partial/\partial x_j) \cdot \int_{0}^{+\infty} dy_j \cdot \exp(-y_j/a_j)\, \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_j - y_j, \cdots, x_n) \qquad \square$$

そうすると、式(E14)より、

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$\equiv \Pi_{j=1}^{n} ([X_j + i Y_j]\varphi)(x^1, x^2, \cdots, x^n) \tag{E15}$$

が成り立つことがわかる。

形式的には、$a_j > 0$として、

$$X_j = a_j^{-1} \cdot [a_j^{-1} + i(i^{-1}\partial/\partial x_j)]^{-1}$$
$$= a_j^{-1} \cdot [a_j^{-1} + \partial/\partial x_j]^{-1} \tag{E16}$$
$$Y_j = (i^{-1}\partial/\partial x_j)[a_j^{-1} + i(i^{-1}\partial/\partial x_j)]^{-1}$$
$$= (i^{-1}\partial/\partial x_j) \cdot [a_j^{-1} + \partial/\partial x_j]^{-1} \tag{E17}$$
$$\therefore \quad X_j + i Y_j = I \tag{E18}$$

から、式(E15)の成立がわかる。

因みに、微分作用素

$$H \equiv i^{-1}\partial/\partial x_j, \quad \text{ここに} \quad i \equiv \sqrt{-1} \tag{E19}$$

は自己共役作用素であり、

$(H\varphi)(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) =$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 (2\pi)^{-1/2} \cdot \exp(+i x_1 y_1) \cdots$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy_j \ y_j \cdot (2\pi)^{-1/2} \exp(+i x_j y_j) \cdots$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy_n (2\pi)^{-1/2} \cdot \exp(+i x_n y_n) \cdot$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 (2\pi)^{-1/2} \exp(-i z_1 y_1) \cdots$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz_j (2\pi)^{-1/2} \exp(+i z_j y_j) \cdots$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz_n (2\pi)^{-1/2} \exp(+i z_n y_n) \varphi(z_1, \cdots, z_j, \cdots, z_n) \tag{E20}$$

とスペクトル表現されるから、

$$\varphi = Y_j^* \cdot Y_j \eta \tag{E21}$$

ここに、Y_j^*はY_jの共役作用素であり、

$$Y_j^* = (i^{-1}\partial/\partial x_j)[a_j^{-1} - i(i^{-1}\partial/\partial x_j)]^{-1} \tag{E22}$$

と置けば、パターン変形方程式

$$-(\partial^2/\partial x_j^2)\varphi + a_j^{-2}\varphi = -(\partial^2/\partial x_j^2)\eta \tag{E23}$$

が得られ、これは、パターンφからパターンηへの変形過程

$$\text{“}\varphi \to \eta\text{”} \tag{E24}$$

を意味する。

$$(X_j\varphi)(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (a_j \to +0) \tag{E25}$$

が成立ち、正実数パラメータa_jを固定した下では、

作用素X_jは、パターンφのフーリェ変換像

$(F\varphi)(\lambda_1, \cdots, \lambda_j, \cdots, \lambda_n)$の、不等式

$$|\lambda_j| < a_j^{-1} \tag{E26}$$

を満たす角周波数成分を主として、抽出する役割を演じる。また、

$$(Y_j\varphi)(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \ (a_j \to +\infty) \tag{E27}$$

が成立ち、正実数パラメータa_jを固定した下では、

作用素Y_jは、パターンφのフーリェ変換像

$(F\varphi)(\lambda_1, \cdots, \lambda_j, \cdots, \lambda_n)$の、不等式

$$a_j^{-1} < |\lambda_j| \tag{E28}$$

を満たす角周波数成分を主として、抽出する役割を演じる。

E.3　1次元パターン$\varphi(x)$に関するエネルギー作用素

内積(ψ, η)、ノルム$\|\eta\|$を、

$$(\psi, \eta) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \psi(x) \cdot \overline{\eta}(x) \tag{E29}$$

$$\|\eta\| \equiv \sqrt{(\eta, \eta)}$$

とするヒルベルト空間$\mathfrak{H} = L_2(R;dx)$を想定し、$\|\eta\| < \infty$を満たすパターンηのみを処理の対象としよう。

2公式

$$\int_{-\infty}^{0} dy\,\exp(-i\lambda y)\exp(y/q)$$
$$=[q^{-1}-i\lambda]^{-1}$$
$$\int_{0}^{\infty} dy\,\exp(-i\lambda y)\exp(y/q) \qquad \text{(E30)}$$
$=[q^{-1}+i\lambda]^{-1}$, ここに、qは正実数 (E31)

に注意する。作用素

$$Q\equiv[q^{-1}+i(i^{-1}d/dx)]^{-1}=[q^{-1}+(d/dx)]^{-1} \qquad \text{(E32)}$$

を導入する。作用素

$$H\equiv i^{-1}d/dx \qquad \text{(E33)}$$

は自己共役作用素であり、

$$(H\varphi)(x)=$$
$$(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\,\exp(+i\lambda x)\cdot\lambda\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} dy\,\exp(-i\lambda x)\varphi(y) \qquad \text{(E34)}$$

とスペクトル表現されるから、Qの共役作用素Q^*は、

$$Q^*\equiv[q^{-1}-i(i^{-1}d/dx)]^{-1}=[q^{-1}-d/dx]^{-1} \qquad \text{(E35)}$$

であることに注意する。そうすると、式(E31)から、$(Q\varphi)(x)$は具体的に、

$$(Q\varphi)(x)$$
$$=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\,\exp(+i\lambda x)\cdot[q^{-1}+i\lambda]^{-1}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} z\,\exp(-iz\lambda)\varphi(z)$$
$$=\int_{0}^{\infty} dy\,\exp(-y/q)\cdot\varphi(x-y) \qquad \text{(E36)}$$

と表され、更に、式(E30)から、Qの共役作用素Q^*も具体的に、

$$(Q^*\varphi)(x)$$
$$=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\,\exp(+i\lambda x)\cdot[q^{-1}-i\lambda]^{-1}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} dz\,\exp(-iz\lambda)\varphi(z)$$
$$=\int_{-\infty}^{0} dy\,\exp(y/q)\cdot\varphi(x-y) \qquad \text{(E37)}$$

と表される。式(E32)のQを歪作用素と想定すると、

パターン$\varphi=Q\eta\in\mathfrak{H}=L_2(R;dx)$のエネルギーとしてのノルムの自乗$\|\varphi\|^2$は、

$$\|\varphi\|^2=(Q\eta,\ Q\eta)=(Q^*\cdot Q\eta,\ \eta) \qquad \text{(E38)}$$

と表現され(付録AのA.3節を参照)、この式(E38)に登場した**エネルギー作用素**$G\equiv Q^*\cdot Q$は、

$$(G\varphi)(x)\equiv(Q^*\cdot Q\varphi)(x)$$
$$=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\,\exp(+i\lambda x)\cdot[(q^{-1})^2+\lambda^2]^{-1}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} dy\,\exp(-iy\lambda)\varphi(y)$$
$$=\int_{-\infty}^{0} dz\,\exp(z/q)\cdot\int_{0}^{\infty} dy\,\exp(-y/q)\cdot\varphi(x-z-y) \qquad \text{(E39)}$$

と表されることになる。

式(E39)の表現は次のようにして求められる：

$$f(\lambda)=[q^{-1}+i\lambda]^{-1} \qquad \text{(E40)}$$

とすれば、2式(E33),(E34)の自己共役作用素Hを用いて、2式(E36),(E37)から、Q, Q^*はHの関数として、

$Q = f(H),\ Q^* = \overline{f}(H)$ ここに、f は f の複素共役 (E41)

と表され、

$h(\lambda) = f(\lambda) \cdot f(\lambda) = |f(\lambda)|^2$ (E42)

として、自己共役作用素 $Q^* \cdot Q$ は

$Q^* \cdot Q = h(H)$ (E43)

と表されることを使えば、式 (E39) が得られる。

公式 3 の両辺にフーリェ逆変換を適用すれば、次の公式 4 が成り立つ。

公式 4　条件 $\| f \| < \infty \wedge \| g \| < \infty$ の下で、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy\ f(y) \cdot g(x-y)$$
$$= (2\pi)^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \exp(+i\lambda x) \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dy\ \exp(-i\lambda y) \cdot f(y)\right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp(-i\lambda z) \cdot g(z)\right]$$

ならば、式(E39)の $G = Q^* \cdot Q$ は、実は、

$(G\varphi)(x) = (Q^* \cdot Q\varphi)(x)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dy\ 2q \cdot \exp(-q^{-1}|y|) \cdot \varphi(x-y) \quad \text{(E44)}$$

と表される。

(式(E44)の証明)

$$(G\varphi)(x) = (Q^* \cdot Q\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\ f(y) \cdot \varphi(x-y) \quad \text{(E45)}$$

と表されるとすれば、公式 4 から、$f(y)$ に関し、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp(-i\lambda y) \cdot f(y)$$
$$= [(q^{-1})^2 + \lambda^2]^{-1} \quad \text{(E46)}$$

が成り立つから、フーリェ変換、そのフーリェ逆変換から、

$f(z)$

$$= (2\pi)^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \exp(+i\lambda z) \cdot [(q^{-1})^2 + \lambda^2]^{-1} \quad \text{(E47)}$$

を得て、良く知られたフーリェ変換公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \exp(+i\lambda z) \cdot [b^2 + (\lambda - m)^2]^{-1}$$
$$= (\pi/b) \cdot \exp(+imz - b|z|) \quad \text{ここに、} b > 0,\ -\infty < m < +\infty \quad \text{(E48)}$$

を適用すれば、

$f(z)$

$= (2\pi)^{-1} \cdot (\pi/q^{-1}) \cdot \exp(-q^{-1}|z|)$

$= (2q) \cdot \exp(-q^{-1}|z|)$ (E49)

と、計算され、この式(E49)を式(E45)に代入すれば、式(E44)の証明が終わったことがわかる。

以上は、容易に、多次元の場合に拡張される。

付録F(微分幾何学から眺めた、各接平面からのパターン変形)

1つの曲面、物体表面(surface)は、その曲面上の各点の近傍ではその各点の接平面で近似され得る。逆に、接平面を基準に考えると、接平面からの変形の程度がその曲面を特性付けると云える。2.5節の式[28]が式(F28)のごとく導かれることが示されている。

本付録Fでは、the familiar cartesian coordinate systm　$x = \langle x_1,\ x_2,\ x_3 \rangle$ でのパターン

$$x_3 = \varphi(x_1,\ x_2) \tag{F1}$$

の、接平面からの変形の程度を接平面、曲面間の距離として、計量化してみよう。

F.1　第1形式

微分幾何学の立場から、式(F1)で表されるパターン

$x_3 = \varphi = \varphi(x_1,\ x_2)$を、3次元位置ベクトル

$$\underline{r}(x_1,\ x_2) = x_1\underline{i} + x_2\underline{j} + x_3\underline{k}$$

ここに、$x_3 = \varphi(x_1,\ x_2)$, $\underline{i} = \langle 1,\ 0,\ 0 \rangle$,

$$\underline{j} = \langle 0,\ 1,\ 0 \rangle,\ \underline{k} = \langle 0,\ 0,\ 1 \rangle \tag{F2}$$

と同一視すると、、

$\underline{r}(x^1,\ x^2)$の終点は式（F1）の曲面を形成する

と云うことになる。

2つのベクトル

$$\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k} \tag{F3}$$

$$\underline{b} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k} \tag{F4}$$

の**スカラー積**(the scalar product of two vectors)

$$\underline{a} \cdot \underline{b} \equiv \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot b_i \tag{F5}$$

を導入しておこう。3次元ベクトル$\underline{a}$の長さ｜$\underline{a}$｜は、

$$|\underline{a}| \equiv [\underline{a} \cdot \underline{a}]^{1/2} = [\sum_{i=1}^{3} a_i^2]^{1/2} \tag{F6}$$

と定義される。

式(F1)の曲面上の**線素**(the line element) ds の自乗 ds^2 を求めてみよう。

まず、

$$\partial \underline{r}/\partial x_1 = \underline{i} + (\partial \varphi/\partial x_1)\underline{k} \tag{F7}$$

$$\partial \underline{r}/\partial x_2 = \underline{j} + (\partial \varphi/\partial x_2)\underline{k} \tag{F8}$$

に注意する。

$$E \equiv (\partial \underline{r}/\partial x_1) \cdot (\partial \underline{r}/\partial x_1) = 1 + (\partial \varphi/\partial x_1)^2$$

$$F \equiv (\partial \underline{r}/\partial x_1) \cdot (\partial \underline{r}/\partial x_2)$$

$$= (\partial \varphi/\partial x_1) \cdot (\partial \varphi/\partial x_2)$$

$$G \equiv (\partial \underline{r}/\partial x_2) \cdot (\partial \underline{r}/\partial x_2) = 1 + (\partial \varphi/\partial x_2)^2 \tag{F9}$$

として、

$$d\underline{r} = (\partial \underline{r}/\partial x_1) \cdot dx_1 + (\partial \underline{r}/\partial x_2) \cdot dx_2 \tag{F10}$$

であるから、

$$ds^2 \equiv d\underline{r}\cdot d\underline{r}$$
$$= E\cdot dx_1^2 + 2F\cdot dx_1 dx_2 + G\cdot dx_2^2$$
$$= [1+(\partial\varphi/\partial x_1)^2]\cdot dx_1^2 + 2[(\partial\varphi/\partial x_1)\cdot(\partial\varphi/\partial x_2)]\cdot dx_1 dx_2$$
$$+[1+(\partial\varphi/\partial x_2)^2]\cdot dx_2^2 \qquad \text{(F11)}$$

で与えられる：

Equation ds^2 is called the first fundamental form for the surface $\underline{r}=\underline{r}(x_1,\ x_2)$.

G.2　第 2 形式

式(F1)の $x_3=\varphi(x_1,\ x_2)$に注意すれば、

The vectors $(\partial\underline{r}/\partial x_1)$ and $(\partial\underline{r}/\partial x_2)$ are tangent vectors to the surface $\underline{r}(x_1,\ x_2)$ along the x1 and x_2 parametric curves, respectively

であるから、点〈x_1, x_2, x_3〉での、surface $\underline{r}(x_1,\ x_2)$上の**単位法線ベクトル**(the unit normal to the surface) $\underline{n}$は、

$$\underline{n}\equiv\underline{n}(x_1,\ x_2)=(\partial\underline{r}/\partial x_1)\times(\partial\underline{r}/\partial x_2)$$
$$/|(\partial\underline{r}/\partial x_1)\times(\partial\underline{r}/\partial x_2)| \qquad \text{(F12)}$$

で与えられる。ここに、2 式(F3)，(F4)の 2 つのベクトル $\underline{a}$，$\underline{b}$の**ベクトル積**(the vector product of two vectors)

$$\underline{a}\times\underline{b}\equiv\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(F13)}$$

が導入されている。

式(F12)の n を計算しよう。

$$(\partial\underline{r}/\partial x_1)\times(\partial\underline{r}/\partial x_2)$$
$$=\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & \partial\varphi/\partial x_1 \\ 0 & 1 & \partial\varphi/\partial x_2 \end{vmatrix}$$
$$=(-\partial\varphi/\partial x_1)\,\underline{i}+(\partial\varphi/\partial x_2)\,\underline{j}+\underline{k} \qquad \text{(F14)}$$

を得、

$$|(\partial\underline{r}/\partial x_1)\times(\partial\underline{r}/\partial x_2)|$$
$$=[\ (\partial\varphi/\partial x_1)^2+(\partial\varphi/\partial x_2)^2+1\,]^{1/2} \qquad \text{(F15)}$$

であるから、結局、

$$\underline{n}=[(-\partial\varphi/\partial x_1)\,\underline{i}+(\partial\varphi/\partial x_2)\,\underline{j}+k\,]$$
$$/[(\partial\varphi/\partial x_1)^2+(\partial\varphi/\partial x_2)^2+1\,]^{1/2} \qquad \text{(F16)}$$

と表される。

The quantity $e\cdot dx_1^2+2f\cdot dx_1dx_2+g\cdot dx_2^2$ is called the second fundamental form, where

$$e\equiv\underline{n}\cdot(\partial^2\underline{r}/\partial x_1^2),\quad f\equiv\underline{n}\cdot(\partial^2\underline{r}/\partial x_1\partial x_2),\quad g\equiv\underline{n}\cdot(\partial^2\underline{r}/\partial x_2^2) \qquad \text{(F17)}$$

□

3 要素 e，f，g を求めよう。

$$\partial^2\underline{r}/\partial x_1^2=(\partial/\partial x_1)(\partial\underline{r}/\partial x_1)$$
$$=(\partial^2\varphi/\partial x_1^2)\cdot\underline{k} \qquad \text{(F18)}$$

$\partial^2 \underline{r}/\partial x_1 \partial x^2 = (\partial/\partial x_1)(\partial \underline{r}/\partial x^2)$
$= (\partial^2 \varphi/\partial x_1 \partial x^2) \cdot \underline{k}$ (F19)
$\partial^2 \underline{r}/\partial x_2^2 = (\partial/\partial x_2)(\partial \underline{r}/\partial x_2)$
$= (\partial^2 \varphi/\partial x_2^2) \cdot \underline{k}$ (F20)
に注意する。
$e = (\partial^2 \varphi/\partial x_1^2)/[(\partial \varphi/\partial x_1)^2 + (\partial \varphi/\partial x_2)^2 + 1]^{1/2}$ (F21)
$f = (\partial^2 \varphi/\partial x_1 \partial x_2)/[(\partial \varphi/\partial x_1)^2 + (\partial \varphi/\partial x_2)^2 + 1]^{1/2}$ (F22)
$g = (\partial^2 \varphi/\partial x_2^2)/[(\partial \varphi/\partial x_1)^2 + (\partial \varphi/\partial x_2)^2 + 1]^{1/2}$ (F23)
と求められる。

F.3 接平面からの距離

式(F1)のsurface上の点$\underline{r}(a_1, a_2)$での接平面
(a tangent plane to the surface at the point $\underline{r}(a_1, a_2)$)
$x_3 = (\partial \varphi/\partial x_1)|_{x_1=a_1,\ x_2=a_2} \cdot (x_1 - a_1)$
$+ (\partial \varphi/\partial x_2)|_{x_1=a_1,\ x_2=a_2} \cdot (x_2 - a_2) + \varphi(a_1, a_2)$ (F24)
を構成しよう。

この接平面への、surface上の点 $r(x_1+dx_1, x_2+dx_2)$ からの**距離D(x_1, x_2)**(the distance $D(x_1, x_2)$ of a neighboring point $\underline{r}(x_1+dx_1, x_2+dx_2)$ on the surface, to the tangent plane)は、2式(F10), (F12)の$d\underline{r}(x_1, x_2)$, $\underline{n}(x_1, x_2)$を用いて、
$D(x_1, x_2) \equiv d\underline{r} \cdot \underline{n}$ (F25)
と与えられる。ここで、
$\underline{r}(x_1+dx_1, x_2+dx_2)$
$= \underline{r}(x_1, x_2) + [(\partial \underline{r}/\partial x_1) \cdot dx_1 + (\partial \underline{r}/\partial x_2) \cdot dx_2] + (1/2!) \cdot [(\partial^2 \underline{r}/\partial x_1^2)\, dx_1^2$
$+ 2(\partial^2 \underline{r}/\partial x_1 \partial x_2)\, dx_1\, dx_2$
$+ (\partial^2 \underline{r}/\partial x_2^2)\, dx_2^2]$ (F26)
であり、それ故、点$\underline{r}(x_1, x_2)$での、曲面$x_3 = (x_1, x_2)$の接平面式(F24)からの**変形の程度を与える距離**$D(x_1, x_2)$は、
$D(x_1, x_2)$
$= d\underline{r} \cdot \underline{n}$
$= (1/2!) \cdot [n \cdot (\partial^2 \underline{r}/\partial x_1^2)\, dx_1^2 + n \cdot 2(\partial^2 \underline{r}/\partial x_1 \partial x_2)\, dx_1\, dx_2$
$+ \underline{n} \cdot (\partial^2 \underline{r}/\partial x_2^2)\, dx_2^2]$
$= 2^{-1} \cdot [e \cdot dx_1^2 + 2f \cdot dx_1\, dx_2 + g \cdot dx_2^2]$ (F27)
となる。よって、式(F16)の$\underline{n}$を代入して、
$D(x_1, x_2)$
$= 2^{-1} \cdot [(\partial^2 \varphi/\partial x_1^2) \cdot dx_1^2 + 2(\partial^2 \varphi/\partial x_1 \partial x_2) \cdot dx^1 dx^2 + (\partial^2 \varphi/\partial x_2^2) \cdot dx_2^2]$
$/[(\partial \varphi/\partial x_1)^2 + (\partial \varphi/\partial x_2)^2 + 1]^{1/2}$ (F28)
と表される。

(鈴木昇一、前田英明、文教大学情報学部“情報研究 No.16”投稿論文、パターンの変形理論、投稿年月日 1995年 9 月21日)